

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

NOTAS DE CLASE: TEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

AUTOR

JAIME NICOLÁS GONZÁLEZ ROJAS

DIRECTOR

RUBÉN DARÍO SANTAELLA FORERO

PAMPLONA, 2024

Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a mi familia, quienes siempre estuvieron ahí para mí, apoyándome en todo momento. Su paciencia, comprensión y aliento han sido esenciales a lo largo de este camino. Aunque a veces las palabras no alcanzan para expresar todo lo que significan para mí, sepan que este logro también es suyo.

Quiero dedicar un agradecimiento muy especial a Evelin Gómez. Evelin no solo ha sido mi compañera, sino mi motor y mi guía en este proceso. En los momentos más difíciles, ella estuvo ahí para recordarme quién soy y por qué debía seguir adelante. Su amor y confianza en mí me han dado fuerzas para superar cada obstáculo y alcanzar metas que a veces parecían inalcanzables. Este logro lleva su nombre porque sin ella, nada de esto habría sido posible. Evelin, gracias por ser mi luz en este camino.

A la profesora Liliana Esquivel le debo mucho más que unas simples palabras de agradecimiento. Ella fue quien me impulsó a considerar la posibilidad de ser matemático, y aunque al principio fue solo una idea, con el tiempo se convirtió en una pasión que hoy define mi vida. Gracias por ser esa voz que me animó a dar el primer paso en este camino que, con mucho esfuerzo, se ha transformado en un propósito lleno de significado.

También quiero agradecer al profesor Rubén Santaella y al Departamento de Matemáticas por la oportunidad de realizar este trabajo de grado. Profesor Santaella, gracias por permitirme estar en sus clases y darme el espacio para desarrollar este proyecto. Durante este proceso, aprendí y reaprendí muchas cosas que creía saber. Fue una experiencia que me permitió no solo consolidar conocimientos, sino también descubrir nuevas perspectivas que nunca había imaginado. Gracias por confiar en mí y guiarme con paciencia y sabiduría.

A todas las personas que, de una forma u otra, estuvieron presentes en este recorrido, quiero darles las gracias. Cada palabra de aliento, cada consejo y cada gesto de apoyo significaron mucho más de lo que podrían imaginar. Este logro no es solo mío, es de todos los que creyeron en mí. Gracias por acompañarme en este sueño que hoy se hace realidad.

Índice

1. Introducción	3
2. Preliminares	5
2.1. Axiomas de Peano (Fundamentos de los Números Naturales)	5
2.2. Axiomas de Cuerpo (Propiedades Algebraicas)	6
2.3. Axiomas de Orden	9
2.4. Axioma de Completitud	16
3. Orígenes del Cálculo	18
3.1. Newton y la búsqueda de lo infinitamente pequeño	20
3.2. El enfoque de Leibniz: La visión infinitesimal del cálculo	22
4. Sucesiones	25
4.1. Criterio de Crecimiento, Decrecimiento o Constancia	28
4.2. Sucesiones Alternantes	33
4.3. Convergencias de sucesiones	34
4.4. Teorema de Bolzano-Weierstrass	39
5. Derivada de una Función	43
5.1. Cálculo de Límites de Funciones Mediante Sucesiones	44
5.2. Propiedades de los Límites	48
5.3. Continuidad	53
5.4. Reglas de Derivación	62
6. Aplicaciones de la Derivada	79
6.1. Derivación implícita	79
6.2. Razones Relacionadas	86
6.3. Problemas de Optimización	95
7. Bibliografía	106

1. Introducción

Desde los comienzos de la civilización, los números han sido una guía esencial para entender el mundo. Cada conjunto numérico ha surgido como una respuesta a problemas que en su momento parecían difíciles de resolver y como un paso hacia nuevos descubrimientos. Al principio de este recorrido estaban los **números naturales**, los primeros aliados del ser humano en su intento de poner orden a su entorno. Piensen en los antiguos pastores, que contaban sus ovejas usando piedras o marcas talladas. Con estos números naturales, representados por $\mathbb{N}$, se logró dar estructura al desorden: $1, 2, 3, \dots$. Con ellos, se podía sumar, multiplicar y registrar, asegurando que todo quedara en control. Sin embargo, pronto se hicieron evidentes sus limitaciones.

¿Qué hacer cuando no había nada que contar? La idea del cero, tan familiar hoy en día, fue una noción revolucionaria que los números naturales no podían incluir. Pero el desafío no terminaba ahí: ¿qué pasaba cuando las ovejas no solo faltaban, sino que eran prestadas o adeudadas? Para abordar estas situaciones, surgieron los **números enteros**, un conjunto que amplió los límites de $\mathbb{N}$ al incorporar el cero y los números negativos: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Con los números enteros, el comercio y la contabilidad avanzaron significativamente, permitiendo llevar un registro de deudas, calcular balances y representar la ausencia de elementos.

Sin embargo, incluso este nuevo conjunto tenía sus propios límites. ¿Qué ocurría cuando un agricultor quería dividir su cosecha en partes iguales entre tres herederos? El resultado, $1 \div 3$, no tenía cabida en $\mathbb{Z}$. Para resolver esta necesidad, se creó un nuevo conjunto que permitiera expresar divisiones y proporciones. Así nacieron los **números racionales**, $\mathbb{Q}$, que pueden expresar fracciones y proporciones como cocientes de enteros: $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Con $\mathbb{Q}$, se pudieron llenar los vacíos entre los enteros, resolviendo problemas prácticos como dividir alimentos o medir terrenos con mayor precisión.

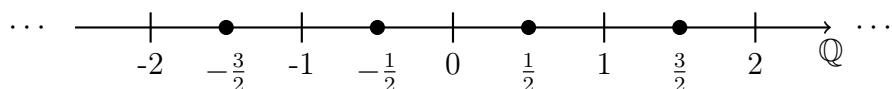


Figura 1: Representación de los números racionales, $\mathbb{Q}$, llenando los vacíos entre los enteros, $\mathbb{Z}$.

No obstante, como si el universo siempre tuviera secretos más profundos por descubrir, los griegos se dieron cuenta de que incluso este conjunto tenía límites que no podía superar. La geometría reveló un número que no pertenecía a $\mathbb{Q}$: la longitud de la diagonal de un cuadrado con lados de longitud uno. Este número, $\sqrt{2}$, fue el primero en desafiar lo que se conocía hasta entonces y marcó el nacimiento de los **números irracionales**.

Los números irracionales surgieron como un descubrimiento tan sorprendente como desconcertante. Los pitagóricos, fascinados por la armonía, descubrieron que $\sqrt{2}$ no podía escribirse

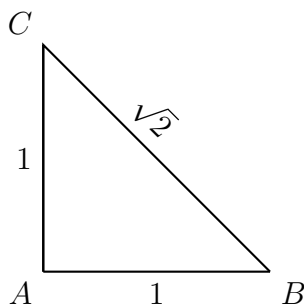


Figura 2: Triángulo rectángulo con lados de longitud 1 y $\sqrt{2}$.

como el cociente de dos enteros. Supongamos, por un momento, que $\sqrt{2}$ es racional y puede expresarse como $\frac{p}{q}$, donde p y q son primos entre sí. Entonces:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies 2q^2 = p^2.$$

Esto implica que p^2 es par, lo que significa que p también debe ser par. Si $p = 2k$, al sustituir tenemos:

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 \implies 2q^2 = 4k^2 \implies q^2 = 2k^2.$$

Esto nos dice que q^2 también es par, y por lo tanto q es par. Pero esto contradice la premisa de que p y q son primos entre sí. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es racional, sino irracional.

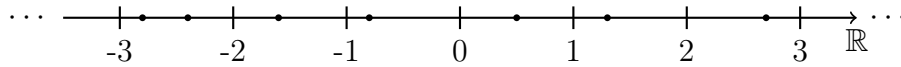
Este descubrimiento fue solo el comienzo. Los irracionales, como π y e , demostraron que existen infinitos números en la recta numérica que no pueden representarse como fracciones. Una de sus propiedades más notables es que sus decimales son infinitos y no periódicos, a diferencia de los racionales, cuyos decimales son finitos o periódicos. En este punto, quedó claro que al unir los racionales y los irracionales se formaba un conjunto más grande: **los números reales**, $\mathbb{R}$, que abarcan toda la continuidad de la recta numérica.

Los números reales son más que un conjunto matemático; son el lenguaje con el que el universo se describe. Representan el vínculo entre lo discreto y lo continuo, y son la base sobre la cual se construye gran parte de las matemáticas modernas.

Pero los números reales tienen una propiedad única que los hace especialmente poderosos: todo intervalo de números reales, sin importar cuán pequeño sea, está completo. Esto significa que dentro de cualquier intervalo siempre habrá un número real, asegurando que no existan huecos en la recta numérica. Es esta continuidad perfecta la que hace posible que conceptos como los límites y la derivada existan y funcionen con una precisión asombrosa.

Al observar la recta numérica de los reales, podemos imaginarla no como una simple línea, sino como una trama infinita y continua, donde cada punto, por pequeño que sea, contiene una inmensa cantidad de números. Gracias a esta cualidad, podemos dividir, acercarnos

Continuidad infinita



infinitamente, construir aproximaciones y confiar en que siempre habrá un número real que respalde nuestros razonamientos. Sin esta propiedad, el cálculo no tendría la base necesaria para describir el cambio, la continuidad y el infinito que vemos en la naturaleza.

Estudiar los números reales no es simplemente cumplir con una etapa del aprendizaje. Es un primer acercamiento al infinito que se esconde en lo cotidiano. En ellos se encuentra la clave para descifrar el lenguaje con el que las matemáticas describen el mundo, como si cada fórmula guardara una verdad sobre el universo. No se trata solo de entender teorías, sino de explorar un terreno donde el cálculo diferencial nos guía para comprender las leyes que organizan el caos y el orden en nuestra existencia.

2. Preliminares

Los números reales, representados como $\mathbb{R}$, son fundamentales en las matemáticas. Se utilizan para medir, contar y representar prácticamente todo lo que nos rodea. Pero, ¿qué los hace tan especiales? Su magia radica en un conjunto de reglas que dictan cómo se comportan al sumarlos, multiplicarlos, ordenarlos y mucho más. En esta sección, describiremos estas reglas, conocidas como axiomas, con los que trabajaremos con los números reales.

2.1. Axiomas de Peano (Fundamentos de los Números Naturales)

Antes de hablar de las propiedades de los números reales, es útil pensar en los números naturales ($\mathbb{N}$), esos que usamos para contar: $1, 2, 3, \dots$. Aunque son tan comunes en nuestra vida diaria, las matemáticas necesitan un conjunto de reglas precisas que definan cómo funcionan estos números. Estas reglas, conocidas como los axiomas de Peano, fueron propuestas por Giuseppe Peano en el siglo XIX y son la base sobre la que se construyen otros tipos de números.

Los axiomas de Peano nos ayudan a entender los números naturales desde un punto de vista lógico. A continuación, se explican estas reglas fundamentales:

- **El número inicial:** Existe un número especial en $\mathbb{N}$, que es el 1. Este número es el punto de partida y no tiene ningún número “anterior”.
- **El siguiente número:** Cada número natural tiene un número que viene después, conocido como su sucesor. Por ejemplo, después de 1 viene 2, después de 2 viene 3, y así sucesivamente. Esto asegura que siempre podemos seguir avanzando.

- **No hay predecesor para el número inicial:** El número 1 no es el sucesor de ningún otro número. Esto significa que 1 es único como punto de inicio.
- **Números diferentes tienen sucesores diferentes:** Si dos números tienen el mismo sucesor, entonces esos números son iguales. Por ejemplo, si el sucesor de a es igual al sucesor de b , entonces $a = b$. Esto garantiza que no haya confusiones en el orden de los números naturales.
- **El principio de inducción:** Si podemos demostrar que una afirmación es verdadera para el número 1 y también para el sucesor de cualquier número al que se aplique, entonces esa afirmación es verdadera para todos los números naturales. Este principio es una herramienta clave para trabajar con $\mathbb{N}$.

Estos axiomas pueden parecer sencillos, pero son fundamentales para entender cómo funcionan los números que usamos para contar. A partir de ellos, es posible construir otros tipos de números, como los enteros, los racionales e incluso los reales.

2.2. Axiomas de Cuerpo (Propiedades Algebraicas)

Los números reales tienen ciertas propiedades que los convierten en lo que los matemáticos llaman un cuerpo. Estas propiedades aseguran que podemos sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto por cero) sin problemas. Aquí están los detalles:

- **Propiedades de la Suma:**
 1. **Conmutatividad:** No importa en qué orden sumemos dos números reales, siempre obtenemos el mismo resultado. Es decir, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple $a + b = b + a$.
 2. **Asociatividad:** Si tenemos tres números y queremos sumarlos, no importa cómo agrupemos las operaciones, el resultado será el mismo. Por ejemplo, $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 3. **Elemento neutro:** Siempre existe un número especial, el 0, que no cambia el valor de otro número cuando lo sumamos. O sea, para todo $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$.
 4. **Inverso aditivo:** Cada número real tiene un “opuesto” que, al sumarlo, da como resultado cero. Por ejemplo, para $a \in \mathbb{R}$, existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.

Con las reglas que hemos visto hasta ahora, podemos deducir algunas **propiedades importantes** de los números reales que nos facilitan mucho el trabajo. Estas propiedades no son más que consecuencias lógicas de los axiomas y nos ayudan a entender mejor cómo operan los números cuando los sumamos o restamos.

La primera propiedad que podemos deducir es la **simplificación en la suma**. Esta idea nos dice que, si al sumar el mismo número a dos cantidades diferentes obtenemos el mismo resultado, entonces esas dos cantidades tienen que ser iguales. En otras palabras, si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. Por ejemplo, si $3 + x = 3 + 5$, al eliminar el 3 de

ambos lados, obtenemos que $x = 5$.

La siguiente propiedad nos habla de la **posibilidad de restar**. Para cualquier par de números a y b , siempre existe un número x que, sumado a a , nos da b . Este número se denota como $b - a$, y lo llamamos la resta de a a b . Por ejemplo, si $a = 3$ y $b = 7$, el número x que satisface $3 + x = 7$ es 4, y escribimos esto como $7 - 3 = 4$.

Por último, tenemos la propiedad que establece que **restar es lo mismo que sumar el opuesto**. Es decir, restar un número equivale a sumarle su inverso aditivo. Formalmente, para cualquier b y a , se cumple que:

$$b - a = b + (-a).$$

Por ejemplo, si queremos calcular $6 - 2$, podemos escribirlo como:

$$6 - 2 = 6 + (-2) = 4.$$

■ Propiedades de la Multiplicación:

1. **Conmutatividad:** Igual que con la suma, al multiplicar dos números reales, el orden no afecta el resultado. Es decir, $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
2. **Asociatividad:** Si multiplicamos tres números, el resultado será el mismo sin importar cómo agrupemos las operaciones. Por ejemplo, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. **Elemento neutro:** Hay un número especial, él 1, que no altera a otro número cuando lo multiplicamos por él. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se cumple $a \cdot 1 = a$.
4. **Inverso multiplicativo:** Excepto para el cero, cada número real tiene un “recíproco” o inverso que, al multiplicarlo, da 1. Por ejemplo, para $a \neq 0$, existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Siguiendo con las reglas que hemos deducido hasta ahora, encontramos algunas **propiedades adicionales** que surgen de los axiomas y de las operaciones de suma y multiplicación. Estas propiedades, aunque puedan parecer obvias al principio, son fundamentales y nos ayudan a trabajar con los números reales de manera ordenada y consistente.

La primera propiedad nos dice que el **negativo del negativo de un número es el número original**. Es decir, si tomamos un número a , primero su negativo $-a$, y luego el negativo de ese negativo, volvemos al punto de inicio. Formalmente, esto se expresa como:

$$-(-a) = a.$$

Por ejemplo, si $a = 3$, su negativo es -3 , pero al tomar el negativo de -3 , regresamos a 3. Esto puede parecer una simple formalidad, pero es importante porque nos asegura que el concepto de “negativo” está bien definido.

Otra propiedad importante es la que conecta la multiplicación con la resta, conocida como la **distributividad de la multiplicación respecto a la resta**. Esta propiedad establece que multiplicar un número por una diferencia es lo mismo que multiplicarlo por cada término y luego restar los resultados. Es decir:

$$a(b - c) = ab - ac.$$

Por ejemplo, si $a = 2$, $b = 5$ y $c = 3$, al multiplicar directamente obtenemos:

$$2(5 - 3) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Si aplicamos la distributividad, obtenemos lo mismo:

$$2(5) - 2(3) = 10 - 6 = 4.$$

Esta propiedad es especialmente útil cuando trabajamos con expresiones algebraicas más complejas.

Por último, tenemos una propiedad que involucra al número 0, y que nos dice que **cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0**. De manera formal, esto se escribe como:

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0.$$

Por ejemplo, si $a = 7$, multiplicar $0 \cdot 7$ nos da 0, y lo mismo ocurre si cambiamos el orden: $7 \cdot 0 = 0$. Esta propiedad puede parecer intuitiva, pero es una consecuencia lógica de las reglas de la multiplicación y del rol especial del cero en la suma.

- **Distributividad:** Esta propiedad conecta la suma y la multiplicación. Básicamente, dice que si multiplicamos un número por una suma, podemos “distribuir” la multiplicación a cada término de la suma. Es decir, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

A partir de las propiedades que ya conocemos, podemos asegurar algunas reglas adicionales que son fundamentales en el trabajo con números reales. Estas reglas no necesitan demostración aquí, pero son igual de válidas y útiles para resolver problemas.

Si multiplicamos dos números y obtenemos el mismo resultado al multiplicarlos por un tercer número distinto de cero, entonces los números originales deben ser iguales. Dicho de otra manera, si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

Ejemplo: Si $2x = 2 \cdot 5$ y sabemos que $2 \neq 0$, entonces el valor de x debe ser 5.

Otra regla importante nos dice que, para cualquier número $a \neq 0$, siempre existe un número especial llamado su inverso multiplicativo o recíproco. Este número se representa como $\frac{1}{a}$ o a^{-1} , y cumple que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Ejemplo: Si $a = 4$, su inverso multiplicativo es $\frac{1}{4}$, ya que $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

También es cierto que, si al multiplicar dos números obtenemos cero, entonces al menos uno de los números debe ser cero. En otras palabras, si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ (o ambos).

Ejemplo: Si $x \cdot 0 = 0$, esto ocurre independientemente del valor de x . Por ejemplo, $7 \cdot 0 = 0$.

Otra propiedad útil nos dice que el producto del negativo de un número con otro es igual al negativo del producto de esos números. En símbolos: $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$.

Ejemplo: Si $a = 3$ y $b = 2$, entonces $-(3 \cdot 2) = -6$, lo cual también podemos escribir como $(-3) \cdot 2 = -6$.

Si sumamos dos fracciones que tienen denominadores distintos, el resultado se obtiene al multiplicar en cruz y sumando los productos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Ejemplo: Si $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, entonces el resultado es:

$$\frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}.$$

También podemos multiplicar fracciones directamente. El producto de dos fracciones es igual a multiplicar numerador con numerador y denominador con denominador:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ejemplo: Si multiplicamos $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$, obtenemos:

$$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Por último, si dividimos dos fracciones, el resultado se obtiene multiplicando la primera fracción por el inverso de la segunda:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Ejemplo: Si queremos calcular $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$, tomamos la primera fracción y la multiplicamos por el inverso de la segunda:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

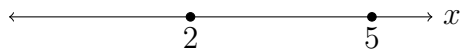
2.3. Axiomas de Orden

Antes de hablar de las propiedades que surgen del orden en los números reales, es importante recordar que existe un subconjunto especial, denotado como $\mathbb{R}^+$, que representa el conjunto de los **números positivos**. Este conjunto sigue algunas reglas básicas que son fundamentales para entender cómo funcionan las comparaciones en los números reales:

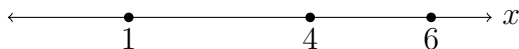
- Si x y y son números positivos, entonces su suma $x + y$ y su producto $x \cdot y$ también son números positivos.
- Para cualquier número real x distinto de cero, solo puede ocurrir una de dos cosas: o bien x es positivo ($x \in \mathbb{R}^+$) o su opuesto $-x$ es positivo ($-x \in \mathbb{R}^+$), pero no ambas a la vez.
- El número 0 no pertenece al conjunto de los números positivos.

Una de las características más importantes de los números reales ($\mathbb{R}$) es que tienen una **relación de orden**, lo que significa que podemos comparar cualquier par de números para saber si uno es menor, mayor o igual al otro. Esta comparación no solo es intuitiva, sino que sigue reglas claras que nos permiten trabajar con confianza y precisión.

La primera de estas reglas es la **tricotomía**. Esta propiedad nos asegura que, si tomamos dos números a y b , siempre ocurre exactamente una de tres cosas: o bien a es menor que b ($a < b$), a es igual a b ($a = b$), o a es mayor que b ($a > b$). Por ejemplo, si elegimos $a = 2$ y $b = 5$, claramente $2 < 5$. En la recta real, esto se puede ver fácilmente porque 2 está a la izquierda de 5:



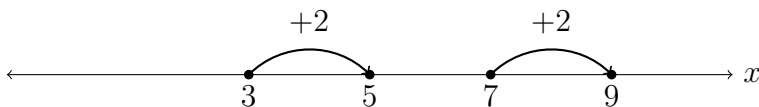
Luego está la **transitividad**, una propiedad que nos dice que las desigualdades se “encadenan” de manera lógica. Si a es menor que b , y b es menor que c , entonces podemos estar seguros de que a es menor que c . Por ejemplo, si $a = 1$, $b = 4$ y $c = 6$, sabemos que $1 < 4$ y $4 < 6$, por lo que necesariamente $1 < 6$. En la recta real, podemos ver cómo estos números se alinean en orden:



La siguiente propiedad es la **compatibilidad con la suma**. Esta regla es bastante intuitiva: si sabemos que $a < b$, entonces al sumar el mismo número c a ambos lados, la desigualdad se mantiene. Es decir, $a + c < b + c$. Por ejemplo, si $a = 3$, $b = 7$, y sumamos $c = 2$, obtenemos:

$$3 + 2 < 7 + 2, \quad \text{es decir, } 5 < 9.$$

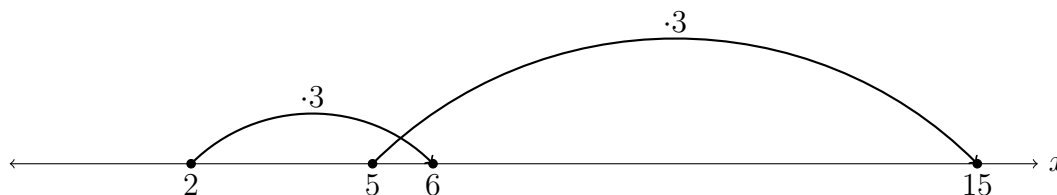
En la recta real, esto simplemente significa que estamos desplazando los números hacia la derecha en la misma cantidad, manteniendo el orden entre ellos.



Finalmente, tenemos la **compatibilidad con la multiplicación**. Esta propiedad nos dice que, si $a < b$ y multiplicamos ambos números por un número positivo c , el orden no se altera. Es decir, $a \cdot c < b \cdot c$ cuando $c > 0$. Por ejemplo, si $a = 2$, $b = 5$, y $c = 3$, entonces:

$$2 \cdot 3 < 5 \cdot 3, \quad \text{es decir, } 6 < 15.$$

En este caso, estamos “ampliando” la distancia entre los números en la recta real al multiplicarlos, pero el orden entre ellos sigue siendo el mismo.



Estas propiedades permiten ordenar y comparar los números reales, y eso es clave para entender conceptos más avanzados. Por ejemplo, podemos hablar de valores que actúan como límites dentro de un conjunto de números.

Un número se llama **cota superior** de un conjunto A si es mayor o igual que todos los elementos del conjunto. Es como un límite que los números de A no pueden superar. Si un conjunto tiene al menos una cota superior, decimos que **está limitado por arriba**. Por ejemplo, si tomamos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, 7 es una cota superior porque ningún número del conjunto es mayor que 7. También lo serían 8, 10 o cualquier otro número mayor.

De forma similar, un número se llama **cota inferior** si es menor o igual que todos los elementos del conjunto. En este caso, la cota inferior actúa como un suelo que los números no pueden atravesar. Si un conjunto tiene al menos una cota inferior, decimos que **está limitado por abajo**. Siguiendo con el mismo conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$, 1 es una cota inferior, pero también lo serían números como 0, -5 o cualquier número menor.

Cuando un conjunto tiene tanto una cota superior como una cota inferior, decimos que **el conjunto está acotado**. Por ejemplo, en $A = \{1, 3, 5, 7\}$, el conjunto está limitado por 1 en la parte inferior y por 7 en la parte superior. Los números del conjunto no se salen de ese intervalo.

Entender las cotas superiores e inferiores no solo organiza los números de forma intuitiva, sino que también nos ayuda a trabajar con límites y extremos, herramientas esenciales en toda la matemática.

Ejemplo 1: Tomemos el siguiente conjunto:

$$A = [2, 8] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$$



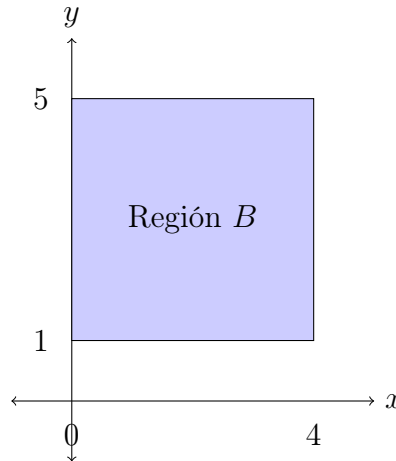
Este conjunto representa un intervalo cerrado, lo que significa que incluye tanto el valor más pequeño como el más grande: 2 y 8, respectivamente. Por eso, podemos decir que:

- Una **cota superior** es $M = 8$, ya que ningún número del conjunto supera este valor.
- Una **cota inferior** es $m = 2$, ya que ningún número del conjunto es menor que este límite.

Como el intervalo incluye ambos extremos, 2 y 8, estos se consideran una cotas superior e inferior del conjunto.

Ejemplo 2: Ahora consideremos el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 5\}$$

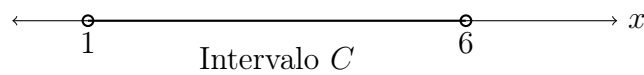


Este conjunto describe una región rectangular en el plano cartesiano, donde x está limitado entre 0 y 4, y y está limitado entre 1 y 5. Los valores límites nos permiten identificar las siguientes cotas:

- Una **cota superior** en x es $M_x = 4$, ya que x no puede ser mayor que 4.
- Una **cota inferior** en x es $m_x = 0$, ya que x no puede ser menor que 0.
- Una **cota superior** en y es $M_y = 5$, ya que y no puede superar este valor.
- Una **cota inferior** en y es $m_y = 1$, ya que y no puede ser menor que 1.

Esta región rectangular está completamente definida por estos valores extremos, que actúan como unas cotas superiores e inferiores para x y y .

Ejemplo 3: Por último, consideremos este conjunto:

$$C = (1, 6) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\}$$


Este intervalo es abierto, lo que significa que no incluye los valores 1 y 6. Sin embargo, estos valores siguen actuando como unas cotas inferior y superior, ya que limitan el intervalo. Por lo tanto, tenemos:

- Una **cota superior** es $M = 6$, ya que es el mayor valor que el conjunto puede acercarse sin incluirlo.
- Una **cota inferior** es $m = 1$, ya que es el menor valor que el conjunto puede alcanzar, pero no incluye.

Cuando hablamos de los valores más grandes o más pequeños dentro de un conjunto, nos referimos a los llamados **extremos**. Estos valores delimitan internamente el conjunto y, a diferencia de las cotas, tienen una característica especial: **pertenecen al conjunto**.

Aunque las cotas pueden no formar parte del conjunto, todavía delimitan el rango de valores posibles para x . Sin embargo, cuando buscamos identificar un *máximo* o un *mínimo*, no basta con que sean valores límite; estos deben **pertenecer al conjunto**. Esta diferencia entre cotas y extremos incluidos es clave para entender la definición de máximo y mínimo en un conjunto.

Máximo: El *máximo* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es el mayor elemento de A . Esto significa que es un número $a_{\max} \in A$ tal que todos los demás elementos del conjunto A son menores o iguales a $a_{\max}$. Una característica importante es que el máximo **debe pertenecer** al conjunto. Esto lo diferencia de una cota superior, que no necesariamente forma parte del conjunto.

Mínimo: El *mínimo* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es el menor elemento del conjunto. En este caso, es un número $a_{\min} \in A$ tal que todos los demás elementos del conjunto A son mayores o iguales a $a_{\min}$. Al igual que con el máximo, el mínimo **debe pertenecer** al conjunto, lo cual también lo distingue de una cota inferior, que podría no estar incluida.

Ejemplo 1: Consideremos el siguiente conjunto:

$$A = [1, 7] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 7\}$$

Este conjunto incluye los extremos, lo que nos permite identificar de forma clara su máximo y mínimo:

- El **máximo** es $a_{\max} = 7$ porque es el mayor valor en A y pertenece al conjunto.
- El **mínimo** es $a_{\min} = 1$ porque es el menor valor en A y también pertenece al conjunto.

Como este es un intervalo cerrado, ambos extremos están incluidos, lo que hace que sean el máximo y el mínimo del conjunto.

Ejemplo 2: Ahora, consideremos el siguiente conjunto:

$$B = (2, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$$

Este conjunto no incluye los valores extremos, lo que afecta la existencia del máximo y el mínimo:

- No hay **máximo**, porque aunque 5 es el límite superior del intervalo, no está incluido en B .
- Tampoco hay **mínimo**, ya que 2 es el límite inferior, pero no pertenece al conjunto.

En este caso, aunque el conjunto tiene límites claros, esos límites no son elementos del conjunto, por lo que no pueden ser considerados máximo ni mínimo.

Ejemplo 3: Ahora tomemos un conjunto de números enteros:

$$C = \{-3, 0, 4, 8, 10\}$$

Este conjunto tiene un número fijo de elementos, por lo que identificar el máximo y el mínimo es bastante directo:

- El **máximo** es $a_{\max} = 10$ porque es el mayor número en el conjunto y pertenece a él.
- El **mínimo** es $a_{\min} = -3$ porque es el menor número en el conjunto y también pertenece a él.

Los conjuntos finitos como este siempre tienen un máximo y un mínimo, ya que todos sus elementos están definidos explícitamente.

Ejemplo 4: Consideremos ahora un conjunto que se extiende hacia el infinito en una sola dirección:

$$D = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

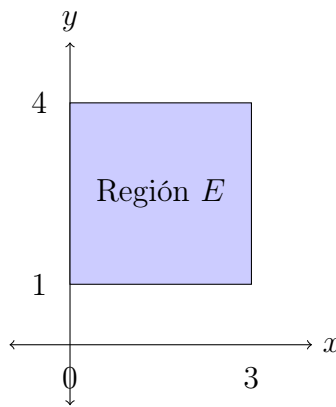
Este conjunto tiene un límite inferior claro, pero no tiene un límite superior definido:

- No hay **máximo**, porque el conjunto sigue creciendo indefinidamente hacia valores mayores sin un tope.
- El **mínimo** es $a_{\min} = 0$ porque es el valor más pequeño en D y pertenece al conjunto.

Este ejemplo muestra que aunque un conjunto sea infinito, aún puede tener un mínimo si tiene un límite inferior que pertenece al conjunto.

Ejemplo 5: Finalmente, consideremos un conjunto de puntos en el plano:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$$



Este conjunto es un rectángulo en el plano cartesiano, y podemos identificar los máximos y mínimos en cada eje:

- En el eje x :
 - El **máximo** es $a_{\max, x} = 3$.
 - El **mínimo** es $a_{\min, x} = 0$.
- En el eje y :
 - El **máximo** es $a_{\max, y} = 4$.
 - El **mínimo** es $a_{\min, y} = 1$.

En este caso, los máximos y mínimos se definen para cada eje, ya que el conjunto se encuentra en dos dimensiones, y los valores extremos son claros dentro de los límites del rectángulo.

En matemáticas, no todos los conjuntos tienen un máximo o un mínimo, pero eso no significa que no podamos hablar de sus límites más ajustados. Aquí es donde entran en juego los conceptos de **supremo** e **ínfimo**. El supremo y el ínfimo son una forma de extender las ideas de máximo y mínimo, permitiéndonos trabajar incluso con conjuntos que no incluyen

esos valores extremos.

El **supremo** de un conjunto es su **menor cota superior**. Dicho de otro modo, es el valor más pequeño que es mayor o igual a todos los elementos del conjunto. Si el conjunto tiene un máximo, entonces el supremo coincide con este máximo. Pero si no hay un máximo, como ocurre en intervalos abiertos, el supremo sigue siendo una cota superior que delimita el conjunto, aunque no pertenezca a él. Esto lo diferencia del máximo, que siempre debe formar parte del conjunto.

Por otro lado, el **ínfimo** es el equivalente para las cotas inferiores. Es la **mayor cota inferior** de un conjunto, es decir, el valor más grande que es menor o igual a todos los elementos del conjunto. Si el conjunto tiene un mínimo, el ínfimo coincide con este mínimo. Si no hay un mínimo, como en un intervalo abierto por debajo, el ínfimo sigue existiendo como una cota inferior ajustada, pero no forma parte del conjunto.

Ahora veremos un ejemplo que nos ayudará a entender mejor estas ideas y cómo se diferencian de los conceptos de máximo y mínimo.

Ejemplo: Consideremos el conjunto $A = (2, 5)$, que representa el intervalo abierto entre 2 y 5. En este caso, el conjunto no incluye los valores 2 ni 5, pero estos valores aún tienen un papel importante como límites.

El **supremo** de este conjunto es $\sup(A) = 5$. Este valor es la menor cota superior de A , porque no existe ningún número menor que 5 que todavía sea mayor o igual a todos los elementos de A . Sin embargo, $5 \notin A$, por lo que no es un máximo.

De forma similar, el **ínfimo** es $\inf(A) = 2$. Este valor es la mayor cota inferior, porque no existe ningún número mayor que 2 que sea menor o igual a todos los elementos de A . Al igual que con el supremo, $2 \notin A$, por lo que no es un mínimo.

Este ejemplo muestra claramente la diferencia entre supremo e ínfimo frente a máximo y mínimo. Aunque el conjunto no tiene un máximo ni un mínimo debido a que no incluye sus extremos, el supremo y el ínfimo siempre están bien definidos porque solo dependen de las cotas ajustadas del conjunto. Esta propiedad los hace muy útiles para trabajar con conjuntos que no tienen límites claros o definidos dentro de sus elementos.

2.4. Axioma de Completitud

El **Axioma de Completitud** es una de las propiedades fundamentales de los números reales $\mathbb{R}$. A diferencia de otros conjuntos numéricos, como los racionales, los números reales no tienen “huecos”. Esto significa que si un conjunto de números reales está acotado superiormente, siempre hay un límite superior más ajustado, llamado **supremo**, que existe dentro de $\mathbb{R}$.

Este axioma garantiza que cualquier subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene un supremo. Formalmente, si $S \subset \mathbb{R}$ es no vacío y está acotado superiormente, existe un número real $\sup(S)$ tal que:

1. $\sup(S)$ es una cota superior de S , es decir, ningún elemento del conjunto es mayor que $\sup(S)$.
2. $\sup(S)$ es la menor cota superior posible. Si b es otra cota superior de S , entonces $\sup(S) \leq b$.

Este axioma nos permite trabajar con límites de conjuntos de manera precisa y consistente, algo que no es posible en los números racionales, donde hay “huecos” en la recta numérica. Ahora, veamos algunas propiedades interesantes de los números reales que se derivan de esta idea.

Teorema 1. *El conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los enteros positivos $1, 2, 3, \dots$ no está acotado superiormente.*

Supongamos que existe un número real M que actúa como cota superior para P . Esto significaría que todos los números enteros positivos son menores o iguales a M . Sin embargo, sabemos que siempre podemos encontrar un número entero positivo mayor que M simplemente tomando $n = \lfloor M \rfloor + 1$.

Aquí, $\lfloor M \rfloor$ representa el mayor número entero que no supera a M . Es como tomar M y, si tiene una parte decimal, simplemente ignorarla y quedarnos con el número entero más cercano por debajo. Por ejemplo, si $M = 3,7$, entonces $\lfloor M \rfloor$ es 3, y si $M = 5$, entonces $\lfloor M \rfloor$ también es 5.

Ahora, tomando $n = \lfloor M \rfloor + 1$, obtenemos un número que es estrictamente mayor que M , lo que contradice la idea de que M es una cota superior.

Por lo tanto, no importa qué número real elijamos, siempre habrá un entero positivo mayor. Esto demuestra que el conjunto P no está acotado superiormente.

Teorema 2. *Para cada número real x , existe un entero positivo n tal que $n > x$.*

Dado un número real x , siempre podemos encontrar un número entero positivo mayor que x . Una forma de hacerlo es tomar $n = \lfloor x \rfloor + 1$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x . Al sumar uno, obtenemos un entero positivo n que es estrictamente mayor que x .

Por ejemplo, si $x = 3,7$, la parte entera es $\lfloor 3,7 \rfloor = 3$, y al sumarle uno obtenemos $n = 4$, que cumple con $n > x$. Este razonamiento funciona para cualquier número real x , sin importar lo grande o pequeño que sea.

Teorema 3. *Si $x > 0$ y y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.*

Para demostrar esto, primero dividimos y entre x , obteniendo $\frac{y}{x}$, que es un número real bien definido porque $x > 0$. Según el teorema anterior, sabemos que existe un entero positivo n tal que $n > \frac{y}{x}$.

Si multiplicamos esta desigualdad por x , obtenemos $nx > y$, ya que $x > 0$ no altera el sentido de la desigualdad. Esto nos dice que siempre podemos encontrar un entero positivo n que, al multiplicarlo por x , dé un resultado mayor que y , sin importar los valores específicos de x y y .

Teorema 4. *Si tres números reales a , x , y y satisfacen las desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$.

Supongamos que $x > a$. Esto significa que $x - a > 0$, es decir, hay una pequeña diferencia positiva entre x y a . Según el Teorema 3, podemos encontrar un entero n lo suficientemente grande para que $n(x - a) > y$. Sin embargo, si observamos la desigualdad inicial, también sabemos que:

$$x - a \leq \frac{y}{n}.$$

Multiplicando por n , obtenemos $n(x - a) \leq y$, lo cual contradice nuestra suposición de que $n(x - a) > y$. Por lo tanto, no es posible que $x > a$. Como ya sabemos que $a \leq x$, la única opción restante es que $x = a$.

Este tipo de razonamientos rigurosos en matemáticas, donde se analizan cuidadosamente las relaciones entre cantidades y se exploran los límites de las suposiciones, fue clave en el desarrollo de nuevas herramientas matemáticas durante los siglos XVI y XVII. En particular, la necesidad de resolver problemas como máximos y mínimos, junto con el estudio del movimiento y las órbitas planetarias, impulsó la creación de métodos más precisos para describir cómo cambian las magnitudes.

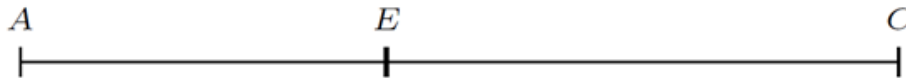
3. Orígenes del Calculo

En los siglos XVI y XVII, Europa atravesaba un periodo de grandes avances científicos. Las observaciones astronómicas y las ideas revolucionarias de Johannes Kepler comenzaron a explicar algunos de los misterios del universo. Kepler, en particular, describió las órbitas planetarias como elípticas, un logro importante que, sin embargo, no daba una explicación completa de por qué los planetas se movían de esa forma. Al mismo tiempo, Galileo Galilei estudiaba el movimiento de los cuerpos en caída libre y de los proyectiles, estableciendo principios fundamentales que más tarde serían clave para entender las leyes físicas que rigen el universo.

Este ambiente de descubrimientos también influyó en las matemáticas, ya que surgió la necesidad de desarrollar herramientas para analizar y resolver problemas prácticos relacionados con la naturaleza. En este contexto, Pierre de Fermat, un matemático destacado del siglo XVII, creó un método para resolver problemas de máximos y mínimos, considerado un precursor del cálculo diferencial. Aunque Fermat no conocía la derivada tal como la entendemos hoy, su método consistía en estudiar cómo cambian las funciones al introducir pequeños incrementos e , deduciendo relaciones importantes al comparar la función original con su versión modificada. Este enfoque permitió resolver una amplia variedad de problemas matemáticos y científicos.

El método de Fermat se desarrolla en los siguientes pasos:

1. **Plantear la función a optimizar:** Representar la cantidad que se busca maximizar o minimizar en términos de una variable a .
2. **Introducir un pequeño incremento:** Sustituir a por $a + e$, donde e es un cambio pequeño.
3. **Comparar las expresiones:** Igualar la función inicial con la expresión que resulta después de incluir el incremento.
4. **Simplificar la ecuación:** Cancelar los términos comunes y dividir entre e para eliminar este incremento.
5. **Resolver para a :** Encontrar el valor de a que satisface la ecuación, lo que permite hallar el máximo o mínimo.



Por ejemplo, para maximizar el área del rectángulo AEC trazado sobre la recta AC de longitud b , el área se expresa como

$$A(a, b) = ab - a^2.$$

Con $a \rightarrow a + e$, el área modificada es

$$A(a + e, b) = ab - a^2 - 2ae + be - e^2.$$

Igualando, simplificando y eliminando e , se obtiene

$$b = 2a,$$

por lo que

$$a = \frac{b}{2}.$$

Esto significa que la recta AC debe dividirse en dos partes iguales para obtener el área máxima.

El método de Fermat, aunque anterior al cálculo diferencial, muestra cómo el análisis de pequeños cambios puede resolver problemas de optimización básicos y sentó las bases para el cálculo moderno.

Sin embargo, las herramientas matemáticas disponibles en esa época no eran suficientes para describir cambios continuos ni para relacionar de manera precisa conceptos como velocidad o aceleración. Aunque útil, la geometría euclidiana era limitada; y los métodos algebraicos no alcanzaban para abordar problemas más complejos relacionados con el movimiento. Se necesitaba un lenguaje matemático más avanzado, capaz de trabajar con cambios constantes y valores infinitesimales.

3.1. Newton y la búsqueda de lo infinitamente pequeño

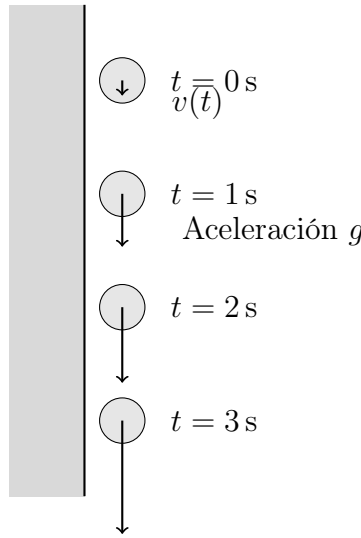
Durante su retiro en 1665, debido a la Gran Plaga de Londres, Isaac Newton dedicó su tiempo a estudiar el movimiento de los cuerpos. Observaba fenómenos naturales, como el movimiento de los objetos en caída libre, y se planteaba preguntas fundamentales sobre cómo describir el cambio de posición de los objetos a lo largo del tiempo. La inquietud principal de Newton era encontrar una forma precisa de medir el movimiento de un objeto en un instante determinado, lo que le llevaría al desarrollo del cálculo diferencial y, en particular, a la noción de la velocidad instantánea.

En ese momento, Newton planteó una solución simple: medir la velocidad promedio de un objeto, como una manzana cayendo. Si medimos la distancia Δx que recorre un objeto en un tiempo Δt , la velocidad promedio es simplemente:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Aquí, la notación Δ representa una **diferencia** o un **cambio** en una cantidad. Es decir, Δx es el **cambio en la posición** del objeto, y Δt es el **cambio en el tiempo** transcurrido. Esta notación es fundamental en la descripción del movimiento, ya que nos permite medir cómo varían estas magnitudes entre dos puntos en el tiempo.

En la imagen, se muestra un objeto en caída libre en diferentes momentos. En cada instante de tiempo $t = 0, 1, 2, 3$ segundos, el objeto ocupa una posición específica en el aire. Las flechas hacia abajo representan la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo, reflejando el cambio en la posición del objeto a medida que transcurre el tiempo.



Veamos ahora cómo se calcula la velocidad promedio entre dos tiempos. Supongamos que un objeto se deja caer desde una altura, y queremos calcular la velocidad promedio entre $t = 0$ segundos y $t = 1$ segundo. Usando la fórmula de la distancia $s(t) = 4,9t^2$ para la caída libre de un objeto, podemos calcular la posición en ambos instantes:

$$s(0) = 4,9(0)^2 = 0 \text{ m},$$

$$s(1) = 4,9(1)^2 = 4,9 \text{ m}.$$

El cambio en la posición Δx es $4,9 - 0 = 4,9 \text{ m}$, y el cambio en el tiempo Δt es $1 - 0 = 1 \text{ s}$. Así que la velocidad promedio es:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4,9 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 4,9 \text{ m/s}.$$

Ahora, calculemos la velocidad promedio para otros intervalos de tiempo con valores enteros. Esto implica tomar las posiciones del objeto en instantes de tiempo enteros, como por ejemplo, entre $t = 1$ y $t = 2$, $t = 2$ y $t = 3$, etc. Utilizando la misma fórmula para la distancia, obtenemos los siguientes cálculos para la velocidad promedio:

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$0 \leq t \leq 1$	4.9
$1 \leq t \leq 2$	14.7
$2 \leq t \leq 3$	24.5
$3 \leq t \leq 4$	34.3
$4 \leq t \leq 5$	44.1
$5 \leq t \leq 6$	53.9

Aquí, cada fila representa un intervalo de tiempo con valores enteros de t , y hemos calculado la velocidad promedio para cada uno de esos intervalos. Como podemos observar, la velocidad promedio aumenta a medida que el tiempo transcurre, lo que refleja el aumento en la

velocidad del objeto debido a la aceleración en la caída libre.

De la misma manera, podemos calcular la velocidad promedio para otros intervalos de tiempo más pequeños y obtener los siguientes valores:

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53.9
$5 \leq t \leq 5,1$	49.49
$5 \leq t \leq 5,05$	49.245
$5 \leq t \leq 5,01$	49.049
$5 \leq t \leq 5,001$	49.0049

Aquí, cada fila representa un intervalo de tiempo cada vez más pequeño alrededor de $t = 5$. Como se puede ver, las velocidades promedio calculadas se van acercando a un valor específico a medida que el intervalo de tiempo se reduce.

Y ahora, observa cuidadosamente cómo cada vez que hacemos el intervalo de tiempo más pequeño y más pequeño, los valores de las velocidades promedio parecen estabilizarse y converger hacia un número específico. Esta tendencia nos indica que la velocidad en $t = 5$ segundos no está cambiando, lo que nos lleva a la idea de que la velocidad instantánea en ese punto es 49 m/s. Es decir, la velocidad promedio, cuando el intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño, se convierte en la **velocidad instantánea**.

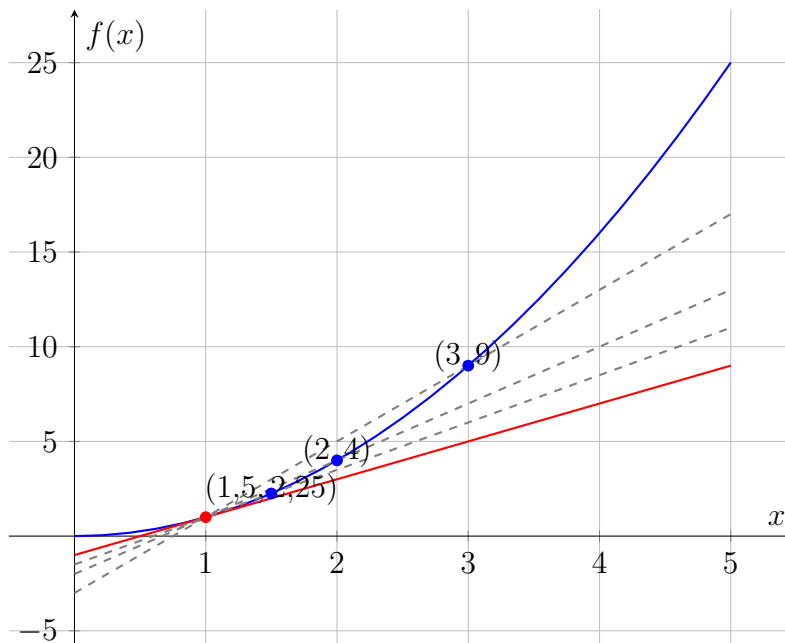
Este proceso de reducir el intervalo de tiempo es precisamente lo que da origen al cálculo diferencial desde la perspectiva de Newton. Él lo concibió como una herramienta para entender el cambio continuo, al observar cómo pequeñas variaciones en el tiempo afectan el movimiento de los cuerpos. Sin embargo, Leibniz, al contrario de Newton, desarrolló el cálculo desde una perspectiva más geométrica, enfocándose en los infinitesimales. Para él, estudiar una curva significaba analizar cómo sus pequeños segmentos podían descomponerse en cambios infinitesimales, representados por dx y dy . Su objetivo era encontrar una relación entre estas cantidades diminutas que describieran el comportamiento de la curva en cualquier punto.

3.2. El enfoque de Leibniz: La visión infinitesimal del cálculo

Leibniz tenía una forma única de pensar sobre las curvas. En lugar de verlas como un todo, se centró en los pequeños cambios que ocurren entre dos puntos cercanos en la curva. Para él, la clave estaba en entender cómo los cambios infinitesimales en las coordenadas horizontales y verticales se relacionaban entre sí. Este enfoque, que le permitió ver la pendiente de una curva como una combinación de estos pequeños cambios, fue una de las ideas más innovadoras de su tiempo.

Leibniz visualizó esto geométricamente como pequeños triángulos infinitesimales formados por dx , dy , y la tangente a la curva. La tangente a una curva, en este contexto, hace referencia

a una recta que toca la curva en un solo punto, sin cruzarla. Es decir, es la recta que, en ese punto específico, sigue la misma dirección que la curva. En otras palabras, mientras la curva se aproxima a este punto, la tangente se ajusta perfectamente a su forma justo en ese instante, sin desviarse. Esta idea revolucionaria permitió establecer un sistema de notación que aún usamos hoy. La siguiente gráfica ilustra este enfoque:



Es interesante ver cómo las rectas secantes, representadas en gris, se acercan cada vez más a la recta tangente a medida que los puntos en la curva se acercan a $x = 1$. Esto ilustra cómo, conforme los puntos de la secante se acercan al punto de tangencia, la recta secante se transforma gradualmente en la tangente.

Leibniz no solo estudió la pendiente de las curvas, sino que también desarrolló el concepto de integración como una forma de sumar infinitos rectángulos pequeños bajo una curva. Para él, el cálculo integral era el proceso inverso del cálculo diferencial, un descubrimiento que estableció una conexión profunda entre estas dos herramientas matemáticas.

Lo que hizo único el enfoque de Leibniz fue su capacidad para abstraer conceptos complejos en notaciones universales. Introdujo el símbolo de la integral $\int$, que representa la suma continua de áreas infinitesimales. Este símbolo, elegante y poderoso, sintetizó siglos de ideas matemáticas, convirtiéndose en una herramienta esencial para los cálculos geométricos y físicos.

Además, Leibniz destacó la importancia de los infinitesimales como entidades conceptuales útiles, a pesar de las críticas de algunos de sus contemporáneos. Su visión de dx y dy como elementos infinitamente pequeños pero no nulos permitió a los matemáticos calcular con precisión cambios en cantidades variables. Este enfoque fue la base para resolver problemas

complejos de movimiento, áreas y volúmenes, cimentando el cálculo como una disciplina central en las matemáticas.

El legado de Leibniz no solo radica en sus descubrimientos, sino en su capacidad para crear una notación que trascendiera su época. Mientras Newton se enfocaba en problemas concretos, Leibniz diseñó un lenguaje matemático universal, adaptable a distintos contextos y disciplinas. Su enfoque intuitivo y práctico no solo facilitó su adopción, sino que sentó las bases del cálculo moderno, convirtiéndose en un recurso indispensable en la matemática actual.

Ejemplo: Imaginemos que Leibniz se encuentra estudiando la parábola $y = x^2$ y desea encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(1, 1)$. Desde su perspectiva geométrica, Leibniz analizaría cómo pequeños cambios infinitesimales en x , representados por dx , generan cambios correspondientes en y , representados por dy . La relación entre estos incrementos infinitesimales, $\frac{dy}{dx}$, define la pendiente de la curva en el punto.

Para calcular esta pendiente en el punto P , Leibniz pensaría en un punto cercano $Q(x, x^2)$ sobre la curva. Inicialmente, consideraría una distancia finita entre P y Q para calcular la pendiente de la recta secante PQ , que luego aproximaría cada vez más al valor de la tangente al hacer dx más pequeño.

La pendiente de la recta secante está dada por:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, si elegimos $x = 1,5$, obtenemos:

$$m_{PQ} = \frac{1,5^2 - 1}{1,5 - 1} = \frac{2,25 - 1}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$$

Leibniz observaría cómo, al acercar cada vez más el punto Q al punto P (es decir, al hacer dx más pequeño), la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente. Los valores calculados se presentan en las siguientes tablas:

x	m_{PQ}	x	m_{PQ}
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,1	2,1	0,9	1,9
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999

Leibniz argumentaría que, al observar los valores de m_{PQ} calculados para puntos Q cada vez más cercanos a $P(1, 1)$, la pendiente de la recta tangente se puede estimar analizando cómo estas pendientes secantes se comportan. De la tabla de valores, notamos que a medida que el

punto Q se acerca a P , las pendientes promedio m_{PQ} parecen acercarse a un valor constante de 2.

Con base en esta observación, concluimos que la pendiente de la recta tangente en el punto $P(1, 1)$ es 2.

Con esta pendiente conocida, podemos escribir la ecuación de la recta tangente utilizando la forma punto-pendiente:

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

Simplificando, obtenemos:

$$y = 2x - 1.$$

4. Sucesiones

El análisis de las sucesiones constituye un prerequisite fundamental para abordar el estudio de las derivadas, pues proporciona la estructura conceptual necesaria para entender la noción de límite, sin la cual el cálculo diferencial pierde su coherencia formal. Al observar el comportamiento de una sucesión que converge a un valor específico, se introduce la idea de cómo una secuencia de elementos discretos puede aproximarse indefinidamente a un punto, reflejando el principio de tendencia que subyace a todo el análisis infinitesimal. Esto no solo permite visualizar la estabilidad del sistema conforme se extiende hacia el infinito, sino que también prepara el terreno para el estudio de la variación continua en intervalos arbitrariamente pequeños. En este sentido, las sucesiones actúan como un puente entre lo discreto y lo continuo, permitiendo que el concepto de derivada emerja naturalmente como la descripción precisa del cambio en el entorno de un punto.

Una **sucesión** es una función $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual asigna a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ un valor $a(n) \in \mathbb{R}$. Se representa generalmente como $\{a_n\}$, donde a_n denota el valor de la sucesión en el término n -ésimo. Formalmente:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ n &\mapsto a(n) = a_n. \end{aligned}$$

Esto significa que una sucesión es un conjunto ordenado de números reales $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, donde cada a_n corresponde a un término de la sucesión.

Ejemplo 1: Sucesión de los Números Triangulares

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

- Los primeros términos son:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

- Estos números representan puntos que pueden organizarse en triángulos equiláteros. Estudiada por los matemáticos griegos clásicos, la sucesión aparece en muchas aplicaciones combinatorias.

Ejemplo 2: Sucesión de Fibonacci

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$$

- La sucesión de Fibonacci se define de manera recursiva como:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2.$$

- Introducida por Leonardo de Pisa (Fibonacci) en su libro *Liber Abaci* en 1202, esta sucesión modela el crecimiento de una población de conejos. Aparece en numerosas áreas de las matemáticas y la naturaleza, como la geometría y la teoría de números.

Ejemplo 3: Sucesión de Sylvester

$$S_0 = 2, \quad S_{n+1} = S_n(S_n - 1) + 1.$$

- Los primeros términos son:

$$2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, \dots$$

- Introducida por James Joseph Sylvester en 1880, cada término es el denominador del n -ésimo término en la fracción egipcia que representa 1:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{S_n}.$$

Ejemplo 4: Sucesión de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

$$\binom{n}{k} \text{ es la combinatoria, definida como } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Los primeros términos son:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \dots$$

- Estudiada por Eugène Charles Catalan en el siglo XIX, esta sucesión aparece en muchos problemas combinatorios, como el número de caminos que no cruzan la diagonal principal en una cuadrícula y el número de árboles binarios con n nodos.

Ejemplo 5: Sucesión de Recamán

$a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} - n$ si $a_{n-1} - n > 0$ y no ha aparecido antes, de lo contrario $a_n = a_{n-1} + n$.

- Los primeros términos son:

$$0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, \dots$$

- Propuesta por el matemático colombiano Bernardo Recamán Santos, la sucesión es conocida por su comportamiento impredecible y sus propiedades no triviales. A pesar de su simplicidad, sigue siendo objeto de investigación.

Sucesión Finita: Una **sucesión finita** es una función definida sobre un conjunto finito de números naturales, es decir, una sucesión que tiene un número finito de términos. Formalmente, una sucesión finita se denota como:

$$a : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que una sucesión finita tiene un término inicial a_1 y un término final a_n y se puede representar como $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Sucesión Infinita: Una **sucesión infinita** es una función definida sobre el conjunto de todos los números naturales, es decir, una sucesión que no tiene un término final. Formalmente, una sucesión infinita se denota como:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Esto significa que una sucesión infinita tiene infinitos términos, comenzando desde un término inicial a_1 y continuando indefinidamente como $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Ejemplo de Sucesión Finita: Consideremos la sucesión de los primeros 5 números naturales:

$$\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ejemplo de Sucesión Infinita: Un ejemplo clásico es la sucesión de los números impares:

$$\{b_n\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

Formalmente, se define como:

$$\begin{aligned} b : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b(n) &= 2n - 1 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Esta sucesión es infinita, ya que cada valor de n genera un nuevo número impar sin límite superior.

Sucesión Constante: Una sucesión $\{c_n\}$ es **constante** si cada término es igual al siguiente, es decir, cumple:

$$c_n = c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que todos los términos de la sucesión tienen el mismo valor.

Sucesión Creciente: Una sucesión $\{a_n\}$ es **creciente** si cada término es menor o igual que el siguiente, es decir, cumple:

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la desigualdad es estricta ($a_n < a_{n+1}$ para todo n), se dice que la sucesión es **estrictamente creciente**.

Sucesión Decreciente:

Una sucesión $\{b_n\}$ es **decreciente** si cada término es mayor o igual que el siguiente, es decir, cumple:

$$b_n \geq b_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la desigualdad es estricta ($b_n > b_{n+1}$ para todo n), se dice que la sucesión es **estrictamente decreciente**.

4.1. Criterio de Crecimiento, Decrecimiento o Constancia

Para una sucesión $\{a_n\}$, donde $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos determinar si es creciente, decreciente o constante calculando la diferencia entre términos consecutivos:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

- Si $\Delta a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}$ es **estrictamente creciente**.
- Si $\Delta a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}$ es **creciente**.
- Si $\Delta a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}$ es **estrictamente decreciente**.
- Si $\Delta a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}$ es **decreciente**.
- Si $\Delta a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}$ es **constante**.

Ejemplo 1: Consideremos la sucesión dada por:

$$\begin{aligned} a_n &= 2n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \\ \{a_n\} &= \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \end{aligned}$$

Esta sucesión genera el conjunto de los números pares positivos, comenzando en el 2 y aumentando en 2 unidades con cada incremento de n . Formalmente, cada término está definido como $a_n = 2n$. Esto significa que el primer término es $2 \times 1 = 2$, el segundo es $2 \times 2 = 4$, el tercero es $2 \times 3 = 6$, y así sucesivamente. Al observar la estructura de la sucesión, es evidente que cada nuevo término supera al anterior.

Para demostrar rigurosamente que esta sucesión es creciente, se puede calcular la diferencia entre dos términos consecutivos:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2.$$

Dado que $\Delta a_n = 2 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se concluye que cada término es estrictamente mayor que el anterior. Por lo tanto, la sucesión es estrictamente creciente y su valor aumenta sin límite a medida que n se incrementa.

Ejemplo 2: Ahora consideremos la siguiente sucesión definida por:

$$\begin{aligned} a_n &= n^2, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \\ \{a_n\} &= \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \end{aligned}$$

En esta sucesión, cada término es el cuadrado del número natural correspondiente. Así, los primeros términos son 1, 4, 9, 16, 25, ..., los cuales representan los cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5, respectivamente. El valor de a_n aumenta significativamente con n , ya que al elevar el número al cuadrado, el crecimiento se vuelve más rápido que en una sucesión lineal.

Para evaluar formalmente si la sucesión es creciente, calculamos la diferencia entre términos consecutivos:

$$\Delta a_n = (n+1)^2 - n^2.$$

Simplificando la expresión:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta a_n = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1.$$

Dado que $2n + 1 > 0$ para todo $n \geq 1$, esto confirma que la sucesión es estrictamente creciente. En términos más intuitivos, cada término es mayor que el anterior por un valor que se incrementa a medida que n aumenta, lo que implica que la sucesión no solo es creciente, sino que su crecimiento es acelerado conforme n se hace más grande.

Ejemplo 3: Analicemos la siguiente sucesión aritmética dada por:

$$\begin{aligned} b_n &= 12 - 2n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \\ \{b_n\} &= \{10, 8, 6, 4, 2, \dots\} \end{aligned}$$

Esta sucesión se construye restando múltiplos de 2 a 12. Así, el primer término es 10, el segundo 8, y cada término subsecuente disminuye en 2 unidades respecto al anterior. Para determinar si la sucesión es estrictamente decreciente, calculamos la diferencia entre términos consecutivos:

$$\Delta b_n = (12 - 2(n + 1)) - (12 - 2n).$$

Simplificando la diferencia:

$$\Delta b_n = 12 - 2(n + 1) - 12 + 2n = -2.$$

Dado que $\Delta b_n = -2 < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se concluye que cada término es estrictamente menor que el anterior. Esto confirma que la sucesión es estrictamente decreciente, y su valor se reduce indefinidamente conforme n aumenta.

Ejemplo 4: Consideremos la siguiente sucesión de términos inversos:

$$b_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{b_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

Esta sucesión consiste en los recíprocos de los números naturales. El primer término es 1, el segundo es $\frac{1}{2}$, el tercero $\frac{1}{3}$, y así sucesivamente. A medida que n crece, el valor de b_n disminuye porque el denominador se incrementa, lo que hace que cada término sea más pequeño.

Para verificar que la sucesión es decreciente, se calcula la diferencia entre dos términos consecutivos:

$$\Delta b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

Encontramos un denominador común:

$$\Delta b_n = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

Dado que $\Delta b_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que cada término es menor que el anterior. La sucesión es estrictamente decreciente y se aproxima a 0 a medida que n se hace más grande.

Ejemplo 5: Consideremos la siguiente sucesión geométrica:

$$b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{b_n\} = \{16, 8, 4, 2, 1, \dots\}$$

Cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón $\frac{1}{2}$. Así, $b_1 = 16$, $b_2 = 8$, $b_3 = 4$, y así sucesivamente. Para determinar si esta sucesión es decreciente, calculamos la diferencia entre dos términos consecutivos:

$$\Delta b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Factorizando $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$:

$$\Delta b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Dado que $\Delta b_n < 0$, la sucesión es estrictamente decreciente.

Definición de Sucesión Acotada: Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada** si sus términos se encuentran dentro de un intervalo finito, es decir, existe un número real $M > 0$ tal que todos los términos de la sucesión satisfacen la siguiente condición:

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que la sucesión no crece indefinidamente ni tiende a valores muy negativos, sino que todos sus términos están comprendidos entre dos valores fijos, formando un intervalo cerrado de la forma $[-M, M]$. En otras palabras, los términos de la sucesión están limitados tanto superiormente como inferiormente.

Sucesión Acotada Superiormente: Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada superiormente** si existe un número real B tal que todos los términos de la sucesión cumplen:

$$a_n \leq B \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El número B se llama **cota superior** de la sucesión, y garantiza que ningún término de la sucesión sobrepase este valor. Es decir, todos los términos de $\{a_n\}$ se encuentran por debajo de B . Aunque la sucesión pueda decrecer indefinidamente, el límite superior siempre existe.

Sucesión Acotada Inferiormente: Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada inferiormente** si existe un número real A tal que:

$$a_n \geq A \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El número A se denomina **cota inferior** de la sucesión y garantiza que ningún término de la sucesión sea menor que este valor. Esto implica que, sin importar cuánto crezca la sucesión, los términos siempre estarán por encima de la cota inferior A .

Relación entre una Sucesión Acotada y las Sucesiones Acotadas Superior e Inferiormente: Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** (en general) si y solo si está acotada tanto **superiormente** como **inferiormente**. Es decir, existen dos números reales A y B tales que:

$$A \leq a_n \leq B \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En este caso, A se denomina la **cota inferior** y B la **cota superior**. La sucesión $\{a_n\}$ está limitada entre estos dos valores, formando un intervalo cerrado $[A, B]$. Si una sucesión no cumple alguna de estas dos condiciones, entonces no se considera acotada en el sentido general.

Ejemplo 6: La sucesión constante es un ejemplo clásico de sucesión acotada. Sea:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \\ \{a_n\} &= \{3, 3, 3, 3, \dots\} \end{aligned}$$

En este caso, todos los términos de la sucesión tienen el mismo valor. Como no varía, podemos decir que está acotada tanto superior como inferiormente por el valor 3. Esto implica que la sucesión es acotada en el intervalo $[3, 3]$, lo que demuestra que una sucesión constante siempre es acotada.

Ejemplo 7: Un tipo de sucesión que también resulta ser acotada es la sucesión alternante:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \\ \{a_n\} &= \{-1, 1, -1, 1, \dots\} \end{aligned}$$

Esta sucesión cambia de signo en cada término, alternando entre -1 y 1. Dado que los términos nunca exceden estos valores, se concluye que la sucesión está acotada entre $A = -1$ y $B = 1$, es decir, en el intervalo $[-1, 1]$. Aunque la sucesión no es constante, sigue siendo acotada, ya que sus valores están siempre dentro de ese rango.

Ejemplo 8: Examinemos ahora una sucesión más compleja:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2}{n^2 + 1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \\ \{a_n\} &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \dots \right\} \end{aligned}$$

Aquí, cada término se obtiene al dividir n^2 entre $n^2 + 1$, lo que hace que los valores se acerquen cada vez más a 1, sin llegar a superarlo. El primer término de la sucesión es $\frac{1}{2}$, por lo que está acotada inferiormente por $\frac{1}{2}$. Como $a_n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, la sucesión también está acotada superiormente por 1. De esta forma, la sucesión es acotada en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ejemplo 9: Ahora consideremos la sucesión basada en la función seno:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{a_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$$

En este caso, la sucesión toma los valores 1, 0, y -1 de manera cíclica. Es evidente que estos valores están siempre contenidos en el intervalo $[-1, 1]$. Como la sucesión no excede estos límites, podemos decir que está acotada entre $A = -1$ y $B = 1$, lo que la hace acotada en $[-1, 1]$.

Por lo tanto, hemos visto ejemplos de sucesiones acotadas en distintos contextos, todas caracterizadas por estar limitadas dentro de ciertos intervalos. Sin embargo, existen otros tipos de sucesiones que, aunque también pueden estar acotadas, presentan comportamientos particulares debido a la alternancia de sus términos.

4.2. Sucesiones Alternantes

Las **sucesiones alternantes** son aquellas en las que los signos de los términos cambian de positivo a negativo o viceversa de forma periódica. Este tipo de sucesiones son comunes en varios contextos matemáticos y presentan un comportamiento interesante al analizar su convergencia, acotación y otros aspectos.

Ejemplo 1: Una de las sucesiones alternantes más sencillas es:

$$a_n = (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{a_n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

Esta sucesión cambia de signo en cada término, alternando entre -1 y 1. Debido a que los valores de la sucesión oscilan entre estos dos números, podemos afirmar que está acotada entre $A = -1$ y $B = 1$. Además, como no existe un límite al cual la sucesión tienda, no es convergente, pero sí está claramente acotada.

Ejemplo 2: Consideremos la siguiente sucesión alternante con decaimiento:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{a_n\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

En este caso, los términos siguen alternando entre signos positivos y negativos, pero la magnitud de cada término disminuye a medida que n crece. Esta sucesión está acotada tanto superior como inferiormente, ya que a_n oscila entre -1 y 1 , y se acerca a 0 conforme $n \rightarrow \infty$. Así, podemos decir que está acotada en $[-1, 1]$ y, además, converge a 0.

Ejemplo 3: Otra sucesión interesante es la alternante con una base constante:

$$a_n = (-1)^n \cdot 2, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{a_n\} = \{-2, 2, -2, 2, -2, 2, \dots\}$$

Los términos de esta sucesión también alternan entre signos negativos y positivos, pero la magnitud permanece constante. La sucesión oscila entre -2 y 2 , lo que la hace acotada en $[-2, 2]$. Dado que los términos no disminuyen ni se acercan a un valor fijo, esta sucesión no es convergente, pero sigue siendo acotada.

Ejemplo 4: Un caso más general de sucesión alternante es:

$$a_n = (-1)^n \cdot n^2, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{a_n\} = \{-1, 4, -9, 16, -25, \dots\}$$

Aquí, los signos de los términos siguen alternando, pero la magnitud de cada término crece de manera cuadrática con n . A pesar de que los signos varían, esta sucesión no está acotada, ya que sus términos aumentan indefinidamente en magnitud, es decir, no hay un valor fijo que limite superior o inferiormente los términos de la sucesión. Por lo tanto, esta sucesión no es acotada.

Ejemplo 5: Finalmente, consideremos una sucesión alternante con términos fraccionarios:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{a_n\} = \{-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}$$

En este ejemplo, los términos alternan entre negativos y positivos, y disminuyen en magnitud con rapidez debido al denominador cuadrático. Como cada término se aproxima a 0 , esta sucesión está acotada entre -1 y 1 , y también converge a 0 conforme $n \rightarrow \infty$. Es un ejemplo de sucesión acotada y convergente.

4.3. Convergencias de sucesiones

Después de examinar las sucesiones acotadas y alternantes, es importante destacar otro comportamiento esencial en el estudio de las sucesiones: la convergencia. Las **sucesiones convergentes** son aquellas en las que los términos se acercan progresivamente a un valor específico a medida que n crece. Este valor, llamado el límite de la sucesión, representa el punto hacia el cual los términos tienden, y aunque nunca lleguen a alcanzarlo exactamente, la sucesión se comporta como si se “estabilizara” cerca de dicho valor.

Para entender la convergencia de una sucesión, es importante primero conocer el concepto de **límite**. Este concepto nos ayuda a describir cómo los términos de una sucesión se comportan

cuando el índice n crece sin límite.

Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ tiene como límite un número L cuando, a medida que n se hace cada vez más grande, los términos de la sucesión se acercan cada vez más a L . Es decir, los términos de la sucesión se .aproximan. a L a medida que n aumenta.

De esta forma, podemos decir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Esto significa que los términos de la sucesión se acercan al valor L de manera indefinida a medida que n sigue creciendo.

Ejemplo: Consideremos la sucesión definida por:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Cuando n crece, es fácil notar que los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeños. Por ejemplo, los primeros términos son:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

A medida que n aumenta, los términos a_n se acercan cada vez más al número 0. Es decir, la sucesión tiende a 0 a medida que n crece.

Por lo tanto, podemos decir que el límite de esta sucesión es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Este ejemplo ilustra el concepto de **convergencia** de una sucesión. Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ es **convergente** si existe un número real L tal que los términos de la sucesión se aproximan cada vez más a L a medida que n crece.

En términos más sencillos, esto significa que los términos de la sucesión, aunque puedan fluctuar un poco al principio, eventualmente se van aproximando cada vez más a un valor fijo. Formalmente, esto se expresa como:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

De esta forma, si ambos límites coinciden en el mismo valor, entonces podemos decir que la sucesión $\{a_n\}$ converge a L .

Ejemplo 1: Consideremos la sucesión geométrica:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

En este caso, los términos de la sucesión disminuyen exponencialmente conforme n aumenta. Claramente, la sucesión es convergente, y su límite es $L = 0$, ya que los términos se acercan indefinidamente a 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

La naturaleza exponencial de la sucesión asegura que los términos se aproximen rápidamente al valor límite.

Ejemplo 2: Consideremos la siguiente sucesión definida por la función $\frac{n}{n+1}$:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$$

A medida que n crece, el valor de a_n se aproxima cada vez más a 1. De hecho, podemos calcular el límite de esta sucesión como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Esta sucesión es convergente y su límite es $L = 1$.

Ahora, después de ver estos ejemplos, uno podría preguntarse: ¿Se cumple lo mismo para todas las sucesiones que son crecientes y acotadas? Y la respuesta es sí. Existe un teorema importante que nos dice que toda sucesión creciente y acotada tiene un límite. Este teorema es el siguiente:

Teorema: Toda sucesión creciente y acotada tiene un límite. Es decir, si una sucesión $\{a_n\}$ es creciente (es decir, $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n) y está acotada superiormente (es decir, existe un número M tal que $a_n \leq M$ para todo n), entonces la sucesión converge a un límite L . Este teorema es clave porque nos dice que bajo estas condiciones, una sucesión no puede seguir creciendo indefinidamente o salirse de un intervalo acotado, sino que debe estabilizarse en un valor.

Ejemplo: Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Esta sucesión es creciente, ya que cada término es mayor que el anterior. Además, está acotada superiormente por 1, ya que $a_n \leq 1$ para todo n .

A medida que n crece, los términos de la sucesión se acercan a 1. Por lo tanto, esta sucesión cumple con el teorema, ya que es creciente y acotada, y su límite es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Como podemos ver, la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ cumple con las condiciones del teorema: es creciente porque cada término es mayor que el anterior, y está acotada superiormente por 1. A medida que n aumenta, los términos de la sucesión se acercan cada vez más a 1. Así, la sucesión converge a 1, lo que demuestra que toda sucesión creciente y acotada tiene un límite, como establece el teorema.

Ahora, cuando trabajamos con sucesiones convergentes, es natural preguntarnos qué sucede si operamos con ellas. Es decir, si tenemos dos sucesiones que sabemos que convergen, ¿cómo se comportan cuando las sumamos, las multiplicamos o las dividimos? Para responder a estas preguntas, tenemos un conjunto de propiedades que se aplican a las sucesiones convergentes y que nos permiten realizar operaciones con ellas sin perder la convergencia.

Teorema (Propiedades de las Sucesiones Convergentes): Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, y sea $c \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces, las siguientes propiedades se cumplen:

- **Suma de sucesiones:** La sucesión suma $\{a_n + b_n\}$ es convergente, y su límite es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

- **Producto por una constante:** La sucesión $\{c \cdot a_n\}$ es convergente, y su límite es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A.$$

- **Producto de sucesiones:** La sucesión producto $\{a_n \cdot b_n\}$ es convergente, y su límite es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

- **Cociente de sucesiones:** Si $B \neq 0$, la sucesión cociente $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ es convergente, y su límite es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Estas propiedades permiten operar sucesiones convergentes de manera análoga a cómo operamos con números reales, garantizando que las combinaciones lineales, productos y cocientes de sucesiones también convergen, y que sus límites se obtienen mediante operaciones directas con los límites de cada sucesión.

Ejemplo:

a) Ahora calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n}.$$

Descomponemos el numerador para separar los términos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n} + \frac{1}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n}.$$

Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} = 0$, entonces el límite es:

$$\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

b) Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Descomponemos el término en el denominador:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \right).$$

Sabemos que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ y $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo que el límite es:

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Así, tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

c) Ahora calculemos el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

Para resolver este límite, multiplicamos por el conjugado del numerador:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Simplificamos el numerador utilizando la identidad de diferencia de cuadrados:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Como $\sqrt{n+1} \rightarrow \infty$ y $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, el denominador crece indefinidamente. Por lo tanto, el límite es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

4.4. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Hasta ahora hemos explorado el comportamiento de las sucesiones, enfocándonos en su convergencia y acotación. Sin embargo, las sucesiones no solo son herramientas fundamentales por sí mismas, sino que también están estrechamente relacionadas con el estudio de las funciones. Una de las conexiones más importantes entre estos dos conceptos surge al considerar límites y continuidad en el análisis de funciones. En este contexto, el **Teorema de Bolzano-Weierstrass** juega un papel fundamental, ya que establece una propiedad clave de las sucesiones acotadas en relación con su convergencia.

Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.

Para entender completamente este teorema, es necesario primero definir qué es una **subsucesión**. Una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión $\{a_{n_k}\}$, donde los índices n_k forman una subsecuencia estrictamente creciente de números naturales, es decir, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. En otras palabras, una subsucesión se obtiene seleccionando algunos términos de la sucesión original $\{a_n\}$, pero manteniendo el orden de los índices.

Ejemplo: Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Esta sucesión alterna entre valores positivos y negativos, y se define como:

$$\{a_n\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots \right\}.$$

Ahora, vamos a extraer una subsucesión de $\{a_n\}$. Por ejemplo, podemos seleccionar los términos de la sucesión donde los índices son impares. Es decir, tomamos la subsecuencia de los términos positivos:

$$\{a_{n_k}\} = \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right\}.$$

Esta es una subsucesión que se obtiene tomando solo los términos con índices impares, es decir, los términos positivos de la sucesión original.

Como podemos ver, esta nueva sucesión de términos positivos, $\{a_{n_k}\}$, es una sucesión que converge a 0, ya que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0.$$

Por lo tanto, hemos encontrado una subsucesión de la sucesión original $\{a_n\}$ que es convergente, a pesar de que la sucesión original no tiene un límite.

Demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass:

Imaginemos que tenemos una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}$, la cual está acotada. Esto significa que los valores de la sucesión están contenidos dentro de un intervalo finito, digamos $[a, b]$. La idea del Teorema de Bolzano-Weierstrass es que, aunque la sucesión en su totalidad no necesariamente converge, podemos garantizar que existe al menos una subsucesión que sí lo hace. Para entender cómo se llega a esta conclusión, es útil visualizar lo que significa estar “acotado”.

Como los términos de la sucesión están restringidos a moverse dentro del intervalo $[a, b]$, esto sugiere que no pueden “escaparse” hacia el infinito. Aunque los términos pueden saltar de un valor a otro, eventualmente algunos de ellos deben acercarse lo suficiente a ciertos puntos dentro del intervalo. Aquí es donde entra en juego una propiedad importante: el intervalo $[a, b]$, siendo cerrado y acotado, tiene la característica de que podemos dividirlo en porciones más pequeñas y aun así contener la sucesión.

Ahora, dividimos el intervalo $[a, b]$ en dos mitades: $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$. Como la sucesión es infinita y está contenida en $[a, b]$, al menos una de estas mitades debe contener una cantidad infinita de términos de la sucesión, ya que de lo contrario no habría suficientes términos para cubrir ambos intervalos con una sucesión infinita. Tomamos entonces la mitad que contiene infinitos términos de la sucesión.

Repetimos este proceso: dividimos la mitad elegida en dos mitades más pequeñas y seleccionamos de nuevo la mitad que contiene infinitos términos de la sucesión. Al continuar de esta manera, lo que estamos haciendo es encerrarlos cada vez más los términos de la sucesión en un intervalo más pequeño. Cada vez que reducimos el tamaño del intervalo, podemos estar seguros de que siempre habrá infinitos términos en uno de los subintervalos.

Como el intervalo se vuelve más y más pequeño, los valores de los términos de la sucesión que están en este intervalo también deben acercarse cada vez más a un punto fijo. Este punto al que los términos de la subsucesión se acercan es lo que llamamos el límite. Y esta subsucesión, que hemos ido seleccionando en cada paso, es la subsucesión convergente que garantiza el teorema.

Finalmente, el proceso de subdividir y seleccionar asegura que hemos encontrado una subsucesión que converge a un valor dentro del intervalo $[a, b]$. Así, hemos demostrado que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Este teorema es crucial porque garantiza que, aunque una sucesión no sea convergente

en su totalidad, siempre se puede extraer una subsucesión que sí converge. Esta propiedad tiene implicaciones importantes en el análisis de funciones, ya que permite estudiar el comportamiento de una función mediante sucesiones y subsucesiones.

Supongamos que tenemos una función f definida en un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$. Si tomamos una sucesión $\{x_n\} \subset A$, y $f(x_n)$ es el valor de la función en los puntos de la sucesión, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura que si $\{x_n\}$ es acotada, podemos encontrar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un punto L . En consecuencia, $f(x_{n_k})$ también puede tener un comportamiento convergente en torno a $f(L)$, lo que relaciona el comportamiento de las funciones con las propiedades de las sucesiones.

En particular, este teorema es una herramienta poderosa para demostrar resultados relacionados con la continuidad de funciones. Por ejemplo, si una función f es continua en un conjunto acotado, entonces cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ tendrá una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un punto L , y por la continuidad de f , también se tendrá que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(L)$.

Ejemplo 1: Comencemos con la sucesión alternante $a_n = (-1)^n$, la cual tiene la forma:

$$a_n = (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$\{a_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$

Esta sucesión alterna entre -1 y 1 , por lo que está acotada en el intervalo $[-1, 1]$. Sin embargo, no es convergente porque los términos no se aproximan a un solo valor. En cambio, los términos de la sucesión oscilan indefinidamente entre los dos valores.

Aunque la sucesión completa no converge, podemos extraer subsucesiones que sí lo hacen. Por ejemplo, tomemos los términos donde n es par, es decir, la subsucesión $\{a_{2n}\}$:

$$\{a_{2n}\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

Esta subsucesión es constante y converge a 1 . De forma similar, si tomamos los términos donde n es impar, es decir, la subsucesión $\{a_{2n+1}\}$, obtenemos:

$$\{a_{2n+1}\} = \{-1, -1, -1, -1, \dots\}$$

Esta subsucesión es también constante y converge a -1 . Aunque la sucesión completa no converge, estas dos subsucesiones convergen a diferentes valores, lo cual ilustra el concepto del Teorema de Bolzano-Weierstrass: incluso una sucesión acotada y no convergente puede tener subsucesiones convergentes.

Ejemplo 2: Consideremos ahora la sucesión:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\{a_n\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Esta sucesión está acotada, ya que sus términos están entre -1 y 1 , es decir, los valores de a_n se encuentran dentro del intervalo $[-1, 1]$. Aunque los signos alternan entre positivo y negativo, los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeños en magnitud conforme $n \rightarrow \infty$, acercándose a 0 .

Si nos centramos en la sucesión completa, veremos que todos los términos se acercan a 0 , lo que significa que la sucesión converge a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Además, si extraemos la subsucesión de los términos donde n es par, es decir, $\{a_{2n}\}$, obtenemos:

$$\{a_{2n}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$$

Esta subsucesión también converge a 0 . De forma similar, si tomamos la subsucesión de los índices impares $\{a_{2n+1}\}$, obtenemos:

$$\{a_{2n+1}\} = \left\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots\right\}$$

Esta subsucesión también es convergente, y su límite es igualmente 0 . En este caso, tanto la sucesión completa como las subsucesiones que hemos considerado convergen al mismo valor, 0 .

Ejemplo 3: Ahora, veamos la sucesión definida por la función seno evaluada en múltiplos de $\frac{\pi}{2}$:

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\{a_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$$

Esta sucesión oscila entre los valores 1 , 0 , y -1 . Debido a esta repetición, la sucesión no es convergente en su totalidad. Sin embargo, está acotada en el intervalo $[-1, 1]$, ya que todos sus términos se encuentran entre estos dos valores.

Aunque la sucesión completa no converge, podemos identificar subsucesiones convergentes. Si tomamos los índices de los términos donde $a_n = 1$, es decir, cuando $n = 4k + 1$, obtenemos la subsucesión:

$$\{a_{4k+1}\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

Esta subsucesión es constante y converge a 1 . Si, en cambio, tomamos los términos donde $a_n = -1$, es decir, cuando $n = 4k + 3$, obtenemos la subsucesión:

$$\{a_{4k+3}\} = \{-1, -1, -1, \dots\}$$

Esta subsucesión también es constante, pero converge a -1 . Aunque la sucesión completa no tiene un único valor al que converja, hemos encontrado dos subsucesiones que convergen, cada una a un valor distinto, lo que refleja de nuevo la utilidad del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

5. Derivada de una Función

La **derivada de una función** es uno de los conceptos más importantes en el cálculo, ya que nos permite estudiar cómo cambian las funciones a medida que sus variables se modifican. Para definir la derivada de una función en términos formales, necesitamos comprender cómo las funciones varían en intervalos muy pequeños, y aquí es donde se puede hacer una interesante conexión con las sucesiones.

Consideremos una función $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$. La derivada de $f(x)$ en un punto $x = a$ se define como el límite de la tasa de cambio de f cuando x se acerca a a . Es decir:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Este límite expresa cómo varía la función $f(x)$ cuando realizamos pequeños cambios en x . Desde una perspectiva de sucesiones, podemos pensar en h como una sucesión de valores cada vez más pequeños que se acercan a 0. Por ejemplo, si consideramos una sucesión $\{h_n\}$ tal que $h_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, la derivada puede ser vista como el límite de la sucesión de cocientes:

$$\frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}.$$

Aquí es donde la conexión entre las sucesiones y las funciones se vuelve evidente. Al tomar una sucesión $\{h_n\}$ que se acerca a 0, podemos analizar cómo cambia el cociente incremental de la función. Si esta sucesión de cocientes tiene un límite, ese límite es precisamente la derivada de la función en $x = a$. Por lo tanto, la derivada de una función puede entenderse como el límite de una sucesión particular de cocientes.

Esta conexión es importante porque nos muestra que las sucesiones y las funciones no son conceptos separados, sino que están íntimamente relacionados. En particular, la derivada, que describe el comportamiento local de una función, puede ser interpretada mediante el análisis de sucesiones. Esto es especialmente útil cuando se estudian funciones de manera discreta, ya que las sucesiones permiten estudiar el comportamiento de la función en puntos específicos.

5.1. Cálculo de Límites de Funciones Mediante Sucesiones

El uso de sucesiones es una herramienta útil para calcular límites de funciones. Nos permite transformar el problema del límite continuo en uno más manejable, trabajando con una variable discreta. Veamos cómo usar este enfoque para resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}.$$

Si tratamos de evaluar el límite directamente al sustituir $x = 2$, obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo que indica que necesitamos simplificar la expresión de alguna manera. Aquí, vamos a usar una sucesión para aproximar x a 2 de forma discreta.

Supongamos que x se aproxima a 2 según la relación:

$$x = 2 - \frac{1}{n}, \quad \text{con } n \rightarrow \infty.$$

Esta sustitución nos permite transformar el límite continuo en un límite de una sucesión. Ahora sustituimos $x = 2 - \frac{1}{n}$ en la función original:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(2 - \frac{1}{n})^2 - (2 - \frac{1}{n}) - 2}{(2 - \frac{1}{n}) - 2}.$$

Primero, simplificamos el numerador. Expandiendo $(2 - \frac{1}{n})^2$:

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Entonces el numerador completo se convierte en:

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{n}\right) - 2 = \left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(2 - \frac{1}{n}\right) - 2.$$

Al simplificar:

$$4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n} - 2 = -\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Ahora el denominador es sencillo de calcular:

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 2 = -\frac{1}{n}.$$

Esto nos permite reescribir el límite como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}}.$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{-\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{1}.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, el término $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, por lo que el límite final es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{1} = 3.$$

Por lo tanto, el límite de la función original es:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3.$$

Usando el enfoque de sucesiones, transformamos el límite continuo en un límite discreto mediante el cambio de variable $x = 2 - \frac{1}{n}$, lo que nos permitió simplificar el problema y calcular el valor correcto del límite.

Ejemplo 1: Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Directamente, sustituir $x = 1$ nos lleva a una indeterminación $\frac{0}{0}$. Para resolver esto, podemos usar la sustitución $x = 1 - \frac{1}{n}$, lo que nos permite transformar el límite original en un límite de una sucesión.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^2 - 1}{(1 - \frac{1}{n}) - 1}.$$

Simplificando el numerador y el denominador:

$$(1 - \frac{1}{n})^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad \text{y el denominador} \quad 1 - \frac{1}{n} - 1 = -\frac{1}{n}.$$

Ahora, el límite se convierte en:

$$\frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1}{-\frac{1}{n}} = \frac{-\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}} = 2.$$

Entonces, el valor del límite es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Ejemplo 2: A continuación, resolvamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

De nuevo, si sustituimos $x = 3$, obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Utilizando la sustitución $x = 3 - \frac{1}{n}$, transformamos el límite en una sucesión.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - \frac{1}{n})^2 - 9}{(3 - \frac{1}{n}) - 3}.$$

Expandiendo el numerador:

$$(3 - \frac{1}{n})^2 = 9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Y el denominador es simplemente $3 - \frac{1}{n} - 3 = -\frac{1}{n}$. Simplificando todo, obtenemos:

$$\frac{9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} - 9}{-\frac{1}{n}} = \frac{-\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}} = 6.$$

Por lo tanto, el límite es:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Ejemplo 3: Ahora, evaluemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

De nuevo, al sustituir $x = -2$, obtenemos $\frac{0}{0}$. Usamos la sustitución $x = -2 + \frac{1}{n}$ para transformar el límite en uno más manejable mediante sucesiones.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2 + \frac{1}{n})^2 - 4}{(-2 + \frac{1}{n}) + 2}.$$

Expandimos el numerador:

$$(-2 + \frac{1}{n})^2 = 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Y el denominador se simplifica a $-2 + \frac{1}{n} + 2 = \frac{1}{n}$.

El límite se convierte en:

$$\frac{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} - 4}{\frac{1}{n}} = \frac{-\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 4.$$

Así que, el valor final es:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 4.$$

Ejemplo 4: Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x).$$

Este límite presenta un caso donde al evaluar directamente nos lleva a una forma indeterminada de tipo $0 \cdot -\infty$. Para resolverlo utilizando sucesiones, podemos sustituir $x = \frac{1}{n}$, lo que implica que cuando $n \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0^+$. Reescribamos el límite con esta sustitución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right).$$

Simplificando el logaritmo:

$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n),$$

el límite ahora se convierte en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(-\ln(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln(n)}{n}.$$

Ahora podemos observar que el crecimiento de $\ln(n)$ es mucho más lento que el de n , por lo que este límite tiende a 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Por lo tanto, el límite original es:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$$

Ejemplo 5: Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{5x^2 - x + 4}.$$

Este límite se puede resolver utilizando la sustitución $x = \frac{1}{n}$, de manera que cuando $x \rightarrow \infty$, $n \rightarrow 0^+$. Veamos cómo aplicar esto. Reescribimos el límite utilizando la sustitución mencionada:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{5x^2 - x + 4} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{3\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{n}\right) + 1}{5\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right) + 4}.$$

Ahora simplificamos cada uno de los términos de la fracción:

$$\frac{3\left(\frac{1}{n^2}\right) + 2\left(\frac{1}{n}\right) + 1}{5\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{1}{n}\right) + 4}.$$

Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por n^2 para eliminar los términos fraccionarios:

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{3 + 2n + n^2}{5 - n + 4n^2}.$$

Cuando $n \rightarrow 0^+$, los términos $2n$, n^2 , $-n$, y $4n^2$ tienden a cero. Así que el límite se simplifica a:

$$\frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}.$$

Por lo tanto, el valor del límite es:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{5x^2 - x + 4} = \frac{3}{5}.$$

5.2. Propiedades de los Límites

Los límites de funciones poseen una serie de propiedades que facilitan su cálculo y análisis. Estas propiedades son fundamentales al trabajar con límites, y nos permiten manipular expresiones complejas de manera más sencilla. A continuación, presentamos algunas de las propiedades más importantes:

Teorema 1: Propiedades Básicas de los Límites

Sea $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, donde L y M son números reales finitos, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Propiedad del Límite de una Constante:

$$\lim_{x \rightarrow c} k = k, \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

2. Propiedad del Escalar:

$$\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L, \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

Sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L,$$

lo que implica que los términos de $f(x)$ se aproximan cada vez más a L conforme x se acerca a c . En otras palabras, tanto el $\liminf$ como el $\limsup$ de $f(x)$ cuando x tiende a c deben ser iguales a L :

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = \limsup_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

Ahora, consideremos la sucesión $k \cdot f(x)$, que es simplemente la sucesión $f(x)$ multiplicada por una constante k . Al multiplicar todos los términos de la sucesión por k , tanto el límite inferior como el límite superior de $k \cdot f(x)$ deben ser:

$$\begin{aligned}\liminf_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] &= k \cdot \liminf_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L, \\ \limsup_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] &= k \cdot \limsup_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L.\end{aligned}$$

Dado que tanto el $\liminf$ como el $\limsup$ de $k \cdot f(x)$ son iguales y coinciden en $k \cdot L$, podemos concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = k \cdot L.$$

3. Propiedad de la Suma:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M.$$

Ejemplo 1: Empezamos con un límite sencillo en el que aplicaremos la propiedad de la suma. Sea el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x).$$

Para calcular este límite, podemos descomponer la expresión usando la propiedad de la suma:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x.$$

Evaluamos cada término de manera independiente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2} 3x = 3(2) = 6.$$

Sumando los resultados obtenidos, tenemos:

$$4 + 6 = 10.$$

4. Propiedad de la Diferencia:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M.$$

Sabemos que la diferencia de funciones $f(x)$ y $g(x)$ se puede escribir como:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x).$$

Por la propiedad de la **suma de límites**, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + h(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} h(x),$$

siempre que los límites de $f(x)$ y $h(x)$ existan. En nuestro caso, $h(x) = -g(x)$, y por la **propiedad de la constante**, sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow c} [-g(x)] = - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -M.$$

Por lo tanto, aplicando la propiedad de la suma:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} (-g(x)) = L + (-M) = L - M.$$

5. Propiedad del Producto:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M.$$

Ejemplo 2: Continuemos ahora con un límite que podemos resolver aplicando la propiedad del producto. Consideremos el siguiente caso:

$$\lim_{x \rightarrow 3} ((x - 1)(x + 2)).$$

Según la propiedad del producto, podemos calcular este límite como el producto de los límites de cada factor:

$$\lim_{x \rightarrow 3} ((x - 1)(x + 2)) = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2).$$

Evaluamos los límites por separado:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 3 - 1 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5.$$

Por lo tanto, el valor del límite es:

$$2 \cdot 5 = 10.$$

6. Propiedad del Cociente:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad \text{si } M \neq 0.$$

Ejemplo 3: Resolvamos el siguiente límite utilizando sucesiones y la propiedad del cociente. Consideremos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}.$$

Al sustituir $x = 1$, obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Para resolverlo, usaremos una sucesión. Supongamos que $x = 1 + \frac{1}{n}$, donde $n \rightarrow \infty$, y transformamos el límite en un límite de sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 3}{1 + \frac{1}{n} - 1}.$$

Primero, simplifiquemos el denominador:

$$1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Ahora expandimos el numerador:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad \text{y} \quad 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{2}{n}.$$

Por lo tanto, el numerador completo es:

$$1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 2 + \frac{2}{n} - 3 = \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

El límite ahora es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4.$$

Por lo tanto, el valor del límite es 4.

7. Propiedad de la Potencia:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)^n = L^n, \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}.$$

8. **Propiedad de la Composición de Límites:** Sea $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow L} g(x) = g(L)$, es decir, g es continua en L . Entonces se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right) = g(L).$$

Esta propiedad nos permite calcular el límite de una función compuesta, evaluando primero el límite de la función interior, y luego usando ese resultado en la función exterior.

Ejemplo 5: Utilicemos la propiedad de la composición y sucesiones para resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 4x}.$$

Para resolver este límite, utilizamos una sucesión. Supongamos que $x = \frac{1}{n}$ con $n \rightarrow \infty$, lo que transforma el límite original en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Simplificamos la expresión dentro de la raíz:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n}}.$$

Multiplicamos por n^2 para simplificar la expresión dentro del límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + 4n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 4n}}{n}.$$

A medida que $n \rightarrow \infty$, el término dominante es $4n$, por lo que podemos aproximar el límite como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

Por lo tanto, el valor del límite es 0.

Estas propiedades son extremadamente útiles cuando se trata de calcular límites de funciones más complejas, ya que nos permiten descomponer una función en varias partes más simples y calcular sus límites individualmente. Luego, podemos combinar estos resultados para obtener el límite deseado.

5.3. Continuidad

El concepto de **continuidad** está íntimamente relacionado con la idea de límite. Decimos que una función $f(x)$ es continua en un punto $x = c$ si el valor de la función en ese punto coincide con el límite de la función cuando x se aproxima a c . Formalmente, esto se expresa como:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

En otras palabras, una función es continua en $x = c$ si no hay “saltos”, “agujeros” o “rupturas” en la gráfica de la función en ese punto. Este concepto se puede visualizar de manera intuitiva: una función es continua si podemos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Definición: Una función $f(x)$ es continua en un punto c si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(c)$ está definida, es decir, existe $f(c)$.
2. Existe el límite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$.
3. El valor del límite coincide con el valor de la función en ese punto: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Si estas tres condiciones se cumplen, entonces la función es continua en $x = c$. Si alguna de ellas falla, la función no es continua en ese punto y presenta una discontinuidad.

Para determinar si una función es continua de manera intuitiva, basta con observar si podemos dibujar la gráfica de la función en el intervalo de interés sin levantar el lápiz del papel. Si lo logramos, la función es continua; si hay que levantar el lápiz para saltar sobre algún punto o línea, entonces la función tiene una discontinuidad en esa región.

Por ejemplo, funciones como $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin(x)$, o $f(x) = e^x$ son continuas en todo su dominio, ya que sus gráficas se pueden dibujar sin interrupciones. Por otro lado, una función como:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tiene una discontinuidad en $x = 0$, ya que la función no está definida en ese punto (el denominador se vuelve cero). En este caso, no podemos dibujar la gráfica sin hacer un salto en $x = 0$.

Las funciones continuas tienen la propiedad clave de que **no** presentan “saltos” o “rupturas”, lo que las hace más fáciles de estudiar y predecir. Muchas de las herramientas del cálculo, como la derivación y la integración, requieren que la función sea continua en el intervalo donde estamos trabajando para aplicarse de manera directa.

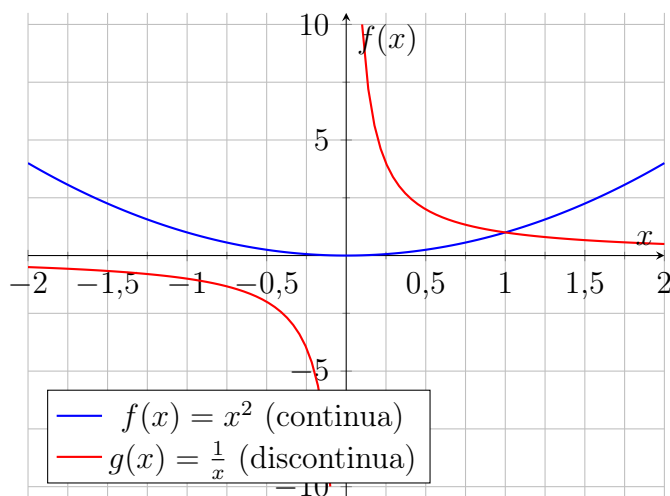


Figura 3: Gráfica de dos funciones: $f(x) = x^2$ (continua) y $g(x) = \frac{1}{x}$ (discontinua). La función $f(x)$ no tiene saltos ni rupturas, mientras que $g(x)$ tiene una discontinuidad en $x = 0$.

Es importante destacar que, si una función es continua en todo su dominio, decimos que es continua en todos los puntos donde está definida. Sin embargo, una función también puede ser continua solo en ciertos intervalos, presentando discontinuidades en algunos puntos.

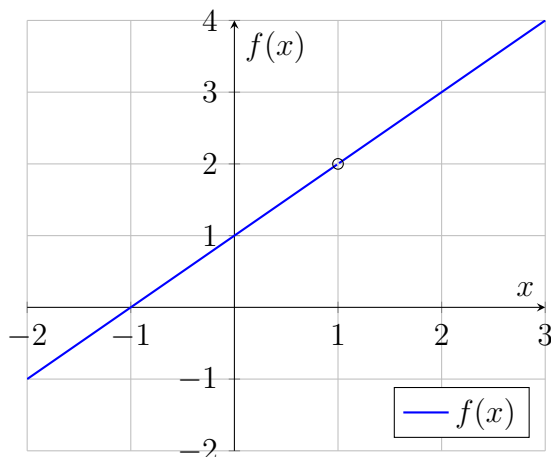
En el estudio de la continuidad de funciones, no siempre encontraremos que una función es continua en todo su dominio. De hecho, algunas funciones pueden presentar lo que se conoce como *discontinuidades*, que son puntos donde la función no sigue siendo suave o donde su gráfica muestra una interrupción. Estas discontinuidades se dividen en dos tipos principales: *removibles* y *no removibles*.

Una **discontinuidad removable** ocurre cuando el límite de la función existe en un punto $x = c$, pero la función no está definida en c , o su valor no coincide con el límite. Es decir, podemos remover la discontinuidad redefiniendo la función en $x = c$ de tal manera que $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Matemáticamente, una discontinuidad removable se presenta cuando:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ existe, pero } f(c) \text{ no está definida o } f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x).$$

Visualmente, una discontinuidad removable aparece como un agujero.^{en} la gráfica de la función, donde la función se interrumpe en un punto, pero el resto de la gráfica sigue siendo continua. Podemos rellenar.^{ese} agujero redefiniendo el valor de la función en el punto de discontinuidad para hacerla continua. Un ejemplo clásico es:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}, \quad \text{para } x \neq 1.$$



Esta función tiene un agujero en $x = 1$, pero el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

existe, por lo que podemos remover"la discontinuidad definiendo $f(1) = 2$.

Una **discontinuidad no removible** ocurre cuando el límite de la función no existe en un punto $x = c$, o los límites laterales en $x = c$ no son iguales. En estos casos, no es posible redefinir el valor de la función en ese punto para hacerla continua. Matemáticamente, una discontinuidad no removible se presenta cuando:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad \text{o cuando} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{no existe.}$$

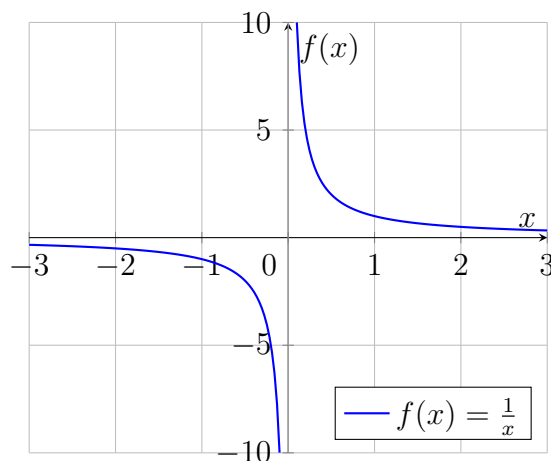
Visualmente, una discontinuidad no removible aparece como un "salto."° una ruptura.^{en} la gráfica de la función, donde la función tiene valores diferentes en los límites laterales, o crece indefinidamente en una dirección. No es posible rellenar.^{esta} discontinuidad simplemente redefiniendo un valor en el punto de discontinuidad.

Un ejemplo de discontinuidad no removible ocurre en funciones como:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{en } x = 0.$$

En este caso, la función no está definida en $x = 0$ y el límite cuando $x \rightarrow 0$ no existe porque la función tiende a ∞ o $-\infty$, dependiendo del lado por el que nos aproximemos. Aquí no es posible remover"la discontinuidad porque los valores de la función divergen cerca de $x = 0$.

Para comprender de manera más precisa lo que sucede en este tipo de discontinuidades, debemos introducir el concepto de *límites laterales*, es decir, los límites por la izquierda y por la derecha.



En muchos casos, al evaluar el comportamiento de una función en un punto crítico, como $x = 0$ en el ejemplo de $f(x) = \frac{1}{x}$, es necesario analizar cómo se comporta la función cuando nos aproximamos a ese punto desde ambos lados de la recta numérica: desde la izquierda (valores menores que c) y desde la derecha (valores mayores que c). Esto nos lleva a los conceptos de *límite por la izquierda* y *límite por la derecha*.

Límite por la Izquierda: El límite por la izquierda, denotado como $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$, describe el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca al punto c desde valores menores que c , es decir, desde la izquierda. En el ejemplo de $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando nos aproximamos a $x = 0$ desde la izquierda ($x \rightarrow 0^-$), los valores de la función $f(x)$ disminuyen hacia $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Este tipo de comportamiento es típico en funciones con discontinuidades no removibles, donde los valores de la función se desvían de manera extrema a medida que nos acercamos a un punto crítico.

Límite por la Derecha: Por otro lado, el límite por la derecha, denotado como $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, analiza el comportamiento de la función cuando x se aproxima a c desde valores mayores que c , es decir, desde la derecha. Siguiendo con el ejemplo de $f(x) = \frac{1}{x}$, si nos aproximamos a $x = 0$ desde valores positivos ($x \rightarrow 0^+$), observamos que los valores de $f(x)$ tienden a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Este análisis desde ambos lados revela que la función tiene un comportamiento completamente diferente dependiendo de la dirección desde la cual nos aproximamos a $x = 0$. Esto implica que los límites laterales no coinciden, lo cual es una clara indicación de que el límite general no existe en $x = 0$.

Para que una función sea continua en un punto $x = c$, los límites por la izquierda y por la derecha deben existir y ser iguales, y ese valor debe coincidir con el valor de la función en c . Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c).$$

Si alguno de estos límites no existe o si los límites laterales no son iguales, la función presenta una discontinuidad en $x = c$. En el caso de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, ya vimos que:

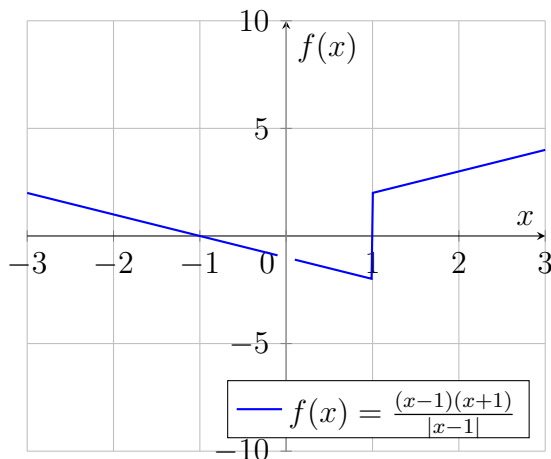
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

lo que muestra que los límites laterales no coinciden, y por lo tanto, la función no es continua en $x = 0$.

Ejemplo 1: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$

Para analizar esta función, primero simplificamos el numerador:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|}.$$



La función tiene una discontinuidad en $x = 1$ debido a la presencia de $|x - 1|$ en el denominador. Cuando $x \neq 1$, podemos simplificar la función de la siguiente manera:

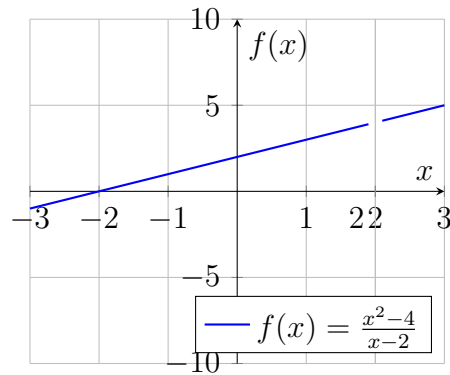
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x > 1, \\ -(x + 1), & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Sin embargo, en $x = 1$, la función no está definida debido al valor absoluto en el denominador. Esto implica que la función tiene una **discontinuidad no removible** en $x = 1$.

Ejemplo 2: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

La función puede factorizarse en:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}.$$

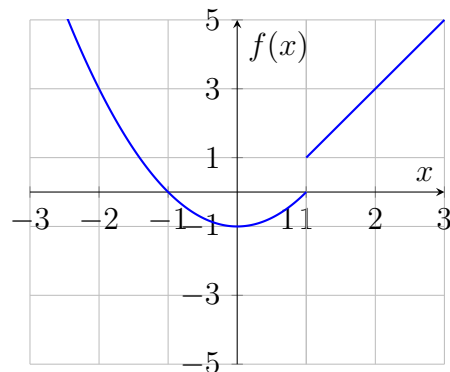


Para $x \neq 2$, la función se simplifica a $f(x) = x + 2$. Sin embargo, en $x = 2$, el denominador se anula, lo que genera una indeterminación. Al calcular el límite en $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Dado que podemos redefinir $f(2) = 4$, concluimos que la función tiene una **discontinuidad removable** en $x = 2$.

Ejemplo 3: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

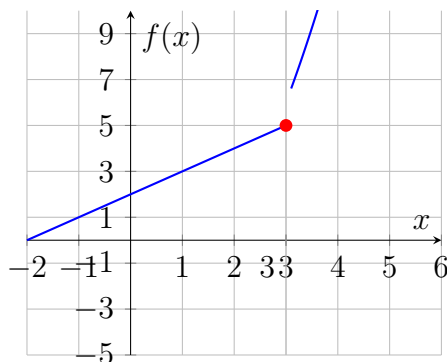


Vamos a calcular los límites laterales en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (1^2 - 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (2(1) - 1) = 1.$$

Dado que los límites laterales no coinciden, la función tiene una **discontinuidad no removable** en $x = 1$.

Ejemplo 4: $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x < 3, \\ 5, & \text{si } x = 3, \\ x^2 - 3, & \text{si } x > 3. \end{cases}$



Los límites laterales en $x = 3$ son:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 + 2 = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9 - 3 = 6.$$

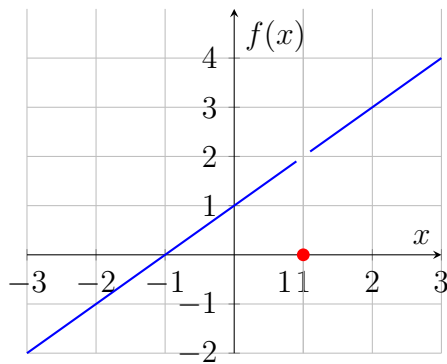
Aunque la función está definida en $x = 3$, los límites laterales no coinciden, por lo que la función tiene una **discontinuidad no removable** en $x = 3$.

Ejemplo 5: $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \neq 1, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Evaluamos los límites laterales en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2.$$

Aunque los límites laterales coinciden, $f(1) = 0$, lo que indica una **discontinuidad remo-**



vible en $x = 1$. Podemos redefinir $f(1) = 2$ para hacer la función continua.

Propiedades de las Funciones Continuas

Las funciones continuas poseen varias propiedades que facilitan el análisis y estudio de su comportamiento. Estas propiedades nos permiten operar con funciones continuas de manera intuitiva y predecir cómo se comportarán sus combinaciones.

Teorema Si f y g son funciones continuas en un punto a , entonces las siguientes funciones también son continuas en $x = a$:

- i. $f \pm g$
- ii. $f \cdot g$
- iii. $\frac{f}{g}$, siempre que $g(a) \neq 0$.

Intuitivamente, estas propiedades se pueden entender de la siguiente manera:

- **Suma y Resta:** Si f y g son continuas en $x = a$, significa que no presentan saltos o rupturas en ese punto. Al sumar o restar dos funciones continuas, la combinación sigue el mismo comportamiento "suave sin interrupciones, ya que el valor de $f(a) \pm g(a)$ depende directamente de los valores de f y g en a , ambos bien definidos y sin saltos.
- **Producto:** Al multiplicar dos funciones continuas f y g en $x = a$, el producto $f \cdot g$ también será continuo en a . Esto se debe a que tanto $f(a)$ como $g(a)$ están bien definidos y no presentan cambios bruscos en torno a a , lo cual asegura que el comportamiento del producto se mantenga continuo.
- **Cociente:** La división de dos funciones continuas f y g también es continua en $x = a$, siempre y cuando $g(a) \neq 0$. La razón intuitiva es que dividir entre una función continua que no es cero en el punto asegura que no ocurran discontinuidades; el valor de $g(a)$ actúa como un divisor bien definido, evitando así rupturas en el cociente $\frac{f}{g}$ en $x = a$.

Estas propiedades son esenciales para trabajar con funciones continuas en cálculo y análisis, ya que nos permiten combinar funciones de manera flexible sin perder la continuidad, siempre y cuando se respeten las condiciones establecidas, como la de $g(a) \neq 0$ en el caso del cociente.

A partir de las propiedades de las funciones continuas, es natural preguntarse sobre la relación entre continuidad y derivabilidad en un punto a . En particular, exploraremos las siguientes preguntas clave:

1. ¿Si f es continua en a , entonces f es derivable en a ?

No necesariamente. La continuidad de una función en un punto a asegura que la función no tenga "saltos." rupturas.^{en} ese punto, lo cual es una condición necesaria para la derivabilidad. Sin embargo, la derivabilidad requiere una condición adicional: que la tasa de cambio de la función (o pendiente de la tangente) sea la misma al aproximarse a a tanto desde la izquierda como desde la derecha.

Un ejemplo clásico para ilustrar esto es la función valor absoluto $f(x) = |x|$. Esta función es continua en $x = 0$ porque podemos trazar su gráfica sin interrupciones en ese punto, y cumple todas las condiciones de continuidad. Sin embargo, al calcular la derivada en $x = 0$, observamos que los límites laterales de la pendiente no coinciden:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

En $x = 0$, el límite de la derivada desde la izquierda no es igual al límite desde la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1.$$

Debido a esta diferencia, la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$ no existe, ya que la pendiente cambia de forma abrupta en ese punto. Por lo tanto, podemos concluir que la continuidad de una función en un punto no implica necesariamente que sea derivable en ese mismo punto.

2. ¿Si f es derivable en a , entonces f es continua en a ?

Sí, si una función f es derivable en a , entonces f es necesariamente continua en a . Esto se debe a que la derivabilidad en un punto requiere que la función tenga un valor bien definido y que la pendiente (tasa de cambio) en torno a ese punto se aproxime de manera uniforme desde ambos lados.

Para ver esto matemáticamente, si f es derivable en a , entonces el límite que define la derivada en a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

debe existir. Para que este límite exista, el valor de $f(a+h)$ debe acercarse a $f(a)$ a medida que $h \rightarrow 0$, lo cual implica que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Esto cumple precisamente la definición de continuidad en $x = a$, por lo que podemos afirmar que la derivabilidad implica continuidad.

Notaciones de la derivada: Existen diferentes formas de expresar la derivada de una función, y cada una de ellas tiene un contexto específico:

- $f'(x)$: Esta notación indica la derivada de f en función de x , no en un punto específico.

- $\frac{d}{dx}f(x)$: Esta es una notación más formal que indica que la derivada de $f(x)$ se está tomando con respecto a x . También se puede aplicar a funciones generales, no solo en puntos específicos.
- $Df(x)$: Esta es una notación alternativa que también se usa para denotar la derivada de f en x , especialmente en contextos más formales o cuando se estudian operadores.
- f_x : Esta notación se usa en funciones multivariantes o cuando tratamos derivadas parciales. Denota la derivada parcial de una función f con respecto a la variable x , es decir, la tasa de cambio de f cuando solo x varía, manteniendo las otras variables constantes.
- $\dot{f}$: Esta notación, popularizada por Newton, se usa para denotar la derivada de una función con respecto al tiempo. Se lee como “la tasa de cambio de f con respecto al tiempo”. Es comúnmente utilizada en física y ecuaciones diferenciales, especialmente para representar velocidades o aceleraciones, donde $\dot{f} = \frac{df}{dt}$.

5.4. Reglas de Derivación

Una vez que entendemos la relación entre continuidad y derivabilidad, podemos estudiar algunas propiedades fundamentales de las derivadas. Estas propiedades nos permiten calcular derivadas de funciones combinadas de manera eficiente y son esenciales para el desarrollo de técnicas más avanzadas de cálculo. A continuación, presentamos las principales propiedades de las derivadas, acompañadas de una breve demostración de cada una.

1. Derivada de una constante

Sea $f(x) = c$, donde c es una constante. Queremos encontrar la derivada de $f(x)$ respecto a x :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Por lo tanto, la derivada de una constante es siempre cero:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

2. Derivada de una constante por una Función

Si $f(x) = k \cdot g(x)$, donde k es una constante y $g(x)$ es una función derivable en x , entonces la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h}.$$

Factorizando k fuera del límite, tenemos:

$$f'(x) = k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = k \cdot g'(x).$$

De este modo, la derivada de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función:

$$\frac{d}{dx}(k \cdot g(x)) = k \cdot g'(x).$$

3. Derivada de la Suma y Resta de Funciones

Si $f(x) = g(x) + h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables en x , entonces la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) + h(x+h)] - [g(x) + h(x)]}{h}.$$

Separando los términos, obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{h(x+h) - h(x)}{h} \right).$$

Aplicando la propiedad del límite, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = g'(x) + h'(x).$$

Así, la derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas:

$$\frac{d}{dx}(g(x) + h(x)) = g'(x) + h'(x).$$

Del mismo modo, para la resta de funciones $f(x) = g(x) - h(x)$, obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(g(x) - h(x)) = g'(x) - h'(x).$$

4. Derivada de una Recta

Finalmente, consideremos la derivada de una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes. Queremos calcular $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[m(x+h) + b] - [mx + b]}{h}.$$

Simplificando dentro del límite, obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mx + mh + b - mx - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m = m.$$

De este modo, la derivada de una función lineal $y = mx + b$ es simplemente la pendiente m :

$$\frac{d}{dx}(mx + b) = m.$$

5. Derivada del Producto de Funciones Consideremos la función $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ Entonces

$$F'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

6. Regla de la derivada de la potencia Es útil saber cómo derivar $f(x) = x^n$ cuando n es un número natural, especialmente considerando que conocemos la regla del producto. Veamos algunos ejemplos para entender cómo funciona:

- Si $f(x) = x$, la derivada es simplemente:

$$f'(x) = 1$$

- Para $f(x) = x^2$, aplicamos la regla del producto:

$$f(x) = x \cdot x$$

$$f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

- Para $f(x) = x^3$:

$$f(x) = x \cdot x^2$$

$$f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

- Para $f(x) = x^4$:

$$f(x) = x \cdot x^3$$

$$f'(x) = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$$

Observando estos ejemplos, notamos que la derivada de x^n es nx^{n-1} . Vamos a confirmarlo usando inducción.

Base de inducción: Cuando $n = 1$, tenemos:

$$f(x) = x \implies f'(x) = 1$$

Esto coincide con la fórmula general $f'(x) = nx^{n-1}$.

Paso inductivo: Supongamos que la fórmula es cierta para $n = k$, es decir:

$$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$$

Ahora comprobamos que también es válida para $n = k + 1$. Consideremos $f(x) = x^{k+1}$ y usemos la regla del producto:

$$f(x) = x \cdot x^k$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot x^k + x \cdot \frac{d}{dx}(x^k)$$

Evaluando las derivadas:

$$f'(x) = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1}$$

$$f'(x) = x^k + kx^k$$

$$f'(x) = (k+1)x^k$$

Esto confirma que la fórmula también se cumple para $n = k + 1$.

Por lo tanto, por el principio de inducción, concluimos que:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Nota: Esta regla se puede extender para derivar funciones de la forma $f(x) = x^n$ con n real. Veamos el caso de $f(x) = \sqrt{x}$. Definimos $f(x)$ y consideramos:

$$f(x) \cdot f(x) = (\sqrt{x})^2$$

Entonces:

$$f(x) \cdot f(x) = x$$

Derivamos ambos lados:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot f(x)] = \frac{d}{dx}[x]$$

Aplicamos la regla del producto:

$$f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 1$$

Simplificamos:

$$2f(x) \cdot f'(x) = 1$$

Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2f(x)}$$

Como $f(x) = \sqrt{x}$, sustituimos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esto muestra que la regla de la potencia se aplica a cualquier exponente real n . De hecho, la fórmula general:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

es válida para todo $n \in \mathbb{R}$. Si $n = -1$, por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

7. Regla de la derivada del cociente Derivar una función que se define como el cociente de dos funciones, $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, es algo muy útil, especialmente porque conocemos la regla del producto. Partimos de la siguiente observación:

$$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies f(x) = H(x) \cdot g(x)$$

Derivamos ambos lados con respecto a x :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[H(x) \cdot g(x)]$$

Aplicamos la regla del producto:

$$f'(x) = H'(x) \cdot g(x) + H(x) \cdot g'(x)$$

Ahora, despejamos $H'(x)$:

$$H'(x) \cdot g(x) = f'(x) - H(x) \cdot g'(x)$$

$$H'(x) = \frac{f'(x) - H(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$$

Sustituimos $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ en la expresión:

$$H'(x) = \frac{f'(x) - \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \cdot g'(x)}{g(x)}$$

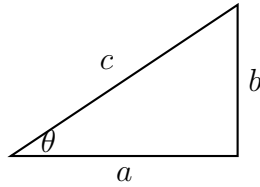
Simplificamos el término en el numerador:

$$H'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

De esta manera, obtenemos la regla del cociente:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

8. Derivadas trigonométricas: Para entender las relaciones trigonométricas y sus derivaciones, partimos de un triángulo rectángulo con los lados a , b , y la hipotenusa c . El ángulo considerado es θ . A continuación, representamos el triángulo:



Usando las definiciones básicas de las funciones trigonométricas, tenemos:

- $\sin \theta = \frac{b}{c}$, donde b es el cateto opuesto y c es la hipotenusa.
- $\cos \theta = \frac{a}{c}$, donde a es el cateto adyacente y c es la hipotenusa.
- $\tan \theta = \frac{b}{a}$, definida como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
- $\cot \theta = \frac{a}{b}$, la inversa de $\tan \theta$.
- $\sec \theta = \frac{c}{a}$, la inversa de $\cos \theta$.
- $\csc \theta = \frac{c}{b}$, la inversa de $\sin \theta$.

La relación de Pitágoras en el triángulo es:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Podemos expresar c^2 en términos de las funciones trigonométricas:

$$c^2 = (\cos \theta \cdot c)^2 + (\sin \theta \cdot c)^2.$$

Expandiendo:

$$c^2 = \cos^2 \theta \cdot c^2 + \sin^2 \theta \cdot c^2.$$

Factorizamos por c^2 :

$$c^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = c^2.$$

Dividiendo ambos lados por c^2 , obtenemos la identidad fundamental:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Otras identidades se pueden obtener usando esta relación:

- Dividiendo $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ por $\cos^2 \theta$, obtenemos:

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta.$$

- Dividiendo $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ por $\sin^2 \theta$, obtenemos:

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta.$$

Derivada de la tangente:

$$f'(\theta) = (\tan \theta)' = \sec^2 \theta.$$

Derivada de la secante: Consideramos la identidad trigonométrica que relaciona la secante y la tangente de un ángulo:

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta.$$

Derivamos ambos lados con respecto a θ :

$$(\sec^2 \theta)' = (1 + \tan^2 \theta)'.$$

Aplicamos la regla de la potencia y la regla de la cadena a ambos lados. En el lado izquierdo tenemos:

$$(\sec^2 \theta)' = 2 \sec \theta \cdot (\sec \theta)'.$$

En el lado derecho, aplicamos la regla de la suma y la regla de la potencia:

$$(1 + \tan^2 \theta)' = 0 + 2 \tan \theta \cdot (\tan \theta)'.$$

Como ya conocemos la derivada de la tangente, que es $(\tan \theta)' = \sec^2 \theta$, sustituimos este valor:

$$2 \sec \theta \cdot (\sec \theta)' = 2 \tan \theta \cdot \sec^2 \theta.$$

Dividimos ambos lados entre $2 \sec \theta$ para despejar $(\sec \theta)'$:

$$(\sec \theta)' = \frac{\tan \theta \cdot \sec^2 \theta}{\sec \theta}.$$

Simplificamos la fracción dividiendo $\sec^2 \theta$ entre $\sec \theta$:

$$(\sec \theta)' = \sec \theta \cdot \tan \theta.$$

Así, hemos obtenido la derivada de $\sec \theta$:

$$(\sec \theta)' = \sec \theta \tan \theta.$$

Derivada del coseno: Partimos de la identidad básica que relaciona el coseno y la secante:

$$\cos \theta \cdot \sec \theta = 1.$$

Esta relación es siempre cierta porque $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$. Ahora, derivamos ambos lados con respecto a θ :

$$(\cos \theta \cdot \sec \theta)' = 0.$$

Utilizamos la regla del producto en el lado izquierdo. Así que tenemos:

$$(\cos \theta)' \cdot \sec \theta + \cos \theta \cdot (\sec \theta)' = 0.$$

Ahora, nuestro objetivo es encontrar $(\cos \theta)'$, la derivada del coseno. Para ello, necesitamos saber que la derivada de $\sec \theta$ es $\sec \theta \cdot \tan \theta$, que ya hemos demostrado previamente. Sustituyendo este valor, obtenemos:

$$(\cos \theta)' \cdot \sec \theta + \cos \theta \cdot (\sec \theta \cdot \tan \theta) = 0.$$

Simplificamos esta expresión:

$$(\cos \theta)' \cdot \sec \theta + \cos \theta \cdot \sec \theta \cdot \tan \theta = 0.$$

Ahora podemos factorizar $\sec \theta$ en el lado izquierdo:

$$\sec \theta ((\cos \theta)' + \cos \theta \cdot \tan \theta) = 0.$$

Dado que $\sec \theta \neq 0$, podemos dividir ambos lados entre $\sec \theta$:

$$(\cos \theta)' + \cos \theta \cdot \tan \theta = 0.$$

Aislamos $(\cos \theta)'$ para obtener su valor:

$$(\cos \theta)' = -\cos \theta \cdot \tan \theta.$$

Recordamos que $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, lo cual nos permite simplificar:

$$(\cos \theta)' = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta.$$

Simplificando aún más, obtenemos:

$$(\cos \theta)' = -\sin \theta.$$

Así, hemos demostrado que la derivada de $\cos \theta$ es:

$$(\cos \theta)' = -\sin \theta.$$

Derivada del seno: Partimos de la identidad trigonométrica fundamental:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Derivamos ambos lados de esta igualdad con respecto a θ :

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)' = (1)'.$$

Aplicamos la regla de la derivada en el lado izquierdo. Derivamos cada término por separado y utilizamos la regla de la cadena para cada uno:

$$(\cos^2 \theta)' + (\sin^2 \theta)' = 0.$$

Ahora, derivamos cada término. La derivada de $\cos^2 \theta$ es $2 \cos \theta \cdot (\cos \theta)'$, y la derivada de $\sin^2 \theta$ es $2 \sin \theta \cdot (\sin \theta)'$. Sustituyendo estos resultados, obtenemos:

$$2 \cos \theta \cdot (\cos \theta)' + 2 \sin \theta \cdot (\sin \theta)' = 0.$$

Simplificamos dividiendo todos los términos entre 2:

$$\cos \theta \cdot (\cos \theta)' + \sin \theta \cdot (\sin \theta)' = 0.$$

Nuestro objetivo es encontrar $(\sin \theta)'$, así que despejamos este término. Movemos el primer término al otro lado de la ecuación:

$$\sin \theta \cdot (\sin \theta)' = -\cos \theta \cdot (\cos \theta)'.$$

Ahora dividimos ambos lados entre $\sin \theta$ para aislar $(\sin \theta)'$:

$$(\sin \theta)' = -\frac{\cos \theta \cdot (\cos \theta)'}{\sin \theta}.$$

Recordamos que $(\cos \theta)' = -\sin \theta$, y sustituimos este valor en la expresión anterior:

$$(\sin \theta)' = -\frac{\cos \theta \cdot (-\sin \theta)}{\sin \theta}.$$

Simplificamos la expresión cancelando $\sin \theta$ en el numerador y el denominador:

$$(\sin \theta)' = \cos \theta.$$

Así, hemos demostrado que la derivada de $\sin \theta$ es:

$$(\sin \theta)' = \cos \theta.$$

Derivada de la cosecante: Partimos de la identidad que relaciona la cosecante con el seno:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}.$$

A partir de esta identidad, podemos reescribirla como:

$$\csc \theta \cdot \sin \theta = 1.$$

Derivamos ambos lados con respecto a θ :

$$(\csc \theta \cdot \sin \theta)' = (1)'.$$

Aplicamos la regla del producto en el lado izquierdo. Entonces, tenemos:

$$(\csc \theta)' \cdot \sin \theta + \csc \theta \cdot (\sin \theta)' = 0.$$

Ahora, necesitamos las derivadas de $\sin \theta$ y $\csc \theta$. Sabemos que $(\sin \theta)' = \cos \theta$, que hemos demostrado previamente. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos:

$$(\csc \theta)' \cdot \sin \theta + \csc \theta \cdot \cos \theta = 0.$$

Ahora despejamos $(\csc \theta)'$ para encontrar su valor. Movemos el término $\csc \theta \cdot \cos \theta$ al otro lado de la ecuación:

$$(\csc \theta)' \cdot \sin \theta = -\csc \theta \cdot \cos \theta.$$

Dividimos ambos lados entre $\sin \theta$ para aislar $(\csc \theta)'$:

$$(\csc \theta)' = -\csc \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Usamos la identidad $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ para simplificar la expresión:

$$(\csc \theta)' = -\csc \theta \cdot \cot \theta.$$

Así, hemos encontrado que la derivada de $\csc \theta$ es:

$$(\csc \theta)' = -\csc \theta \cot \theta.$$

Derivada de la cotangente: Observamos que existe una relación fundamental entre la cotangente y la tangente, expresada como:

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}.$$

A partir de esta expresión, podemos reescribir la identidad como:

$$\cot \theta \cdot \tan \theta = 1.$$

Ahora derivamos ambos lados con respecto a θ :

$$(\cot \theta \cdot \tan \theta)' = (1)'.$$

Aplicamos la regla del producto en el lado izquierdo:

$$(\cot \theta)' \cdot \tan \theta + \cot \theta \cdot (\tan \theta)' = 0.$$

Sabemos que la derivada de $\tan \theta$ es $\sec^2 \theta$, que ya hemos demostrado previamente. Sustituyendo este valor, obtenemos:

$$(\cot \theta)' \cdot \tan \theta + \cot \theta \cdot \sec^2 \theta = 0.$$

Ahora despejamos $(\cot \theta)'$, moviendo el segundo término al otro lado de la ecuación:

$$(\cot \theta)' \cdot \tan \theta = -\cot \theta \cdot \sec^2 \theta.$$

Dividimos ambos lados entre $\tan \theta$ para aislar $(\cot \theta)'$:

$$(\cot \theta)' = -\frac{\cot \theta \cdot \sec^2 \theta}{\tan \theta}.$$

Utilizamos las identidades trigonométricas $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ y $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ para simplificar, obteniendo:

$$(\cot \theta)' = -\csc^2 \theta.$$

Así, hemos encontrado que la derivada de $\cot \theta$ es:

$$(\cot \theta)' = -\csc^2 \theta.$$

A partir de los resultados que hemos obtenido, podemos generalizar una regla que nos permita derivar funciones compuestas. Observemos que si tenemos una función $f(x)$ elevada a una potencia, como en los ejemplos siguientes, el objetivo será identificar un patrón. Comencemos con los ejemplos básicos:

- Para $n = 2$, escribimos $(f(x))^2$ como $f(x) \cdot f(x)$. Su derivada, aplicando la regla del producto, es:

$$((f(x))^2)' = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x).$$

Esto se simplifica agrupando términos similares:

$$((f(x))^2)' = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x).$$

- Para $n = 3$, podemos expresar $(f(x))^3$ como $f(x) \cdot (f(x))^2$. Aplicando nuevamente la regla del producto:

$$((f(x))^3)' = f'(x) \cdot (f(x))^2 + f(x) \cdot (f(x)^2)'$$

Ya sabemos que $((f(x))^2)' = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)$, por lo que sustituimos este resultado:

$$((f(x))^3)' = f'(x) \cdot (f(x))^2 + f(x) \cdot (2 \cdot f'(x) \cdot f(x)).$$

Simplificando:

$$((f(x))^3)' = 3 \cdot f'(x) \cdot (f(x))^2.$$

- Para $n = 4$, la función $(f(x))^4$ se escribe como $f(x) \cdot (f(x))^3$. Al derivar, tenemos:

$$((f(x))^4)' = f'(x) \cdot (f(x))^3 + f(x) \cdot (f(x)^3)'$$

Como ya calculamos que $((f(x))^3)' = 3 \cdot f'(x) \cdot (f(x))^2$, sustituimos:

$$((f(x))^4)' = f'(x) \cdot (f(x))^3 + f(x) \cdot (3 \cdot f'(x) \cdot (f(x))^2).$$

Finalmente, simplificando:

$$((f(x))^4)' = 4 \cdot f'(x) \cdot (f(x))^3.$$

Al derivar $(f(x))^2$, $(f(x))^3$, $(f(x))^4$, hemos notado que siempre aparece un patrón: la derivada involucra el exponente original, la derivada de $f(x)$, y $f(x)$ elevada a una potencia menor. Este patrón no es una coincidencia, y ahora vamos a demostrar que funciona para cualquier potencia natural n . Esto no solo formaliza nuestras observaciones, sino que también nos permitirá usar esta regla con confianza en cualquier cálculo futuro.

Para demostrarlo, vamos a emplear el principio de inducción, un método que resulta especialmente útil para generalizar resultados como este.

Primero, verificamos el caso base. Si $n = 1$, la función es simplemente $f(x)^1 = f(x)$. La derivada en este caso es claramente:

$$(f(x)^1)' = f'(x).$$

Por otro lado, siguiendo el patrón observado en los ejemplos, esperaríamos que la derivada sea:

$$1 \cdot f'(x) \cdot f(x)^0 = f'(x).$$

Ambos resultados coinciden, por lo que el caso base está verificado. Supongamos que para un número natural k , la fórmula es válida. Es decir, asumimos que:

$$(f(x)^k)' = k \cdot f'(x) \cdot f(x)^{k-1}.$$

Esta es nuestra hipótesis de inducción. Ahora queremos demostrar que también será válida para $k+1$. Para ello, escribimos $f(x)^{k+1}$ como $f(x) \cdot f(x)^k$, lo que nos permite derivar utilizando la regla del producto:

$$(f(x)^{k+1})' = (f(x) \cdot f(x)^k)'.$$

Aplicamos la regla del producto, derivando primero $f(x)$ y luego $f(x)^k$:

$$(f(x)^{k+1})' = (f(x))' \cdot f(x)^k + f(x) \cdot (f(x)^k)'.$$

Sabemos que $(f(x))' = f'(x)$, y por la hipótesis de inducción, tenemos $(f(x)^k)' = k \cdot f'(x) \cdot f(x)^{k-1}$. Sustituyendo estas expresiones, obtenemos:

$$(f(x)^{k+1})' = f'(x) \cdot f(x)^k + f(x) \cdot (k \cdot f'(x) \cdot f(x)^{k-1}).$$

Simplificando el segundo término:

$$(f(x)^{k+1})' = f'(x) \cdot f(x)^k + k \cdot f'(x) \cdot f(x)^k.$$

Podremos factorizar $f'(x) \cdot f(x)^k$ en ambos términos:

$$(f(x)^{k+1})' = (1 + k) \cdot f'(x) \cdot f(x)^k.$$

Finalmente, escribimos $1 + k$ como $k + 1$, lo que nos da:

$$(f(x)^{k+1})' = (k+1) \cdot f'(x) \cdot f(x)^k.$$

Hemos demostrado que si la fórmula es válida para $n = k$, entonces también es válida para $n = k + 1$. Como verificamos que funciona para $n = 1$, podemos concluir, por el principio de inducción, que la regla se cumple para todos los números naturales n .

Esta demostración no solo confirma nuestras observaciones iniciales, sino que establece una base sólida para aplicar esta regla en cualquier derivada de potencias de funciones, simplificando cálculos más complejos.

Ahora, podemos identificar un patrón general que nos permita derivar funciones del tipo $(f(x)^{1/n})^n$. Para comprender mejor cómo funciona, reescribimos $f(x)$ como una potencia y analizamos algunos casos concretos. Nuestro objetivo será notar cómo la derivada de $f(x)^{1/n}$ encaja perfectamente para simplificar los términos y recuperar $f'(x)$.

- Para $n = 2$, reescribimos $f(x) = (f(x)^{1/2})^2$. Derivamos ambos lados:

$$f'(x) = 2 \cdot (f(x)^{1/2})^1 \cdot (f(x)^{1/2})'.$$

De aquí, despejamos $(f(x)^{1/2})'$ dividiendo ambos lados por $2 \cdot f(x)^{1/2}$:

$$(f(x)^{1/2})' = \frac{1}{2} f(x)^{-1/2} f'(x).$$

Por lo tanto, concluimos que la derivada de $f(x)^{1/2}$ es:

$$\frac{1}{2} f(x)^{-1/2} f'(x).$$

- Para $n = 3$, escribimos $f(x) = (f(x)^{1/3})^3$. Derivamos ambos lados:

$$f'(x) = 3 \cdot (f(x)^{1/3})^2 \cdot (f(x)^{1/3})'.$$

Nuevamente, despejamos $(f(x)^{1/3})'$ dividiendo ambos lados por $3 \cdot (f(x)^{1/3})^2$:

$$(f(x)^{1/3})' = \frac{1}{3} f(x)^{-2/3} f'(x).$$

Así, concluimos que la derivada de $f(x)^{1/3}$ es:

$$\frac{1}{3} f(x)^{-2/3} f'(x).$$

- Para $n = 4$, escribimos $f(x) = (f(x)^{1/4})^4$. Derivamos ambos lados:

$$f'(x) = 4 \cdot (f(x)^{1/4})^3 \cdot (f(x)^{1/4})'.$$

Despejamos $(f(x)^{1/4})'$ dividiendo ambos lados por $4 \cdot (f(x)^{1/4})^3$:

$$(f(x)^{1/4})' = \frac{1}{4} f(x)^{-3/4} f'(x).$$

Finalmente, concluimos que la derivada de $f(x)^{1/4}$ es:

$$\frac{1}{4} f(x)^{-3/4} f'(x).$$

En cada caso, observamos que la derivada de $f(x)^{1/n}$ sigue el patrón:

$$(f(x)^{1/n})' = \frac{1}{n} f(x)^{\frac{1}{n}-1} f'(x).$$

Ahora que hemos identificado un patrón en la derivada de $f(x)^{1/n}$, queremos demostrar formalmente que esta tiene la forma:

$$(f(x)^{1/n})' = \frac{1}{n} f(x)^{\frac{1}{n}-1} f'(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Formalizaremos este resultado usando el principio de inducción. Comencemos verificando el caso base, $n = 1$. Si $n = 1$, tenemos $f(x)^{1/1} = f(x)$, cuya derivada es claramente:

$$(f(x)^{1/1})' = f'(x).$$

Esto coincide perfectamente con la fórmula general, ya que:

$$\frac{1}{1} f(x)^{1-1} f'(x) = f'(x).$$

Por lo tanto, el caso base está verificado. Ahora, asumamos que la fórmula es válida para algún $n = k$. Es decir, supongamos que:

$$(f(x)^{1/k})' = \frac{1}{k} f(x)^{\frac{1}{k}-1} f'(x).$$

Queremos demostrar que la fórmula también se cumple para $n = k+1$. Para ello, reescribimos $f(x)^{1/(k+1)}$ de manera útil. Sabemos que:

$$f(x)^{1/(k+1)} = (f(x)^{1/k})^{k/(k+1)}.$$

Derivamos ambos lados de esta relación. La derivada de $f(x)^{1/(k+1)}$ será:

$$(f(x)^{1/(k+1)})' = \frac{k}{k+1} \cdot (f(x)^{1/k})^{\frac{k}{k+1}-1} \cdot (f(x)^{1/k})'.$$

Aquí utilizamos nuestra hipótesis inductiva, que nos dice que:

$$(f(x)^{1/k})' = \frac{1}{k} f(x)^{\frac{1}{k}-1} f'(x).$$

Sustituimos este resultado en la ecuación anterior:

$$(f(x)^{1/(k+1)})' = \frac{k}{k+1} \cdot (f(x)^{1/k})^{\frac{k}{k+1}-1} \cdot \frac{1}{k} f(x)^{\frac{1}{k}-1} f'(x).$$

Aquí es importante notar que los exponentes combinados de $f(x)$ se suman. Simplificando esta expresión, tenemos:

$$(f(x)^{1/(k+1)})' = \frac{1}{k+1} f(x)^{\frac{1}{k+1}-1} f'(x).$$

Esto completa la demostración, ya que hemos probado que si la fórmula es válida para $n = k$, entonces también lo es para $n = k + 1$. Finalmente, concluimos que:

$$(f(x)^{1/n})' = \frac{1}{n} f(x)^{\frac{1}{n}-1} f'(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hasta ahora, hemos explorado derivadas específicas de funciones como $f(x)^n$ y $f(x)^{1/n}$. Al trabajar con estas expresiones, notamos algo interesante: ambos casos dependen de cómo la derivada externa (el exponente) interactúa con la derivada interna (la función $f(x)$ y su propia derivada $f'(x)$). Esta interacción es el “corazón” de la regla de la cadena, que nos permite manejar funciones compuestas.

Por ejemplo, en $f(x)^n$, vimos que:

$$\frac{d}{dx} (f(x)^n) = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

Aquí, el término $n \cdot f(x)^{n-1}$ proviene de la derivada de la función externa $g(u) = u^n$, mientras que $f'(x)$ refleja el cambio en la función interna $f(x)$.

Similarmente, para $f(x)^{1/n}$, obtuvimos:

$$\frac{d}{dx} (f(x)^{1/n}) = \frac{1}{n} f(x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x).$$

El término $\frac{1}{n} f(x)^{\frac{1}{n}-1}$ proviene de la derivada de $g(u) = u^{1/n}$, y nuevamente $f'(x)$ aparece como la contribución de la función interna.

Entonces, lo que hemos hecho hasta ahora no son simplemente ejercicios independientes: son ejemplos concretos de cómo se aplica la regla de la cadena. Lo que hace esta regla es generalizar estas ideas a cualquier función compuesta, sin importar su forma. Ahora, vamos a demostrar esta regla desde su definición, mostrando por qué funciona para cualquier composición $g(f(x))$.

9. Regla de la cadena: Consideremos la composición $g(f(x))$. Queremos encontrar su derivada, así que partimos de la definición clásica de la derivada:

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{g(f(x+b)) - g(f(x))}{b}.$$

Este límite nos dice cómo cambia $g(f(x))$ cuando x cambia. Sin embargo, g no depende directamente de x ; depende de $f(x)$, que a su vez depende de x . Esta dependencia en dos niveles es lo que hace necesario separar los cambios.

Para manejar esto, introducimos una nueva variable:

$$k = f(x+b) - f(x).$$

Esta variable mide cuánto cambia $f(x)$ cuando x cambia en b . Si $b \rightarrow 0$, también $k \rightarrow 0$. Esto nos permite reescribir el límite original en términos de k :

$$\frac{g(f(x+b)) - g(f(x))}{b} = \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \cdot \frac{k}{b}.$$

Veamos qué significan estas dos fracciones:

- La primera, $\frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k}$, mide cómo cambia g respecto a su argumento. En el límite cuando $k \rightarrow 0$, esto es simplemente la derivada de $g(u)$, evaluada en $u = f(x)$:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} = g'(f(x)).$$

- La segunda, $\frac{k}{b}$, mide cómo cambia $f(x)$ respecto a x . En el límite cuando $b \rightarrow 0$, esto es la derivada de $f(x)$:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{k}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(x+b) - f(x)}{b} = f'(x).$$

Al juntar ambos resultados, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ahora podemos ver claramente cómo las derivadas de $f(x)^n$ y $f(x)^{1/n}$ no son más que aplicaciones directas de esta regla. En el primer caso, si $g(u) = u^n$, entonces $g'(u) = n \cdot u^{n-1}$, lo que nos da:

$$\frac{d}{dx}(f(x)^n) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

De manera similar, si $g(u) = u^{1/n}$, entonces $g'(u) = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$, y obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(f(x)^{1/n}) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{n}f(x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x).$$

Así, la regla de la cadena no solo unifica estos resultados, sino que también explica por qué funcionan. Ambos casos se derivan de un principio fundamental: descomponer cómo los cambios en x afectan tanto a la función interna $f(x)$ como a la función externa $g(u)$.

Ejemplo 1: $y = (x^2 + 1)^5$

Ahora consideremos $y = (x^2 + 1)^5$. Aquí, la estructura compuesta es también evidente. La función externa es $g(u) = u^5$, y la interna es $f(x) = x^2 + 1$.

Derivamos $g(u)$ para obtener $g'(u) = 5u^4$, y derivamos $f(x)$ para hallar $f'(x) = 2x$. Aplicamos la regla de la cadena:

$$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Sustituyendo las derivadas, obtenemos:

$$y' = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x.$$

Simplificando el resultado:

$$y' = 10x(x^2 + 1)^4.$$

Este ejemplo destaca cómo podemos identificar fácilmente la función externa e interna en expresiones que involucran potencias, y cómo la regla de la cadena nos permite combinar las derivadas de ambas de manera directa.

Ejemplo 2: $y = \cot(x^3 - \sqrt{x})$

Este ejemplo es un poco más elaborado: $y = \cot(x^3 - \sqrt{x})$. La composición es evidente, con la función externa $g(u) = \cot(u)$ y la interna $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$.

Sabemos que $g'(u) = -\csc^2(u)$, mientras que la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Sustituimos:

$$y' = -\csc^2(x^3 - \sqrt{x}) \cdot \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

En este caso, la regla de la cadena conecta las derivadas de $\cot$ y $x^3 - \sqrt{x}$, mostrándonos cómo ambos cambios interactúan. El resultado final es:

$$y' = -\csc^2(x^3 - \sqrt{x}) \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Ejemplo 3: $y = \sqrt[9]{2x^2 + \cos(x)}$

Finalmente, consideremos $y = \sqrt[9]{2x^2 + \cos(x)}$. Reescribimos esta función como una potencia fraccionaria:

$$y = (2x^2 + \cos(x))^{1/9}.$$

La función externa es $g(u) = u^{1/9}$, mientras que la interna es $f(x) = 2x^2 + \cos(x)$. Derivamos $g(u)$ para obtener:

$$g'(u) = \frac{1}{9}u^{-8/9},$$

y derivamos $f(x)$ como:

$$f'(x) = 4x - \sin(x).$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Sustituimos:

$$y' = \frac{1}{9}(2x^2 + \cos(x))^{-8/9} \cdot (4x - \sin(x)).$$

El resultado final es:

$$y' = \frac{4x - \sin(x)}{9(2x^2 + \cos(x))^{8/9}}.$$

Este ejemplo ilustra cómo la regla de la cadena puede aplicarse incluso en funciones más complejas, combinando potencias fraccionarias y trigonometría en un solo proceso.

6. Aplicaciones de la Derivada

6.1. Derivación implícita

Hemos visto cómo la regla de la cadena nos permite derivar funciones compuestas al identificar sus partes internas y externas. Pero la capacidad de derivar no se limita únicamente a funciones expresadas explícitamente, como $y = f(x)$. También es posible derivar relaciones más generales que no están despejadas para y en términos de x . Este proceso se conoce como **derivación implícita**.

Muchas veces, en lugar de una función explícita como $y = f(x)$, nos encontramos con ecuaciones que involucran x y y mezclados, como:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{la ecuación de un círculo}).$$

En estos casos, queremos calcular $\frac{dy}{dx}$, es decir, cómo cambia y con respecto a x . Aunque en este caso se puede despejar y en términos de x como $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, en situaciones más complejas donde no se puede despejar y de forma sencilla, recurrimos a la derivación implícita. Esto nos permite derivar ambos lados de la ecuación respecto a x , **considerando y como una**

función de x . Por ejemplo, en la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$, derivamos cada término respecto a x :

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1).$$

Sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(y^2) = 2y \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{por la regla de la cadena}).$$

Entonces, obtenemos:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Resolviendo para $\frac{dy}{dx}$, encontramos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

La derivación implícita no solo amplía nuestras herramientas, sino que también nos permite trabajar con curvas más complejas, como el círculo anterior, que no pueden ser expresadas como funciones explícitas de x . Esto incluye elipses, hipérbolas y otras curvas donde y está implícitamente relacionado con x .

Ejemplo Si $y = x^r$, donde r es un número racional tal que $r = \frac{m}{n}$, demostrar que $y' = rx^{r-1}$ utilizando derivación implícita y la fórmula de derivación para exponentes enteros.

Por la definición de exponente racional, se sabe que $y = x^r$ implica la relación $y^n = x^m$. Esta expresión es útil porque transforma el problema en una ecuación algebraica que puede ser manipulada fácilmente. A partir de esta relación, se procede a derivar ambos lados con respecto a x .

En el lado izquierdo de la igualdad, se aplica la regla de la cadena para derivar y^n , lo cual da como resultado:

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}.$$

En el lado derecho, al derivar x^m con respecto a x , se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}.$$

Igualando ambos resultados, se obtiene la ecuación:

$$ny^{n-1} \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

A partir de esta igualdad, se despeja $\frac{dy}{dx}$, ya que este término representa la derivada buscada. Dividiendo ambos lados por ny^{n-1} , se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}}.$$

Ahora es necesario expresar el resultado únicamente en función de x . Recordando que $y = x^r$, se tiene que $y^{n-1} = (x^r)^{n-1} = x^{r(n-1)}$. Sustituyendo esto en la expresión anterior, se llega a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{nx^{r(n-1)}}.$$

Para simplificar aún más, se observa que $m = rn$, de modo que el numerador puede reescribirse como rn . Así, la ecuación se transforma en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{rnx^{m-1}}{nx^{r(n-1)}}.$$

Cancelando n en el numerador y el denominador, y combinando las potencias de x , se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = rx^{m-1-r(n-1)}.$$

Finalmente, se simplifica el exponente. Recordando que $m = rn$, el término $m - 1 - r(n - 1)$ se desarrolla como:

$$m - 1 - r(n - 1) = rn - 1 - r(n - 1) = r - 1.$$

Por lo tanto, se concluye que la derivada está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}.$$

Ejemplo La ecuación $x \sin(xy) + 2x^2 = 0$ define implícitamente y como función de x . Suponiendo que la derivada y' existe, demostrar que satisface la ecuación:

$$y'x^2 \cos(xy) + xy \cos(xy) + \sin(xy) + 4x = 0.$$

Derivando a ambos lados de la ecuación $x \sin(xy) + 2x^2 = 0$. En el primer término, $x \sin(xy)$, es necesario utilizar la regla del producto, ya que tanto x como $\sin(xy)$ dependen de x . Esto da:

$$\frac{d}{dx}(x \sin(xy)) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \sin(xy) + x \cdot \frac{d}{dx}(\sin(xy)).$$

El primer término es simplemente $\sin(xy)$. Para el segundo término, se deriva $\sin(xy)$ usando la regla de la cadena, lo cual produce:

$$\frac{d}{dx}(\sin(xy)) = \cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy).$$

Nuevamente, se aplica la regla del producto a xy , obteniendo:

$$\frac{d}{dx}(xy) = y + x \frac{dy}{dx}.$$

Por lo tanto, al derivar el término $x \sin(xy)$, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(x \sin(xy)) = \sin(xy) + x \cos(xy)(y + xy').$$

A continuación, se deriva el segundo término de la ecuación original, $2x^2$, lo cual es sencillo, ya que solo depende de x . Su derivada es:

$$\frac{d}{dx}(2x^2) = 4x.$$

Sumando las derivadas de ambos términos y utilizando que la derivada del lado derecho, 0, es simplemente 0, se obtiene la ecuación:

$$\sin(xy) + x \cos(xy)(y + xy') + 4x = 0.$$

Al expandir el término $x \cos(xy)(y + xy')$, se tiene:

$$\sin(xy) + xy \cos(xy) + x^2 y' \cos(xy) + 4x = 0.$$

Reacomodando los términos, se puede escribir como:

$$x^2 y' \cos(xy) + xy \cos(xy) + \sin(xy) + 4x = 0.$$

De esta forma, se demuestra que y' satisface la ecuación requerida:

$$y' x^2 \cos(xy) + xy \cos(xy) + \sin(xy) + 4x = 0.$$

Ejemplo La ecuación $x^3 + y^3 = 1$ define una o más funciones y de x .

- (a) Supuesto que existe la derivada y' y sin resolver la ecuación respecto a y , demostrar que y' satisface la ecuación $x^2 + y^2 y' = 0$.
- (b) Supuesto que existe la segunda derivada y'' , demostrar que $y'' = -2xy^{-3}$ siempre que $y \neq 0$.

a. Para derivar y sin resolver explícitamente la ecuación, aplicamos derivación implícita a ambos lados de $x^3 + y^3 = 1$ con respecto a x . La derivada del lado izquierdo se calcula como:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3).$$

La derivada de x^3 es simplemente $3x^2$. Para y^3 , usamos la regla de la cadena, obteniendo:

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 \frac{dy}{dx}.$$

Por lo tanto, la derivada completa de la ecuación es:

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por 3, se obtiene:

$$x^2 + y^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Recordando que $\frac{dy}{dx} = y'$, esto demuestra que:

$$x^2 + y^2 y' = 0.$$

b. Partimos de la expresión obtenida en el apartado (a):

$$x^2 + y^2 y' = 0.$$

Derivamos esta ecuación nuevamente con respecto a x , aplicando la regla del producto al término $y^2 y'$. La derivada del lado izquierdo es:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2 y') = 0.$$

La derivada de x^2 es $2x$. Para derivar $y^2 y'$, usamos la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(y^2 y') = \frac{d}{dx}(y^2) \cdot y' + y^2 \cdot \frac{d}{dx}(y').$$

La derivada de y^2 con respecto a x es $2y \frac{dy}{dx} = 2yy'$. La derivada de y' es la segunda derivada de y , denotada como y'' . Sustituyendo, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(y^2 y') = 2yy' y' + y^2 y''.$$

Sustituyendo todo en la ecuación, se obtiene:

$$2x + 2y(y')^2 + y^2 y'' = 0.$$

Ahora despejamos y'' . Reordenando términos:

$$y^2 y'' = -2x - 2y(y')^2.$$

Dividimos por y^2 (suponiendo que $y \neq 0$):

$$y'' = -\frac{2x}{y^2} - 2y \frac{(y')^2}{y^2}.$$

Usamos la expresión de y' obtenida en el apartado (a), que es:

$$y' = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Sustituyendo $y' = -\frac{x^2}{y^2}$ en $(y')^2$, se tiene:

$$(y')^2 = \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)^2 = \frac{x^4}{y^4}.$$

Sustituimos en la ecuación para y'' :

$$y'' = -\frac{2x}{y^2} - 2y\frac{x^4}{y^4}.$$

Simplificando el segundo término:

$$y'' = -\frac{2x}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3}.$$

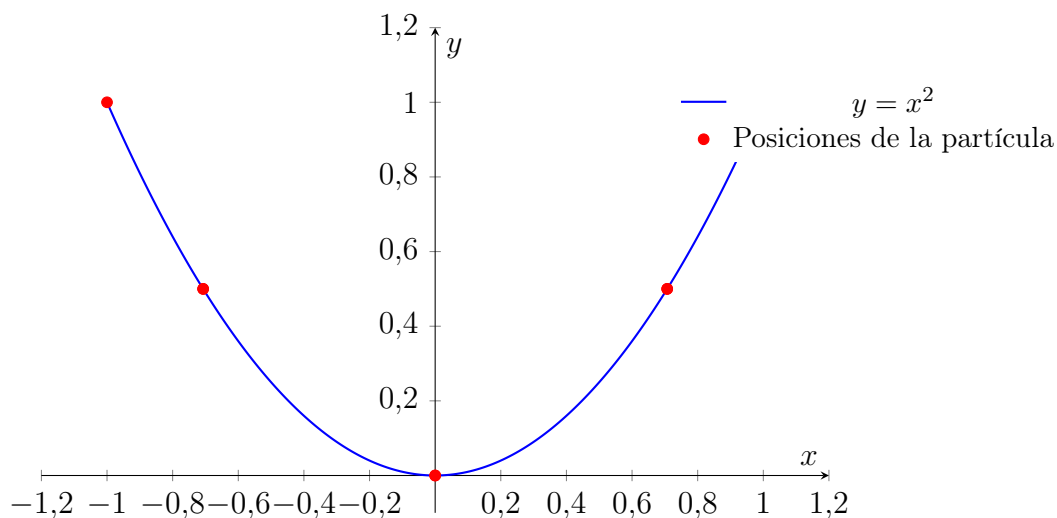
Finalmente, el resultado es:

$$y'' = -2xy^{-3}.$$

Esto completa la demostración, con la condición de que $y \neq 0$ para evitar divisiones indeterminadas.

Ejemplo Una partícula está obligada a moverse a lo largo de una parábola definida por la ecuación $y = x^2$. Se plantean dos cuestiones:

- (a) Determinar en qué punto de la curva la abscisa (x) y la ordenada (y) varían con el mismo coeficiente de cambio.
- (b) Encontrar esta razón de cambio si el movimiento está definido por las relaciones $x = \sin t$ y $y = \sin^2 t$ en función del tiempo t .



Como se observa en la gráfica, la partícula está confinada a la parábola y su movimiento oscila entre $-1 \leq x \leq 1$, alcanzando su posición más alta ($y = 1$) cuando $x = \pm 1$. Este comportamiento se asemeja a una partícula que se desliza sobre una rampa cuadrática", oscilando de un lado a otro debido a la naturaleza periódica de las funciones $\sin t$ y $\sin^2 t$.

a. La igualdad en las razones de cambio implica que las derivadas de x y y con respecto al tiempo (t) deben ser iguales en magnitud, es decir, $|\dot{x}| = |\dot{y}|$, donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Dado que $y = x^2$, se deriva implícitamente con respecto al tiempo t :

$$\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}.$$

Esta relación indica que la tasa de cambio de y depende de x y de $\frac{dx}{dt}$. Para que las tasas de cambio sean iguales en magnitud, debe cumplirse:

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \left| 2x \frac{dx}{dt} \right|.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por $\left| \frac{dx}{dt} \right|$ (suponiendo que $\frac{dx}{dt} \neq 0$), se obtiene:

$$1 = |2x|.$$

Esto implica que:

$$x = \pm \frac{1}{2}.$$

Los puntos en los que x toma estos valores corresponden, en la parábola $y = x^2$, a:

$$y = \left(\pm \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, los puntos de la curva donde las razones de cambio son iguales en magnitud son $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$.

b. Ahora, se considera el caso en el que el movimiento está definido por $x = \sin t$ y $y = \sin^2 t$. Para encontrar la razón de cambio, primero se derivan x e y con respecto al tiempo t :

$$\frac{dx}{dt} = \cos t,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \sin t \cos t.$$

Notemos que $y = \sin^2 t$ implica que $y = x^2$, lo cual confirma que la partícula sigue la parábola dada. La razón de cambio entre y y x se calcula como:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \sin t \cos t}{\cos t}.$$

Simplificando, se obtiene:

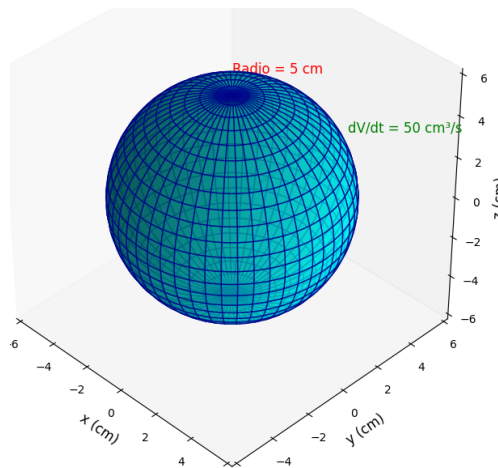
$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2 \sin t.$$

Por lo tanto, la razón de cambio en el movimiento, cuando está definido por las ecuaciones $x = \sin t$ y $y = \sin^2 t$, es $2 \sin t$.

6.2. Razones Relacionadas

Es interesante observar cómo las **razones relacionadas** permiten comprender las dependencias entre las variables de una ecuación, incluso cuando no están definidas explícitamente. Estas relaciones surgen naturalmente al analizar cómo un cambio en una variable afecta a las demás, respetando la estructura geométrica o funcional que las une. En particular, este enfoque resulta esencial para describir cómo las tasas de cambio de una variable se ven influenciadas por la interacción con las otras, brindando una herramienta poderosa para resolver problemas donde las dependencias no son inmediatas ni triviales.

Ejemplo Supóngase que se introduce un gas en un globo esférico a la razón constante de 50 cm^3 por segundo. Supóngase que la presión del gas permanece constante y que el globo tiene siempre forma esférica. ¿Cuál es la rapidez con que aumenta el radio del globo cuando su longitud es de 5 cm ?



Para resolver el problema, comenzamos relacionando el volumen de una esfera con su radio. La fórmula del volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

donde V es el volumen y r es el radio. Sabemos que el volumen cambia con el tiempo, lo que implica que tanto V como r son funciones del tiempo t . La tasa de cambio del volumen respecto al tiempo está dada por $\frac{dV}{dt}$, que conocemos, y la tasa de cambio del radio respecto al tiempo es $\frac{dr}{dt}$, que queremos calcular.

La clave para conectar $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dr}{dt}$ es la regla de la cadena. Al derivar V con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

A continuación, calculamos $\frac{dV}{dr}$ utilizando la fórmula del volumen. Derivando V respecto a r :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 4\pi r^2.$$

Sustituyendo esta expresión en la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Despejamos $\frac{dr}{dt}$ para encontrar la tasa de cambio del radio:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2}.$$

Ahora sustituimos los valores conocidos. Sabemos que $\frac{dV}{dt} = 50 \text{ cm}^3/\text{s}$ y que en el instante de interés el radio es $r = 5 \text{ cm}$. Entonces:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{50}{4\pi(5)^2}.$$

Simplificamos la expresión:

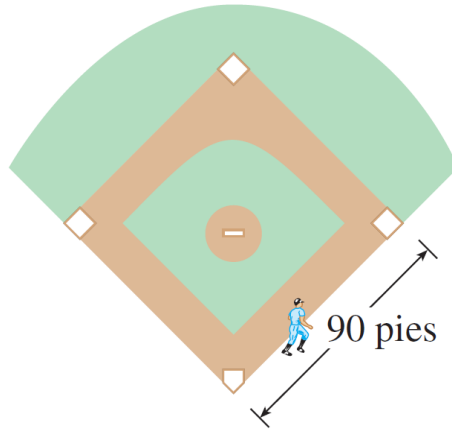
$$\frac{dr}{dt} = \frac{50}{4\pi \cdot 25} = \frac{50}{100\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

Por lo tanto, la rapidez con la que el radio del globo está aumentando es:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi} \text{ cm/s}.$$

En otras palabras, cuando el radio del globo es de 5 cm, este está creciendo a una velocidad aproximada de 0,159 cm/s. Este resultado refleja cómo la expansión del volumen afecta directamente al crecimiento del radio en un globo esférico.

Ejemplo Un campo de béisbol es un cuadrado cuyo lado tiene 90 pies de longitud. Una pelota es lanzada por el bateador a lo largo de una línea que pasa por la tercera base con una velocidad constante de 100 pies por segundo. ¿Cuál es la rapidez con que varía la distancia de la pelota a la primera base en los siguientes casos? (a) Cuando la pelota se encuentra a mitad de camino de la tercera base. (b) Cuando la pelota alcanza la tercera base.



El campo de béisbol tiene forma cuadrada, lo que nos permite aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la distancia de la pelota a la primera base. Si denotamos por x la distancia de la pelota al home y por D la distancia de la pelota a la primera base, entonces:

$$D = \sqrt{x^2 + 90^2}.$$

Sabemos que la pelota se mueve hacia la tercera base con una velocidad constante de 100 pies por segundo, es decir, la tasa de cambio de x con respecto al tiempo es:

$$\frac{dx}{dt} = -100 \text{ pies/seg.}$$

Para calcular cómo varía D con el tiempo ($\frac{dD}{dt}$), diferenciamos la ecuación de D con respecto al tiempo t :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 90^2}} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Con esta expresión general, evaluamos los casos específicos.

a. La pelota está a mitad del camino hacia la tercera base. En este caso, la posición de la pelota es $x = 45$ pies. Sustituyendo este valor en la fórmula de $\frac{dD}{dt}$:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{45}{\sqrt{45^2 + 90^2}} \cdot (-100).$$

Primero calculamos el denominador:

$$\sqrt{45^2 + 90^2} = \sqrt{2025 + 8100} = \sqrt{10125} = 45\sqrt{5}.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{45}{45\sqrt{5}} \cdot (-100) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-100).$$

Finalmente:

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{100}{\sqrt{5}} \approx -44,72 \text{ pies/seg.}$$

Esto indica que la distancia de la pelota a la primera base disminuye a una velocidad de aproximadamente 44,72 pies/seg.

b. En este caso, la posición de la pelota es $x = 0$ pies. Sustituyendo en la fórmula:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 90^2}} \cdot (-100).$$

Dado que el numerador es 0, se concluye que:

$$\frac{dD}{dt} = 0.$$

Esto significa que al llegar a la tercera base, la distancia de la pelota a la primera base ya no cambia.

Con los ejemplos anteriores, nos damos cuenta de que podemos seguir estos pasos para abordar y resolver problemas de razones relacionadas de una manera ordenada y sencilla:

1. **Leer el problema con cuidado:** Asegúrate de entender completamente el enunciado. Identifica qué es lo que se está pidiendo y cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas.
2. **Dibujar un diagrama, si es posible:** Representa la situación con un esquema que ayude a visualizar las relaciones entre las cantidades involucradas. Etiqueta las variables relevantes para facilitar el análisis.
3. **Introducir la notación:** Asigna símbolos a todas las cantidades que varían con el tiempo o que están relacionadas. Esto ayuda a organizar la información del problema.
4. **Expresar las relaciones en términos de derivadas:** Usa las ecuaciones del problema para escribir las relaciones entre las cantidades como razones de cambio.
5. **Formular una ecuación con las cantidades relevantes:** Relaciona las variables usando una ecuación que refleje las condiciones del problema. Si es necesario, elimina variables adicionales utilizando las propiedades geométricas o físicas de la situación.
6. **Aplicar la regla de la cadena:** Deriva ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo (t) para relacionar las tasas de cambio de las cantidades involucradas.
7. **Sustituir los valores conocidos y resolver:** Sustituye la información dada en la ecuación derivada para encontrar la razón de cambio desconocida.

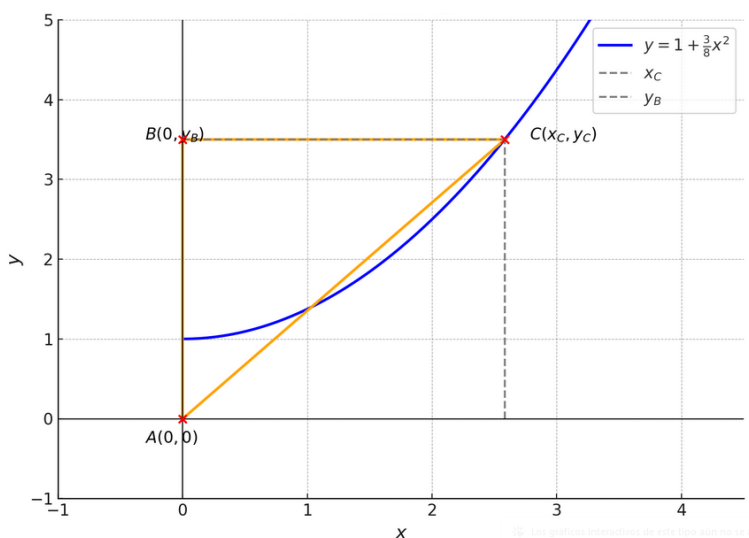
Estos pasos nos permiten abordar los problemas de razones relacionadas de manera clara y organizada, asegurando que todas las relaciones estén correctamente analizadas.

Ejemplo: Un triángulo rectángulo variable ABC en el plano xy tiene su ángulo recto en el vértice B , un vértice A fijo en el origen, y el tercer vértice C sobre la parábola $y = 1 + \frac{3}{8}x^2$.

El vértice B parte del punto $(0, 1)$ en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje y a una velocidad constante de 2 cm/seg. ¿Con qué rapidez crece el área del triángulo cuando $t = \frac{7}{2}$ segundos?

Vamos a resolver este ejercicio utilizando nuestro método de 6 pasos para problemas de razones relacionadas:

1. **Leer el problema con cuidado:** Queremos encontrar la rapidez con la que cambia el área del triángulo rectángulo ABC en el instante $t = \frac{7}{2}$ segundos. Sabemos que A está fijo en el origen, B se mueve hacia arriba a lo largo del eje y con velocidad constante 2 cm/seg, y C está sobre la parábola $y = 1 + \frac{3}{8}x^2$.
2. **Dibujar un diagrama:**



Representamos el triángulo ABC en el plano. El vértice A está en $(0, 0)$, B está en $(0, y_B)$, y C está en (x_C, y_C) , donde $y_C = 1 + \frac{3}{8}x_C^2$.

3. **Introducir la notación:** Sea A el área del triángulo, x_C la coordenada horizontal de C , y y_B la coordenada y de B . El área del triángulo se calcula como:

$$A = \frac{1}{2} \cdot x_C \cdot y_B.$$

4. **Expresar las relaciones en términos de derivadas:** Como C está sobre la parábola $y = 1 + \frac{3}{8}x^2$, sabemos que $y_C = y_B$. Usamos esta relación para encontrar:

$$x_C^2 = \frac{8}{3}(y_B - 1) \quad \Rightarrow \quad x_C = \sqrt{\frac{8}{3}(y_B - 1)}.$$

Diferenciamos A con respecto al tiempo t :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_C}{dt} \cdot y_B + x_C \cdot \frac{dy_B}{dt} \right).$$

5. **Aplicar la regla de la cadena:** Para encontrar $\frac{dx_C}{dt}$, derivamos $x_C = \sqrt{\frac{8}{3}(y_B - 1)}$ con respecto a t :

$$\frac{dx_C}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}(y_B - 1)}} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{dy_B}{dt}.$$

Sabemos que $\frac{dy_B}{dt} = 2$ cm/seg, por lo que:

$$\frac{dx_C}{dt} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{8}{3}(y_B - 1)}} \cdot 2 = \frac{8}{3\sqrt{\frac{8}{3}(y_B - 1)}}.$$

6. **Sustituir los valores conocidos y resolver:** En el instante $t = \frac{7}{2}$, sabemos que:

$$y_B = 1 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 8.$$

Sustituyendo $y_B = 8$ en x_C :

$$x_C = \sqrt{\frac{8}{3}(8 - 1)} = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot 7} = \sqrt{\frac{56}{3}}.$$

También calculamos $\frac{dx_C}{dt}$ con $y_B = 8$:

$$\frac{dx_C}{dt} = \frac{8}{3\sqrt{\frac{56}{3}}} = \frac{8}{\sqrt{168}} = \frac{8}{2\sqrt{42}} = \frac{4}{\sqrt{42}}.$$

Finalmente, sustituimos en $\frac{dA}{dt}$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\sqrt{42}} \cdot 8 + \sqrt{\frac{56}{3}} \cdot 2 \right).$$

Simplificando:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{32}{\sqrt{42}} + 2\sqrt{\frac{56}{3}} \right).$$

Aproximamos los valores numéricos:

$$\frac{dA}{dt} \approx \frac{1}{2} \cdot (4,94 + 8,63) = \frac{1}{2} \cdot 13,57 = 6,785 \text{ cm}^2/\text{seg}.$$

Por lo tanto, la rapidez con la que crece el área del triángulo en el instante $t = \frac{7}{2}$ es aproximadamente $6,785 \text{ cm}^2/\text{seg}$.

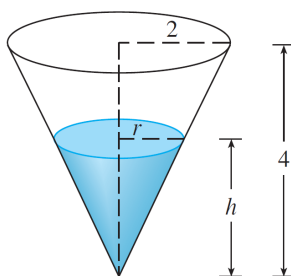
Ejemplo Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido. El radio de la base del depósito es de 2 m, y su altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito

a una razón constante de $2\text{ m}^3/\text{min}$, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene una profundidad de 3 m .

Resolvamos este problema paso a paso, utilizando el método de los 6 pasos para razones de cambio relacionadas:

1. **Analizar el problema:** Estamos trabajando con un depósito cónico invertido que recibe agua a una tasa constante de $\frac{dV}{dt} = 2\text{ m}^3/\text{min}$. Lo que buscamos es determinar la rapidez con la que sube el nivel del agua, es decir, $\frac{dh}{dt}$, cuando la profundidad del agua alcanza $h = 3\text{ m}$.

2. **Visualizar la situación:**



Consideremos el cono invertido: la base tiene un radio de $r = 2\text{ m}$, mientras que la altura total del depósito es $h = 4\text{ m}$. A medida que se llena, el agua forma un cono más pequeño dentro del depósito. Este pequeño cono también tiene forma geométrica similar al depósito completo, y tanto su radio r como su altura h cambian con el tiempo.

3. **Relacionar las variables:** Usamos el hecho de que los triángulos formados por el agua y el depósito son semejantes, lo que nos da:

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \implies r = \frac{1}{2}h.$$

También sabemos que el volumen del agua está dado por la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

4. **Simplificar la fórmula:** Sustituimos $r = \frac{1}{2}h$ en la ecuación del volumen para escribir todo en términos de h :

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}h\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3.$$

5. **Derivar con respecto al tiempo:** Diferenciamos ambos lados de la ecuación con respecto a t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Simplificamos la expresión:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2 \frac{dh}{dt}.$$

6. **Sustituir los valores:** Ahora usamos los valores proporcionados en el problema: $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m}^3/\text{min}$ y $h = 3 \text{ m}$. Sustituyendo en la ecuación derivada:

$$2 = \frac{\pi}{4}(3)^2 \frac{dh}{dt}.$$

$$2 = \frac{\pi}{4} \cdot 9 \cdot \frac{dh}{dt}.$$

$$2 = \frac{9\pi}{4} \frac{dh}{dt}.$$

Resolviendo para $\frac{dh}{dt}$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2 \cdot 4}{9\pi} = \frac{8}{9\pi} \text{ m/min}.$$

Aproximando:

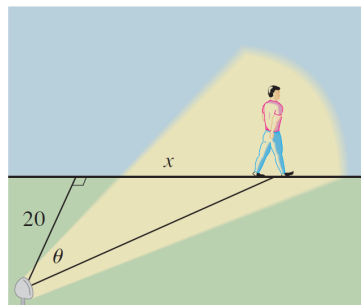
$$\frac{dh}{dt} \approx 0,28 \text{ m/min}.$$

El nivel del agua sube a una rapidez aproximada de 0,28 m/min cuando la profundidad del agua es de 3 m.

Ejemplo: Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con qué rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

Para resolver este problema, sigamos un enfoque estructurado:

1. **Entender el contexto:** El problema describe el movimiento de un hombre en línea recta, mientras un faro lo sigue girando. Sabemos que el hombre se encuentra a $x = 15$ pies en el instante considerado y que se mueve con una rapidez constante de 4 pies/s. Lo que buscamos es determinar la rapidez angular ($\frac{d\theta}{dt}$) con la que el faro debe girar para mantener al hombre enfocado.
2. **Visualizar la situación:**



Imaginemos el faro colocado a 20 pies por encima de la trayectoria recta del hombre. La posición del hombre está dada por su distancia horizontal x , mientras que el rayo del faro forma un ángulo θ con la vertical.

3. **Definir las relaciones:** La relación clave aquí es la tangente del ángulo:

$$\tan \theta = \frac{x}{20}.$$

De esta ecuación, podemos expresar x en términos de θ como:

$$x = 20 \tan \theta.$$

4. **Derivar la ecuación:** Para encontrar cómo varía el ángulo con el tiempo, derivamos ambos lados con respecto a t :

$$\frac{dx}{dt} = 20 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Despejamos $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}}{20 \sec^2 \theta}.$$

5. **Sustituir los valores:** Cuando $x = 15$, podemos calcular $\sec^2 \theta$ utilizando la identidad trigonométrica:

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(\frac{x}{20}\right)^2.$$

Para $x = 15$:

$$\sec^2 \theta = 1 + \left(\frac{15}{20}\right)^2 = 1 + 0,5625 = 1,5625.$$

Ahora sustituimos $\frac{dx}{dt} = 4$ pies/s y $\sec^2 \theta = 1,5625$ en la ecuación para $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4}{20 \cdot 1,5625}.$$

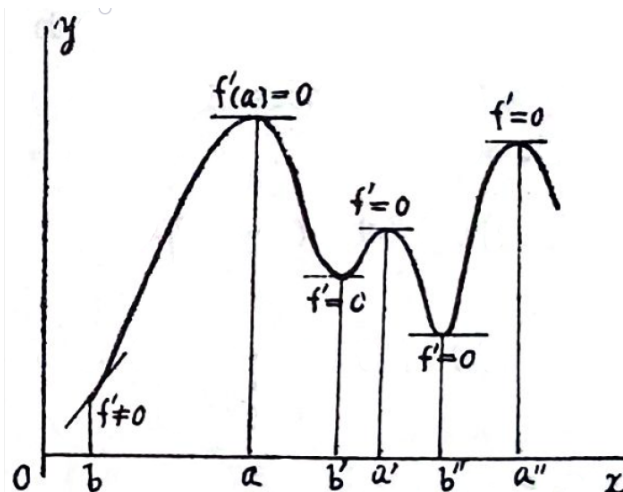
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4}{31,25} = 0,128 \text{ rad/s}.$$

Cuando el hombre está a 15 pies de la fuente de luz, el faro gira a una rapidez angular de 0,128 rad/s.

6.3. Problemas de Optimización

Un método temprano para calcular máximos y mínimos fue el desarrollado por Fermat, que se basaba en analizar pequeños cambios en la cantidad a optimizar para encontrar su punto óptimo. Sin embargo, con la invención del cálculo, este proceso se simplificó significativamente al interpretar los máximos y mínimos como los puntos donde la pendiente de la recta tangente a la curva es igual a cero. Esto permitió abordar problemas de optimización de manera más sistemática y generalizada, utilizando herramientas como derivadas para identificar estos puntos críticos y analizar si correspondían a un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

Una función f tiene un **máximo absoluto** en $x = a$ si $f(a) \geq f(x)$ para todo x en su dominio. En este caso, $f(a)$ representa el valor más alto que la función alcanza en todo su recorrido. En contraste, hablamos de un **máximo relativo** o **máximo local** cuando $f(a)$ es mayor o igual que los valores de $f(x)$ únicamente en los puntos cercanos a $x = a$. Algo similar ocurre con los **mínimos absolutos** y los **mínimos relativos**: el primero es el valor más bajo en todo el dominio, mientras que el segundo se define comparando solo con valores locales.



Por ejemplo, consideremos una función que tiene un máximo absoluto en a , donde el valor de $f(a)$ es el mayor de todos. Sin embargo, en otros puntos como a' y a'' , la función puede tener máximos relativos, ya que los valores $f(a')$ y $f(a'')$ son mayores que los de sus alrededores, pero no superan a $f(a)$. De manera similar, la función puede tener un mínimo absoluto en b si $f(b)$ es el menor valor en todo su dominio, y mínimos relativos en b' y b'' , donde $f(b')$ y $f(b'')$ son menores que los valores cercanos, pero no necesariamente el menor global.

Ahora, si la función es derivable en un intervalo abierto, surge una propiedad interesante: para que haya un máximo o mínimo relativo en un punto c , la función no puede estar creciendo ni decreciendo en ese punto. Si lo estuviera, c no cumpliría con las condiciones de máximo o mínimo relativo. Esto implica que la pendiente de la recta tangente en c debe ser igual a

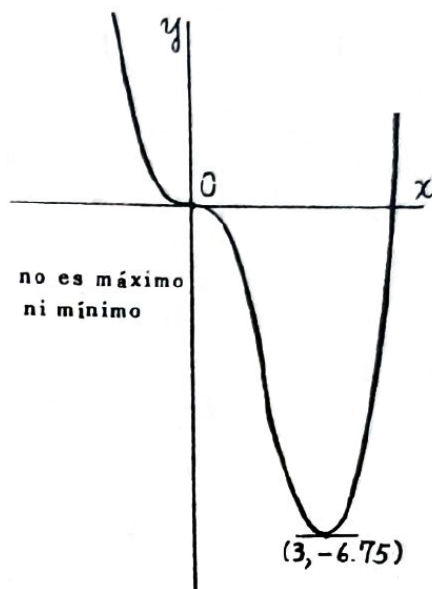
cero, lo que equivale a decir que $f'(c) = 0$.

Pensemos en qué pasaría si la derivada fuera positiva en c : eso significaría que la función está creciendo en c , contradiciendo la idea de un máximo relativo. Por otro lado, si $f'(c) < 0$, la función estaría decreciendo en c , lo cual contradice la posibilidad de que sea un mínimo relativo. Por lo tanto, si c es un máximo o mínimo relativo, necesariamente $f'(c) = 0$.

Es importante destacar que esta propiedad solo aplica a los puntos dentro del intervalo donde la función es derivable. En los extremos de un intervalo cerrado, la derivada no necesariamente será cero, aunque el máximo o mínimo absoluto pueda encontrarse en esos puntos.

Ejemplo: Analicemos la función $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3$ para estudiar su comportamiento y encontrar sus máximos y mínimos. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3).$$



Los puntos críticos se obtienen resolviendo $f'(x) = 0$, lo que da $x = 0$ y $x = 3$. A continuación, evaluamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos que estos puntos definen:

- Para $x < 0$, $f'(x) > 0$, lo que indica que la función es **creciente**.
- Para $0 < x < 3$, $f'(x) < 0$, indicando que la función es **decreciente**.
- Para $x > 3$, $f'(x) > 0$, lo que implica que la función vuelve a ser **creciente**.

Con esto, podemos deducir lo siguiente:

- En $x = 3$, la función pasa de decreciente a creciente. Esto confirma que $f(3)$ es un **mínimo relativo**.

- En $x = 0$, la función es decreciente antes y después, por lo que no se trata de un máximo ni un mínimo.

Además, evaluando $f(3)$, obtenemos:

$$f(3) = \frac{3^4}{4} - 3^3 = \frac{81}{4} - 27 = -6,75.$$

Así, $f(3) = -6,75$ corresponde al punto más bajo que alcanza la función, lo que lo convierte también en un mínimo absoluto.

Es importante tener en cuenta que el hecho de que $f'(c) = 0$ no implica necesariamente que c sea un máximo o un mínimo. Estos puntos se conocen como **puntos críticos** o **puntos estacionarios**, ya que en ellos la derivada se anula, pero no garantizan la existencia de extremos. Un punto de inflexión, en cambio, es un punto donde la derivada se anula, pero no es ni un máximo ni un mínimo. En estos puntos, la función cambia de curvatura, pero no alcanza un extremo.

Para determinar si un punto crítico corresponde a un máximo o un mínimo relativo, es necesario analizar el comportamiento de la función en el entorno de ese punto. Por ejemplo, un punto crítico puede ser un máximo, un mínimo o incluso un punto de inflexión donde la función cambia de curvatura pero no alcanza un extremo.

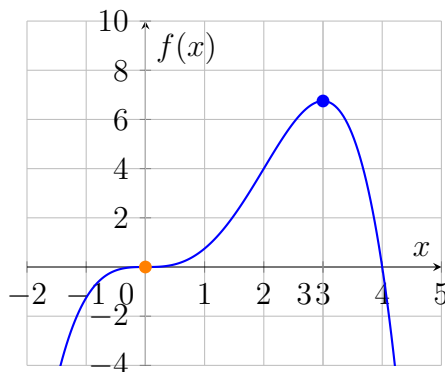


Figura 4: El punto de inflexión se encuentra en $x = 0$, y el máximo absoluto ocurre en $x = 3$.

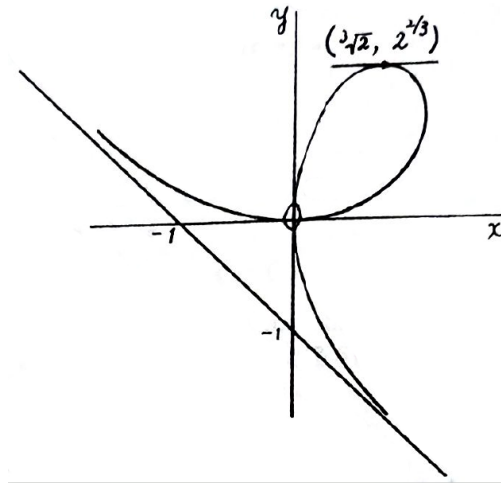
Además, si una función tiene un máximo o un mínimo relativo en $x = a$, este punto es crítico siempre que a no sea uno de los extremos del intervalo donde está definida la función. Por este motivo, cuando buscamos los máximos y mínimos absolutos de una función, es fundamental evaluar tanto los valores en los puntos críticos como en los extremos del intervalo. Esto garantiza que podamos identificar correctamente los valores extremos en todo el dominio de interés.

En algunas ocasiones, las funciones que deseamos analizar no están dadas de forma explícita, es decir, no están escritas como $y = f(x)$. En estos casos, es posible trabajar con ecuaciones que relacionan x y y de manera implícita. Para calcular máximos y mínimos en este tipo

de situaciones, utilizamos el método de **derivación implícita**, que nos permite obtener una expresión para la derivada de y con respecto a x incluso cuando y no está aislada.

Ejemplo: Queremos encontrar los máximos y mínimos de y que cumplen la siguiente ecuación implícita:

$$x^3 - 3xy + y^3 = 0.$$



Para ello, derivamos implícitamente ambos lados de la ecuación con respecto a x :

$$\frac{d}{dx} (x^3 - 3xy + y^3) = \frac{d}{dx} (0).$$

Aplicando las reglas de la derivación, obtenemos:

$$3x^2 - 3y - 3x \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Agrupando los términos que dependen de $\frac{dy}{dx}$, la ecuación se reorganiza como:

$$(3y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 3y.$$

Por lo tanto, la derivada de y con respecto a x es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 3y}{3y^2 - 3x}.$$

Para encontrar los puntos críticos de y , imponemos la condición $\frac{dy}{dx} = 0$, lo que implica que:

$$-3x^2 + 3y = 0 \quad \implies \quad y = x^2.$$

Sustituimos $y = x^2$ en la ecuación original $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ para determinar los valores de x :

$$x^3 - 3x(x^2) + (x^2)^3 = 0.$$

Simplificando, obtenemos:

$$x^3 - 3x^3 + x^6 = 0 \implies x^3(x^3 - 2) = 0.$$

De esta ecuación, tenemos dos posibles soluciones para x :

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

Finalmente, calculamos los valores de y asociados a estos x :

$$y = x^2 \implies y = 0 \text{ cuando } x = 0, \quad y = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = 2^{2/3}.$$

En el punto $(0, 0)$, la función es decreciente antes y después, lo que indica que no es un máximo ni un mínimo. Por otro lado, en $(\sqrt[3]{2}, 2^{2/3})$, la derivada cambia de negativa a positiva, lo que confirma que este punto es un **máximo local**.

Analizando los extremos, cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$. Esto muestra que no hay máximos ni mínimos absolutos en esta función.

Los máximos y mínimos son fundamentales en problemas de **optimización**, ya que permiten determinar condiciones extremas en fenómenos físicos y matemáticos. Por ejemplo, en física, la minimización de la energía potencial explica el equilibrio de sistemas mecánicos, mientras que en óptica, la maximización de la intensidad de luz describe patrones de interferencia. Estas herramientas no solo resuelven problemas prácticos, sino que también revelan principios fundamentales, como los estados de estabilidad en la naturaleza o la propagación de ondas.

Otro ejemplo consiste en encontrar el máximo producto de dos números positivos x e y cuya suma es constante, digamos S . Matemáticamente, si $x + y = S$, queremos maximizar el producto xy . Para abordar este problema, escribimos y en términos de x , de modo que $y = S - x$. Así, el producto se convierte en una función de x :

$$f(x) = x(S - x) = Sx - x^2.$$

Esta función representa una parábola, y dado que el coeficiente de x^2 es negativo, sabemos que tiene un máximo. Para determinarlo, calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = S - 2x.$$

Al igualar la derivada a cero, obtenemos:

$$S - 2x = 0 \implies x = \frac{S}{2}.$$

Sustituyendo $x = \frac{S}{2}$ en $y = S - x$, encontramos que $y = \frac{S}{2}$. Por lo tanto, el producto xy alcanza su valor máximo cuando ambos números son iguales, es decir, $x = y = \frac{S}{2}$. Este

resultado ilustra cómo el equilibrio entre las variables tiende a maximizar su producto.

Otro problema interesante es minimizar la suma de dos números positivos x e y cuyo producto es constante, digamos P . En este caso, buscamos minimizar $x + y$ bajo la condición de que $xy = P$. De nuevo, expresamos y en términos de x , obteniendo $y = \frac{P}{x}$. La función a minimizar es entonces:

$$f(x) = x + \frac{P}{x}.$$

Procedemos calculando su derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{P}{x^2}.$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$1 - \frac{P}{x^2} = 0 \quad \implies \quad x^2 = P \quad \implies \quad x = \sqrt{P}.$$

Sustituyendo $x = \sqrt{P}$ en $y = \frac{P}{x}$, obtenemos $y = \sqrt{P}$. Para saber si el resultado es un máximo o un mínimo, usaremos la segunda derivada de la función, y esto es conocido como el **criterio de la segunda derivada**.

El **criterio de la segunda derivada** es un principio muy útil para determinar si un punto crítico de una función corresponde a un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Este criterio se basa en el comportamiento de la segunda derivada de la función en ese punto crítico.

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ y un punto crítico c tal que $f'(c) = 0$. Para aplicar el criterio de la segunda derivada, calculamos la segunda derivada de la función en ese punto, $f''(c)$, y analizamos su signo:

- Si $f''(c) > 0$, la función es cóncava hacia arriba en c , lo que significa que c es un mínimo local.
- Si $f''(c) < 0$, la función es cóncava hacia abajo en c , lo que significa que c es un máximo local.
- Si $f''(c) = 0$, el criterio no nos da información concluyente, y el punto podría ser un punto de inflexión o necesitar un análisis más detallado para determinar su naturaleza.

Este criterio es útil porque nos permite clasificar los puntos críticos sin tener que examinar los valores de la función en puntos cercanos. Al verificar la concavidad en el punto crítico, podemos decidir de manera eficiente si es un máximo, un mínimo o si el análisis debe continuar.

Volviendo a nuestro problema inicial, para confirmar que realmente se trata de un mínimo, calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{2P}{x^3}.$$

Evaluyendo en $x = \sqrt{P}$, obtenemos:

$$f''(\sqrt{P}) = \frac{2P}{(\sqrt{P})^3} = \frac{2P}{P^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{P}} > 0.$$

Dado que la segunda derivada es positiva, $x = \sqrt{P}$ corresponde a un mínimo local, lo que garantiza que la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = \sqrt{P}$.

Ejemplo La media geométrica de dos números positivos no excede su media aritmética. Esto es, $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$.

Sean $a > 0$ y $b > 0$. Consideremos los números $x = \sqrt{a}$ y $y = \sqrt{b}$. Entonces, su producto es:

$$xy = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

De lo anterior, sabemos que entre todos los pares de números positivos x e y con un producto constante $xy = P$, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y$. Esto ocurre porque, para un producto fijo, la simetría minimiza su suma. En este caso, si $x = y = \sqrt{xy}$, la suma alcanza su menor valor.

Utilizando esta propiedad, sabemos que para cualquier x e y :

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Sustituyendo $xy = \sqrt{ab}$, obtenemos:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt[4]{ab}.$$

Volvamos a las variables originales. Sabemos que $x = \sqrt{a}$ y $y = \sqrt{b}$, lo que implica que:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt[4]{ab}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados para reescribir en términos de a y b , tenemos:

$$a + b + 2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab}.$$

Simplificando, obtenemos:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Dividiendo ambos lados entre 2, obtenemos la relación deseada:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b).$$

La igualdad ocurre únicamente si $a = b$. Por lo tanto, hemos demostrado que la media geométrica de dos números positivos no excede su media aritmética.

Después de analizar los ejemplos anteriores, podemos resumir los pasos necesarios para resolver problemas de optimización en los siguientes seis puntos:

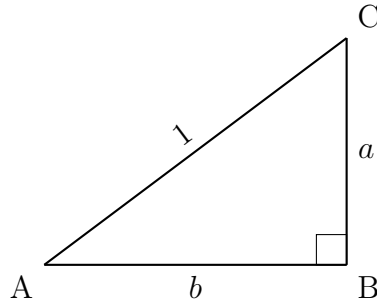
1. **Comprender el problema:** Lee cuidadosamente el enunciado y asegúrate de entender lo que se pide. Identifica claramente qué es desconocido, cuáles son las cantidades dadas y cuáles son las condiciones impuestas.
2. **Dibujar un diagrama:** Si el problema lo permite, realiza un esquema que represente la situación. Etiqueta las cantidades conocidas y desconocidas para visualizar mejor las relaciones entre ellas.
3. **Definir la notación:** Asigna símbolos a las cantidades que deseas maximizar o minimizar, así como a otras cantidades relevantes. Por ejemplo, usa Q para la cantidad a optimizar y a, b, h, t , etc., para las demás variables según corresponda.
4. **Expresar la cantidad a optimizar:** Encuentra una fórmula para Q en términos de las otras variables, utilizando las relaciones dadas en el problema.
5. **Reducir a una sola variable:** Si Q depende de más de una variable, usa las ecuaciones del problema para eliminar variables y expresar Q en términos de una sola. Asegúrate también de establecer el dominio de esta función.
6. **Encontrar los valores extremos:** Utiliza el método de Fermat o las herramientas del cálculo diferencial para identificar los puntos donde Q alcanza un máximo o un mínimo. Si el dominio es un intervalo cerrado, evalúa Q en los extremos además de los puntos críticos para determinar los valores absolutos.

Siguiendo estos pasos de manera ordenada, es posible abordar y resolver problemas de optimización de manera eficiente, utilizando tanto herramientas geométricas como analíticas según sea necesario.

Ejemplo: Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, hallar el mayor valor de $2a + b$.

Vamos a resolver este problema paso a paso:

1. **Comprender el problema:** Queremos maximizar la expresión $2a + b$, donde a y b son los catetos de un triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 1. La restricción es que los lados del triángulo cumplen $a^2 + b^2 = 1$, de acuerdo con el teorema de Pitágoras.
2. **Dibujar un diagrama:** Representamos el triángulo rectángulo para visualizar las relaciones entre los lados.



3. **Definir la notación:** Sea a el cateto horizontal y b el cateto vertical del triángulo. La cantidad a optimizar es $Q = 2a + b$, donde Q es la función objetivo.
4. **Expresar la cantidad a optimizar:** Usamos la restricción $a^2 + b^2 = 1$ para expresar b en términos de a :

$$b = \sqrt{1 - a^2}.$$

Sustituimos esta relación en Q :

$$Q = 2a + \sqrt{1 - a^2}.$$

5. **Reducir a una sola variable:** Ya hemos expresado Q en términos de a :

$$f(a) = 2a + \sqrt{1 - a^2}.$$

6. **Encontrar los valores extremos:** Derivamos $f(a)$:

$$f'(a) = 2 - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$2 - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = 0 \quad \implies \quad \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = 2.$$

Elevamos al cuadrado para eliminar la raíz:

$$\frac{a^2}{1 - a^2} = 4 \quad \implies \quad a^2 = \frac{4}{5}.$$

Esto nos da $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Calculamos b usando la restricción:

$$b = \sqrt{1 - a^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Evaluamos Q :

$$Q = 2a + b = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

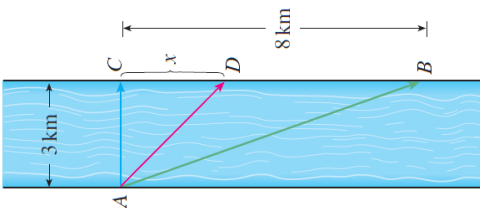
Por lo tanto, el valor máximo de $2a + b$ es $\sqrt{5}$.

Ejemplo: Un hombre lanza su lancha desde un punto A a la orilla de un río recto de 3 km de ancho y quiere alcanzar el punto B , 8 km río abajo en la orilla opuesta, en el menor tiempo posible. Tiene varias opciones: podría enfilar su lancha directamente a través del río al punto C y después correr hacia B , podría dirigirse directamente hacia B , o podría ir a algún punto D entre C y B para avanzar corriendo hacia B .

El hombre puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h. ¿Dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? Se supone que la rapidez del agua es insignificante en comparación con la rapidez a la que el hombre rema.

Vamos a resolver este ejercicio utilizando nuestro método de 6 pasos:

1. **Comprender el problema:** Un hombre debe cruzar un río de 3 km de ancho y desplazarse 8 km río abajo para alcanzar un punto B en el menor tiempo posible. Puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h. Queremos determinar dónde debe desembarcar para minimizar el tiempo total de su trayecto.
2. **Dibujar un diagrama:**



Representamos el problema con un esquema en el que el punto A es la posición inicial en una orilla, B es el destino en la orilla opuesta, y C es el punto directamente enfrente de A . También introducimos un punto D , ubicado entre C y B , donde el hombre podría desembarcar.

3. **Definir la notación:** Sea x la distancia entre C y D , es decir, la distancia río abajo desde C hasta el punto donde desembarca. La distancia a remar es $\sqrt{x^2 + 9}$ (usando el teorema de Pitágoras), y la distancia a correr es $8 - x$. La función que queremos minimizar es el tiempo total T , que incluye el tiempo de remo y el tiempo de carrera.
4. **Expresar la cantidad a optimizar:** Usamos la relación entre tiempo, distancia y velocidad para escribir:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}.$$

Aquí, el primer término representa el tiempo de remo y el segundo término representa el tiempo de carrera.

5. **Reducir a una sola variable:** La función $T(x)$ ya está expresada en términos de x , y el dominio relevante es $[0, 8]$, ya que $x = 0$ corresponde a remar directamente al punto C , mientras que $x = 8$ corresponde a remar directamente al punto B .
6. **Encontrar los valores extremos:** Derivamos $T(x)$ para encontrar los puntos críticos:

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}.$$

Igualemos la derivada a cero:

$$\frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8}.$$

Multiplicamos ambos lados por $6\sqrt{x^2 + 9}$ y resolvemos:

$$x = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados para eliminar la raíz:

$$x^2 = \frac{x^2 + 9}{16}.$$

Simplificando:

$$16x^2 = x^2 + 9 \quad \implies \quad 15x^2 = 9 \quad \implies \quad x^2 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{9}{\sqrt{7}}.$$

Evaluamos $T(x)$ en los extremos del dominio y en el punto crítico:

$$T(0) = \frac{\sqrt{9}}{6} + \frac{8}{8} = 1,5, \quad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1,33, \quad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} + 0 = 1,42.$$

El menor tiempo ocurre en $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$, lo que corresponde a desembarcar aproximadamente 3.4 km río abajo desde C .

Por lo tanto, para minimizar el tiempo total, el hombre debe desembarcar en $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$ km río abajo.

7. Bibliografía

- Apostol, T. M. *Cálculo. Volumen 1: Una variable*. Segunda edición. Reverté, 2007. ISBN: 978-84-291-4368-2.
- Yu, T. *Cálculo diferencial e integral de una variable*. Primera edición. McGraw-Hill, 2013. ISBN: 978-607-15-0452-4.
- James Stewart. *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Séptima edición. Cengage Learning, 2012. ISBN: 978-607-15-0768-6.
- Edwin J. Purcell, Dale Varberg y Steven E. Rigdon. *Cálculo diferencial e integral*. Novena edición. Pearson Educación, 2007. ISBN: 978-970-26-0936-0.
- Ron Larson y Bruce H. Edwards. *Cálculo: Una variable*. Décima edición. Cengage Learning, 2018. ISBN: 978-607-526-044-1.
- Spivak, M. *Cálculo infinitesimal*. Segunda edición. Reverté, 1999. ISBN: 978-8429150676.
- Santaella, R. *Taller de precálculo*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Pamplona. 2022.