



UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

FACULTA DE CIENCIAS BÁSICAS

**EXPLORANDO LAS DINÁMICAS DEL AMOR Y LAS
RELACIONES DESDE UN ENFOQUE MATEMÁTICO**

TRABAJO DE GRADO

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

PRESENTA:

Deisy Yurley Monroy Sandoval

TUTOR:

MSc. Rubén Darío Santaella Forero

Índice

1. INTRODUCCIÓN	4
2. MARCO TEÓRICO	7
2.1. Las bases matemáticas	7
2.1.1. Ecuaciones en diferencia	7
2.1.2. sistemas de ecuaciones en diferencia	10
2.1.3. sistema dinámico discreto	12
2.1.4. Exploración Gráfica: Retratos de Fase en el sistema Dinámico	14
linealización de los puntos de equilibrio	18
ceroclinas	22
ciclo límite	24
2.1.5. Modelos de depredador-presa (sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra)	27
2.1.6. Modelos de competencia	32
2.1.7. Modelos de cooperación	34
2.1.8. Modelos de crecimiento discretos para poblaciones que interactúan	35
2.2. las bases en psicología	37
2.2.1. Manejando desafíos en la relación de pareja	38
2.2.2. Resolución de conflictos entre parejas	39
2.2.3. La cuestión del poder en parejas	39
2.2.4. Revisión de Gottman y Levenson	40
2.2.5. Sistema de Puntuación de Interacción Rápida de Parejas (RCISS)	44
3. FORMULACIÓN DEL MODELO	47
3.1. La historia de amor de Romeo y Julieta	47
3.2. la ecuación	49
3.2.1. comportamiento no influenciado	51
3.2.2. comportamiento influenciado	53
3.3. Encuentro de estados estacionarios y estabilidad en el modelo matemático de interacción conyugal	57
4. RESULTADOS DEL MODELO	64
4.1. Poder y afecto: funciones de influencia	64

4.2. Discusión de los resultados iniciales del modelado	65
4.3. Perspectivas de Ampliación del Modelo	66
4.4. Aplicar y modificar el modelo para comprender a las parejas	67
4.4.1. El sistema de codificación de afectos específicos (SPAFF)	68
4.5. Análisis del Sistema de Codificación del SPAFF	69
4.6. Experimentos de la interacción de pareja	71
4.6.1. Nueva teoría de Gottman y la intervención en la relación de pareja . . .	72
4.6.2. Objetivos y razonamiento para las intervenciones con parejas	74
4.6.3. cómo preparar datos para la modelización	76
4.7. conclusión	79

1. INTRODUCCIÓN

Motivados por hacer matemática aplicada con las herramientas aprendidas en el pregrado, se quiso buscar un estudio innovador que mostrara aplicaciones en campos nuevos; después de un extenso estudio de diferentes aplicaciones en ingeniería, física, química, biología y ciencias humanas, nos llamó la atención un modelo matemático aplicado en el área sociohumanística, principalmente en estudios de psicología, estudios realizados por profesionales en campos de las matemáticas, biología y psicología.

Con esta idea, en el presente trabajo se quiere mostrar, este modelo matemático aplicado a la psicología, principalmente en el campo de la EPIDEMIOLOGÍA SOCIAL que estudia ENTRE OTRAS COSAS las relaciones de pareja, donde el modelo que analizamos está diseñado para identificar los factores que contribuyen a la estabilidad o inestabilidad de una relación, describiendo la dinámica y las interacciones de pareja.

Si observamos algo de contexto, el porcentaje de divorcios con respecto a los matrimonios en Colombia desde 2016 hasta 2023 es aproximadamente 40,64%[\[17\]](#) en comparación, Estados Unidos tiene las tasas de divorcio más altas significativamente que en Colombia. Ante esta realidad, dado que bajo nuestra experiencia la ciencia proporciona métodos para abordar y resolver problemas en diversas áreas, como la medicina, la tecnología, el medio ambiente, la energía, entre otros. En el ámbito de las relaciones interpersonales, un aspecto que ha sido objeto de numerosas investigaciones es el grado de satisfacción en las relaciones de pareja, considerado el principal medidor de la calidad de la comunicación y del bienestar en la pareja. ¿Deberíamos preocuparnos por tener relaciones saludables? En una relación saludable o sana, ambos integrantes se sienten apreciados y respetados, y sus límites son reconocidos y respetados. Estos límites pueden ser de naturaleza física, emocional o sexual. En una relación de este tipo, cada persona valora y respeta las metas del otro, ya sean personales, profesionales o académicas. Resulta que en los últimos 50 años ha surgido un campo llamado epidemiología social, que demuestra un impacto significativo en nuestro nivel de vida y salud emocional.

Las relaciones saludables no solo pueden proporcionar apoyo emocional y un sentido de pertenencia, sino que también pueden mejorar la autoestima y promover el desarrollo personal. además, las conexiones positivas con los demás nos ayudan a manejar el estrés, enfrentar desafíos y disfrutar de una sensación de satisfacción y felicidad en nuestras vidas.

Una relación saludable tiene una especie de magia; es capaz de hacer cosas asombrosas.

¿Es posible que la ciencia contribuya verdaderamente a descubrir la esencia de la magia de una relación saludable? Si bien la ciencia puede proporcionar comprensión sobre los aspectos biológicos y psicológicos de la relación, la esencia misma de la magia de una relación saludable puede ser difícil de capturar completamente. Por ejemplo, hace 45 años se creó el “laboratorio del amor” por Robert Levenson y John Mordechai Gottman, donde se realizaron investigaciones detalladas sobre la dinámica de las relaciones de pareja. Este laboratorio recopiló medidas fisiológicas de las parejas mientras interactuaban, incluyendo frecuencia cardíaca, velocidad de la sangre, conducta cutánea y respiración, así como anotaciones de emociones segundo a segundo.

Por ello, nos concentraremos en un enfoque innovador de modelado matemático, utilizando modelos de ecuaciones en diferencias para describir la dinámica única de las interacciones de pareja a lo largo del tiempo. Aunque gran parte de la psicología familiar ha confiado tradicionalmente en análisis estadísticos basados en modelos lineales, hemos adoptado un nuevo paradigma que reconoce la altamente no lineal naturaleza de la interacción social. Este enfoque, iniciado por Gottman y James D. Murray, se inspira en estudios sobre interacciones de pareja, evidenciando una prometedora aplicación de modelos matemáticos para entender las complejidades de todas las relaciones.

La elección de estudiar las relaciones de pareja como fenómeno psicológico se fundamenta en datos proporcionados por Gottman, expone este argumento de manera muy convincente, entre otras cosas, algunos de los hechos básicos sobre el matrimonio moderno, como la creciente tasa de divorcios en los países desarrollados. Por ejemplo, entre el 50 y el 67% de los primeros matrimonios en Estados Unidos terminan en divorcio en un período de 40 años [1]. La terapia de intervención ha demostrado no ser siempre exitosa. Este enfoque, motivado por la necesidad de nuevas teorías que arrojen luz sobre la interacción de pareja, busca presentar y explorar el enfoque que mostraremos en este trabajo.

Mostraremos al estudiar que de la interacción pareja, ellos enfrentaran a un desafío: la ausencia de una teoría existente para estructurar ecuaciones de cambio en el tiempo discreto. Ellos, en lugar de seguir en leyes preexistentes, desarrollan en este momento un enfoque que utiliza tanto datos como ecuaciones en diferencias para generar términos de interacción. Mostraremos que lo que ellos hacen, es un proceso fundamentalmente diferente de los métodos convencionales de construcción de modelos.

El corazón del trabajo radica en que la prueba de formas cualitativas de cambio no debe ser automática, sino guiada por la intuición científica utilizando los datos para garantizar la relevancia teórica. Este uso de modelos matemáticos, destinado a generar teorías sobre las dinámicas de las relaciones, constituye el foco principal de nuestra exploración. En una disciplina donde la teoría cuantitativa a menudo se enfrenta a dificultades para describir procesos de interacción, este enfoque cualitativo de modelado matemático se presenta como una herramienta valiosa, útil y posiblemente generalizable. Exploramos este enfoque por dos razones clave: proporciona un nuevo lenguaje para conceptualizar la interacción de pareja a lo largo del tiempo y permite experimentos precisos mediante simulaciones basadas en ecuaciones interactivas compiladas para parejas específicas.

La comprensión de las complejas dinámicas presentes en las interacciones entre parejas ha sido un tema de interés en diversas disciplinas, desde la psicología hasta la sociología. En este contexto, surge la necesidad de desarrollar y explicar modelos que permitan capturar y analizar de manera precisa cómo el comportamiento de uno de los miembros de la pareja influye en el otro, así como identificar momentos de interacción independiente. En este trabajo, nos sumergimos en la exploración de un modelo matemático diseñado para abordar estas complejas interacciones de pareja. Basado en la idea de que los comportamientos positivos y negativos tienen efectos diferentes en la dinámica de la relación, el modelo de Gottman y Murray considera la influencia mutua entre los miembros de la pareja y los momentos de comportamiento independiente.

A través del análisis y explicando este modelo, se busca no solo comprender las interacciones cotidianas entre parejas, sino también identificar los factores que contribuyen a la estabilidad o inestabilidad de la relación. Para ello, examinamos cómo ciertos parámetros, tales como los umbrales de positividad y negatividad, así como las funciones de influencia específicas, impactan en la evolución de la relación a lo largo del tiempo.

Este trabajo está estructurado en torno al desarrollo y la evaluación del modelo propuesto, desde la formulación de las ecuaciones hasta la exploración de los estados estacionarios y la estabilidad del sistema. A través de este análisis, esperamos explicar de la mejor manera posible sobre las complejas dinámicas presentes en las interacciones de pareja y contribuir al creciente cuerpo de conocimiento en este campo.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Las bases matemáticas

En el estudio de los sistemas dinámicos discretos, las ecuaciones en diferencia y las ceroclinas juegan un papel fundamental. Estas herramientas matemáticas nos permiten modelar y analizar una amplia variedad de fenómenos que evolucionan en el tiempo de manera discreta. En este capítulo, exploraremos las bases matemáticas detrás de las ecuaciones en diferencia y cómo se utilizan para describir la evolución de sistemas dinámicos a lo largo de intervalos discretos de tiempo. Además, examinaremos en detalle el concepto de ceroclinas y su importancia en la comprensión de la estabilidad y los puntos críticos de los sistemas dinámicos discretos. A través de ejemplos y aplicaciones, veremos cómo estas herramientas matemáticas son esenciales para comprender y predecir el comportamiento de una amplia gama de fenómenos en campos.

2.1.1. Ecuaciones en diferencia

Una ecuación en diferencia es una expresión matemática que describen cómo una secuencia o secuencia discreta evoluciona mediante cambios o pasos discretos. Estas ecuaciones son fundamentales en el estudio de procesos que experimentan variaciones en intervalos discretos de tiempo o índices.

Definition 1. *llamamos ecuación en diferencia a una expresión del tipo*

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y que la cumpla.

Ecuaciones lineales de primer orden

Definition 2. *Una ecuación en diferencia lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como*

$$p_1(t)Y_{t+1} + p_2(t)y_t = q_t, \tag{2. 1}$$

*donde $p_i(t)$, $i = 1, 2$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t . Si la sucesión $q(t)$ es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre **ecuación homogénea** asociada a (2. 1). Cuando*

las funciones $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal (2. 1) es de **coeficientes constantes**.

Resolución de ecuación homogénea

Teorema 1. La resolución de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden implica inicialmente determinar la solución general de su ecuación homogénea asociada. Para lograr esto, es necesario identificar dos soluciones particulares que generen un sistema fundamental. Por lo tanto, consideramos la ecuación homogénea como punto de partida.

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = 0,$$

que admitirá la solución $Y_t = \lambda^t$ si

$$a \lambda^{t+2} + b \lambda^{t+1} + c \lambda^t = \lambda^t (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0,$$

es decir,

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0 \quad (2. 2)$$

Esta ecuación se denomina la “ecuación característica” de la ecuación en diferencias. A continuación, se describe un método para resolver la ecuación en diferencias homogénea, centrado en el análisis de las raíces de la ecuación característica de (2. 2).

- si la ecuación característica tiene dos raíces reales diferentes λ_1, λ_2 ; entonces

$$y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t$$

- si la ecuación (2. 2) tiene una raíz real doble λ , entonces

$$y_t^1 = \lambda^t, \quad y_t^2 = t \lambda^t$$

- si la ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

entonces,

$$y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t$$

Se trata de construir un conjunto esencial de respuestas. En esta situación específica, podemos expresar la solución general de la ecuación homogénea de la siguiente manera:

$$y_t = k_1 \lambda_1^t + k_2 \lambda_2^t$$

Al expresar los números complejos en su forma con módulo y argumento, considerando que comparten el mismo módulo y sus argumentos son opuestos,

$$y_t = k_1 \rho^t (\cos t\theta + i \sin t\theta) + k_2 \rho^t (\cos t\theta - i \sin t\theta)$$

al formar $\lambda_1^t = \rho^t (\cos t\theta + i \sin t\theta)$ y $\lambda_2^t = \rho^t (\cos t\theta - i \sin t\theta)$ Cualquier combinación lineal de estas soluciones formará también un sistema fundamental de soluciones, especialmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_1^t + \lambda_2^t) &= \rho^t \cos t\theta \\ \frac{1}{2i}(\lambda_1^t - \lambda_2^t) &= \rho^t \sin t\theta \end{aligned}$$

la solución general será entonces

$$y_t = k_1 \rho^t \cos t\theta + k_2 \rho^t \sin t\theta$$

Ejemplo 1: Sea la ecuación en diferencia

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Resolver la ecuación diferencial, y encontrar la población al cabo de 4 años sabiendo que $y_0 = 2, y_1 = 4$

SOLUCIÓN:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t)$$

$$y_{t+2} - y_{t+1} - 3y_{t+1} + 3y_t = 0$$

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0$$

resolver la ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

como la ecuación característica tiene dos raíces reales diferentes, entonces la soluciones

$$y_t = k_1 1^t + k_2 3^t$$

las condiciones $y_0 = 2$ y $y_1 = 4$

$$y_0 = k_1 1^0 + k_2 3^0 \rightarrow 2 = k_1 + k_2 \quad (2.3)$$

$$y_1 = k_1 1^1 + k_2 3^1 \rightarrow 4 = k_1 + 3k_2 \quad (2.4)$$

despejando k_2 de (2.3)

$$2 - k_1 = k_2 \quad (2.5)$$

reemplazar (2.5) en (2.4)

$$4 = k_1 + 3(2 - k_1)$$

$$4 = k_1 + 6 - 3k_1$$

$$4 - 6 = k_1 - 3k_1$$

$$-2 = -2k_1$$

$$1 = k_1$$

como ya hemos encontrado k_1 ahora reemplazar k_1 en la ecuación *

$$2 - k_1 = k_2$$

$$1 = k_2$$

entonces tenemos que

$$y_t = 1 + 3^t$$

al cabo de 4 años

$$y_4 = 1 + 3^4$$

$$y_4 = 82$$

Después de 4 años, la población de individuos alcanza un total de 82.

2.1.2. sistemas de ecuaciones en diferencia

Definition 3. *Un sistema en diferencia lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: Dos especies que conviven en un mismo territorio evolucionan del modo descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t \end{cases}$$

donde x_t, y_t representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año t .

SOLUCIÓN

$$y_{t+2} = x_{t+1} - 2y_{t+1}$$

$$y_{t+2} = (2x_t - 3y_t) - 2y_{t+1}$$

$$y_{t+2} = 2x_t - 3y_t - 2y_{t+1}$$

$$y_{t+2} = 2(y_{t+1} + 2y_t) - 3y_t - 2y_{t+1}$$

$$y_{t+2} = 2y_{t+1} + 4y_t - 3y_t - 2y_{t+1}$$

$$y_{t+2} = y_t$$

$$y_{t+2} - y_t = 0$$

resolviendo la ecuación característica

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\Rightarrow y_t = k_1(-1)^t + k_2 1^t$$

$$y_t = k_1(-1)^t + k_2$$

ahora encontrar x_t

$$x_t = y_{t+1} + 2y_t$$

$$x_t = (k_1(-1)^t + k_2) + 2(k_1(-1)^t + k_2)$$

$$x_t = k_1(-1)^t(-1) + k_2 + 2k_1(-1)^t + 2k_2$$

$$x_t = -k_1(-1)^t + 3k_2 + 2k_1(-1)^t$$

$$x_t = k_1(-1)^t + 3k_2$$

las soluciones de los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} y_t = k_1(-1)^t + k_2 \\ x_t = k_1(-1)^t + 3k_2 \end{cases}$$

2.1.3. sistema dinámico discreto

La teoría de sistemas dinámicos, una rama de las matemáticas, aborda el estudio del movimiento y proporciona un marco conceptual compartido en disciplinas como matemáticas, biología, ecología, física, historia y literatura. Esta área académica fue concebida en 1960 por J.W. Forrester¹ del MIT (Massachusetts Institute of Technology). En cuanto a los sistemas dinámicos discretos, H. Poincaré fue el primero en emplearlos en 1899 al intentar simplificar un modelo continuo. Sin embargo, fue en la década de los cincuenta cuando estos sistemas empezaron a ser estudiados y aplicados en una amplia gama de problemas.

Un sistema dinámico discreto se define matemáticamente como una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Donde f es una función $f : X \rightarrow X$ definida en un conjunto dado X , que se conoce como espacio de fases o espacio de estados. A menos que se especifique lo contrario, siempre consideraremos que las funciones f son lo suficientemente suaves, es decir, tienen derivadas continuas de todos los órdenes necesarios. Por lo tanto, al abordar problemas como los descritos anteriormente en el contexto de sistemas dinámicos, comenzamos por identificar el espacio de fases del problema, que es simplemente un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema que estamos analizando.

Las cantidades que caracterizan un sistema son denominadas variables de estado. Estas variables se organizan en un conjunto, representado como un vector, conocido como vector de estado, el cual contiene toda la información relevante sobre la condición actual del sistema. El espacio de fases representa, por lo tanto, la totalidad de los vectores de estado posibles que el sistema puede asumir.

modelos dinámicos discretos lineales

Teorema 2. *sea el sistema dinámico lineal discreto*

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad f(x) = mx + b$$

con $m \neq 1$. Sea $x^* = b/(1-m)$ el punto de equilibrio,

¹Jay W. Forrester, el padre de la Dinámica de Sistema (14 octubre, 2016): Fue un ingeniero estadounidense, considerado el padre de la dinámica de sistemas, una disciplina reciente que representa una extensión a toda clase de sistemas complejos de conceptos aplicados originalmente en ingeniería.[18]

- *sí $|m| < 1$ entonces x^* es atractor, en el sentido de que para cualquier condición inicial x_0*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

- *sí $|m| > 1$, entonces x^* es repelente, y al menos que $x_0 = x^*$ se cumple*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \infty$$

Demostración comenzamos calculando el valor de x_k

$$x_2 = m x_1 + b$$

$$x_3 = m x_2 + b = m^2 x_1 + b(m+1)$$

$$x_4 = m x_3 + b = m(m^2 x_1 + b(1+m)) + b = m^3 x_1 + b(1+m+m^2)$$

...

$$x_k = m^{k-1} x_1 + b(1+m+m^2+\dots+m^{k-2}) = m^{k-1} x_1 + b \sum_{j=0}^{k-2} m^j$$

sí suponemos que $|m| < 1$ entonces al hacer que k tienda a infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^{k-1} x_1 = 0$$

por otro lado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-2} m^j = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1-m},$$

por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$.

Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{b}{1-m} = x^*$$

Por un razonamiento similar, si $|m| > 1$ se cumple que $m^{k-1} x_1$ y $\sum_{j=0}^{k-2} m^j$ no están acotados cuando $k \rightarrow \infty$. ■

Ahora exploraremos relacionado con sistemas dinámicos lineales discretos, los cuales se corresponde con el tipo.

$$x_{k+1} = m x_k + b, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

donde m y b son constantes. los sistemas dinámicos están descritos de la forma $x_{k+1} = f(x_k)$, $K=1, 2, 3, \dots$, en el caso particular de sistemas dinámicos discretos lineales, la función f es del tipo $f(x) = m x + b$.

2.1.4. Exploración Gráfica: Retratos de Fase en el sistema Dinámico

Un diagrama de fase es una representación gráfica que muestra la evolución de un sistema dinámico a lo largo del tiempo. Estos sistemas se pueden modelar utilizando ecuaciones diferenciales o variables que estén relacionadas entre sí. En un diagrama de fase, las variables del sistema relacionadas se representan en un espacio bidimensional o tridimensional, y cada punto en el espacio representa un conjunto particular de valores para estas variables. En el contexto de sistemas dinámicos, como los descritos por ecuaciones diferenciales, los diagramas de fases son útiles para visualizar y comprender el comportamiento a lo largo del tiempo. Cada camino del diagrama de fases muestra cómo evoluciona el sistema con el tiempo desde su estado inicial.

Este enfoque gráfico facilita la identificación de patrones, puntos de equilibrio, ciclos y otras características importantes del sistema. Los diagramas de fases son valiosos en varios campos, incluidos la física, la biología, la ingeniería y otras disciplinas que estudian sistemas dinámicos.

Supongamos que las dos ecuaciones estudiadas en nuestro trabajo de modelado se escriben de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \tag{2.6}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Las curvas de fase o las trayectorias de fase de (2.6) son soluciones de

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \tag{2.7}$$

Por cualquier punto (x_0, y_0) hay una curva única, excepto en puntos singulares (x_s, y_s) donde

$$f(x_s, y_s) = g(x_s, y_s) = 0$$

Sea $x \rightarrow x - x_s, y \rightarrow y - y_s$, entonces $(0, 0)$ es un punto singular de las ecuación transformada. Así, sin pérdida de generalidad, ahora consideramos que (2.7) tiene un punto singular en el origen; eso es,

$$f(x, y) = g(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

Podemos expandir f y g en la serie de Taylor alrededor de $(0,0)$ y, conservando solo los términos lineales, obtenemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(0,0)} \quad (2.8)$$

que define la matriz A y las constantes a, b, c y d . La forma lineal es equivalente al sistema

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \quad (2.9)$$

Las soluciones de (2.9) dan las formas paramétricas de las curvas de fase; t es el parámetro paramétrico. Dejar λ_1 y λ_2 ser los valores propios de A definidos en (2.8); eso es,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb)$$

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

donde $\text{tr}(A) = (a + d)$ y $\det(A) = (ad - bc)$. sean λ_1, λ_2 ser dos valores propios de la matriz dada. Entonces $\lambda_{1,2} = \frac{-\text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)}}{2} = \frac{-\text{tr}(A) \pm \sqrt{B}}{2}$. Donde $\text{tr}(A) = (\lambda_1 + \lambda_2)$, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ y $B = ((\text{tr}(A))^2 - 4\det(A))$ [4]. Podemos mostrar los tipos y estabilidades de todos los diferentes puntos fijos en un diagrama ver la figura 2.10. Donde $\det < 0$, los valores propios son reales y tiene los signos opuestos, es un punto silla en la parte de abajo del diagrama de la figura 2.10. Si $\det(A) > 0$, los valores propios son reales con el mismo signo o complejos, entonces es un espiral o centro. los nodos cumple cuando $B > 0$ y los espirales cuando $B < 0$. La parábola representada por $B = 0$ en $(\det(A) - \text{tr}(A))$ en el plano los puntos de nodo y espirales. Las estabilidades de los nodos y espirales dependen por él signo de $\text{tr}(A)$. Cuando $\text{tr}(A) < 0$, los valores propios son de parte real negativa, por lo que el punto es un punto estable. Para los puntos son inestables son cuando $\text{tr}(A) > 0$

resumiendo los resultados de la siguiente forma:

clasificación de puntos fijos

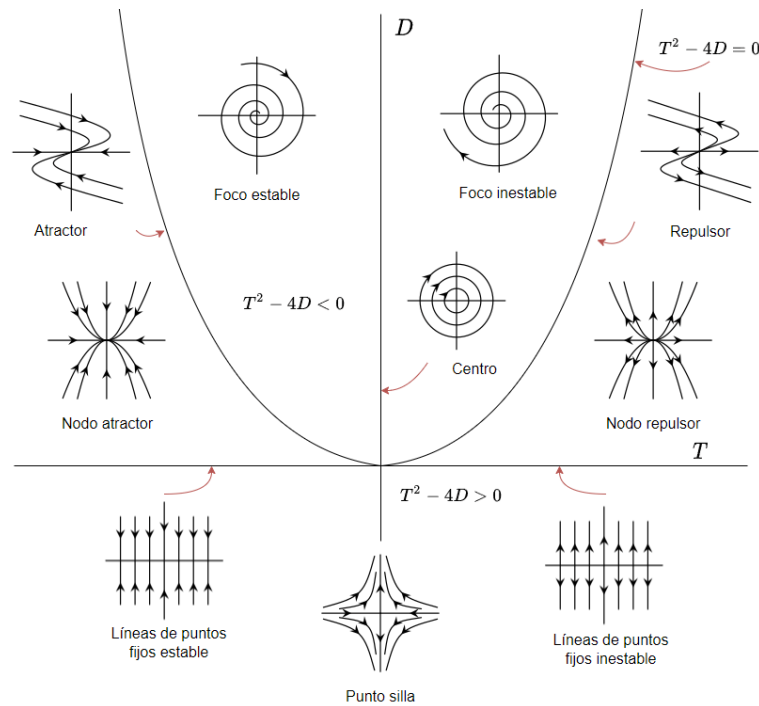


Figura 2. 1: representación gráfica de los diferentes tipos de estabilidad[3]

- nodo si $\det(A) > 0$ y $B \geq 0$
- espiral si $\text{tr}(A) \neq 0$ y $B < 0$
- silla si $\det(A) < 0$
- estrella/nodo degenerado si $\det(A) > 0$ y $B = 0$
- centro si $\text{tr}(A) = 0$ y $\det(A) > 0$

criterios de la estabilidad

- estable y atrayente si $\text{tr}(A) < 0$ y $\det(A) > 0$
- estable si $\text{tr}(A) \leq 0$ y $\det(A) < 0$
- inestable si $\text{tr}(A) > 0$ o $\det(A) < 0$

Dependiendo de los signos de los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz dada, los puntos de equilibrio se pueden expresar de la siguiente forma: 1. Los λ_1, λ_2 reales y distintos:

- **silla** si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$
- **inestable** si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

- **estable** si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

2. Los λ_1, λ_2 son reales y se repiten:

- **nodo estable y estrella inestable** si $\lambda > 0$
- **nodo estable y estrella estable** si $\lambda < 0$

3. los $\lambda_1, \lambda_2 = (\alpha \pm i\beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ complejos:

- **Espiral inestable** si $\alpha < 0$
- **espiral estable** si $\alpha > 0$
- **centro** si $\alpha = 0$ [4]

Ejemplo 3: consideremos un sistema lineal plano con las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} &= -7x + 5y\end{aligned}$$

Encontrar el retrato de fase del sistema

Solución:

encontrar los valores propios mediante del det

$$\begin{aligned}\det(A - I\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -7 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)(5-\lambda) + 42 \\ &= 20 - 4\lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 42 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 62\end{aligned}$$

resolver el polinomio característico

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(62)}}{2} \\
 &= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 248}}{2} \\
 &= \frac{9 \pm \sqrt{-167}}{2} \\
 &= \frac{9 \pm i\sqrt{167}}{2}
 \end{aligned}$$

donde los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{9 - i\sqrt{167}}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{9 + i\sqrt{167}}{2}$$

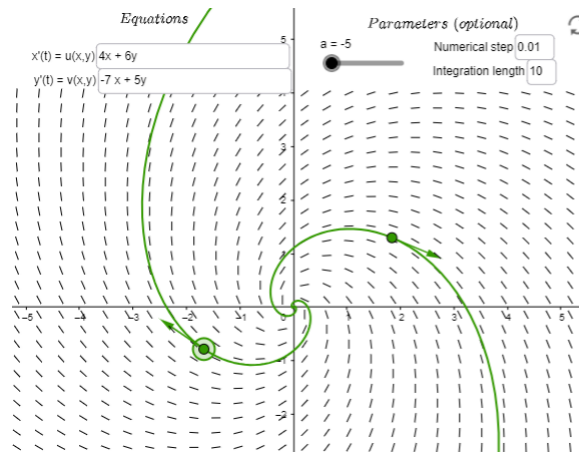


Figura 2. 2: muestra el flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales dado por $x(t) = 4x + 6y$ y $y(t) = -7x + 5y$. Los valores propios del sistema son $\lambda_1 = \frac{9+i\sqrt{167}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{9-i\sqrt{167}}{2}$, indicando un punto de equilibrio en $(0,0)$. La gráfica presenta trayectorias en espiral que se alejan del origen, lo que sugiere un comportamiento inestable del sistema.

linealización de los puntos de equilibrio Consideremos el siguiente autónomo no lineal

$$\begin{aligned}
 x' &= F_1(x, y) \\
 y' &= F_2(x, y)
 \end{aligned} \tag{2. 10}$$

Supongamos que $Y_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de equilibrio de este sistema (no necesariamente el origen). Queremos entender qué sucede con las soluciones cerca de Y_0 , es decir, linealizar el sistema cerca de Y_0 . Introducimos nuevas variables.

$$\begin{aligned} u &= x - x_0 \\ v &= y - y_0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lo que hacen estas variables es mover el punto de equilibrio al origen. Si x y y están cerca del punto de equilibrio (x_0, y_0) , entonces u y v tienden a 0. como los números x_0 y y_0 son constantes y además

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0$$

entonces el sistema (2.10) escrito en términos de u y v es

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d(x - x_0)}{dt} = \frac{dx}{dt} = F_1(x, y) = F_1(x_0 + u, y_0 + v) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(y - y_0)}{dt} = \frac{dy}{dt} = F_2(x, y) = F_2(x_0 + u, y_0 + v) \end{aligned}$$

estos son

$$\begin{aligned} u' &= F_1(x_0 + u, y_0 + v) \\ v' &= F_2(x_0 + u, y_0 + v) \end{aligned} \tag{2.12}$$

sí $u = v = 0$, entonces

$$\begin{aligned} u' &= F_1(x_0, y_0) \\ v' &= F_2(x_0, y_0) \end{aligned}$$

pero

$$F_1(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad F_2(x_0, y_0) = 0$$

ya que $Y_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de equilibrio, esto nos muestra que hemos movido el punto de equilibrio al origen en el plano UV . Necesitamos eliminar los términos de orden superior o no lineales del sistema (2.12). Como esas expresiones pueden incluir funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, no siempre es claro cuáles son los términos lineales. En este caso es necesario estudiar a F_1 y F_2 con más atención. De cálculo sabemos que es posible estudiar una función analizando su mejor aproximación lineal, la cual está dada por el plano tangente para funciones de dos variables, es decir

$$F_1(x_0 + u, y_0 + v) \approx F_1(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v \tag{2.13}$$

El lado derecho es la ecuación para el plano tangente a la gráfica de F_1 en $Y_0 = (x_0, y_0)$. Recordemos que la expresión (2.13) es también la aproximación polinomial de primer grado de Taylor para F_1 . Podemos, entonces, reescribir el sistema (2.12) como

$$\begin{aligned} u' &= F_1(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v + v_{F_1} \\ v' &= F_2(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[\frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v + v_{F_2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde v_{F_1} y v_{F_2} son los términos que forman la diferencia entre el plano tangente y las funciones F_1 y F_2 , respectivamente, y son precisamente los términos que deseamos ignorar al formar la aproximación lineal del sistema. Como $Y_0(x_0, y_0)$ es un punto de equilibrio, entonces

$$F_1(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad F_2(x_0, y_0) = 0$$

Así, las funciones (2.14) se pueden aproximar como

$$\begin{aligned} u' &\approx \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v \\ v' &\approx \left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[\frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si usamos la notación matricial podemos escribir el sistema anterior como

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

la matriz de 2×2 de las derivadas parciales en esta expresión se llama **matriz jacobiana** del sistema en $Y_0 = (x_0, y_0)$

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Por lo tanto, el sistema linealizado en el punto de equilibrio $Y_0 = (x_0, y_0)$ es

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Una observación importante de este proceso es que para crear el sistema linealizado solo es necesario conocer las derivadas parciales de las componentes F_1 y F_2 del campo vectorial

en el punto de equilibrio Y_0 , no es necesario hacer el cambio de variable moviendo el punto de equilibrio al origen. Más adelante veremos ejemplos para mostrar este hecho.

Ejemplo 4: linealizar el siguiente sistema no lineal

$$x' = -x + xy$$

$$y' = -2y + xy$$

para encontrar los puntos de equilibrio del sistema, las derivadas son iguales a cero, es

$$0 = -x + xy$$

$$0 = -2y + xy$$

los puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $(2,1)$, ahora linealizar el sistema

$$u' = Ju$$

entonces

$$u' = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ y & -2+x \end{pmatrix} u$$

reemplazar en la matriz los puntos de equilibrio en este caso $(0,0)$ y $(2,1)$. En el caso en que el punto de equilibrio es $(0,0)$ tenemos

$$u' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} u$$

los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$, como son reales negativos los dos su punto es un punto estable o sumidero, se hace lo mismo para el punto $(2,1)$

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

los valores propios son $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ y $\lambda_2 = \sqrt{2}$, como uno es real negativo y el otro real positivo es un punto inestable o punto silla. Las ecuaciones dadas representan un sistema dinámico con puntos de equilibrio en $(0,0)$ y $(2,1)$. En el punto $(0,0)$, el sistema exhibe un comportamiento estable, lo que significa que las soluciones cercanas a este punto tienden a converger hacia él con el tiempo, como un sumidero. Por otro lado, en el punto $(2,1)$, el sistema es inestable, lo que indica que las soluciones cercanas a este punto se alejan con el tiempo, como un punto de silla o repelente.

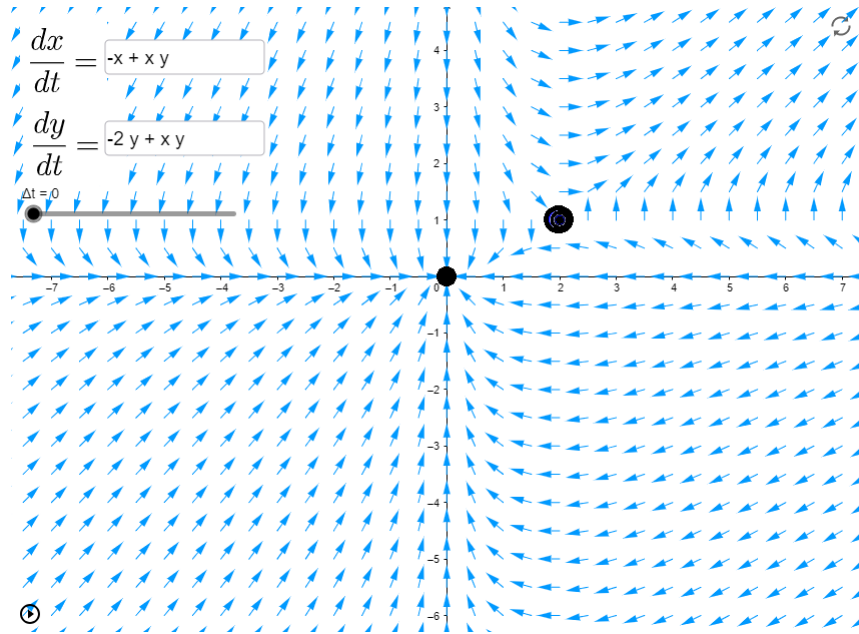


Figura 2. 3: diagrama de fase del sistema

ceroclinas Las ceroclinas son líneas en un sistema dinámico que representa una o más condiciones donde la tasa de cambio es cero. Estas líneas se pueden utilizar para estudiar sistemas con ecuaciones diferenciales o en diferencia y para analizar la estabilidad y el comportamiento del sistema.

Definition 4. Una de las herramientas más útiles para analizar sistemas no lineales de diferencial. ecuaciones (especialmente sistemas planos) es la ceroclinas. Para un sistema en la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

la x_j -ceroclinas es el conjunto de puntos donde x_j' desaparece, por lo que la x_j -ceroclinas es el conjunto de puntos determinado estableciendo $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Las x_j -ceroclinas generalmente separan $\mathbb{R}^n$ en una colección de regiones en las que los x_j -componentes del campo vectorial apuntan en dirección positiva o negativa. Si determinamos todas las ceroclinas, esto nos permitirá descomponer $\mathbb{R}^n$ en una colección de conjuntos abiertos, en cada uno de los cuales el campo vectorial apunta en una “determinada

dirección". Esto es más fácil de entender en el caso de un sistema plano.

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

En las x -ceroclinas, tenemos $x' = 0$, por lo que el campo vectorial apunta directamente hacia arriba o hacia abajo, y estos son los únicos puntos en los que esto sucede. Por lo tanto, las x -ceroclinas dividen $\mathbb{R}^n$ en regiones donde el campo vectorial apunta hacia la izquierda o hacia la derecha. De manera similar, en las y -ceroclinas, el campo vectorial es horizontal, por lo que las líneas nulas y separan $\mathbb{R}^n$ en regiones donde el campo vectorial apunta.

ya sea hacia arriba o hacia abajo. Las intersecciones de las x - e y -ceroclinas producen los puntos de equilibrio. En cualquiera de las regiones entre las nulas, el campo vectorial no es ni vertical ni horizontal, por lo que debe apuntar en una de cuatro direcciones: noreste, noroeste, sureste o suroeste. A estas regiones las llamamos regiones básicas. A menudo, un simple bosquejo de las regiones básicas nos permite comprender el retrato de fase.[2]

Ejemplo 5: Esbozar el Plano fase del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y \end{cases}$$

solución:

para encontrar las ceroclinas de $\frac{dx}{dt}$, igualamos la ecuación a cero:

$$x - 2y = 0$$

de aquí, despejamos x :

$$x = 2y$$

esta es la ceroclinas de x' . para encontrar la ceroclina de $\frac{dy}{dt}$, igualamos la ecuación a cero:

$$3x - 4y = 0$$

de aquí, despejamos y :

$$y = \frac{3}{4}x$$

para encontrar los puntos de equilibrio, buscamos la intersección de las ceroclinas:

$$x = 2y$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

sustituimos $y = \frac{3}{4}x$ en $x = 2y$

$$x = 2\left(\frac{3}{4}x\right)$$

$$x = \frac{3}{2}x$$

para que esta ecuación cumpla, x debe ser cero y entonces y también es cero, el punto de equilibrio del sistema es $(0,0)$

Gráfica de las ceroclinas

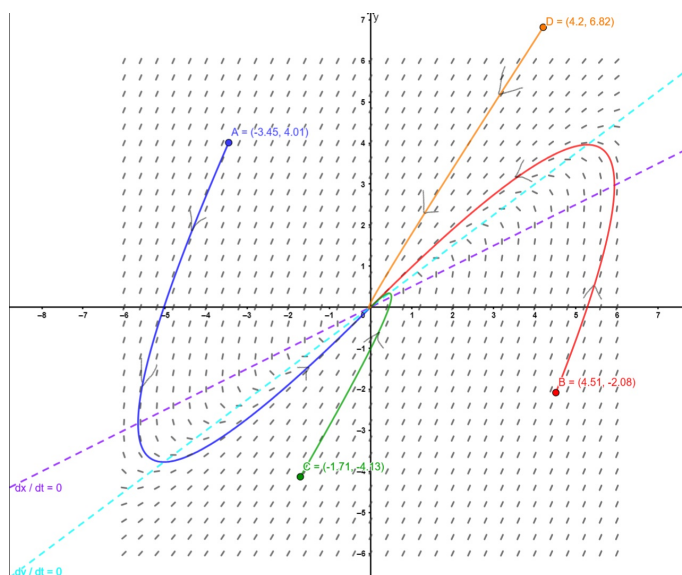


Figura 2. 4: las ceroclinas y campo de dirección.

ciclo límite consideremos un sistema no lineal,

$$\begin{aligned} x' &= F_1(x, y) \\ y' &= F_2(x, y) \end{aligned} \tag{2. 19}$$

la definición formal de ciclo límites es la siguiente

Definition 5. Se dice que una curva cerrada es un ciclo límite de un sistema no lineal (2. 19) si existen trayectorias que describen espirales que se acercan o alejan de ella.

Definition 6. Se dice que un ciclo límite es estable si todas las órbitas de (2. 19) que pasan suficientemente cerca de la curva cerrada describen espirales que tienden finalmente hacia ella. En caso contrario, se dice que es inestable.

Ejemplo 6: consideremos el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}\tag{2. 20}$$

Es sencillo hacer notar que el único punto de equilibrio del sistema es el origen $Y_0 = (0, 0)$. Utilizando las relaciones $r r' = x x' + y y'$ y $r^2 \theta' = x x' - y y'$ podemos transformar el sistema en coordenadas polares.

Por lo tanto, el sistema no lineal

$$\begin{aligned}r' &= r(1 - r^2) \\ \theta' &= 1\end{aligned}\tag{2. 21}$$

Este sistema de desacoplado, de manera que podemos resolver cada ecuación por separado para obtener las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$. Comencemos con la ecuación r' . Dicha ecuación es separable

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r(1 - r^2) \\ dr &= r(1 - r^2)dt \\ \int \frac{dr}{r(1 - r^2)} &= \int dt\end{aligned}$$

por un lado, tomando fracciones parciales, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dr}{r(1 - r^2)} &= \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2(r+1)} - \frac{1}{2(r-1)} \right) dr \\ &= \int \frac{dr}{r} - \int \frac{dr}{2(r+1)} - \int \frac{dr}{2(r-1)} \\ &= \ln|r| - \frac{1}{2} \ln|r+1| - \frac{1}{2} \ln|r-1| + c_1\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\int dt = t + c_2$$

de ambos resultados se tiene que

$$\ln|r| - \frac{1}{2} \ln|r+1| - \frac{1}{2} \ln|r-1| = t + c_3$$

multipliquemos ambos lados de la igualdad por -2

$$-2\ln|r| + \ln|r+1| + \ln|r-1| = -2t - 2c_3$$

ahora tomemos exponencial en ambos lados,

$$\begin{aligned} r^{-2}(r+1)(r-1) &= \exp^{-2t-2c_3} \\ 1-r^{-2} &= \exp^{-2t} \exp^{-2c_3} \\ r^{-2} &= 1-c \exp^{-2t} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$r^2 = \frac{1}{1+c \exp^{-2t}} \quad (2.22)$$

como $r \geq 0$, entonces

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1+c \exp^{-2t}}} \quad (2.23)$$

para el caso de la ecuación de θ' es inmediato que

$$\theta(t) = t + t_0 \quad (2.24)$$

por lo tanto, la solución general de (2.21) es

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+c \exp^{-2t}}} \\ \theta(t) &= t + t_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

de manera que la correspondiente solución del sistema no lineal (2.20) es

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos(t+t_0)}{\sqrt{1+c \exp^{-2t}}} \\ y(t) &= \frac{\sin(t+t_0)}{\sqrt{1+c \exp^{-2t}}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Analizando el resultado (2.25) se tiene 3 casos:

- si $c = 0$ se obtiene la solución

$$\begin{aligned} r(t) &= 1 \\ \theta(t) &= t + t_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

que no es más que la circunferencia de radio 1, $(x^2 + y^2 = 1)$ en sentido anti-horario

- si $c < 0$ es claro que $r > 1$, $\theta = t + t_0$ y además,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+c \exp^{-2t}}} = \infty \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+c \exp^{-2t}}} = 1 \quad (2.28)$$

- Finalmente, si $c > 0$ se observa que $r < 1, \theta = t + t_0$ y además

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + c \exp^{-2t}}} = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + c \exp^{-2t}}} = 1 \quad (2.29)$$

Lo que obtenemos es una curva cerrada o ciclo límite correspondiente a una trayectoria periódica para $r = 1$ y todas las demás trayectorias se acercan en espiral desde el exterior y el interior cuando $t \rightarrow \infty$, tal como se muestra en la siguiente figura. Lo que hemos hecho

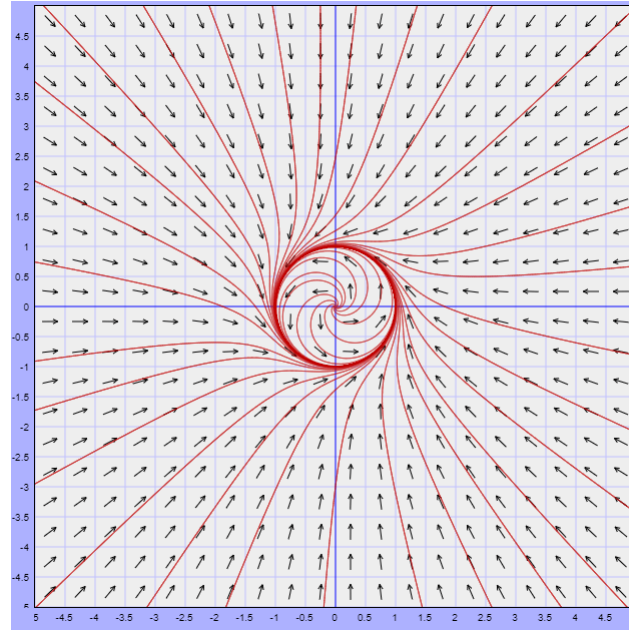


Figura 2. 5: Este plano fase está definido con las trayectorias dadas por (2. 26), es decir, corresponde al plano XY

es probar que el sistema no lineal (2. 20) tiene una trayectoria periódica, pero lo hemos hecho resolviendo el sistema explícitamente. Sin embargo, no siempre será sencillo resolver las ecuaciones involucradas, desearíamos de alguna manera saber si un sistema no lineal tiene o no trayectorias periódicas, pero sin conocer las soluciones explícitas.

2.1.5. Modelos de depredador-presa (sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra)

Veamos ahora un ejemplo no lineal de dos ecuaciones. Cuando dos especies tienen interacciones fuertes, su dinámica se representa mejor con dos ecuaciones vinculadas, una para la tasa de cambio de la población de cada especie en el tiempo t . La interacción entre las dos especies puede ser de naturaleza competitiva o cooperativa, o como depredador y presa.

En el ámbito del matrimonio, nos interesan las parejas que interactúan a nivel de comportamiento, donde el comportamiento a lo largo del tiempo puede ser una “especie”. Por ejemplo, el promedio móvil a lo largo del tiempo de afecto positivo en un cónyuge podría ser “la presa” de afecto negativo en la otra persona podría ser “el depredador”.

En esta sección, consideramos un modelo de una relación depredador-presa. En la sección 2.1.6 estudiamos un modelo de competencia y en la sección 2.1.7 estudiamos un modelo de cooperación.

En nuestro modelo depredador-presa, usamos N para representar la población de presas y P para representar la población de depredadores. La conocida Las ecuaciones de Lotka-Volterra² dan la tasa de cambio de N y P como

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN - bNP = N(a - bP) \text{ presa} \\ \frac{dP}{dt} &= -cP + eNP = P(eN - c) \text{ depredador}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Los parámetros constantes a, b, c y e son positivos. Observe que estas ecuaciones no son lineales debido a los términos bNP y eNP .

En la ecuación de la presa, el primer término aN indica que la población de presas cambia según su población actual, con a como tasa de natalidad o supervivencia. El segundo término bNP representa la interacción depredador-presa, reduciendo la población de presas debido al contacto con depredadores. Sin depredadores, la población de presas crecería ilimitadamente, lo cual no es realista debido a la capacidad de carga del entorno, pero se asume que la presencia de depredadores impide que se alcance esta capacidad.

La segunda ecuación, para los depredadores, es similar pero con signos opuestos. El término cP es negativo, indicando que la población de depredadores disminuye sin presas, mientras que el término de interacción eNP es positivo, aumentando la población de depredadores con la presencia de presas. Para simplificar el análisis, se utiliza la técnica de no dimensionalización, que reduce el número de parámetros y muestra cómo estos afectan la solución de manera similar. Después de esta reducción, las ecuaciones dependen de un solo parámetro significativo.

²Lotka era un químico que llegó a las mismas ecuaciones a través de una reacción química hipotética que podría exhibir un comportamiento periódico. Volterra derivó las ecuaciones como un modelo para explicar las capturas fluctuantes de peces en el Adriático.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u(1-\alpha v) \\ \frac{dv}{dt} &= v(u-\alpha)\end{aligned}\tag{2.31}$$

Las poblaciones de presas y depredadores N y P se han convertido en las poblaciones adimensionales u y v , respectivamente. Las ceroclinas de este modelo se encuentran resolviendo

$$\begin{aligned}f(u, v) &= u(1-\alpha v) = 0 \\ g(u, v) &= v(u-\alpha) = 0\end{aligned}\tag{2.32}$$

simultáneamente. Las soluciones son cuatro líneas rectas, $u = 0$ (el eje v), $v = 0$ (el eje u), $u = \alpha$ (una línea vertical) y $v = 1/\alpha$ (una línea horizontal). Las intersecciones de estado estacionario, donde $f = g = 0$, ocurren en $(u, v) = (0, 0)$ y en $(u, v) = (\alpha, 1/\alpha)$. Si graficamos el campo de fuerza en el plano de fase $u-v$, obtenemos las trayectorias de solución que se muestran en la figura 2.6. Encontramos que el $(u, v) = (\alpha, 1/\alpha)$ el estado estacionario es neutralmente estable, y el modelo predice oscilaciones periódicas interminables sobre este estado estacionario. La $(u, v) = (0, 0)$ el estado estacionario es inestable porque ninguna de las trayectorias de la solución se dirige hacia él.

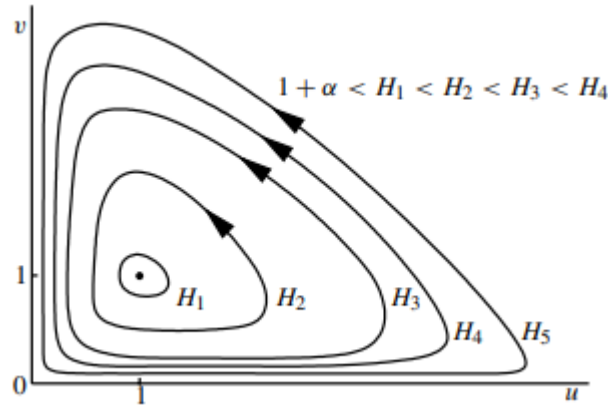


Figura 2.6: Esquema de soluciones de espacio de fase cerrado para el sistema depredador-presa Lotka-Volterra. El punto en el centro de las trayectorias circulares es el estado estacionario $(u, v) = (\alpha, 1/\alpha)$. Tenga en cuenta el agrupamiento de trayectorias estables cerca de los ejes. Las condiciones iniciales u_0 y v_0 determinan la trayectoria, y debido a que las trayectorias de solución son curvas cerradas, implican un comportamiento periódico

En la figura 2.6, se observa la ciclicidad de las poblaciones de presas y depredadores. Cuando la población de presas aumenta, la de depredadores también crece hasta que estos consumen tantas presas que la población de presas comienza a disminuir. Luego, la escasez de presas hace que la población de depredadores disminuya, permitiendo que la población de presas crezca de nuevo. Este ciclo explica por qué ambas poblaciones son cíclicas en el tiempo. Las condiciones iniciales determinan en qué punto de las curvas del espacio de fase ($u - v$) nos encontramos. En la figura 8.3, se observa que los picos en la población de presas preceden a los picos en la población de depredadores, lo que confirma esta explicación intuitiva.

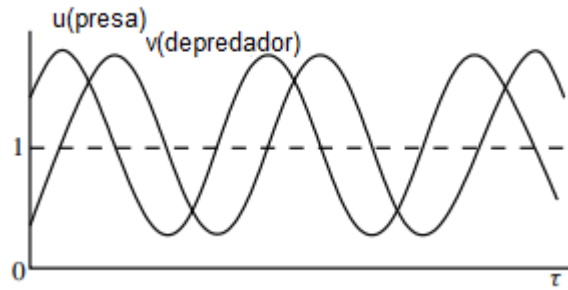


Figura 2. 7: Soluciones esquemáticas de (2.31) para el depredador, $v(t)$, y la presa, $u(t)$, como funciones del tiempo. Observe cómo la ola de presa precede a la ola de depredador, en línea con la intuición.

Las ecuaciones (2.31) en realidad se pueden reorganizar para dar una relación solucionable entre u y v . Al dividir las dos ecuaciones, eliminamos el tiempo y obtenemos la única ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v(u - \alpha)}{u(1 - \alpha v)} \quad (2.33)$$

Esta ecuación es razonablemente sencilla de integrar (es decir, tiene una primera integral), lo que da como resultado la ecuación solución

$$\alpha u + v - \ln(u^\alpha v) = H, \quad \alpha \text{ constante} \quad (2.34)$$

En el análisis del modelo depredador-presa, donde “ln.” es el logaritmo natural, las curvas solución periódicas en el plano $u - v$ se trazan según la ecuación dada, ilustrando ciclos periódicos como en la figura 2.6. Observando esta figura, notamos que cerca del estado

estacionario estable (cerca del eje v), las líneas están muy juntas, mientras que en el cuadrante, donde u y v son grandes y positivas, estas líneas están más dispersas.

Esto implica que si el sistema se encuentra cerca del origen en un ciclo periódico, una pequeña perturbación puede desplazarlo a otro ciclo periódico, haciendo las diferencias difíciles de distinguir cerca del origen, pero más marcadas a medida que nos alejamos de él. Estas trayectorias periódicas son muy inestables, ya que un pequeño cambio puede tener efectos significativos.

Murray señala que este es un problema común en sistemas conservativos, los cuales tienen una primera integral que resulta en trayectorias cerradas en el plano de fase. Para solucionar esto, se necesita un modelo con una única trayectoria de solución periódica estable, conocida como ciclo límite. Este ciclo límite permite que pequeñas perturbaciones desaparezcan y la solución vuelva a su trayectoria original, manteniendo la periodicidad de manera estable. Para mejorar nuestro modelo depredador-presa y lograr una solución periódica estable, se puede introducir un término logístico para el crecimiento o declive de cada especie y poner un límite a la depredación. Esto haría que el sistema tenga un comportamiento más realista y estable ante pequeñas perturbaciones.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N \left[r \left(1 - \frac{N}{K} \right) \right] - N \left[\frac{cP}{(N+d)} \right] \\ \frac{dP}{dt} &= P \left[e \left(1 - f \frac{P}{N} \right) \right]\end{aligned}\tag{2.35}$$

donde r, K, c, d, e y f son constantes. Comparando (2.35) con (2.30), vemos primero que el término aN en (2.30) ha sido reemplazado por $N[r(1 - N/K)]$. Entonces, en lugar de tener una tasa de supervivencia constante a , tenemos una tasa $r(1 - N/K)$ que tiende a cero cuando N se aproxima a cierta densidad de población límite K . Por tanto, K es la capacidad de carga del entorno para la presa. De manera similar, el término bNP ha sido reemplazado por $N[cP/(N+d)]$. Ahora, en lugar de una tasa de daño constante b debido al contacto con los depredadores, tenemos una tasa $c/(N+d)$, que llega a cero a medida que aumenta la población de presas y tiende a algún valor finito a medida que disminuye la población de presas. Este proceso refleja el hecho de que los depredadores solo pueden comerse un número limitado de presas, por lo que su tasa de daño debe disminuir a medida que la población de presas se vuelve excesivamente abundante.

La segunda ecuación de (2.35) es como una ecuación logística simple para el depredador,

pero con la capacidad de carga directamente proporcional a la presa disponible; es decir, la capacidad de carga es N/f . Cualquiera que sea la presa población es, si la población de depredadores se acerca a N/f , entonces dP/dt se acerca a cero. Con estas ecuaciones, podemos obtener un comportamiento de ciclo límite, o los estados estacionarios serán estables ante pequeñas perturbaciones, en el sentido de que las perturbaciones pronto desaparecen. El comportamiento depende fundamentalmente de los parámetros. Este modelo se analiza en detalle en Murray.

2.1.6. Modelos de competencia

En los modelos de competencia, dos especies compiten por la misma fuente finita de alimento. Por tanto, cada especie inhibe el crecimiento de la otra. Generalmente, ocurre en la naturaleza que cuando dos especies compiten por la misma fuente de alimento, una de las especies eventualmente se extingue, lo que se conoce como principio de exclusión competitiva. En las ecuaciones de competencia entre especies, escribimos una simetría que es muy diferente de la de los modelos depredador-presa. Podemos comenzar con ecuaciones realistas, que incluyan el crecimiento logístico, y generalizar la idea de capacidad de carga para incluir dos especies en competencia. Nuestro modelo es así

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right], \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right]\end{aligned}\tag{2.36}$$

donde N_1 es la primera especie y N_2 es la segunda especie. Tomémonos un poco de tiempo y examinemos las ecuaciones (2.36). Observe primero que son simétricos. Cada especie N_i tiene una capacidad de carga K_i , y el contacto con las otras especies reduce la tasa de crecimiento. Esto último es consecuencia del signo menos delante de cada término de interacción ($-b_{12} \frac{N_2}{K_1}$ y $-b_{21} \frac{N_1}{K_2}$). Tenga en cuenta que generalmente tenemos $b_{12} \neq b_{21}$, $r_1 \neq r_2$ y $K_1 \neq K_2$. Este modelo de competencia no es un sistema conservador como el sistema depredador-presa de Lotka-Volterra.

Si adimensionalizamos escribiendo $u_1 = N_1/K_1$, $u_2 = N_2/K_2$, $\tau = r_1 t$, $\rho = r_2/r_1$, $a_{12} = b_{12}K_2/K_1$ y $a_{21} = b_{21}K_1/K_2$, el sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\tau} &= u_1(1 - u_1 - a_{12}u_2) = f_1(u_1, u_2) \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \rho u_2(1 - u_2 - a_{21}u_1) = f_2(u_1, u_2)\end{aligned}\tag{2.37}$$

que tienen solo tres parámetros en lugar de los seis originales. las ceroclinas están dadas por

$$f_1(u_1, u_2) = 0, \quad f_2(u_1, u_2) = 0\tag{2.38}$$

y se cruzan en los estados estacionarios del sistema. Resolviendo (2.38), encontramos que las ceroclinas son cuatro líneas rectas en el plano de fase $u_1 - u_2$: $u_1 = 0$ (el eje- u_1), $u_2 = 0$ (el eje- u_2), $1 - u_1 - a_{12}u_2 = 0$, y $1 - u_2 - a_{21}u_1 = 0$. El número de puntos de intersección en la región realista $u_1 > 0, u_2 > 0$ depende de los valores de los parámetros a_{12} y a_{21} . En todos los casos, existen dos puntos de intersección, uno en cada eje, en $(0, 1)$ y $(1, 0)$. En $(0, 1)$, la especie 1 se ha extinguido, pero la especie 2 sobrevive. En $(1, 0)$, existe exactamente la situación opuesta. Si a_{12} y a_{21} se valoran adecuadamente, entonces también existe un estado estacionario en un punto (u_1^*, u_2^*) , donde ambas especies pueden coexistir.

La figura 2.8 resume los posibles resultados del sistema de competencia. En el primer caso, $a_{12} < 1$ y $a_{21} < 1$, y existe el estado estacionario positivo (u_1^*, u_2^*) . El análisis muestra que los estados estacionarios de los ejes son inestables y el estado estacionario positivo es estable. Así, en este caso, ambas especies pueden coexistir. Los tres estados estacionarios también existen en el segundo caso, donde ahora a_{12} y a_{21} son mayores que 1. Esta vez, los dos estados estacionarios en los ejes son estables, pero el estado estacionario positivo (u_1^*, u_2^*) es inestable. Por lo tanto, el sistema terminará en el estado estacionario $(1, 0)$ o $(0, 1)$. Volviendo a nuestra analogía tridimensional, la separatriz es una cresta plana entre los dos valles vecinos, que tocan fondo en $(1, 0)$ y $(0, 1)$. El punto (u_1^*, u_2^*) se llama punto de silla y es inestable ante pequeñas perturbaciones. Entonces, para estos valores de parámetros, las dos especies no pueden coexistir.

En el tercer y cuarto caso, uno de a_{12} y a_{21} es mayor que 1 y el otro es menor que 1. El resultado es que el estado estacionario positivo (u_1^*, u_2^*) ya no existe y la coexistencia de las dos especies es imposible. En el tercer caso, no importa por dónde empecemos, la especie 2 se extingue, y en el cuarto caso, no importa por dónde empecemos, la especie 1 se extingue. En resumen, podemos ver en la figura 2.8 que la coexistencia de dos especies en competencia es la excepción y no la regla.

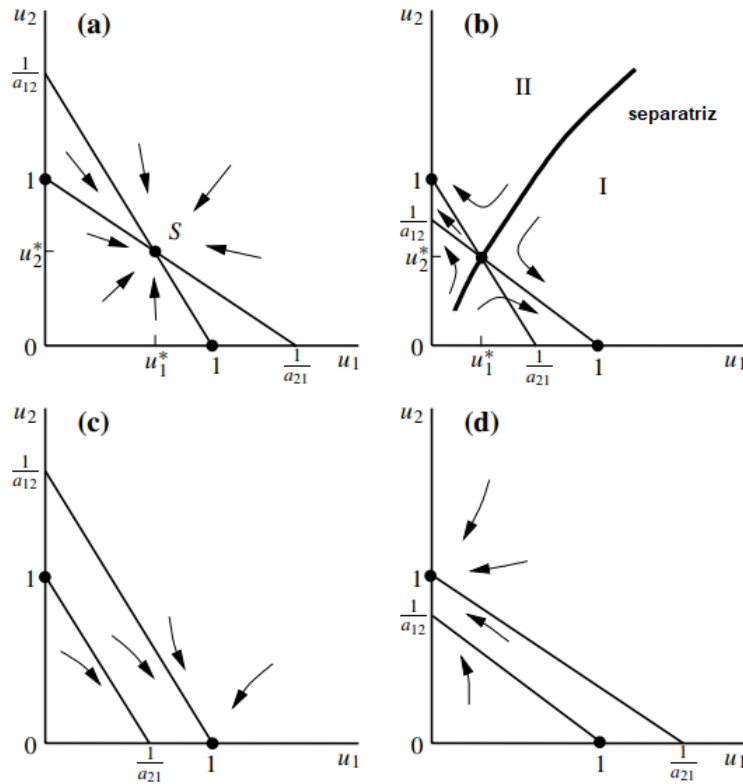


Figura 2. 8: Gráficos de espacio de fase de los posibles resultados de la competencia. Los ejes y las otras dos líneas rectas dibujadas en cada gráfico son las ceroclinas. Los puntos gruesos indican los estados estacionarios. (a) Caso 1: Existe un estado estable en el que ambas especies pueden sobrevivir. (b) Caso 2: Dependiendo de la ubicación de los valores iniciales con respecto a la separatriz, sobrevivirá una u otra especie. (c) Caso 3: No importa dónde u_1 y u_2 comience, solo la especie 1 sobrevivirá. (d) Caso 4: No importa dónde comiencen u_1 y u_2 , solo la especie 2 sobrevivirá.

2.1.7. Modelos de cooperación

Hay muchos ejemplos en la naturaleza donde la interacción de dos especies beneficia la supervivencia de ambas. Esta interacción beneficiosa es el significado del término cooperación. Los matrimonios exitosos deberían basarse más en escenarios de cooperación que de competencia. Las plantas y los polinizadores o dispersores de semillas son ejemplos de especies mutuamente beneficiosas.

Los modelos de cooperación se parecen mucho a los modelos de competencia, excepto por el signo delante de los términos de interacción. Esta vez, como la interacción es beneficiosa,

tenemos un signo más delante de cada término de interacción. Pasando directamente a la forma no dimensionalizada, que resulta familiar en la sección 2.1.6, tenemos las ecuaciones del modelo de cooperación:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\tau} &= u_1(1 - u_1 - a_{12}u_2) = f_1(u_1, u_2) \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \rho u_2(1 - u_2 - a_{21}u_1) = f_2(u_1, u_2)\end{aligned}\tag{2.39}$$

Las ceroclinas siguen siendo líneas rectas en el plano $u_1 - u_2$, y dos de las ceroclinas coinciden con el eje $-u_1$ y el eje $-u_2$. Estas líneas se cruzan en los estados estacionarios $(1, 0)$, $(0, 1)$ y, para ciertos valores de parámetros, en (u_1^*, u_2^*) , donde u_1^* y u_2^* ambos son positivos.

Se puede demostrar (Murray, 1993, p. 84) que en el caso de que $a_{12}a_{21} > 1$, se produce un crecimiento ilimitado para ambas especies (figura 2.9[a]). No existe un estado estacionario positivo (u_1^*, u_2^*) y los otros dos estados estacionarios son inestables. Si, por otro lado, $a_{12}a_{21} < 1$, todas las trayectorias en el espacio de fases tienden hacia el estado estacionario positivo (u_1^*, u_2^*) (figura 2.9[b]). Tenga en cuenta que en el estado estacionario positivo ambas especies han asumido un valor poblacional mayor que 1 (recuerde que todas las unidades no están dimensionalizadas en este punto). El valor de 1 es especial, porque ese es el tamaño de población máximo posible (la capacidad de carga) para cada especie en ausencia de interacción con las otras especies cooperantes. Sin embargo, con la presencia de cooperación, este modelo muestra que las dos especies pueden coexistir cada una con una densidad de población mayor de la que sería posible de otra manera. Por tanto, de la cooperación se deriva un beneficio evidente.

2.1.8. Modelos de crecimiento discretos para poblaciones que interactúan

Ahora consideramos dos especies que interactúan, cada una con generaciones no superpuestas, que afectan la dinámica de población de la otra. Al igual que en los modelos de crecimiento continuo, existen los mismos tipos principales de interacción, a saber, depredador-presa, competencia y mutualismo. En una situación depredador-presa, la tasa de crecimiento de uno aumenta a expensas del otro, mientras que en la competencia las tasas de crecimiento de ambos disminuyen, mientras que en el mutualismo ambas aumentan. Estos temas han sido ampliamente estudiados, pero no en la misma medida que los modelos continuos para los cuales, en el caso de dos especies, existe un tratamiento matemático

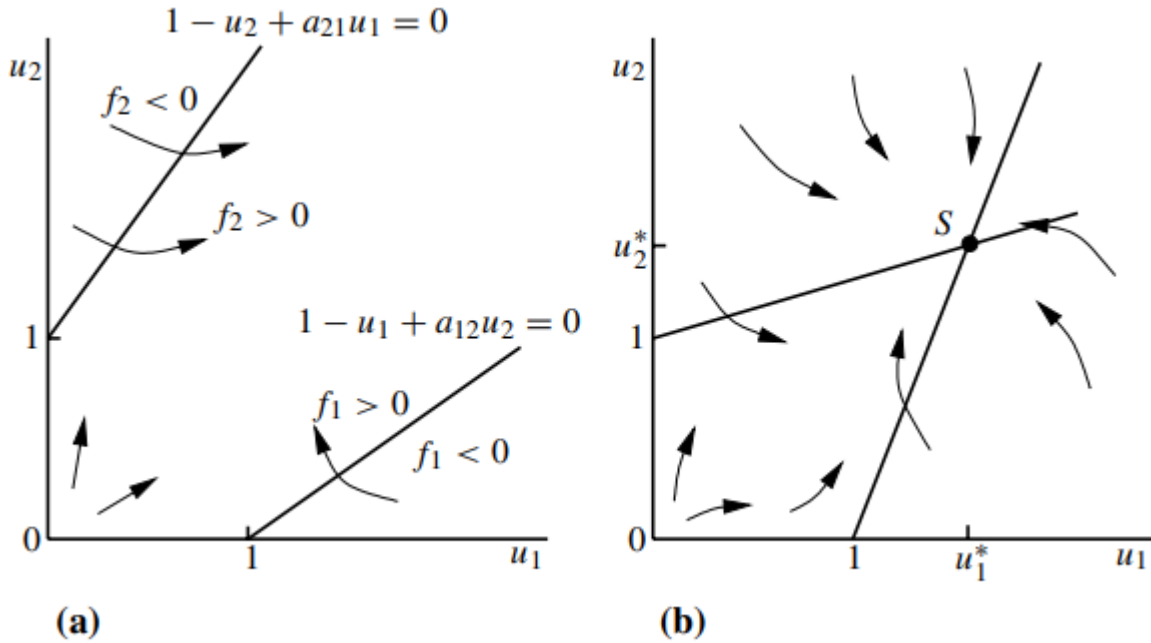


Figura 2. 9: Trayectorias de fases del modelo de cooperación. (a) Caso 1: Crecimiento ilimitado en ambas especies. (b) Caso 2: Estado estacionario positivo que excede las capacidades de carga de ambas especies.

completo de las ecuaciones. El libro de Hassel (1978) trata de modelos depredador-presa. Bedington y cols. (1975) presentan algunos resultados sobre la complejidad dinámica de los sistemas acoplados depredador-presa. El libro de Gumowski y Mira (1980) es más matemático y trata en general de las matemáticas de sistemas acoplados pero también incluye algunos resultados interesantes calculados numéricamente; véase también el artículo introductorio de Lauwerier (1986). El artículo de revisión de May (1986) es pertinente al material aquí y al de los capítulos anteriores, cuyo tema central es cómo se regulan las poblaciones.

También analiza, por ejemplo, los problemas asociados con factores ambientales impredecibles superpuestos a modelos deterministas y diversos aspectos prácticos de la gestión de recursos. En vista de la complejidad del comportamiento de las soluciones con modelos discretos de una sola especie, no sorprende que sea posible un comportamiento aún más complejo con sistemas discretos acoplados. Aunque esperamos un comportamiento complejo, es difícil no sentirse abrumado por la asombrosa diversidad de soluciones cuando vemos los patrones barrocos que pueden generarse, como lo han demostrado tan bellamente Peitgen y Richter (1986). Su libro está dedicado en gran parte a las soluciones generadas nu-

méricamente de sistemas discretos. Muestran, con colores llamativos, un amplio espectro de patrones que pueden surgir, por ejemplo, con un sistema de sólo dos ecuaciones acopladas; la dinámica no tiene por qué ser muy complicada. También muestran, entre otras cosas, cómo se relacionan las soluciones con la generación de fractales (ver, por ejemplo, Mandelbrot 1982), los conjuntos de Julia, los árboles de Hubbard y otros exóticos. La mayor parte del texto es una discusión técnica pero de fácil lectura sobre los principales temas de interés actual en los sistemas dinámicos.

Aquí nos ocupamos de los modelos depredador-presa. Un aspecto importante de la evolución por selección natural es el favorecimiento de depredadores eficientes y presas hábilmente esquivas. Dentro de la clase general, tenemos en mente principalmente los sistemas insectos depredador-presa, ya que, además de la disponibilidad de un conjunto sustancial de datos experimentales, los insectos a menudo tienen ciclos de vida que pueden modelarse mediante modelos discretos de dos especies.

Consideramos la interacción de la presa (N) y el depredador (P) regido por el tiempo discreto (t) sistema de ecuaciones acopladas

$$N_{t+1} = r N_t f(N_t, P_t), \quad (2.40)$$

$$P_{t+1} = N_t g(N_t, P_t), \quad (2.41)$$

dónde $r > 0$ es la tasa lineal neta de aumento de la presa y f y g son funciones que relacionan la eficiencia reproductiva de la presa influenciada por el depredador y la eficiencia de búsqueda del depredador, respectivamente. Las técnicas que analizamos son, por supuesto, aplicables a otras interacciones poblacionales. La teoría que se analiza en el siguiente capítulo se diferencia en que la interacción se superpone. Las técnicas para ello tienen similitudes pero con algunas diferencias fundamentales.

2.2. las bases en psicología

Nos adentraremos en las bases psicológicas que sustentan nuestra investigación. Exploraremos los fundamentos de la psicología aplicados a nuestro contexto específico, destacando cómo estas teorías y conceptos psicológicos proporcionan un marco sólido para comprender y abordar los fenómenos que estamos investigando. Desde la teoría del apego hasta

la psicología cognitiva y social, examinaremos cómo estas bases psicológicas influyen en nuestro enfoque metodológico y en la interpretación de los resultados obtenidos.

2.2.1. Manejando desafíos en la relación de pareja

El conflicto es inherente a las relaciones, incluso a las buenas. Cuando dos personas con orígenes diferentes deciden encontrarse, el conflicto no siempre es negativo; de hecho, pueden ser una señal de que están funcionando bien. Lo que importa es cómo se expresan y resuelven estos conflictos. La investigación de Gottman muestra que la capacidad de una pareja para resolver conflictos es un indicador importante de la satisfacción de la relación. La diferencia entre parejas armoniosas y parejas en conflicto no es la cantidad de discusiones que tienen, sino la forma en que interactúan.

Sanz cree que el impacto negativo de los desacuerdos depende de la satisfacción general con la relación y de la importancia del tema en cuestión. En cuanto al estilo de conflicto, observamos que en el modelo de demanda-rechazo las mujeres tienden a buscar intimidad, mientras que los hombres buscan autonomía y tienden a evitar las discusiones. Parte de la razón de estas diferencias pueden ser respuestas fisiológicas a las que los hombres son más sensibles durante las discusiones. En cuanto a las causas fundamentales del conflicto, Sanz destacó tres problemas principales: intercambio desequilibrado de refuerzos, relación coste-beneficio desequilibrada y expectativas desequilibradas. Los desequilibrios en el intercambio, incluidos los aspectos materiales, la expresión emocional y las actividades conjuntas, están directamente relacionados con la satisfacción de la relación. como sostiene Liberman que dijo:

“Desde la perspectiva del aprendizaje social, las reglas de interacción de la pareja pueden verse como un sistema quid pro quo, en el cual los miembros que experimentan desagrado en el matrimonio intercambian un tipo y cantidad limitados de refuerzos. Uno de los objetivos principales del enfoque del aprendizaje social en conflictos matrimoniales (...) es incrementar el nivel de intercambios recíprocos o mutuamente reforzantes entre marido y mujer. ” [13]

2.2.2. Resolución de conflictos entre parejas

Resolver problemas en una relación es esencial porque no solo mejora el sentido de unión, sino que también previene la fatiga mental severa causada por problemas no resueltos. Cuando surgen conflictos, las habilidades personales y el estado psicológico de la pareja, como el nivel de estrés y el estado de ánimo, son los aspectos más influyentes en la resolución de problemas. Según Simpson, Roles y Phillips (1996)[14], el conflicto pone a prueba las capacidades de una pareja e incluso promueve el desarrollo de la relación. Al abordar desacuerdos, es muy importante permanecer positivo y abierto al diálogo y anteponer la relación a los esfuerzos individuales en la discusión. El momento del conflicto también es crucial; La tensión puede dificultar el diálogo, por lo que es recomendable abordar situaciones en las que ambos estén relajados física y mentalmente.

Además, es importante dejar suficiente tiempo, elegir un lugar adecuado y hacer exigencias específicas para evitar culpas y castigos. Otras consideraciones incluyen identificar metas y deseos personales, hablar sobre un problema a la vez, evitar culpar y quejarse, centrarse en el momento, expresar sentimientos, prestar atención a la comunicación verbal y no verbal y sugerir soluciones alternativas.

Un aspecto clave en los conflictos de pareja son las agendas secretas, esquemas de pensamiento a través de los cuales se interpretan algunas de las conductas de la pareja. El contenido de las agendas secretas puede ser de tres tipos [13]: cuidado-falta de cuidado, interés-falta de interés y trato igual-trato desigual (poder). Así, por ejemplo, si una persona siente que su pareja no tiene suficiente interés por ella, es fácil que interprete los retrasos como confirmación de sus esquemas (prefiere a sus amigos que a mí, por ejemplo)[15].

2.2.3. La cuestión del poder en parejas

Los investigadores cuantitativos demostraron interés en el poder en las parejas, realizando numerosos intentos para medir su distribución. Sin embargo, estas estrategias no estaban interconectadas, lo que hizo que el concepto de poder resultar esquivo. Los intentos de definir y medir el poder, realizados por varios estudios, resultaron en dificultades y falta de coherencia. La investigación inicial de Strodbeck (1952) sobre tres culturas mostró un comienzo prometedor al medir el poder en la toma de decisiones en parejas de diferentes culturas:

- cultura matrilineal (los navajos) → la mujer gana.
- cultura patrilineal (los mormones) → el hombre gana.
- cultura supuestamente más igualitaria (los anglo-tejanos)

Otras definiciones de poder incluyeron la distribución de recursos, autovaloración, cantidad de tareas domésticas, interrupciones, preocupación por el matrimonio, asimetría en el tiempo de palabra, mirada visual, juicios de poder en conversaciones y resultados de juegos. El problema no radicaba en la falta de medición o definición, sino en la incapacidad de estas diversas definiciones para relacionarse entre sí o con variables criterio importantes.

Integrando el estudio del afecto (emoción) y el poder en nuestro enfoque de las interacciones de parejas. A grandes rasgos, definimos poder o influencia como la capacidad que tiene las emociones de una persona de influir en las emociones de su pareja. Esta definición cubre toda la gamma de emociones, lo que significa que podemos estimar el impacto posterior de emociones leves positivas o negativas por parte del marido sobre la esposa y viceversa. Complicamos el estudio del poder al conceptualizarlo como dos funciones distintas. A partir de esta simple definición, desarrollamos dos funciones de influencia que describe en detalle la capacidad de las emociones de cada persona para influir en las emociones de la otra.

2.2.4. Revisión de Gottman y Levenson

Gottman³ y Levenson (1992)[10] utilizaron un método que recopiló simultáneamente datos fisiológicos, conductuales y de autoinforme de 73 parejas y siguieron a las parejas de 1983 a 1987.

Utilizando la codificación observacional del comportamiento interactivo mediante el Sistema de Puntuación de Interacción Rápida de Parejas (RCISS⁴) de Gottman (1995), las parejas

³John Gottman es un psicólogo, investigador y terapeuta de parejas estadounidense, nacido el 26 de abril de 1942. Es conocido por su extenso trabajo en el campo de las relaciones interpersonales, especialmente en el área de las parejas y el matrimonio. Gottman ha realizado investigaciones significativas sobre la dinámica de las relaciones y ha desarrollado métodos para predecir el éxito o fracaso de un matrimonio con base en ciertos patrones de interacción

⁴El "Rapid couples interaction scoring system" (sistemas de puntuación rápida de interacciones de parejas) es un sistema desarrollado por J. Gottman y su equipo para analizar y evaluar las interacciones de parejas de manera rápida y eficiente. Este sistema se utiliza para observar y puntuar las interacciones de una pareja en

fueron clasificadas en dos grupos: “alto riesgo” “bajo riesgo”. Esta clasificación se basó en un método gráfico propuesto originalmente por Gottman en 1979 [11], diseñado para el Copules Interaction Scoring System, antecesor del RCISS. El sistema observaba la “interacción”, que comprendía todo lo que cada miembro de la pareja decía en dos turnos de conversación durante una tarea de quince minutos, destinada a resolver un área continua de desacuerdo en su matrimonio. Esta unidad proporcionó un número impar de interacciones para cada pareja[12].

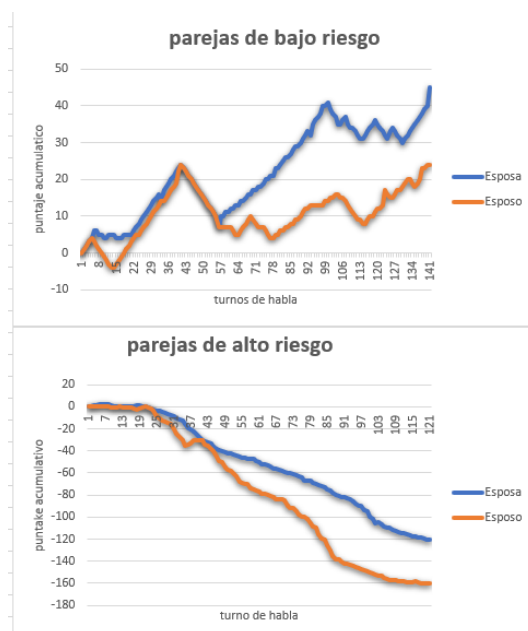


Figura 2. 10: Gráficos acumulativos de puntos de locutor del RCISS para una pareja de bajo riesgo y una pareja de alto riesgo

Durante cada entrevista, se realizó un cálculo para cada cónyuge en el que el número total de códigos de hablante RCISS positivos se restó del número total de códigos de hablante negativos. La clasificación de “positivo” o “negativo” se basó en investigaciones anteriores que intentaron distinguir entre parejas felices e infelices, basándose en calificaciones de comportamiento durante interacciones de parejas conflictivas. Luego se muestra la suma acumulada de estos puntos para cada cónyuge (ver Figura 2. 10). Las pendientes de estos gráficos, que se consideraron estimaciones estables de códigos positivos y negativos a lo largo del tiempo, se determinaron mediante análisis de regresión lineal. Si las gráficas de marido y mujer muestran una pendiente positiva, se consideran de bajo riesgo; de lo contrario, se consideran de alto riesgo. Este método se utilizó para determinar la evolución de la calidad de su relación

trario, se consideran de alto riesgo. A esta clasificación se le llama equilibrio emocional de la pareja. Cabe señalar que todas las parejas, incluso las que están felizmente casadas, tienen algunas interacciones negativas, del mismo modo que todas las parejas, incluso las que no son felices, tienen algunas interacciones positivas. El cálculo de la pendiente de este gráfico se basa en la teoría del equilibrio conyugal, que sugiere que el proceso más importante para predecir el divorcio implicará un equilibrio o moderación entre las interacciones positivas y negativas. Se definieron parejas de bajo riesgo como aquellas en las que la pendiente del hablante (ya sea marido o mujer) era significativamente positiva; por el contrario, las parejas de alto riesgo se caracterizaron por al menos una pendiente del hablante que no era significativamente positiva. En resumen, las parejas de bajo riesgo son aquellas que consistentemente tienen más códigos RCISS positivos que negativos. La clasificación de las parejas en la muestra actual resultó en dos grupos: 42 parejas de bajo riesgo y 31 parejas de alto riesgo Como se muestra en 2. 10. En la figura, hay dos gráficos acumulativos que representan un par de bajo riesgo y otro par de alto riesgo.

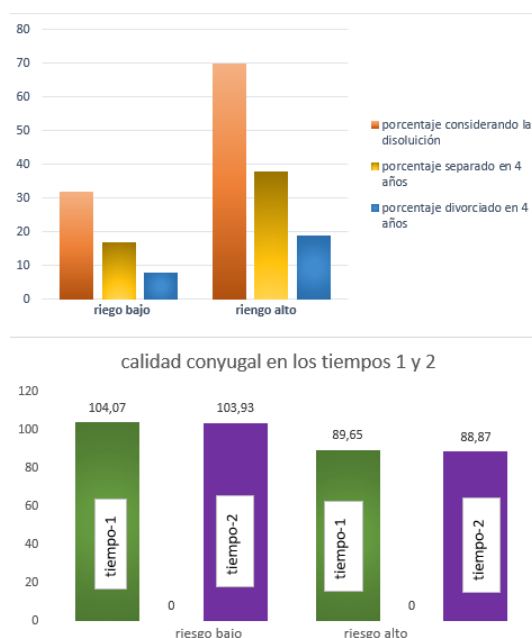


Figura 2. 11: Datos de resultados de la cascada de disolución matrimonial para matrimonios de alto y bajo riesgo[10]

en 1987, se llevó a cabo un seguimiento de las parejas que participaron en la evaluación inicial realizada cuatro años antes. De las 73 parejas iniciales, se logró contactar y obtener la participación de 70 maridos y 72 esposas, en total 70 parejas (95,89%) aceptaron. La in-

formación recopilada incluyó el estado civil de los participantes.

Gottman y Levenson (1922) presentaron resultados significativos relacionados con la variable de disolución en su estudio. Utilizando la cascada de disolución, que es una escala de Gottman identificando precursores de separación y divorcio como continúa infelicidad de la pareja y pensamientos serios de disolución, observaron que las parejas de bajo riesgo, que estaba más satisfecha en el momento 1 en la figura 2. 11, eran menos propensas a considerar la disolución del matrimonio y experimentar separación y divorcio en el momento 2. Así, la variable de afecto positivo frente a negativo predijo toda una serie de eventos relacionados con la disolución de parejas.

Tipología matrimonial

Gottman (1993) propuso y validó una tipología que clasifica los matrimonios en tres tipos, que son longitudinalmente estables y presentan patrones distintos de interacción marital en el tiempo-1. Estos patrones de interacción difieren de los observados en el tiempo-1 en las parejas que eventualmente se disolverán. Los tres grupos de parejas estables son:

- **Validadores:** parejas que se esfuerzan por reconocer y respetar las experiencias y perspectivas de su compañero de manera positiva y afectuosa, algunas características de las parejas incluyen, escucha activa, empatía, apoyo emocional, comunicación abierta y resolución de conflictos constructiva. Estas parejas tienden a tener relaciones más saludables y satisfactorias, ya que la validación mutua crea un ambiente de apoyo y entendimiento.
- **Volátiles:** pueden experimentar altos niveles de emoción y pasión en su relación, lo que a menudo se manifiesta en discusiones intensas y expresiones emocionales fuertes, algunas características de las parejas volátiles incluyen, intensidades características, comunicación abierta, reconciliación rápida, pasión y entusiasmo.
- **Evasores:** suelen evitar las discusiones difíciles o conflictos para mantener la armonía superficial en la relación, pero a menudo a expensas de una comunicación y conexión emocional más profunda.

Había dos grupos de parejas no estables:

- **Hostiles:** en este tipo de relaciones, los conflictos y las discusiones suelen ser destructivos y pueden dar lugar a un ambiente negativo y tóxico en la relación.

- Hostiles-desvinculados: se trata de una relación en la que los miembros de la pareja pueden experimentar hostilidad, conflicto o antagonismo, al mismo tiempo que tienen una falta de conexión emocional y cercanía.

Gottman identificó una constante aproximada que se mantenía invariable en los tres tipos de parejas estables. Esta constante representa por la proporción de códigos de hablantes RCISS positivos y negativos durante la resolución de conflicto, es cercano a 5 y no indica diferencias significativas entre los tres tipos de parejas estables. En comparación, la proporción de parejas inestables o que termina separándose fue de 0. Esta explicación sugiere que a, pesar de las diferencias en las parejas estables, el ajuste a la estabilidad de parejas.

2.2.5. Sistema de Puntuación de Interacción Rápida de Parejas (RCISS)

Sistema de puntuación de interacción rápida de parejas (RCISS), basado en la premisa de que cada mensaje tiene múltiples componentes, incluyendo el contenido literal. El contenido se refiere a las palabras exactas utilizadas, que por sí solas a menudo no transmiten todo el significado. Quienes estudian la interacción de pareja y transcriben conversaciones palabra por palabra suelen anotar las transcripciones con detalles sobre cómo se dijeron las cosas, incluyendo tonos de voz, expresiones faciales y movimientos corporales, así como el comportamiento no verbal del oyente. Es casi imposible interpretar una transcripción sin imaginar estas señales, ya que son esenciales para dar vida a la conversación. Por ejemplo, considere el siguiente extracto:

- H: Nunca adivinarás a quién vi hoy en Hour House, Frank Dugan.
- W: Entonces, gran cosa, viste a Frank Dugan.
- H: ¿No recuerdas que tuve esa discusión con él el miércoles pasado?
- W: se me olvidó.
- H: Sí.
- W: Así que lo siento, lo olvidé. ¿Está bien?
- H: Entonces, es un gran problema verlo.
- W: Entonces, ¿qué quieres que haga, saltar arriba y abajo?
- H: Bueno, ¿cómo estuvo tu día, cariño?

En el marco del RCISS, los elementos no verbales asociados con la forma en que se entrega un mensaje se conocen como “afecto”, y las reacciones no verbales del oyente se denominan “contexto”. La interpretación de un mensaje en una interacción social depende de su contenido, el afecto y el contexto en el que se presenta.

Derivación de códigos de contenido RCISS

Los códigos de contenido del RCISS se derivaron en parte de trabajos anteriores, como el Sistema de Codificación de Interacción Marital (MICS) y el Inventario de Conflictos Maritales (IMC), y en parte de la propia experiencia de los autores. Estos códigos abarcan diversos tipos de interacciones verbales en una pareja:

1. Acuerdo (AG): Incluye cinco tipos de acuerdo, como el acuerdo directo, la aceptación de responsabilidad, la aceptación de modificación, el cumplimiento y el asentimiento.
2. Desacuerdo (DC): Comprende cinco tipos de desacuerdo, incluyendo el desacuerdo directo, el "sí, pero", desacuerdo con justificación, el comando y el incumplimiento.
3. Charla de Comunicación (CT): Incluye declaraciones sobre la comunicación misma, como volver al tema, dirigir hacia la resolución de problemas, metacomunicación y solicitud de aclaración.
4. Lectura mental (MR): Involucra atribuir sentimientos, actitudes, opiniones o comportamientos al cónyuge.
5. Resolución de Problemas e Intercambio de Información (PS): Incluye planes específicos y no específicos, información de relación y opiniones, sentimientos o actitudes no relacionadas.
6. Resumiendo Otros (SO): Comprende resumir las declaraciones de la otra persona o de ambos.
7. Sí mismo resumido (SS): Es una declaración que repasa las propias declaraciones anteriores del hablante.
8. Expresar Sentimientos sobre un Problema (PF): Incluye la conversación sobre problemas generalizados, problemas de relación, sentimientos y declaraciones ininteligibles (blurp).

CÓDIGOS NO VERBALES DE LAS RCISS

Existen dos tipos de códigos no verbales: los de afecto y los de contexto. Los primeros clasifican el comportamiento no verbal del hablante, y los segundos, el del oyente. Cada unidad de pensamiento recibe un código de afecto y uno de contexto, calificados como positivo (+), neutral (0) o negativo (—). El codificador utiliza transcripciones y videos para evaluar cada unidad de pensamiento, comenzando por las señales faciales. Si no puede determinar si es positivo o negativo, revisa el tono de voz y luego las señales corporales. Si aún no puede hacer una evaluación, se clasifica como neutral.

		señales		
canal no verbal	positivo	negativo		
Rostro	Sonrisa	fruncir el ceño		
	expresión empática	burla		
	asentir con la cabeza	expresión temerosa		
		llorar		
		sonrisa afectada		
		expresión enojada		
		asco		
		destello		
voz	cariñosa	satisfecho	frío	culpando
	Cálido	boyante	asustado	sarcástico
	suave	burbujeante	impaciente	enojado
	tierno	alegre	duro	furioso
	aliviado	riendo	cortante	hiriente
	empático	alegre	deprimido	
	preocupado		acusando	
	amoroso			
cuerpo	conmover	tensión del cuello o de la mano		
	Reducción de distancia	gestos groseros		
	Atención	manos levantadas con disgusto		
	Relajación	inatención		

Cuadro 1: señales utilizadas para codificar el comportamiento no verbal en el RCISS

Aunque el manual de códigos sugiere una jerarquía mecánica, en la práctica, la sonrisa puede significar muchas cosas, como tensión o ira. Por ello, la jerarquía es solo una guía y todas las señales se combinan para crear un código de afecto. El concepto de "clima afectivo" (positivo, neutral o negativo) es útil para evaluar cada unidad de pensamiento. Los codificadores son entrenados primero en tono de voz, luego en expresiones faciales [20] y finalmente en señales corporales, pero deben integrar estos canales para formar un juicio general. Este juicio puede variar entre parejas debido a la diversidad en la expresión del afecto.

Para calibrar la codificación, el codificador observa toda la grabación antes de codificar, notando variaciones en el clima afectivo. Aunque el manual enfatiza las señales faciales, los codificadores a menudo se basan en el tono de voz, lo que puede diferir de las teorías anteriores debido a la variedad en la expresión emocional. La sonrisa o la risa en contextos de tensión no deben codificarse como afecto positivo.

En general, las señales de tensión y relajación son más útiles, ya que todos los canales suelen activar afecto de manera coherente. Se desarrollan códigos específicos para el tono de voz y las expresiones faciales para obtener detalles más precisos.

Los codificadores deben ser sensibles y no esperar efectos exagerados; una pequeña sonrisa o una expresión de preocupación pueden ser suficientes para un código positivo. Es importante que se centren en las señales mostradas y no en la intención del hablante, evitando juicios basados en el contenido del mensaje.

3. FORMULACIÓN DEL MODELO

Mostrando el proceso de desarrollo de las ecuaciones de las interacciones de pareja, abordando el desafío de modelar la ecuación a lo largo del tiempo. Se destaca nueva teorías matemáticas existentes en este contexto, que no son muchas las diferencias de otros modelos cualitativos. Además, es importante señalar que para este estudio se consideraron parejas que mostraran estabilidad en su relación (definida como estar casados o tener más de dos años de relación). Se describe la elección de la variable Gottman-Levenson, el sistema de puntuación de interacción rápida de parejas (RCISS) y el cómo estas se relacionan con el modelo descrito por Gottman y Murray.

3.1. La historia de amor de Romeo y Julieta

Comenzamos con un ejemplo lineal que fue diseñado para aumentar nuestra comprensión de las relaciones amorosas (y otras). El ejemplo deriva inicialmente del trabajo de Anatol Rapoport (1960) en su libro clásico *Fights, Games, and Debates*. Strogatz (1994) describió de forma independiente las mismas ecuaciones que el modelo de Romeo y Julieta.

Supongamos que en cualquier momento t , podemos medir el amor u odio de Romeo por

Julieta, $R(t)$, y el amor u odio de Julieta por Romeo, $J(t)$. Los valores positivos de estas funciones indican amor y los valores negativos indican odio. Una suposición muy simple sería que el cambio en el amor de Romeo por Julieta es una fracción de su amor actual más una fracción del amor actual de ella. De manera similar, el amor de Julieta por Romeo cambiará en una fracción de su amor actual por Romeo y en una fracción del amor de Romeo por ella. Esta suposición nos lleva a las ecuaciones modelo

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ, \quad (\text{Romeo}) \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ, \quad (\text{Julieta})\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde a, b, c y d son parámetros con valores numéricos. las ceroclinas del modelo de Romeo y Julieta (3.1) son

$$\begin{aligned}f(R, J) &= aR + bJ = 0 \\ g(R, J) &= cR + dJ = 0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

Estas ecuaciones son lineales, por lo que las gráficas de f y g son líneas rectas en el plano $R - J$.

Si a y e son cero, entonces estamos diciendo que el amor de Romeo cambia como una fracción del amor de Julieta por él y no depende en absoluto del nivel de su propio amor. De manera similar, los cambios en el amor de Julieta dependen únicamente del amor de Romeo por ella. En este caso, las ceroclinas son $f = 0 \Leftrightarrow R = 0$ y $g = 0 \Leftrightarrow J = 0$, que son los ejes J y R respectivamente. Se cruzan en el origen, $R = J = 0$, por lo que este punto es el estado estacionario del modelo. Si también asumimos que $b > 0$, pero $c < 0$, entonces el amor de Romeo aumenta al igual que el de Julieta, pero el amor de Julieta solo se calienta a medida que el de Romeo disminuye. Entonces, el campo de fuerza en los cuatro cuadrantes del espacio de fases nos da las trayectorias que se muestran en la figura 3.1(a). Se trata de trayectorias cerradas a lo largo de las cuales el amor de Romeo y Julieta gira sin cesar en torno al estado estacionario. Por lo tanto, el punto $(R, J) = (0, 0)$ se denomina estado estacionario neutralmente estable porque los estados cercanos nunca se alejan ni se acercan más. Los tristes resultados aquí son ciclos perpetuos de amor y odio.

Muchos otros escenarios son posibles. Consideremos, por ejemplo, el caso en el que Romeo es un amante cauteloso: es decir, $a < 0$ y $b > 0$. Estos signos significan que el propio amor de Romeo se enfría ($a < 0$) pero que está dispuesto a aumentar su amor si Julieta expresa el suyo ($b > 0$). Simplifiquemos aún más nuestro ejemplo suponiendo que los dos amantes

son idénticos: es decir, $a = e$ y $b = c$. ¿Qué tipo de relación pueden tener dos amantes así? La respuesta depende del tamaño relativo de a y b .

Las ceroclinas (3.2) son las dos líneas rectas $aR + bJ = 0$ y $bR + aJ = 0$. Su intersección está en el origen, $(R, J) = (0, 0)$, por lo que esta es la única línea estable posible. estado. Se puede demostrar que cuando $a^2 > b^2$, el estado estacionario es estable y todas las trayectorias no conducen a sentimientos (ni amor ni odio); la relación se desvanece hasta llegar a cero, o indiferencia mutua (figura 3.1(b)). La lección aquí es que demasiada precaución conduce a la apatía.

Cuando $a^2 < b^2$, los dos son más atrevidos y más sensibles el uno con el otro, pero ahora la relación es explosiva, ya sea una fiesta de amor o una guerra, acercándose asintóticamente a la línea $R = J$ (figura 3.1(c)). Observe que este sistema lineal es una mala representación de la realidad porque produce ciclos o valores extraños que van hasta más o menos el infinito, o hasta cero (figura 3.1). Este tipo de comportamiento es característico de los modelos lineales, por lo que para comportamientos de solución más realistas necesitamos modelos no lineales.

3.2. la ecuación

La suposición de que la puntuación de cada persona está complétame influenciada por la puntuación de su compañero en el turno inmediatamente anterior surge de manera natural una recurrencia, es indicativa una clase particular de modelos matemáticos con ecuaciones en diferencia. Sí representamos los puntajes de comportamientos de la esposa y el esposo en el turno t como W_t y H_t respectivamente, la secuencia de puntuaciones se representa mediante un conjunto de variables de ecuaciones en diferencias relacionadas. Este enfoque refleja la interdependencia de la interacción personal, donde el comportamiento de cada pareja está influenciado por su compañero. La formulación matemática que proporciona una imagen detallada de cómo evolucionan los resultados conductuales en cada ronda de interacción de pareja, capturando la dinámica compleja de la relación:

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= f(W_t, H_t) \\ H_{t+1} &= g(W_{t+1}, H_t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Es importante tener en cuenta que ahora se trata de un tiempo discreto cuyos valores se de-

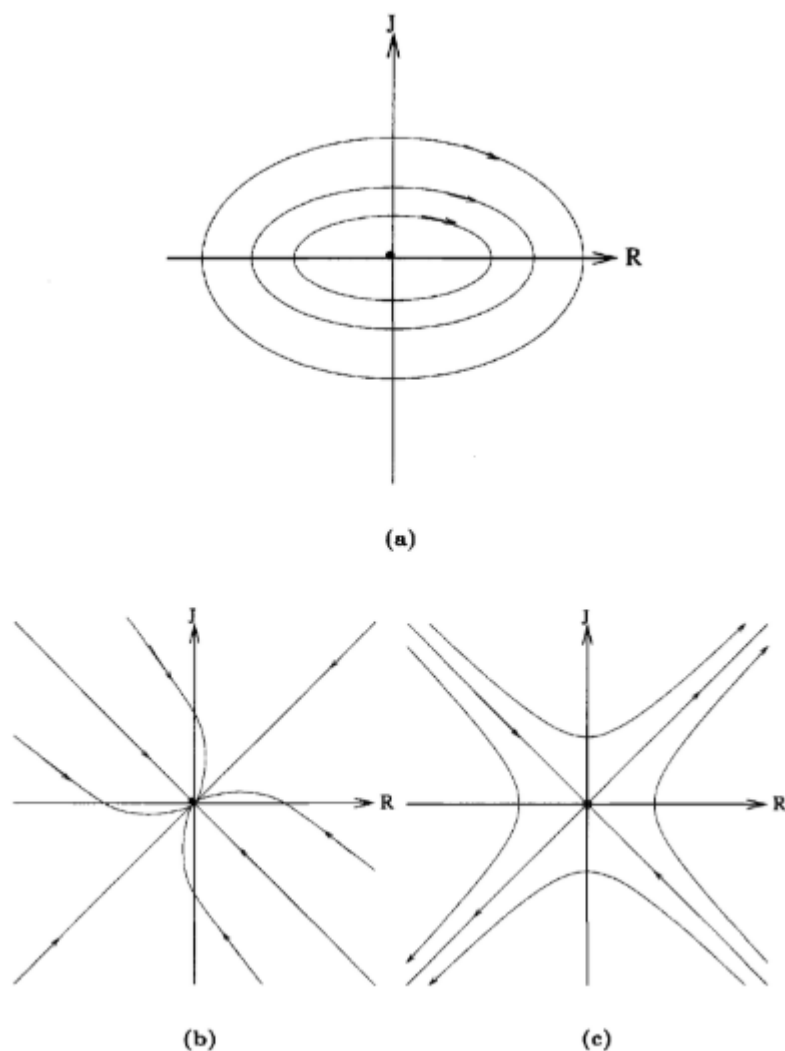


Figura 3. 1: Romeo y Julieta. (a) El amor de Julieta se calienta a medida que el de Romeo disminuye: ciclos perpetuos de amor y odio; (b) Amantes cautelosos con $a^2 > b^2$: la relación se desvanece hasta llegar a cero, o indiferencia mutua; (c) Amantes cautelosos con $a^2 < b^2$: la relación es explosiva, yendo a una fiesta de amor (infinito positivo) o a una guerra (infinito negativo).

notan por 1,2,3,..., *etc.* La asimetría en el índice de debe a nuestra elección de dejar que la esposa habla primero sin perder generalidad. Por eso llamamos turnos del habla $W_1, H_1, W_2, H_2, \dots, etc.$ Para determinar funciones f y g razonables, hacemos algunas suposiciones simplificadas. Primero suponemos que las dos puntuaciones anteriores contribuyen por separado, la puntuación de una persona se descompone en dos componentes:

- (1) La influencia interpersonal de un cónyuge sobre el otro, llamada conducta influen-

ciada.

- (2) La dinámica intraindividual, llamada conducta no influenciada.

El comportamiento influenciado se basó únicamente en la puntuación anterior de cada persona, mientras que el comportamiento no influenciado se basó en la puntuación del último turno de habla del compañero. Esta descomposición de la variable de Gottman-Levenson en comportamiento influenciado y no influenciado refleja nuestra teoría de que dicha variable está compuesta por múltiples componentes, cada uno contribuyendo de manera única a la predicción de la trayectoria longitudinal de la pareja. Estamos construyendo una teoría que explique los mecanismos que respaldan la capacidad predictiva de esta variable en relación con la estabilidad de la pareja.

3.2.1. comportamiento no influenciado

Primero, nos centramos en la parte no influenciada del comportamiento, es decir, el comportamiento que exhibiría una persona si no estuviera influenciada por su pareja. A esto lo llamamos “temperamento básico”, el punto de ajuste no afectado o el estado estable no afectado del individuo. Suponemos que cada individuo eventualmente se acercaría a ese estado estable después de algún tiempo, independientemente de cuán felices o tristes se sintieran por una interacción anterior. La forma más sencilla de modelar la secuencia de puntuaciones no influenciadas es suponer que el comportamiento no influenciado puede modelarse mediante una ecuación lineal simple:

$$P_{t+1} = r_i P_t + a \quad (3.4)$$

- Donde P_t es la puntuación de la variable de Gottman-Levenson en el turno t .
- r_i determina la velocidad a la que el individuo vuelve al punto de referencia sin influencias.
- a es una constante específica del individuo.

como la ecuación (3.4) es una relación lineal, pensando en que esta ecuación se parece a una recta (puntos de rectas realmente dado que es discreto) podemos pensar en r_i como la pendiente de esta recta y a como el inicio de la conversación. Según las investigaciones existentes sobre la interacción conyugal, la inercia emocional (tanto positiva como nega-

tiva) de ambos cónyuges juega un papel crucial, reflejando la tendencia de cada persona a mantener el mismo estado emocional a lo largo del tiempo. Cuanto mayor sea la inercia emocional, hay más la probabilidad de que permanezca en el mismo estado durante un largo de tiempo. Las investigaciones sobre las interacciones conyugales han demostrado consistentemente que las parejas infelices, tanto a nivel internacional como en los Estados Unidos, tienen características interpersonales más negativas que las parejas felices [8].

El valor de ajuste no afectado representa el estado estacionario de una ecuación (3.4), la tasa de la variable de Gottman-Levenson es identificable y se denota como $P_{t+1} - P_t$ para ponerlo a cero, sustituimos $P_{t+1} = P_t = P$ en la ecuación (3.4) y resolvemos para P . Después de realizar algunas operaciones algebraicas, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P_{t+1} - P_t &= r_i P_t - P_t + a \\ \Delta P &= P_t(r_i - 1) + a \\ \Delta P &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= P_t(r_i - 1) + a \\ -P_t(r_i - 1) &= a \\ P_t &= \frac{a}{-(r_i - 1)} \\ P \approx P_t &= \frac{a}{1 - r_i} \end{aligned}$$

Consideramos el punto fijo no influenciado como el estado emocional que cada cónyuge lleva consigo a la interacción, antes de ser afectado por la influencia de su pareja. De manera interesante, podemos resolver la ecuación (3.4) de manera exacta para obtener la solución.

$$P_{t+1} = r_i P_t + a$$

Antes de resolver la ecuación anterior, es necesario aplicar un método previo donde obtenemos la suma de la serie de la siguiente manera

$$S_t = 1 + r_i + \dots + r_i^{t-1} \quad (3.5)$$

multiplicando r_i por ambos lados

$$r_i S_t = r_i + r_i^2 + r_i^3 + \dots + r_i^t \quad (3.6)$$

restar las ecuaciones 3.5 y 3.6:

$$(1 - r_i)S_t = 1 - r_i^t$$

despejando S_t , por lo tanto

$$S_t = \frac{1 - r_i^t}{1 - r_i}$$

Ahora podemos resolver la ecuación anterior, donde si P_0 es el estado inicial en $t = 0$, entonces

$$P_1 = r_i P_0 + a$$

$$P_2 = r_i P_1 + a = r_i(r_i P_0 + a) + a = r_i^2 P_0 + a(1 + r_i)$$

$$P_3 = r_i P_2 + a = \dots = r_i^3 P_0 + a(a + r_i + r_i^2)$$

$$\vdots$$

$$P_t = r_i^t P_0 + a(1 + r_i + \dots + r_i^{t-1})$$

por lo tanto,

$$P_t = r_i^t P_0 + \frac{a(1 - r_i^t)}{1 - r_i} \quad (3.7)$$

De la ecuación (3.7) podemos ver que el comportamiento de las soluciones P_t está gobernando por el valor de r_i , por el teorema 2 (por las bases matemáticas) sabemos que es evidente que necesitamos que el estado estacionario natural no influenciado sea estable, por lo que solo consideramos el caso en el que el valor absoluto de “ r_i ” es menor que 1. La magnitud de “ r_i ” determina la velocidad con la que se alcanza un estado no influenciado desde otro estado, o con qué facilidad una persona cambia su estado de ánimo, de ahí el uso del término “inercia”. Nos queda el modelo no influenciado de la siguiente forma

$$\begin{cases} W_{t+1} = r_1 W_t + a \\ H_{t+1} = r_2 H_t + b \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2.2. comportamiento influenciado

Para desarrollar funciones matemáticas que describan como pareja afecta el comportamiento del otro, comenzamos con diagramas cualitativos. En estos gráficos, el eje horizontal representa cambios en las variables de comportamiento de una de las parejas y el eje vertical representa la influencia promedio de la otra pareja durante la interacción. Vale la

pena señalar que estas funciones de efectos representan el promedio de todas las interacciones, y más adelante se explicará cómo estimamos estos efectos.

Inicialmente, elegimos dos formas funcionales básicas: la función bilineal y la función oji-va, como se muestra en la Figura 3. 2 se muestran dos opciones: la figura 3. 2b muestra una función de influencia que permanece constante una vez que hay un efecto (ya sea positivo o negativo), y la figura 3. 2a muestra una función influenciada en la que cuanto más positivo es el comportamiento anterior, más positivo es el efecto sobre la pareja. Supone que el comportamiento tiene características de umbral⁵. En este caso, el comportamiento positivo/negativo por encima o por debajo de un cierto umbral (T_t y T_-) tiene un efecto positivo/negativo intermedio permanente en la otra parte. Aquellos que superen estos umbrales pueden tener enormes consecuencias a largo plazo. Los parámetros de estas funciones de influencia pueden variar según la naturaleza de la relación, la cultura de la pareja, la satisfacción de pareja, los niveles de estrés y otros factores. Por ejemplo, una pareja más reactiva puede tener un umbral más bajo para respuestas positivas. Luego, estas especificaciones se pueden ajustar para mejorar la generalidad, el interés y el poder predictivo del modelo.

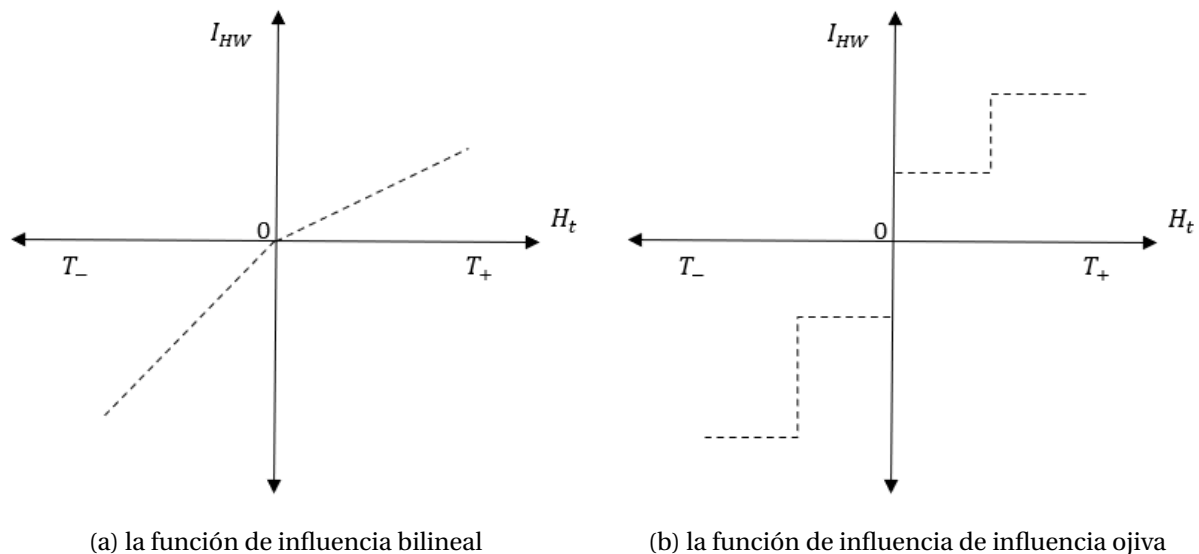


Figura 3. 2: ***Dos posibles formas funcionales para las funciones de influencia: que describen como el esposo influye en su esposa***

⁵Umbral: para denotar un valor crítico o punto de transición en el que ocurre un cambio significativo en una función, una secuencia numérica u otro fenómeno matemático

Para elegir la forma teórica de la función de influencia. Debemos elegir función de influencia sea algo asimétrica, como se muestra en la Figura 3.2. en la imagen. Denotamos la función de influencia como $I_{AB}(A_t)$, que describe la influencia del estado de la persona A sobre el estado de la persona B en el momento $t + 1$.

$$B_{t+1} = I_{AB}(A_t)$$

modelo completo

El desarrollo de las ecuaciones presentadas surge de un interés en modelar las complejas interacciones entre esposos durante discusiones entre parejas. En este contexto, se busca comprender cómo el comportamiento de una de las parejas influye en el comportamiento del otro, así como también identificar momentos en los que el comportamiento se desarrolla de manera independiente, sin influencia directa del otro. El presente modelo se centra en capturar tanto el comportamiento influenciado como el no influenciado, proporcionando así una representación matemática de las dinámicas complejas presentes en las discusiones de parejas:

$$\begin{cases} W_{t+1} = I_{HW}(H_t) + r_1 W_t + a \\ H_{t+1} = I_{WH}(W_{t+1}) + r_2 H_t + b \end{cases} \quad (3.9)$$

La ecuación representada describe la dinámica de interacción entre la esposa (W) y el esposo (H) a lo largo de una serie de turnos t . En esta ecuación:

- W_{t+1} representa el puntaje de la esposa en el siguiente turno ($t + 1$).
- H_{t+1} representa el puntaje del esposo en el siguiente turno ($t + 1$).
- $I_{WH}(H_t)$ se denota como la influencia del esposo en el turno t sobre esposa.
- $I_{HW}(W_{t+1})$ se denota como la influencia de la esposa en el turno ($t + 1$) sobre el esposo.
- r_1 y r_2 que tan rápido cambio de ánimo.
- a y b como inicia la conversación antes de empezar a influirse mutuamente.

La asimetría en los índices se explica por el uso de los códigos RCISS, donde cada aumento en t representa un nuevo cambio en el discurso, y se ha asumido de manera arbitraria que la esposa inicia la conversación. Aunque para la mayoría de las parejas esta suposición es acertada, es importante reconocer que puede haber variaciones individuales en el patrón de interacción.

Veamos como son los parámetros para el comportamiento no influenciado del modelo (a, b, r_1, r_2) , así como los parámetros de las funciones de influencia desconocidas (I_{HW} e I_{WH}). Aunque los parámetros específicos que afectan las propiedades no se enumeran, se identificaron algunos parámetros en la revisión de estas características. La importancia de la pendiente se destaca en la forma bilineal, donde la pendiente que afecta a los lados izquierdo y derecho de la función es crucial, como se muestra en la figura 3. 2a. La función Ojiva de la figura 3. 2b toma dos parámetros para especificar la altura de cada parte de la ojiva. También se introducen otros parámetros, a saber, los umbrales de positividad y negatividad (T_+ y T_-), que reflejan el nivel emocional del afecto activador. En el proceso de modelado, se obtienen dos parámetros de umbral y cuatro parámetros de efecto para cada pareja.

Para obtener y evaluar el comportamiento no influenciado, nos centramos en pares de puntos donde el puntaje en los que el puntaje intermedio de la pareja es cero. Suponiendo que $I_{HW}(0)=0$ y $I_{WH}(0)=0$, cada ecuación (3. 9) se reduce a la ecuación (3. 8). Usamos el método de mínimos cuadrados para este conjunto de datos particular para estimar dos constantes desconocidas para cada individuo, a saber, r_1, r_2, a y b . Es importante destacar que, con esta información, ahora podemos calcular el estado estacionario no afectado utilizando la ecuación (3. 4).

$$W = \frac{a}{1-r_1}$$

$$H = \frac{b}{1-r_2}$$

los parámetros de comportamiento influenciado se refieren a ajustar los puntajes totales restando el componente no influenciado que hemos estimado previamente. En otras palabras, utilizando las ecuaciones (??), calculamos y obtenemos el componente influenciado observado al restar el componente no influenciado de cada puntaje total. Este proceso nos permite analizar y entender cómo influye la interacción entre las parejas en sus comportamientos observados.

$$I_{HW}(H_t) = W_{t+1} - (r_1 W_t + a)$$

$$I_{WH}(W_{t+1}) = H_{t+1} - (r_2 H_t + b)$$

Para cada puntuación específica del esposo durante la conversación, es probable que haya variabilidad en los valores observados de la influencia sobre su esposa. En consecuencia, al representar gráficamente la influencia en función de sus puntajes, obtenemos un diagrama de dispersión⁶ que ilustra la relación entre estos dos elementos. Si hemos elegido una for-

⁶Los diagramas de dispersión usan una colección de puntos colocados usando coordenadas cartesianas para mostrar valores de dos variables. Al mostrar una variable en cada eje, se puede detectar si existe una

ma analítica particular para la función de influencia, como una función bilineal, según se muestra en la figura 3.2, podemos utilizar un método de ajuste para identificar los parámetros de la función de influencia que mejor se adaptan a los datos recopilados. Este proceso facilita la modelación precisa y la comprensión de cómo la puntuación del esposo impacta en su esposa durante la interacción.

3.3. Encuentro de estados estacionarios y estabilidad en el modelo matemático de interacción conyugal

Para el análisis de nuestro modelo, la identificación de estados de equilibrio en el plano de fase, es muy importante a los que nos referimos como puntos de influencia en el contexto del modelo de interacción de pareja. Desde una perspectiva experimental, concebimos el conjunto de puntos de ajuste influenciados como una sucesión infinita de puntuaciones para cada miembro de la pareja(sucesión); Si este equilibrio resulta estable, estas secuencias se moverán hacia este punto con el tiempo. Un aspecto interesante a explorar es la diferencia entre los puntos de ajuste afectados y no afectados.

Para encontrar los estados estacionarios de nuestro modelo discreto de las ecuaciones (3.9) cuando establecemos que $W_{t+1} = W_t = W$ y $H_{t+1} = H_t = H$, con esto queremos que W_t y H_t que permanezcan constantes(Que sea unos puntos fijos como definimos antes). Reemplazar W y H en las ecuaciones (3.9) por lo tanto, tenemos.

$$si \quad W_{t+1} = I_{HW}(H_t) + r_1 W_t + a$$

entonces,

$$\begin{aligned} W &= I_{HW}(H) + r_1 W + a \\ W - r_1 W &= I_{HW}(H) + a \\ w(1 - r_1) &= I_{HW}(H) + a \\ W &= \frac{I_{HW}(H) + a}{1 - r_1} \end{aligned}$$

y ahora para H_{t+1}

$$si \quad H_{t+1} = I_{WH}(W_t) + r_2 H_t + b$$

relación o correlación entre las dos variables.

entonces,

$$\begin{aligned}
 H &= I_{WH}(W) + r_2 H + b \\
 H - r_2 H &= I_{WH}(W) + b \\
 H(1 - r_2) &= I_{WH}(W) + b \\
 H &= \frac{I_{WH}(W) + b}{1 - r_2}
 \end{aligned}$$

Dado que conocemos las funciones de influencia I y los valores de los parámetros, la expresión proporciona una curva en el plano (W, H) , a lo largo de la cual W_t no experimenta variación. Podemos seguir un procedimiento similar con la segunda de las ecuaciones (3.9) para definir otra curva en el plano (W, H) , a lo largo de la cual H_t permanece constante. La combinación de estas curvas nos proporciona las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 N_{HW}(H_t) &=: W(H_t) = \frac{I_{HW}(H_t) + a}{1 - r_1} \\
 N_{WH}(W_t) &=: H(W_t) = \frac{I_{WH}(W_t) + b}{1 - r_2}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde N_{HW} y N_{WH} son las cero clinas para cada pareja. Juega un papel importante en el análisis matemático porque nos ayuda con una indicación visual del modelo.

En este tramo, ahora queremos explorar la búsqueda de estados estacionarios en el modelo matemático de interacción de pareja, empleamos las cero clinas definidas por un par de ecuaciones (3.10) para trazar curvas en el plano de fase (puntuaciones del esposo vs. puntuaciones de la esposa). Dichas curvas, conocidas como las cero clinas, se interceptan en puntos que satisfacen ambas ecuaciones y representan equilibrios en la interacción de pareja, denominados puntos de ajuste influenciados del modelo (puntos de equilibrio, críticos o fijos).

Se procede a ilustrar gráficamente las cero clinas para diferentes funciones de influencia, como la bilineal. Estas gráficas revelan que las cero clinas se asemejan a las formas de las funciones de influencia, mostrando consistencia con las expectativas teóricas. Se destaca que las ceroclinas son curvas en el plano de fase donde los valores de la variable Gottman-Levenson permanecen constantes. Por ende, un punto en este plano representa los puntajes del esposo y la esposa para una interacción específica. A medida que transcurre el tiempo, este punto se desplaza y traza una trayectoria en el espacio de fase, alejándose de

los estados estacionarios inestables y aproximándose a los estados estacionarios estables presentes en dicho espacio.

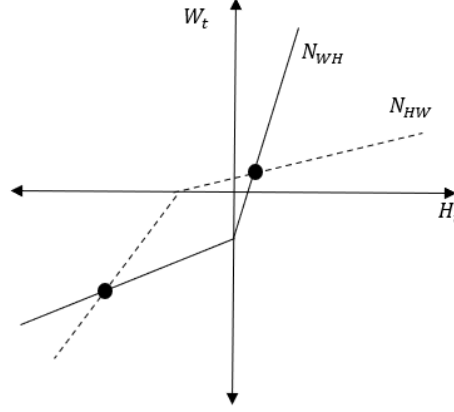


Figura 3. 3: En la forma bilineal, hay dos estados estacionarios estables;

Empezamos con la ecuación del modelo de interacción de pareja (3.9). si el estado estacionario es (W_s, H_s) , imagine una pequeña perturbación (w_t, h_t) de él. eso es

$$\begin{aligned} W_t &= W_s + w_t \\ H_t &= H_s + h_t \end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las ecuaciones (3.9) expandiendo una serie de Taylor y conservando solo dos términos lineales, obtenemos:

$$W_{t+1} = W_s + w_{t+1} = I_{HW}(H_s + h_t) + r_1(W_s + w_t) + a$$

$$\approx I_{HW}(H_s) + h_t I'_{HW}(H_s) + r_1 W_s + r_1 w_t + a$$

donde $I'_{HW}(H_s)$ es de la forma $dI_{HW}(H_t)/dH_t$ evaluando en el estado estacionario H_s y de manera similar para $I'_{WH}(W_s)$. Pero $I_{HW}(H_s) + r_1 W_s + a = W_s$, por lo que ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} W_s + w_{t+1} &= r_1 w_t + I'_{HW}(H_s) h_t + W_s \\ w_{t+1} &= r_1 w_t + I'_{HW}(H_s) h_t \end{aligned} \tag{3.11}$$

con la ecuación del esposo, podemos mostrar de manera similar para H_{t+1}

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= H_s + h_{t+1} = I_{WH}(W_s + w_{t+1}) + r_2(H_s + h_t) + b \\ &\approx I_{WH}(W_s) + w_{t+1} I'_{WH}(W_s) + r_2 H_s + r_2 h_t + b \end{aligned}$$

Pero $I_{WH}(W_s) + r_2 H_s + b = H_s$, por lo que ecuación se convierte en

$$H_s + h_{t+1} = r_2 h_t + I'_{WH}(W_s) w_{t+1} + H_s$$

$$h_{t+1} = r_2 h_t + I'_{HW}(W_s) w_{t+1}$$

que, al usar (3. 11) para W_{t+1} , da

$$h_{t+1} = r_2 h_t + I'_{WH}(W_s) w_{t+1}$$

$$h_{t+1} = r_2 h_t + I'_{WH}(W_s)[r_1 w_t + I'_{HW}(H_s) h_t]$$

$$h_{t+1} = r_2 h_t + r_1 w_t I'_{WH}(W_s) + I'_{WH}(W_s) I'_{HW}(H_s) h_t$$

factorizando h_t

$$h_{t+1} = [r_2 + I'_{WH}(W_s) I'_{HW}(H_s)] h_t + r_1 w_t I'_{WH}(W_s) \quad (3. 12)$$

las ecuaciones (3. 11) y (3. 12) son dos ecuaciones en diferencias acopladas lineales para las perturbaciones w_t y h_t , que en forma matricial se escriben

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} \\ h_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & I'_{HW}(H_s) \\ r_1 I'_{WH}(H_s) & r_2 + I'_{WH}(H_s) I'_{HW}(W_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t \\ h_t \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_t \\ h_t \end{bmatrix} \quad (3. 13)$$

donde M definida por (3. 13), se denomina matriz de estabilidad de la forma estándar

$$M = \begin{bmatrix} r_1 & I'_{HW}(H_s) \\ r_1 I'_{WH}(H_s) & r_2 + I'_{WH}(H_s) I'_{HW}(W_d) \end{bmatrix}$$

Para determinar λ . Debido a que el sistema es de segundo orden (dos ecuaciones), en general habrá dos λ_s . La estabilidad se obtiene entonces si los signos de ambas λ_s (que pueden ser positivas o negativas) es menor que 1.

encontrando el determinante de la matriz M podremos encontrarlas λ_s , es decir

$$\begin{vmatrix} r_1 - \lambda & I'_{HW}(H_s) \\ r_1 I'_{WH}(H_s) & r_2 + I'_{WH}(H_s) I'_{HW}(W_d) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo la matriz determinante, tenemos que

$$(r_1 - \lambda)(r_2 + I'_{WH}(H_s) I'_{HW}(W_s) - \lambda) - (r_1 I'_{WH}(H_s))(I'_{HW}(H_s)) = 0$$

entonces,

$$r_1 r_2 + r_1 I'_{WH}(H_s) I'_{HW}(W_s) - r_1 \lambda - r_2 \lambda - I'_{WH}(H_s) I'_{HW}(W_s) \lambda + \lambda^2 - r_1 I'_{WH}(H_s) I'_{HW}(W_s) = 0$$

organizando la ecuación, esto da

$$\lambda^2 - (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})\lambda + r_1 r_2 = 0$$

y entonces los λ_s son

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}[(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \{(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2\}^{1/2}]. \quad (3.14)$$

Aplicando el teorema 1 donde. Las soluciones para las perturbaciones w_t y h_t vienen dadas por el

$$\begin{bmatrix} w_t \\ h_t \end{bmatrix} = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t$$

donde A, B son matrices de columnas constantes. Ahora que hemos identificado las soluciones, estamos trabajando en el diseño de un sistema de ecuaciones en diferencias con el objetivo de modelar cómo evoluciona la situación. Nos interesa crear un modelo atractivo que nos permita visualizar cómo el sistema tiende hacia una situación favorable o desfavorable en la relación entre las variables. Esto nos ayudará a comprender mejor los factores que influyen en la dinámica del sistema y a tomar decisiones informadas para mejorar su comportamiento, denotamos a $|\lambda_{1,2}|$ si es mayor que 1, entonces w_t y h_t crecerán con cada incremento en t . La estabilidad que queremos es $|\lambda_{1,2}| < 1$.

Ahora reemplazar (3.15)

$$\left| \frac{1}{2}[(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \{(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2\}^{1/2}] \right| < 1$$

recordemos que $|ab| = |a||b|$, es decir

$$\left| \frac{1}{2} \right| \left| [(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \{(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2\}^{1/2}] \right| < 1$$

donde $|a| = a$, entonces

$$\frac{1}{2} \left| [(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \{(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2\}^{1/2}] \right| < 1$$

multiplicamos en ambos lados por 2

$$\left| [(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \{(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2\}^{1/2}] \right| < 2$$

pero una propiedad de valor absoluto sabemos que $x \leq |x|$, es decir

$$[(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \{(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2\}^{1/2}] \leq \left| [(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \{(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2\}^{1/2}] \right|$$

entonces,

$$(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) \pm \left\{ (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2 \right\}^{1/2} < 2$$

restando en ambos lados $(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})$

$$\pm \left\{ (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2 \right\}^{1/2} < 2 - (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})$$

consideremos la raíz positiva

$$\left\{ (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2 \right\}^{1/2} < 2 - (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})$$

elevando al cuadrado

$$\left\{ (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2 \right\} < [2 - (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})]^2$$

resolviendo la desigualdad del lado derecho tenemos

$$(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2 - 4r_1 r_2 < 4 - 4(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW}) + (r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2$$

restando en ambos lados $(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})^2$, es decir

$$-4r_1 r_2 < 4 - 4(r_1 + r_2 + I'_{WH} I'_{HW})$$

ahora queremos despejar $I'_{WH} I'_{HW}$

$$-4r_1 r_2 < 4 - 4r_1 - 4r_2 - 4I'_{WH} I'_{HW}$$

$$4I'_{WH} I'_{HW} < 4 - 4r_1 - 4r_2 + 4r_1 r_2$$

$$4I'_{WH} I'_{HW} < 4(1 - r_1 - r_2 + r_1 r_2)$$

$$I'_{WH} I'_{HW} < 1 - r_1 - r_2 + r_1 r_2$$

por lo tanto,

$$I'_{WH}(W_S) I'_{HW}(H_S) < (1 - r_1)(1 - r_2) \quad (3.15)$$

si queremos evaluar la estabilidad de un estado estacionario, tenemos que evaluar las derivadas de las funciones de influencia y usar (3.15).

La condición (3.15) se puede interpretar gráficamente. Las cero clinas se intersecan, como se muestra en la figura 3.3. de las ecuaciones (3.9), las ecuaciones para las cero clinas son

$$N_{HW}(H_t) =: W(H_t) = \frac{I_{HW}(H_t) + a}{1 - r_1}$$

$$N_{WH}(W_t) =: H(W_t) = \frac{I_{WH}(W_t) + b}{1 - r_1}$$

sabemos que N_{HW} es la cero clina de la esposa y N_{WH} es la del marido. Si ahora tomamos las derivadas de estos, respectivamente, con respecto a H y W , obtenemos

$$\left[\frac{dW}{dH} \right]_{\text{cero clinas de } N_{HW}} = \frac{I'_{HW}(H)}{1-r_1}, \quad \left[\frac{dH}{dW} \right]_{\text{cero clinas de } N_{WH}} = \frac{I'_{WH}(W)}{1-r_2}.$$

por lo tanto, la condición de estabilidad (3.15) se vuelve simplemente

$$I'_{WH}(W_S)I'_{HW}(H_S) < (1-r_1)(1-r_2)$$

entonces,

$$(1-r_1)(1-r_2) \left[\frac{dW}{dH} \right] \left[\frac{dH}{dW} \right] < (1-r_1)(1-r_2)$$

dividiendo todo por $(1-r_1)(1-r_2)$, por lo tanto, tenemos

$$\left[\frac{dW}{dH} \right] \left[\frac{dH}{dW} \right] < 1$$

Con los ejes elegidos, es decir, W el eje vertical y H el horizontal, la última expresión que garantiza la estabilidad se puede escribir como

$$\left[\frac{dW}{dH} \right]_{\text{cero clinas de } N_{HW}} < \left[\frac{dW}{dH} \right]_{\text{cero clina de } N_{WH}} \quad (3.16)$$

Para determinar la estabilidad de un estado estacionario, simplemente necesitamos calcular el producto de los gradientes⁷ en ese punto y asegurarnos de que sea menor que 1. Esto nos proporciona una forma rápida de evaluar la estabilidad o inestabilidad en cada punto de equilibrio. Ahora exploremos algunos ejemplos utilizando las cero clinas y los estados estacionarios mostrados en las figuras 3.3.

Al examinar la figura 3.3 y considerar el estado estacionario positivo, podemos observar que, al inspeccionar las cero clinas, los gradientes en el punto de equilibrio de la esposa y del esposo son ambos menores que 1. Además, en la cero clina del esposo, recordemos que el gradiente es dH/dW , el cual también es claramente menor que 1 según (3.16). Por lo tanto, la condición (3.16) se cumple y, en consecuencia, el estado estacionario positivo es estable. En contraste, la estabilidad del estado estacionario negativo puede variar; esto depende de si se satisface o no (3.16), lo cual, a su vez, está determinado por los gradientes reales de las curvas nulas y la forma específica de las funciones de influencia.

⁷El gradiente es una medida de la tasa de cambio de una función con respecto a sus variables independientes. En otras palabras, indica la dirección y la magnitud del cambio máximo de una función en un punto dado.

4. RESULTADOS DEL MODELO

4.1. Poder y afecto: funciones de influencia

En esta sección, profundizaremos en los resultados obtenidos del análisis del modelo presentado en el capítulo 3. Utilizamos sistemas de codificación RCISS, con un giro en el habla como unidad de tiempo. El objetivo es explorar si la forma de las funciones de influencia varía cualitativamente entre diferentes tipos de parejas, según la tipología conyugal presentada en el capítulo 2.

Para presentar estos resultados, nos enfocamos en la función de influencia bilineal de dos pendientes (ver figura 3. 2a), calculando las pendientes por separado para valores negativos y positivos del comportamiento de la pareja. En la figura 4. 1, se resumen las funciones de influencia para matrimonios estables (volátil, validador y evitador de conflictos), mientras que la figura 4. 2 presenta las funciones para matrimonios inestables (hostil y hostil separado).

Resultados para parejas estables:

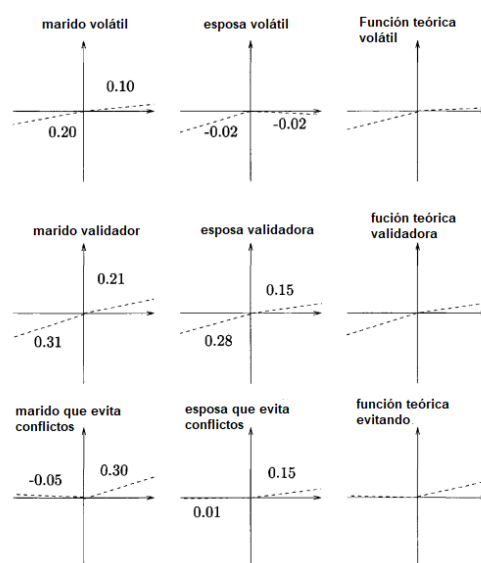


Figura 4. 1: funciones de influencia empíricas mediante el uso de la forma funcional bilineal

Las funciones de influencia para validadores mostraron una sorprendente capacidad para influir positiva y negativamente en sus cónyuges a través de todo el rango de comporta-

mientos. Por otro lado, las parejas evitadoras se influyeron mutuamente solo con positividad, mientras que las volátiles se influenciaron principalmente con negatividad. Este patrón refleja diferencias significativas en los estados estacionarios estables entre estos tipos de matrimonios.

Una segunda sorpresa provino al comparar las funciones de influencia de esposos y esposas. La observación de funciones coincidentes sugiere que dentro de los pares estables, las funciones tienen la misma forma.

Resultados para Matrimonios Inestables:

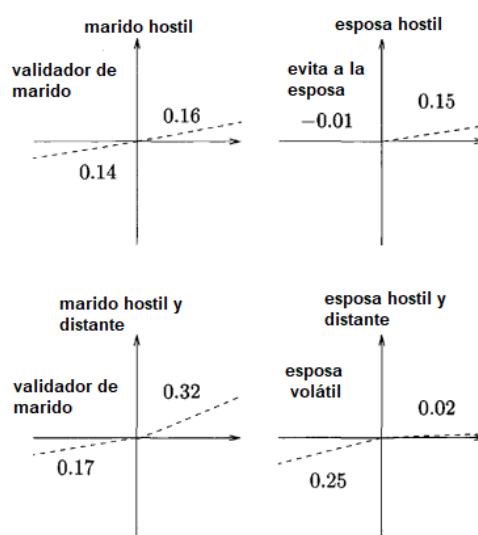


Figura 4. 2: se han obtenido funciones de influencia mediante la forma funcional bilineal.

Las funciones de influencia para parejas hostiles y hostiles separadas parecen indicar un desajuste. Las parejas hostiles mezclaron funciones de influencia de esposo validador con funciones de influencia de esposa evitadora, mientras que las parejas hostiles separadas mezclaron funciones de influencia de esposo validador con funciones de influencia de esposa volátil.

4.2. Discusión de los resultados iniciales del modelado

El propósito del modelo matemático dinámico presentado en este trabajo fue abordar la capacidad predictiva de los gráficos de puntos RCISS en el curso longitudinal de los matrimonios. Un hallazgo destacado fue que el punto de ajuste no influenciado, cuando se

promedia por grupo, demostró ser eficaz para esta tarea. Sin embargo, este resultado plantea preguntas intrigantes sobre la naturaleza de este parámetro. ¿Es simplemente lo que cada individuo aporta a la discusión del conflicto antes de ser influenciado? Aunque inicialmente se pensó así, futuros intentos de construir teorías sugieren que este parámetro podría ser una función de otras variables dinámicas en el experimento, como los índices de actividad fisiológica. Esto plantea la posibilidad de explorar como factores como el estrés, la capacidad de afrontamiento y las diferencias de poder se relacionan con este índice, brindando una perspectiva más holística sobre la dinámica conyugal.

Además, se destacan las implicaciones del comportamiento interactivo del Tiempo-I en el RCISS, que clasifica a las parejas en tres tipos distintos con mayores o menores probabilidades de tener matrimonios estables o inestables. La exploración detallada de las funciones de influencia para estos cinco grupos sugiere que estas funciones podrían ser clave para la clasificación. Las parejas validadoras, evitadoras y volátiles muestran patrones únicos de influencia, proporcionando una visión más profunda de los costos y beneficios asociados con cada tipo de matrimonio estable.

Además, los desajustes en las funciones de influencia, especialmente en matrimonios hostiles, se presentan como predictores potenciales de inestabilidad marital. Este resultado desafía la efectividad de conceptos como "personalidad dispareja" para predecir la disolución matrimonial, destacando la importancia de estudiar el proceso de interacción más que las características individuales.

4.3. Perspectivas de Ampliación del Modelo

La función de influencia de ojiva surge como un próximo paso en el desarrollo del modelo, ya que ofrece más parámetros para describir la naturaleza de la influencia, como los parámetros de umbral. Sin embargo, para avanzar en esta dirección, se reconoce la necesidad de un sistema de observación más rico que el RCISS. El Sistema de Codificación de Afecto Específico (SPAFF) se presenta como una alternativa que proporciona más datos y permite la observación en tiempo real sin transcripción, abriendo nuevas posibilidades de investigación.

Se plantea la posibilidad de cinco estados estacionarios con la función de influencia ojiva, permitiendo simulaciones más allá de los datos recopilados. La exploración de múltiples

estados estacionarios podría ofrecer una comprensión más completa del comportamiento de la pareja, incluso en condiciones no observadas en el estudio.

Además, se considera la influencia de variables fisiológicas y percepciones de la interacción de la pareja en el modelo. Se propone que medidas fisiológicas y variables derivadas del procedimiento de recuperación de video podrían relacionarse con parámetros específicos del modelo, como la inercia emocional y el punto de ajuste no influenciado.

Finalmente, se plantea la posibilidad de incorporar la idea de reparación en el modelo, permitiendo que las parejas reviertan la negatividad acumulada después de cruzar ciertos umbrales. Esta extensión podría explorarse más a fondo en futuros capítulos, brindando nuevas perspectivas sobre las fortalezas y la resiliencia en cada cónyuge.

El enfoque matemático utilizado en este modelo no solo proporciona una descripción cuantitativa de la dinámica conyugal, sino que también revela la necesidad de continuar explorando y extendiendo el modelo para obtener una comprensión más completa de los mecanismos subyacentes en la estabilidad marital. Estas perspectivas de ampliación abren nuevas vías para la investigación y la aplicación práctica en el campo de las relaciones conyugales.

4.4. Aplicar y modificar el modelo para comprender a las parejas

el enfoque principal de este capítulo es adaptar y aplicar un modelo a un estudio a largo plazo de parejas recién en la relación. Los resultados se basan en datos de comportamiento recopilados utilizando el SPAFF, un sistema de codificación que permite analizar comportamientos emocionales específicos tanto del esposo como de la esposa. Una ventaja clave del SPAFF sobre el RCISS es su capacidad para codificar en tiempo real mientras las parejas interactúan en el laboratorio. Además, el SPAFF es versátil y puede utilizarse para codificar diversas conversaciones de pareja, en contraste con el RCISS, que estaba limitado a discusiones sobre resolución de conflictos. En particular, el SPAFF permite distinguir entre diferentes tipos de afectos positivos, proporcionando una comprensión más detallada de la dinámica emocional en la interacción de la pareja.

4.4.1. El sistema de codificación de afectos específicos (SPAFF)

Fue desarrollado por Alyson F. Shapiro y John M. Gottman de la Universidad de Washington con el propósito de codificar emociones específicas en interacciones matrimoniales y familiares. A diferencia de otros sistemas de codificación, el SPAFF categoriza los afectos a nivel emocional, lo que proporciona códigos descriptivos de la comunicación emocional en cualquier interacción a lo largo del tiempo. Este sistema de codificación utiliza un enfoque gestáltico que combina dos aproximaciones: una centrada en características físicas y otra en la experiencia cultural del codificador. La primera permite el reconocimiento detallado y la categorización de señales faciales, físicas y verbales asociadas con emociones específicas, mientras que la segunda permite al codificador utilizar su comprensión subjetiva de las emociones para identificar afectos específicos.

El SPAFF puede utilizarse para examinar cualquier discusión entre dos o más personas, incluyendo interacciones de pareja, padres e hijos, hermanos, así como conversaciones sobre eventos cotidianos o temas positivos. Aunque inicialmente se utilizó principalmente para capturar la comunicación emocional durante discusiones de desacuerdo entre parejas, su versatilidad lo ha llevado a ser aplicado en una variedad de contextos.

El sistema se desarrolló como una mejora del Sistema de Puntuación de Interacciones de Parejas (CISS) y del Sistema de Codificación de Acciones Faciales (FACS) de Ekman y Friesen. Gottman, tras observar las limitaciones de estos sistemas, se propuso crear un método más completo que capturara la riqueza de los momentos emocionales específicos en las interacciones naturales de las parejas. Esto condujo al desarrollo del SPAFF, que integra señales verbales, faciales, vocales, gestuales y relacionales para categorizar emociones específicas.

El proceso de desarrollo del SPAFF incluyó la consulta con expertos en el campo de la codificación emocional y la observación detallada de las interacciones de las parejas. La integración de diversas señales y la consideración de la experiencia cultural del codificador fueron aspectos clave en la creación de un sistema más completo y preciso para analizar la comunicación emocional en contextos familiares.

4.5. Análisis del Sistema de Codificación del SPAFF

El sistema de codificación SPAFF codifica cada emoción a nivel del afecto específico en sí mismo, en lugar de a nivel de las señales que un codificador puede usar para identificar una emoción específica. El SPAFF utiliza un enfoque gestáltico para identificar emociones, que combina el entrenamiento de los codificadores en las señales físicas/faciales, vocales y verbales relacionadas con cada afecto específico, con el uso de un enfoque de informante cultural que permite a cada codificador actuar como un juez cultural en la toma de decisiones sobre la expresión de emociones específicas. Los códigos específicos de emoción están asociados con señales faciales y vocales en el contenido de la conversación que los codificadores están entrenados para usar para identificar cada emoción, además de instruirlos para usar su propia intuición y codificar una emoción específica si sienten que está justificada por su experiencia como juez cultural.

La versión de 20 códigos del SPAFF incluye 13 códigos negativos, 1 código neutral y 6 categorías positivas

■ **códigos negativos:**

- **Asco:** refleja el sentimiento subyacente de repulsión e incluye el rechazo verbal y no verbal de algo que la persona considera nocivo.
- **Desprecio:** Se trata de menospreciar a la pareja mediante la utilización de insultos o una falta de respeto expresada de diversas maneras.
- **Beligerancia:** Se registra cuando una persona aparenta estar tratando de iniciar una disputa o conflicto con su pareja.
- **Dominar:** Se refiere al intento de ejercer control sobre la pareja, observable cuando alguien trata de dominar la conversación o busca imponer su voluntad sobre la pareja.
- **Crítica:** Se diferencia de una queja común al ir más allá, implicando un ataque a la personalidad o carácter de la pareja en lugar de abordar un comportamiento específico. Casi siempre implica culpar o insinuar culpabilidad.
- **Ira:** Se registra cuando una persona da la impresión de estar cansada o harta en una interacción. Esto puede incluir signos de irritación, molestia, una voz elevada o declaraciones directas de hartazgo.

- **Tensión:** Surge como resultado de experimentar preocupación, ansiedad o temor, generalmente debido a la introducción de un tema incómodo en la conversación.
- **Humor tenso:** Se codifica cuando ambas personas que participan en una conversación comparten un episodio de risa nerviosa o hacen bromas en un tono tenso.
- **actividad defensiva:** Se registra cuando las personas actúan de manera que parece que están intentando comunicar que no tienen culpa. Esto generalmente implica adoptar una postura de víctima inocente y puede expresarse mediante excusas, respuestas defensivas o declaraciones de "no es mi culpa".
- **Lloriqueo:** Se registra cuando la calidad de la voz, a pesar de expresar una queja, presenta un tono muy nasal, agudo y monótono.
- **Tristeza:** Se caracteriza por una notable disminución de la energía, manifestándose a través de pasividad, suspiros, pucheros, llanto o expresión de sentimientos heridos, ya sea a través de palabras, calidad vocal o expresión facial.
- **bloqueo:** Se refiere a la ausencia completa de comportamientos de escucha en las interacciones de pareja.

■ **los códigos positivos:**

- **Interés:** Se evidencia a través de la participación y la energía positiva por parte del oyente.
- **validación:** Implica aceptación y disposición a considerar los puntos de vista y sentimientos de la pareja, demostrando respeto incluso en casos de desacuerdo.
- **Afecto:** Se registra cuando hay una manifestación directa de cariño evidente en la interacción.
- **Humor:** Se identifica por la participación en risas, acompañada de un sentimiento subyacente de alegría compartida, en contraposición a la presencia de tensión.
- **Sorpresa/Alegría:** Implica una reacción feliz, positiva o enfática a algo que se está discutiendo en la conversación.

- **código neutral:** actúa como la frontera entre lo negativo y lo positivo y suele ser de naturaleza no emocional. Se caracteriza por cualquier comportamiento que no se ajusta a ninguna de las otras categorías de SPAFF. Este código se utiliza para cumplir con la necesidad de un sistema de codificación que sea exhaustivo y mutuamente excluyente.[5]

4.6. Experimentos de la interacción de pareja

El modelo matemático de la interacción de pareja fue la base para una serie de estudios innovadores llamados “Experimentos Matrimoniales”. En lugar de intentar cambiar toda la relación, estos estudios se centraron en lograr un cambio proximal, mejorando solo la segunda de dos conversaciones que una pareja tendría en el laboratorio, con una intervención entre ambas conversaciones.

Anteriormente, alrededor de veinticinco estudios controlados de intervención matrimonial habían demostrado resultados limitados y confusos. En la mayoría de estos estudios, los efectos positivos eran mínimos, y las tasas de recaída eran altas. Por ejemplo, Jacobson, Follette y Revenstorf (1984)[23] encontraron que solo el 35 % de las parejas mejoraban desde un estado de insatisfacción a un nivel aceptable, y del 30 % al 50 % recaían a sus niveles anteriores de satisfacción matrimonial un año después del tratamiento. Dos estudios excepcionales, uno de Jacobson y otro de Snyder y Wills, mostraron resultados duraderos después de un año, aunque hubo desacuerdo sobre los componentes específicos de las intervenciones que habían logrado estos resultados. Jacobson identificó 31 componentes en el manual de tratamiento de Snyder y Wills, de los cuales 26 eran similares a su propia intervención, pero Snyder no estaba de acuerdo.

Los “Experimentos Matrimoniales” implementaron intervenciones simples y breves para mejorar un aspecto de la comunicación de la pareja. Tras tres años de pruebas piloto, se descubrió que estas intervenciones de media hora podían lograr cambios dramáticos en aproximadamente el 80 % de las parejas angustiadas. El 20 % restante se resistió a participar, destacando fenómenos importantes en la terapia matrimonial: la resistencia al cambio y la recaída. Sorprendentemente, muchas parejas que experimentaron cambios temporales obtuvieron un renovado sentido de esperanza, al ver que el cambio era posible. Sin embargo, mantener ese cambio fue identificado como el mayor desafío fuera del laboratorio.

Estos experimentos llevaron al diseño de talleres de fin de semana para parejas, la capacitación de terapeutas y la creación de una clínica matrimonial en Seattle. Esta interrelación entre el modelado matemático y la práctica clínica y teórica impulsó avances significativos en la intervención matrimonial. El modelado matemático fue esencial para desarrollar intervenciones efectivas y comprender mejor las dinámicas matrimoniales.

Además de los puntos mencionados, estos estudios destacaron la importancia de intervenciones específicas y focalizadas en la comunicación, subrayando que los cambios pequeños y manejables pueden generar una esperanza renovada en las parejas. Esto no solo mejoró su disposición para seguir trabajando en sus relaciones, sino que también facilitó la creación de programas de intervención más accesibles y prácticos. El éxito de estas intervenciones breves también sugirió la posibilidad de aplicarlas en contextos más amplios, como terapias grupales o talleres comunitarios, para alcanzar a más parejas y proporcionarles herramientas efectivas para mejorar su comunicación y resolver conflictos. En conclusión, los “Experimentos Matrimoniales” demostraron que incluso intervenciones cortas y específicas pueden tener un impacto significativo en la mejora de las relaciones de pareja, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones y prácticas en la terapia matrimonial.

4.6.1. Nueva teoría de Gottman y la intervención en la relación de pareja

La figura 4.3 resume la nueva teoría de Gottman, que sostiene que para crear un cambio duradero en el matrimonio, se deben abordar tres aspectos: el nivel general de positividad en la relación y la manera en que la pareja regula los conflictos, aumentando la positividad y disminuyendo la negatividad. La teoría se describe con mayor detalle en dos libros, Los siete principios para hacer que el matrimonio funcione de Gottman y Silver [21] y The Marriage Clinic de Gottman [22]. Fundación de la amistad: Tres Componentes para



Figura 4. 3: La teoría del matrimonio de Gottman: la “Casa Matrimonial Sonora”.

Crear Afecto Positivo en Contextos No Conflictivos En lugar de usar contratos de contingencia para construir afecto positivo, Gottman sugiere que la construcción de la amistad de la pareja es esencial [21]. Esto implica crear afecto positivo en contextos no conflictivos, lo cual es crucial en matrimonios en dificultades.

1. Mapas del amor: Conocer a la pareja implica crear un “Mapa del Amor”, donde cada uno tiene espacio cognitivo para el matrimonio, su historia y el mundo psicológico del otro. Este concepto se introduce en talleres mediante juegos que exigen conocimiento mutuo [22].
2. Sistema de afecto y admiración: Este sistema actúa como antídoto para el desprecio. Se evalúa a través de entrevistas históricas que determinan la admiración y afecto en la pareja.
3. Cuenta bancaria emocional: La “cuenta bancaria emocional” se refiere a cómo la pareja se acerca o se aleja en momentos cotidianos. Esto se evalúa observando cómo la pareja pasa tiempo junta de manera no estructurada, fomentando conexiones en momentos rutinarios [22].

Creación de una sobrecarga de sentimientos positivos: Esta etapa implica la percepción positiva de las acciones de la pareja. La sobrecarga de sentimientos positivos se evalúa mediante observaciones conductuales y datos de evaluaciones internas. Por ejemplo, en matrimonios felices, las esposas pueden percibir la ira de sus maridos de manera neutral, lo que no ocurre en matrimonios infelices.

Regulación del conflicto: No es la resolución de los conflictos, sino su regulación, lo que predice el éxito a largo plazo en la relación. Gottman encontró que la mayoría de los conflictos en las parejas son perpetuos, originados por diferencias de personalidad. La clave no es resolver estos problemas, sino mantener un diálogo positivo sobre ellos.

- Suavizar el inicio de las discusiones: Se recomienda un inicio suave en las discusiones para evitar escaladas negativas [22].
- Apreciación de la perspectiva del otro: Reconocer y honrar los sueños y esperanzas subyacentes en los conflictos perpetuos es fundamental para evitar el estancamiento emocional

Creación de significados simbólicos compartidos La construcción de significados compartidos ayuda a evitar el estancamiento marital. Esto implica honrar y mezclar los sueños,

narrativas, mitos y metáforas de cada cónyuge [22] La falta de afecto y la desconexión emocional en el matrimonio a menudo resultan de no haber abordado adecuadamente estos niveles fundamentales de la relación.

Contribuciones potenciales de esta teoría Esta teoría sugiere un cambio en la terapia matrimonial, enfocándose no solo en la resolución de conflictos, sino en la intimidad y la conexión emocional. Plantea que la mayoría de los conflictos matrimoniales son perpetuos y que la clave es la afectividad positiva en la interacción cotidiana También destaca la importancia de crear una cultura matrimonial única, formada por los significados, metas y rituales compartidos por la pareja.

4.6.2. Objetivos y razonamiento para las intervenciones con parejas

Basándonos en la teoría matrimonial presentada en la figura 4.3, podemos postular los objetivos de un programa mínimo de terapia de parejas. A medida que avanzamos, discutimos intervenciones experimentales específicas que pueden lograr estos objetivos. Estos predictores incluyen variables de comportamiento, fisiología y autoinforme. Los parámetros seleccionados constituyen objetivos para cambiar la interacción de pareja en una serie de estudios proximales, y eventualmente reaparecerán como parámetros de nuestro modelo matemático. Los ocho experimentos proximales descritos están guiados por la teoría descrita en la figura 4.3. No son un conjunto arbitrario de experimentos, sino que cada uno aborda un área diferente relacionada con la predicción de la separación. Discutimos estos experimentos y los tres objetivos en términos de los parámetros de nuestro modelo matemático.

- **Primer objetivo: Reducir la inercia emocional (reciprocidad de afecto negativo):** La inercia emocional se refiere a la tendencia de una persona a permanecer en un estado emocional particular durante un tiempo. La reciprocidad de afecto negativo, la probabilidad de que el afecto negativo de una persona sea correspondido por su pareja, es un diferenciador consistente entre parejas felizmente y las que no. Esta inercia emocional puede hacer que la negatividad se convierta en un estado absorbente del cual es difícil salir. La evidencia sugiere que la reciprocidad de afecto negativo está correlacionada consistentemente con la satisfacción marital, lo que argumenta a favor de una intervención de "reparación". El fracaso de los procesos de reparación puede llevar a la infelicidad en el matrimonio.

EXPERIMENTO 1: MEJORAR EL ÉXITO DE LOS INTENTOS DE REPARACIÓN Los intentos de reparación incluyen varias estrategias como explorar sentimientos, intercambiar información, humor y distracción. En matrimonios infelices, estos intentos suelen fallar debido a la predominancia del afecto negativo. La intervención propone formalizar el proceso natural de reparación para interrumpir la cadena de afecto negativo y liberar los mecanismos de reparación que ya poseen las parejas.

EXPERIMENTO 2: REDUCIR LA ACTITUD DEFENSIVA La defensiva tiende a alimentar el ciclo de reciprocidad de afecto negativo. Las respuestas defensivas son comunes cuando las personas perciben ataques. Para reducir la defensiva, se propone un entrenamiento específico en aceptar influencias y procesar argumentos, promoviendo la responsabilidad compartida y la comprensión de los desencadenantes de la defensiva.

EXPERIMENTO 3: AUMENTAR LA CALMA FISIOLÓGICA La excitación fisiológica difusa contribuye a la reciprocidad del afecto negativo. En esta intervención, se enseña a las parejas habilidades de auto-calma para minimizar el arousal⁸ fisiológico y evitar recaídas después del tratamiento.

- Segundo objetivo: Hacer los estados estables no influenciados más positivos: El estado estable no influenciado representa el afecto inicial en una interacción de pareja antes de que haya influencia social significativa. Las parejas angustiadas suelen mostrar más afecto negativo y menos positivo que las parejas no angustiadas, independientemente de la situación. Proponemos que existe un punto de ajuste de positividad menos negatividad que es más negativo en parejas angustiadas. Este punto de ajuste puede ser modificado para mejorar la estabilidad conyugal.

EXPERIMENTO 4: SUAVIZAR EL INICIO DE LAS DISCUSIONES El inicio de una discusión conflictiva predice el curso de la interacción. Enseñamos a las parejas principios de inicio suave para mejorar la calidad de sus interacciones desde el comienzo.

EXPERIMENTO 5: ELIMINAR EL DESPRECIO—ACTIVAR EL SISTEMA DE AFECTO Y ADMIRACIÓN Este experimento se enfoca en cambiar las cogniciones y atribuciones en la relación. Las atribuciones mantenedoras del estrés maximizan el impacto de los comportamientos negativos y minimizan el impacto de los positivos. Mediante ejercicios

⁸Nivel de activación cerebral. Implica tanto el ritmo de los procesos cerebrales como el nivel general de atención frente a los estímulos del medio y está regulado por el sistema de activación reticular.

que fomentan la admiración y la apreciación de las características positivas del cónyuge, se busca mejorar el afecto positivo en la interacción.

- Tercer objetivo: El estado estable influenciado es más positivo que el no influenciado: El estado estable influenciado es el valor promedio durante los momentos en que un cónyuge cambia su comportamiento en respuesta al otro. Investigamos qué procesos contribuyen a la cascada de los Cuatro Jinetes del Apocalipsis y cómo la falta de respuesta a la ira del cónyuge puede llevar a una escalada negativa.

EXPERIMENTO 6: CONEXIÓN EMOCIONAL—RESPONDER A LA IRA La falta de respuesta a la ira del cónyuge puede llevar a una escalada de la negatividad. Este experimento enseña a las parejas a responder positivamente a la ira para evitar la escalada de la negatividad.

EXPERIMENTO 7: CONEXIÓN EMOCIONAL—RESPONDER A LA POSITIVIDAD Y A LAS SOLICITUDES DE CONEXIÓN Ignorar los intereses y emociones del cónyuge puede llevar a la soledad en el matrimonio. Este experimento enseña a las parejas a responder a las solicitudes de conexión emocional, mejorando la interacción positiva.

EXPERIMENTO 8: INTERVENCIÓN DE SUEÑOS DENTRO DEL CONFLICTO Esta intervención busca desentrañar los significados simbólicos detrás de las posiciones inflexibles de los cónyuges. Al comprender y honrar los sueños y esperanzas subyacentes, se facilita un cambio en los patrones de influencia, promoviendo una mayor comprensión y conexión emocional.

4.6.3. cómo preparar datos para la modelización

abordaremos de manera general los conceptos fundamentales necesarios para transformar una escala de codificación en un conjunto de datos apto para la modelización. Este proceso es crucial para asegurar que los datos estén en el formato adecuado y puedan ser utilizados eficazmente con el modelo. Al entender estos conceptos, los investigadores estarán mejor preparados para aplicar y adaptar las técnicas descritas en este libro a sus propios conjuntos de datos.

OBTENCIÓN DEL PROGRAMA DEL MODELO

El programa original fue creado por estudiantes de posgrado del departamento de matemá-

ticas aplicadas de la Universidad de Washington, bajo la dirección del Dr. James Murray y el Dr. John Gottman. Esta versión inicial del modelo fue desarrollada en MATLAB, un software técnico para resolver problemas matemáticos y de ingeniería, y se ejecutaba en un entorno UNIX. Sin embargo, tenía la limitación de no poder procesar múltiples conjuntos de datos simultáneamente.

Posteriormente, cuando comenzamos a investigar nuevas formas de la función de influencia y pasamos de los datos RCISS originales a datos ponderados derivados del SPAFF, el programa fue convertido a FORTRAN y ejecutado en un entorno DOS en una computadora tipo IBM-PC. En la actualidad, ese es el lenguaje y el entorno operativo que utilizamos para ejecutar el modelo. En el futuro, planeamos mejorar el programa para hacerlo más compatible con Windows y tal vez reescribirlo en un lenguaje de programación diferente que facilite su uso en diversos entornos operativos. También consideramos la posibilidad de añadir nuevas funcionalidades e incorporar nuevas teorías al modelo a medida que avancemos en nuestra investigación.

Toda la documentación y los archivos del programa se mantendrán actualizados en el sitio web del Instituto Gottman en <http://www.gottman.com>. Allí se proporcionará un enlace a la ubicación más reciente del programa y su documentación. Además, se incluirá información básica sobre los requisitos del sistema operativo y del hardware necesarios para utilizar el programa. Para aquellos interesados en descargar el programa, el sitio web ofrecerá las instrucciones necesarias.

Conceptos básicos en la preparación de datos

Para utilizar los datos del laboratorio en un modelo, es esencial convertirlos de una escala nominal a una escala ordinal que tenga un rango claro de valores positivos a negativos, lo cual facilita la comparación entre individuos. Esto es crucial porque el modelo evalúa la influencia de estos valores en la relación de pareja, por lo que los datos deben estar expresados en términos que reflejen esta dinámica.

Además, es necesario que la variable utilizada tenga un valor "neutral" que sea coherente con lo que se mide y que aparezca con suficiente frecuencia en los datos para permitir la estimación del estado estable no influenciado. Es importante que al menos el 15% de los datos se clasifiquen o computen como "neutrales" para garantizar una estimación adecuada de estos estados. Sin embargo, no se debe ampliar artificialmente la definición de "neutral" para incluir datos que no representen verdaderamente un comportamiento neu-

tral solo para alcanzar el porcentaje requerido.

Los datos deben ser recogidos a lo largo del tiempo con un muestreo regular. Dado que el modelo analiza la interacción entre dos personas a lo largo del tiempo, es crucial que los datos estén basados en el tiempo. No es suficiente con una codificación resumida de la interacción; se necesita un mínimo de setenta y cinco puntos de tiempo para obtener estimaciones precisas de los parámetros del modelo. Estos puntos de tiempo deben representar una “unidad interactiva” que tenga sentido desde una perspectiva psicológica.

Es fundamental obtener una amplia gama de puntuaciones para cada pareja, ya que esto proporciona un conjunto de datos más rico para estimar la influencia sobre la pareja en cada puntuación. Si los datos se dividen dentro de la unidad de tiempo o “unidad interactiva”, pueden sumarse para obtener una puntuación total para esa unidad de tiempo, lo que introduce una mayor variabilidad en las puntuaciones y hace que las estimaciones de los parámetros sean más robustas.

En resumen, para preparar datos para un modelo de interacción, se deben:

1. Convertir los datos de una escala nominal a una ordinal con un rango claro de valores positivos a negativos.
2. Asegurar que al menos el 15% de los datos sean “neutrales” para estimar estados estables no influenciados.
3. Recoger datos a lo largo del tiempo con un muestreo regular, asegurando al menos setenta y cinco puntos de tiempo
4. Obtener una amplia gama de puntuaciones para cada pareja y sumar los datos dentro de las unidades de tiempo para aumentar la variabilidad y robustez de las estimaciones.

Estos pasos aseguran que los datos sean adecuados y precisos para su uso en modelos que analizan la interacción y dinámica de las relaciones de pareja.

EJEMPLO: DERIVACIÓN DE DATOS DEL MODELO DESDE SPAFF

En este ejemplo, se describe cómo se obtienen los datos del modelo a partir del sistema SPAFF en un estudio de parejas recién casadas. El SPAFF es un sistema utilizado para codificar los afectos expresados durante las interacciones de conflicto de las parejas, utilizando expresiones faciales, tono de voz y contenido del habla. Los codificadores categorizan los

afectos en positivos, negativos y neutrales, y se establece un esquema de ponderación para los diferentes códigos. En este caso, los códigos negativos que mejor predicen el divorcio reciben mayor peso.

El proceso de codificación se realiza en tiempo real en estaciones de codificación observacional, y los datos se registran en intervalos de 6 segundos. Se considera importante mantener un equilibrio entre los datos positivos, negativos y neutrales para obtener resultados precisos en el modelo.

A lo largo del tiempo, el sistema SPAFF ha evolucionado y ahora incluye una gama más amplia de códigos para reflejar mejor la complejidad de las interacciones de pareja. Los datos recopilados se procesan y almacenan en archivos de texto para su posterior análisis.

Este proceso de derivación de datos del modelo desde SPAFF proporciona una base sólida para investigaciones sobre la dinámica de las relaciones de pareja y puede utilizarse para predecir resultados importantes, como el divorcio. Los detalles completos sobre este proceso y sus resultados se encuentran disponibles en el estudio correspondiente.

4.7. conclusión

Podemos entender los mecanismos detrás de las relaciones exitosas y aplicar ese conocimiento para mejorar las relaciones. Entonces tenemos un índice de relación saludable, pero ¿cómo lo cambiamos? ¿Qué necesitamos para realmente marcar la diferencia? Nuestras hipótesis son que necesitamos tres cosas:

Que pasa con esa tres cosas, ¿podemos medirlo en un laboratorio? ¿Y poder realmente marcar la diferencia? La calma fisiológica, la confianza y el compromiso son aspectos fundamentales en una relación saludable, pero no se pueden medir directamente en un laboratorio de la misma manera que se mide una variable física como la temperatura o la presión. Sin embargo, existen métodos y herramientas psicométricas que pueden ayudar a evaluar y entender estos aspectos dentro de una relación.

Por ejemplo, la calma fisiológica puede estar relacionada con la respuesta del sistema nervioso autónomo, que regula funciones corporales como la frecuencia cardíaca, la respiración y la actividad glandular. Aunque no se puede medir directamente la “calma”, se pueden utilizar técnicas como la monitorización de la frecuencia cardíaca o la actividad cerebral para inferir niveles de relajación o estrés.

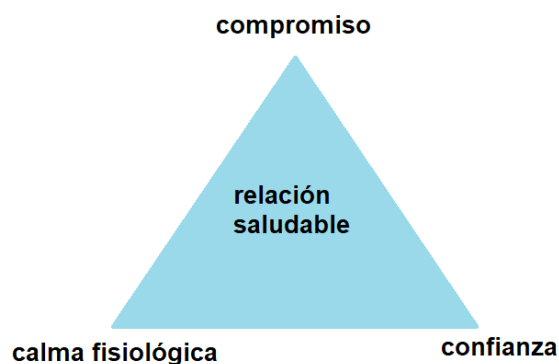


Figura 4. 4: En cada vértice del triángulo se encontrarían representadas las tres cualidades clave de una relación saludable

La confianza en una relación puede evaluarse mediante cuestionarios y escalas psicométricas diseñadas para medir la percepción de confianza entre las partes involucradas. Estas escalas pueden evaluar aspectos como la fiabilidad, la honestidad y la seguridad percibida en la relación.

El compromiso también puede evaluarse mediante cuestionarios que exploran la disposición de las personas a invertir tiempo, esfuerzo y recursos en la relación, así como su nivel de identificación con la misma y su compromiso a largo plazo.

Si bien estos métodos pueden proporcionar una comprensión más objetiva de estos aspectos en una relación, es importante recordar que la calidad de una relación va más allá de simples mediciones. La interpretación de los resultados debe hacerse con sensibilidad y considerando el contexto único de cada relación. Además, trabajar en mejorar estos aspectos puede marcar una gran diferencia en la calidad y la satisfacción de una relación, realmente tienes un lugar seguro y tienes esa relación saludable, el mecanismo por el cual funcionan las relaciones ¿Es posible, entonces, crear una especie de matemática de las relaciones de pareja? Y, más importante aún, ¿por qué querríamos hacerlo? ¿Qué beneficios podríamos obtener al unir las matemáticas y las relaciones saludables?

Utilizando modelos matemáticos y teorías de sistemas dinámicos, podemos visualizar y comprender la dinámica de las interacciones de pareja a lo largo del tiempo. Podemos identificar los atractores que impulsan la relación hacia estados positivos o negativos y simular diferentes escenarios para encontrar las mejores intervenciones para mejorar una relación.

Donde la ecuación de interacciones de pareja, desarrollada por John Gottman y James Murray, emergió en el contexto de la investigación sobre relaciones íntimas y duraderas. Esta ecuación, basada en décadas de estudios y observaciones de parejas, busca modelar los factores que contribuyen al éxito o fracaso de una relación. Se puede encontrar mencionada en numerosos libros y artículos científicos escritos por Gottman y sus colaboradores, así como en conferencias y presentaciones sobre terapia de pareja y psicología, donde las ecuaciones están desarrolladas

$$\begin{cases} W_{t+1} = I_{HW}(H_t) + r_1 W_t + a \\ H_{t+1} = I_{WH}(W_{t+1}) + r_2 H_t + b \end{cases}$$

La ecuación representada describe la dinámica de interacción entre la esposa (W) y el esposo (H) a lo largo de una serie de turnos t . En esta ecuación:

- W_{t+1} representa el puntaje de la esposa en el siguiente turno ($t + 1$).
- H_{t+1} representa el puntaje del esposo en el siguiente turno ($t + 1$).
- $I_{WH}(H_t)$ se denota como la influencia del esposo en el turno t sobre esposa.
- $I_{HW}(W_{t+1})$ se denota como la influencia de la esposa en el turno ($t + 1$) sobre el esposo.
- r_1 y r_2 que tan rápido cambio de ánimo.
- a y b como inicia la conversación antes de empezar a influirse mutuamente.

De hecho, podemos crear un retrato dinámico de las interacciones de la pareja a lo largo del tiempo. Para hacerlo, colocamos el comportamiento positivo y negativo del esposo en el eje horizontal y el de la esposa en el eje vertical. La figura 4.5 nos muestra cuatro cuadrantes que podemos describir detalladamente.

Colocamos dos personas felices en la playa en el cuadrante uno, y dos personas disgustadas en medio de una tormenta en el cuadrante tres. Así que, claramente, preferimos que nuestras parejas sean como las dos personas disfrutando en la playa en lugar de las que están atravesando la tormenta. Esto nos proporciona un nuevo objetivo para la terapia de pareja. Por lo tanto, este retrato del espacio de fase se vuelve muy claro en cuanto a la dirección que deseamos seguir.

Exactamente, en el cuadrante I ambos muestran comportamientos positivos, lo cual es ideal en una relación. Por otro lado, en el cuadrante III, ambos muestran comportamientos negativos, lo cual queremos evitar en la medida de lo posible. En cuanto al cuadrante II,

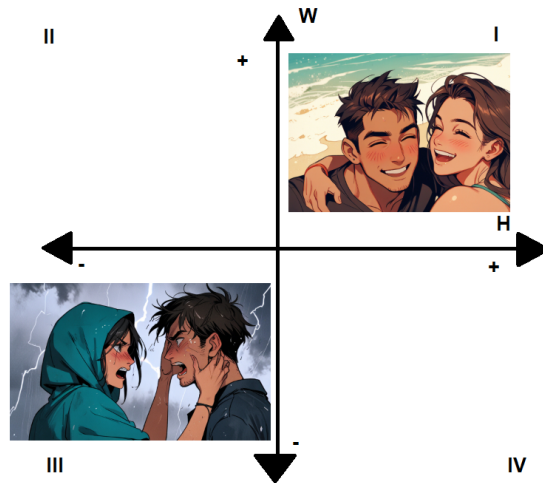


Figura 4. 5: En el eje horizontal es el comportamiento del esposo y del eje vertical el de la esposa. Donde subir es positivo y bajar es negativo

donde uno es positivo y el otro negativo, puede ser interesante, ya que podría haber una dinámica de equilibrio donde uno contrarreste al otro. Sin embargo, aún necesitamos investigar más para determinar si esta dinámica es beneficiosa o no. Finalmente, el cuadrante IV también es importante para evaluar cómo se desarrolla nuestra relación en momentos de apatía o desinterés por parte de ambos. Así que, al considerar todos estos cuadrantes, obtenemos una visión más completa de nuestro espacio de fase de relación.

Es una forma interesante de analizar las relaciones. En el contexto de los sistemas dinámicos, como las relaciones de pareja, se pueden aplicar conceptos como los “atractores” para comprender mejor su comportamiento a lo largo del tiempo. Los atractores son estados o patrones hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar con el tiempo. En el caso de las relaciones de pareja, podríamos considerar que existen “atractores negativos” y “atractores positivos”. Un atractor negativo podría representar patrones de comportamiento dañinos o destructivos que pueden conducir a conflictos, resentimiento o distancia emocional en la relación. Por ejemplo, la falta de comunicación, la desconfianza o la falta de compromiso podrían ser ejemplos de atractores negativos.

Por otro lado, un atractor positivo representaría patrones de comportamiento saludables y constructivos que fortalecen la conexión emocional y la intimidad en la relación. Estos podrían incluir la comunicación abierta y honesta, la empatía, el apoyo mutuo y la celebración

de los logros del otro.

La fuerza de estos atractores, ya sea positivo o negativo, puede variar dependiendo de diversos factores, como la personalidad de cada individuo, las experiencias pasadas, las creencias y valores, entre otros. En algunas relaciones, el atractor positivo puede ser más poderoso y mantener a la pareja en el cuadrante I, mientras que en otras, el atractor negativo puede ejercer una mayor influencia y llevar a la pareja hacia el cuadrante III.

Referencias

- [1] MURRAY, James Dickson; MURRAY, James Dickson. Mathematical Biology: II: Spatial Models and Biomedical Applications. New York: Springer, 2003.
- [2] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic Press, 2012.
- [3] Franco, O. G. (2023, 30 junio). Ecuaciones diferenciales i: El plano traza – determinante. El blog de Leo. <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-el-plano-traza-determinante/>
- [4] Layek, G. (2015). An introduction to dynamical systems and chaos. Springer.
- [5] Patricia K. Kerig, Donald H. Baucom - Couple Observational Coding Systems (2004)
- [6] Gottman, J. M., Swanson, C., Murray, J. (1999). The mathematics of marital conflict: Dynamic mathematical nonlinear modeling of newlywed marital interaction. Journal of Family Psychology, 13, 3-19
- [7] Gottman, J. M., Levenson, R. W. (2002). A two-factor model for predicting when a couple will divorce: Exploratory analyses using 14-year longitudinal data. Family Process, 41,83-96
- [8] Gottman, J. M. (1994). What predicts divorce: The relationship between marital processes and marital outcomes. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- [9] Ekman, P., Friesen, W. V. (1978). Facial Action Coding System. Palo Alto, CA: Consulting Psychologists Press, Inc.
- [10] J.M. Gottman and R.W. Levenson. Marital processes predictive of later dissolution: Behavior, physiology, and health. Journal of Personality and Social Psychology, 63:221-233, 1992.
- [11] J.M. Gottman. Marital Interaction: Empirical Investigations. Academic, New York, 1979.

- [12] John Mordechai Gottman, James D. Murray, Catherine Swanson, Rebecca Tyson, Kristin R. Swanson, - The Mathematics of Marriage Dynamic Nonlinear Models-The MIT Press (2003)
- [13] Liberman, R., Wheeler, E.G., de Visser, L., Kuehnel, J. y Kuehnel, T. (1987). Manual de terapia de pareja. Bilbao: Desclée de Brouwer.
- [14] Simpson, J.A., Rholes, W.S. y Phillips, D. (1996). Conflict in close relationships: An attachment perspective. *Journal of Personality and Social Psychology*, 71, 899-914.
- [15] Melero Caverro, R. (2008). La relación de pareja. Apego, dinámicas de interacción y actitudes amorosas: consecuencias sobre la calidad de la relación.
- [16] Diccionario de Cáncer del NCI. (s. f.). Instituto Nacional del Cáncer. <https://www.cancer.gov/espanol/publicaciones/diccionarios/diccionario-cancer/def/homeostasis>
- [17] Statista. (2023, 4 diciembre). Colombia: número de matrimonios registrados 2016-2023.
- [18] De Sistema Wiki, C. T. D. (s. f.). Biografía de Jay W. Forrester. *Dinamica de Sistema Wiki*.
- [19] Machado, D. (2024, 25 febrero). Propiedades del Valor Absoluto con Ejemplos. *Flamath*. <https://flamath.com/propiedades-valor-absoluto>
- [20] Ekman, P., Friesen, W. V. *Unmasking the face*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1975.
- [21] Gottman and N. Silver. *The Seven Principles for Making Marriage Work*. Crown, New York, 1999.
- [22] J.M. Gottman. *The Marriage Clinic*. W.W. Norton, New York, 1999.
- [23] K. Hahlweg, L. Schindler, D. Revenstorf, and J.C. Brengelmann. The Munich marital therapy study. In K. Hahlweg and N.S. Jacobson, editors, *Marital Interaction: Analysis and Modification*, pages 3-26. Guilford, New York, 1984.