

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE MATEMÁTICO

FUNDAMENTOS DE SISTEMAS DINÁMICOS: TEORÍA Y APLICACIONES.

AUTORA

CAMILA ANDREA CRUZ LUGO

ASESOR

MG. DIEGO ENRIQUE PICO LACHE

PAMPLONA, 2024

RESUMEN

Esta monografía explora la convergencia de conceptos teóricos y aplicaciones prácticas en el análisis de sistemas dinámicos, abordando fenómenos complejos en diversos contextos. Con un enfoque particular, se investigan y clarifican fundamentos, se estudian modelos matemáticos precisos mediante la programación en Python, y se realiza un análisis detallado de planos de fase. La investigación, respaldada por una sólida base teórica, permite comprender la dinámica de sistemas en situaciones físicas específicas. La aplicación práctica de modelos, junto con la exploración de modelos físicos, contribuye a la conexión entre teoría y realidad. la monografía no solo amplía el conocimiento en sistemas dinámicos, sino que también proporciona una perspectiva práctica para abordar problemas concretos, destacando la importancia de la integración entre la teoría matemática y su aplicación en el análisis cualitativo de sistemas complejos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a Dios por brindarme la oportunidad de embarcarme en este viaje académico y realizar este trabajo. A mi mamá, Mónica Milena Lugo Thomas, le agradezco de manera inmensa por su apoyo inquebrantable a lo largo de todo este proceso y a lo largo de mi carrera. A mi pareja, familia y amigos, les agradezco por su apoyo emocional y motivación incansable. Este logro no habría sido posible sin su aliento constante.

Mi más sincero agradecimiento al profesor Diego Pico por su orientación experta y apoyo constante durante todo el proceso de investigación. También, quiero expresar mi gratitud a todos los docentes que, a lo largo de la carrera, han contribuido con valiosas enseñanzas y sugerencias constructivas.

Cada uno de ustedes ha sido un pilar fundamental en mi travesía, un recordatorio constante de que, al igual que un barco necesita el viento para navegar, cada persona necesita apoyo y aliento para alcanzar sus metas. Estoy eternamente agradecida por la influencia positiva que han tenido en mi vida y en este trabajo.

OBJETIVOS

Desarrollar un enfoque particular para comprender fundamentos teóricos de sistemas dinámicos, realizando un análisis cualitativo de los modelos, que permita un entendimiento completo y contextualizado de su dinámica.

- Investigar conceptos esenciales relacionados con sistemas dinámicos para profundizar en la comprensión teórica.
- Analizar modelos matemáticos precisos que describan sistemas dinámicos en contextos físicos específicos.
- Implementar algoritmos en Python, para llevar a cabo simulaciones de modelos físicos.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Agradecimientos	II
Objetivos	III
Introducción	VII
1. Ecuaciones diferenciales	1
1.1. Problema de valor inicial	2
1.2. Matrices	6
2. Sistemas dinámicos	8
2.1. Representación Gráfica	8
2.2. Sistemas dinámicos	10
2.3. Flujo en el Espacio de Fase	13
2.4. Estabilidad de Lyapunov	15
3. Sistemas lineales	17
3.1. Sistemas lineales planos	17
3.1.1. Retrato de fase de sistemas planos	19
3.1.2. Clasificación de sistemas planos	24
3.2. Modelo de relaciones románticas	27
4. Sistemas no lineales	31
4.1. Bifurcaciones	35
4.1.1. Tipos de bifurcación	36
4.2. Caos	37
4.2.1. Ecuaciones de Lorenz	37
4.3. Mapeo logístico	41
4.3.1. Exponente de Lyapunov	43
5. Modelos físicos	45
5.1. Movimiento armónico simple (MAS)	46
5.2. Péndulo simple	48
5.3. Péndulo perturbado	55
5.4. Oscilador armónico amortiguado	57
Anexos	
A. Otras definiciones	62
B. Códigos de Python	63
B.1. Planos de fase	63
B.2. Atractor de Lorenz	64

B.2.1. Comparación de 3 condiciones iniciales del atractor de Lorenz 5.	64
B.2.2. Condición inicial lejos del origen para el atractor de Lorenz 6.	65
B.3. Mapeo logístico 7.	66
B.4. Exponente de Lyapunov del mapeo logístico 8.	67
B.5. Solución de la ecuación del péndulo simple 10.	68
B.6. Trayectorias del péndulo simple 12	69
B.7. Trayectorias del péndulo perturbado 14.	70
B.8. Trayectorias del oscilador armónico amortiguado 16.	71
B.9. Valores y vectores propios.	72
Bibliografía	72

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Tipos de líneas de fase. Elaboración propia.	8
2.2. Comportamiento. Fuente [4]	10
2.3. Plano de fase de ecuaciones lineales. Elaboración propia.	13
3.1. Valores propios reales distintos. Fuente [6]	20
3.2. Valores propios complejos. Fuente [6]	22
3.3. Valores propios repetidos. Fuente [6]	23
3.4. Clasificación geométrica. Fuente [9]	25
3.5. Plano de fase de la relación entre Carlos y Sofía. Elaboración propia.	28
3.6. Relación. Elaboración propia	29
4.1. Comportamiento asintótico de la ecuación logística. Fuente: [12].	32
4.2. Plano de fase de la ecuación logística. Elaboración propia.	32
4.3. Diagrama de bifurcación. Fuente: [6].	36
4.4. Atractor de Lorenz con diferentes condiciones iniciales.	40
4.5. Condiciones iniciales lejos del origen. Elaboración propia.	40
4.6. Valores de μ en el mapeo logístico. Fuente: [12].	41
4.7. Trayectorias del mapeo logístico. Fuente: [12]	42
4.8. Bifurcación del mapeo logístico. Elaboración propia.	42
4.9. Exponente de Lyapunov del mapeo logístico. Elaboración propia.	43
5.1. Masa - resorte. Fuente: [11]	46
5.2. Plano de fase del movimiento armónico simple. Elaboración propia.	48
5.3. Péndulo simple. Fuente: [11]	49
5.4. Péndulo simple. Elaboración propia.	49
5.5. Plano fase del péndulo simple y separatriz. Elaboración propia.	53
5.6. Trayectorias del péndulo simple. Elaboración propia.	54
5.7. Plano de fase del péndulo perturbado. Elaboración propia.	56
5.8. Trayectorias del péndulo perturbado. Elaboración propia.	57
5.9. Plano de fase de un oscilador armónico amortiguado. Elaboración propia.	58
5.10. Trayectorias de un oscilador armónico amortiguado. Elaboración propia.	59

INTRODUCCIÓN

En el campo actual de la investigación científica, la integración de las matemáticas puras y las matemáticas aplicadas proporciona un terreno fértil para el estudio y la comprensión de fenómenos dinámicos en diversos campos. Esta monografía proporciona un estudio en profundidad de los desafíos de integrar la teoría matemática y las aplicaciones prácticas en el desarrollo, simulación y análisis de modelos matemáticos de sistemas dinámicos.

El estudio de sistemas dinámicos se considera esencial para la elucidación de comportamientos complejos en la naturaleza y la ingeniería, siendo la capacidad de prever su evolución temporal crucial para una amplia gama de aplicaciones. En este contexto, la investigación emprendida tiene como objetivo no solo comprender la esencia matemática de estos sistemas, sino también aplicar estos conocimientos a problemas físicos específicos. A lo largo de la historia, la teoría de sistemas dinámicos ha evolucionado gracias a las destacadas contribuciones de diversos pensadores y científicos. Henri Poincaré, el matemático francés del siglo XIX, introdujo conceptos cruciales de sistemas dinámicos y llevó a cabo investigaciones pioneras en órbitas caóticas. Émile Picard, otro matemático francés contemporáneo, contribuyó al fundamento matemático necesario para el análisis de sistemas dinámicos. En el ámbito de la meteorología, Edward Lorenz comprendió el caos y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Además, Isaac Newton proporcionó bases esenciales para modelos físicos.

La integración entre conceptos esenciales y el análisis detallado de retratos de fases establecerá una base sólida para aplicar estos modelos en situaciones del mundo real. Se empleará el lenguaje de programación Python para implementar y estudiar estas dinámicas. Este enfoque no solo contribuirá al avance teórico en sistemas dinámicos, sino que también aprovechará las capacidades prácticas de Python para abordar problemas concretos de manera eficiente y precisa, brindando así una herramienta poderosa y versátil para la investigación y la aplicación práctica.

La organización de este trabajo es la siguiente:

Capítulo 1: Introduce las herramientas fundamentales de sistemas dinámicos necesarias para el desarrollo de la investigación. Se abordan definiciones clave, como ecuaciones diferenciales, el problema de valor inicial, sistemas dinámicos y matrices.

Capítulo 2: Se adentra en el estudio de la estabilidad mediante el análisis de la matriz jacobiana y la estabilidad de Lyapunov.

Capítulo 3: Explora los sistemas lineales, abarcando aspectos como su representación gráfica, bifurcaciones, flujo y sistemas lineales planos. Además, se presentan ejemplos que ilustran aplicaciones de programación en contextos específicos.

Capítulo 4: Se centra en los sistemas no lineales, explorando fenómenos como el caos, que incluye el atractor de Lorenz, el mapeo logístico y el exponente de Lyapunov. Asimismo, se examinan aplicaciones de programación en contextos particulares.

Capítulo 5: Examina diversos modelos físicos junto con sus soluciones, aplicando estas nociones de manera práctica a través de la programación.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales han desempeñado un papel crucial en el desarrollo de la matemática y la comprensión de los sistemas dinámicos a lo largo de la historia. Su origen se remonta al siglo XVII, cuando matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz comenzaron a abordar problemas relacionados con el cambio y la variación en distintos campos científicos. Estas ecuaciones son la base para describir fenómenos dinámicos y se utilizan en diversas disciplinas para modelar sistemas que evolucionan con el tiempo o en función de otras variables.

Definición 1.0.1. *La expresión*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

se denomina ecuación diferencial ordinaria de orden n , en la cual F representa una función que establece una relación entre x , y , y la n -ésima derivada de y [6].

Las ecuaciones diferenciales ordinarias describen cómo varía la variable dependiente con las variables independientes relacionando las tasas de cambio (o derivadas).

Ejemplo 1.0.2. *Considere las ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^4z}{dt^4} + 5\frac{d^2z}{dt^2} + 3z = \sin t,$$

donde x y t representan las variables independientes, mientras que y y z denotan las variables dependientes.

Definición 1.0.3. *La expresión*

$$F\left(s_1, s_2, \dots, s_n, w, \frac{\partial w}{\partial s_1}, \frac{\partial w}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial s_n}, \dots\right) = 0$$

representa una ecuación diferencial parcial, en la cual w es una función desconocida, $\frac{\partial w}{\partial s_i}$ denota la derivada parcial de w con respecto a la variable independiente s_i con $i = 1, 2, 3, \dots, n$ [6].

A diferencia de las ecuaciones ordinarias, que tratan de funciones con una variable independiente, las ecuaciones diferenciales parciales se utilizan para modelar fenómenos en los que las cantidades involucradas dependen de dos o más variables independientes.

Ejemplo 1.0.4. *Considere las ecuaciones diferenciales parciales*

$$\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = 0,$$

donde u, v, x, y, z son las variables independientes y a, b son las dependientes.

Se abordarán métodos analíticos y numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. Los métodos analíticos, como la separación de variables, simplifican la resolución y revelan patrones. Los métodos numéricos, como Euler y Runge-Kutta, proporcionan herramientas precisas para aproximar soluciones en casos complejos. También está el

método de diferencias finitas, que discretiza la ecuación para resolverla numéricamente, aunque no se utilizará en este trabajo.

Métodos analíticos para solucionar una ecuación diferencial:

Separación de Variables: La técnica de separación de variables se emplea en ecuaciones diferenciales ordinarias separables. Consiste en reorganizar los términos de la ecuación para aislar las variables y facilitar la integración directa.

Por ejemplo, para una ecuación como

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

la separación de variables implica dividir ambos lados para luego integrar, resultando en la solución

$$\ln |y| = kt + C.$$

Sustituciones: El método de sustituciones se utiliza para simplificar ecuaciones diferenciales mediante la introducción de nuevas variables. Esta técnica busca transformar la ecuación original en una forma más manejable, facilitando la posterior integración.

Por ejemplo, al sustituir $u = t^2$ en la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = 2ty,$$

la ecuación resultante se convierte en

$$\frac{dy}{du} = y,$$

que es más fácil de integrar.

Métodos numéricos para solucionar una ecuación diferencial:

Euler: El método de Euler es una técnica simple y fundamental, especialmente adecuada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Este método estima la solución mediante pasos sucesivos pequeños, utilizando la fórmula de iteración $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$, donde h representa el tamaño del paso.

Runge-Kutta: El método de Runge-Kutta mejora la precisión en comparación con el método de Euler. Este enfoque utiliza promedios ponderados de pendientes en el intervalo del paso, lo que resulta en una aproximación más precisa de la solución.

1.1. Problema de valor inicial

El problema de valor inicial (PVI) es un tipo específico de problema asociado con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Este problema implica determinar una solución única para la EDO junto con condiciones iniciales específicas. Estas condiciones iniciales generalmente consisten en valores para la variable dependiente y , en algunos casos, sus derivadas evaluadas en un punto específico del dominio temporal.

Definición 1.1.1. La forma general de un PVI para una EDO de primer orden es:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

donde $f(t, y)$ representa la función que explica cómo la variable y cambia en relación con la variable independiente t , $y(t_0)$ es el valor inicial de y en el tiempo t_0 , y la solución buscada es una función $y(t)$ que cumple con la ecuación y la condición inicial [13].

Las condiciones iniciales son cruciales para resolver ecuaciones diferenciales, especialmente en problemas de valores iniciales (PVI). Estas condiciones proporcionan información sobre el estado del sistema durante un dominio de tiempo determinado. Al establecer condiciones iniciales, como el valor inicial de la variable y y su derivada en el instante $t = t_0$, se determinan las constantes arbitrarias presentes en la solución general, transformándola en una solución particular que satisface las condiciones específicas del problema. Fundamentalmente, las condiciones iniciales sirven como limitaciones que orientan la búsqueda hacia una solución singular y específica.

Ejemplo 1.1.2.

Considere la ecuación diferencial ordinaria y la condición inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2y, \quad y(0) = 1.$$

Solución Analítica: se resuelve por el método de separación de variables, vista anteriormente, así se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -2$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -2 \int dt$$

$$\ln |y| = -2t + C$$

donde C es la constante de integración, usando la condición inicial $y(0) = 1$ queda:

$$\ln |1| = -2 \cdot 0 + C$$

entonces $C = 0$, por lo tanto, la solución analítica es:

$$\ln |y| = -2t$$

por último, aplicando propiedades de la exponencial

$$y = e^{-2t}.$$

La solución general de una ecuación diferencial incluye constantes arbitrarias, no determinadas por la ecuación. Estas constantes se fijan mediante condiciones iniciales. La solución particular es un caso específico de la solución general, donde las constantes son reemplazadas por valores que cumplen condiciones específicas proporcionadas por el problema, siendo única y ajustándose a las restricciones del contexto [13].

Ejemplo 1.1.3.

Considere la ecuación de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

Solución General:

- Es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden y se puede resolver mediante separación de variables.
- Integrar ambos lados de la ecuación, lo que lleva a:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2 dt$$

- Al integrar, se obtiene $\log |y| = 2t + C$ donde C es la constante de integración.
- Despejar y para obtener la solución general: $y(t) = e^{2t+C}$

Solución Particular:

- Condiciones iniciales: sea $y(0) = 1$, se puede sustituir $t = 0$ y $y = 1$ en la solución general para hallar la constante C , entonces,

$$1 = e^{2(0)+C} \implies C = \ln(1) = 0$$

- Al sustituir $C = 0$ en la solución general, se obtiene la solución particular, $y(t) = e^{2t}$.

Definición 1.1.4. Dada una función $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde g es (globalmente) Lipschitziana en el conjunto V si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|g(u) - g(v)| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in V$$

y se denomina la función lipschitziana [5].

Teorema 1.1.5. Teorema de Existencia y Unicidad Suponga $f \in C^1$ (continuamente diferenciable) y considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

entonces, existe una única solución $x : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ para algún $\epsilon > 0$.

Observación:

1. La unicidad del teorema anterior es respecto a una región que contenga el punto (t_0, x_0) .
2. Si f es continua y es localmente lipschitziana, se puede afirmar que existe la solución y es única.

La demostración del anterior teorema la puede encontrar en [4].

Ejemplo 1.1.6.

Considere el siguiente problema de valor inicial, ¿existen soluciones para todo el tiempo?

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, \quad x(0) = x_0.$$

Aquí $f(x) = 1 + x^2$, esta función es continua y tiene una derivada continua para todo x . Por lo tanto, el teorema dice que existen soluciones y son únicas para cualquier condición inicial x_0 . Sin embargo, el teorema no afirma que las soluciones existan para todo tiempo; solo se garantiza su existencia en un intervalo de tiempo (posiblemente muy corto) alrededor de $t = 0$.

Sea el caso donde $x(0) = 0$, entonces el problema se puede resolver analíticamente mediante la separación de variables:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int dt,$$

lo cual conduce a

$$\tan^{-1} x = t + C.$$

La condición inicial $x(0) = 0$ implica que $C = 0$. Por lo tanto, la solución es $x(t) = \tan t$. No obstante, es importante notar que esta solución solo es válida en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, ya que $x(t)$ se vuelve indefinido conforme t se acerca a $\frac{\pi}{2}$. Fuera de ese intervalo, no existe una solución al problema de valor inicial para $x_0 = 0$.

Las ecuaciones ordinarias son complejas, el método de solución a veces no es suficiente y se deben utilizar otros métodos, incluido el método de Picard, de él se puede obtener una solución aproximada. La iteración de Picard es una sucesión de funciones, relacionada con un problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f(v) \\ v(0) = v_0, v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

La iteración de Picard de este problema es la sucesión $U_n(t)$, la cual converge a la solución del problema de valor inicial

$$U_n(t) = \begin{cases} U_0(t) = v_0 \\ U_1(t) = v_0 + \int_{t_0}^t f(U_0(s))ds \\ U_2(t) = v_0 + \int_{t_0}^t f(U_1(s))ds \\ \vdots \\ U_{n+1}(t) = v_0 + \int_{t_0}^t f(U_n(s))ds \end{cases}$$

Las condiciones para la convergencia del método de iteración de Picard son las siguientes:

1. Existe $L > 0$ tal que para cualquier t, u_1, u_2 :

$$|F(t, u_1) - F(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|.$$

2. El dominio D sobre el cual se define la ecuación integral debe ser un conjunto compacto A.0.4.

Ejemplo 1.1.7. Sea el problema de valor inicial $x' = x$, $x(0) = x_0$

■ $f(x) = x$

$$\begin{aligned} U_2(t) &= x_0 + \int_0^t f(U_1(s))ds \\ U_1(t) &= x_0 + \int_0^t f(U_0(s))ds = x_0 + \int_0^t U_1(s)ds \\ &= x_0 + \int_0^t U_0(s)ds = x_0 + \int_0^t x_0(1+s)ds \\ \text{■ } U_0(t) &= x_0 \\ &= x_0 + \int_0^t x_0 ds = x_0 + x_0 t + \frac{x_0 t^2}{2} \\ &= x_0 + x_0 t = x_0(1+t) \\ &= x_0(1+t + \frac{t^2}{2}) \end{aligned}$$

Se continúa así sucesivamente hasta n y así la sucesión queda de la forma:

$$U_n(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Para demostrar la convergencia de esta iteración de Picard, se usará la solución exacta de la ecuación diferencial $x' = x$, que es $x(t) = x_0 e^t$. Se mostrará que $U_n(t)$ converge a $x_0 e^t$ de la siguiente manera:

1. **Paso base:** $U_0(t) = x_0$ converge a $x_0 e^0 = x_0$.
2. **Hipótesis de inducción:** Suponga que $U_n(t)$ converge a $x_0 e^t$ para algún n .
3. **Paso de inducción:** Se demostrará que $U_{n+1}(t)$ también converge a $x_0 e^t$:

$$U_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t U_n(s) ds$$

Utilizando la hipótesis de inducción $U_n(t) \rightarrow x_0 e^t$, podemos escribir:

$$U_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t x_0 e^s ds = x_0 + x_0 [e^s]_0^t = x_0 + x_0(e^t - 1) = x_0 e^t$$

Por lo tanto, $U_{n+1}(t)$ también converge a $x_0 e^t$.

Por lo tanto, la iteración de Picard converge a la solución exacta $x(t) = x_0 e^t$.

1.2. Matrices

Las matrices, ideadas en sus inicios por Sylvester y luego formalizadas por matemáticos como Cayley en el siglo XIX, han evolucionado para convertirse en una herramienta fundamental en varias disciplinas. Su utilidad se fundamenta en la eficiente organización y manipulación de datos, así como en su aplicabilidad destacada en la resolución de sistemas lineales.

Definición 1.2.1. Una matriz M de $a \times b$ es un arreglo rectangular de ab números reales, ordenados en a filas y b columnas de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1b} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{ib} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{a1} & m_{a2} & \dots & m_{aj} & \dots & m_{ab} \end{bmatrix}$$

donde cada $m_{ij} \in \mathbb{R}$ es una entrada de la matriz en la posición ij . Una matriz cuadrada es cuando $a = b$ [7].

La i -ésima fila de M es

$$[m_{i1} \ m_{i2} \ \dots \ m_{ib}], \text{ con } (1 \leq i \leq a).$$

La j -ésima columna de M con $(1 \leq j \leq b)$, es

$$\begin{bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{aj} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.2.2. Considere la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ésta es una matriz cuadrada ya que tiene la misma cantidad de filas y de columnas, es decir, es una matriz 4×4 .

Definición 1.2.3. Los valores propios o autovalores, de una matriz M son las soluciones λ de la ecuación característica $\det(M - \lambda I) = 0$, donde I representa la matriz identidad. Dado un valor propio λ , los vectores propios asociados son los vectores no nulos $\mathbf{V}$ que satisfacen la ecuación $(M - \lambda I)\mathbf{V} = \mathbf{0}$ [8].

Ejemplo 1.2.4. Considere la matriz A y los vectores x_1, x_2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

se analizará si x_1 y x_2 son vectores propios de A y se determinarán sus respectivos valores propios

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 8x_1$$

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por tanto, x_1 es un vector propio de A del valor propio $\lambda = 8$, pero x_2 no es vector propio de la matriz.

Para una matriz 2×2 el determinante de la matriz se calcula de la siguiente manera, considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc.$$

Para una matriz 3×3 el determinante de la matriz se calcula de la siguiente manera, considere la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \det(B) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Definición 1.2.5. Una matriz jacobiana es una matriz que incluye las derivadas parciales de primer orden de una función en $\mathbb{R}^n$, donde los componentes escalares se denotan como $g_1, g_2, g_3, \dots, g_p$ [8]. La fórmula de la matriz Jacobiana se expresa de la siguiente manera, $g(y_1, y_2, \dots, y_n) = (g_1, g_2, \dots, g_p)$

$$Jg(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1} & \frac{\partial g_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

A lo largo de este capítulo, se han explorado los fundamentos de las ecuaciones diferenciales, brindando una base sólida para la formulación y resolución de problemas utilizando técnicas numéricas y analíticas. Estos conceptos ayudan a comprender cómo cambian los fenómenos con el tiempo. El siguiente capítulo presentará el marco de los sistemas dinámicos y demostrará cómo las ecuaciones diferenciales se utilizan para analizar la evolución temporal de varios fenómenos.

SISTEMAS DINÁMICOS

2.1. Representación Gráfica

Las representaciones gráficas son herramientas importantes para analizar sistemas dinámicos, y el espacio de fase se convirtió en un concepto fundamental para visualizar y comprender la evolución de estos sistemas a lo largo del tiempo. El espacio de fase es un espacio abstracto en el que cada punto representa el estado del sistema y cada trayectoria describe cómo evoluciona el sistema a lo largo del tiempo desde su estado inicial.

El espacio de fase es un espacio n -dimensional, donde n es el número de variables en el sistema. Cada dimensión del espacio de fase corresponde a una variable del sistema.

Puntos y Trayectorias en el Espacio de Fase:

- Puntos: Cada punto en el espacio de fase representa un estado único del sistema en un momento específico.
- Trayectorias: Las trayectorias en el espacio de fase representan la evolución del sistema a medida que avanza en el tiempo. Estas trayectorias son curvas que conectan puntos sucesivos, proporcionando una visualización dinámica del comportamiento del sistema.

Una línea de fase es una línea vertical que marca la solución de equilibrio y evidencia la dirección en la que se mueve una solución no constante a medida que el tiempo tiende a infinito. Dependiendo del patrón que se forme por las flechas, se determina la naturaleza de las soluciones de equilibrio.



Figura 2.1: Tipos de líneas de fase. Elaboración propia.

Ejemplo 2.1.1. Considere la ecuación diferencial dada por

$$\frac{dx}{dt} = ax,$$

donde $x = x(t)$ representa una función desconocida de valores reales respecto a una variable real t , y $\frac{dx}{dt}$ denota su derivada. El parámetro a define ecuaciones diferenciales distintas para cada valor particular.

La solución de esta ecuación se realiza mediante el método de variables separables

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax, \\ \int \frac{dx}{x} &= \int a dt, \\ \ln |x| &= at + c, \\ x(t) &= ke^{at},\end{aligned}$$

donde k puede ser cualquier número real. La función $x(t) = ke^{at}$ representa una solución, ya que $\frac{dx}{dt} = ake^{at}$, y no existen otras soluciones.

Demostración. Para demostrar esto, suponga $u(t)$ como otra solución y calcule la derivada de $u(t)e^{-at}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t)e^{-at} &= \frac{d}{dt}u(t)e^{-at} + u(t)(-ae^{-at}) \\ &= au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} \\ &= 0\end{aligned}$$

lo que implica que $u(t)e^{-at}$ es una constante k , y por lo tanto, $u(t) = ke^{at}$. Esto confirma que no hay otras soluciones. $\square$

La constante k se determina completamente al conocer el valor u_0 de la solución en un momento específico t_0 . Se obtiene k al resolver la ecuación:

$$ke^{at_0} = u_0, \quad k = \frac{u_0}{e^{at_0}},$$

y así se obtiene una solución única que satisface la condición inicial $x(t_0) = u_0$.

Esto se expresa comúnmente como un problema de valor inicial: $\frac{dx}{dt} = ax$, $x(0) = u_0$. Una solución $x(t)$ de este problema no solo resuelve la ecuación diferencial, sino que también toma el valor inicial u_0 en $t = 0$. Cuando $k = 0$, existe una solución especial: $x(t) \equiv 0$, conocida como solución de equilibrio o punto de equilibrio para la ecuación.

La constante a en la ecuación $\frac{dx}{dt} = ax$ puede considerarse como un parámetro. Si a cambia, la ecuación y sus soluciones también varían.

¿Se puede describir cualitativamente cómo cambian las soluciones?

1. Si $a = 0$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} ke^{at} = k \cdot 1 = k$, una constante.
2. Si $a > 0$:
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at}$ es ∞ para $k > 0$, $-\infty$ para $k < 0$, y 0 para $k = 0$.
 - $\lim_{t \rightarrow -\infty} ke^{at} = 0$.
3. Si $a < 0$:
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = 0$.
 - $\lim_{t \rightarrow -\infty} ke^{at}$ es ∞ para $k > 0$, $-\infty$ para $k < 0$, y 0 para $k = 0$.

El comportamiento de las soluciones es notablemente diferente cuando a es 0, positivo o negativo. Cuando $a = 0$, las soluciones son constantes (ver Figura 2.2a). Cuando $a > 0$, todas las soluciones no nulas se alejan del punto de equilibrio en 0 a medida que t aumenta, mostrando un comportamiento de fuente (ver Figura 2.2b), mientras que para $a < 0$, las soluciones tienden hacia el punto de equilibrio, exhibiendo un comportamiento de sumidero (ver Figura 2.2c).

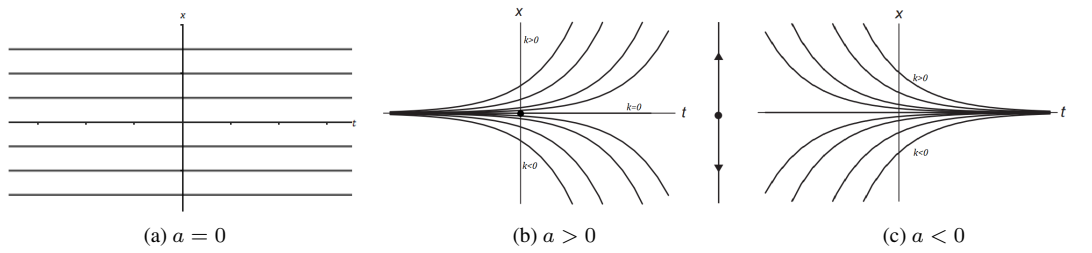


Figura 2.2: Comportamiento. Fuente [4]

2.2. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos, fundamentales para comprender fenómenos en constante cambio, tienen una rica historia que se remonta al trabajo pionero de matemáticos como Henri Poincaré en el siglo XIX. Su contribución a la teoría de sistemas dinámicos y el descubrimiento del caos establecieron las bases para entender la complejidad inherente en sistemas no lineales.

Un sistema dinámico es un conjunto de elementos o ecuaciones que describen cómo las variables se interrelacionan y evolucionan con el tiempo. Estos sistemas se utilizan para describir y analizar cómo las variables o estados cambian con el tiempo o en función de otras variables. Los sistemas dinámicos pueden ser físicos, biológicos, económicos o cualquier otro tipo de sistema que exhiba un comportamiento que evolucione con el tiempo.

Clasificación de los sistemas dinámicos:

- Los sistemas continuos se caracterizan por un desarrollo suave y continuo a lo largo del tiempo, donde las variables cambian de manera fluida y no abrupta. Estos sistemas se describen mediante ecuaciones diferenciales que representan la variación temporal en función del valor actual de la variable. Por el contrario de los sistemas continuos, en los sistemas discretos, los cambios ocurren en pasos de tiempo discretos, donde las variables solo cambian en momentos específicos. El modelado matemático de sistemas discretos implica el uso de ecuaciones en diferencias para expresar cómo cambian las variables entre pasos de tiempo discretos.

Un sistema continuo n -dimensional se puede representar por la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F(x),$$

donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el vector del estado del sistema, $\frac{dx}{dt} = \frac{d[x_1, \dots, x_n]^T}{dt} \in \mathbb{R}^n$ y $F = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- Un sistema dinámico autónomo es un sistema cuyo comportamiento se desarrolla de forma independiente en el tiempo, es decir, su desarrollo no depende directamente de variables temporales externas. La ecuación diferencial general para un sistema dinámico autónomo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$$

donde $\vec{x}$ denota el vector que contiene las variables del sistema, y $f(\vec{x})$ es una función que describe las tasas de cambio de dichas variables.

- Por otro lado, los sistemas no autónomos son dependientes del tiempo, lo que significa que su evolución está relacionada con variables temporales externas. Estos sistemas a menudo modelan fenómenos que varían en el tiempo, como fuerzas externas periódicas o cambios en los parámetros del sistema. La ecuación diferencial para un sistema dinámico no autónomo incorpora explícitamente la dependencia del tiempo, esto se expresa como:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(t, \vec{x})$$

donde $\vec{x}$ representa el vector de variables del sistema, y $f(t, \vec{x})$ es una función que describe las tasas de cambio, dependiendo tanto del tiempo t como de las variables del sistema.

- Los sistemas lineales se rigen por ecuaciones diferenciales lineales, lo que implica que hay una relación proporcional entre las variables y se mantienen las propiedades de superposición y homogeneidad. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

donde $\vec{x}$ representa el vector de variables del sistema, A es una matriz constante y $\frac{d\vec{x}}{dt}$ denota las tasas de cambio de las variables. Para un sistema lineal bidimensional, las ecuaciones podrían ser:

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} = a_{11}\vec{x}_1 + a_{12}\vec{x}_2$$

$$\frac{d\vec{x}_2}{dt} = a_{21}\vec{x}_1 + a_{22}\vec{x}_2$$

- Por el contrario, los sistemas no lineales contienen ecuaciones diferenciales no lineales que introducen términos no proporcionales y conducen a un comportamiento más complejo y a menudo impredecible, esto se puede representar mediante:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$$

donde, $f(\vec{x})$ es una función no lineal de las variables presentes en el sistema.

Definición 2.2.1. *Un sistema dinámico continuo en una dimensión es una ecuación diferencial de la forma*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(x(t), t)$$

donde t es la variable tiempo, $x(t) : I \rightarrow A$ es una trayectoria, $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable con continuidad, el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto, no-vacío, I es un intervalo abierto de la forma $(a, +\infty)$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, o de la forma $(-\infty, a)$ donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Resolver un sistema dinámico continuo $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(x(t), t)$ es encontrar todas las posibles trayectorias $x(t)$ que satisfagan esta ecuación. A cada una de las tales trayectorias $x(t)$ se le conoce como una solución al sistema dinámico.

Un punto de equilibrio en un sistema dinámico es un estado donde las variables del sistema no cambian con el tiempo. Esto quiere decir que el sistema permanece en reposo.

Definición 2.2.2. *Un punto de equilibrio es considerado estable si las soluciones cercanas permanecen próximas durante todo el tiempo futuro. Considere $x^* \in \mathbb{R}^n$ como un punto de equilibrio para la ecuación diferencial [3].*

Entonces, x^* es estable si, para cualquier abierto σ de x^* en $\mathbb{R}^n$, existe un abierto σ_1 de x^* en σ tal que, para toda solución $x(t)$ con $x(0) = x_0$ en σ_1 , se cumple la condición.

Suponga que el sistema n -dimensional $\dot{x} = F(x)$ tiene un punto de equilibrio x^* y todos los valores propios del sistema linealizado en x^* tiene partes reales negativas. Entonces x^* es asintóticamente estable.

Considerando un sistema dinámico descrito por una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$$

donde $\vec{x}$ es un vector que representa el estado del sistema y la función $f(\vec{x})$ describe cómo el sistema experimenta cambios en función de su estado.

Definición 2.2.3. *Un punto crítico x^* del sistema es un punto que satisface $f(x^*) = 0$, lo que indica que el sistema no cambia en ese estado [3].*

La estabilidad de un punto crítico está relacionada con cómo evolucionan con el tiempo las perturbaciones alrededor de ese punto. Si la perturbación tiende a disminuir y el sistema regresa al punto crítico, se dice que es estable. Si la perturbación tiende a aumentar, el punto crítico es inestable.

Ejemplo 2.2.4. Considere la siguiente ecuación:

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - 1,$$

se buscan los puntos críticos resolviendo la ecuación $f(z) = 0$, donde $f(z) = z^2 - 1 = 0$ los puntos críticos z^* son $z^* = -1$ y $z^* = 1$.

Para analizar la estabilidad, se evalúa la derivada de $f(z)$ con respecto a z en los puntos críticos y queda que

$$f'(z) = 2z$$

si $z^* = -1$ y $z^* = 1$, entonces

$$f'(-1) = -2 \quad f'(1) = 2,$$

por lo tanto, el punto crítico $z^* = -1$ es estable, mientras que $z^* = 1$ es inestable.

La estabilidad de un punto crítico se evalúa mediante la matriz jacobiana del sistema en el punto crítico. Si todos los autovalores de la matriz tienen partes reales negativas, el punto es estable o si tienen parte reales positivas el punto es inestable.

Definición 2.2.5. Convergencia hacia el Punto Crítico: Sea $\mathbf{x}^*$ el punto crítico del sistema. La convergencia hacia este punto se expresa mediante la condición:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0,$$

donde $\mathbf{x}(t)$ representa la solución del sistema en función del tiempo t [1].

Los puntos de equilibrio se pueden clasificar de la siguiente manera:

Casos robustos:

- Fuente: Un punto de equilibrio x^* en un sistema dinámico autónomo $\frac{dx}{dt} = f(x)$ se denomina "fuente" si todas las componentes de la parte real de los autovalores de la matriz jacobiana J evaluada en x^* son positivas. Es decir, para los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, se cumple $Re(\lambda_i) > 0$ para todo i .
- Sumidero: Un punto de equilibrio x^* en un sistema dinámico autónomo $\frac{dx}{dt} = f(x)$ se denomina "sumidero" si todas las componentes de la parte real de los autovalores de la matriz jacobiana J evaluada en x^* son negativas. Es decir, para los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, se cumple $Re(\lambda_i) < 0$ para todo i .
- Silla: Un punto de equilibrio x^* se llama "punto de silla" si tiene al menos un autovalor con parte real positiva y al menos uno con parte real negativa.

Casos marginales:

- Centros: Un punto de equilibrio x^* se llama "punto de centro" si todos sus autovalores son complejos conjugados y tienen parte real nula.
- Puntos de orden superior y no aislados: al menos un autovalor es cero.

Ejemplo 2.2.6. Considere

$$\frac{da}{dt} = 2a - b, \quad \frac{db}{dt} = a + b,$$

se encontrarán los puntos críticos resolviendo las ecuaciones

$$2a - b = 0, \quad a + b = 0,$$

esto da el punto en $(0, 0)$. Luego, se evalúa la matriz Jacobiana en el punto

$$J = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

se calculan los autovalores de la matriz Jacobiana resolviendo la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1)(1) = \lambda^2 - 3\lambda + 3.$$

Esto lleva a los valores propios:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Para analizar la estabilidad de los valores propios, se considera la parte real de los autovalores, la parte real de un número complejo $a + bi$ es a . En este caso, la parte real es $\frac{3}{2}$.

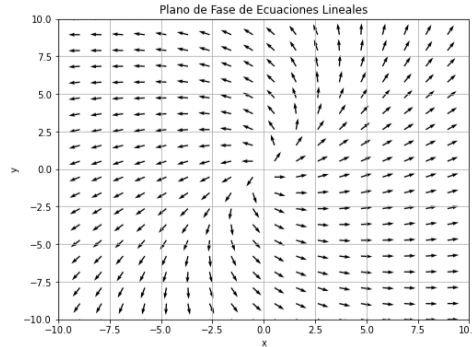


Figura 2.3: Plano de fase de ecuaciones lineales. Elaboración propia.

Dado que $\frac{3}{2} > 0$, se puede concluir que los puntos asociados a estos autovalores son inestables. Por lo tanto, la estabilidad de los puntos en $(0,0)$ está determinada por la parte real positiva de los autovalores y se clasifican como inestables como en la figura 2.3 y es una fuente.

Algorithm 1 Plano de fase

Entrada: Rango de valores de x e y

- 1: Definir las ecuaciones diferenciales $2x - y$, $x + y$.
- 2: Crear una malla de los valor de x e y
- 3: Crear un campo de direcciones normalizado

Salida: Gráfico del plano de fase

2.3. Flujo en el Espacio de Fase

El flujo describe cómo las soluciones de una ecuación cambian a lo largo del tiempo, permite visualizar la evolución y la trayectoria de un sistema dinámico. Al comprender el flujo, no solo obtienen una visión estática de los estados de equilibrio, sino que también capturan la esencia de cómo esos estados se alcanzan y se abandonan en el transcurso del tiempo.

Definición 2.3.1. El flujo de una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ se define como la función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que: ϕ es derivable; el flujo se puede considerar como la solución general de una ecuación [12].

Propiedades:

- ϕ es diferenciable
- $\phi(0, x) = x$
- $\phi(t_0 + t_1, x) = \phi(t_0, \phi(t_1, x)) = \phi(t_0, \cdot) \circ \phi(t_1, x)$

Ejemplo 2.3.2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y - x^3 \end{cases}$$

Pruebe que $\phi(t, (x_0, y_0)) = \left(x_0 e^t, \left(y_0 - \frac{x_0^3}{4}\right) e^{-t} + \frac{x_0^3}{4} e^{3t}\right)$ es flujo.

Demostración. ■ ϕ es diferenciable, ya que las funciones exponenciales son diferenciables en todos sus puntos.

- $\phi(0, x) = \phi(0, (x, y)) = \left(x e^0, \left(y - \frac{x^3}{4}\right) e^{-0} + \frac{x^3}{4} e^0\right) = \left(x, y - \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{4}\right) = (x, y)$
- $\phi(t+s, x) = \phi(t+s, (x, y)) = \phi(t, \phi(s, x), \phi(s, y))$, se probará esta igualdad:

$$\begin{aligned}\phi(t+s, (x, y)) &= \phi(t, \phi(s, x), \phi(s, y)) \\ \left(x e^{t+s}, \left(y - \frac{x^3}{4}\right) e^{-t-s} + \frac{x^3}{4} e^{3t+3s}\right) &= \phi\left(t, x e^s, \left(y - \frac{x^3}{4}\right) e^{-s} + \frac{x^3}{4} e^{3s}\right) \\ \left(x e^t e^s, \left(y - \frac{x^3}{4}\right) e^{-t} e^{-s} + \frac{x^3}{4} e^{3t} e^{3s}\right) &= \left(x e^t e^s, \left(y e^{-s} - \frac{x^3}{4} e^{-s} + \frac{x^3}{4} e^{3s} - \frac{x^3}{4} e^{3s}\right) e^{-t} + \frac{x^3}{4} e^{3t} e^{3s}\right) \\ \left(x e^t e^s, \left(y - \frac{x^3}{4}\right) e^{-t} e^{-s} + \frac{x^3}{4} e^{3t} e^{3s}\right) &= \left(x e^t e^s, \left(y - \frac{x^3}{4}\right) e^{-t} e^{-s} + \frac{x^3}{4} e^{3t} e^{3s}\right)\end{aligned}$$

donde $c_1 = x$, $c_2 = \frac{x^3}{4}$, $c_3 = y - \frac{x^3}{4}$

El flujo es la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = x \implies \frac{dx}{x} = dt \implies x = e^t c_1$$

$$\frac{dy}{dt} + y = x^3 \implies e^t \frac{dy}{dt} + e^t y = e^t x^3 \longrightarrow \text{haciendo la integral, queda } y = \frac{c_2 e^{3t}}{4} + c_3 e^{-t}.$$

□

Definición 2.3.3. (Dependencia continua en condiciones iniciales.) Sea $\phi(t, x)$ flujo del sistema $\frac{dx}{dt} = F(x)$, donde F es C^1 . Entonces ϕ es una función continua de x [13].

Una **órbita** es la trayectoria que sigue una solución del sistema dinámico en el espacio de fase. Para un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

una órbita es el conjunto de puntos $\gamma(x_0) = \{\phi(t, x_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ donde $\phi(t, x_0)$ es el flujo del sistema, x_0 es la condición inicial y t es el tiempo. En otras palabras, la órbita de una solución $x(t)$ es el conjunto de puntos en el espacio de fase que la solución recorre a medida que t varía.

Un **ciclo límite** es una solución periódica aislada de un sistema dinámico autónomo en el plano de fase. Formalmente, consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo en $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

donde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función suave. Un ciclo límite γ es una curva cerrada en el plano de fase tal que:

1. γ es una órbita periódica del sistema.
2. γ es aislada, es decir, existe una vecindad U de γ tal que no hay otras órbitas periódicas en U .

Definición 2.3.4. Si $\phi(t, x_0)$ es el flujo del sistema, entonces un ciclo límite γ es una órbita para la cual existe un período $T > 0$ tal que $\phi(T, x_0) = x_0$ para $x_0 \in \gamma$, y no existe una secuencia de órbitas periódicas distintas que converjan a γ .

Una **separatriz** es una trayectoria en el espacio de fase que separa diferentes tipos de comportamientos dinámicos. En particular, es una curva que actúa como una frontera entre distintas regiones del espacio de fase, cada una con diferentes tipos de órbitas (como órbitas que convergen a diferentes puntos fijos o ciclos límite).

Para un sistema autónomo en el plano de fase:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

una separatriz puede ser una órbita que cumple una de las siguientes condiciones: - Conecta puntos de equilibrio (puntos fijos) del sistema. - Divide el espacio de fase en regiones con diferentes tipos de comportamientos dinámicos.

Definición 2.3.5. Si $\gamma(t)$ es una curva solución del sistema, y si $\gamma(t) \rightarrow x_1$ cuando $t \rightarrow -\infty$ y $\gamma(t) \rightarrow x_2$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde x_1 y x_2 son puntos fijos (equilibrios), entonces $\gamma(t)$ es una separatriz que conecta x_1 y x_2 .

En resumen, una separatriz es una órbita que demarca la transición entre comportamientos cualitativamente diferentes de las soluciones del sistema dinámico.

2.4. Estabilidad de Lyapunov

Una función real de dos variables $Q(u, v)$ se clasifica de la siguiente manera:

- i) **Definida positiva:** Cuando $Q(0, 0) = 0$ y $Q(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \neq (0, 0)$.
Un ejemplo de función definida positiva es $Q(u, v) = xu^2 + yv^2$ con $x > 0$ y $y > 0$.
- ii) **Semidefinida positiva:** Cuando $Q(0, 0) = 0$ y $Q(u, v) \geq 0$ para todo $(u, v) \neq (0, 0)$.
Ejemplos de funciones semidefinidas positivas son $Q(u, v) = xu^2$ con $x > 0$ y $Q(u, v) = yv^2$ con $y > 0$.
- iii) **Definida negativa:** Cuando $Q(0, 0) = 0$ y $Q(u, v) < 0$ para todo $(u, v) \neq (0, 0)$.
La función $Q(u, v)$ es definida negativa si y solo si $-Q(u, v)$ es definida positiva.
- iv) **Semidefinida negativa:** Cuando $Q(0, 0) = 0$ y $Q(u, v) \leq 0$ para todo $(u, v) \neq (0, 0)$.

Una función $V(u, v)$, definida en una región que incluye el origen y con derivadas parciales de primer orden continuas, se considera una función de Lyapunov si satisface las siguientes condiciones:

a) $V(u, v)$ es definida positiva.

b) La función $V'(u, v) = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot F + \frac{\partial V}{\partial v} \cdot G$ es semidefinida negativa.

Se pueden destacar las siguientes propiedades:

1. Si se cuenta con una función de Lyapunov $V(u, v)$, ello implica que el punto $(0, 0)$ es estable. Además, cuando la derivada $V'(u, v) = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot F + \frac{\partial V}{\partial v} \cdot G$ es definida negativa, se concluye que el punto $(0, 0)$ es asintóticamente estable.
2. Si hay una función $V(u, v)$ que cumple con lo siguiente:
 - a) $V(u, v)$ es una función continua con derivadas parciales de primer orden en una región que contiene el origen;
 - b) $V(0, 0) = 0$, y para cada círculo centrado en $(0, 0)$, existe al menos un punto donde $V(u, v)$ es positiva.
 - c) La expresión $\frac{\partial V}{\partial u} \cdot F + \frac{\partial V}{\partial v} \cdot G$ es definida positiva;
 entonces el punto de equilibrio $(0, 0)$ se considera inestable.

Función de Lyapunov para Sistemas Discretos:

La función de Lyapunov $V(x)$ en sistemas discretos debe cumplir con propiedades específicas, análogas a las de sistemas continuos:

1. No Negatividad: $V(x)$ es siempre no negativa, es decir, $V(x) \geq 0$ para todos los estados x , y $V(x) = 0$ solo en el punto de equilibrio.

2. Decrecimiento o No Crecimiento: La diferencia en el valor de la función de Lyapunov entre dos estados sucesivos, $\Delta V(x) = V(x_{k+1}) - V(x_k)$, debe ser negativa o no positiva en todas partes, excepto en el punto de equilibrio.

Si existe una función de Lyapunov que cumple con estas propiedades, entonces el punto de equilibrio del sistema discreto se considera “estable”. La elección específica de la función de Lyapunov discreta dependerá de la estructura del sistema y de los requisitos para demostrar la estabilidad. Puede seguir siendo cuadrática, basada en energías potenciales generalizadas, o utilizar otras formas adecuadas para el análisis discreto.

Definición 2.4.1. Suponga $L(x_0) = 0$ y $L(x) > 0$, $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$ entonces si $\dot{L} \leq 0$ en $U \setminus \{x_0\}$ entonces x_0 es estable. Además, si $\dot{L} < 0$ en $U \setminus \{x_0\}$ entonces x_0 es asintóticamente estable [3]. La función L se conoce como función de Lyapunov, es decir $L(x_0) = 0$, $L(x) > 0 \forall x \in U \setminus \{x_0\}$, $\dot{L} \leq 0$

Teorema 2.4.2. Teorema de Lyapunov. Sea x_0 un punto de equilibrio de un campo de vectores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde E es un conjunto abierto contenido en $\mathbb{R}^n$, y f es de clase C^1 .

1. Si existe una función de Lyapunov para f en x_0 , entonces x_0 es un punto de equilibrio estable de f .
2. Si existe una función de Lyapunov estricta para f en x_0 , entonces x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable de f .

La prueba del teorema mencionado la puede encontrar en [4].

Corolario: Si x_0 es un punto de mínimo local estricto de la energía potencial de un sistema mecánico conservativo, entonces $(x_0, 0)$ es un punto de equilibrio estable del sistema [4].

Al concluir este capítulo, se estableció una base fundamental para comprender cómo se modelan y analizan los sistemas mediante ecuaciones diferenciales y su representación en el espacio de fase. Esta información ayuda a identificar comportamientos importantes, como puntos de equilibrio y ciclos límite. Con esta base, el siguiente capítulo abordará los sistemas lineales, examinando una variedad de modelos que demuestran su aplicación y facilidad de análisis.

SISTEMAS LINEALES

La historia de los sistemas lineales se remonta a los primeros trabajos en álgebra lineal en el siglo XIX, pero su consolidación como un campo de estudio distintivo se produjo en el siglo XX con el desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos lineales y la ingeniería de control. Estos avances llevaron a la creación de tecnologías revolucionarias y sentaron las bases para aplicaciones modernas en áreas como la comunicación, la electrónica y la inteligencia artificial.

La meta de los sistemas dinámicos lineales es examinar la naturaleza cualitativa o el desarrollo de las soluciones de un sistema, expresado por las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= h_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \frac{du_2}{dt} &= h_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &\vdots \\ \frac{du_n}{dt} &= h_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n)\end{aligned}$$

donde t es la variable independiente, y u_i representa la variable dependiente ($u_i(t)$), con $i = 1, 2, \dots, n$.

3.1. Sistemas lineales planos

Los sistemas lineales, describen aproximaciones lineales alrededor de puntos de equilibrio, ofrecen una simplicidad matemática que facilita el análisis cualitativo y cuantitativo, así como la aplicación de métodos algebraicos y geométricos para determinar propiedades clave, como la estabilidad y las trayectorias del sistema.

Un sistema autónomo en el plano se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{du}{dt} = F(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = G(u, v) \quad (3.1)$$

donde F y G son funciones continuas con derivadas parciales de primer orden en todo el plano, lo que implica que F y G pertenecen a la clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Estas condiciones garantizan la existencia y unicidad de las soluciones para u y v en todo $t \in \mathbb{R}$ con respecto al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u, v), & \text{con } u(t_0) = u_0 \\ \frac{dv}{dt} = G(u, v), & \text{con } v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}$. Este sistema se denomina autónomo, ya que la variable independiente t no aparece directamente en el segundo miembro de las ecuaciones.

Propiedad 1. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\frac{dx}{dt} = A\vec{x}$, donde a , b , c y d son números reales, entonces

- Si $\det(A) \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de equilibrio de $\frac{dx}{dt}$
- Si $\det(A) = 0$, entonces las soluciones de equilibrio de $\frac{dx}{dt}$ son una línea recta. Pero si $a \neq 0$, entonces la línea recta de puntos de equilibrio de $\frac{dx}{dt}$ satisface la siguiente relación:

$$x = \frac{-b}{a}y$$

Definición 3.1.1. Se dice que una solución $x(t)$ de un sistema autónomo $\frac{dx}{dt} = \varphi(x)$ para todo $t \geq 0$ es estable si la solución comienza desde $x(0)$ y permanece cerca de $x(t)$ para todo $t > 0$; si existe al menos una solución que comienza cerca de $x(0)$ pero no permanece en $x(t)$ para todo $t > 0$, entonces es inestable [3].

Propiedad 2. Si λ es un valor propio de A , con $AV = \lambda V$ para $V \neq 0$, entonces $x(t) = e^{\lambda t}V$ es solución de $\frac{dx}{dt}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (e^{\lambda t}(v_1, v_2))' \\ &= (e^{\lambda t}v_1, e^{\lambda t}v_2)' \\ &= (\lambda e^{\lambda t}v_1, \lambda e^{\lambda t}v_2) \\ &= (\lambda e^{\lambda t}(v_1, v_2)) \\ &= \lambda e^{\lambda t}V, \end{aligned}$$

luego, $\lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}\lambda V = e^{\lambda t}AV = A(e^{\lambda t}V) = A\vec{x}$.

Por tanto $x(t) = A\vec{x}$ es solución de $\frac{dx}{dt}$. □

Teorema 3.1.2. Para un sistema lineal plano $\frac{dx}{dt} = Ax$, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones con vectores iniciales linealmente independientes $x_1(0)$ y $x_2(0)$ [6], la única solución que satisface la condición inicial $x(0) = \alpha x_1(0) + \beta x_2(0)$ es

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t).$$

Demostración. $\frac{dx}{dt} = A\vec{x}$ cumple el teorema de existencia y unicidad, ya que garantiza la existencia de una única solución que satisface ciertas condiciones iniciales, en este caso, la condición inicial $x(0) = \alpha x_1(0) + \beta x_2(0)$ por hipótesis, entonces $x_0 \in \mathbb{R}^2 / \exists! \alpha \wedge \beta$ tales que $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$, con v_1, v_2 base de $\mathbb{R}^2$. Considere

$$\bar{x} = \alpha x_1 + \beta x_2$$

1. ¿ $\bar{x}$ es solución?

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \alpha \frac{dx_1}{dt} + \beta \frac{dx_2}{dt} \\ &= \alpha Ay_1 + \beta Ay_2 \\ &= A(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= A\bar{x}, \end{aligned}$$

2. Se evalúa cuando $t = 0$, $\bar{x}(0) = \alpha v_1 + \beta v_2 = x_0$,

$\therefore \bar{x}$ es solución.

□

Definición 3.1.3. (Principio de linealización)

Para un sistema plano $\frac{dx}{dt} = A\vec{x}$, se supone que existen x_1 y x_2 soluciones del sistema con $\{x_1(0), x_2(0)\}$ linealmente independientes, entonces $\{x_1, x_2\}$ es una base para las soluciones de $\frac{dx}{dt} = A\vec{x}$ [5].

3.1.1. Retrato de fase de sistemas planos

Con base en el Principio de Linealidad mencionado anteriormente 3.1.3, se puede calcular la solución general de cualquier sistema plano. Aunque hay una cantidad aparentemente infinita de casos diferentes, se observará que estos abarcan, en su forma más básica, casi todas las variedades de soluciones que se encontrarán en situaciones de dimensiones superiores.

Los sistemas planos se pueden “ver” como un sistema cuya matriz es una de las siguientes formas,

$$1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

se estudiará el retrato de fase de sistemas de la forma $\frac{dx}{dt} = Ax$ para $A = 1), 2), 3)$.

Valores propios reales distintos.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \implies \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x,$$

hallando la solución de este sistema, sea $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, ahora se deben encontrar los vectores propios, con la ecuación $Av = \lambda v$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} v = \lambda v \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_2 v_2 \end{pmatrix},$$

si $v_2 = 0$ entonces $Av = \lambda_1 v$

si $v_1 = 0$ entonces $Av = \lambda_2 v$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces por la propiedad 2 $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones.

Suponiendo que $\lambda_i \neq 0$ hay tres casos a considerar:

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Dado que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, se designa a λ_1 como el valor propio más fuerte y a λ_2 como el valor propio más débil. En este caso específico, esto se debe a que las coordenadas x de las soluciones convergen hacia 0 mucho más rápidamente que las coordenadas t . Esto explica por qué las soluciones (excepto aquellas en la línea correspondiente al valor propio de λ_1) tienden a “abrazar” la solución en línea recta correspondiente al valor propio más débil a medida que se acercan al origen. El retrato de fase para este sistema se muestra en la figura 3.1a. En esta situación, el punto de equilibrio se denomina sumidero.

- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Se puede considerar el campo vectorial como el opuesto al ítem anterior. La solución general y el retrato de fase permanecen iguales, con la única diferencia de que ahora todas las soluciones se alejan de $(0, 0)$ a lo largo de las mismas trayectorias, ver la figura 3.1b

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Dado que λ_1 es un valor propio negativo, las soluciones que siguen líneas rectas de la forma $\alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se encuentran en el eje x y convergen hacia el origen $(0, 0)$ a medida que $t \rightarrow \infty$. Esta dirección se conoce como la línea estable.

Por otro lado, dado que λ_2 es un valor propio positivo, las soluciones $\beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ siguen el eje y y se alejan del origen $(0, 0)$ a medida que $t \rightarrow \infty$; esto se denomina la línea inestable. Todas las demás soluciones (con $\alpha, \beta \neq 0$) divergen hacia el infinito en la dirección de la línea inestable a medida que $t \rightarrow \infty$, ya que $X(t)$ se acerca cada vez más a $(0, \beta e^{\lambda_2 t})$ conforme t aumenta. En el tiempo inverso, estas soluciones divergen hacia el infinito en la dirección de la línea estable. En la figura 3.1c se ha trazado el retrato de fase de este sistema. El punto de equilibrio de un sistema de este tipo (con valores propios que cumplen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) recibe el nombre de punto de silla [6].

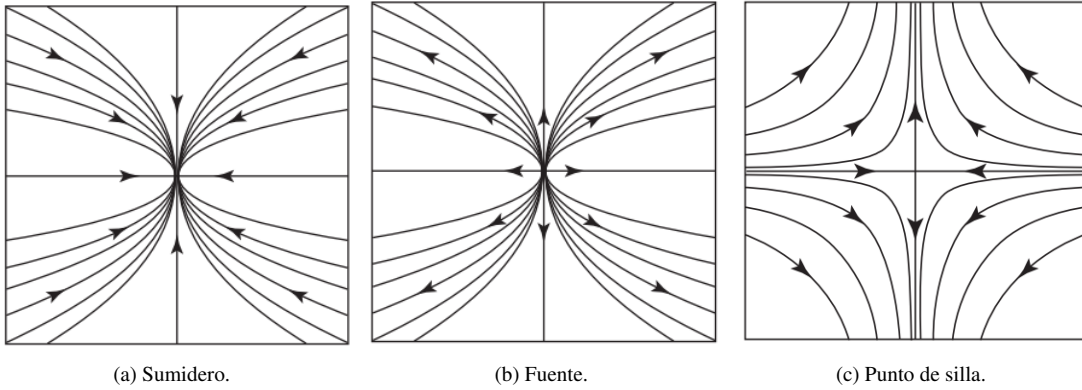


Figura 3.1: Valores propios reales distintos. Fuente [6]

Ejemplo 3.1.4.

Consideremos el sistema $\frac{dx}{dt} = Ax$, donde A es la matriz $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con valores propios reales distintos -2 y -1 .

Para encontrar las soluciones, primero se hallan los vectores propios v tales que $Av = \lambda v$.

Para $\lambda_1 = -2$, se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

,

y para $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

.

Por lo tanto, las soluciones son $x_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Caso 1: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Suponga que $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$. En este caso, las soluciones (excepto aquellas en la dirección de λ_1) tienden a abrazar la solución en línea recta correspondiente a λ_2 a medida que se acercan al origen. El punto de equilibrio en el origen es un sumidero estable.

Caso 2: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Considere ahora el sistema con $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$. Aquí, todas las soluciones se alejan de $(0, 0)$ a lo largo de las mismas trayectorias, pero en direcciones opuestas a las del sumidero. El punto de equilibrio en el origen es un sumidero inestable.

Caso 3: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Para este caso, tome $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$ nuevamente. Las soluciones en la dirección de λ_1 convergen hacia el origen, mientras que las soluciones en la dirección de λ_2 se alejan del origen. Las demás soluciones divergen hacia el infinito en la dirección de λ_2 a medida que $t \rightarrow \infty$, y hacia el infinito en la dirección de λ_1 a medida que $t \rightarrow -\infty$.

Valores propios complejos.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Para esta situación hay dos casos:

- Cuando $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ entonces

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \beta \\ -\beta & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \beta^2$$

donde los valores propios son: $\lambda = \pm i\beta$.

$$x_1(t) = e^{i\beta t} v_1, \text{ vector propio asociado a } i\beta$$

$$v_1 = (1, i) \implies x_1(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ es una solución del sistema.}$$

Si se analiza la solución $x_1(t)$, se puede deducir que $Re\ x_1(t)$ y $Im\ x_1(t)$ son soluciones de x' , entonces

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{pmatrix} e^{i\beta t} \\ ie^{i\beta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \\ i(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) + i\cos(\beta t) \end{pmatrix} \\ x_1(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix}}_{Re\ x_1(t)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{Im\ x_1(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\sin(\beta t)\beta \\ -\cos(\beta t)\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix},$$

por esto $Re\ x_1(t)$ es solución. Análogamente para $Im\ x_1(t)$ que también es solución, entonces

$$Re\ x_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Im\ x_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como $\{Re\ x_1, Im\ x_1\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ por el principio de linealidad,

$x(t) = aRe\ \frac{dx}{dt} + bIm\ \frac{dx}{dt}$ es la solución general del sistema. El retrato de fase muestra que todas las soluciones yacen en círculos centrados en el origen. Estos círculos se recorren en dirección de las manecillas del reloj si $\beta > 0$, como en la figura 3.2a, este tipo de sistema se denomina un centro y en sentido contrario si $\beta < 0$.

- Cuando $\alpha, \beta \neq 0$, entonces los valores propios son $\alpha \pm i\beta$, se obtiene una solución $x_1(t)$ tal que

$$x_1(t) = Re\ x_1(t) + iIm\ x_1(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + ie^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Sin el término $e^{\alpha t}$, estas soluciones se moverían periódicamente alrededor de círculos centrados en el origen. El término $e^{\alpha t}$ convierte las soluciones en espirales que pueden dirigirse hacia el origen (cuando $\alpha < 0$) el punto de equilibrio se denomina sumidero en espiral como en la figura 3.2b o alejarse del origen ($\alpha > 0$) el punto de equilibrio se denomina fuente en espiral, como en la figura 3.2c.

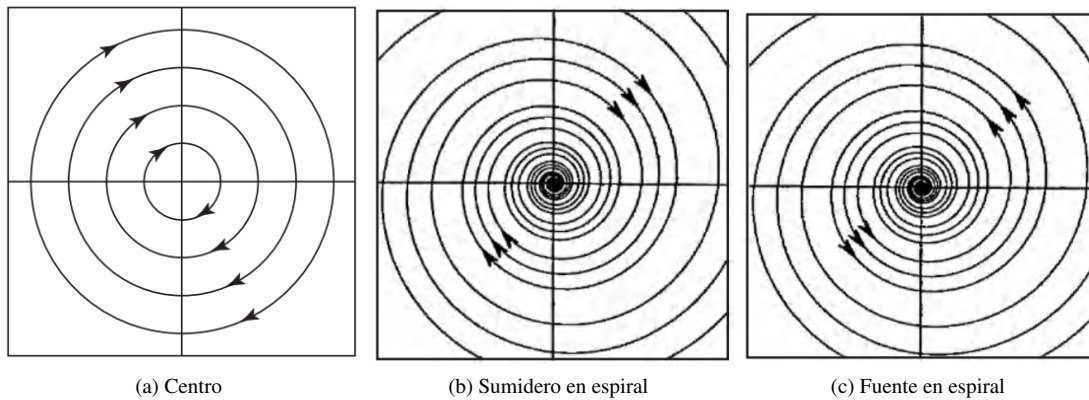


Figura 3.2: Valores propios complejos. Fuente [6]

Ejemplo 3.1.5.

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la solución, primero se necesita encontrar los valores propios y los vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios se obtienen resolviendo la ecuación característica

$$\left| \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

, lo que da $(2 - \lambda)^2 + 1 = 0$, que tiene soluciones $\lambda = 2 \pm i$.

Para encontrar los vectores propios asociados, se resuelve

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - (2 \pm i)I \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así los vectores propios son $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{(2-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Dado que los valores propios tienen parte real positiva, la solución describe una espiral que se aleja del origen conforme t aumenta. Esto se debe a que la parte real del valor propio positivo α provoca una expansión o contracción exponencial, mientras que la parte imaginaria β induce una rotación. En este caso, la espiral se aleja del origen en sentido antihorario.

Valores propios repetidos.

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

los valores propios de esta matriz son $\alpha_{1,2} = \lambda$ y la forma de los vectores propios es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, por la propiedad 2 $x_1(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución del sistema.

Si w es un vector propio asociado a λ con $\left\{ w, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ linealmente independiente, entonces $x_1(t)$ y $x_2(t) = e^{\lambda t} w$, cumplen el principio de linealidad.

Sin embargo, para C no hay un vector propio w asociado a λ tal que λ con $\left\{ w, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sea linealmente independiente. Para encontrar otra solución, note que el sistema puede ser escrito

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x + y \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y \end{cases}$$

Analizando estas dos nuevas ecuaciones se tiene

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y \implies y = e^{\lambda t},$$

reemplazando y en la primera ecuación, se sigue

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + e^{\lambda t} \implies \frac{dx}{dt} + (-\lambda)x = e^{\lambda t} \implies x(t) = te^{\lambda t}$$

así, $x_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ es otra solución del sistema.

$\{x_1, x_2\}$ es base de las soluciones?

$$x_1(0) = e^{\lambda 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(0) = \begin{pmatrix} 0e^{\lambda 0} \\ e^{\lambda 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si es base por el principio de linealidad

$$\implies x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Cuando λ es negativo, cada componente de la solución tiende a cero a medida que t crece infinitamente como en la figura 3.3. Esto es evidente al analizar los términos $\alpha e^{\lambda t}$ y $\beta e^{\lambda t}$. Para el término $\beta t e^{\lambda t}$, esta tendencia hacia cero es una consecuencia directa de la regla de l'Hôpital. En consecuencia, todas las soluciones convergen hacia el punto $(0, 0)$ a medida que t se aproxima al infinito. En cambio, cuando λ es positivo, todas las soluciones se alejan de $(0, 0)$.

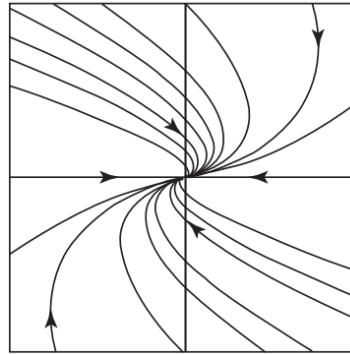


Figura 3.3: Valores propios repetidos. Fuente [6]

Ejemplo 3.1.6.

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado por $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Para encontrar la solución, primero se encuentran los valores propios y los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Los valores propios se obtienen resolviendo la ecuación característica

$$\left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

lo que da $(2-\lambda)^2 = 0$, con solución $\lambda = 2$.

Los vectores propios asociados se obtienen resolviendo

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2I \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que resulta en el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 t e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el valor propio es repetido, se busca otra solución linealmente independiente. Para esto, se analizan las ecuaciones diferenciales separadas para x_1 y x_2 . Se encuentra que una solución adicional es $x_2(t) = e^{2t}$. Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 t e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Clasificación de sistemas planos

Se dará una clasificación geométrica y dinámica de los sistemas $\frac{dx}{dt} = Ax$, con A matriz 2×2

Clasificación de tipo geométrico.

Plano traza - determinante, los puntos en este plano van a representar los sistemas, suponga

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde a , b , c , y d son números reales, se quiere clasificar el sistema $\frac{dx}{dt}$ a través de la traza de A y el determinante de A . El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \\ \implies \lambda_{1,2} &= \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2} \end{aligned}$$

si se toma $T = \text{tr}(A)$ y $D = \det(A)$, entonces el signo de $(T^2 - 4D)$ determina el retrato de fase del sistema

1. Si $T^2 - 4D > 0 \implies$ tiene dos valores propios reales y diferentes.
2. Si $T^2 - 4D = 0 \implies$ tiene un valor propio repetido.
3. Si $T^2 - 4D < 0 \implies$ tiene valores propios complejos.

La relación entre los puntos (T, D) y la parábola $T^2 - 4D = 0$ en el plano TD proporciona información esencial sobre los valores propios de A desde un punto de vista algebraico. En términos de retratos de fase, esta relación permite hacer afirmaciones adicionales. Cuando $T^2 - 4D < 0$, la parte real de los valores propios se traduce en:

1. Sumidero en espiral si $T < 0$
2. Fuente en espiral si $T > 0$
3. Un centro si $T = 0$

En el caso de $T^2 - 4D > 0$, también se puede realizar una descomposición similar en casos. En esta situación, los valores propios son números reales. Si $D < 0$, esto implica la presencia de un punto de silla. Este resultado se debe a que D es el producto de los valores propios, y uno de ellos debe ser positivo mientras que el otro es negativo. En resumen, cuando $D < 0$, se cumple la condición $T^2 < T^2 - 4D$.

- La expresión $\pm T < \sqrt{T^2 - 4D}$ implica que ambos valores propios (soluciones características) de la matriz A son reales y tienen signos opuestos, es decir, uno es positivo y el otro es negativo.
- Si $D > 0$ y $T < 0$, ambos valores propios son negativos, indicando la presencia de un comportamiento tipo sumidero en el sistema.
- Si $T > 0$ y $D > 0$, ambos valores propios son positivos, sugiriendo un comportamiento tipo fuente.
- Cuando $D = 0$ y $T \neq 0$, tenemos un valor propio igual a cero y otro no nulo, lo que significa que hay una dirección en la que el sistema no cambia con el tiempo.
- Si $D = T = 0$, ambos valores propios son cero, indicando que el sistema está en equilibrio sin cambios en ninguna dirección.

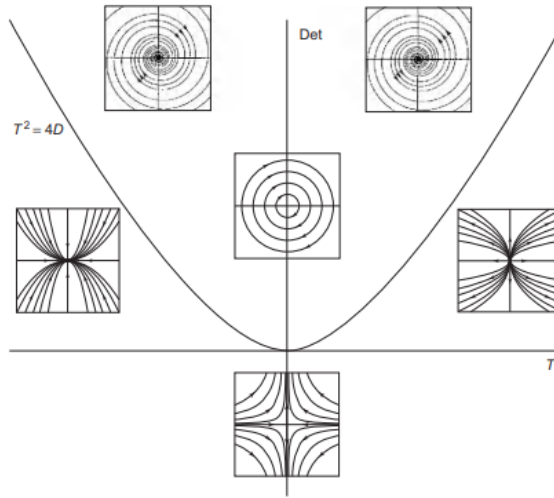


Figura 3.4: Clasificación geométrica. Fuente [9]

Al representar gráficamente la información de un sistema lineal en el plano TD (traza-determinante), se obtiene una clasificación visual de sus comportamientos en la figura 3.4. Las ecuaciones dividen el plano en regiones asociadas con tipos específicos de sistemas. Aunque el plano es bidimensional, representa un espacio de cuatro dimensiones debido a las matrices 2×2 . Cada punto puede corresponder a matrices distintas con la misma configuración de valores propios, lo que puede afectar sutilmente los retratos de fase. El plano TD se interpreta como un equivalente al diagrama de bifurcación para sistemas bidimensionales. También se destaca que se puede obtener información sobre el sistema observando los valores de D y T sin calcular los valores propios.

Ejemplo 3.1.7.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la matriz A , la traza T y el determinante D están dados por $T = 2$ y $D = 1$, respectivamente. Entonces, el polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right) = (1 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Los valores propios de A se obtienen al igualar el polinomio característico a cero:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, lo que indica que el sistema tiene un único valor propio repetido. Ahora, se encontrará el vector propio asociado y el vector propio generalizado.

1. Vector propio asociado:

Para $\lambda = 1$, resolvemos $(A - I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 & 1 \\ 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto da la ecuación $v_2 = 0$. Por lo tanto, cualquier vector de la forma $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado.

2. Vector propio generalizado:

Un vector w tal que $(A - I)w = v$:

$$(A - I)w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $w_2 = 1$ y w_1 puede ser cualquier valor. Considere $w_1 = 0$ por simplicidad, así que $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales $\frac{dx}{dt} = Ax$ es

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Simplificando, se obtiene

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esta solución muestra que, independientemente de las condiciones iniciales, el sistema evoluciona en el tiempo con una combinación de dos términos exponenciales. El primer término $c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ crece exponencialmente a medida que t aumenta, mientras que el segundo término $c_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ también crece exponencialmente pero incluye un término lineal en t .

El término $c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representa una solución que se dirige exponencialmente en la dirección del vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mientras que el término $c_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ indica que hay un componente adicional que crece linealmente en el tiempo en la dirección del vector propio generalizado $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con una perturbación en la dirección de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dado que el valor propio repetido indica que hay solo una dirección principal en el espacio de fase, el sistema no tiene un comportamiento de espiral o de centro, sino que la solución se compone de una dirección principal con una perturbación lineal creciente en el tiempo.

Definición 3.1.8. Homeomorfismo: Sea $f : S \rightarrow T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T) . Supongamos también que f es uno a uno en S , de modo que la función inversa f^{-1} existe. Si f es continua sobre S y f^{-1} es continua sobre $f(S)$ entonces f es un homeomorfismo y los espacios métricos (S, d_S) y $(f(S), d_T)$ se llaman homeomorfos [2].

Definición 3.1.9. Clasificación dinámica.

Dos sistemas lineales planos $\frac{dx}{dt} = Ax$, $\frac{dy}{dt} = By$ con flujos ϕ^A y ϕ^B respectivamente, se llama topológicamente conjugados (o equivalentes) [6], si existe una función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

1. h es un homeomorfismo.
2. $h(\phi_t^A(x)) = \phi_t^B(h(x))$

3.2. Modelo de relaciones románticas

Con el objetivo de suscitar interés en la clasificación de sistemas lineales, se explora ahora un modelo simple que representa la dinámica de las relaciones románticas. La siguiente historia ilustra esta idea.

Suponga a Carlos, quien se encuentra enamorado de Sofía. Sin embargo, en esta versión de la historia, Sofía es una persona voluble en sus sentimientos. A medida que Carlos intensifica su afecto, Sofía siente la necesidad de alejarse y ocultarse. Pero cuando Carlos se desanima y retrocede, Sofía comienza a encontrarlo extrañamente atractivo [12].

Se define:

$C(t)$ = Afecto/desafecto de Carlos por Sofía en el tiempo t

$S(t)$ = Afecto/desafecto de Sofía por Carlos en el tiempo t .

Valores positivos de $C(t)$ y $S(t)$ representan afecto o amor, mientras que valores negativos indican desafecto u odio. Entonces, un modelo para su romance complicado es:

$$\frac{dC}{dt} = aS, \quad \frac{dS}{dt} = -dC \quad (3.2)$$

donde los parámetros a y d son positivos, para ser coherentes con la historia.

Al analizar las ecuaciones (3.2), se buscan puntos de equilibrio al establecer ambas derivadas igual a cero:

$$aS = 0, \quad -dC = 0.$$

Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio $(C, 0)$ y $(0, S)$, se examinan las derivadas parciales del sistema alrededor de cada punto. La matriz jacobiana del sistema se forma tomando las derivadas parciales de las ecuaciones con respecto a las variables relevantes.

Considerando el sistema (3.2), primero, se evalúan las derivadas parciales:

$$J(C, S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial C}(aS) & \frac{\partial}{\partial S}(aS) \\ \frac{\partial}{\partial C}(-dC) & \frac{\partial}{\partial S}(-dC) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -d & 0 \end{bmatrix},$$

para el punto de equilibrio $(C, 0)$:

$$J(C, 0) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -d & 0 \end{bmatrix}$$

la ecuación característica es

$$\det(Df - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & a \\ -d & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + ad = 0$$

los valores propios de esta matriz son $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$, indicando que el punto $(C, 0)$ es un centro. Este sistema es inestable si $ad > 0$ y estable si $ad < 0$.

Para el punto de equilibrio $(0, S)$ y para el punto $(0, 0)$; los valores propios también son $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$.

Los tres puntos de equilibrio en el sistema representan estados emocionales específicos en la relación entre Carlos y Sofía. En el punto $(0, 0)$, ambos tienen un nivel de afecto nulo, y la estabilidad sugiere que, en condiciones constantes, la relación permanecerá en este estado neutral. Tanto el punto $(C, 0)$ como el $(0, S)$ reflejan desequilibrios afectivos, donde uno muestra afecto positivo mientras el otro no responde de inmediato de manera positiva. La estabilidad en estos puntos indica que los cambios en el afecto no ocurren de manera inmediata ni recíproca, lo que podría dar lugar a ciclos de interacciones donde el afecto no se devuelve de inmediato, el retrato de fase de este sistema se puede ver en la figura 3.5.

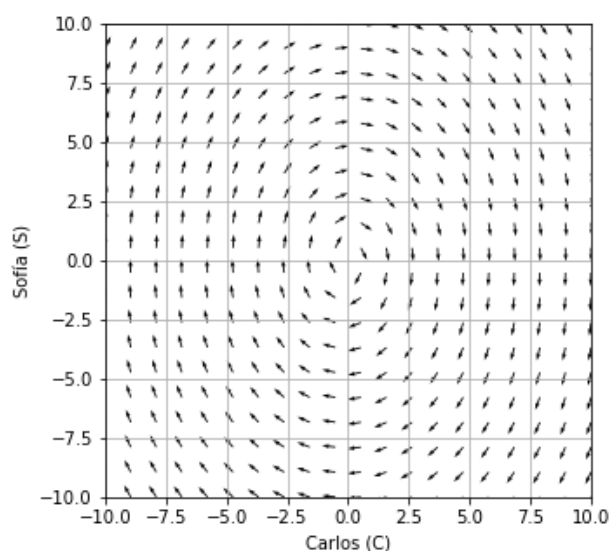


Figura 3.5: Plano de fase de la relación entre Carlos y Sofía. Elaboración propia.

Algorithm 2 Plano de fase de la relación entre Carlos y Sofía.

Entrada: Parámetros, rango de valores de C e S

- 1: Definir las ecuaciones diferenciales $aS, -dC$.
- 2: Crear una malla de los valores de x e y
- 3: Crear un campo de direcciones normalizado

Salida: Gráfico del plano de fase de la relación entre Carlos y Sofía.

Ahora, considere las expectativas para las relaciones sentimentales modeladas por el sistema lineal general

$$\begin{cases} C' = aC + bS \\ S' = cC + dS \end{cases}$$

donde los parámetros a, b, c, d pueden tomar distintos signos. La elección de signos define los estilos románticos. Si se elige $a > 0, b > 0$, esto indica que Carlos adopta una actitud de “entusiasta esperanzado”. Se emociona por el afecto que Sofía le muestra y se siente aún más motivado por sus propios sentimientos cariñosos hacia ella. Resulta intrigante asignar nombres a los otros tres estilos románticos y anticipar los resultados para diversas combinaciones.

Ejemplo 3.2.1. ¿Qué ocurre cuando dos amantes igualmente precavidos, como Carlos y Sofía, deciden estar juntos, considerando la dinámica de su afecto y desafecto descrita en el modelo proporcionado?

El sistema de este modelo es:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= aS + dR \\ \frac{dS}{dt} &= dC + aS\end{aligned}$$

con $a < 0$ y $d > 0$. Aquí, a es una medida de cautela (Carlos y Sofía evitan comprometerse completamente el uno con el otro), mientras que d refleja la receptividad (ambos se emocionan ante los avances del otro). Se podría anticipar que el resultado depende de la relación relativa entre a y d . La matriz asociada a este sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} a & d \\ d & a \end{bmatrix},$$

para analizar la estabilidad del sistema, se examinan los valores propios de la matriz A .

La ecuación característica para A es:

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & d \\ d & a - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)^2 - d^2 = 0,$$

resolviendo esta ecuación característica, se obtienen los valores propios $\lambda_{1,2} = a \pm d$.

y los correspondientes vectores propios para $\lambda_1 = a + d$ y $\lambda_2 = a - d$, son respectivamente

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

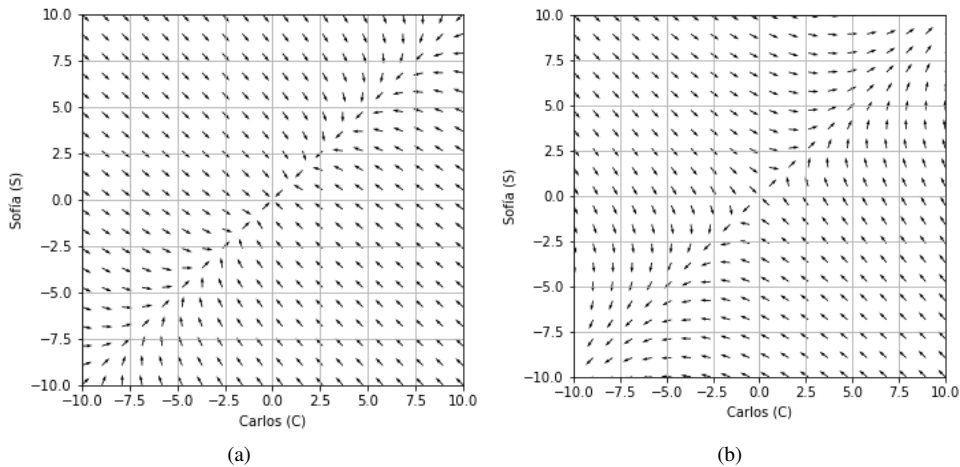


Figura 3.6: Relación. Elaboración propia

El sistema de ecuaciones que modela la relación entre Carlos y Sofía se refleja en el plano de fase. La Figura 3.6a presenta un patrón convergente hacia $(0,0)$, indicando estabilidad, la matriz Jacobiana confirma que este punto de equilibrio es un sumidero, señalando una tendencia a la estabilidad emocional, aunque podría llevar a la indiferencia con precaución excesiva. En cambio, la Figura 3.6b muestra un comportamiento de punto silla con estabilidad e inestabilidad direccional, sugiriendo audacia o sensibilidad entre los amantes. La relación se torna explosiva, acercándose a la línea $C = S$, indicando sentimientos mutuos, ya sea en celebración o conflicto.

Algorithm 3 Plano de fase cuando dos amantes igualmente precavidos, como Carlos y Sofía, deciden estar juntos.

Entrada: Parámetros, rango de valores de C e S

- 1: Definir las ecuaciones diferenciales $aC + dS$, $dC + aS$
- 2: Crear una malla de los valor de x e y
- 3: Crear un campo de direcciones normalizado

Salida: Gráfico del plano de fase.

Al finalizar este capítulo sobre sistemas lineales, se ha demostrado cómo estos modelos permiten un análisis claro y preciso de una variedad de fenómenos mediante soluciones simples y aplicables. Este conocimiento brinda las herramientas necesarias para comprender la dinámica de sistemas más complejos. Para obtener una comprensión más avanzada y completa de los sistemas dinámicos, el siguiente capítulo se centrará en los sistemas no lineales, examinando sus modelos y comportamientos distintivos.

SISTEMAS NO LINEALES

Mientras que los sistemas lineales ofrecen una comprensión útil, la verdadera diversidad y fascinación surgen cuando las relaciones entre las variables no siguen patrones predecibles de modelos lineales. Los sistemas no lineales exhiben comportamientos intrincados, como bifurcaciones, atracción caótica y patrones impredecibles.

Observado la EDO $x' = ax$ cuando $a > 0$, describe un modelo simple de crecimiento poblacional, donde $x(t)$ representa la población en el instante t . La tasa de crecimiento $\frac{dx}{dt}$ es proporcional a la población actual. Sin embargo, esta aproximación no considera limitaciones naturales, como la incapacidad de la población para crecer indefinidamente. Para abordar esta limitación, se pueden incorporar suposiciones adicionales al modelo

1. La tasa de crecimiento poblacional está relacionada de manera proporcional con el tamaño actual de la población.
2. No obstante, si la población experimenta un crecimiento excesivo, la tasa de crecimiento se torna negativa.

Una ecuación diferencial que se ajusta a estas consideraciones es el modelo logístico de crecimiento poblacional, cuya ecuación es:

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right), \quad (4.1)$$

donde, a y N se presentan como parámetros positivos; a refleja el impulso en el crecimiento poblacional en condiciones cuando x es pequeña, al tiempo que N representa una suerte de capacidad poblacional ideal. Asumiendo, sin pérdida de generalidad, a $N = 1$, la ecuación logística se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = f_a(x) = ax(1 - x), \quad (4.2)$$

se trata de una ecuación diferencial no lineal de primer orden, ya que el lado derecho de la ecuación depende únicamente de x , sin referencia al tiempo t . La solución de la ecuación diferencial logística se realiza mediante el método de separación

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt,$$

el procedimiento de descomposición en fracciones parciales posibilita expresar la integral izquierda de la siguiente manera

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

integrar ambos lados y luego resolver para x

$$x(t) = \frac{Pe^{at}}{1 + Pe^{at}}$$

donde P es la constante arbitraria que surge de la integración. Evaluar esta expresión en $t = 0$ y resolver para P da como resultado

$$P = \frac{x(0)}{1 - x(0)}$$

Esta solución es aplicable a cualquier población inicial $x(0)$. Cuando $x(0) = 1$, se obtiene una solución de equilibrio, ya que $x(t)$ se simplifica a $x(t) = 1$. De manera análoga, $x(t) = 0$ representa otra solución de equilibrio. Ahora, ¿para qué valores de x las soluciones de la ecuación son crecientes y decrecientes?

- $\frac{dx}{dt} > 0$ es creciente $\iff ax(1-x) > 0$, esto pasa si:
 - $ax > 0 \wedge (1-x) > 0 \iff x > 0 \wedge 1 > x \implies x \in (0, 1)$
 - $ax < 0 \wedge (1-x) < 0 \iff x < 0 \wedge 1 < x$ pero x no puede ser simultáneamente negativo y mayor que 1, por lo tanto, esta condición no es posible.
- $\frac{dx}{dt} < 0$ es decreciente $\iff ax(1-x) < 0$, esto pasa si:
 - $ax > 0 \wedge (1-x) < 0 \iff x > 0 \wedge 1 < x \implies x \in (1, \infty)$
 - $ax < 0 \wedge (1-x) > 0 \iff x < 0 \wedge 1 > x \implies x \in (-\infty, 0)$

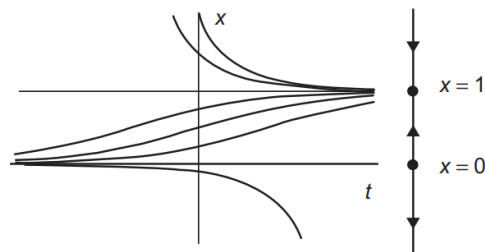


Figura 4.1: Comportamiento asintótico de la ecuación logística. Fuente: [12].

En la figura 4.1 se ilustra el comportamiento de la ecuación logística. En el punto $x = 1$, las soluciones convergen, indicando así un comportamiento de sumidero, mientras que en el punto $x = 0$, las soluciones divergen, caracterizando una fuente. La figura 4.2 presenta el plano de fase de la ecuación logística, donde se observa el comportamiento mencionado anteriormente.

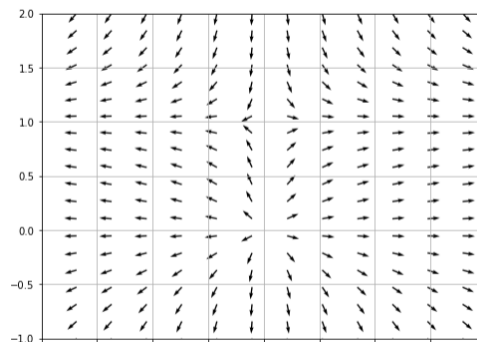


Figura 4.2: Plano de fase de la ecuación logística. Elaboración propia.

Algorithm 4 Plano de fase de la Ecuación logística

Entrada: Rango de valores x e y

- 1: Definir la ecuación $ax(1-x)$.
- 2: Crear una malla de valores para x e y .
- 3: Crear un campo de direcciones normalizado.

Salida: Gráfico del plano de fase

Definición 4.0.1. Una manera de expresar e^{Ht} es mediante la representación de series de potencias:

$$e^{Ht} = 1 + Ht + \frac{H^2 t^2}{2!} + \frac{H^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k t^k}{k!}$$

donde H es una matriz

$$e^{Ht} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Ht + \frac{H^2 t^2}{2!} + \frac{H^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k t^k}{k!}.$$

Ejemplo 4.0.2.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!}$$

Solución:

$$\begin{aligned} e^H &= e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{H^0}{0!} + \frac{H^1}{1!} + \frac{H^2}{2!} + \frac{H^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{6} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & * \\ 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ahora, ¿qué es *?:

$$* = \frac{2k}{k!} = \frac{2k}{k(k-1)!} = \frac{2}{(k-1)!} \Rightarrow 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}$$

si $j = k - 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} &= 2e \\ \therefore \begin{pmatrix} e & 2e \\ 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición 4.0.3. Se define la matriz exponencial de H como la matriz

$$\exp(H) = e^H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!}$$

Teorema 4.0.4. Sea $H \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Hx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

entonces $x(t) = \exp(tH)x_0$ es la única solución de (4.3), [12].

Demostración. Hay que demostrar que $x(t)$ es solución y es única.

1. Es solución

- $x'(t) = (\exp(tH)x_0)' = (\exp(tH))'x_0 = H\exp(tH)x_0 = Hx_0$
- $x(0) = \exp(0)x_0 = Idx_0 = x_0$

2. Unicidad

Suponga que existe otra solución del sistema $z(t) = \exp(-tA)\tilde{x}(t)$ con $\tilde{x}$ solución de (4.3)

$$z'(t) = 0 \implies \begin{aligned} z(t) &= \text{constante} (= x_0) \\ z(0) &= x_0 \end{aligned}$$

$$x_0 = \exp(-tA)\tilde{x}(t) = [\exp(tA)]^{-1}\tilde{x}(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \exp(tA)x_0$$

$\therefore x(t)$ es la única solución.

□

Definición 4.0.5. La ecuación lineal no autónoma $V' = A(t)V$ se conoce como la ecuación variacional a lo largo de $x(t)$ [4]. La ecuación variacional siempre tiene solución, es única y su forma de resolver es:

- Se considera $f \in C^1$, $A(t) = D_{x(t)}$ continua.
- Un sistema no lineal $\frac{dx}{dt} = f(x)$ es convertido en uno lineal $\frac{du}{dt} = A(t)u$, por el siguiente teorema.

Teorema 4.0.6. Sea $\frac{dy}{dt} = g(y)$ y $y(s)$ una solución que satisface $y(s) = y_0$ definida en $[c, d]$. Sea $v(t, v_0)$ la solución de la ecuación variacional sobre $y(t)$ tal que $v(s, v_0) = v_0$. Entonces:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(v_0) = D_{\psi t}(y_0)v_0 = v(t, v_0)$$

Ejemplo 4.0.7. Considere $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $f(x, y) = (x + y^2, -y)$

- Encontrar la solución de equilibrio.
- Resolver la ecuación variacional a lo largo de las soluciones de equilibrio.
- Encontrar la solución de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ que esté aproximada por las soluciones.

Solución:

- $x(t) = (0, 0)$

- $u' = A(t)u = D_x f(u)$

$$Df_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ El jacobiano evaluado en } (0, 0) \text{ es solución de equilibrio.}$$

- $u' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u$, $u(t) = (x_0 e^{At}, y_0 e^{At})$

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t} = e^{\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}} = 1 + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix}}{2} + \frac{\begin{bmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & -t^3 \end{bmatrix}}{6} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} t^k & 0 \\ 0 & -t^k \end{bmatrix}}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto, } u(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} u_0.$$

Considerando la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = F_a(x)$, donde a es un parámetro real, se recuerda que una bifurcación ocurre cuando hay un cambio **significativo** en la estructura de las soluciones del sistema a medida que varía. Si x_0 es un punto de equilibrio con $f_0(x_0) = 0$ y $f'_a(x_0) \neq 0$, entonces, cuando a cambia localmente cerca de x_0 , la ecuación $\frac{dx}{dt} = f_{a+\epsilon}$ presenta un punto de equilibrio $x_0(\epsilon)$ que varía de manera continua con ϵ pequeño.

Teorema 4.0.8. Suponga $\frac{dx}{dt} = f_a(x)$ es una ecuación diferencial de primer orden, para la cual:

1. $f_{a_0}(x_0) = 0$
2. $f'_{a_0}(x_0) = 0$
3. $f''_{a_0}(x_0) \neq 0$
4. $\frac{\partial f_{a_0}}{\partial a(x_0)} \neq 0$

entonces esta ecuación diferencial sufre una bifurcación del nodo silla en $a = a_0$.

La prueba del teorema mencionado la puede encontrar en [6].

Definición 4.0.9. Un punto x_0 de equilibrio para $x' = F(x)$ (es decir, $F(x_0) = 0$) se llama **hiperbólico** si todos los valores propios de Df_{x_0} tiene parte real no nula [13].

Teorema 4.0.10. Teorema de linealización.

Si x_0 es un punto hiperbólico de $x' = F(x)$, entonces existe una vecindad de x_0 tal que el flujo del sistema no lineal es conjugado al flujo del sistema linealizado en x_0 .

La prueba del teorema mencionado la puede encontrar en [4].

Definición 4.0.11. Un punto de equilibrio se llama **elíptico** si todas las soluciones cercanas al punto describen trayectorias cerradas en el espacio de fase. Estas trayectorias cerradas pueden tener la forma de elipses o círculos.

Para que un punto de equilibrio sea elíptico, los valores propios (autovalores) de la matriz jacobiana del sistema linealizado en dicho punto de equilibrio deben ser **números complejos con parte real negativa**. Específicamente, si los autovalores son de la forma $\lambda = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha < 0$ y $\beta \neq 0$, las soluciones describirán trayectorias cerradas alrededor del punto de equilibrio en el espacio de fase, indicando un comportamiento elíptico. En resumen:

- Los autovalores deben ser complejos conjugados.
- La parte real de los autovalores debe ser negativa (para la estabilidad del punto de equilibrio).
- La parte imaginaria debe ser distinta de cero (para asegurar la periodicidad de las trayectorias).

Definición 4.0.12. Un punto de equilibrio se llama **hiperbólico** si las soluciones cercanas al punto divergen o convergen exponencialmente, y no describen trayectorias cerradas en el espacio de fase.

Para que un punto de equilibrio sea hiperbólico, los valores propios (autovalores) de la matriz jacobiana del sistema linealizado en dicho punto de equilibrio deben tener **parte real distinta de cero**. Específicamente, si los autovalores son de la forma $\lambda = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha \neq 0$, las soluciones no describirán trayectorias cerradas alrededor del punto de equilibrio. En resumen:

- Los autovalores deben tener parte real distinta de cero.
- Si los autovalores son reales, deben tener signos opuestos (para un punto silla).
- Si los autovalores son complejos, su parte real debe ser distinta de cero (para una espiral atractora o repulsora).

4.1. Bifurcaciones

Las bifurcaciones proporcionan un marco conceptual para comprender las transiciones, inestabilidades y patrones emergentes en una amplia gama de fenómenos. La historia de las bifurcaciones tiene raíces profundas en la

matemática y la física, desde las contribuciones de Poincaré en el cambio cualitativo de sistemas dinámicos hasta los desarrollos modernos en teoría del caos.

Cuando hay un cambio pequeño en el valor de un parámetro del sistema que da un repentino cambio cualitativo o topológico en su comportamiento se llama bifurcación, pueden ocurrir tanto en sistemas continuos como en discretos. El diagrama de bifurcación es la unión de las líneas de fase de cada solución del sistema.

4.1.1. Tipos de bifurcación

Las bifurcaciones temporales, también llamadas nodos silla, representan la forma más básica de cambio en la creación y destrucción de puntos de equilibrio. Ajustando los parámetros, el sistema transita desde la falta de puntos de equilibrio hacia la aparición de dos (uno estable y otro inestable), o viceversa. Este fenómeno destaca cómo pequeñas variaciones en los parámetros pueden tener un impacto considerable en la estabilidad del sistema.

En la bifurcación transcítica, no se produce la creación ni la eliminación de puntos de equilibrio. En su lugar, al ajustar el parámetro, dos puntos de equilibrio chocan entre sí y cambian su estabilidad. Es decir, el punto de equilibrio que inicialmente era estable se vuelve inestable, y viceversa, sin que se agreguen o eliminen puntos en el sistema [10].

Ejemplo 4.1.1. Considerando la ecuación logística (4.2), se realiza un análisis que tiene en cuenta la presencia de un parámetro. Este parámetro influye en la cantidad y la naturaleza de las soluciones de equilibrio de la ecuación,

$$x' = ax(1 - x) - h, \quad h \in \mathbb{R}, \quad \text{si } a = 1$$

$$\implies f_h(x) = x' = x(1 - x) - h$$

una forma de analizar la ecuación a medida que cambia el parámetro h , es hacer la línea de fase para un h fijo y luego empezar a analizar como cambia la línea de fase cuando va cambiando el parámetro h .

Ahora, hallando las soluciones de equilibrio

$$x' = x^2 + x - h = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(-h)}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4h}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4h}}{2}$$

La función tiene dos raíces reales cuando $0 \leq h < \frac{1}{4}$, una raíz cuando $h = \frac{1}{4}$ y ninguna raíz si $h > \frac{1}{4}$. Como consecuencia, la ecuación diferencial tiene dos puntos de equilibrio, x_1 y x_2 , con $0 \leq x_1 < x_2$ cuando $0 < h < \frac{1}{4}$. Si $f'_h(x_1) > 0$ entonces x_1 es una fuente, y $f'_h(x_2) < 0$, por lo que x_2 es un sumidero.

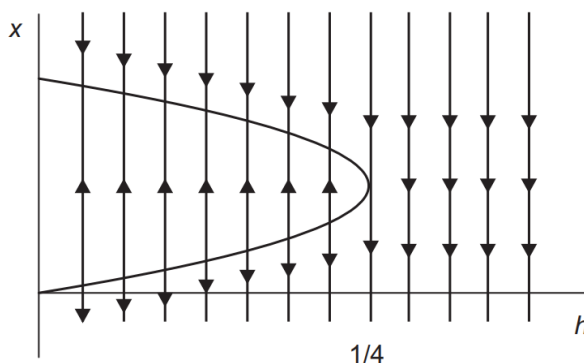


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación. Fuente: [6].

Todas las soluciones de la ecuación diferencial disminuyen hacia $-\infty$ a medida que pasa el tiempo, se registra esto visualmente en el diagrama de bifurcación. En la figura 4.3, se traza el parámetro h horizontalmente. La curva en esta imagen representa los puntos de equilibrio para cada valor de h . Esto proporciona otra perspectiva de cómo el sumidero y la fuente se fusionan en un solo punto de equilibrio y luego desaparecen a medida que h atraviesa $\frac{1}{4}$.

4.2. Caos

4.2.1. Ecuaciones de Lorenz

Definición 4.2.1. El sistema de Lorenz es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento de un modelo simplificado de la atmósfera terrestre en términos de convección atmosférica. El sistema fue propuesto por Edward Lorenz en 1963 y es conocido como las “Ecuaciones de Lorenz”. Estas ecuaciones son:

$$u' = \alpha(v - u) \quad (4.4)$$

$$v' = \rho u - v - uz \quad (4.5)$$

$$w' = uv - \beta w \quad (4.6)$$

con $\alpha, \rho, \beta > 0$ parámetros y u, v, w variables que representan el estado del sistema. Estas ecuaciones capturan la dinámica caótica del sistema atmosférico simulado [12].

Es importante destacar que el sistema de Lorenz es conocido por exhibir comportamiento caótico, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a resultados completamente diferentes a lo largo del tiempo. Este fenómeno se conoce como la “sensibilidad a las condiciones iniciales” y es una característica fundamental de los sistemas dinámicos caóticos. El análisis de los puntos de equilibrio proporciona información sobre la complejidad y la imprevisibilidad del sistema a lo largo del tiempo. La presencia de puntos de equilibrio estables o inestables influye en cómo las trayectorias del sistema evolucionan y si exhiben comportamiento caótico.

Ejemplo 4.2.2. Para encontrar los puntos de equilibrio de las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6), se igualan las derivadas a cero:

1. Para $\frac{du}{dt} = \alpha(v - u) = 0$, se tiene $v = u$.
2. $\frac{dv}{dt} = u(\rho - w) - v = 0$.
3. $\frac{dw}{dt} = uv - \beta w = 0$.

Se sustituyen estas relaciones en las ecuaciones originales (4.4), (4.5), (4.6):

Utilizando $v = u$ queda:

$$\alpha(v - u) = \alpha(0) = 0 \quad (4.7)$$

$$u(\rho - w) - v = u(\rho - w) - u = u(\rho - w - 1) = 0 \quad (4.8)$$

$$uv - \beta w = u^2 - \beta w = 0 \quad (4.9)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los puntos de equilibrio:

De (4.8) se tiene que:

$$u = 0 \text{ o } \rho - w - 1 = 0$$

Si $u = 0$ entonces reemplazando en (4.9) $w = 0$,

Si $\rho - w - 1 = 0$ entonces $w = \rho - 1$ y sustituyendo en (4.9) queda:

$$u^2 - \beta w = u^2 - \beta(\rho - 1) = 0$$

Resolviendo:

$$u_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{4\beta(\rho - 1)}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{\beta(\rho - 1)}}{2}$$

$$\implies u_1 = \sqrt{\beta(\rho - 1)} \text{ y } u_2 = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}$$

Entonces los puntos de equilibrio cuando $v = u$ son:

- *Trivial:* $(0, 0, 0)$
- *No trivial:* $(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$
- *No trivial:* $(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$

La matriz jacobiana de este sistema es:

$$Df_{(u,v,w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \rho-w & -1 & -u \\ v & u & -\beta \end{bmatrix}$$

Para el punto $(0, 0, 0)$:

$$\Rightarrow Df_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\det(Df - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & \alpha & 0 \\ \rho & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda)(-\beta - \lambda) + 0 + 0 - 0 - \alpha\rho(-\beta - \lambda) - 0 \\ &= (-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda)(-\beta - \lambda) - \alpha\rho(-\beta - \lambda) \\ &= (-\beta - \lambda)[(-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda) + \alpha\rho] = 0 \end{aligned}$$

$$(-\beta - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = -\beta$$

$$[(-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda) + \alpha\rho] = \lambda^2 + \lambda(\alpha + 1) + \alpha(\rho - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha\rho + 1}}{2}$$

en el contexto de los parámetros $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$, y $\sigma = 10$, los autovalores de la matriz de coeficientes constantes en el punto crítico $(0, 0, 0)$ son números reales, son distintos entre sí y tienen signos opuestos. Debido a estas propiedades, se clasifica al punto crítico $(0, 0, 0)$ como un punto silla.

Para el punto $(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$:

$$\Rightarrow Df_{(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\det(Df - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda)(-\beta - \lambda) - \alpha\beta(\rho - 1) - \alpha(-\beta - \lambda) + (-\alpha - \lambda)\beta(\rho - 1) \\ &= (-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda)(-\beta - \lambda) - \alpha(-\beta - \lambda) \\ &= (-\beta - \lambda)[(-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda) + \alpha\rho] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-\beta - \lambda) &= 0 \implies \lambda_0 = -\beta \\
[(-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda) + \alpha\rho] &= \lambda^2 + \lambda(\alpha + 1) + \alpha(\rho - 1) = 0 \\
\implies \lambda_{1,2} &= \frac{-\alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha\rho + 1}}{2}
\end{aligned}$$

En el caso particular donde $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$ y $\sigma = 10$, los autovalores asociados al punto crítico

$(\sqrt{\beta(\sigma - 1)}, \sqrt{\beta(\sigma - 1)}, (\sigma - 1))$ son $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$, $\lambda_2 = -2,2984$ y $\lambda_3 = -4,5969$.

Dado que los tres autovalores son números reales, diferentes entre sí y tienen signos negativos, se concluye que el punto crítico es un nodo asintóticamente estable.

Para el punto $(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$:

$$\implies Df_{(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\det(Df - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda)(-\beta - \lambda) - \alpha\beta(\rho - 1) - \alpha(-\beta - \lambda) + (-\alpha - \lambda)\beta(\rho - 1) \\
&= (-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda)(-\beta - \lambda) - \alpha(-\beta - \lambda) \\
&= (-\beta - \lambda)[(-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda) + \alpha\rho] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-\beta - \lambda) &= 0 \implies \lambda_0 = -\beta \\
[(-\alpha - \lambda)(-1 - \lambda) + \alpha\rho] &= \lambda^2 + \lambda(\alpha + 1) + \alpha(\rho - 1) = 0 \\
\implies \lambda_{1,2} &= \frac{-\alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha\rho + 1}}{2}
\end{aligned}$$

En el caso particular donde $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$ y $\sigma = 10$, los autovalores asociados al punto crítico

$(-\sqrt{\beta(\sigma - 1)}, -\sqrt{\beta(\sigma - 1)}, (\sigma - 1))$ son $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$, $\lambda_2 = -2,2984$ y $\lambda_3 = -4,5969$.

Dado que los tres autovalores son números reales, son diferentes entre sí y tienen signos negativos, se concluye que el punto crítico es un nodo asintóticamente estable.

Las características de cómo evolucionan las soluciones de un sistema pueden ser ilustradas mediante la creación de un diagrama que exhiba sus puntos críticos acompañados por una variedad de superficies que representan soluciones típicas. Ahora se introduce la comparación de tres atractores de Lorenz, cada uno obtenido con condiciones iniciales distintas. Estos atractores ofrecerán una perspectiva comparativa de cómo evolucionan las soluciones del sistema.

Al analizar la evolución en el tiempo, se observa que la función experimenta una atracción inicial hacia uno y luego hacia otro de los nodos atractores. Las soluciones presentan oscilaciones irregulares, sin seguir un patrón periódico, pero siempre permanecen en una región acotada del espacio de fases, convergiendo hacia un atractor peculiar. Este atractor, conocido como fractal, se caracteriza por su forma semejante a la de una mariposa en el caso específico del atractor de Lorenz. Al variar el punto de inicio cerca de los puntos, se puede observar cómo se comportan las trayectorias. Con la condición inicial $(0, 1, 1)$, se forma la trayectoria de la figura 4.4b, mientras que con la condición inicial $(0, -1, -1)$, se obtiene la trayectoria de la figura 4.4c con sentido de circulación opuesta.

Algorithm 5 Atractores de Lorenz con diferentes condiciones iniciales.

Entrada: Parámetros, condiciones iniciales.

- 1: Definir el sistema de las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6).
- 2: Iterar sobre las condiciones iniciales.
- 3: Resolver las ecuaciones diferenciales.

Salida: Gráfico de los atractores de Lorenz.

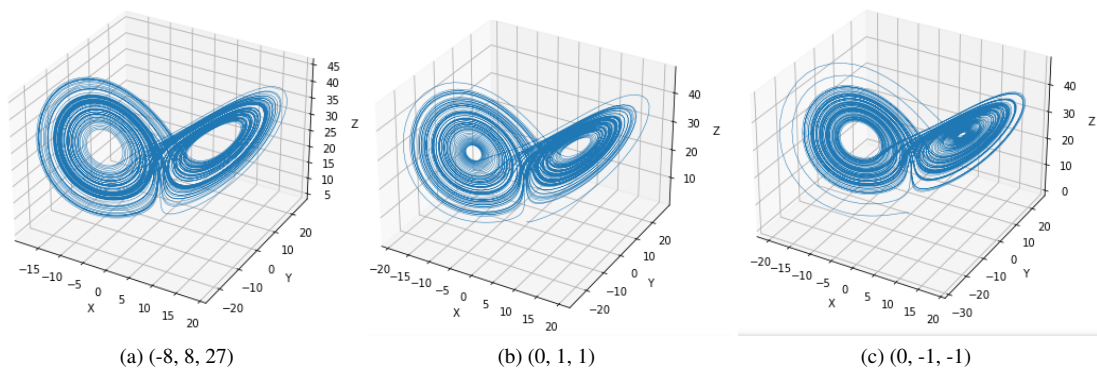


Figura 4.4: Atractor de Lorenz con diferentes condiciones iniciales.

Al comenzar desde un punto muy distante del origen, como $(-20, -20, -20)$, la trayectoria sigue una evolución que eventualmente adopta la característica forma de mariposa del atractor de Lorenz, como se muestra en la figura 4.5.

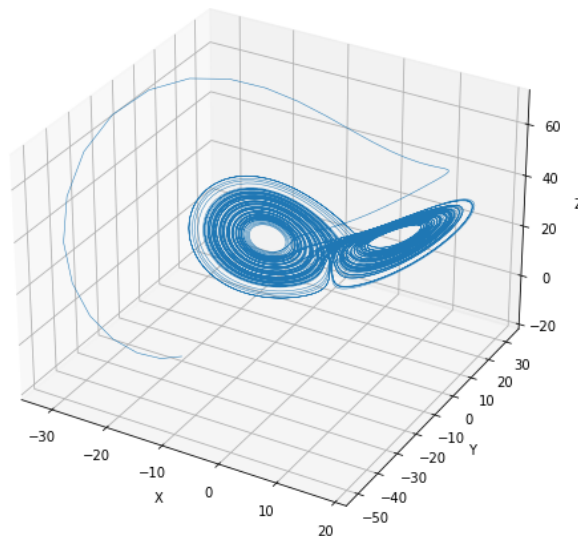


Figura 4.5: Condiciones iniciales lejos del origen. Elaboración propia.

Este atractor exhibe un comportamiento caótico, lo que significa que es altamente sensible a las condiciones iniciales. Incluso pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden resultar en evoluciones significativamente diferentes con el tiempo. Esta característica le otorgó notoriedad mundial a través del concepto conocido como el “efecto mariposa”. Se utiliza esta analogía para ilustrar cómo cambios pequeños o aparentemente insignificantes, como el vuelo de una mariposa, pueden desencadenar consecuencias significativas y a menudo impredecibles en un sistema complejo.

Algorithm 6 Atractor de Lorenz con condición inicial lejos del origen.

Entrada: Parámetros, condición inicial.

- 1: Definir el sistema de las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6).
- 2: Resolver las ecuaciones diferenciales

Salida: Gráfico del atractor de Lorenz.

El efecto mariposa hace referencia a la extrema sensibilidad de los sistemas caóticos a las condiciones iniciales, donde las mínimas variaciones iniciales pueden resultar en cambios abruptos y con frecuencia impredecibles en el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo.

Definición 4.2.3. (Definición de caos de Devaney.) Dado un espacio métrico (χ, d) , una función $f : \chi \rightarrow \chi$ se considera caótica si y solo si cumple con las siguientes tres condiciones:

1. f es transitiva, esto es, que para cualquiera de los dos conjuntos abiertos U y V , existe un k tal que $f^{[k]}(U) \cap V \neq \emptyset$.
2. El conjunto de puntos periódicos de f es denso. Un punto x es llamado periódico si $f^{[k]}(x) = x$ para algún $k \geq 1$.
3. La función f exhibe una sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, existe un $\delta > 0$ tal que, para cualquier conjunto abierto U y cualquier punto $x \in U$, existe un punto $y \in U$ donde $d(f^{[k]}(x), f^{[k]}(y)) > \delta$ para algún k . El valor positivo δ se denomina constante de sensibilidad y depende únicamente del espacio χ y de la función f [15].

4.3. Mapeo logístico

En un artículo de gran influencia [14], Robert May (1976) resaltó que incluso los mapas matemáticos simples pero no lineales pueden exhibir dinámicas extremadamente complejas. El artículo concluyó de manera impactante, instando a la inclusión de estas ecuaciones diferenciales en cursos de matemáticas básicas. La intención era enriquecer la intuición de los estudiantes al mostrar las sorprendentes posibilidades que las ecuaciones simples pero no lineales pueden ofrecer. May respaldó su argumento utilizando el mapa logístico como ejemplo.

La forma matemática más básica de una función recurrente que exhibe comportamiento caótico es el mapeo logístico, que se expresa como:

$$f(x_n) = x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (4.10)$$

con μ el parámetro de control, las repeticiones iteradas de esta función generan una secuencia de puntos conocida como “órbita”.

La figura 4.6a, correspondiente a la ecuación (4.10), ilustra el crecimiento de una población a lo largo de varias generaciones. La gráfica representa una parábola que alcanza su valor máximo de $\frac{\mu}{4}$ cuando $x = \frac{1}{2}$, indicando así la capacidad máxima de crecimiento de la población.

La figura 4.6b, correspondiente a la misma ecuación, muestra el comportamiento para diferentes valores de μ . En esta figura, se observa cómo la población aumenta con el tiempo t hasta alcanzar un límite máximo, tras lo cual disminuye y eventualmente se extingue. La restricción $0 \leq \mu \leq 4$ garantiza que el comportamiento sea significativo en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, resaltando las propiedades clave del modelo en términos de crecimiento poblacional.

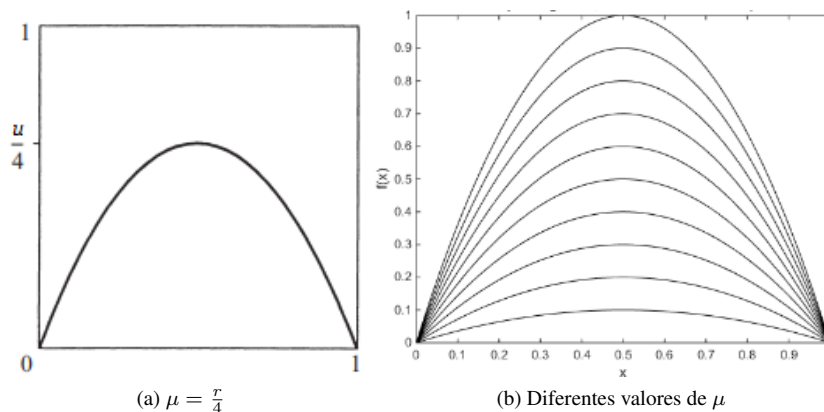


Figura 4.6: Valores de μ en el mapeo logístico. Fuente: [12].

Ahora, cuando en la función (4.10) se calculan trayectorias, la ecuación cuadrática $f(x) = 3,2x(1 - x)$ representa la dinámica con $\mu = 3,2$, y su gráfica está representada en la figura 4.7a en tono rosado. Si, por ejemplo, se elige $x = 0,1$ entonces $f(x) = 0,288$. Tomando este valor aproximado como entrada ($x = 0,3$), se obtiene $f(x) = 0,672$.

Al repetir estos pasos iterativamente, utilizando las salidas como nuevas entradas, se construye la trayectoria. Esta trayectoria exhibe un crecimiento que eventualmente converge y se estabiliza en dos puntos, identificados como puntos atractores.

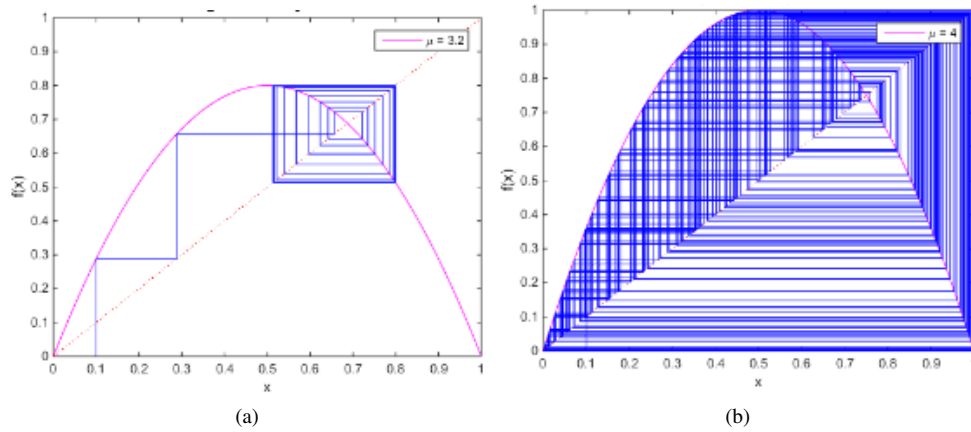


Figura 4.7: Trayectorias del mapeo logístico. Fuente: [12]

Considerando el caso en que $\mu = 4$, la ecuación adopta la forma $f(x) = 4x(1 - x)$. En este escenario, se sigue el mismo procedimiento descrito anteriormente. Al iniciar con $x = 0,1$, se obtiene $f(x) = 0,36$. Esta elección da origen a una trayectoria que presenta un comportamiento no repetitivo y eventualmente alcanza una fase de estabilización como en la figura 4.7b. A lo largo de este proceso, la trayectoria oscila entre dos puntos, caracterizando así una dinámica caótica. Al realizar estos cálculos utilizando la ecuación (4.10), se concluye que la trayectoria exhibe un comportamiento caótico.

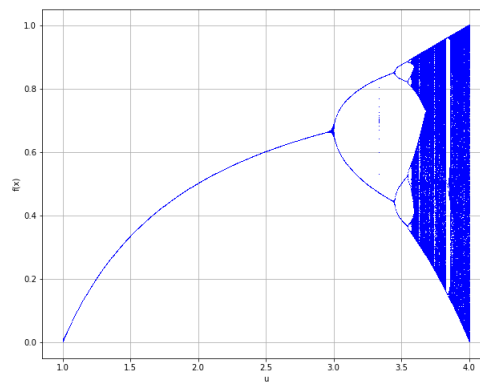


Figura 4.8: Bifurcación del mapeo logístico. Elaboración propia.

Análisis:

- Para valores bajos de μ , el sistema se acerca a un punto en la figura 4.8. Refleja una población estable sin fluctuaciones significativas.
- A medida que μ aumenta, se pueden observar bifurcaciones en el gráfico, donde una línea de punto se divide en dos o más partes. Estas bifurcaciones indican una transición hacia comportamientos más complejos, como ciclos límite y caos.
- En ciertos valores más altos de μ , el sistema puede volverse caótico, lo que significa que la trayectoria se vuelve muy sensible a las condiciones iniciales y se vuelve impredecible.

Algorithm 7 Bifurcación del mapeo logístico**Entrada:** Parámetros

- 1: Generar el plano de fase para los diferentes valores de la tasa de crecimiento
- 2: Calcular iterativamente la población futura utilizando la ecuación logística

Salida: Gráfico de la bifurcación en el plano de fase**4.3.1. Exponente de Lyapunov**

Una de las características distintivas del caos es la divergencia entre trayectorias cercanas, también conocida como sensibilidad a condiciones iniciales.

Se consideran inicialmente dos puntos próximos $(x_0, x_0 + \epsilon)$. Luego, se aplica repetidamente la función a cada uno de estos puntos, y se evalúa la distancia absoluta entre ellos, dada por

$$d_n = |f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|.$$

Se espera que esta distancia aumente de manera exponencial con el número de iteraciones n . Si se divide esta distancia entre un valor pequeño ϵ , se obtiene una función exponencial

$$\frac{d_n}{\epsilon} = \frac{|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|}{\epsilon} = e^{\gamma n},$$

donde γ se obtiene despejando la expresión

$$\gamma = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|}{\epsilon} \right).$$

La ecuación anterior define el exponente de Lyapunov γ para la trayectoria, proporcionando una medida cuantitativa de la sensibilidad al cambio en las condiciones iniciales y resaltando la naturaleza caótica del sistema. Cuando ϵ tiende a cero, el lado derecho de la ecuación se convierte en la definición básica del valor absoluto de la derivada de f^n con respecto a x . La derivada de f^n se interpreta como el producto de n derivadas de $f(x)$ evaluadas en la trayectoria de puntos sucesivos de la órbita. Así,

$$\gamma = \frac{1}{n} (\ln |f'(x_0)| + \ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_n)|) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \ln |f'(x_i)|.$$

Si esta expresión tiene límite cuando $n \rightarrow \infty$, entonces el exponente de Lyapunov para la órbita que inicia en x_0 queda determinado por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right),$$

donde el exponente de Lyapunov se puede definir como el promedio del logaritmo natural del valor absoluto de las derivadas de la función de mapeo, evaluadas en los puntos de la trayectoria. Si la función de mapeo evaluada en dos puntos cercanos genera dos órbitas que se separan entre sí, entonces el valor absoluto de las derivadas del mapeo será mayor a 1 en esos puntos de la trayectoria. Dado que el valor absoluto mayor a 1 implica que su logaritmo es positivo, se puede concluir que un mapeo iterado unidimensional tiene trayectorias caóticas cuando el exponente de Lyapunov es positivo [3].

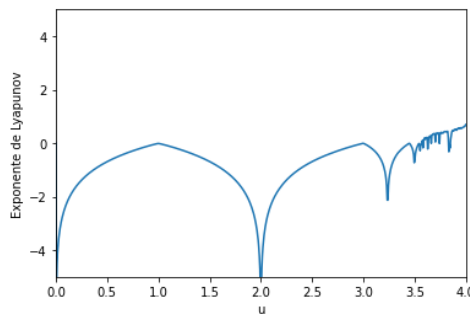


Figura 4.9: Exponente de Lyapunov del mapeo logístico. Elaboración propia.

La figura 4.9 representa el exponente de Lyapunov en función del parámetro μ para el mapa logístico.

1. $\mu < 1$: En este rango, el sistema converge hacia un único punto y el exponente de Lyapunov es negativo. Esto indica que las perturbaciones en las condiciones iniciales se reducen con el tiempo, lo que es consistente con la convergencia hacia un atractor.
2. $1 < \mu < 3$: El sistema exhibe comportamiento oscilatorio y bifurcaciones periódicas, hay regiones donde el exponente de Lyapunov es positivo, indicando la presencia de caos determinista. La ubicación de estos intervalos de caos se corresponde con las bifurcaciones periódicas.
3. $\mu \approx 3$: En esta región, el sistema experimenta la transición hacia el caos, intervalos de positividad en el exponente de Lyapunov, indicando la sensibilidad a condiciones iniciales y la presencia de órbitas caóticas.
4. $\mu > 3,57$: El sistema muestra caos aperiódico. El exponente de Lyapunov es positivo en gran parte de este rango, indicando una alta sensibilidad a las condiciones iniciales y la presencia de trayectorias caóticas.
5. $\mu = 4$: El exponente de Lyapunov tiende a infinito. Esto sugiere un comportamiento caótico extremadamente fuerte, caracterizado por una alta sensibilidad a las condiciones iniciales y una divergencia exponencial de trayectorias cercanas.

Algorithm 8 Exponente de Lyapunov en el mapeo logístico

Entrada: Parámetros y valores para μ

- 1: Definir la ecuación (4.10)
- 2: **for** ci en el rango inicial **do**
- 3: Calcular la derivada de la función logística en el punto actual
- 4: Iterar el sistema
- 5: **end for**

Salida: Gráfico del exponente de Lyapunov.

Se ha examinado una variedad de fenómenos complejos, como bifurcaciones, caos, mapeo logístico, y otros, al finalizar este capítulo sobre sistemas no lineales, lo que ha dado una comprensión profunda de cómo estos sistemas pueden comportarse de manera impredecible y fascinante. El siguiente capítulo se centrará en el análisis de modelos físicos con este conocimiento. Aplicando los principios aprendidos para entender y predecir el comportamiento de sistemas en situaciones reales y prácticas.

MODELOS FÍSICOS

La introducción de conceptos físicos básicos abre la puerta a una comprensión matemática rigurosa de los fenómenos naturales. Al formular leyes y principios utilizando ecuaciones diferenciales y conceptos algebraicos, podemos modelar y predecir el comportamiento físico.

Leyes de Newton

- **Primer Principio de Newton - Ley de Inercia:** [11] Un cuerpo persistirá en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme a menos que una fuerza externa actúe sobre él. Si la suma total de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero, su estado de movimiento actual se mantendrá. La fuerza neta, representada por $\vec{F}_R$ es simplemente la suma de todas las fuerzas que afectan al objeto.
- **Segundo Principio de Newton - Ley de la Fuerza y Aceleración:** [11] La aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta externa aplicada y actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa. Esto se expresa mediante la ecuación

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- **Tercer Principio de Newton - Ley de Acción y Reacción:** [11] Si dos objetos interactúan, la fuerza $\vec{F}_{AB}$ que ejerce el objeto A sobre el objeto B es igual en magnitud y opuesta a la fuerza $\vec{F}_{BA}$ que ejerce sobre el objeto B sobre el objeto A

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

La energía potencial es una forma de energía asociada con la posición o comportamiento de un objeto en un sistema. La energía cinética está relacionada con el movimiento de un objeto y su velocidad [11].

Definición 5.0.1. *La suma de la energía cinética y la energía potencial de un sistema es la energía mecánica del sistema, es decir,*

$$E = K + U, \quad (5.1)$$

donde K incluye la energía cinética de todos los integrantes móviles del sistema y U incluye todos los tipos de energía potencial en el sistema. Las fuerzas no conservativas que actúan dentro de un sistema causan un cambio en la energía mecánica del sistema [11]

En el siglo XVII, mientras exploraba la elasticidad y los resortes, el físico Robert Hooke observó que la relación entre la fuerza y la deformación es lineal para muchos materiales. La siguiente relación es conocida como la Ley de Hooke.

Definición 5.0.2. *La fuerza necesaria para estirar o comprimir un objeto elástico, como un resorte metálico, es proporcional a la magnitud de su extensión, siempre que esta se mantenga dentro de ciertos límites y puede expresarse mediante la fórmula:*

$$\vec{F}_s = -k\vec{x}, \quad (5.2)$$

donde $\vec{F}_s$ es la fuerza restauradora, $\vec{x}$ es la longitud de la extensión o compresión, y k es la constante de resorte, medida comúnmente en N/m [11].

5.1. Movimiento armónico simple (MAS)

El movimiento armónico simple (MAS) es un movimiento oscilatorio que ocurre en muchos sistemas físicos y se caracteriza por un movimiento periódico y armónico, lo que significa que se repite a intervalos iguales y sigue un patrón sinusoidal.

Considerando un modelo de movimiento armónico simple, se presenta un escenario en el cual un objeto con masa m está conectado a un resorte (de masa despreciable) con constante elástica k . El movimiento del objeto se restringe a una sola dimensión, tal como se representa en la figura 5.1a. En esta configuración, el objeto se libera desde el reposo justo cuando el resorte alcanza su máxima elongación, dando inicio a su oscilación. La única fuerza que afecta a la masa es la ejercida por el resorte, y actúa en dirección opuesta al movimiento, como se ilustra en la figura 5.1b, y sigue la dinámica descrita por la ecuación (5.2).

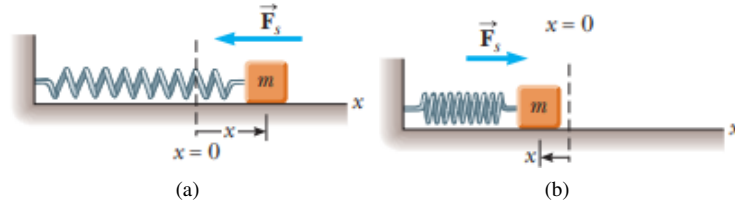


Figura 5.1: Masa - resorte. Fuente: [11]

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de un bloque sujeto a un resorte y considerando la ecuación que describe la fuerza resultante (5.2) en la dirección x se obtiene la siguiente relación

$$-kx = ma_x, \quad a_x = -\frac{kx}{m}.$$

Esto significa que la aceleración del bloque a_x es proporcional a su posición x con una constante $\frac{k}{m}$. Además, esta aceleración actúa en sentido opuesto al desplazamiento del punto estacionario.

La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes que describe el movimiento de un objeto con masa m es:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5.3)$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = A, \quad x'(0) = 0.$$

La solución general para la ecuación (5.3) es una combinación lineal de funciones seno y coseno, cuyo desarrollo similar ya se ha resuelto anteriormente:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad \text{donde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Se calculan las derivadas de $x(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t), \\ x''(t) &= -C_1\omega^2 \cos(\omega t) - C_2\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Se aplican las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x(0) &= C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1, \\x'(0) &= -C_1 \omega \sin(0) + C_2 \omega \cos(0) = C_2 \omega.\end{aligned}$$

Resolviendo para C_1 y C_2 :

$$\begin{aligned}C_1 &= A, \\C_2 \omega &= 0 \implies C_2 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución específica es

$$x(t) = A \cos(\omega t),$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La función $x(t)$ representa la posición del objeto en relación con el tiempo t . Aquí, A es la amplitud, que indica la máxima distancia desde la posición de equilibrio alcanzada por el objeto. La frecuencia angular ω , relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2\pi f$, determina la rapidez con la que el objeto oscila.

Al derivar la ecuación respecto al tiempo, se obtiene la función de velocidad del objeto:

$$x'(t) = -\omega A \sin(\omega t).$$

En ausencia de fricción en la superficie y considerando un sistema aislado, se asume que la energía mecánica total del sistema se conserva. Se plantea la suposición de un resorte sin masa, lo que implica que la energía cinética del sistema está asociada exclusivamente al bloque. La expresión de la energía cinética se puede determinar utilizando la velocidad $x'(t)$:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t).$$

La energía potencial elástica acumulada en el resorte para una elongación x se describe como $\frac{1}{2}kx^2$. Al utilizar $x(t)$, se deduce la expresión correspondiente:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t).$$

Dado que $\omega^2 = \frac{k}{m}$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se formula como:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t).$$

Simplificando, se tiene:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)).$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin^2 + \cos^2 = 1$, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

La cantidad total de energía mecánica en un oscilador armónico simple se mantiene constante durante todo su movimiento y está directamente relacionada con el cuadrado de la amplitud. Este comportamiento se refleja en las trayectorias del oscilador, que toman la forma de órbitas cerradas.

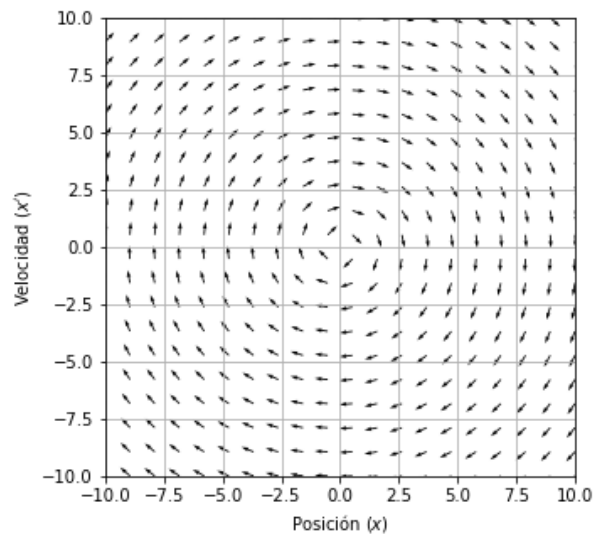


Figura 5.2: Plano de fase del movimiento armónico simple. Elaboración propia.

El diagrama de fase, como se muestra en la figura 5.2, proporciona una representación visual del comportamiento dinámico del sistema masa-resorte. Este diagrama traza la velocidad del objeto $x'(t)$ en el eje vertical frente a su posición $x(t)$ en el eje horizontal. En el diagrama, el origen $(0, 0)$ representa el punto de equilibrio del sistema, que corresponde a la posición y velocidad iniciales nulas. Este punto de equilibrio es estable, lo que significa que cualquier perturbación del sistema tiende a disminuir con el tiempo y regresar al punto de equilibrio.

Las trayectorias en el diagrama de fase, conocidas como órbitas, son elipses cerradas centradas en el origen. Estas órbitas indican que el sistema oscila periódicamente alrededor del punto de equilibrio. Las flechas en el diagrama de fase muestran la dirección del movimiento del sistema a lo largo de las órbitas. La estabilidad del punto de equilibrio se evidencia en el comportamiento de los vectores: todos apuntan hacia el origen, lo que sugiere que cualquier desplazamiento inicial del objeto desde la posición de equilibrio resultará en un movimiento que eventualmente volverá al origen. En términos de energía, el sistema conserva su energía mecánica total, y el origen representa la configuración de energía mínima.

Este análisis se sustenta en la solución de la ecuación diferencial del sistema y en la conservación de la energía mecánica, lo cual refleja la naturaleza periódica y estable de las oscilaciones del sistema masa-resorte.

Algorithm 9 Plano fase del movimiento armónico simple

Entrada: Vectores x e y , parámetros

- 1: Definir las ecuaciones $x', -\frac{kx}{m}$
- 2: Crear un campo de direcciones normalizado

Salida: Gráfico del plano fase del movimiento armónico simple

5.2. Péndulo simple

El péndulo simple representa un sistema ideal que incluye una masa m suspendida desde un punto fijo mediante un alambre de masa insignificante, cuya longitud es ajustable y se mide desde el centro de masa hasta el punto de suspensión.

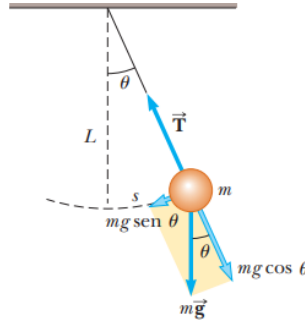


Figura 5.3: Péndulo simple. Fuente: [11]

Al desplazar el cuerpo desde su posición de equilibrio original y liberarlo, el péndulo oscila en el plano vertical, influenciado por la gravedad y la tensión que lo sujeta a un soporte. Si el ángulo θ es pequeño, el movimiento del péndulo se asemeja notablemente al de un oscilador armónico simple. En el péndulo, hay dos fuerzas principales en juego: la tensión en la cuerda $\vec{T}$ y la fuerza gravitacional $m\vec{g}$. La componente tangencial de la fuerza gravitacional, que es $mg \sin \theta$, siempre actúa en la dirección opuesta al desplazamiento del péndulo desde su posición más baja. Cuando movemos el péndulo, esta componente tangencial de la gravedad actúa como una especie de "fuerza restauradora". Es como si tratara de devolver al péndulo a su posición original. Se puede aplicar la segunda ley de Newton en la dirección tangencial para entender cómo estas fuerzas afectan el movimiento del péndulo:

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (5.4)$$

donde s indica la longitud de arco a lo largo de la trayectoria del péndulo, y el signo negativo indica que la fuerza que empuja o tira del péndulo siempre apunta hacia su posición de equilibrio. Dado que $s = L\theta$, con L constante, al reemplazar en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} -mg \sin \theta &= m \frac{d^2 s}{dt^2} \\ -mg \sin \theta &= mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ -\frac{g}{L} \sin(\theta) &= \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{aligned}$$

El tiempo que tarda en completar un ciclo (T) y la rapidez con que oscila (ω) un péndulo simple están determinados únicamente por la longitud de la cuerda y la fuerza de la gravedad que actúa sobre él. Dado que el periodo no se ve afectado por la masa, podemos inferir que todos los péndulos simples con la misma longitud y posición tendrán el mismo periodo de oscilación [9].

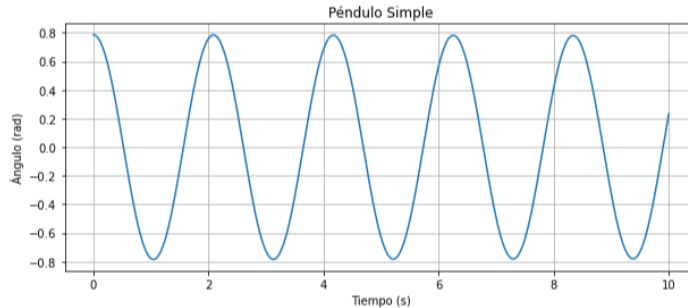


Figura 5.4: Péndulo simple. Elaboración propia.

La figura 5.4 muestra el comportamiento oscilante de un péndulo simple en función del tiempo. La oscilación del péndulo es periódica, característica de los sistemas pendulares simples. La amplitud, frecuencia y período

de las oscilaciones dependen de la longitud del péndulo y de la aceleración de la gravedad. Este gráfico muestra visualmente el movimiento del péndulo a lo largo del tiempo.

Algorithm 10 Péndulo simple

Entrada: Parámetros, valores para el tiempo.

- 1: Define la ecuación.
- 2: Resolver la ecuación diferencial

Salida: Gráfico de la solución péndulo simple

Ejemplo 5.2.1.

Volviendo a la ecuación (5.4), considere

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\implies \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

se va a normalizar la ecuación para eliminar las unidades físicas de la ecuación original. Para lograr esto, se introduce una frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y L es la longitud del péndulo. También se introduce un tiempo adimensional $\tau = \omega t = 1$. Entonces queda la ecuación:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \sin \theta = 0, \quad (5.5)$$

como es una ecuación no lineal, se debe linealizar para hallar los puntos de equilibrio.

Sean $x = \theta$ y $y = \frac{d\theta}{dt}$, entonces las ecuaciones asociadas son:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\sin x \end{cases} \quad (5.6)$$

Si $\frac{dy}{dt} = 0$ entonces $-\sin x = 0$, los valores de x para los cuales $\sin x = 0$ son múltiplos enteros de π entonces x puede ser:

$$x = n\pi, \quad \text{donde } n \text{ es un entero.}$$

Para que $\frac{dx}{dt}$ sea cero, y también debe ser cero. Entonces, se tiene que $y = 0$.

Por lo tanto, los puntos de equilibrio del sistema son de la forma $(x, y) = (n\pi, 0)$, donde n es un entero.

La matriz jacobiana de este sistema es:

$$Df_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Df_{(n\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(n\pi) & 0 \end{bmatrix}$$

- Se sabe que si n es par entonces $\cos(n\pi) = 1$:

Dada la matriz:

$$Df_{(n\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

la ecuación característica es:

$$\det(Df - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 0 - \lambda \end{bmatrix},$$

calculando el determinante, se obtiene:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - (1)(-1) = \lambda^2 + 1,$$

entonces los valores propios son:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i.$$

Hallando los vectores propios asociados a $\lambda_1 = i$:

dada la matriz A , se busca encontrar los vectores propios asociados a $\lambda_1 = i$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

se desea encontrar el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -iv_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 - iv_2 = 0 \end{cases}$$

despejando v_2 de la primera ecuación, se obtiene:

$$-iv_1 + v_2 = 0 \implies v_2 = iv_1$$

se puede verificar que esta solución satisface también la segunda ecuación:

$$-v_1 - i(iv_1) = -v_1 - i^2 v_1 = -v_1 + v_1 = 0$$

por lo tanto, cualquier vector de la forma $\mathbf{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = i$.

así, el vector propio asociado a $\lambda_1 = i$ es:

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

donde v_1 es un escalar que puede tomar cualquier valor distinto de cero.

Hallando los vectores propios asociados a $\lambda_2 = -i$:

Para el vector asociado a $\lambda_2 = -i$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

se desea encontrar el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} iv_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + iv_2 = 0 \end{cases}$$

despejando v_2 de la primera ecuación, se obtiene:

$$iv_1 + v_2 = 0 \implies v_2 = -iv_1$$

se puede verificar que esta solución satisface también la segunda ecuación:

$$-v_1 + i(-iv_1) = -v_1 - i^2v_1 = -v_1 + v_1 = 0$$

por lo tanto, cualquier vector de la forma $\mathbf{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_2 = -i$.

así, el vector propio asociado a $\lambda_2 = -i$ es:

$$\mathbf{v}_2 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

donde v_1 es un escalar que puede tomar cualquier valor distinto de cero.

Los puntos de equilibrio asociados con valores pares de n en el péndulo simple linealizado son los valores propios complejos conjugados ($\lambda = \pm i$), indicando estabilidad y las soluciones cerca de estos puntos describen órbitas elípticas en el espacio de fase como en la figura 5.5.

- Si n es impar entonces $\cos(n\pi) = -1$:

$$Df_{(n\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

la ecuación característica es:

$$\det(Df - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ \implies \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$$

los puntos son inestables e hiperbólicos.

El vector asociado a $\lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0$$

de la primera ecuación se puede despejar v_2

$$v_2 = v_1$$

entonces

$$\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

el vector asociado a $\lambda_4 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 &= 0 \\v_1 + v_2 &= 0\end{aligned}$$

de la primera ecuación se despeja v_2 :

$$v_2 = -v_1$$

entonces

$$V_4 = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

los puntos de equilibrio asociados con valores impares de n en el péndulo simple linealizado son los valores propios reales ($\lambda = \pm 1$), indicando inestabilidad y las soluciones cerca de estos puntos describen trayectorias hiperbólicas que se alejan del punto de equilibrio en direcciones específicas en el espacio de fase.

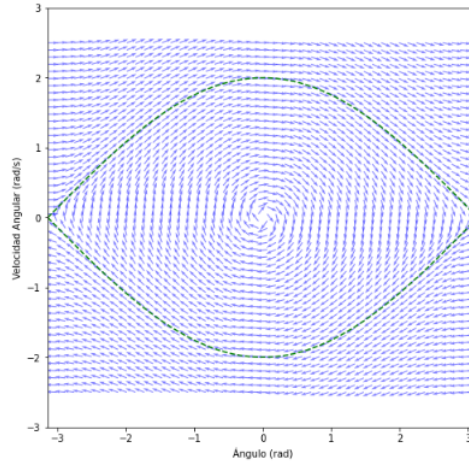


Figura 5.5: Plano fase del péndulo simple y separatriz. Elaboración propia.

Algorithm 11 Plano fase del péndulo simple

Entrada: Vectores x e y

- 1: Crear el mallado con los vectores x e y .
- 2: Definir el sistema de la ecuación $y, -\sin(x)$.
- 3: Normalizar para hacer el campo de direcciones.
- 4: Calcular la separatriz

Salida: Gráfico del plano fase del péndulo simple

Un péndulo simple, formado por masas suspendidas en una cuerda o varilla sin masa, es un sistema conservativo donde la energía total E se mantiene constante durante su movimiento. La energía cinética (K) está asociada a la velocidad, y la energía potencial (U) a la altura sobre la posición de equilibrio [9]. La fórmula de la energía total es $E = K + U = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$, para encontrar esta ecuación desde (5.4), primero se multiplica θ' en la ecuación (5.5)

$$\theta'(\theta'' + \sin \theta) = 0,$$

integrando y resolviendo se tiene

$$\begin{aligned}\int \theta'(\theta'' + \sin \theta)dt &= \int (\theta'\theta'' + \theta' \sin \theta)dt = \int \theta'\theta''dt + \int \theta' \sin \theta dt \\&= \int \theta'\theta''dt, \quad u = \theta', \quad du = \theta''dt \\&\Rightarrow \int \theta'\theta''dt = \int udu = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}(\theta')^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \theta' \sin \theta dt, \quad z = \theta, \quad dz = \theta' dt \\ \Rightarrow & \int \theta' \sin \theta dt = \int \sin z dz = -\cos z = -\cos \theta \\ & \int \theta'(\theta'' + \sin \theta) dt = \frac{1}{2}(\theta')^2 - \cos \theta \end{aligned}$$

y por (5.6) queda:

$$\frac{1}{2}(\theta')^2 - \cos \theta = \frac{1}{2}y^2 - \cos x = E$$

de esta ecuación se deduce la ecuación de la separatriz, la cuál es:

$$E = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$$

$$\frac{1}{2}y^2 = E + \cos x$$

$$y^2 = 2E + 2\cos x$$

$$y = \pm\sqrt{2 + 2\cos x}$$

donde, la separatriz es una curva que divide el espacio de fase en regiones con diferentes comportamientos.

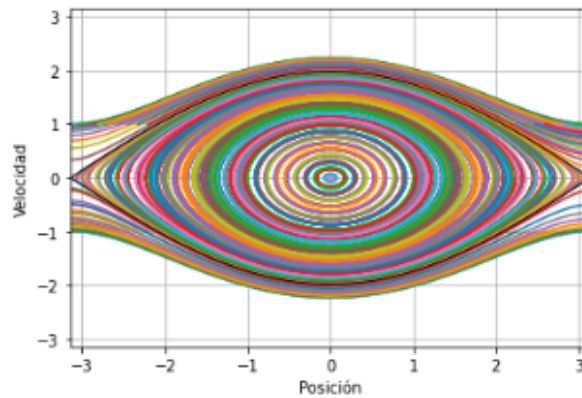


Figura 5.6: Trayectorias del péndulo simple. Elaboración propia.

Las trayectorias en el espacio de fase para diferentes condiciones iniciales del sistema se muestran en la Figura 5.6. La energía total del péndulo determina cómo se comporta en el espacio fase. Cuando la energía es baja ($E < 2mgl$), el péndulo oscila entre dos posiciones extremas y sus trayectorias en el espacio fase son curvas cerradas y simétricas, lo que indica un movimiento periódico y estable. En amplitudes pequeñas, estas trayectorias se aproximan a una elipse. Las oscilaciones dejan de ser armónicas y las trayectorias se alargan en los extremos a medida que aumenta la energía. El péndulo realiza rotaciones completas con energía alta ($E > 2mgl$), con la velocidad angular máxima en la posición de equilibrio estable y la velocidad angular mínima en la posición invertida; en el espacio fase, estas trayectorias son abiertas y el punto representativo entra por un lado y sale por el otro, repitiéndose cada 2π . La separatriz, que corresponde a la energía crítica ($E = 2mgl$), divide el espacio fase en regiones de oscilación y rotación; esta curva límite marca el borde entre estos movimientos, y en $\theta = \pm\pi$.

Algorithm 12 Trayectorias del péndulo simple

Entrada: Rangos de tiempo y rango para las condiciones iniciales

- 1: Definir la función del sistema de ecuaciones $y[1], -\sin(y[0])$.
- 2: Crear la figura
- 3: **for** ci en el rango inicial **do**
- 4: Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales $[ci, 0]$
- 5: **end for**

Salida: Gráfico de las trayectorias del péndulo simple

5.3. Péndulo perturbado

Un péndulo perturbado es un sistema físico que consiste en una masa suspendida de un punto fijo mediante una cuerda inextensible y que ha sido afectado por alguna perturbación externa o fuerza adicional. Esta perturbación puede tomar diversas formas, como fuerzas externas, variaciones en la longitud de la cuerda, cambios en la aceleración gravitatoria, entre otros. En esencia, un péndulo perturbado es un péndulo simple al cual se le ha introducido alguna influencia adicional que modifica su comportamiento natural. La ecuación de este péndulo queda:

$$\theta'' + b\theta' + \sin \theta = 0, \quad (5.7)$$

donde b es el coeficiente de amortiguamiento.

Ejemplo 5.3.1.

Como (5.7) es una ecuación no lineal, se debe linealizar para hallar los puntos de equilibrio: sean $x = \theta$ y $y = \theta'$, entonces las ecuaciones asociadas son:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - by \end{cases} \quad (5.8)$$

si $y' = 0$ entonces $-\sin x - by = -\sin x = 0$, los valores de x para los cuales $\sin x = 0$ son múltiplos enteros de π entonces x puede ser:

$$x = n\pi, \quad \text{donde } n \text{ es un entero.}$$

Para que x' sea cero, y también debe ser cero. Entonces, se tiene que $y = 0$.

Por lo tanto, los puntos de equilibrio del sistema son de la forma $(x, y) = (n\pi, 0)$, donde n es un entero. La matriz jacobiana de este sistema es:

$$\begin{aligned} Df_{(x,y)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -b \end{bmatrix} \\ \implies Df_{(n\pi,0)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(n\pi) & -b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se sabe que si n es par entonces $\cos(n\pi) = 1$:

$$Df_{(n\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix}$$

la ecuación característica es:

$$\begin{aligned} \det(Df - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -b - \lambda \end{bmatrix} \\ \implies \lambda^2 + b\lambda + 1 &= 0 \implies \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$

para analizar la estabilidad de estos valores, se debe analizar el comportamiento de $b^2 - 4$, entonces:

- cuando $b^2 - 4 > 0$, $\implies b > 2$ o $b < -2$, en este caso los valores son reales positivos (estables) o negativos (inestables), respectivamente e hiperbólicos.
- cuando $b^2 - 4 = 0$, $\implies b = 2$ o $b = -2$, en este caso los valores son -1 (inestable) y 1 (estable) e hiperbólicos.
- cuando $b^2 - 4 < 0$, $\implies b > -2$ o $b < 2$, en este caso los valores son reales positivos (estables) o negativos (inestables), respectivamente tienen parte imaginaria no nula, entonces son elípticos.

Si n es impar entonces $\cos(n\pi) = -1$:

$$Df_{(n\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{bmatrix}$$

la ecuación característica es:

$$\det(Df - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -b - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\implies \lambda^2 + b\lambda - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{2}$$

para analizar la estabilidad de estos valores, se debe analizar el comportamiento de $b^2 + 4$, entonces:

- cuando $b^2 + 4 > 0$, $\implies b > -2$ o $b < 2$, en este caso los valores son reales positivos (estables) o negativos (inestables), respectivamente e hiperbólicos.
- cuando $b^2 + 4 = 0$, $\implies b = -2$ o $b = 2$, en este caso los valores son positivos (inestable) y negativos (estable), respectivamente e hiperbólicos,
- cuando $b^2 + 4 < 0$, $\implies b < -2$ o $b > 2$, en este caso los valores son positivos (inestable) y negativos (estable), respectivamente e hiperbólicos,

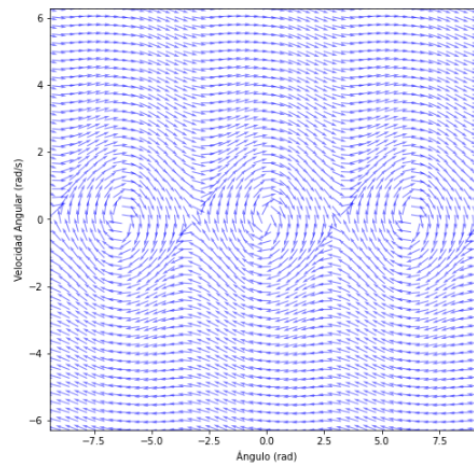


Figura 5.7: Plano de fase del péndulo perturbado. Elaboración propia.

Algorithm 13 Plano de fase del péndulo perturbado

Entrada: Vectores x e y

- 1: Crear el mallado con los vectores x e y .
- 2: Definir las ecuaciones $y, -by - \sin(x)$.
- 3: Normalizar para hacer el campo de direcciones.

Salida: Gráfico del plano de fase del péndulo perturbado

Algorithm 14 Trayectorias del péndulo perturbado

Entrada: Rangos de tiempo y rango para las condiciones iniciales

- 1: Definir la función del sistema de ecuaciones $y[1], -by[1] - \sin(y[0])$
- 2: Crear la figura
- 3: **for** ci en el rango inicial **do**
- 4: Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales $[ci[i], 0], tspan, args = (b,)$
- 5: **end for**

Salida: Gráfico de las trayectorias del péndulo perturbado

Las figuras 5.7 y 5.8 presentan el plano de fase y las trayectorias, respectivamente, en el espacio de fase para un péndulo amortiguado y perturbado, con diversas condiciones iniciales. El comportamiento del péndulo perturbado con coeficiente de amortiguamiento $b = 0,1$ es predominantemente estable en la mayoría de los casos analizados

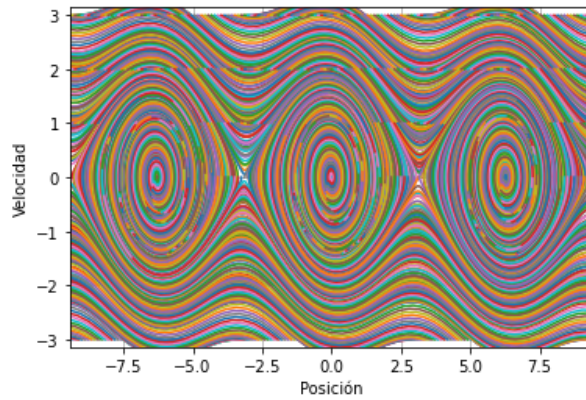


Figura 5.8: Trayectorias del péndulo perturbado. Elaboración propia.

en el espacio fase. Las trayectorias muestran oscilaciones que se amortiguan y disminuyen en amplitud con el tiempo, convergiendo hacia la posición de equilibrio en $\theta = 0$. Este comportamiento estable se observa tanto en las condiciones de reposo ($\dot{\theta} = 0$) como en las condiciones iniciales con velocidades angulares iniciales ($\dot{\theta} \neq 0$), donde las oscilaciones se reducen gradualmente hasta detenerse.

Sin embargo, en casos donde las condiciones iniciales presentan velocidades angulares iniciales mayores ($\dot{\theta} = 1, -1, 2, -2, 3, -3$), las oscilaciones pueden ser más pronunciadas inicialmente. A pesar de esto, el sistema eventualmente alcanza un estado de equilibrio debido al amortiguamiento. En resumen, el sistema exhibe un comportamiento mayormente estable, convergiendo hacia la posición de equilibrio en $\theta = 0$ a medida que el tiempo avanza.

5.4. Oscilador armónico amortiguado

En el contexto del **oscilador armónico amortiguado**, se explora el impacto de la fricción en sistemas oscilantes. Aunque idealmente, un oscilador armónico debería continuar oscilando indefinidamente, la presencia de fricción en situaciones del mundo real desacelera gradualmente el movimiento. Ignorar este factor puede llevar a predicciones poco realistas. En casos prácticos, la fricción puede tener una relación no directamente proporcional con la velocidad del objeto, dependiendo de la velocidad. En términos simplificados, se considera el caso donde la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad, expresada como

$$f_{fric} = -bv = -b \frac{dy}{dt}$$

donde b representa la magnitud de la influencia de la fricción. Un valor pequeño de b indica una desaceleración gradual debido a la fricción, afectando ligeramente al objeto. El signo negativo indica que, si el objeto se mueve hacia adelante (con una velocidad positiva), la fricción actuará en dirección opuesta e intentará frenar el objeto [3].

Características:

Cuando un objeto oscila y es sometido a una fuerza que lo frena con respecto a su velocidad, sucede algo interesante:

1. En el primer caso, la amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo y, con el tiempo, ocurre cada vez más lentamente. Eso significa que nunca se detiene por completo, al menos en teoría.
2. En el segundo caso, si la fuerza de frenado es constante (independiente de la velocidad), entonces la amplitud de la oscilación disminuirá en una cantidad constante en cada media oscilación y, finalmente, el objeto alcanzará el estado completo después de un rato limitado.

Ejemplo 5.4.1.

Sea el sistema de ecuaciones de un oscilador armónico amortiguado

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -2d\omega y - \omega^2 x,$$

toma las variables x (posición) y y (velocidad), junto con los parámetros de frecuencia angular ω y coeficiente de amortiguamiento d .

Punto de equilibrio:

En $\frac{dx}{dt} = 0$ y $\frac{dy}{dt} = 0$, se obtiene $y = 0$ y $\omega^2 x - 2d\omega y = 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio es $(0, 0)$. La matriz Jacobiana J es:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2d\omega \end{bmatrix}$$

Valores propios: El polinomio característico $|J - \lambda I| = 0$ es:

$$\det(J - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2d\omega - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 2d\omega\lambda + \omega^2$$

resolviendo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -d\omega + \omega\sqrt{d^2 - 1} \\ \lambda_2 &= -d\omega - \omega\sqrt{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Estos valores propios determinarán el comportamiento del sistema. La caracterización se realiza según el valor del coeficiente de amortiguamiento d en relación con la frecuencia angular natural ω . Se tienen tres casos distintos:

1. Si $d^2 < 1$, los valores propios son complejos conjugados y el sistema exhibirá oscilaciones subamortiguadas, como en las figuras 5.9a y 5.10a que son el plano de fase y las trayectorias respectivamente.
2. Si $d^2 = 1$, los valores propios son reales e idénticos, indicando oscilaciones críticamente amortiguadas, como en la figura 5.9b y 5.10b que son el plano de fase y las trayectorias respectivamente.
3. Si $d^2 > 1$, los valores propios son reales y distintos, indicando oscilaciones sobreamortiguadas, como en la figura 5.9c y 5.10c que son el plano de fase y las trayectorias respectivamente.

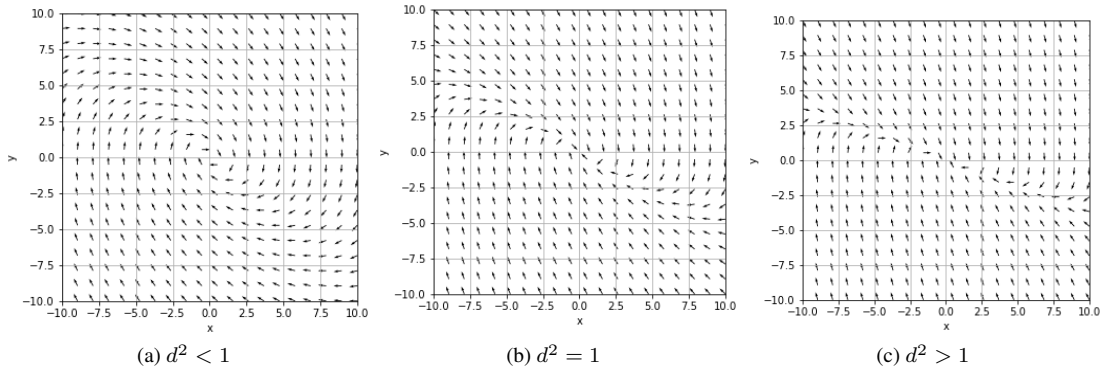


Figura 5.9: Plano de fase de un oscilador armónico amortiguado. Elaboración propia.

Algorithm 15 Plano de fase del oscilador armónico amortiguado

Entrada: Posición, velocidad, frecuencia angular, coeficiente de amortiguamiento

- 1: Definir las ecuaciones $y, -2d\omega y - \omega^2 x$
- 2: Crear un campo de direcciones normalizado

Salida: Gráfico del plano de fase del oscilador armónico amortiguado.

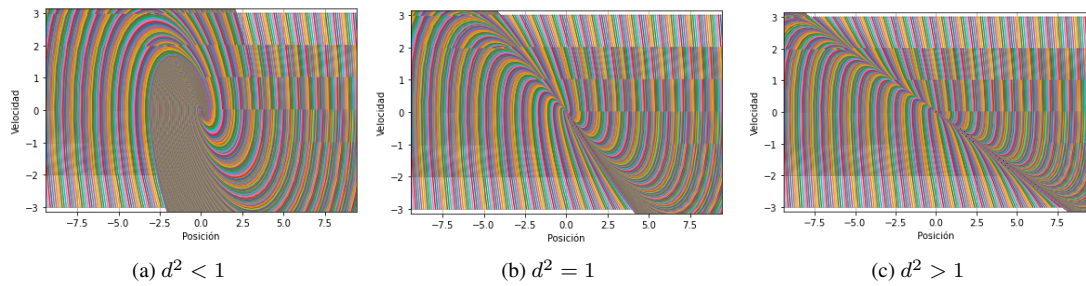


Figura 5.10: Trayectorias de un oscilador armónico amortiguado. Elaboración propia.

Algorithm 16 Trayectorias del oscilador armónico amortiguado

Entrada: Rangos de tiempo y rango para las condiciones iniciales

- 1: Definir la función del sistema de ecuaciones $y[1], -2d\omega y[1] - \omega^2 * y[0]$
- 2: Crear la figura
- 3: **for** ci en el rango inicial **do**
- 4: Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales $[ci[i], 0], tspan, args = (\omega, d)$
- 5: **end for**

Salida: Gráfico de las trayectorias del oscilador armónico amortiguado

El comportamiento del oscilador armónico perturbado depende del coeficiente de amortiguamiento y de los valores propios del sistema. Para $d < 1$, los valores propios son complejos conjugados, indicando oscilaciones subamortiguadas, donde las trayectorias en el espacio de fase describen espirales que convergen hacia el origen. Cuando $d = 1$, los valores propios son reales e idénticos, representando un amortiguamiento crítico con trayectorias que son líneas rectas hacia el origen, regresando al equilibrio sin oscilaciones. Con $d > 1$, los valores propios son reales y distintos, señalando un comportamiento sobreamortiguado donde las trayectorias convergen rápidamente hacia el origen sin oscilaciones. En el caso específico del código proporcionado, $d = 1,5$ y $\omega = 1,0$ implican un comportamiento sobreamortiguado, con trayectorias en el espacio de fase que se mueven rápidamente hacia el origen, disminuyendo gradualmente en velocidad y posición sin oscilaciones.

Este capítulo ha demostrado la aplicación de principios teóricos para comprender y predecir el comportamiento de sistemas en contextos reales. Se ha subrayado la importancia de los modelos matemáticos en la interpretación y resolución de problemas físicos complejos, ilustrado a través del análisis de varios ejemplos.

CONCLUSIONES

El estudio de conceptos esenciales relacionados con sistemas dinámicos ha permitido una mayor profundización en la comprensión teórica de estos sistemas, proporcionando una base sólida para el desarrollo de modelos matemáticos precisos y la interpretación de su comportamiento en diferentes contextos.

El análisis de modelos matemáticos ha destacado cómo estos modelos pueden capturar de manera precisa y detallada la dinámica de sistemas complejos.

La implementación de algoritmos en Python ha facilitado la realización de simulaciones de modelos físicos, lo que ha permitido visualizar y analizar de forma interactiva el comportamiento de sistemas dinámicos en varios escenarios, lo que ha enriquecido la comprensión práctica de los conceptos teóricos estudiados.

El enfoque para entender los fundamentos teóricos de los sistemas dinámicos ha llevado a un análisis cualitativo detallado de los modelos, esto ha permitido una comprensión completa y detallada de la dinámica de los sistemas. Se ha visto que este método es efectivo para abordar problemas complejos en una variedad de contextos físicos. Además, facilita la interpretación y predicción del comportamiento de sistemas dinámicos en situaciones reales. El uso de modelos matemáticos precisos y la implementación de algoritmos en Python han sido herramientas clave en este proceso, lo que ha permitido la simulación y visualización interactiva de los sistemas estudiados. Este estudio ha mejorado significativamente la comprensión teórica y práctica de los sistemas dinámicos, destacando la importancia de un enfoque multidisciplinario para abordar de manera efectiva estos problemas.

ANEXOS

OTRAS DEFINICIONES

Definición A.0.1. *Espacio topológico:*

Sea S un conjunto y sea Ω una familia de subconjuntos de S abiertos, cumple:

- El conjunto vacío y el conjunto S son abiertos, es decir, $\emptyset \in \Omega$, $S \in \Omega$.
- La unión de abiertos es un abierto, es decir, $\bigcup_{A_i \in I} A_i \in \Omega$.
- La intersección finita de abiertos es un abierto. es decir, $\forall A, B \in \Omega$, $A \cap B \in \Omega$.

entonces se dice que el par (S, Ω) es un espacio topológico o que Ω define una topología sobre S [4].

El **espacio euclidiano** es un espacio geométrico al que se pueden aplicar las reglas y conceptos tradicionales de la geometría euclidiana, como medir distancias, calcular ángulos y utilizar coordenadas cartesianas. El espacio euclidiano puede tener diferentes dimensiones, como el espacio euclidiano bidimensional (plano), el espacio euclidiano tridimensional (espacio 3D), etc.

Definición A.0.2. Una n -variedad (donde n es un entero no negativo) es un espacio topológico que satisface la propiedad de que para cada punto de la variedad existe una vecindad topológicamente equivalente (homeomorfismo) de ese punto hasta n dimensiones abiertas que está en el espacio euclidiano [4].

Esto significa que cerca de cada punto de la variedad se puede encontrar una región que actúa como una parte del espacio euclidiano de n dimensiones, como una parte de un plano, una línea recta o un espacio tridimensional. Esta propiedad local de parecerse al espacio euclidiano es lo que caracteriza a la variedad.

Definición A.0.3. (*Espacio métrico.*)

Dado un conjunto no vacío $M \neq \emptyset$ y una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \rightarrow d(a, b)$, se dice que d es una métrica si:

- d1. $d(a, b) \geq 0$
- d2. $d(a, a) = 0, \forall a \in M$
- d3. $d(a, b) = d(b, a)$
- d4. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

Así, (M, d) se denomina espacio métrico y $d(a, b)$ es la distancia [4].

Definición A.0.4. (*Conjunto Compacto*)

Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se llama compacto si es cerrado y acotado.

Por ejemplo $[0, 1]$ es acotado y cerrado, entonces $[0, 1]$ es compacto.

CÓDIGOS DE PYTHON

B.1. Planos de fase

Este código se utiliza para visualizar gráficamente el comportamiento dinámico de diferentes modelos, variando principalmente en la definición de la ecuación diferencial y los valores de los parámetros, incluye: ejemplo de Ecuaciones Lineales 1, la relación entre Carlos y Sofía. 2, 3, la ecuación logística 4, movimiento armónico simple 9, péndulo simple 11, péndulo perturbado 13, oscilador armónico amortiguado 15.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # Definir parametros
4 a = 1.0
5 # Crear un rango de valores para x e y
6 x = np.linspace(-1, 2, 20)
7 y = np.linspace(-1, 2, 20)
8 # Crear una malla de valores para x e y
9 X, Y = np.meshgrid(x, y)
10 # Definir las ecuaciones diferenciales del sistema
11 dx_dt = a * X * (1 - X)
12 dy_dt = Y
13 # Crear un campo de direcciones normalizado
14 magnitud = np.sqrt(dx_dt**2 + dy_dt**2)
15 dx_norm = dx_dt / magnitud
16 dy_norm = dy_dt / magnitud
17 # Crear el plano de fase
18 plt.figure(figsize=(8, 6))
19 plt.quiver(Y, X, dy_norm, dx_norm, angles='xy')
20 plt.xlabel('y') # Cambiar 'x' por 'y' en el eje x
21 plt.ylabel('x') # Cambiar 'y' por 'x' en el eje y
22 plt.xlim([-1, 1])
23 plt.ylim([-1, 2])
24 plt.grid(True)
25 plt.show()
```

B.2. Atractor de Lorenz

B.2.1. Comparación de 3 condiciones iniciales del atractor de Lorenz 5.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
4 from scipy.integrate import solve_ivp
5
6 def sistlorenz(t, xyz, sigma, r, b):
7     x, y, z = xyz
8     dxdt = s * (y - x)
9     dydt = x * (r - z) - y
10    dzdt = x * y - b * z
11    return [dxdt, dydt, dzdt]
12
13 # Parametros de Lorenz
14 s = 10.0
15 r = 28.0
16 b = 8.0 / 3.0
17
18 # Lista de condiciones iniciales para comparacion
19 condiciones_iniciales = [
20     [-8.0, 8.0, 27.0],
21     [0, 1.0, 1.0],
22     [0, -1.0, -1.0]
23 ]
24
25 t_s = (0, 100)
26 t_eval = np.linspace(*t_s, 10000)
27
28 fig = plt.figure(figsize=(10, 15))
29
30 #Iterar sobre las condiciones iniciales y resolver las ecuaciones diferenciales
31 for n, ic in enumerate(condiciones_iniciales, 1):
32     ax = fig.add_subplot(len(condiciones_iniciales), 1, n, projection="3d")
33     sol = solve_ivp(sistlorenz, t_s, ic, args=(s, r, b), t_eval=t_eval)
34     ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], sol.y[2], lw=0.5)
35     ax.set_xlabel("X")
36     ax.set_ylabel("Y")
37     ax.set_zlabel("Z")
38     ax.set_title(f"Inicial: {ic}")
39
40 plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.96])
41 plt.show()
```

B.2.2. Condición inicial lejos del origen para el atractor de Lorenz 6.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4
5 def lorenz(t, xyz, sigma, r, b):
6     x, y, z = xyz
7     dxdt = sigma * (y - x)
8     dydt = x * (r - z) - y
9     dzdt = x * y - b * z
10    return [dxdt, dydt, dzdt]
11
12 # Parametros de Lorenz
13 sigma = 10.0
14 r = 28.0
15 b = 8.0 / 3.0
16
17 condiciones_iniciales = [-20, -20, -20.0]
18 t_span = (0, 100)
19 t_eval = np.linspace(*t_span, 10000)
20
21 # Resolver ecuaciones diferenciales de Lorenz
22 sol = solve_ivp(lorenz, t_span, condiciones_iniciales, args=(sigma, r, b),
23                t_eval=t_eval)
24
25 # Visualizar el atractor de Lorenz
26 fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
27 ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
28 ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], sol.y[2], lw=0.5)
29 ax.set_xlabel("X")
30 ax.set_ylabel("Y")
31 ax.set_zlabel("Z")
32 plt.show()
```

B.3. Mapeo logístico 7.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Parametros
5 a_values = np.linspace(0, 4, 1000) # Valores de la tasa de crecimiento a
6 x_steps = 1000 # Pasos para iterar x
7 transient = 100 # Pasos para descartar en la simulacion inicial
8
9 # Funcion de la ecuacion logistica
10 def logistic_eq(x, a):
11     return a * x * (1 - x)
12
13 # Crear el plano de fase para diferentes valores de a
14 plt.figure(figsize=(10, 8))
15 for a in a_values:
16     x_vals = []
17     x = 0.1 # Condicion inicial
18     for _ in range(transient):
19         x = logistic_eq(x, a) # Descartar los primeros pasos
20     for _ in range(x_steps):
21         x_vals.append(x)
22         x = logistic_eq(x, a) # Iterar la ecuacion logistica
23     plt.plot([a] * x_steps, x_vals, ',b')
24
25 plt.xlabel('u')
26 plt.ylabel('f(x)')
27 plt.grid(True)
28 plt.show()
```

B.4. Exponente de Lyapunov del mapeo logístico 8.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def logistic_map(x, u):
5     return u * x * (1 - x)
6
7 def lyapunov_exponent(x0, u, num_iterations):
8     lyapunov_sum = 0
9     x = x0
10
11     for i in range(num_iterations):
12         # Calcular la derivada de la funcion logistica en el punto actual
13         dfidx = u - 2 * u * x
14
15         # Evitar la evaluacion del logaritmo cuando el denominador es cero
16         if dfidx != 0:
17             lyapunov_sum += np.log(np.abs(dfidx))
18
19         # Iterar el sistema dinamico
20         x = logistic_map(x, u)
21
22     # Calcular el promedio del exponente de Lyapunov
23     lyapunov = lyapunov_sum / num_iterations
24
25     return lyapunov
26
27 # Parametros del sistema
28 initial_x = 0.1
29 num_iterations = 700
30
31 # Valores de u en el rango de 0 a 4
32 u_values = np.linspace(0, 4, 700)
33
34 # Calcular el exponente de Lyapunov para cada valor de u
35 lyapunov_values = [lyapunov_exponent(initial_x, u, num_iterations) for u in
36                     u_values]
37
38 # Visualizar el exponente de Lyapunov en funcion de u
39 plt.plot(u_values, lyapunov_values)
40 plt.xlabel('u')
41 plt.xlim([0, 4])
42 plt.ylim([-5, 5])
43 plt.show()
```

B.5. Solución de la ecuación del péndulo simple 10.

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Definir la ecuacion diferencial del pendulo
6 def pendulo(t, y, l, g):
7     theta, omega = y
8     dydt = [omega, -(g/l)*np.sin(theta)]
9     return dydt
10
11 # Parametros del pendulo
12 longitud = 1.0 # Longitud del pendulo (metros)
13 gravedad = 9.81 # Aceleracion debida a la gravedad (m/s^2)
14 condiciones_iniciales = [np.pi/4, 0] # Angulo inicial y velocidad angular inicial
15
16 # Definir el tiempo de simulacion
17 t_inicio = 0
18 t_final = 10
19 t_puntos = 1000
20 t_span = np.linspace(t_inicio, t_final, t_puntos)
21
22 # Resolver la ecuacion diferencial
23 solucion = solve_ivp(pendulo, [t_inicio, t_final], condiciones_iniciales,
24                       args=(longitud, gravedad), t_eval=t_span)
25
26 # Extraer resultados
27 angulos = solucion.y[0, :]
28 velocidades = solucion.y[1, :]
29
30 # Graficar el angulo en funcion del tiempo
31 plt.figure(figsize=(10, 4))
32 plt.plot(solucion.t, angulos)
33 plt.xlabel('Tiempo (s)')
34 plt.ylabel('Angulo (rad)')
35 plt.title('Pendulo Simple')
36 plt.grid(True)
37 plt.show()
```

B.6. Trayectorias del péndulo simple 12

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 # Definir la funcion del sistema de ecuaciones diferenciales
6 def f(y, t):
7     return [y[1], - np.sin(y[0])]
8
9 # Definir el rango de tiempo
10 tspan = [0, 15]
11
12 # Definir el rango inicial para ci
13 ci = np.arange(-3*np.pi, 3*np.pi, 0.12)
14
15 # Crear la figura
16 plt.figure()
17
18 # Iterar sobre los valores iniciales en ci
19 for i in range(len(ci)):
20     # Resolver la ecuacion diferencial con diferentes condiciones iniciales
21     y_a = odeint(f, [ci[i], 0], np.linspace(tspan[0], tspan[1], 100))
22     ya = odeint(f, [ci[i], 1], np.linspace(tspan[0], tspan[1], 100))
23     ya2 = odeint(f, [ci[i], -1], np.linspace(tspan[0], tspan[1], 100))
24     plt.plot(y_a[:, 0], y_a[:, 1])
25     plt.plot(ya[:, 0], ya[:, 1])
26     plt.plot(ya2[:, 0], ya2[:, 1])
27
28 # Graficar las soluciones analiticas
29 x = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 100)
30 y = 2 * np.cos(x/2)
31 plt.plot(x, y, linewidth=1, color='k')
32 plt.plot(x, -y, linewidth=1, color='k')
33 plt.xlim([-2*np.pi, 2*np.pi])
34 plt.ylim([-np.pi, np.pi])
35 plt.xlabel('Posicion')
36 plt.ylabel('Velocidad')
37 plt.grid(True)
38 plt.show()
```

B.7. Trayectorias del péndulo perturbado 14.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 # Definir la funcion del sistema de ecuaciones diferenciales para el pendulo
6 # perturbado
7 def pendulo_perturbado(y, t, b):
8     return [y[1], -b * y[1] - np.sin(y[0])]
9
10 # Parametros del sistema
11 b = 0.1 # Coeficiente de amortiguamiento
12
13 # Definir el rango de tiempo
14 tspan = np.linspace(0, 15, 100)
15
16 # Definir el rango inicial para ci
17 ci = np.arange(-6*np.pi, 6*np.pi, 0.12)
18
19 # Crear la figura
20 plt.figure()
21
22 # Iterar sobre los valores iniciales en ci
23 for i in range(len(ci)):
24     # Resolver la ecuacion diferencial con diferentes condiciones iniciales
25     y = odeint(pendulo_perturbado, [ci[i], 0], tspan, args=(b,))
26     ya = odeint(pendulo_perturbado, [ci[i], 1], tspan, args=(b,))
27     ya2 = odeint(pendulo_perturbado, [ci[i], -1], tspan, args=(b,))
28     ya3 = odeint(pendulo_perturbado, [ci[i], 2], tspan, args=(b,))
29     ya4 = odeint(pendulo_perturbado, [ci[i], -2], tspan, args=(b,))
30     ya5 = odeint(pendulo_perturbado, [ci[i], 3], tspan, args=(b,))
31     ya6 = odeint(pendulo_perturbado, [ci[i], -3], tspan, args=(b,))
32     plt.plot(y[:, 0], y[:, 1])
33     plt.plot(ya[:, 0], ya[:, 1])
34     plt.plot(ya2[:, 0], ya2[:, 1])
35     plt.plot(ya3[:, 0], ya3[:, 1])
36     plt.plot(ya4[:, 0], ya4[:, 1])
37     plt.plot(ya5[:, 0], ya5[:, 1])
38     plt.plot(ya6[:, 0], ya6[:, 1])
39
40 plt.xlim([-3*np.pi, 3*np.pi])
41 plt.ylim([-np.pi, np.pi])
42 plt.xlabel('Posicion')
43 plt.ylabel('Velocidad')
44 plt.grid(True)
45 plt.show()
```

B.8. Trayectorias del oscilador armónico amortiguado 16.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 # Definir la funcion del sistema de ecuaciones diferenciales para el oscilador
  perturbado
6 def oscilador(y, t, omega, damping):
7     return [y[1], -2 * damping * omega * y[1] - omega**2 * y[0]]
8
9 # Parametros del sistema
10 omega = 1.0 # Frecuencia angular natural
11 damping = 1.5 # Coeficiente de amortiguamiento
12
13 # Definir el rango de tiempo
14 tspan = np.linspace(0, 15, 100)
15
16 # Definir el rango inicial para las condiciones iniciales
17 ci = np.arange(-6*np.pi, 6*np.pi, 0.12)
18
19 # Crear la figura
20 plt.figure()
21
22 # Iterar sobre los valores iniciales en ci
23 for i in range(len(ci)):
24     # Resolver la ecuacion diferencial con diferentes condiciones iniciales
25     y = odeint(oscilador, [ci[i], 0], tspan, args=(omega, damping))
26     ya = odeint(oscilador, [ci[i], 1], tspan, args=(omega, damping))
27     ya2 = odeint(oscilador, [ci[i], -1], tspan, args=(omega, damping))
28     ya3 = odeint(oscilador, [ci[i], 2], tspan, args=(omega, damping))
29     ya4 = odeint(oscilador, [ci[i], -2], tspan, args=(omega, damping))
30     ya5 = odeint(oscilador, [ci[i], 3], tspan, args=(omega, damping))
31     ya6 = odeint(oscilador, [ci[i], -3], tspan, args=(omega, damping))
32
33     plt.plot(y[:, 0], y[:, 1])
34     plt.plot(ya[:, 0], ya[:, 1])
35     plt.plot(ya2[:, 0], ya2[:, 1])
36     plt.plot(ya3[:, 0], ya3[:, 1])
37     plt.plot(ya4[:, 0], ya4[:, 1])
38     plt.plot(ya5[:, 0], ya5[:, 1])
39     plt.plot(ya6[:, 0], ya6[:, 1])
40
41 plt.xlim([-3*np.pi, 3*np.pi])
42 plt.ylim([-np.pi, np.pi])
43 plt.xlabel('Posicion')
44 plt.ylabel('Velocidad')
45 plt.grid(True)
46 plt.show()

```

B.9. Valores y vectores propios.

```
1 import numpy as np
2
3 # Definir una matriz
4 matrix = np.array([[2, -1],
5                    [1, 1]])
6
7 # Calcular los valores y vectores propios
8 eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(matrix)
9
10 # Imprimir los resultados
11 print("Valores propios:", eigenvalues)
12 print("Vectores propios:")
13 for i in range(len(eigenvalues)):
14     print("Valor propio:", eigenvalues[i])
15     print("Vector propio:", eigenvectors[:, i])
16     print()
```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Vladimir I. Arnol'd. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. 3ra edicion. Moscow, 1992. ISBN: 0-387-54813-0.
- [2] Paul Blanchard, Robert L. Devaney y Glen Hall. *Ecuaciones diferenciales*. ISBN: 968-7529-63-6.
- [3] Fred Brauer y John A. Nohel. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, 1969. ISBN: 0-486-65846-5.
- [4] Claus I. Doering y Artur O. Lopes. *Equacoes Diferenciais Ordinárias*. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. ISBN: 978-85-244-0425-2.
- [5] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. 2da edición. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company INC., 1980. ISBN: 0-89874-011-8.
- [6] Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. en. Elsevier, 2013. ISBN: 978-0-12-382010-5.
- [7] Bernard Kolman y David R. Hill. *Álgebra lineal*. 8va edicion. 2006. ISBN: 0-13-143740-2.
- [8] Ron Larson. *Fundamentos de álgebra lineal*. Séptima edición. México, 2013. ISBN: 978-1-133-11087-3.
- [9] Jorge Augusto Pérez Alcázar. *Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos*. 1a edición. Vol. Tomo II. Bogotá: Ediciones Ean, 2020. ISBN: 978-958-756-632-1.
- [10] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. third edition. E.E.U.U., 2001. ISBN: 0-387-95116-4.
- [11] Raymond A. Serway y John W. Jewett. *Physics for scientists and engineers*. 7th ed. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2006.
- [12] Steven H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. en. Second edition. OCLC: ocn842877119. Boulder, CO: Westview Press, a member of the Perseus Books Group, 2015. ISBN: 978-0-8133-4910-7.
- [13] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Vol. 3. Providence, Rhode Island, 2011.
- [14] Watermarkero. <https://github.com/pedro-aaron/MapeoLogistico-Lyapunov>. Marzo de 2020.
- [15] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 1990. ISBN: 3-540-97003-7.