



UNIVERSIDAD DE PamPLona  
Facultad DE CIENCIAS BÁSICAS



DePARTAMENto DE MATEMÁTICAS

Trabajo para optar al título de Matemática

---

## Taller: Serie geométrica.

---

*Autora:*

Natalia Andrea Valero Contreras  
Código: 1005012489

*Director:*

Juan Carlos López Carreño.

Pamplona

Diciembre, 2024

# Índice

|                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Progresión geométricas</b>                                                 | <b>3</b>  |
| 1.1. Monotonía de la sucesión .....                                              | 4         |
| 1.2. Suma de términos de una progresión geométrica .....                         | 5         |
| 1.2.1. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica              | 5         |
| 1.3. La regla de la potencia y las progresiones geométricas .....                | 7         |
| <b>2. Serie geométrica</b>                                                       | <b>9</b>  |
| 2.1. La Paradoja del corredor .....                                              | 9         |
| 2.1.1. Resolviendo la Paradoja con Series Geométricas .....                      | 10        |
| 2.2. Definición: Serie geométrica .....                                          | 12        |
| 2.3. Convergencia de la serie geométrica .....                                   | 12        |
| 2.4. La curva de Koch .....                                                      | 19        |
| 2.5. El triángulo de Sierpinski (1915) .....                                     | 22        |
| 2.5.1. El triángulo de Sierpinski y el triángulo de Pascal .....                 | 24        |
| 2.6. Evaluación de algunas integrales usando la serie geométrica .....           | 25        |
| 2.7. Suma de cosenos (ó senos) y la serie geométrica .....                       | 28        |
| 2.8. Una generalización de la identidad $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ..... | 29        |
| 2.9. Evaluación de algunas series usando la serie geométrica .....               | 30        |
| 2.10. Series que son parcialmente aritméticas y parcialmente geométricas. ....   | 33        |
| 2.11. Sumas de Riemann por medio de la serie geométrica .....                    | 36        |
| 2.12. Un límite especial y la serie geométrica .....                             | 38        |
| 2.13. Otras aplicaciones de la serie geométrica .....                            | 39        |
| 2.13.1. La serie p a través de la serie geométrica .....                         | 39        |
| 2.13.2. Problema 12: (Irracionalidad del número e) .....                         | 40        |
| 2.14. Un problema de la revista Crux Mathematicorum .....                        | 40        |
| <b>Referencias</b>                                                               | <b>44</b> |

# Taller: Serie geométrica.

En este taller abordaremos las series geométricas, pero antes de esto es importante comprender las progresiones geométricas.

## 1. Progresión geométricas

Podemos definir una progresión como sucesión numérica de números ordenados. A cada uno de estos números los llamamos términos: donde  $a_1$  es el primer término,  $a_2$  es el segundo término,  $a_3$  es el tercer término. . .  $a_n$  es el  $n$ -ésimo término. En especial estas progresiones son **geométricas** cuando cada término es el término anterior multiplicado por un número constante, al que llamamos razón y denotamos por  $r$ . Es decir,

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Si representamos el término en la posición  $n$  de la sucesión como  $a_n$ , es posible calcular el valor de cualquier término utilizando el primero  $a_1$  y la razón  $r$  de la sucesión, aplicando la siguiente fórmula;

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

también conocida como *fórmula del término general*.

### Ejercicio 1:

En una progresión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto es 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos.

### Ejercicio 2:

Demostrar que en cualquier progresión geométrica cuyos elementos son números positivos, cada término es la raíz cuadrada del producto de su término anterior por su término siguiente. Es decir,

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

*Sugerencia:* Calcule  $a_{n-1}$  y  $a_{n+1}$  y encuentre  $\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

## 1.1. Monotonía de la sucesión

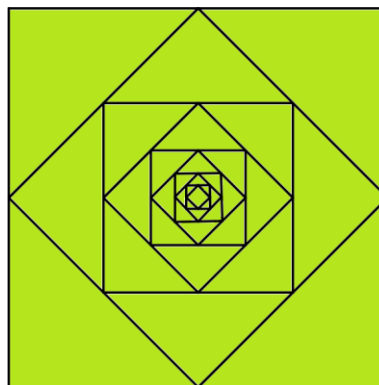
La monotonía de las sucesiones geométricas depende de la razón común  $r$  y del signo del primer término  $a_1$ . A continuación se analiza el comportamiento según estos factores:

|           |             |                    |
|-----------|-------------|--------------------|
| $a_1 > 0$ | $r > 0$     | <i>Creciente</i>   |
|           | $0 < r < 1$ | <i>Decreciente</i> |
| $a_1 < 0$ | $r > 0$     | <i>Decreciente</i> |
|           | $0 < r < 1$ | <i>Creciente</i>   |
|           | $r = 1$     | <i>Constante</i>   |
|           | $r < 0$     | <i>Alternada</i>   |

Recordemos que, en una sucesión, se dice que es **monótona creciente** si cada término es mayor o igual que el anterior, es decir,  $a_n \geq a_{n-1}$ . Es **monótona decreciente** si cada término es menor o igual que el anterior,  $a_n \leq a_{n-1}$ . La sucesión es **constante** cuando todos los términos son iguales,  $a_n = a_{n-1}$ . Por otro lado, se considera **alternada** si los términos cambian de signo de forma alternada, lo cual ocurre cuando  $r < 0$ .

### Problema 1:

En un cuadrado de lado 2 se unen los puntos medios de sus lados para obtener otro cuadrado inscrito. Se repite el proceso sucesivamente como se muestra en la figura,



Con los cuadrados obtenidos, obtenga la sucesión cuyo término  $n$ -ésimo corresponde con la longitud del lado del cuadrado  $n$ -ésimo.

#### Solución:

- Utilice el teorema de Pitágoras ( $a^2 + b^2 = c^2$ ), para calcular los lados de los cuadrados inscritos.
- De (i) determine los primeros términos de la sucesión de números que resulta de calcular los lados de los cuadrados.
- Calcule la razón  $r$  con ayuda de la formula general de la progresión y describa la monotonía de la sucesión geométrica obtenida.

(iv) Halle el término general  $a_n$  de esta sucesión.

## 1.2. Suma de términos de una progresión geométrica

### 1.2.1. Suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica

La suma de los  $n$  primeros términos consecutivos de una progresión geométrica se denota como  $S_n$ , y se define como:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Se puede calcular esta suma a partir del primer término  $a_1$  y de la razón  $r$ ,

(i) Multiplique ambos lados de la igualdad (1) por la razón  $r$ :

$$r \cdot S_n = r \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$

Simplifique el lado derecho de la ecuación, sabiendo que  $r a_n = a_{n+1}$  y obtenga la siguiente expresión.

$$r \cdot S_n = a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} \quad (2)$$

(ii) Restando las expresiones (2) y (1) determine

$$r \cdot S_n - S_n = a_{n+1} - a_1 \quad (3)$$

(iii) Factorice y despeje  $S_n$  y de la ecuación resultante de (3) y obtenga la siguiente expresión:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

### Ejercicio 3:

Calcula la suma de los primeros 5 términos de una progresión geométrica con  $a_1 = 2$  y  $r = 3$ .

### Ejercicio 4:

La suma de los tres números que están en progresión geométrica es 38, y su producto es 1728. Hallar estos números

(Sugerencia: Considere que los números son  $\frac{a}{r}$ ,  $a$ ,  $ar$ ).

### Ejercicio 5:

La suma de los 6 primeros términos de una progresión geométrica de números reales es igual a la suma de los tres primeros términos. Demuestre que  $r = 2$ , es la razón de la progresión.

### Ejercicio 6:

Hallar una progresión aritmética cuyo primer término es 1 y tal que los términos de los lugares 2, 10 y 34 formen una progresión geométrica.

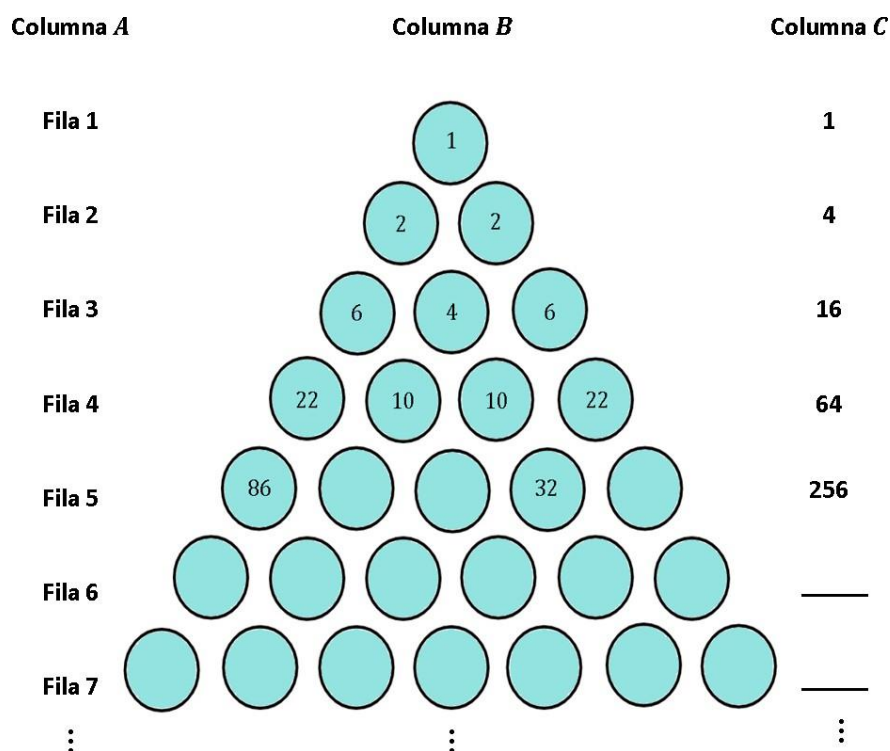
### Ejercicio 7:

Los números  $a_1, a_2, a_3$  son términos de una progresión aritmética.  $b_1, b_2, b_3$  son los primeros términos de una progresión geométrica, si

$$a_1 + b_1 = 85, \quad a_2 + b_2 = 76, \quad a_3 + b_3 = 84.$$

Encuentre los valores de  $a_i, b_i, \quad i = 1, 2, 3$

### Problema 2:



En la figura anterior, se indica en la columna B un conjunto de círculos, que van que van conformando una forma triangular. A cada fila de la columna A, le corresponde un número de la columna C.

- De acuerdo al patrón que se va formando, asigne un número en los espacios en blanco de las filas 5, 6, 7.
- Para qué fila el valor que figura en la columna C es mayor que 30,000?

### 1.3. La regla de la potencia y las progresiones geométricas

Si consideramos la función,

$$f(x) = x^q, \quad \text{donde } p, q \in \mathbb{N}, x > 0$$

nuestro objetivo es encontrar su derivada  $f'(x)$ .

Podemos recurrir a algunos libros de texto de cálculo, como; *Calculo de Purcell* [3] ó *Cálculo de Stewart* [4], que proporcionan una serie de pasos para hallar esta derivada. Veamos como lo presenta Purcell en su libro:

#### ■ Cálculo de Purcell

1. En la sección 2.3 titulada “Reglas para encontrar derivadas”, enuncia el Teorema C como la regla de la potencia, pagina 108.
2. A continuación, en la misma sección, el autor demuestra el teorema C aplicando la definición de derivada y el Teorema del binomio de Newton.
3. En la página 113, se presenta un ejemplo para demostrar la regla de la potencia para exponentes negativos ( $f(x) = x^{-n}$ ) con ayuda de la regla del cociente.
4. En la sección 2.7 de derivación implícita, el autor vuelve a enunciar de nuevo la regla para la potencia, como teorema A, demostrada con la derivación implícita.

lo curioso de este último paso, es que el mismo autor resalta un error en el argumento de la demostración, señalando que en el paso de la derivación implícita se asume el hecho de que  $f(x)$  existe y señala que es un trabajo “difícil” y sugiere consultar el Apéndice del libro para una demostración más completa.

#### ■ Cálculo de Stewart

1. Stewart en la sección 3.1 habla llamada “Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales”, presenta la función potencia y seguidamente la regla de la potencia, dada en la página 175.
2. A continuación, el autor presenta dos demostraciones de la regla, en la primera aplicando la definición de derivada y la segunda con el teorema del binomio.
3. Seguidamente, en la página 176, se hace la pregunta de qué puede decirse en caso de que las funciones de potencias con exponentes negativos, direccionando al lector al ejercicio 61 donde le pide hacer la demostración, a parir de la definición de derivada.
4. se menciona la regla de la potencia para para  $n = -1$  y  $n = \frac{1}{2}$ , para anunciar la regla de la potencia (versión general), es decir  $f'(x^n) = nx^{n-1}$

5. En la sección 3.2 de ejercicios, precisamente en el ejercicio 62, se pide al lector demostrar la regla de la potencia para números enteros negativos, utilizando la regla de del recíproco.
6. Finalmente, en la página 221 sección 3.6, llamada “derivadas de funciones logarítmicas”, se enuncia de nuevo la regla de la potencia, y se hace una demostración, utilizando derivación logarítmica.

Lo que podemos observar en los textos analizados, es que los libros presentan la regla de la potencia de manera algo compleja y en ocasiones difícil de seguir para el lector. Esto puede dificultar que se encuentre una demostración clara y entendible, lo cual es fundamental para estudiar una regla tan importante en cálculo. Por eso, en esta sección, queremos ofrecer una demostración más accesible y visualmente atractiva, utilizando progresiones geométricas;

Recordemos que la derivada de una función  $f$  en el punto  $x = a$ , viene dada por

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{con } a \neq 0 \quad (4)$$

El cambio de variable  $x = at$ , permite escribir (4) en la forma

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(at) - f(a)}{at - a} \quad (5)$$

si  $f(x) = x^q$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$  y  $x > 0$ , vamos a utilizar (5) para encontrar  $f'(a)$ :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(at)^{\frac{p}{q}} - (a)^{\frac{p}{q}}}{at - a} \\ &= \frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t)^{\frac{p}{q}} - 1}{t - 1} \end{aligned} \quad (6)$$

mediante la sustitución  $t = w^q$ , de (6) se obtiene

$$f'(a) = \frac{1}{a} \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w^p - 1}{w - 1} \quad (7)$$

teniendo en cuenta que la suma de los primeros  $n$  términos de una progresión geométrica viene dada por:

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w}$$

con  $n = p$  y  $n = q$ , la relación dada en (7) se transforma en,

$$\frac{1 - w^p}{1 - w} = \frac{1 - w^q}{1 - w} \quad \text{con } w \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= a_q^{-1} \lim_{w \rightarrow 1} \frac{(1 + w + w^2 + \dots + w^{q-1}) \cdot \frac{1}{w}}{(1 + w + w^2 + \dots + w^{q-1}) \cdot \frac{1}{w}} \\
 &= a_q^{-1} \lim_{w \rightarrow 1} \frac{(1 + w + w^2 + \dots + w^{q-1})}{(1 + w + w^2 + \dots + w^{q-1})}
 \end{aligned}$$

se observa que en el cociente anterior hay  $p$  términos en el numerador y  $q$  términos en el denominador, así, al evaluar el límite, se obtiene la siguiente expresión

$$f'(a) = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$$

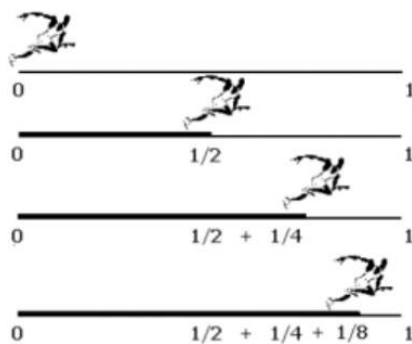
hemos mostrado de una forma interesante la regla de la potencia, con ayuda de la progresión geométrica.

## 2. Serie geométrica

Hace más de 2400 años, el filósofo griego **Zenón de Elea** (495-435 a.C.) presentó una serie de paradojas que desafiaron a los matemáticos de su época. Entre ellas se encuentra la famosa *Paradoja de la Dicotomía* o *Paradoja del corredor*, que cuestiona nuestro entendimiento del movimiento y el infinito.

### 2.1. La Paradoja del corredor

Zenón planteó que si un corredor quiere llegar a una meta, primero debe recorrer la mitad de la distancia. Luego, deberá recorrer la mitad de la distancia restante, después la mitad de lo que le queda, y así sucesivamente. Cada vez que avanza, siempre le quedará un pequeño tramo por recorrer. Zenón argumentó que, dado que hay infinitos segmentos que recorrer, el corredor nunca podrá alcanzar la meta.



Podemos expresar este razonamiento como una serie infinita de distancias decrecientes:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Cada uno de estos segmentos representa una fracción del recorrido total. ¿Qué ocurre si sumamos todas estas fracciones? Parece que la suma debería ser infinita, pero en realidad, al sumar infinitos términos cada vez más pequeños, obtenemos un resultado finito. Así resulta una paradoja: el resultado obtenido del razonamiento está en contradicción de la intuición física.

### 2.1.1. Resolviendo la Paradoja con Series Geométricas

Para resolver esta paradoja, podemos usar el concepto de una **serie geométrica**. Si suponemos que el corredor se mueve a una velocidad constante y necesita recorrer una distancia de  $T$  metros, en el primer momento del corredor ha recorrido  $\frac{T}{2}$  del total de la distancia, luego recorre  $\frac{T}{4}$  del trayecto, seguidamente recorre  $\frac{T}{8}$  del trayecto y así sucesivamente. Finalmente, cada una de las distancias realizadas por el corredor se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots + \frac{T}{2^n} \dots$$

pongamos por un momento, en el caso de  $T = 1$ , se tiene

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (8)$$

Cuando se habla de la convergencia de una serie, se refiere a que la suma de todos los términos es un número en específico. Observemos empíricamente la convergencia de (8)

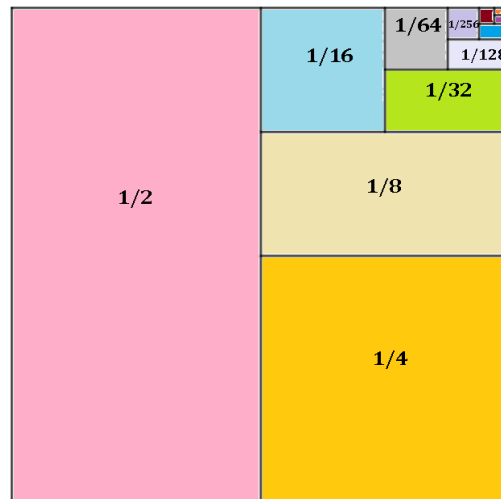
Numéricamente, algunas de las sumas parciales de esta serie son:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} = 0,5 \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875 \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375 \\ S_5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,967741935 \\ S_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0,984375 \end{aligned}$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} = \frac{4095}{4096} = 0,999755859$$

A pesar de que son pocos términos, podemos inducir que a medida que aumentan los términos de la serie, su suma se aproxima a 1, es decir, que la sucesión de las sumas parciales posiblemente converge a 1, por tanto, la serie posiblemente converge a 1.

Otra representación que permite ayudar a convencerse del resultado inducido es a través de una representación geométrica como la que se muestra en la siguiente figura, partiendo de un cuadrado de lado 1,



se puede observar, claramente que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1.$$

Para confirmar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  converge, podemos analizar su comportamiento usando una representación numérica y el concepto de límite a partir de la fórmula de las sumas parciales.

observando las sumas parciales anteriormente analizadas, es posible inducir un patrón

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Una vez que se tiene la forma general de las sumas parciales, es posible calcular el límite de estas sumas parciales para determinar el valor al que converge la serie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

Concluyendo así que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  es convergente y su suma converge a 1.

### Ejercicio 8:

Cuando se habla de una serie que diverge, esto ocurre cuando el límite de las sumas parciales no existe o cuando dichas sumas no se aproximan a un número específico. Siga el razonamiento anterior, de forma numérica y determine la forma general de las sumas parciales, para determinar la divergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n$ .

## 2.2. Definición: Serie geométrica

Las series geométricas son series de la forma:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a r^k$$

donde  $a$  es una constante diferente de cero y  $r$  es la razón común entre términos consecutivos con  $r \in \mathbb{R}$ .

## 2.3. Convergencia de la serie geométrica

El siguiente teorema que nos dice en qué casos las series geométricas convergen o divergen.

### Teorema 1:

Considerando la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

si  $|r| < 1$  la serie geométrica converge y tiene como suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + a^2 + a^3 + \dots + ar^n + \dots = a \frac{1}{1-r}.$$

Por otro lado, si  $|r| \geq 1$ , la serie diverge.

### Demostración:

Para demostrar este teorema suponemos que  $a = 1$ . Dividiremos la demostración en varios casos según el valor de  $r$ .

**Caso 1:** si  $r = 1$ , en este caso la serie se convierte en,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

esto anterior, nos indica que cada término de la serie es igual a 1. Considere las sumas parciales

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + 1 = 2$$

$$S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

:

Ahora, tomando como límite la  $(n + 1)$ -ésima suma parcial  $S_n$ , esto es,

$$S_n = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$$

tome el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  a ambos lados de la igualdad y concluya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n \rightarrow \infty.$$

Es decir, la serie geométrica, con la condición de  $a = 1$ , diverge si  $r = 1$ .

**Caso 2:** Si  $r = -1$ , en este caso, la serie se convierte en:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

considerando las sumas parciales:

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 - 1 = 0$$

$$S_2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

.

Describa cómo se comporta la secuencia de sumas parciales y justifique por qué la serie diverge en este caso.

**Caso 3:** Si  $r \neq 1$  y  $r \neq -1$ , se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots$$

Encuentre la  $(n+1)$  ésima suma parcial  $S_n$  usando la fórmula de la suma de una serie geométrica finita:

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^{n+1}) \quad (9)$$

para calcular este límite, considere los siguientes casos:

- Cuando  $|r| > 1$ , es decir  $r < -1$  ó  $r > 1$ ; y concluya que la serie diverge.

- Cuando  $|r| < 1$ , es decir  $-1 < r < 1$ , se obtiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ .

Entonces, de (9) deduzca que si  $|r| < 1$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  converge y es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r},$$

concluyendo así, que la serie converge si  $|r| < 1$  y diverge si  $|r| \geq 1$ .

Sin pérdida de generalidad, esta demostración se cumple para cualquier  $a$  constante.

### Ejercicio 9:

Muestre si las siguientes series geométricas convergen o divergen:

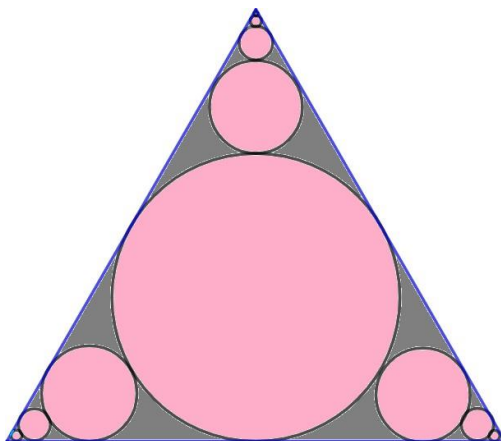
(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^n}$

(ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

(iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$

### Ejercicio 10:

La siguiente figura representa un triángulo equilátero con una infinidad de círculos, tangentes al triángulo y a los cercanos y que llegan hasta las esquinas. ¿Qué fracción del área del triángulo es ocupada por los círculos?.



### Solución:

- (i) Suponga, por conveniencia, que el círculo mayor tiene radio 1, y muestre que el triángulo tiene lados de longitud  $2\sqrt{3}$ .
- (ii) Si nos concentramos en la pila vertical de círculos, el centro del círculo mayor está a dos tercios del camino, desde el vértice superior a la base, vemos que los radios de estos círculos son:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$$

muestre que el área total de la pila vertical es  $\frac{9\pi}{8}$

- (iii) Calcule el área de todos los círculos, de donde el área es el triple del resultado anterior, menos el doble del área del círculo grande.
- (iv) Finalmente, calcule la fracción de área ocupada por los círculos, recordando que el triángulo es equilátero, de lados 2-3.

### Ejercicio 11:

Una hormiga se encuentra en el inicio de un sistema coordenado cartesiano, Recorre 64 cm en dirección del eje positivo de las ordenadas, luego gira  $90^\circ$  a la derecha y camina 32 cm, posteriormente gira  $90^\circ$  a la derecha y camina 16 cm, gira nuevamente  $90^\circ$  a la derecha y camina 8 cm, y así sucesivamente. Este patrón continua de manera indefinida. A medida que el número de vueltas que da se acerca al infinito, la hormiga se acerca a un punto  $P$ . Encuentre las coordenadas del punto  $P$  y la distancia del punto  $P$  al origen.

### Ejercicio 12:

Suponga que Pedro y Pablo se turnan para lanzar una moneda legal; gana el primero que obtenga una cara. Si Pedro lanza primero, ¿cuál es la probabilidad de que él gane?.

*Sugerencia:*

- (i) Primero defina los eventos que ocurren al primer lanzamiento.
- (ii) Plantee las probabilidades de que Pedro gane.
- (iii) Con ayuda de la serie geométrica verifique que la probabilidad de que Pedro gane es  $\frac{2}{3}$ .

Se puede decir que la serie geométrica una herramienta esencial para comprender el concepto de series convergentes y divergentes. Entender cómo y por qué las series geométricas convergen proporciona una base sólida para estudiar series más complejas e interesantes.

### Problema 3:

Sabemos que si  $|r| < 1$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  converge y está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r} \quad (10)$$

Suponga  $|r| < 1$  y sustituya  $r$  por  $r^2$  en la ecuación (10) para obtener la siguiente expresión

$$1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2n} + \dots = \frac{1}{1-r^2} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (11)$$

observe que esta serie contiene los términos con exponentes pares de (10). Para hallar la suma de las potencias impares basta con multiplicar ambos miembros de (11) por  $r$  obteniendo:

$$r + r^3 + r^5 + \dots + r^{2n+1} + \dots = \frac{r}{1-r^2} \quad \text{si } |r| < 1, \quad (12)$$

sí se sustituye  $r$  por  $-r$  en la ecuación (10), se tiene

$$1 - r + r^2 - r^3 + \dots + (-1)^n r^n + \dots = \frac{1}{1+r} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (13)$$

sustituyendo  $r$  por  $r^2$  en (13), se obtiene;

$$1 - r^2 + r^4 - r^6 + \dots + (-1)^n r^{2n} + \dots = \frac{1}{1+r^2} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (14)$$

multiplicando ambos miembros de (14) por  $r$ , resulta:

$$r - r^3 + r^5 - r^7 + \dots + (-1)^n r^{2n+1} + \dots = \frac{r}{1+r^2} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (15)$$

sí se sustituye  $r$  por  $2r$  en (11) se obtiene:

$$1 + 4r^2 + 16r^4 - r^6 + \dots + 4^n r^{2n} + \dots = \frac{1}{1-4r^2}, \quad \text{si } |2r| < 1 \quad (16)$$

evidentemente se puede construir muchos otros ejemplos de forma análoga, pero todas estas fórmulas en particular tienen la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

que se conoce como **serie de potencias**. Donde los números  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , se denominan **coeficientes** de la serie de potencias.

(i) Derivando la ecuación (10), obtenga;

$$1 + 2r + 3r^2 + \dots + n r^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-r)^2}, \quad \text{si } |r| < 1$$

(ii) Integre (13) y concluya que:

$$r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n+1} + \dots = \log(1+r)$$

(iii) Integre (14) y obtenga la siguiente relación;

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

**Nota:**

- El inciso (ii) expresa el logaritmo por medio de una serie de Potencias, descubrimiento hecho por Mercator y Brouncker (1668).
- En el ítem (iii) se obtiene la función arcotangente por medio de una serie de potencias de la función descubierta por James Gregory (1671). [1]

#### Problema 4:

Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\langle n \rangle$  representa el entero más cercano a  $\sqrt{n}$ .

Evaluar la serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\langle n \rangle} + a^{-\langle n \rangle}}{a^n}$$

- (i) Halle  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 5 \rangle$ ,  $\langle 13 \rangle$ ,  $\langle 20 \rangle$ ,  $\langle 28 \rangle$ .
- (ii) Sea  $k$  un número natural. Muestre que

$$\langle n \rangle = k, \Leftrightarrow k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k.$$

(iii) Observe que  $S$  se puede escribir como

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\langle n \rangle = k} \frac{a^{\langle n \rangle} + a^{-\langle n \rangle}}{a^n},$$

de esta manera, usando (ii) muestre que

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (a^k + a^{-k}) \sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k} \frac{1}{a^n}.$$

(iv) Demuestre que la suma finita que aparece en (iii):

$$\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{k^2-k}} - \frac{1}{a^{k^2+k}}.$$

(v) De lo obtenido en (iii) y (iv) establezca que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{k^2-k+1}}$$

$$S = \sum_{k=1} \frac{1}{a^{k^2-2k}} - \frac{1}{a^{k^2+2k}} \tilde{a}.$$

- (vi) Si  $m \in \mathbb{N}$ ,  $S_m$  corresponde a la  $m$ -ésima suma par de la serie que aparece en (v), muestre que  $S_m$  puede escribir en la forma

$$S_m = a + 1 + A_m$$

¿Cuál es la expresión para  $A_m$ ? (Sugerencia: Expresa  $S_n$  como una suma telescópica.)

- (vii) Tomando límite cuando  $m$  tiende a infinito en la expresión para  $S_m$  hallada en (vi), finalmente demuestre que

$$S = 1 + a$$

### Problema 5:

Sea  $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \dots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  Probar que si  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  entonces  $x_2 - x_1 = m\pi$ , para algún entero  $m$ .

**Solución:** Para cada  $k = 1, 2, \dots, n$  sea  $z_k$  el número complejo

$$z_k = \frac{1}{2^{k-1}} [\cos a_k + i \operatorname{sen} a_k]$$

y  $z = \cos x + i \operatorname{sen} x$ .

- (i) Muestre que

$$z_k z = \frac{1}{2^{k-1}} [\cos(a_k + x) + i \operatorname{sen}(a_k + x)]$$

- (ii) Si  $c = a + ib$  es un número complejo representamos por  $\operatorname{Re} c = a$ , la parte real de  $c$ ,

muestre que

$$f(x) = \operatorname{Re}(z(z_1 + z_2 + \dots + z_n))$$

- (iii) Observe que  $|z_k| = \frac{1}{2^{k-1}}$  utilizando la desigualdad triangular muestre que si  $z_1 = -(z_2 + z_3 + \dots + z_n)$ , entonces

$$1 \leq 1 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

desigualdad claramente falsa. ¿Qué puede concluir acerca de la suma  $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ .

- (iv) Si  $c = z_1 + z_2 + \dots + z_n = r(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$ , utilizando (ii) demuestre que

$$f(x) = r \cos(x + \phi), \quad (r \neq 0)$$

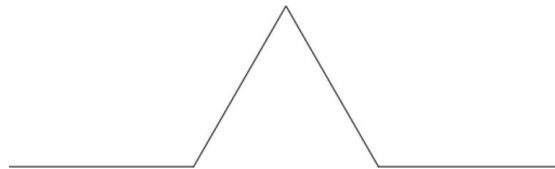
- (v) Finalmente, si  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , concluya que, debe existir un entero  $m$  tal que  $x_2 - x_1 = m\pi$

## 2.4. La curva de Koch

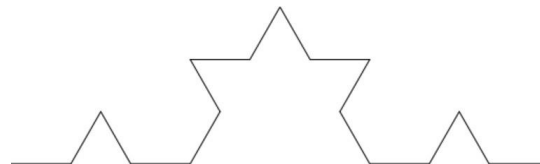
La curva de Koch es una forma geométrica datada en 1904, descrita por el matemático sueco N. F. Helge von Koch (Estocolmo 1870–1924). Es un fractal cuya construcción es relativamente sencilla, generada por una sucesión infinita de adiciones de segmentos de recta a un segmento inicial, lo cual hace que al final obtengamos una curva, esta ha dado lugar a infinitud de variantes, siendo la del copo de nieve la más característica.

### Construcción

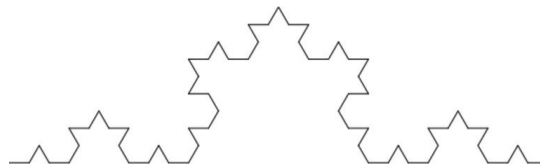
1. Para construir esta curva, comenzamos con un segmento horizontal que se divide en tres partes iguales. Luego, la sección central se reemplaza por dos segmentos de la misma longitud, unidos en un ángulo de 60 grados, de modo que forman un triángulo equilátero.



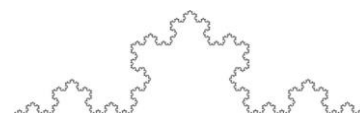
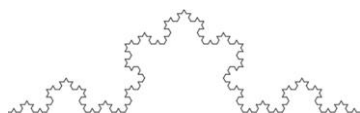
2. En la siguiente iteración, repetimos de nuevo el proceso sobre cada uno de los nuevos segmentos generados, dando lugar a 16 segmentos más pequeños:



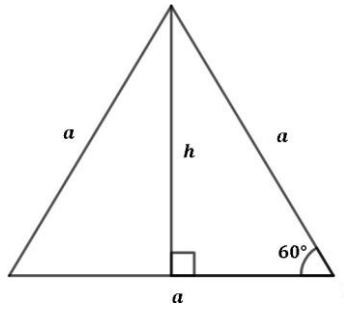
3. Así, continuamos realizando más iteraciones, subdividiendo los segmentos en cada nuevo paso. En una tercera iteración, tenemos ya 64 segmentos, ya que en cada nuevo paso estamos dividiendo cada segmento en otros 4 nuevos:



4. Así serían, respectivamente la cuarta y la quinta iteración:



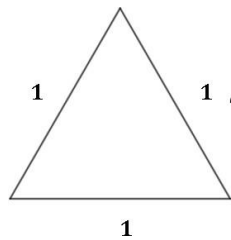
**Recuerde:** El área de un triángulo equilátero viene dada de la siguiente forma



$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{h}{a} \cdot \sqrt{3} \\ h &= a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ A &= \frac{a \cdot h}{2} \\ A &= \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

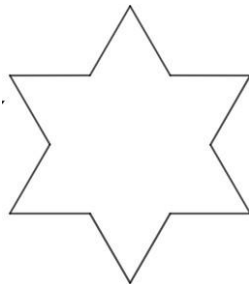
### Problema 6: Copo de nieve

Si en vez de utilizar un segmento, partimos de un triángulo de lados 1 tenemos en un momento cero el siguiente caso:



Paso 0: En este caso tenemos 3 lados

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Paso 1: Para este paso, dividimos cada segmento en tres partes iguales y en cada segmento central, formamos otro triángulo equilátero teniendo en cada lado 4 nuevos lados, para un total de 12 lados cada uno de longitud  $\frac{1}{3}$

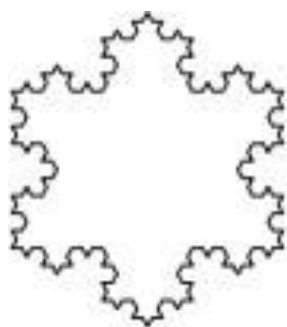
$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$



Paso 2: Vamos a tener 4 nuevos lados los en cada uno de los lados resultantes, es decir tenemos 48 lados cada uno de longitud  $\frac{1}{9}$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 12 \cdot \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Paso 3:



Vamos a tener 4 nuevos lados los en cada uno de los lados resultantes, es decir tenemos 192 lados cada uno de longitud  $\frac{1}{27}$

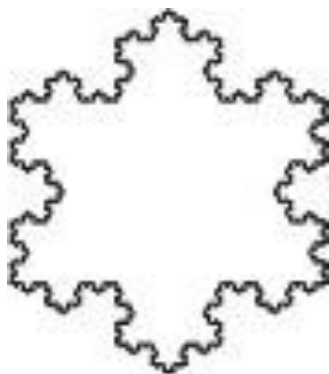
$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}}{4} + 12 \cdot \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \sqrt{3}}{4} + 48 \cdot \frac{\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27} \cdot \sqrt{3}}{4}$$

observe que podemos ir factorizando  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  en cada uno de los términos que van apareciendo en la serie, es decir,

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot \frac{1}{9} + 48 \cdot \frac{1}{27} \right)$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^3} \right)$$

i) Continuando de esta manera encuentre una expresión para  $A_n$  =?



ii) ¿Qué ocurre en (i) cuando  $n$  crece indefinidamente?, es decir, cuál es el valor de la siguiente expresión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = ?$$

iii) Observe que en la figura del paso 0, el perímetro de  $P_0 = 3$ , ahora en el siguiente paso  $P_1 = 4$ , el perímetro aumenta;

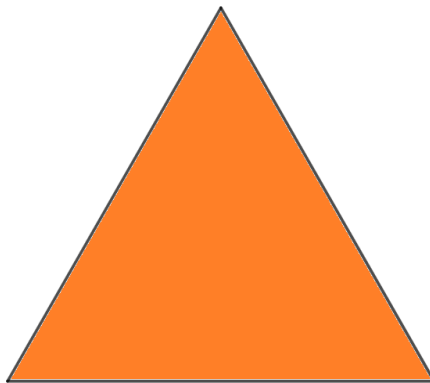
- Determine el perímetro  $P_n$  en el paso  $n$ .
- ¿Qué ocurre con el perímetro conforme  $n$  tiene a infinito?

Una curva de longitud infinita que, sorprendentemente, rodea tan solo una área finita, delicada y simétrica.

## 2.5. El triángulo de Sierpinski (1915)

El matemático polaco Waclaw Sierpinski (Varsovia 1882-1969) creó varios objetos fractales, entre ellos el conocido triángulo de Sierpinski. Este fractal puede ser obtenido por medio de una sucesión infinita de extracciones. La construcción procede como sigue:

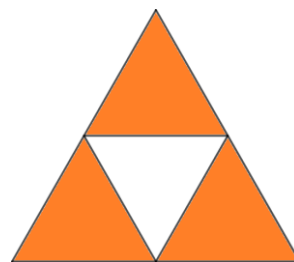
Paso 0: Se empieza con un triángulo equilátero sólido de área  $A_0$ :



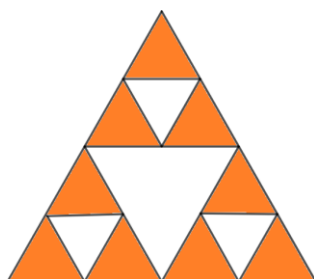
Paso 1: Divide el triángulo inicial en cuatro triángulos equiláteros más pequeños al conectar los puntos medios de sus lados, y remueve el triángulo central, dejando tres triángulos equiláteros más pequeños en las esquinas.

Se elimina 1 de estos 4 triángulos, lo que equivale a  $\frac{1}{4}$  del área inicial.

$$A_1 = \frac{3}{4}A_0$$



Paso 2: En la segunda iteración, cada uno de los 3 triángulos restantes se divide nuevamente en 4 partes, y se elimina 1 de cada conjunto.

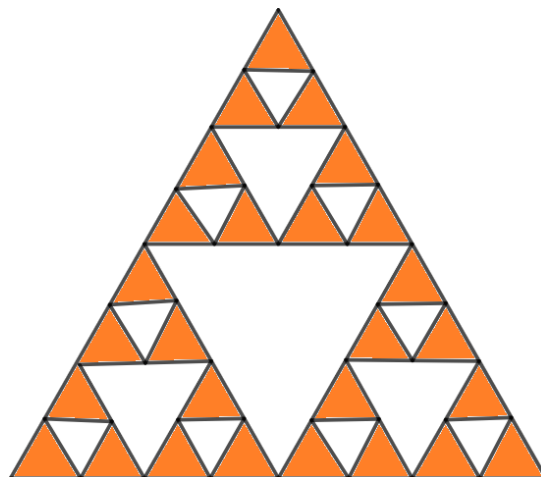


Se eliminan en total  $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  del área inicial.

$$A_2 = \frac{9}{16}A_0$$

Paso 3: Seguidamente, para los nueve triángulos restantes, se divide en 4 partes, y se elimina 1 de cada conjunto.

en este momento se eliminan  $9 \frac{1}{64}$  del área inicial, como se muestra en la figura;



Es decir, área eliminada después de la tercera iteración esta dada por

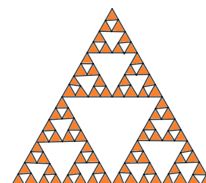
$$A_3 = \frac{1}{4}A_0 + \frac{3}{16}A_0 + \frac{9}{64}A_0$$

Paso 4: en esta interacción, se eliminan en total  $27 \frac{1}{256}$  del área inicial, es decir,

$$A_4 = \frac{1}{4}A_0 + \frac{3}{16}A_0 + \frac{9}{64}A_0 + \frac{16}{256}A_0$$

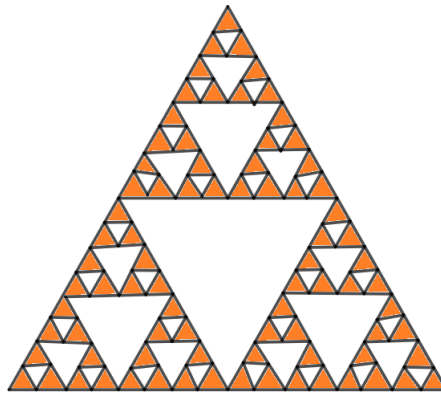
observe que

$$A_4 = A_0 \left( \frac{1}{4} + 3 \frac{1}{4^2} + 3^2 \frac{1}{4^3} + 3^3 \frac{1}{4^4} \right)$$



Siguiendo el anterior razonamiento,

- (i) Exprese la fracción total del área eliminada en todas las iteraciones dada como una serie geométrica.



- (ii) Use la fórmula de la suma infinita de una serie geométrica para calcular la suma total de las áreas eliminadas.

### 2.5.1. El triángulo de Sierpinski y el triángulo de Pascal.

Observemos la siguiente figura,

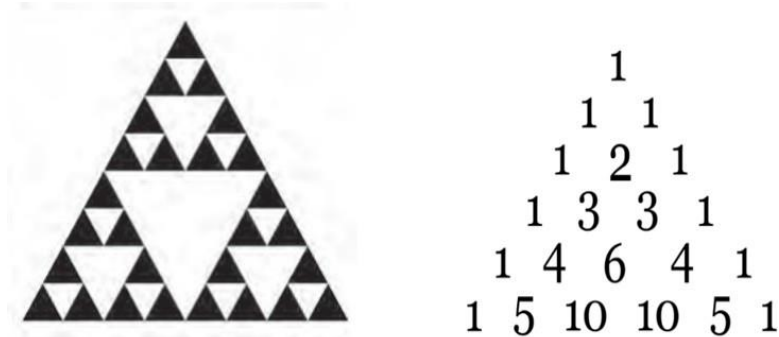
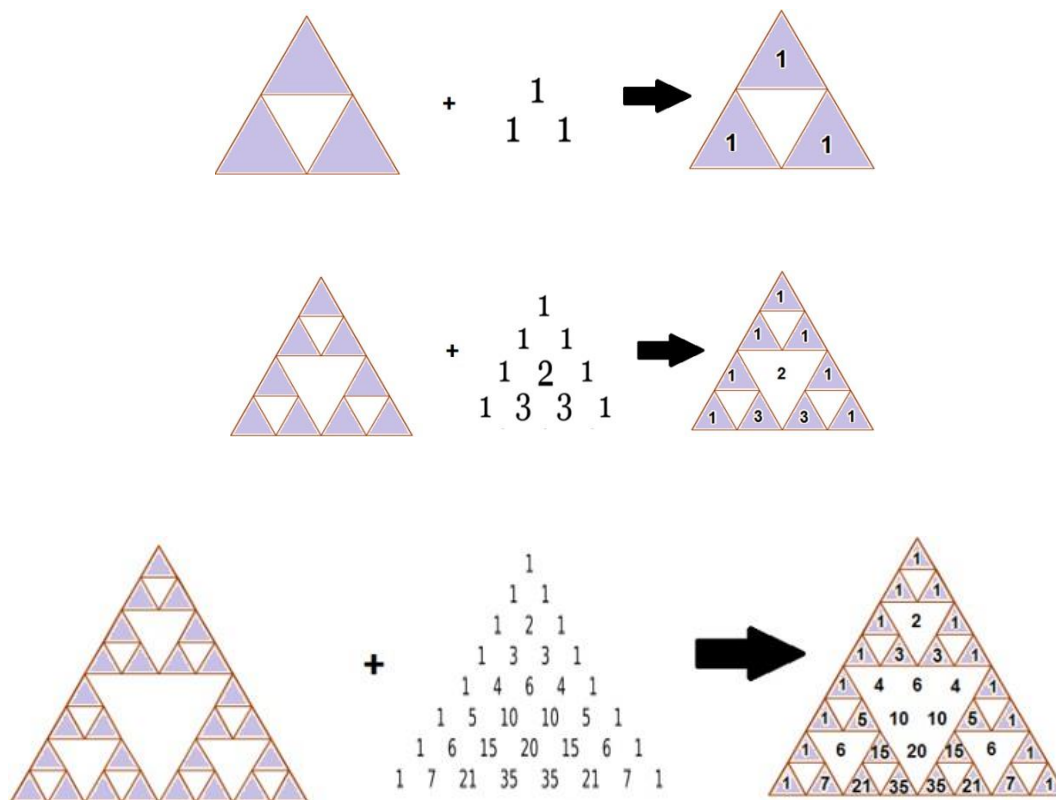


Figura 1: Triángulo de Sierpinski  $S_n$  y Triángulo de Pascal  $P_n$

¿Existe alguna relación entre estos dos triángulos?. A la izquierda, observamos el triángulo de Sierpinski, una figura geométrica construida de manera recursiva, relacionado con propiedades geométricas y a la derecha, encontramos el triángulo de Pascal, que se genera utilizando principios combinatorios, relacionado con propiedades algebraicas y combinatorias.

Veamos que pasa cuando estos dos triángulos se superponen





La propiedad que acabamos de describir puede enunciarse de la siguiente manera: "Para cualquier número natural  $n$ , el triángulo de Sierpinski  $S_n$  corresponde al triángulo de Pascal con  $2^n$  filas, eliminando los coeficientes pares".

Este resultado también nos brinda una alternativa para construir  $S_n$ . Consiste en dividir un triángulo equilátero inicial en triángulos equiláteros más pequeños, de manera que cada lado del triángulo original se subdivide en  $2^n$  partes iguales. Luego, al superponer el triángulo de Pascal con  $2^n$  filas, bastaría con resaltar únicamente los triángulos pequeños que representan los coeficientes binomiales impares.

## 2.6. Evaluación de algunas integrales usando la serie geométrica

A continuación, presentamos algunas integrales que, a primera vista, podrían parecer "complicadas". Sin embargo, nos enfocaremos en utilizar la serie geométrica para demostrar que su resolución puede ser mucho más sencilla y clara.

### Ejemplo 1:

Evaluar la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x}{\cosh x} dx$$

como  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $I$  se puede escribir como,

$$I = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + e^{-x}} dx$$

haciendo la sustitución  $t = e^{-x}$ ,  $I$  es igual a

$$I = -2 \int_0^{\infty} \frac{\log t}{1+t^2} dt$$

teniendo en cuenta la serie geométrica:

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2},$$

la integral  $I$  se transforma en

$$I = -2 \int_0^1 (\log t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

intercambiando la integral con la serie:

$$I = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{2n} \log t dt \quad (17)$$

evaluando la integral que figura en (17), mediante el método de integración por partes con  $u = \log t$  y  $dv = t^{2n} dt$ , se obtiene

$$\int_0^1 t^{2n} \log t dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

sustituyendo el valor de ésta última integral, en la fórmula (17) nos queda

$$I = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \quad (18)$$

la serie que aparece en (18) corresponde a la constante de *Catalan*, y que usualmente se nota con  $G$ , de esta manera (18) nos dice que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\cosh x} dx = 2 \cdot G$$

## Ejemplo 2:

Sea la integral

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$$

haciendo la sustitución  $t = e^{-x}$ , entonces la integral  $J$  se puede escribir como;

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\log t t^2}{1+t} \frac{dx}{t} = \int_0^{\infty} \log t \frac{t}{1+t} dx$$

teniendo en cuenta la serie geométrica:

$$1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

la integral  $J$  se transforma en

$$J = \int_0^1 (\log t) t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt$$

intercambiando la integral por la serie,

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 (\log t) t^{n+1} dt \quad (19)$$

evaluando la integral obtenida en (19), encontramos el valor de esta con el método de integración por partes, donde  $u = \log t$  y  $dv = t^{n+1} dt$ , obteniendo que

$$\int_0^1 (\log t) t^{n+1} dt = \frac{1}{(n+2)^2} \quad (20)$$

sustituyendo el valor de (20), en la expresión (19) tenemos

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 (\log t) t^{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}$$

por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-2x}}{1 + e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2} \quad (21)$$

Recordemos por un momento el *Problema de Basilea* dado por,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (22)$$

observe que,

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \\ &= \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) - \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) \\ &= \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots \right) - \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2^2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - \frac{1}{3^2} \left( 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^2}{24} - \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + 1 \right) \quad (23)$$

por otro lado, de (22) sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \\ &= \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Ahora, sustituyendo (24) en (23), se obtiene

$$J = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} + 1 = 1 - \frac{\pi^2}{12}$$

finalmente, tenemos que la integral inicial es,

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-2x}}{1 + e^{-x}} dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}$$

### Ejercicio 13:

Verificar las siguientes relaciones, utilizando la serie geométrica

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\infty} \frac{x e^{-3x}}{1 + e^{-x}} dx &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4} \\ b) \int_0^{\infty} \frac{x e^{-(2n-1)x}}{1 + e^x} dx &= -\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \\ c) \int_0^{\infty} \frac{x e^{-2nx}}{1 + e^x} dx &= -\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

## 2.7. Suma de cosenos (ó senos) y la serie geométrica

### Problema 7:

Sean  $C$  y  $S$ , la sumas:

$$C = \sum_{k=1}^n \cos(k\alpha) \quad \text{y} \quad S = \sum_{k=1}^n \sin(k\alpha)$$

(i) Teniendo en cuenta la relación de Euler:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta, \quad i^2 = -1$$

muestre que

$$C + iS = \frac{e^{(n+1)i\alpha} - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - 1} \quad (25)$$

(ii) Multiplicando numerador y denominador de (25) por  $e^{-\frac{\alpha i}{2}}$ , muestre que

$$C + iS = \frac{e^{\frac{in\alpha}{2}} - e^{-\frac{in\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}} \cdot e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha} \quad (26)$$

$$e^2 - e^{-2}$$

(iii) De la relación de Euler, establezca que

$$e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i \operatorname{sen} \vartheta,$$

y aplicando dos veces esta fórmula en la ecuación (26), demuestre que

$$C + iS = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{n+1}{2} \alpha + i \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} \alpha$$

y concluya que

$$C = \sum_{k=1}^n \cos(k\alpha) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n+1}{2} \alpha}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad (27)$$

obtenga una expresión para S.

(iv) Haciendo uso de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

Muestre que la fórmula para C, dada en el ítem (iii) se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\alpha}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}, \quad (28)$$

## 2.8. Una generalización de la identidad $\cos_3 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$ .

En el artículo una generalización de la identidad  $\cos_3 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$ , por Erik Packard y Markus Reitenbach [2], los autores demuestran el siguiente resultado:

**Teorema 2:** Sea  $n$  un número natural cualquiera. Entonces

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

En la demostración de este teorema utilizan propiedades de números complejos, la suma geométrica y otras 2 propiedades más que enuncian antes de empezar la prueba.

### Ejercicio 14:

Si en la fórmula (28) toma  $\alpha = \pi + \beta$ , y luego escoge un valor adecuado para  $\beta$ , obtenga el resultado del teorema.

### Ejercicio 15:

Demuestre que

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

## 2.9. Evaluación de algunas series usando la serie geométrica

Sea la serie

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k} = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{8} + \dots$$

**Solución:**

si consideramos la serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$$

puesto que;

$$C + iS = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx) + i \sin(kx)}{2^k} \quad (29)$$

recordando la identidad de Euler:

$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$

(30)

dado (30), podemos reescribir (29) de la siguiente forma;

$$C + iS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ik\tilde{a}_k}}{2}$$

si  $(r = \frac{e^{ix}}{2})$

$$C + iS = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = \frac{r}{1-r}$$

si  $|r| < 1$ , pero como  $|r| = \frac{|e^{ix}|}{2} = \frac{1}{2} < 1$

Así,

$$C + iS = \frac{\frac{e^{ix}}{2}}{1 - \frac{e^{ix}}{2}} = \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} = \frac{\cos x + i \sin x}{2 - \cos x - i \sin x}$$

$$C + iS = \frac{2 \cos x - 1 + i \operatorname{sen} x}{5 - 4 \cos x}$$

$$C + iS = \frac{2 \cos x - 1}{5 - 4 \cos x} + i \frac{2 \operatorname{sen} x}{5 - 4 \cos x}$$

igualando las partes reales e imaginarias, se obtiene que,

$$C + iS = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k} = \frac{2 \cos x - 1}{5 - 4 \cos x}$$

y además se obtuvo

$$C + iS = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k} = \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}$$

### Ejemplo 3:

Euler nos enseñó que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

conocido como el **problema de Basilea**.

Además, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1.$$

Para demostrar esto, consideremos que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

$$1 = A(n+1) + Bn = (A+B)n + A.$$

De aquí, al comparar coeficientes, se deduce que:

$$A = 1, \quad B = -1.$$

Así, la fracción se reescribe como:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Sea  $S_n$  la suma parcial:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Expandiendo la suma:

$$S_n = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Observamos que la serie es telescópica, por lo que los términos se cancelan,

dejando:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ahora, consideremos la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + \frac{1}{2})}.$$

Note que:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \frac{1}{n},$$

lo que implica:

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n(n + \frac{1}{2})} < \frac{1}{n^2}.$$

Sumando sobre  $n$ , obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + \frac{1}{2})} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + \frac{1}{2})} \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

### Problema 7:

Sean  $a, b$  números reales,  $a, b > -1$ , supongamos  $b > a$ . El objetivo de este problema es hallar la suma  $S(a, b)$ , donde

$$S(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}$$

(i) Si  $A > 0$ , muestre que

$$\frac{1}{A} = \int_0^{\infty} e^{-Ax} dx$$

(ii) Establezca que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right).$$

(iii) De (i) y (ii) compruebe que  $S(a, b)$  se puede escribir en la forma

$$S(a, b) = \frac{1}{b-a} \int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx.$$

(iv) Muestre que la serie infinita que aparece en la integral de (iii) es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

(v) Finalmente, de (iii) y (iv) muestre que:

$$S(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{b-a} \int_0^1 \frac{t^a - t^b}{1-t} dt, \quad \text{con } t = e^{-x}.$$

(vi) Halle el valor de las siguientes sumas, utilizando lo descrito en este problema

a)  $S(0, 1)$ .

b)  $S(0, \frac{1}{2})$ .

c)  $S(\frac{1}{2}, 1)$ .

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ .

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ .

**Respuestas:** a). (1), b).  $(4(1 - \ln(2)) \approx 1, 22741128)$ , c).  $(4 \ln(2) - 2 \approx 0, 77258)$ , d).  $(\frac{1}{2})$  y e).  $(\frac{1}{6})$

## 2.10. Series que son parcialmente aritméticas y parcialmente geométricas.

consideremos la sucesión

$$a, (a+d)r, (a+2d)r^2, (a+3d)r^3, \dots \quad (31)$$

en la cual cada término es el producto de términos correspondientes de dos sucesiones: una aritmética y una geométrica.

Nos proponemos calcular la suma de los primeros  $n$ - términos de la sucesión (31). Si representamos por  $S_n$  esta suma, entonces

$$S_n = a + (a + d)r + (a + 2d)r^2 + \dots + [a + (n - 1)d] r^{n-1} \quad (32)$$

multiplicando ambos miembros de la desigualdad (32) por  $r$ ; se obtiene

$$S_n = ar + (a + d)r^2 + (a + 2d)r^3 + \dots + [a + (n - 2)d] r^{n-1} + [a + (n - 1)d] r^n \quad (33)$$

restando (33) de (32)

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + (dr + dr^2 + \dots dr^{n-1}) - [a + (n - 1)d] r^n \\ (1 - r)S_n &= a + dr(1 + r + \dots + r^{n-2}) - [a + (n - 1)d]r^n \end{aligned} \quad (34)$$

Utilizando la fórmula para la suma de  $(n-1)$ -términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y razón  $r$ :

$$1 + r + \dots + r^{n-2} = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r},$$

de la igualdad (34) se obtiene:

$$S_n = \frac{a}{1 - r} + \frac{dr(1 - r^{n-1})}{(1 - r)^2} - \frac{[a + (n - 1)d]r^n}{1 - r}. \quad (35)$$

**Nota:** si  $|r| < 1$ , la suma  $S$  de infinitos, términos de (31) se obtiene de (35) pasando al límite:

$$S = \frac{a}{1 - r} + \frac{dr}{(1 - r)^2} \quad (36)$$

### Ejercicio 16:

Calcular la suma de los primeros  $n$ -términos de la sucesión:

$$1, \frac{4}{5}, \frac{7}{5^2}, \frac{10}{5^3}, \dots$$

(Sugerencia: el término  $n$ -ésimo es  $\frac{3n-2}{5^{n-1}}$ ).

### Ejercicio 17:

Calcular la suma de los  $n$ -términos de la serie

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots$$

Ä Rta:  $\frac{1-a^n}{(1-a)^2} - \frac{na^n}{1-a}$  ä

### Ejercicio 18:

Si  $|x| < 1$ , calcular la suma de las series

(i)  $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \dots$

(ii)  $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$

Rta: (i)  $\frac{1-x}{(1-x)^2}$  (ii)  $\frac{1}{(1-x)^3}$

### Ejemplo 4:

Los números decimales periódicos, son un buen ejemplo de las progresiones geométricas.

Encontremos el número racional equivalente al decimal  $0,3\overline{62} = 0,32626262626 \dots$

**Solución:**

$$\begin{aligned} 0,3\overline{62} &= 0,32626262626 \dots = \frac{3}{10} + \frac{26}{1000} + \frac{26}{100000} + \dots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{26}{10^3} + \frac{26}{10^5} + \dots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{26}{10^3} + 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} \dots \end{aligned}$$

utilizando la fórmula de la serie geométrica con  $r = \frac{1}{10^2}$ , se tiene

$$\begin{aligned} 0,3\overline{62} &= \frac{3}{10} + \frac{26}{10^3} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{26}{990} = \frac{323}{990} \end{aligned}$$

### Ejercicio 19:

Expresar cada uno los siguientes números decimales periódicos como una serie infinita, y encuentre su número racional equivalente;

(i)  $0,\overline{23} = 0,232323232323 \dots$

(ii)  $2,\overline{031} = 2,031031031031 \dots$

(iii)  $0,\overline{142857} = 0,142857142857142857 \dots$

### Problema 8:

Observe que cada uno de los términos de la siguiente sucesión es un cuadrado perfecto:

$$49, 4489, 444889, 44448889, \dots$$

si se continua de manera indefinida el patrón en la sucesión anterior. Demuestre que cada término es en efecto un número cuadrado perfecto.

## 2.11. Sumas de Riemann por medio de la serie geométrica

Algunas integrales definidas de funciones que se encuentran en el cálculo, se pueden calcular de una manera relativamente sencilla por medio de sumas de Riemann al considerar particiones cuyos puntos forman una progresión geométrica.

### Problema 9: (Integral del logaritmo)

Calcular, usando sumas de Riemann, la integral del logaritmo natural:

$$\int_a^b \log x \, dx = b \log b - a \log a - (b - a), \quad b > a > 0. \quad (37)$$

**Solución:**

Considere la partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$  donde

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k = ar^k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- (i) Si  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ , muestre que la suma de Riemann correspondiente a la partición  $P$ , se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = -a(1-r) (\log a) \sum_{k=1}^n r^{k-1} + (\log r) \sum_{k=1}^n k r^{k-1} \quad (38)$$

- (ii) Observe que la suma de los primeros  $n$ - términos

$$\sum_{k=1}^n r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \quad (39)$$

multiplique por  $r$ , ambos miembros de la igualdad (39), para obtener una igualdad, notela con (36) y a continuación reste miembro a miembro las igualdades (39) y (36), para obtener que,

$$\sum_{k=1}^n k r^{k-1} = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{n r^n}{1-r} \quad (40)$$

- (iii) Teniendo en cuenta que  $r^n = \frac{b}{a}$ , las igualdades (39) y (40) muestre que (38) se puede representar:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = (\log a)(b - a) + (b - a) \frac{\log r}{1 - r} + b \log \frac{b}{a}, \quad (41)$$

- (iv) Utilizando la regla de L'Hôpital muestre que

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{\log r}{1 - r} = -1$$

- (v) de (iii) y (iv), establezca la fórmula (37). Note que  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $r \rightarrow 1$ .

### Problema 10: (Integral de la potencia de x)

Si  $0 < a < b$ , el objetivo de este problema es hallar el valor de la integral definida:

$$\int_a^b x^{\frac{p}{q}} dx, \quad \text{con } p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0, \quad p \neq -q.$$

- (i) Considere  $P$  una partición del intervalo  $[a, b]$ , como la del problema anterior.
- (ii) Muestre que la suma de Riemann de la función  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ , correspondiente a la partición  $P$ , se puede escribir como:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \frac{a^\alpha (r - 1)}{r} \sum_{k=1}^n r^{\alpha k}, \quad \text{con } \alpha = \frac{p}{q} + 1$$

- (iii) Aplicando la fórmula para la suma de  $n$ -términos de una progresión geométrica, la suma de la parte (ii) toma la forma:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = (b^\alpha - a^\alpha) r^{\alpha-1} \frac{(r - 1)}{r^\alpha - 1}.$$

Observe que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 1$ . ¿Por qué?.

- (iv) El objetivo de este ítem, es mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{r - 1}{r^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha},$$

para lograrlo, se proporcionan dos caminos;

- a) Muestre que el valor de éste límite es el dado, aplicando la regla de L'Hopital.

b) Si  $p, q$  con enteros positivos, si hacemos el cambio de variable

$$r = z^q,$$

muestre que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{r^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{r - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^q - 1}{z - 1},$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{r^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{r - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^q - 1}{z - 1}$$

aplicando dos veces, la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, demuestre que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^q - 1}{z - 1} = q.$$

(v) Finalmente, de (iii) y (iv), concluya que

$$\int_a^b x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{b^{\frac{p}{q}+1} - a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q} + 1}.$$

## 2.12. Un límite especial y la serie geométrica

### Problema 11:

El objetivo de este problema es demostrar que si  $0 < a < 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a^n = 0.$$

### Solución;

Si  $m$  es un número natural, sabemos que

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{2m} = \frac{1 - a^{2m+1}}{1 - a}, \quad (43)$$

(i) Observe que

- $(1 - a^m)^2 \geq 0$ , deduzca que  $1 + a^{2m} > 2a^m$
- De la misma manera establezca que  $a + a^{2m-1} > 2a^m$
- En general, muestre que  $a^p + a^{2m-p} > 2a^m$

(ii) Agrupando convenientemente los términos de la suma del lado izquierdo de (43), muestre que

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{2m-1} + a^{2m} > (2m + 1)a^m$$

(iii) De (43) y el resultado probado en (ii), muestre que

$$(2m+1)(1-a)a^{2m+1} < a^{m+1}(1-a^{2m+1})$$

- (iv) Tomando  $2m + 1 = n$ , en la desigualdad de (iii) y tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} = 0.$$

## 2.13. Otras aplicaciones de la serie geométrica.

### 2.13.1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ a través de la serie geométrica

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , en los textos de cálculo, se demuestra que si  $p > 1$  la serie converge. A continuación, revisamos cómo este resultado se aborda en dos libros destacados:

- **Cálculo de Purcell** [3] En la página 465, dentro de la sección 9.3 titulada Series positivas: el criterio de la integral, se analiza esta serie. En el ejemplo 2, conocido como El criterio de la serie  $p$ , se demuestra la convergencia utilizando el criterio de la integral. Específicamente, se establece que la serie converge si y solo si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-p} dx$  existe (como un número finito), lo que ocurre únicamente cuando  $p > 1$ .
- **Cálculo de Stewart** [4] En el capítulo 11 del libro, llamado la prueba de la integral y estimación de sumas, en el ejemplo 2 de la página 716, se habla de los valores de  $p$  para los cuales la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  es convergente. En el caso de  $p > 0$  se refiere al capítulo 7 del libro, (sección 7.8 de integrales impropias, página 522), se da como ejemplo 4, los valores de  $p$  para los cuales la integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  es convergente, dando como resultado que es para valores  $p > 1$ .

en esta sección se hará la demostración solo usando la serie geométrica:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} + \cdots \\ &< 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{2^p} + \cdots \\ &< 1 + 2 \frac{1}{2^p} + 4 \frac{1}{4^p} + 8 \frac{1}{8^p} + \cdots \\ &< 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} < \infty \end{aligned}$$

esto es equivalente a una serie geométrica de razón  $\frac{1}{2^{p-1}}$ , que converge cuando  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ , es decir, cuando  $p > 1$ . Por lo tanto, concluimos que la serie converge.

### 2.13.2. Problema 12:(Irracionalidad del número $e$ )

Una de las maneras de definir el número  $e$ , es mediante la serie:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad (44)$$

donde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ , si  $n \geq 1$ , y  $0! = 1$ .

El objetivo del presente problema es demostrar que  $e$  es un número irracional.

Suponga que  $e$  es un número racional; es decir, suponga que existen números naturales  $m$  y  $n$  tales que

$$e = \frac{m}{n} \quad (45)$$

(i) De las igualdades (44) y (45) muestre que

$$m \cdot (n-1)! = P_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

donde  $P_n = ?$ , es un número natural.

(ii) Para  $k \in \mathbb{N}$ , con  $k > 1$ , observe que

$$\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+1},$$

(iii) De la igualdad dada en (ii) muestre que existirá un número natural  $q$  tal que,

$$0 < q < 1$$

lo que es claramente absurdo.

De esta manera  $e$  no puede ser un número racional.

### 2.14. Un problema de la revista Cruxmathematicorum.

**4951. (Crux Math).** Sea  $n$  un entero positivo. Probar que las sumas

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{n-k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{k-1}$$

son iguales y hallar su valor común.

**Solución:**

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k! (n-k)!}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(k-1)! (n-k)!}{1}$$

mediante el cambio de variable  $k - 1 = i$ ,  $S$  se puede escribir

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{i! (n-1-i)!}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{\Gamma(i+1) \Gamma(n-i)}{\Gamma(n+1)}$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma y recordando la relación de recurrencia

$$\Gamma(k+1) = k!.$$

Teniendo en cuenta la relación que existe entre la función gamma y a la función beta:

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int_0^1 t^i (1-t)^{n-1-i} dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-t)^i (1-t)^{n-1}}{(1-t)^i} dt, \quad (46)$$

pero, usando la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{1-t} = \frac{1 - \frac{(-t)^{\infty}}{1-t}}{1 - \frac{-t}{1-t}} = \frac{(1-t)^0 + (-1)^{n+1} t^n}{(1-t)^{n-1}}$$

reemplazando en (46) se tiene:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} t^n}{(1-t)^n} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^n} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{(1-t)^n} dt \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

de esta manera:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1}. \quad (47)$$

Ahora consideremos la segunda suma: haciendo  $k - 1 = j$ , se tiene:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \quad (48)$$

pero

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \int_0^1 (-x)^j dx = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \int_0^1 (-x)^j dx$$

$$\sum_{j=0}^{j+1-j} \binom{n}{j} (1)^{n-j} (-x)^j dx = \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1},$$

así reemplazando en (48)

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \zeta_n^{\frac{1}{q}} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1} \quad (49)$$

De (47) y (49) se obtiene el resultado.

**Nota:** Las sumas que aparecen en el problema admiten algunas generalizaciones.

(i) Para la segunda sumatoria, podemos considerar; con  $q \in \mathbb{Q}^+$

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j \zeta_n^{\frac{1}{q}}}{1 + qj} = \sum_{j=0}^n \zeta_n^{\frac{1}{q}} (-1)^j \int_0^1 x^{qj} dx = \sum_{j=0}^n \zeta_n^{\frac{1}{q}} \int_0^1 (-x^q)^j dx \\ &= \int_0^1 \sum_{j=0}^n \zeta_n^{\frac{1}{q}} (1)^{n-j} (-x^q)^j dx = \int_0^1 (1 - x^q)^n dx \end{aligned}$$

con el fin de evaluar la integral anterior, usamos la sustitución

$$t = x^q,$$

de esta manera

$$T = \frac{1}{q} \int_0^1 t^{\frac{1}{q}-1} (1-t)^n dt = \frac{1}{q} B\left(\frac{1}{q}, n+1\right) = \frac{1}{q} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{q} + n + 1\right)}$$

por lo tanto,

$$T = \frac{1}{q} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q} + n\right)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{q} + n + 1\right)} = \frac{1}{(1+nq)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q} + n\right)}$$

si recordamos la definición del símbolo de Pochhammer:

$$(\alpha)_m = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdots (\alpha + m - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha)},$$

$T$  se puede escribir:

$$T = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j \zeta_n^{\frac{1}{q}}}{1 + qj} = \frac{n!}{(1+nq)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{q} + n\right)}.$$

$m$

- (ii) Otra generalización natural para la segunda suma, consiste en considerar  $T_n(x)$  dada por

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \zeta_k}{k(k-1)} x^{k-1}$$

con  $x$  un número real.

Procediendo de manera análoga a la seguida para la solución del problema propuesto, al hacer  $k - 1 = j$ , se tiene:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \zeta_n^{\alpha} (-x)^j + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n+1} \quad (50)$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{j+1} = \int_0^1 t^j dt,$$

la suma en (50) se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \zeta_n^{\alpha} (-x)^j &= \sum_n \zeta_n^{\alpha} \int_0^1 (-tx)^j dt = \int_0^1 \sum_{j=0}^n \zeta_n^{\alpha} (1)^{n-j} (-tx)^j dt \\ &= \int_0^1 (1-tx)^n dt \end{aligned}$$

mediante el cambio de variable  $1-tx = w$ ,

$$\int_0^1 (1-tx)^n dt = \frac{1}{x} \int_{1-x}^1 w^n dw = \frac{w^{n+1}}{n+1} \Big|_{1-x}^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$$

así,

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \zeta_n^{\alpha} (-x)^j = \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{n+1},$$

por lo tanto, teniendo en cuenta (50), se obtiene finalmente que

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-x)^j = \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n+1}$$

es claro, que la suma correspondiente en el problema corresponde a  $x = 1$ .

Usando (2.14) y (2.14) puede obtener una expresión cerrada para la suma

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{1+qj} \zeta_n^{\alpha} x^j, \text{ con } x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^+.$$

- (iii) De manera similar es posible obtener la siguiente generalización para la primera suma del problema.

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \binom{n}{k}} x^{k-1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n + (-1)^{n+1} x^n t^n}{1 - (1-x)t} dt.$$

## Referencias

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus, Vol. 1: Introducción, con vectores y geometría analítica*. Barcelona: Reverté, 1967.
- [2] Erik Packard y Markus Reitenbach. "A generalization of the identity  $\cos(\pi/3) = 1/2$ ". En: *Mathematics Magazine* 85.2 (abr. de 2012), págs. 124-125.
- [3] Edwin J. Purcell, Dale Varberg y Steve E. Rigdon. *Cálculo*. 9.<sup>a</sup> ed. Madrid, España: Pearson Education, 2007.
- [4] James Stewart. *Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas*. 7.<sup>a</sup> ed. México, D.F.: Cengage Learning, 2011.
- [5] Tom M. Apostol. *Calculus, Introducción, con vectores y geometría analítica*. Barcelona: Reverté, 1967.
- [6] Edwin J. Purcell, Dale Varberg y Steve E. Rigdon. ed. Madrid, España: Pearson Education, 2007.
- [7] Erik Packard y Markus Reitenbach. "A generalization of the identity  $\cos(\pi/3) = 1/2$ ". (abr. de 2012), págs. 124-125.