

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

Formando líderes para la construcción de un nuevo país en paz



Estudio Teórico del Entrelazamiento y la Coherencia en Baterías Cuánticas

*Trabajo de grado presentado al programa de física
como requisito para obtener el título de **Físico***

Maria Fernanda Bustos Velasquez

Director:

(Ph.D.) Óscar Hernando Bohórquez Martínez

Facultad de Ciencias Básicas

Línea de Investigación

Física Teórica

Grupo de Investigación: *Óptica Moderna*

Semillero de Investigación: *Dinámica Cuántica*

2023

Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi profundo agradecimiento a todas las personas que formaron parte de mi proceso académico, su constante apoyo fue esencial para llevar a cabo este trabajo de grado.

En primer lugar, quiero agradecer al profesor Óscar H. Bohórquez, quien ejerció como director de esta tesis. Su dedicación y constante apoyo fueron fundamentales a lo largo de todo el desarrollo de este trabajo. Principalmente, agradezco por haber demostrado paciencia, confianza y una gran empatía. También quiero extender mis agradecimientos a los profesores Edilson A. Reyes y Jairo A. Mendoza por su dedicación y compromiso, y quienes desempeñaron el papel de evaluadores. Por otra parte, agradecer a los profesores del Departamento de Física y Geología que han sido parte de todo mi proceso académico y contribuyeron de manera positiva en mi formación.

Finalmente, quiero expresar un infinito agradecimiento a mi familia por su apoyo incondicional: a mis papás, mis hermanas y mi hermano. Han sido un pilar fundamental en mi vida académica y personal, y son el motor que me impulsa a continuar. También expresar mi gratitud a mis amigos y amigas, quienes estuvieron presentes en diferentes momentos de este proceso y cuyo apoyo fue invaluable para superar los desafíos que encontré en el camino.

Resumen

La termodinámica, como marco fenomenológico fundamental, proporciona una descripción de sistemas en el régimen macroscópico. Sin embargo, a escalas más pequeñas, los principios de la teoría macroscópica de la termodinámica no se pueden aplicar en el régimen microscópico. En este contexto, se plantea un desafío significativo en la comunidad científica: la formulación de los principios de la termodinámica para sistemas en el régimen cuántico. Un tema de gran interés en este campo, es el estudio de las baterías cuánticas. En los últimos años, esta área ha ganado una relevancia significativa debido a sus implicaciones en el desarrollo de tecnologías más eficientes. La importancia de las baterías cuánticas subyace en su potencial para superar las limitaciones de las baterías convencionales, así como su capacidad de mejorar procesos clave en el almacenamiento de energía y a la vez aumentar la eficiencia en los procesos de carga y descarga, lo que resulta en una mayor vida útil de las baterías. Estos avances se logran mediante la explotación de recursos cuánticos, como la coherencia y el entrelazamiento cuántico. El objetivo principal del presente trabajo consiste en analizar las implicaciones de los efectos cuánticos en el rendimiento de los procesos de autodescarga en baterías. Este proceso es análogo a los procesos de decaimiento de energía inherentes en baterías convencionales. En este estudio, se analizan las ventajas derivadas del aprovechamiento de la coherencia como recurso para optimizar la ergotropía, que representa la energía útil en sistemas de un qubit. Además, se extiende el modelo a sistemas de N -qubits interactuantes, con el fin de explorar el recurso del entrelazamiento cuántico y analizar el decaimiento colectivo que deriva de la interacción entre baterías (qubits). En este estudio, también se analiza la influencia de la geometría en la que se configura el sistema para arreglos de $N = 4$ y $N = 5$ baterías para determinar el efecto de la geometría en los tiempos de decaimiento en el proceso de autodescarga del sistema.

Abstract

Thermodynamics, as a fundamental phenomenological framework, provides a description of systems in the macroscopic regime. Nevertheless, at smaller scales, the principles of the macroscopic theory of thermodynamics cannot be applied in the microscopic regime. In this context, a major challenge in the scientific community arises: the formulation of the principles of thermodynamics for systems in the quantum regime. A topic of great interest in this field is the study of quantum batteries. In recent years, this area has gained significant relevance due to its implications for the development of more efficient technologies. The importance of quantum batteries lies in their potential to overcome the limitations of conventional batteries, as well as their ability to improve key energy storage processes while increasing the efficiency of charging and discharging processes, resulting in longer battery lifetimes. These advances are achieved by exploiting quantum resources such as coherence and quantum entanglement. The main objective of this work is to analyse the implications of quantum effects on the performance of self-discharging processes in batteries. This process is analogous to the energy decay processes inherent in conventional batteries. In this study, the advantages of using coherence as a resource to optimise the ergotropy, which represents the useful energy in single-qubit systems, are analysed. In addition, the model is extended to systems of interacting N -qubits, in order to explore the resource of quantum entanglement and to analyse the collective decay resulting from the interaction between batteries (qubits). In this study, the influence of the geometry in which the system is configured for arrays of $N = 4$ and $N = 5$ batteries is also analysed to determine the effect of the geometry on the decay times in the self-discharging process of the system.

Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
1. Introducción	1
2. Sistemas Cuánticos Cerrados	3
2.1. Evolución Unitaria	3
2.2. Operador de Estado	6
2.2.1. Estados Puros	7
2.2.2. Estados Mixtos	7
2.2.3. Estados Térmicos	8
2.2.4. La Esfera de Bloch	9
2.2.5. Imágenes en Mecánica Cuántica	11
2.2.6. Sistemas Compuestos	12
2.3. Ergotropía	14
2.3.1. Estados Pasivos	14
2.3.2. Una derivación cerrada para la ergotropía	15
2.4. Recursos Cuánticos	17
2.4.1. Coherencia Cuántica	17
2.4.2. Entrelazamiento Cuántico	19
3. Sistemas Cuánticos Abiertos	23
3.1. De sistemas cuánticos cerrados a sistemas abiertos	23
3.2. Ecuación de Lindblad	24
3.3. Aproximaciones	27
3.3.1. Aproximación de Born	27
3.3.2. Aproximación de Markov	28
3.3.3. Aproximación Secular	29
3.4. Modelo de baterías cuánticas	29
3.4.1. Una Única Celda de Batería	30
3.4.2. Múltiples Baterías	31
4. Resultados	33
4.1. Una única batería	33
4.1.1. Dinámica del Sistema	33
4.1.2. Batería Acoplada a un Campo Externo Resonante	42
4.2. Múltiples Baterías	44
4.2.1. Cadena Lineal de N Baterías	45

4.2.2. Explorando Efectos de Geometría	49
4.2.3. Coherencia vs Entrelazamiento	54
4.2.4. Realizaciones Experimentales	55
5. Conclusiones	57
6. Perspectivas	59
A. Apéndice A	64
B. Apéndice B	66

1. Introducción

El avance significativo en la investigación de nuevas tecnologías cuánticas en las últimas décadas se corresponde a la constante necesidad científica de explorar y entender los fenómenos físicos a escalas cada vez más pequeñas. Esto ha llevado a creer que actualmente nos encontramos en medio de lo que se conoce como la segunda revolución cuántica. A pesar de que tanto la primera como la segunda revolución comparten la característica distintiva de ser consideradas como hitos fundamentales que redefinieron los paradigmas de la física y la tecnología, es importante mencionar que la primera revolución cuántica, que tuvo lugar en la primera mitad del siglo XX, marcó un punto de inflexión crucial al trastocar las concepciones clásicas de la física. Este hito condujo a la formulación de la teoría cuántica para poder entender los fenómenos en la escala microscópica. Por otro lado, la segunda revolución cuántica se caracteriza por explotar y usar los principios cuánticos para el desarrollo de nuevas tecnologías, e incrementar la eficiencia de tecnologías ya existentes. Este desarrollo ha suscitado un gran interés por parte de la comunidad científica en el estudio de los fenómenos cuánticos y la posibilidad de aprovechar estos efectos como nuevos recursos [1, 2, 3].

Esta creciente atención derivó en la necesidad de comprender la termodinámica en sistemas que se encuentran en el límite del régimen nanoscópico, a raíz de ello surgió una nueva interrogante acerca de si los principios de la termodinámica formulados para los sistemas macroscópicos eran igualmente válidos al considerar sistemas en escalas microscópicas. Esto representó un nuevo reto de fundamental importancia para la comunidad científica: la formulación de los principios de la termodinámica para sistemas en el régimen cuántico, dando lugar al campo emergente conocido como Termodinámica Cuántica, cuyo enfoque central está direccionado en la búsqueda de una teoría que permita extender y conectar los conceptos del mundo macroscópico descrito por la leyes convencionales de la termodinámica y el mundo microscópico descrito por la mecánica cuántica [4, 5, 6, 7].

El incremento de la tendencia a la miniaturización de los dispositivos tecnológicos junto con los avances de la teoría cuántica, han impulsado a la física a investigar la posibilidad de usar sistemas cuánticos como baterías, en la perspectiva de alimentar dispositivos microscópicos, y de mejorar la eficiencia del almacenamiento de energía existente [8, 9, 10]. En este contexto se introduce el término *baterías cuánticas* que fue inicialmente acuñado por R. Alicki y M. Fannes para describir pequeños sistemas cuánticos que realizan la misma tarea que las baterías convencionales, por lo tanto permiten almacenar energía de forma temporal para ser utilizada posteriormente mediante la transferencia a un centro de consumo [6, 11, 12]. En su trabajo investigaron acerca de la máxima cantidad de trabajo que podía ser extraída de un sistema de N baterías entrelazadas cuánticamente. Al encontrarse una mayor eficiencia en la cantidad de trabajo extraíble de un sistema multipartito de N copias idénticas entrelazadas, fue marcado un punto de partida fundamental

dentro de la posibilidad de usar las correlaciones no clásicas tales como la coherencia y el entrelazamiento cuántico como recursos para mejorar procesos clave de almacenamiento de energía y extracción de trabajo, en comparación con su contraparte clásica [4, 6, 13].

Este trabajo de grado se centra en explorar la ventaja proporcionada por recursos cuánticos como la coherencia y el entrelazamiento en sistemas de dos niveles que trabajan como baterías cuánticas, buscando determinar los efectos en el proceso de autodescarga, entendido este como la descarga natural de cualquier batería que aún no está conectada a un centro de consumo [11, 14]. Este trabajo está direccionado a analizar los modelos propuestos por A. Santos en su artículo *Quantum advantage of two-level batteries in the self-discharging process*. Estos son: una única batería y N-baterías interactuantes, estos sistemas son preparados en un estado inicial de máxima coherencia. De manera general, estos modelos incluyen los efectos disipativos de la interacción con el entorno que causan la autodescarga y para el caso de múltiples baterías, los efectos de disipación colectiva que emergen de la interacción entre las baterías. Con el objetivo de cuantificar la ventaja cuántica, también se analizan sistemas preparados en un estado análogo clásico, el cual es construido de manera que sirva como comparación clásica para cada sistema cuántico. Los resultados del trabajo de Santos se reproducen y se extienden para analizar el desempeño de sistemas preparados en un estado inicial de máximo entrelazamiento, de este modo, se determina el papel de este recurso cuántico en los procesos de autodescarga de energía.

El desarrollo de este trabajo de grado está estructurado en 5 Capítulos. Con el fin de entender los resultados, es necesario introducir una visión general de los sistemas cuánticos cerrados y abiertos. Por lo tanto la estructura será la siguiente: En el Capítulo 2 se plantea la introducción al formalismo de sistemas cerrados donde se aborda la dinámica unitaria, y también se define una cantidad importante en el contexto de los procesos de almacenamiento de energía: la ergotropía. Además, se describe el operador de estado como herramienta matemática fundamental para describir el estado cuántico del sistema, y se introducen las nociones de coherencia y entrelazamiento cuántico. El Capítulo 3 se centra en dar una visión general de la teoría de sistemas abiertos permitiendo la comparación con la descripción del formalismo de sistemas cerrados. En este capítulo se abordará específicamente la ecuación de Lindblad, las aproximaciones de Born, Markov y Secular así como los respectivos sistemas físicos que se pueden modelar. El Capítulo 4 presenta los resultados de la implementación teórica-computacional con el respectivo análisis para los dos tipos de sistemas planteados, la comparación con su correspondiente análogo clásico y la extensión del modelo con respecto al entrelazamiento cuántico. El Capítulo 5 sintetiza el análisis y las conclusiones más significativas del trabajo de grado.

2. Sistemas Cuánticos Cerrados

Desde una perspectiva teórica, existe una distinción fundamental entre dos tipos de sistemas utilizados para estudiar el comportamiento de la naturaleza: los sistemas cerrados y los sistemas abiertos. Estos paradigmas representan diferentes enfoques para analizar la interacción entre sistemas cuánticos y su entorno. Aunque solo los sistemas abiertos describen adecuadamente el comportamiento de los sistemas en la naturaleza, nuestro enfoque en este capítulo se centra en los sistemas cuánticos cerrados, es decir, aquellos que al estar aislados, no están sujetos a ningún tipo de interacción con el entorno y por lo tanto conservan la energía total del sistema. En el desarrollo de este capítulo estableceremos los conceptos teóricos fundamentales necesarios para entender y describir la evolución temporal de los sistemas cuánticos cerrados, y presentaremos el concepto de operador densidad, junto con los tipos de estados cuánticos que permiten la descripción de sistemas físicos, estos son: los estados puros y los estados mixtos. También abordaremos el origen del concepto de ergotropía a partir de los principios fundamentales de la termodinámica así como la introducción de dos recursos cuánticos: la coherencia y el entrelazamiento.

2.1. Evolución Unitaria

La mecánica cuántica establece que la evolución a través del tiempo de un vector de estado $|\psi\rangle$ de un sistema cerrado es unitaria. En consecuencia, esta evolución se rige por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo [15, 16], lo que nos permite conocer el estado del sistema para cualquier tiempo posterior a partir de un estado inicial [17]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

donde el operador hermítico $\hat{\mathcal{H}}$ es el Hamiltoniano que representa la energía total del sistema, mientras que $\hbar$ denota la constante reducida de Planck. La solución a la ecuación 2.1 se puede establecer de manera precisa cuando se conoce el vector de estado $|\psi(t_0)\rangle$ en un tiempo inicial $t = t_0$, en este caso, la solución queda definida en términos de un operador unitario:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad t > t_0. \quad (2.2)$$

Aquí, los dos vectores de estado están relacionados a través del operador unitario de evolución temporal $\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)$, el cual al ser aplicado sobre un estado en t_0 permite obtener la información del estado en cualquier tiempo posterior t . Los operadores unitarios son herramientas fundamentales en la teoría cuántica y son utilizados para representar diversas

transformaciones, como traslaciones espaciales, rotaciones o evoluciones temporales. El operador unitario de evolución temporal satisface las siguientes propiedades:

- **Unitariedad:** La propiedad fundamental de este operador es la unitariedad, que implica la preservación de la norma de los estados a lo largo del tiempo. Esto garantiza la conservación de la probabilidad al no presentarse pérdida de información durante la evolución del sistema. Esta propiedad se expresa mediante la relación

$$\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) = \hat{1}. \quad (2.3)$$

- **Continuidad del tiempo:** Los operadores unitarios aseguran la invarianza del estado cuando el estado inicial y el estado final son idénticos. En otras palabras, dado que el tiempo es un parámetro continuo se cumple

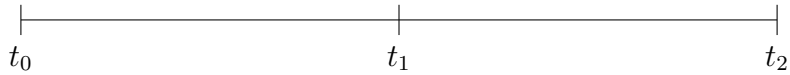
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t_0, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{\mathcal{U}}(t_0, t_0) = \hat{1}. \quad (2.4)$$

Cuando un sistema evoluciona desde un tiempo t_0 a un tiempo t , en el límite cuando $t \rightarrow t_0$, el vector de estado no cambia y por lo tanto el operador evolución temporal actúa como el operador identidad.

- **Relación de Composición:** La propiedad de composición para un operador unitario establece que la evolución temporal desde un estado en t_0 a uno en t_2 es equivalente a la evolución con un paso intermedio t_1 , es decir: Esto implica que



$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t_2, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad t_2 > t_0.$$



$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t_2, t_1) \hat{\mathcal{U}}(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad t_2 > t_1 > t_0.$$

el operador se puede descomponer como $\hat{\mathcal{U}}(t_2, t_0) = \hat{\mathcal{U}}(t_2, t_1) \hat{\mathcal{U}}(t_1, t_0)$. Al considerar que el sistema experimenta una evolución temporal infinitesimal, el estado cambia de forma tal que la evolución sobre un tiempo infinitesimal δt se puede escribir de la forma

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t + \delta t, t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.5)$$

al hacer uso de la condición de continuidad para un δt muy pequeño, el operador evolución temporal actúa como el operador identidad

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \hat{\mathcal{U}}(t + \delta t, t) = \hat{1}. \quad (2.6)$$

Esto nos permite reescribir el operador evolución temporal infinitesimal en términos del generador de evolución del sistema, es decir, el Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\mathcal{U}}(t + \delta t, t) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} \delta t. \quad (2.7)$$

El operador evolución temporal infinitesimal debe satisfacer la propiedad de composición, por lo tanto para un $t + \delta t > t > t_0$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(t + \delta t, t_0) &= \hat{\mathcal{U}}(t + \delta t, t) \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} \delta t \right) \hat{\mathcal{U}}(t, t_0), \\ \hat{\mathcal{U}}(t + \delta t, t_0) - \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) &= -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) \delta t.\end{aligned}\quad (2.8)$$

De aquí, se puede obtener la ecuación de Schrödinger correspondiente al operador evolución temporal

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{U}}(t, t_0). \quad (2.9)$$

Algunas de las posibles soluciones de la ecuación 2.9 dependen de la naturaleza del operador Hamiltoniano [15, 18], por lo tanto se pueden considerar tres casos particulares:

1. Sí el Hamiltoniano del sistema no depende explícitamente del tiempo, la solución de esta ecuación está dada de la forma:

$$\hat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} (t - t_0) \right\}. \quad (2.10)$$

2. Sí el Hamiltoniano es dependiente del tiempo pero para tiempo distintos conmuta $[\hat{\mathcal{H}}(t), \hat{\mathcal{H}}(t')] = 0$, la solución se expresa como:

$$\hat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{\mathcal{H}}(t') dt' \right\}. \quad (2.11)$$

3. El Hamiltoniano es dependiente del tiempo, sin embargo para instantes de tiempo diferentes los operadores $\hat{\mathcal{H}}$ no conmutan, la solución se define de la forma:

$$\hat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \hat{\mathcal{T}} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{\mathcal{H}}(t') dt' \right\}. \quad (2.12)$$

Donde el término $\hat{\mathcal{T}}$ es conocido como operador ordenamiento temporal, el cual ordena el producto de operadores tiempo dependientes de un tiempo menor a un tiempo mayor, por lo tanto el ordenamiento de los operadores con argumentos temporales se da con un incremento de derecha a izquierda. Para una pareja de operadores bosónicos en tiempos diferentes, el producto ordenado en el tiempo se define como

$$\hat{\mathcal{T}} \left\{ \hat{\mathcal{H}}(t_1) \hat{\mathcal{H}}(t_2) \right\} = \begin{cases} \hat{\mathcal{H}}(t_1) \hat{\mathcal{H}}(t_2), & t_1 > t_2. \\ \hat{\mathcal{H}}(t_2) \hat{\mathcal{H}}(t_1), & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

De manera explícita:

$$\hat{\mathcal{T}} \left\{ \hat{\mathcal{H}}(t_1) \hat{\mathcal{H}}(t_2) \right\} = \theta(t_1 - t_2) \hat{\mathcal{H}}(t_1) \hat{\mathcal{H}}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{\mathcal{H}}(t_2) \hat{\mathcal{H}}(t_1), \quad (2.14)$$

donde $\theta(t)$ representa la función escalón de Heaviside, la cual se define como

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

2.2. Operador de Estado

En términos generales, un vector de estado $|\psi\rangle$ representa el estado de un sistema cuántico. Por otro lado, el concepto de operador densidad, o también llamado matriz densidad cuyo formalismo e introducción se atribuyen a J. von Neumann en 1927, surge como un mecanismo para describir la estadística de los estados desde el marco de la mecánica cuántica, proporcionando una herramienta más amplia que permite generalizar el concepto de vector de estado [15, 19, 20, 21]. Este objeto matemático permite describir ensambles de sistemas físicos que pueden ser puros o mixtos (los cuales serán descritos más adelante). En general, el operador de estado se define como la suma estadística del producto exterior de diferentes estados $|\psi_i\rangle$, cada uno asociado a una probabilidad p_i :

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|. \quad (2.16)$$

Existen ciertas condiciones fundamentales que deben ser garantizadas para que un operador sea considerado un operador densidad:[15, 19]

- **Traza unitaria:** esta condición está relacionada con la conservación de la probabilidad:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \sum_i p_i = 1. \quad (2.17)$$

- **Hermiticidad:** El operador densidad debe ser hermítico:

$$\hat{\rho}^\dagger = \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \right)^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (2.18)$$

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}. \quad (2.19)$$

- **Positividad:** esta condición establece que todos los autovalores de la matriz densidad son no negativos:

$$\langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_i\rangle \geq 0, \quad \forall |\hat{\psi}_i\rangle. \quad (2.20)$$

Por lo tanto se garantiza que para todo vector de estado, los elementos diagonales de la matriz densidad son siempre positivos, dado que estos elementos diagonales están relacionados con las probabilidades.

El operador de estado contiene toda la información físicamente relevante del sistema. Por lo tanto, para calcular el valor esperado de un observable $\hat{A}$ en un estado representado por la matriz densidad se halla la traza sobre el producto entre el observable y el operador de estado[19]

$$\langle\hat{A}\rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\}. \quad (2.21)$$

Dentro del formalismo del operador densidad, resulta esencial definir su evolución en el tiempo. A partir de la ecuación de Schrödinger 2.1 podemos generalizar la evolución

temporal unitaria para los estados descritos por el operador densidad, lo que nos conduce a la conocida ecuación de von Neumann [19, 22]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t)], \quad (2.22)$$

cuya solución está dada de la forma

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0), \quad (2.23)$$

donde $\hat{\rho}(t_0)$ representa el operador que describe el estado del sistema en el tiempo inicial y $\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)$ el operador evolución temporal de la forma 2.10-2.12.

2.2.1. Estados Puros

Un estado puro es un ensamble en el que todos los sistemas son idénticamente preparados, y al estar descritos por el mismo vector de estado $|\psi\rangle$ tienen la misma probabilidad. En consecuencia, la matriz densidad de este tipo de estados sólo contiene un elemento distinto de cero y se definen como [18, 23]:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.24)$$

Una manera de caracterizar estos estados puros es mediante la cantidad conocida como "pureza", que para estados puros debe cumplir la condición:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} = 1. \quad (2.25)$$

2.2.2. Estados Mixtos

Un estado mixto o también denominado estado no-puro, se refiere a un ensamble mixto en los que un conjunto de sistemas no se puede describir mediante un solo vector de estado $|\psi\rangle$. En otras palabras, estos estados se representan como una mezcla estadística de estados puros [15, 19, 20]. La matriz densidad para estados mixtos se expresa de la forma

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.26)$$

Donde los p_i son distintos de cero y satisfacen las siguientes condiciones:

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (2.27)$$

Al igual que en el caso de los estados puros, podemos distinguir los estados mezclados mediante la pureza, que en este caso debe cumplir:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} < 1. \quad (2.28)$$

2.2.3. Estados Térmicos

Los estados térmicos también conocidos como estados de equilibrio térmico o estados de Gibbs, son un tipo de estados cuánticos utilizados para describir sistemas físicos cuando se encuentra en equilibrio térmico con su entorno [4, 24]. Estos estados se pueden definir como:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}}{\mathcal{Z}}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad \mathcal{Z} = \text{Tr}\left\{e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}\right\}, \quad (2.29)$$

donde $\mathcal{Z}$ representa la función de partición. Dado un operador auto-adjunto, podemos encontrar una base ortonormal compuesta por sus vectores propios. El teorema espectral, en este contexto, nos permite descomponer este operador en términos de operadores de proyección, los cuales se construyen a partir de los vectores propios correspondientes. Para un Hamiltoniano de un sistema de dos niveles, podemos expresar el operador en una forma diagonal. Esta representación se llama descomposición espectral y se define como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^2 \varepsilon_n |\varepsilon_n\rangle \langle \varepsilon_n|. \quad (2.30)$$

Utilizando el teorema espectral, que expresa la forma en que una función que actúa sobre un operador hermítico diagonal:

$$f(\hat{\mathcal{H}}) = \sum_{n=1}^2 f(\varepsilon_n) |\varepsilon_n\rangle \langle \varepsilon_n|, \quad (2.31)$$

se puede expresar el estado térmico a partir de considerar el siguiente parámetro:

$$r_\tau = \frac{1 - e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}}, \quad (2.32)$$

siendo $\varepsilon_{1,2} = \pm\varepsilon/2$. Por lo tanto se obtiene:

$$\hat{\rho} = \left(\frac{1+r_\tau}{2}\right) |\varepsilon_1\rangle \langle \varepsilon_1| + \left(\frac{1-r_\tau}{2}\right) |\varepsilon_2\rangle \langle \varepsilon_2|. \quad (2.33)$$

Esta forma en la que se presenta el estado térmico nos permite identificar estados puros y mixtos a partir de aplicar ciertas condiciones,

- Sí consideramos el límite en el que la temperatura $T \rightarrow 0$, entonces el parámetro $\beta \rightarrow \infty$ y la relación $r_\tau \rightarrow 1$. En este caso, la ecuación 2.33 se reduce a la forma de un estado puro:

$$\hat{\rho} = |\varepsilon_1\rangle \langle \varepsilon_1|. \quad (2.34)$$

- Por otro lado, si consideramos el límite en el que la temperatura tienda infinito $T \rightarrow \infty$, entonces el parámetro $\beta \rightarrow 0$ y la relación $r_\tau \rightarrow 0$. En esta situación, la ecuación para el estado térmico toma la forma de un estado mixto conocido como *estado de máxima mezcla*:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} |\varepsilon_1\rangle \langle \varepsilon_1| + \frac{1}{2} |\varepsilon_2\rangle \langle \varepsilon_2|. \quad (2.35)$$

2.2.4. La Esfera de Bloch

La esfera de Bloch es una representación geométrica fundamental que originalmente fue desarrollada por F. Bloch [25]. Es utilizada para visualizar y analizar estados cuánticos en sistemas de dos niveles (qubits) y proporciona un medio para mapear los estados cuánticos en una esfera unitaria tridimensional, cuya base está compuesta por los autovectores del operador $\hat{\sigma}_z$. Estos son:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Por lo tanto, el estado de un qubit en la base de la esfera de Bloch se puede definir como:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (2.37)$$

En la figura 2.1 se muestra la representación del estado de un qubit $|\psi\rangle$ como una combinación lineal de los estados en la base ortonormal de la esfera de Bloch. En esta representación, las coordenadas θ y ϕ son números reales que cumplen con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

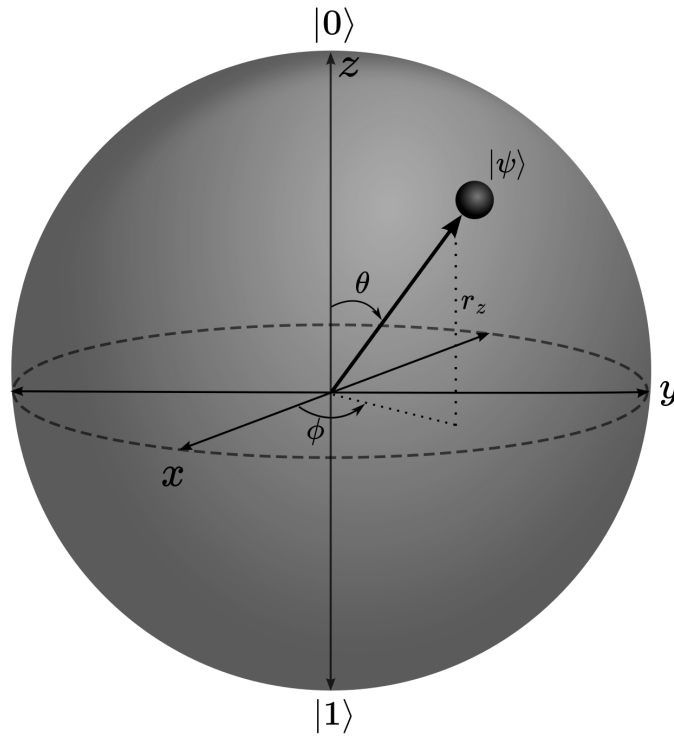


Figura 2.1: Representación de el estado $|\psi\rangle$ en la esfera de Bloch.

El operador densidad para este caso se puede representar como una matriz 2x2 de la forma:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & 1 - \rho_{00} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

La esfera de Bloch permite visualizar el formalismo del operador densidad para qubits. En este enfoque, la matriz densidad se puede expresar en términos de un vector $\vec{r}$ denominado el vector de Bloch (esto es cierto en general para cualquier operador de dos niveles). Este vector representa las coordenadas en la esfera de Bloch y su relación con el operador densidad es:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \vec{r} \cdot \hat{\sigma}), \quad (2.39)$$

donde $\hat{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ y $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ son las coordenadas del vector de Bloch, que corresponden al valor esperado del operador de Pauli correspondiente, es decir $r_i = \langle \sigma_i \rangle$. Esto conduce a la expresión en coordenadas cartesianas para el operador densidad:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Estas coordenadas también se relacionan con los elementos de la matriz densidad mediante:

$$r_x = \text{Tr}\{\hat{\rho}\sigma_x\} = \rho_{01} + \rho_{01}^*, \quad (2.41)$$

$$r_y = \text{Tr}\{\hat{\rho}\sigma_y\} = i(\rho_{01} - \rho_{01}^*), \quad (2.42)$$

$$r_z = \text{Tr}\{\hat{\rho}\sigma_z\} = 2\rho_{00} - 1. \quad (2.43)$$

Los estados cuánticos de un qubit se pueden visualizar en la esfera de Bloch, y pueden ser estados puros o mixtos, de manera que:

1. **Estados puros:** Sí la norma del vector de Bloch satisface que $|\vec{r}| = 1$, el estado correspondiente se ubica en la superficie de la esfera de Bloch.
2. **Estados mixtos:** Sí $|\vec{r}| < 1$ el punto que representa el vector de Bloch ubica el estado dentro de la esfera.

Además, es importante destacar que existe un estado cuántico particular, el cual es ubicado en el centro de la esfera de Bloch. Este estado corresponde al que previamente se denominó *estado máximamente mezclado*. En la figura 2.2 se pueden identificar estos estados cuánticos en la representación de la esfera de Bloch.

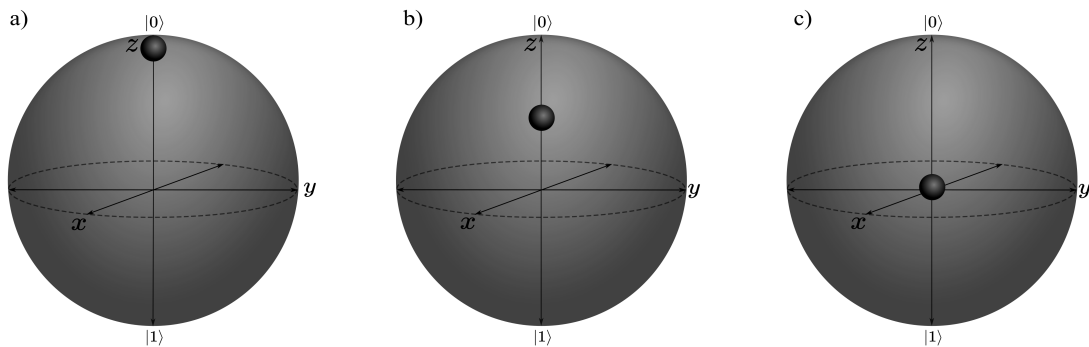


Figura 2.2: Representación de estados cuánticos en la esfera de Bloch. a) Estado puro. b) Estado mixto. c) Estado de máxima mezcla.

El vector de Bloch también se puede expresar como $\vec{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$, obteniéndose la forma general para el operador densidad en coordenadas esféricas

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r \cos \theta & r \sin \theta e^{-i\phi} \\ r \sin \theta e^{i\phi} & 1 - r \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Cabe resaltar que, si consideramos el caso límite cuando $\theta = 0$, las coherencias desaparecen, llevando al estado cuántico a ubicarse sobre el eje z de la esfera de Bloch. En contraste, si $\theta = \pi/2$, el estado cuántico exhibe máxima coherencia.

2.2.5. Imágenes en Mecánica Cuántica

Las imágenes en la teoría cuántica son representaciones matemáticas que permiten describir la dinámica de sistemas cuánticos de forma equivalente entre si. Las tres más importantes son la imagen de Schrödinger, de Heisenberg y de Interacción.

Imagen de Schrödinger

La imagen de Schrödinger, es la representación donde los vectores de estado evolucionan en el tiempo pero los operadores (u observables) permanecen estacionarios[17]. La evolución temporal del sistema se describe mediante la ecuación de Schrödinger de la forma de la ecuación 2.1, con solución $|\alpha(t)\rangle = \hat{U} |\alpha(0)\rangle$. En la imagen de Schrödinger, la evolución del operador de estado descrita por la ecuación de Von Neumann se define como

$$\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}]. \quad (2.45)$$

Imagen de Heisenberg

En esta imagen, son los operadores (u observables) los que evolucionan. Por lo tanto, adquieren una dependencia temporal, mientras que los estado permanecen estacionarios, en otras palabras, el estado no se ve afectado por el operador evolución unitaria, por lo que siempre es el mismo en cualquier instante de tiempo $|\alpha(t)\rangle = |\alpha(0)\rangle$ [17, 26]. Los observables en la imagen de Heisenberg se definen mediante la transformación unitaria

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A} \hat{U}(t, t_0). \quad (2.46)$$

La ecuación de movimiento que describe la dinámica del observable en la imagen de Heisenberg está definida de la forma

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}(t), \hat{\mathcal{H}}]. \quad (2.47)$$

Imagen de Interacción

La imagen de Schrödinger y de Heisenberg son casos límites de una imagen más general denominada la imagen de interacción [27]. Por lo tanto, es definida como combinación de la imagen de Schrödinger y la imagen de Heisenberg donde los operadores y los estados adquieren la dependencia temporal. En esta representación, se separa el sistema en una parte libre sin perturbación $\hat{\mathcal{H}}_0$ y una parte de interacción $\hat{\mathcal{H}}_I$ de manera que los estados evolucionan con el Hamiltoniano de interacción y los observables con el Hamiltoniano libre.

1. **Operadores:** Los operadores en la imagen de interacción transforman como $\hat{A}_I(t) = \exp\{i\hat{\mathcal{H}}_0 t\} \hat{A} \exp\{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t\}$. Estos evolucionan temporalmente con el Hamiltoniano libre

$$\frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}_I(t), \hat{\mathcal{H}}_0]. \quad (2.48)$$

2. **Estados:** Un vector de estado en la imagen de interacción se define $|\alpha(t)\rangle_I = \exp\{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t/\hbar\} |\alpha(t_0)\rangle$. La ecuación de movimiento mediante la cual evolucionan

$$\frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle_I = -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_I(t) |\alpha(t)\rangle_I. \quad (2.49)$$

3. **Operador Densidad:** El operador de estado transforma de la misma forma que los operadores en la imagen de interacción, es decir, $\hat{\rho}_I(t) = \exp\{i\hat{\mathcal{H}}_0 t\} \hat{\rho}_s \exp\{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t\}$, donde $\hat{\rho}_s$ representa el operador densidad en la imagen de Schrödinger. La ecuación de movimiento de Von Neumann en la imagen de interacción toma la forma

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_I(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{\rho}_I(t)]. \quad (2.50)$$

2.2.6. Sistemas Compuestos

Cuando se estudian sistemas cuánticos más complejos, una de las preguntas fundamentales es cómo describir el estado cuántico de sistemas compuestos por dos o más subsistemas. Esto es especialmente relevante en contextos donde múltiples componentes interactúan y dan lugar a un estado global. Un sistema bipartito consta de dos subsistemas 1 y 2, cuyos estados cuánticos residen en espacios de Hilbert $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_2$ respectivamente. El espacio de estado del sistema compuesto se define mediante el producto tensorial como $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$. Cada subsistema posee su propio conjunto de estados base, que son los autoestados de un observable dado; entonces denotados como $\{|\alpha_i\rangle^{(1)}\}$ los autoestados de un observable $\hat{A}^{(1)}$, y $\{|\beta_j\rangle^{(2)}\}$ los autoestados de un observable $\hat{A}^{(2)}$. Los estados propios que forman la base del sistema compuesto se representan mediante el producto tensorial de los estados base de cada subsistema. Esta combinación se expresa de varias formas equivalentes:

$$\left\{ |\alpha_i, \beta_j\rangle \equiv |\alpha_i\rangle^{(1)} \otimes |\beta_j\rangle^{(2)} \equiv |\alpha_i\rangle^{(1)} |\beta_j\rangle^{(2)} \right\}. \quad (2.51)$$

Cuando cada subsistema puede ser manipulado de manera individual se dice que el estado completo es separable, y el operador de estado global del sistema se construye mediante el producto tensorial de los operadores de estado individuales de cada subsistema, es decir, $\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)}$.

Operadores en el Espacio Compuesto

Sean $\{\hat{A}_i^{(1)}\}$ y $\{\hat{A}_j^{(2)}\}$ el conjunto de operadores que actúan en los espacios de cada subsistema. En el espacio compuesto definimos un conjunto de operadores $\{\hat{A}_k = \hat{A}_i^{(1)} \otimes \hat{A}_j^{(2)}\}$, los cuales forman una base completa generada en $\mathbb{H}$, por lo tanto estos observables

conmutan $[\hat{A}_i^{(1)}, \hat{A}_j^{(2)}] = 0$. Los operadores sólo actúan de manera no trivial sobre los estados de sus respectivas bases [16], es decir

$$\hat{A}_k |\alpha_i, \beta_j\rangle = \hat{A}_i^{(1)} \otimes \hat{A}_j^{(2)} |\alpha_i\rangle^{(1)} \otimes |\beta_j\rangle^{(2)} = \hat{A}_i^{(1)} |\alpha_i\rangle^{(1)} \otimes \hat{A}_j^{(2)} |\beta_j\rangle^{(2)} \quad (2.52)$$

El valor esperado de $\hat{A}_k$ se puede definir mediante la traza del operador densidad y el observable utilizando cada definición en términos de las partes de cada subsistema

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}_k \rangle &= \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{A}_k \} \\ &= \sum_{ij} \langle \alpha_i, \beta_j | \hat{\rho}^{(1)} \hat{A}_i^{(1)} \otimes \hat{\rho}^{(2)} \hat{A}_j^{(2)} | \alpha_i, \beta_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Si el estado es separable, cada operador actúa solamente sobre su subespacio, esto implica que estos observables son independientes y por lo tanto las mediciones realizadas en uno de ellos no afectan las mediciones en el otro subsistema. Esto conduce a la factorización del valor esperado

$$\langle \hat{A}_k \rangle = \langle \hat{A}_i^{(1)} \rangle \langle \hat{A}_j^{(2)} \rangle. \quad (2.54)$$

Matriz Densidad Reducida

Cuando solo estamos interesados en un subsistema en particular, la noción de matriz densidad reducida se vuelve fundamental. Por medio de la traza parcial es posible definir las propiedades del sistema de interés y describir el operador de estado reducido [18]. Por ejemplo para extraer solamente la información del sistema 1, hacemos la traza parcial sobre el espacio del sistema 2:

$$\hat{\rho}^{(1)} = \text{Tr}_{(2)} \{ \hat{\rho} \} = \sum_j \langle \beta_j | \hat{\rho} | \beta_j \rangle, \quad (2.55)$$

donde $\text{Tr}_{(2)} \{ \hat{\rho} \}$ es la representación de la traza parcial sobre el subespacio del sistema 2. Para obtener el operador densidad reducido correspondiente al componente 1, escribimos el operador de estado compuesto para el sistema bipartito en su base propia definida en 2.51

$$\hat{\rho} = \sum_{ij} p_{ij} |\alpha_i, \beta_j\rangle \langle \alpha_i, \beta_j|, \quad (2.56)$$

y trazamos sobre el subespacio de la componente 2 tal como se definió en la ecuación 2.55

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(1)} &= \sum_k \langle \beta_k | \left(\sum_{ij} p_{ij} |\alpha_i, \beta_j\rangle \langle \alpha_i, \beta_j| \right) | \beta_k \rangle \\ &= \sum_k \sum_{ij} p_{ij} \delta_{kj} |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i| \delta_{kj} \\ &= \sum_i \sum_j p_{ij} |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i|. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Entonces podemos expresar el operador densidad reducido del sistema 1, como un operador densidad en su propio espacio:

$$\hat{\rho}^{(1)} = \sum_i q_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i| \quad \text{siendo} \quad q_i = \sum_j p_{ij}. \quad (2.58)$$

Generalización a Sistemas Multipartitos

Esa formulación se puede extender para un sistema compuesto por N sistemas cuánticos d -dimensionales. En este caso, el espacio de Hilbert total se define como

$$\mathbb{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathbb{H}_i \quad \dim(\mathbb{H}) = d^N, \quad (2.59)$$

donde $\mathbb{H}$ se genera en el espacio de Fock $\mathcal{F}(\mathbb{H})$. El operador de estado global (separable) y los respectivos operadores asociados al sistema compuesto se construyen de manera similar

$$\hat{\rho} = \bigotimes_{i=1}^N \hat{\rho}_i, \quad \hat{A} = \bigotimes_{i=1}^N \hat{A}^{(i)}. \quad (2.60)$$

2.3. Ergotropía

Introducción al concepto de ergotropía

El concepto de ergotropía fue introducido por A. Allahverdyan, R. Balian y M. Nieuwenhuizen en un artículo seminal de 2004 [5], y se define como la máxima cantidad de trabajo que puede ser extraído de un sistema cuántico mediante transformaciones unitarias. Este concepto tiene sus raíces en los trabajos pioneros de Sadi Carnot y Rudolf Clausius en el campo de la termodinámica. Carnot exploró motores térmicos ideales y sentó las bases para comprender no solo los principios que rigen la conversión de la energía térmica en energía mecánica, sino también las limitaciones de la máxima eficiencia alcanzable por una máquina térmica. Esto condujo a la formulación de la Segunda Ley de la Termodinámica por parte de Rudoulf Clausius, que estableció una distinción clara entre los conceptos de calor y trabajo y dio origen al concepto de entropía, que manifiesta la irreversibilidad de la evolución de sistemas macroscópicos. Esta formulación generó un nuevo interés acerca de la máxima extracción de trabajo [5, 28, 29]. Con el continuo interés por explorar escalas cada vez más pequeñas, motivado por la tendencia a la miniaturización de los dispositivos tecnológicos, emerge un nuevo concepto propuesto por Alicki y Fannes denominado *Baterías Cuánticas* [6], un sistema físico que almacena energía temporalmente para ser utilizada luego en forma de trabajo [4], y una manera de caracterizar su desempeño es mediante la ergotropía, que permite cuantificar la cantidad de trabajo útil que se puede extraer del sistema cuántico [4, 30]. En el contexto de este trabajo de grado consideraremos como baterías cuánticas, sistema de dos niveles.

2.3.1. Estados Pasivos

Un estado pasivo es definido como un estado del cual no es posible extraer trabajo mediante operaciones unitarias cíclicas. Esto es, dado un estado descrito por el operador $\hat{\rho}$ y un Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ que representa el sistema, se dice que un estado es pasivo con respecto a $\hat{\mathcal{H}}$, sí y solo sí este satisface las siguientes condiciones: [4, 31, 32, 33, 34]

- $[\hat{\rho}, \hat{\mathcal{H}}] = 0$, por lo tanto $\hat{\rho}$ y $\hat{\mathcal{H}}$ tienen un conjunto de autovectores en común (comparte la misma base).

- $\varepsilon_j \leq \varepsilon_{j+1}$, $r_j \geq r_{j+1}$, siendo ε_j y r_j los autovalores de $\hat{\mathcal{H}}$ y $\hat{\rho}$ respectivamente. Esta condición implica que $\hat{\rho}$ no contiene inversión de población, es decir que las poblaciones asociadas a los niveles de energía más altos ahora ocupan los niveles más bajos[5, 35].

Por lo tanto, este tipo de estados se pueden definir en su descomposición espectral de la forma:

$$\hat{\rho} = \sum_j^{\mathcal{D}} r_j |\varepsilon_j\rangle \langle \varepsilon_j| \quad (2.61)$$

siendo $\mathcal{D}$, la dimensión del espacio de Hilbert. Sin embargo, existe un caso particular en el cual un estado pasivo puede permitir la extracción de trabajo, este es el caso de los estados que no son *completamente pasivos*. La noción de pasividad completa se origina del hecho de que cuando se combinan múltiples copias idénticas de estados pasivos, el estado multipartito resultante para el sistema compuesto no cumple la segunda condición de pasividad, por lo tanto, este estado multipartito contiene población inversa y es posible extraer trabajo de estos [4, 36, 37]. No obstante, los estados térmicos o estados de equilibrio definidos en la sección 2.2.3, son un tipo de estados pasivos que de manera más general son denominados *completamente pasivos* debido a su capacidad de mantener las condiciones de pasividad enunciadas previamente, incluso cuando se consideran dos o más estados térmicos idénticos[4, 24, 34, 37].

2.3.2. Una derivación cerrada para la ergotropía

Consideremos un sistema cuántico cerrado que puede intercambiar trabajo con fuentes externas. El comportamiento del sistema se rige bajo el operador densidad $\hat{\rho}$ y este evoluciona por medio de un Hamiltoniano dependiente del tiempo (debido a la interacción con fuentes externas) $\hat{\mathcal{H}}_T(t) = \hat{\mathcal{H}} + \hat{V}(t)$, donde $\hat{\mathcal{H}}$ es el Hamiltoniano interno del sistema y $\hat{V}(t)$ es un potencial cíclico que depende del tiempo y por lo tanto es el responsable de la extracción de trabajo. Se dice cíclico ya que este término solo contribuye al Hamiltoniano total cuando el sistema está acoplado a fuentes externas, es decir $\hat{V}(t) = 0$ antes de $t = 0$ y después de un tiempo $t = \tau$. El Hamiltoniano interno y el estado inicial descrito por el operador densidad asociado al sistema se definen de la forma:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} \varepsilon_i |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_{\mathcal{D}}, \quad (2.62)$$

$$\hat{\rho}(0) = \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i |r_i\rangle \langle r_i|, \quad r_1 > r_2 > \dots > r_{\mathcal{D}}. \quad (2.63)$$

Siendo $\mathcal{D}$ la dimensión del espacio de Hilbert. La dinámica del sistema se rige por la ecuación von Neumann, cuya solución de la forma 2.23 es generada por el operador unitario definido en la ecuación 2.11 como consecuencia de la interacción con el potencial externo $\hat{V}(t)$ que impulsa la extracción de trabajo. Explorar la máxima extracción de trabajo de un sistema, implica optimizar todas las posibles transformaciones unitarias aplicables al sistema. Para obtener la ergotropía máxima, se hace necesario determinar el estado final de menor energía entre todos los estados finales alcanzables por $\hat{\rho}(0)$ cuando está

sometido a la influencia del potencial $\hat{V}(t)$. La energía interna de un sistema cuántico está dada por la traza del estado del sistema y el observable asociado a la energía, es decir el Hamiltoniano. La ergotropía, definida en la ecuación 2.64, se calcula como la diferencia entre el promedio de energías del estado inicial y final

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{W}} &= E_i - E_f \\ \hat{\mathcal{W}} &= \text{Tr}\{\hat{\rho}(0)\hat{\mathcal{H}}\} - \min_U \text{Tr}\{\hat{\mathcal{U}}(\tau)\hat{\rho}(0)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(\tau)\hat{\mathcal{H}}\}.\end{aligned}\quad (2.64)$$

Es posible obtener una expresión cerrada para la ergotropía extraída durante el proceso cíclico, una vez se hace evolucionar el sistema al estado final de mínima energía, de forma que:

$$\hat{\mathcal{W}} = \text{Tr}\{\hat{\rho}(0)\hat{\mathcal{H}}\} - \text{Tr}\{\hat{\rho}(\tau)\hat{\mathcal{H}}\}, \quad (2.65)$$

siendo $\hat{\rho}(\tau)$, el estado final al que evoluciona el sistema mediante el operador unitario $\hat{\mathcal{U}}$, el cual idealmente es un estado del que no se puede extraer trabajo. Estos son denominados *estados pasivos*, y se construyen a partir de los autovalores del operador densidad y los autovectores del Hamiltoniano como:

$$\hat{\rho}(\tau) = \sum_i \rho_i |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|. \quad (2.66)$$

Estados de esta naturaleza obedecen un conjunto de condiciones de diagonalizabilidad simultánea y ordenamiento de las poblaciones que se establecieron en la sección 2.3.1. Volviendo a la expresión para la ergotropía en la ecuación 2.65, reescribimos en términos del Hamiltoniano del sistema, el estado inicial y el estado pasivo en su respectiva descomposición espectral, obteniendo

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \text{Tr}\{\rho(0)\hat{\mathcal{H}}\} - \text{Tr}\{\rho(\tau)\hat{\mathcal{H}}\}, \\ &= \text{Tr}\left\{\sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i |r_i\rangle \langle r_i| \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} \varepsilon_j |\varepsilon_j\rangle \langle \varepsilon_j|\right\} - \text{Tr}\left\{\sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i| \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} \varepsilon_j |\varepsilon_j\rangle \langle \varepsilon_j|\right\}, \\ &= \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i \varepsilon_j \text{Tr}\{|r_i\rangle \langle r_i| \varepsilon_j |\varepsilon_j\rangle \langle \varepsilon_j|\} - \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i \varepsilon_j \text{Tr}\{|\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i| \varepsilon_j |\varepsilon_j\rangle \langle \varepsilon_j|\}, \\ &= \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i \varepsilon_j \text{Tr}\{|r_i\rangle \langle \varepsilon_j|\} \langle r_i | \varepsilon_j \rangle - \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i \varepsilon_j \text{Tr}\{|\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_j|\} \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle.\end{aligned}\quad (2.67)$$

Utilizando el hecho de que la traza de un producto exterior es:

$$\text{Tr}\{| \alpha \rangle \langle \phi | \} = \sum_n \langle n | \alpha \rangle \langle \phi | n \rangle = \langle \phi | \alpha \rangle, \quad (2.68)$$

la ergotropía expresada en términos de autovalores y autovectores propios, se calcula como

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i \varepsilon_j \langle \varepsilon_j | r_i \rangle \langle r_i | \varepsilon_j \rangle - \sum_{i \geq 1}^{\mathcal{D}} \sum_{j \geq 1}^{\mathcal{D}} r_i \varepsilon_j \langle \varepsilon_j | \varepsilon_i \rangle \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle, \\ &= \sum_{i,j}^{\mathcal{D}} r_i \varepsilon_j (|\langle r_i | \varepsilon_j \rangle|^2 - \delta_{ij}), \quad i \geq 1, j \geq 1.\end{aligned}\quad (2.69)$$

Nótese que para determinar la máxima cantidad de trabajo extraíble de un sistema cuántico cerrado, solo se necesita conocer el estado inicial $\hat{\rho}(0)$ y el Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$.

2.4. Recursos Cuánticos

La investigación creciente en las llamadas tecnologías cuánticas se basa en la idea de que se pueden obtener ventajas significativas en tareas operativas al explotar las características intrínsecas del mundo cuántico, respecto a los recursos clásicos. En este contexto, se desarrolla el formalismo de la teoría de los recursos cuánticos, para investigar de las características inherentes de la física cuántica que permiten la obtención de dicha ventaja. Entre estas características se encuentran la coherencia, el entrelazamiento, la no gaussianidad, entre otros [38, 39, 40].

2.4.1. Coherencia Cuántica

Una de las características más representativas de la teoría cuántica es la coherencia, la manifestación de este fenómeno marca un punto de inflexión en la física que permite hacer una distinción clara entre el mundo clásico y el mundo cuántico. La coherencia cuántica como característica intrínseca de los sistemas cuánticos se define como la capacidad de estos de existir en superposición coherente de estados y por lo tanto, exhibir interferencia cuántica constructiva o destructiva [25].

Para ilustrar mejor esta idea, podemos considerar un estado de 2 niveles (qubit) sobre el que se mide un observable $\hat{A}$, con autovalores $\{a_1, a_2\}$ y los autovectores $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, que en su representación espectral se define cómo:

$$\hat{A} = a_1 |a_1\rangle \langle a_1| + a_2 |a_2\rangle \langle a_2|. \quad (2.70)$$

En general, un estado cuántico puede ser escrito como una superposición cuántica en la base del observable. Lo que manifiesta el principio de superposición es la posibilidad del sistema de estar en ambos estados simultáneamente con una cierta probabilidad:

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle, \quad (2.71)$$

donde c_1 y c_2 representan las amplitudes de probabilidad complejas que satisfacen la condición de normalización, así cuando se hace una medida del observable sobre el estado, la probabilidad de obtener el valor a_1 o a_2 respectivamente es:

$$\begin{aligned} P_1 &= |\langle a_1 | \psi \rangle|^2 = |c_1|^2, \\ P_2 &= |\langle a_2 | \psi \rangle|^2 = |c_2|^2, \\ P_1 + P_2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.72)$$

El operador densidad del estado $|\psi\rangle$ es:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\psi\rangle \langle \psi| \\ &= |c_1|^2 |a_1\rangle \langle a_1| + c_1 c_2^* |a_1\rangle \langle a_2| + c_2 c_1^* |a_2\rangle \langle a_1| + |c_2|^2 |a_2\rangle \langle a_2|, \end{aligned} \quad (2.73)$$

que en la representación matricial toma la forma:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Los elementos diagonales de la matriz densidad son llamados poblaciones u ocupaciones y están asociadas a la probabilidad de colapsar el qubit en el estado $|a_1\rangle$ o $|a_2\rangle$ respectivamente. Por otro lado los elementos no diagonales representan las coherencias, las cuales están asociadas a la manifestación del principio de superposición, es decir, la capacidad de exhibir interferencia cuántica entre los estados $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ [18].

Cuantificación de la coherencia

La coherencia como recurso cuántico, desempeña un papel fundamental en la comprensión de las características intrínsecas de la física cuántica y su potencial para mejorar y optimizar procesos. La teoría de la coherencia cuántica como recurso se desarrolló inicialmente en el trabajo de T. Baumgratz y colaboradores [41, 42], en este se introdujo una estructura teórica para cuantificar la coherencia y se presentaron diversas medidas para evaluarla.

Una de las medidas que se introdujo en el trabajo de Baumgratz y que es ampliamente utilizada, es la denominada coherencia de norma l_1 , que se basa en la distancia entre un estado cuántico $\hat{\rho}$ y un estado no coherente $\hat{\delta}$ [38, 41, 43]. Para comprender mejor este concepto, consideremos una base ortonormal fija $\{|i\rangle\}_{i=1}^{\mathcal{D}}$ definida en el espacio de Hilbert donde se definen los estados del sistema [41]. Se dice que un estado cuántico $\hat{\rho}$ es no coherente si el estado es diagonal en esta base, es decir no contiene términos fuera de la diagonal o coherencias [44]. Por otro lado, un estado se considera coherente si no es diagonal en esta base. El conjunto de estados no coherentes se denotan como $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}(\mathbb{H})$ y por lo tanto, todos los operadores densidad no coherentes $\delta \in \mathcal{I}$ se definen de la siguiente forma [41]:

$$\hat{\delta} = \sum_{i=1}^{\mathcal{D}} \delta_i |i\rangle \langle i|. \quad (2.75)$$

La medida de coherencia de norma l_1 se define como la distancia mínima entre un estado coherente $\hat{\rho}$ y un estado no coherente $\hat{\delta}$ y se expresa como

$$\mathcal{C}_{l_1}(\hat{\rho}) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} \|\hat{\rho} - \delta\|_{l_1} = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|. \quad (2.76)$$

La última igualdad se puede mostrar de manera simple en el caso de un qubit.

Medida de la Coherencia: Un qubit

Consideremos un sistema de dos niveles (o qubit), cuyo estado está descrito por el operador densidad $\hat{\rho}$, que en la representación de las coordenadas de la esfera de Bloch se expresa como se definió en 2.40:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

La medida de coherencia se calcula como la suma de los valores absolutos de los elementos no diagonales de la matriz densidad, que en la representación de las coordenadas cartesianas toma la forma

$$\mathcal{C}_{l_1}(\hat{\rho}) = |\rho_{01}| + |\rho_{10}| \quad (2.78)$$

$$= \sqrt{r_x^2 + r_y^2}. \quad (2.79)$$

Esta medida de coherencia se puede visualizar en la representación de la esfera de Bloch, como la mínima distancia entre el estado (coherente), y el estado no coherente más próximo, el cual reside en el eje z ($r_x = r_y = 0$ en la ecuación 2.79), como se muestra en la figura 2.3.

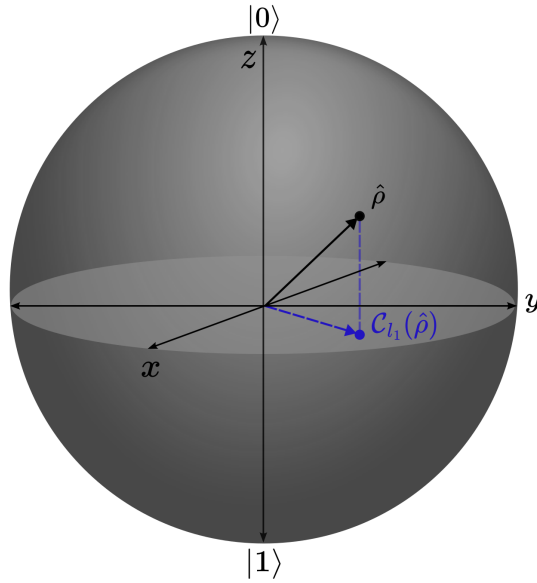


Figura 2.3: Representación de la medida de coherencia $\mathcal{C}_{l_1}$ en la esfera de Bloch. La gráfica muestra la proyección del estado del sistema en el plano xy , lo que representa la distancia mínima entre el estado coherente $\hat{\rho}$ y un estado en el eje z . En este contexto, el estado en el eje z corresponde al estado no coherente, que, en este caso, se refiere al estado de máxima mezcla.

2.4.2. Entrelazamiento Cuántico

El entrelazamiento es una de las propiedades fundamentales de la teoría cuántica que marca una diferencia esencial con el mundo clásico. Este fenómeno ha sido ampliamente reconocido y estudiado debido a su relevancia en áreas como la computación, la información cuántica y la criptografía [45]. La noción de entrelazamiento fue inicialmente presentada por Einstein, Podolsky y Rosen en 1935, cuando argumentaron que la teoría cuántica estaba incompleta debido a la existencia de correlaciones no locales [46, 47]. Al mismo tiempo, Erwin Schrödinger introdujo el término *Verschränkung* para describir estados puros no separables de sistemas compuestos [48, 49]. Estos estados puros entrelazados no pueden representarse como un producto tensorial de los vectores de estado de sus subsistemas individuales y exhiben propiedades únicas, como la superposición de estados y la correlación no local, que no pueden ser explicadas desde la mecánica clásica [50].

Hemos discutido anteriormente cómo definir el estado global puro de un sistema compuesto por dos o más subsistemas. Los estados denominados separables, son expresados como el producto tensorial de los operadores de estado de cada subsistema como se definió en la Ec. 2.60. Para un sistema bipartito se representa como $\psi = \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}$. Esto implica que el estado global se puede describir completamente en términos de los estados de sus componentes individuales [16]. Sin embargo, existen estados que no se pueden escribir de manera separable. La pérdida de individualidad en estos casos se debe a la presencia de correlaciones entre los subsistemas, y a estos estados no separables se les conoce como estados entrelazados. La característica de no separabilidad implica que la información de los estados individuales no es suficiente para determinar completamente el estado global del sistema compuesto, y por lo tanto, el sistema se comporta como una entidad única.

Para estados puros, podemos establecer que el estado global está entrelazado si y solo si:

$$\psi \neq \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}. \quad (2.80)$$

Existe un criterio que permite determinar si un sistema bipartito en un estado puro está correlacionado o no. Este criterio se denomina descomposición de Schmidt y nos permite caracterizar de manera inmediata la separabilidad de estados bipartitos puros [51, 52, 53]. Consideremos un sistema compuesto, para cualquier estado puro bipartito $|\psi\rangle$ en $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$, existe un conjunto de estados ortonormales $\{|i\rangle\}$ en $\mathbb{H}_1$ y $\{|\tilde{i}\rangle\}$ en $\mathbb{H}_2$, tal que

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle |\tilde{i}\rangle. \quad (2.81)$$

Donde p_i , son los coeficientes de Schmidt y satisfacen $\sum_i p_i = 1$. Con base en esta descomposición de Schmidt, podemos caracterizar los estados puros de tres maneras:

1. Si los coeficientes de Schmidt tienen un único término distinto de cero, es decir, $p_i = 1$, entonces el estado $|\psi\rangle$ es separable y, por lo tanto, no está correlacionado.
2. Sí existe más de un coeficiente distinto de cero, el estado está entrelazado.
3. Sí todos los coeficientes son iguales y diferentes de cero, entonces el estado se considera *máximamente entrelazado*.

Los estados de Bell (también denominados pares EPR), son un conjunto particular de estados entrelazados que desempeñan un papel fundamental en la teoría cuántica y surgen a menudo en el estudio de la computación cuántica [54]. En la teoría cuántica, los estados de Bell son representados por combinaciones específicas de los estados de dos qubits que están entrelazados de manera intrínseca. Estos estados se conocen como los cuatro estados de Bell de un sistema bipartito máximamente entrelazado. Forman una base máximamente entrelazada, conocida como base de Bell $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$, definida de la forma

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \equiv |\beta_{00}\rangle \quad (2.82)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \equiv |\beta_{10}\rangle \quad (2.83)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \equiv |\beta_{01}\rangle \quad (2.84)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \equiv |\beta_{11}\rangle. \quad (2.85)$$

Generalización para estados mixtos

La descomposición de Schmidt establece una manera de distinguir los estados entrelazados de los estados separables. Es preciso destacar que este criterio solo es válido para estados cuánticos puros. Sin embargo, en 1989, Reinhard F. Werner abordó esta limitación y estableció cómo describir estados mixtos entrelazados [55]. Werner demostró de un estado mixto bipartito con correlaciones clásicas descrito en el espacio de Hilbert compuesto $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$, se puede escribir como:

$$\hat{\rho} = \sum_{j=1}^n p_j \hat{\rho}_j^{(1)} \otimes \hat{\rho}_j^{(2)}, \quad (2.86)$$

donde p_j es la probabilidad asociada a cada correlación clásica. Naturalmente, el valor esperado de un observable en el espacio compuesto $\hat{C} = \hat{A}^{(1)} \otimes \hat{A}^{(2)}$, para un estado está descrito por

$$\begin{aligned} \langle \hat{C} \rangle &= \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{C} \}, \\ &= \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{A}^{(1)} \otimes \hat{A}^{(2)} \}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Cada operador actúa solamente en su propio espacio de Hilbert, por lo tanto el valor esperado del operador compuesto no se puede definir a partir de la factorización de la medida sobre cada sistema independiente

$$\langle \hat{C} \rangle = \sum_{j=1} p_j \text{Tr} \{ \hat{\rho}_j^{(1)} \hat{A}^{(1)} \} \text{Tr} \{ \hat{\rho}_j^{(2)} \hat{A}^{(2)} \}. \quad (2.88)$$

En general, se estableció que los estados que no se pueden escribir de la forma (2.86) son estados entrelazados, puesto que contienen correlaciones cuánticas.

De la misma manera que para estados puros, en el caso para estados mixtos existe un criterio que permite caracterizar la separabilidad o entrelazamiento de un estado bipartito descrito por el operador de estado. Este criterio desarrollado por Asher Peres en 1996 se fundamenta en una condición necesaria para la separabilidad de un estado mixto bipartito [56]. Peres propuso que para que exista una correlación clásica, se debe cumplir la condición de preservación de la positividad por transposición parcial. Dado un estado mixto bipartito $\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j^{(1)} \otimes \hat{\rho}_j^{(2)}$ generado en el espacio de Hilbert $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$. Cada sistema individual posee un conjunto de vectores base $\{|k\rangle, |l\rangle\}$ y $\{|\mu\rangle, |\nu\rangle\}$ que actúa sobre su propio espacio de Hilbert $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_2$ respectivamente. El estado del sistema se puede escribir de manera explícita con todos sus índices de la forma

$$\hat{\rho}_{k\mu, l\nu} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^{(1)})_{kl} (\hat{\rho}_i^{(2)})_{\mu\nu}. \quad (2.89)$$

Consideremos una nueva matriz definida mediante una operación de trasposición en 2.89 sobre la componente 1:

$$\hat{\sigma}_{k\mu, l\nu} \equiv \hat{\rho}_{l\mu, k\nu} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^{(1)})_{lk} (\hat{\rho}_i^{(2)})_{\mu\nu}, \quad (2.90)$$

donde $\hat{\sigma}$ es hermitiana y se trasponen los índices k, l pero los índices μ, ν permanecen igual. Esta operación se denomina traspuesta parcial y se obtiene trasponiendo solo el estado de la componente 1 (o 2). Por lo tanto, la nueva matriz $\hat{\sigma}$ es

$$\hat{\sigma}_{k\mu, l\nu} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^{(1)})^T \otimes (\hat{\rho}_i^{(2)}). \quad (2.91)$$

Las matrices traspuestas $(\hat{\rho}_i^{(1)})^T$ son no negativas con traza unitaria y por lo tanto la nueva matriz 2.91 también representa una matriz densidad. Esto implica que si $\hat{\rho}$ es separable, de la forma 2.86, ninguno de los autovalores de $\hat{\sigma}$ son negativos. En otras palabras, cuando la matriz traspuesta tiene autovalores negativos, entonces el estado está necesariamente entrelazado. Este criterio fue demostrado por Horodecki y colaboradores y se estableció como una condición necesaria y suficiente para la separabilidad de un estado de sistemas bipartitos de 2x2 o 2x3.

Cuantificación del entrelazamiento

En las últimas décadas, el entrelazamiento se ha erigido como un potencial recurso de fundamental importancia en áreas como la teoría de la información y la computación cuántica [45, 57, 58]. Como resultado, ha surgido un creciente interés en el desarrollo de métodos para cuantificar el entrelazamiento, es decir, medir que tan fuertemente están correlacionados cuánticamente las partes de un sistema compuesto [58]. Para estados puros de sistemas bipartitos, el grado de entrelazamiento se puede cuantificar mediante la entropía de Von Neumann. Sin embargo, cuando se trata de sistemas preparados en estados mixtos, la situación adquiere algo más de complejidad. En este contexto, W. Wootters y S. Hill propusieron una forma alternativa de medir el grado de entrelazamiento en sistemas bipartitos mixtos conocida como *concurrency* [40, 59].

Dado un estado de un sistema bipartito $\hat{\rho}$, la concurrency se define como

$$E(\hat{\rho}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.92)$$

donde λ_i son los autovalores en orden decreciente de la matriz Hermitiana $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$. El estado $\tilde{\rho}$ se obtiene aplicando una transformación al estado $\hat{\rho}$ global de manera que

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \hat{\rho}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.93)$$

donde $\hat{\rho}^*$ es el complejo conjugado del estado $\hat{\rho}$. Alternativamente, Wootters demostró que los λ_i representan las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz no hermitiana $\rho\tilde{\rho}$. La concurrency formulada por Wootters y Hill proporciona una forma general como medida cuantitativa del entrelazamiento en sistemas bipartitos mixtos.

3. Sistemas Cuánticos Abiertos

En el capítulo anterior, nos adentramos en el formalismo y el comportamiento de los sistemas cuánticos cerrados, en los que la evolución del sistema permanece aislada de su entorno. Sin embargo, en el mundo físico real, los sistemas completamente aislados no son posibles, son solo una idealización[60]. De hecho, la mayoría de los sistemas cuánticos más realistas están sujetos a interacciones con su entorno, el cual no es factible controlar a causa de la cantidad de grados de libertad que le caracteriza [27]. Por lo tanto, es necesario considerarlos como sistemas abiertos. La teoría de los sistemas cuánticos abiertos desempeña un papel fundamental en la descripción de la evolución de sistemas que interactúan con el entorno, ya que los fenómenos subyacentes a esta interacción no pueden ser explicados adecuadamente mediante el formalismo de sistemas cuánticos cerrados. En este capítulo introduciremos el formalismo de sistemas cuánticos abiertos y derivaremos la ecuación maestra de Lindblad desde un enfoque microscópico. Además, presentaremos los modelos físicos relevantes en el contexto de este trabajo de grado.

3.1. De sistemas cuánticos cerrados a sistemas abiertos

Mientras que para describir sistemas cuánticos cerrados es necesario considerar la dinámica Hamiltoniana, que implica una evolución unitaria que sigue la ecuación de Schrödinger para sistemas puros, o la ecuación de von Neumann para sistemas mixtos [61], como se introdujo en el capítulo anterior, la evolución de los sistemas cuánticos abiertos se ve influenciada por su naturaleza no unitaria que surge de su interacción con el entorno. Esta característica requiere un formalismo más completo que permita describir adecuadamente la dinámica de los sistemas cuánticos abiertos, ya que la descripción unitaria no es suficiente [19]. Las ecuaciones maestras emerge como una herramienta que permite describir cómo evoluciona en el tiempo el operador densidad de un sistema cuántico cuando está acoplado al entorno o a un reservorio. A pesar de la existencia de una amplia variedad de ecuaciones maestras, la elección de un tipo particular depende de la naturaleza de la interacción, las características del reservorio y las propiedades del sistema cuántico bajo estudio.

Una de las ecuaciones maestras más conocidas y ampliamente utilizadas en la teoría de sistemas abiertos es la ecuación maestra tipo Lindblad, restringida solamente para describir interacciones débiles entre el sistema y el ambiente. Esta ecuación maestra (también denominada ecuación GKSL) fue desarrollada de manera independiente por varios científicos en la década de 1970. Los resultados del trabajo de Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski y George Sudarshan [62] y Göran Lindblad [63] convergieron de manera simultánea en

una ecuación muy similar denominada ampliamente como la ecuación maestra de Lindblad [27, 64]. Esta ecuación generaliza la ecuación de Schrödinger en el contexto de la teoría de sistemas abiertos y desempeña un papel fundamental en diversas áreas como la óptica cuántica, la materia condensada, la física atómica, la información cuántica, entre otras [60, 65, 66]. Para un espacio de Hilbert N -dimensional, la ecuación Lindblad toma la siguiente forma:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \left(\hat{L}_{\alpha} \hat{\rho}(t) \hat{L}_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{\alpha}^{\dagger} \hat{L}_{\alpha}, \hat{\rho}(t) \} \right). \quad (3.1)$$

Es importante destacar esta ecuación consta de dos contribuciones: una de tipo unitaria, que surge de la dinámica del Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ y una contribución de tipo no-unitaria que describe la parte disipativa de la dinámica [27]. Esta última se construye a partir de los operadores escalera $\hat{L}_{\alpha}^{\dagger}$ y $\hat{L}_{\alpha}$ y los coeficientes no-negativos Γ_{α} que también se conocen como tasas de amortiguación o tunelamiento.

3.2. Ecuación de Lindblad

Consideremos el siguiente caso representado en la figura 3.1. Sea S un sistema que interactúa con el entorno o reservorio E , usando un enfoque estándar en el contexto de la teoría de sistemas abiertos, se considera al sistema S y E juntos como un sistema total S_T compuesto y aislado, de tal manera que la dinámica del sistema total obedece una evolución unitaria. La dinámica del sistema total se define a partir de la ecuación de Von Neumann,

$$\frac{d\hat{\rho}_T(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_T, \hat{\rho}_T(t)]. \quad (3.2)$$

Este tipo de evolución nos permite describir completamente la dinámica del sistema compuesto. Sin embargo, el interés realmente está en conocer la dinámica del sistema S , puesto que la dinámica del sistema total es inaccesible por el nivel de complejidad debido a la alta dimensionalidad total, y habría información irrelevante para el estudio del sistema S . Determinar cómo evoluciona el sistema abierto S debido a la interacción con el entorno requiere promediar los grados de libertad del entorno y encontrar la dinámica reducida del sistema S [27].

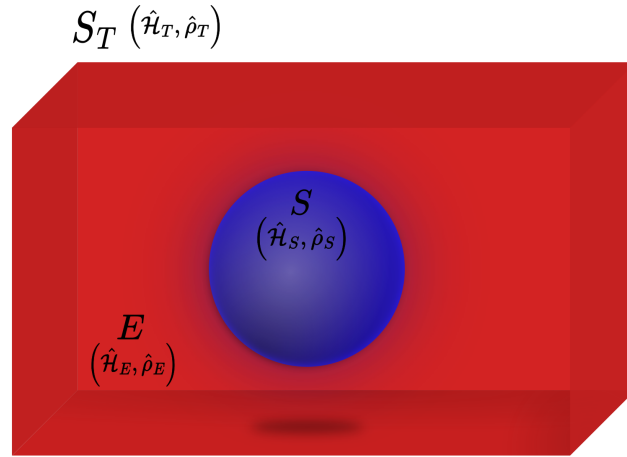


Figura 3.1: Representación de un sistema total cerrado S_T que consta de un sistema abierto S que interactúa con el entorno E .

Sea $\hat{\mathcal{H}}_T$ el Hamiltoniano total del sistema generado en el espacio de Hilbert $\mathbb{H}_T = \mathbb{H}_S \otimes \mathbb{H}_E$, donde $\mathbb{H}_S$, $\mathbb{H}_E$ son los espacios de Hilbert correspondientes al sistema y al entorno. El Hamiltoniano total se puede definir de la forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_T = \hat{\mathcal{H}}_0 + \alpha \hat{\mathcal{H}}_I, \quad (3.3)$$

siendo $\hat{\mathcal{H}}_0$ el Hamiltoniano del sistema y el ambiente compuesto por:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\mathcal{H}}_S \otimes \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_S \otimes \hat{\mathcal{H}}_E, \quad (3.4)$$

y $\hat{\mathcal{H}}_I$ representando el Hamiltoniano de interacción entre el sistema y el entorno, donde α es un parámetro adimensional real que describe la fuerza de esta interacción. Puesto que la ecuación de Lindblad solo describe sistemas abiertos en el límite de acoplamiento débil, esta interacción se considera lo suficientemente pequeña en comparación con las escalas de energía del sistema, por lo que es posible usar teoría perturbativa para hallar la solución a la dinámica del sistema. El término de interacción se define mediante el producto tensor de los operadores del sistema y el entorno respectivamente $(\hat{S}, \hat{E})$.

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \sum_{\alpha} \hat{S}_{\alpha} \otimes \hat{E}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \hat{S}_{\alpha} \hat{E}_{\alpha}, \quad (3.5)$$

para conocer como evoluciona el sistema, es conveniente transformar el problema a la imagen de interacción. Denotaremos a los operadores en esta imagen, como siendo dependientes del tiempo, luego el operador $\hat{\mathcal{H}}_I$ se transforma como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_I(t) &= e^{i(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_E)t} \hat{\mathcal{H}}_I e^{-i(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_E)t}, \\ &= \sum_{\alpha} \hat{S}_{\alpha}(t) \hat{E}_{\alpha}(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

De este modo, la evolución del sistema total, que obedece la ecuación de von Neumann, se define en la imagen de interacción como:

$$\frac{d\hat{\rho}_T(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \alpha \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{\rho}_T(t) \right]. \quad (3.7)$$

Integrando 3.7 obtenemos:

$$\hat{\rho}_T(t) = \hat{\rho}_T(0) - \frac{i}{\hbar} \alpha \int_0^t dt' \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t'), \hat{\rho}_T(t') \right]. \quad (3.8)$$

Con la forma que toma la matriz densidad en 3.8, sustituimos en la ecuación 3.7 y obtenemos la dinámica del sistema en términos de pequeñas perturbaciones al sistema:

$$\frac{d\hat{\rho}_T(t)}{dt} = -\frac{i\alpha}{\hbar} \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{\rho}_T(0) \right] - \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t'), \hat{\rho}_T(t') \right] \right]. \quad (3.9)$$

Aún cuando es posible continuar el proceso de sustitución previo en la ecuación 3.9, esto conduce a una expresión donde emergen términos de orden superior α^3, α^4 . Teniendo en cuenta que la interacción entre el sistema y el entorno es débil, es decir $\alpha \ll 1$, los términos de orden superior se consideran irrelevantes. Por lo tanto, solo se toma el límite perturbativo a segundo orden. Para definir el sistema reducido S , es necesario promediar sobre los grados de libertad del entorno en el operador densidad que describe el sistema compuesto

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E \{ \hat{\rho}_T \}, \quad \hat{\rho}_S \rightarrow \hat{\rho}. \quad (3.10)$$

Bajo esta premisa, para conocer la dinámica del sistema reducido, es preciso introducir la traza reducida en la ecuación que describe la dinámica del sistema total y obtener una expresión que permita describir solamente el sistema de interés

$$\text{Tr}_E \left\{ \frac{d\hat{\rho}_T(t)}{dt} \right\} = -\frac{i\alpha}{\hbar} \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{\rho}_T(0) \right] \right\} - \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t'), \hat{\rho}_T(t') \right] \right] \right\}. \quad (3.11)$$

Se asume que para un tiempo inicial $t = 0$ no existen correlaciones entre el sistema y el ambiente, además el estado del entorno no cambia a través del tiempo, por lo tanto, el estado del sistema total se puede factorizar en un producto tensor de la forma:

$$\hat{\rho}_T(0) = \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_E(0), \quad \hat{\rho}_E(0) = \hat{\rho}_E. \quad (3.12)$$

Bajo esta consideración, el primer término de la ecuación 3.11 puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{\rho}_T(0) \right] \right\} &= \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_E \right] \right\} \\ &= \sum_{\alpha} \left(\hat{S}_{\alpha}(t) \hat{\rho}(0) \text{Tr}_E \left\{ \hat{E}_{\alpha}(t) \hat{\rho}_E \right\} - \hat{\rho}(0) \hat{S}_{\alpha}(t) \text{Tr}_E \left\{ \hat{\rho}_E \hat{E}_{\alpha}(t) \right\} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde se asume que el valor esperado del operador de acoplamiento es nulo, es decir

$$\text{Tr}_E \left\{ \hat{E}_{\alpha}(t) \hat{\rho}_E \right\} = \left\langle \hat{E}_{\alpha}(t) \hat{\rho}_E \right\rangle_E = 0. \quad (3.14)$$

Por lo tanto, se obtiene una expresión para la dinámica del sistema reducido de la forma

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t'), \hat{\rho}_T(t') \right] \right] \right\} \quad (3.15)$$

3.3. Aproximaciones

La importancia de derivar la ecuación maestra de Lindblad a partir de la dinámica microscópica radica en la capacidad de incorporar con mayor detalle la interacción entre el sistema y el reservorio. Este tipo de enfoque implica realizar suposiciones fundamentales sobre la naturaleza de estas interacciones [67]. Para llegar a la ecuación maestra de Lindblad, es esencial implementar tres aproximaciones clave, que serán expuestas a continuación.

3.3.1. Aproximación de Born

Una de las aproximaciones principales para la derivación de la ecuación maestra de Lindblad desde un enfoque microscópico es la aproximación de Born o de acoplamiento débil, esta considera que no hay correlación entre el ambiente y el sistema. Al considerar un acoplamiento débil entre un entorno que tiene un número mucho más grande de grados de libertad que el sistema S con el que interactúa, el entorno no se ve afectado de manera apreciable por esta interacción [68]. Esto se justifica en el hecho de que las escalas de tiempos de relajación del entorno τ_{rel} y de correlación sistema-entorno τ_{corr} son muy cortos en relación a la escala de tiempo de evolución del sistema τ_{sis} :

$$\tau_{rel}, \tau_{corr} \ll \tau_{sis}. \quad (3.16)$$

Esto permite definir el estado del sistema total como un producto tensorial entre el estado del sistema reducido y el entorno que actúa como reservorio:

$$\hat{\rho}_T(t) \approx \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_E. \quad (3.17)$$

Sustituyendo el operador de estado en su forma separable en la ecuación 3.15, y resolviendo los conmutadores se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_I(t'), \hat{\rho}(t') \otimes \hat{\rho}_E \right] \right] \right\} \\ &= -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \hat{\mathcal{H}}_I(t) \hat{\mathcal{H}}_I(t') \hat{\rho}(t') \hat{\rho}_E - \hat{\mathcal{H}}_I(t') \hat{\rho}(t') \hat{\rho}_E \hat{\mathcal{H}}_I(t) - \hat{\mathcal{H}}_I(t) \hat{\rho}(t') \hat{\rho}_E \hat{\mathcal{H}}_I(t') \right. \\ &\quad \left. + \hat{\rho}(t') \hat{\rho}_E \hat{\mathcal{H}}_I(t') \hat{\mathcal{H}}_I(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sustituyendo el Hamiltoniano de interacción y organizando el producto de operadores de manera más compacta, la dinámica del sistema se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{\alpha, \beta} \left[\hat{S}_\alpha(t') \hat{\rho}(t') \hat{S}_\beta(t) - \hat{S}_\beta(t) \hat{S}_\alpha(t') \hat{\rho}(t') \right] C_{\alpha\beta}(t - t') + H.c., \quad (3.19)$$

donde $C_{\alpha\beta}(t - t')$ es la función correlación del entorno

$$C_{\alpha\beta}(t, t') = \text{Tr}_E \left\{ \hat{E}_\alpha(t') \hat{E}_\beta(t) \hat{\rho}_E \right\} = \left\langle \hat{E}_\alpha(t') \hat{E}_\beta(t) \right\rangle_E. \quad (3.20)$$

Asumiendo $t \rightarrow 0$, y haciendo el cambio de variable $t' \rightarrow t - t'$, la función de correlación se puede escribir como:

$$C_{\alpha\beta}(t - t') = \text{Tr}_E \left\{ \hat{E}_\alpha(t - t') \hat{E}_\beta(0) \hat{\rho}_E \right\} = \left\langle \hat{E}_\alpha(t - t') \hat{E}_\beta(0) \right\rangle_E. \quad (3.21)$$

3.3.2. Aproximación de Markov

La Markovianidad en un sistema físico surge cuando se considera que las escalas de tiempo de relajación del entorno τ_{rel} son significativamente más cortas que las escalas temporales del sistema τ_{sis} . Esta condición, análoga a la que se introdujo en la aproximación de Born, permite que el entorno alcance su estado de equilibrio de manera mucho más rápida en comparación con los tiempos característicos del sistema con el que interactúa. Como consecuencia, los procesos Markovianos se caracterizan como procesos estocásticos de memoria corta. En otras palabras, la dinámica del sistema puede determinarse exclusivamente a partir de su estado presente, sin requerir información de estados pasados, es decir, es necesario que una ecuación Markoviana sea local en el tiempo. La condición de la aproximación de Markov implica que las funciones de correlación del entorno decaen rápidamente:

$$C_{\alpha\beta}(t - t') \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad \tau_{rel} \ll \tau_{sis}. \quad (3.22)$$

Sustituyendo $\tau = t - t'$, y reemplazando $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t')$ por la condición de Markovianidad, se obtiene

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \sum_{\alpha,\beta} \left[\hat{S}_\alpha(t - \tau) \hat{\rho}(t) \hat{S}_\beta(t) - \hat{S}_\beta(t) \hat{S}_\alpha(t - \tau) \hat{\rho}(t) \right] C_{\alpha\beta}(\tau) + H.c. \quad (3.23)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Redfield, que en general, es Markoviana y preserva dos de las propiedades características del operador densidad: conservación de la traza y la hermiticidad, no obstante no garantiza la positividad del operador durante su evolución temporal, lo que puede conducir a resultados inconsistentes físicamente como probabilidades negativas. Por otro lado, los operadores $\hat{S}$ del Hamiltoniano de interacción que actúan sobre el sistema, se pueden re-expresar en términos de los autovalores del Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_S = \sum_i \varepsilon_i |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|$ de forma tal que se pueden escribir como:

$$\hat{S}_\alpha = \sum_\omega \hat{S}_\alpha(\omega) = \sum_\omega \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega), \quad \omega = \varepsilon_i - \varepsilon_j. \quad (3.24)$$

En la imagen de interacción estos operadores de acoplamiento transforman de modo que

$$\begin{aligned} \hat{S}_\alpha(t) &= e^{i\hat{\mathcal{H}}_S t} \hat{S}_\alpha(\omega) e^{-i\hat{\mathcal{H}}_S t}, \\ \hat{S}_\alpha(t) &= \sum_\omega \hat{S}_\alpha(\omega) e^{-i\omega t} = \sum_\omega \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Al sustituir en la ecuación maestra de Redfield, obtenemos

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\omega,\omega'} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left[\hat{S}_\alpha(\omega) \hat{\rho}(t) \hat{S}_\beta^\dagger(\omega') - \hat{S}_\beta^\dagger(\omega') \hat{S}_\alpha(\omega) \hat{\rho}(t) \right] e^{-i(\omega - \omega')t} + H.c. \quad (3.26)$$

Donde $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ representa la transformada de Fourier de las funciones correlación del entorno.

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} C_{\alpha\beta}(\tau). \quad (3.27)$$

3.3.3. Aproximación Secular

La aproximación secular, también conocida como la aproximación de onda rotante (RWA), permite la simplificación de la ecuación de Redfield, anulando los términos que tienen oscilaciones rápidas. Cuando se analizan los términos oscilatorios en la ecuación que describe la evolución en la imagen de interacción, aquellos que experimentan oscilaciones muy rápidas pueden ser promediados en el tiempo. En consecuencia, se descartan sus contribuciones ya que, aunque pueden inducir perturbaciones, estas son rápidas y de corta duración en el sistema, por lo que se considera que su efecto neto sobre la evolución del sistema es despreciable. Como resultado de esta aproximación, en la derivación de la ecuación de Lindblad, se omiten todos los términos tales que $\omega \neq \omega'$, sobreviviendo solo aquellos términos en los que $\omega = \omega'$. Por lo tanto la ecuación 3.26 en la imagen de interacción puede ser escrita como:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left[\hat{S}_{\alpha}(\omega) \hat{\rho}(t), \hat{S}_{\beta}^{\dagger}(\omega) \right] + \Gamma_{\alpha\beta}^*(\omega) \left[\hat{S}_{\alpha}(\omega), \hat{\rho}(t) \hat{S}_{\beta}^{\dagger}(\omega) \right] \quad (3.28)$$

Además, el coeficiente relacionado con las funciones correlación del entorno se puede definir en términos de una parte real y una parte imaginaria de forma que la ecuación maestra pueda convertirse en una de tipo Lindblad:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\beta}(\omega) + i\Pi_{\alpha\beta}(\omega)), \quad (3.29)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^*(\omega) = \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\beta}(\omega) - i\Pi_{\alpha\beta}(\omega)) \quad (3.30)$$

Introduciendo estas definiciones en la expresión 3.28 y volviendo a la imagen de Schrödinger podemos escribir finalmente la ecuación maestra en la forma de Lindblad,

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}_{LS}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{\alpha,\beta,\omega} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left(S_{\alpha}(\omega) \hat{\rho}(t) S_{\beta}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{ S_{\beta}^{\dagger}(\omega) S_{\alpha}(\omega), \hat{\rho}(t) \} \right). \quad (3.31)$$

Donde $\hat{\mathcal{H}}_{LS}$ se conoce como el Hamiltoniano Lamba-Shift, el cual renormaliza el sistema debido a la interacción con el entorno y está definido como:

$$\hat{\mathcal{H}}_{LS} = \sum_{\alpha\beta\omega} \Pi_{\alpha\beta}(\omega) S_{\beta}^{\dagger}(\omega) S_{\alpha}(\omega) \quad (3.32)$$

3.4. Modelo de baterías cuánticas

En la sección anterior se presentó una expresión general que permite describir la dinámica Markoviana de sistemas abiertos que interactúan débilmente con el entorno. Este enfoque proporciona una descripción clara de los efectos del acoplamiento entre el sistema y el reservorio, lo que permite el análisis de una amplia variedad de sistemas físicos utilizando el formalismo de la teoría de sistemas abiertos y las ecuaciones maestras tipo Lindblad. En este contexto, el presente trabajo se centra en el estudio de las baterías cuánticas, donde un único sistema cuántico, como un qubit o un sistema de dos niveles, puede

desempeñar el papel de una celda de batería. El objetivo principal de este trabajo consiste en analizar el proceso de autodescarga de una batería cuántica, es decir, la disipación de energía que ocurre cuando el sistema no se encuentra acoplado a un centro de consumo, pero sí está interactuando con su entorno [11]. El enfoque para modelar la dinámica de los sistemas de baterías en este trabajo sigue las mismas consideraciones empleadas en la derivación microscópica de la ecuación maestra.

3.4.1. Una Única Celda de Batería

Consideremos un sistema de dos niveles para modelar una batería como se muestra en la figura 3.2. Teniendo en cuenta que la interacción con el entorno se puede modelar con un único reservorio rodeando el sistema, y que nos restringimos al régimen de acoplamiento débil, por medio de las aproximaciones implementadas en la ecuación maestra, se llega a la ecuación de Lindblad general para la evolución de la matriz densidad del sistema:

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t)] + \mathcal{R}_{rel}[\hat{\rho}(t)], \quad \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{int} + \hat{\mathcal{H}}_{ext}(t). \quad (3.33)$$

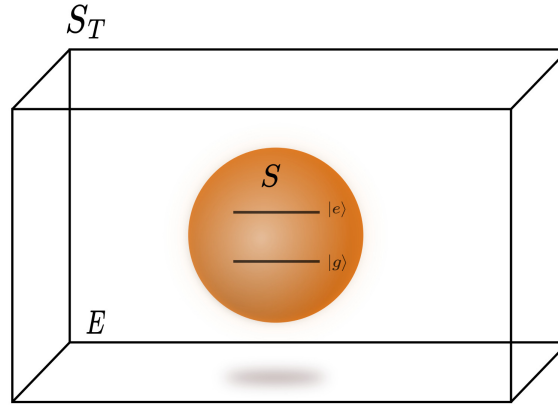


Figura 3.2: Representación de una batería de dos niveles que interactúa con el entorno.

En general, El Hamiltoniano total está compuesto por tres partes que dan cuenta de las siguientes contribuciones,

1. $\hat{\mathcal{H}}_0$ representa el Hamiltoniano libre que describe la energía intrínseca de cada batería individual, que es modelada con un sistema de dos niveles

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-, \quad \hat{\sigma}^+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}^- = |g\rangle\langle e|, \quad (3.34)$$

donde los operadores escalera están definidos en la base propia del Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_0$ del sistema $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, y representan al estado excitado y al estado fundamental respectivamente.

2. $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ da cuenta de la interacción entre diferentes celdas de batería. Para el caso de una sola batería se establece $\hat{\mathcal{H}}_{int} = 0$.

3. $\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t)$, describe la contribución resultante de aplicar un campo externo para cargar la batería o para extraer la energía de la misma. En este trabajo se asume que esta contribución es nula, es decir, $\hat{\mathcal{H}}_{ext}(t) = 0$ para todo tiempo $t \geq 0$, así en un tiempo inicial se asume la batería ya cargada, y para tiempos posteriores no se conecta a campos de extracción de trabajo, permitiendo el análisis de los procesos de disipación solamente por el contacto con el entorno.

La dinámica del sistema queda definida con una parte unitaria que evoluciona solamente con el Hamiltoniano de la batería y una parte no unitaria que describe los procesos de disipación, por lo tanto obtenemos

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\rho}(t)] + \mathcal{R}_{rel}[\hat{\rho}(t)]. \quad (3.35)$$

En este trabajo nos interesa el estudio del proceso de autodescarga de las baterías. De forma análoga con los procesos de decaimiento de carga que se presentan en baterías clásicas cuando están en una configuración de circuito abierto, en el contexto de las baterías a escalas cuánticas es posible extender este análisis cuando se considera al sistema abierto, donde la interacción con un entorno conduce a la disipación de la energía almacenada. El término que describe los procesos de disipación de energía debido al acoplamiento del sistema con el entorno está dado por [11, 14]:

$$\mathcal{R}_{rel}[\hat{\rho}(t)] = \frac{\Gamma}{2} \left(2\hat{\sigma}^- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}^+ - \{ \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-, \hat{\rho}(t) \} \right), \quad (3.36)$$

siendo Γ la tasa de decaimiento entre la batería y el entorno.

3.4.2. Múltiples Baterías

Consideremos un sistema de N baterías. Para sistemas compuestos es necesario abordar las interacciones que pueden surgir a medida que el sistema aumenta su dimensionalidad, a la vez que para sistemas abiertos, la interacción con el entorno se convierte en una característica inherente del sistema. Sin embargo, cuando consideramos sistemas de múltiples baterías, emerge un nuevo tipo de interacción entre celdas. Como se muestra en la figura 3.3 observamos un sistema multipartito en el cual las baterías interactúan entre sí.

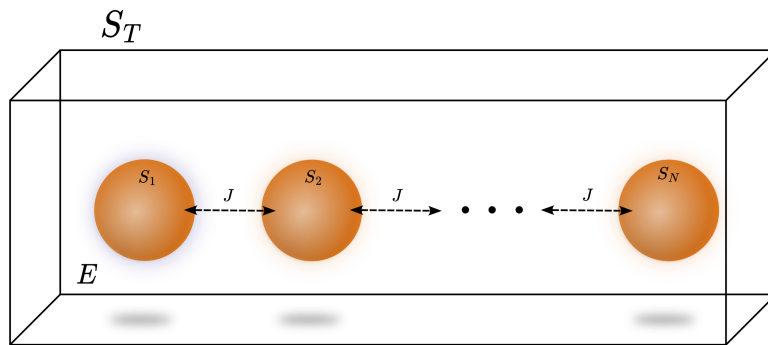


Figura 3.3: Representación de un sistema multipartito. N baterías de dos niveles las cuales interactúan entre ellas y a su vez interactúan con el entorno.

En este sistema, donde N representa el número de baterías, la dinámica del sistema multipartito se describe mediante una ecuación maestra que captura los efectos de disipación de energía debido a la interacción con el entorno y también la disipación entre celdas. La dinámica del sistema se describe como:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t)] + \mathcal{R}_{rel}[\hat{\rho}(t)] + \mathcal{R}_{icl}[\hat{\rho}(t)], \quad (3.37)$$

donde el Hamiltoniano total del sistema toma la forma $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{int}$, siendo $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ el término que describe la interacción entre las celdas:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = \hbar \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^-. \quad (3.38)$$

El parámetro J_{ij} representa la fuerza de acoplamiento entre las baterías, lo que indica la intensidad de las interacciones entre ellas. Cabe destacar que en esta formulación, hemos asumido un acoplamiento homogéneo, es decir, todas las baterías están sujetas a la misma fuerza de acoplamiento J y solo existe interacción con el vecino más cercano.

El término $\mathcal{R}_{rel}[\hat{\rho}(t)]$ que describe el proceso de relación del sistema por interacción con el entorno, se define como en la Ec. 3.36 para cada batería individual. Los canales de decaimiento que surgen por la interacción entre baterías tienen la forma:

$$\mathcal{R}_{icl}[\hat{\rho}(t)] = \sum_{i \neq j}^N \frac{\Gamma_{ij}}{2} (2\hat{\sigma}_j^- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_i^+ - \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- - \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- \hat{\rho}(t)), \quad (3.39)$$

Este término describe los procesos de decaimiento colectivo por medio de los operadores de salto $\hat{\sigma}^\pm$. Por medio de estos, las transiciones entre la batería i -ésima y la j -ésima, se dan cuando cada batería emite una excitación y esta se guarda temporalmente en la vecina más cercana [11, 69].

4. Resultados

4.1. Una única batería

Como una primera aproximación al estudio de los procesos de autodescarga en baterías cuánticas, consideramos una batería de una sola celda, es decir, un solo sistema de dos niveles que actúa como batería. Nuestro modelo consiste en un sistema de dos niveles definido mediante el Hamiltoniano libre

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \epsilon \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-, \quad (4.1)$$

donde $\hat{\sigma}^\pm$ son los operadores de subida/bajada que representan las transiciones entre los estados cuánticos del sistema (ecuación 3.34): el estado excitado $|e\rangle$ y el estado fundamental $|g\rangle$. La diferencia de energía entre estos dos estados se denota como ϵ .

4.1.1. Dinámica del Sistema

Cuando consideramos que la batería está acoplada al entorno, utilizamos la ecuación maestra de Lindblad para describir su dinámica. Esta ecuación tiene dos términos principales. El primero es responsable de la evolución unitaria del sistema bajo el Hamiltoniano libre, mientras que el segundo modela los efectos de la interacción con el entorno, causando que la energía almacenada en el sistema se disipe:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -i[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\rho}(t)] + \frac{\Gamma}{2} \left(2\hat{\sigma}^- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}^+ - \{ \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-, \hat{\rho}(t) \} \right). \quad (4.2)$$

donde Γ representa la tasa de amortiguación debido a la interacción con el entorno. Para una batería individual acoplada al entorno, podemos encontrar una solución analítica para la ecuación de Lindblad. En esta solución, calculamos cómo evolucionan las poblaciones y las coherencias a través del tiempo. Utilizamos la representación $\hat{\sigma}^+ = |e\rangle \langle g|$ y $\hat{\sigma}^- = |g\rangle \langle e|$ para expresar

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -i\epsilon \left(|e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e| \right) + \frac{\Gamma}{2} \left(2\rho_e(t) |g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e| \right). \quad (4.3)$$

En la representación matricial, estos elementos son el conjunto de ecuaciones que describe la dinámica del sistema

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \begin{pmatrix} \langle e| \dot{\hat{\rho}}(t) |e\rangle & \langle e| \dot{\hat{\rho}}(t) |g\rangle \\ \langle g| \dot{\hat{\rho}}(t) |e\rangle & \langle g| \dot{\hat{\rho}}(t) |g\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}_e(t) & \dot{\rho}_{eg}(t) \\ \dot{\rho}_{ge}(t) & \dot{\rho}_g(t) \end{pmatrix}.$$

Hallando estos elementos matriciales a partir de la ecuación 4.3 encontramos las ecuaciones diferenciales correspondientes a las poblaciones y las coherencias

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_e(t) = \langle e | \Big(-i\epsilon (|e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e| \\ + \frac{\Gamma}{2} (2\rho_e(t) |g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e|) \Big) |e\rangle, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_g(t) = \langle g | \Big(-i\epsilon (|e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e|) \\ + \frac{\Gamma}{2} (2\rho_e(t) |g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e|) \Big) |g\rangle, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_{eg}(t) = \langle e | \Big(-i\epsilon (|e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e|) \\ + \frac{\Gamma}{2} (2\rho_e(t) |g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e|) \Big) |g\rangle, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_{ge}(t) = \langle g | \Big(-i\epsilon (|e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e|) \\ + \frac{\Gamma}{2} (2\rho_e(t) |g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e| \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) |e\rangle \langle e|) \Big) |e\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales resultante es

$$\dot{\hat{\rho}}_e(t) = -\Gamma \rho_e(t), \quad (4.8)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_g(t) = \Gamma \rho_e(t), \quad (4.9)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_{eg}(t) = -i\epsilon \rho_{eg}(t) - \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}(t), \quad (4.10)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_{ge}(t) = i\epsilon \rho_{ge}(t) - \frac{\Gamma}{2} \rho_{ge}(t). \quad (4.11)$$

Solucionamos este conjunto de ecuaciones diferenciales haciendo uso de las condiciones de traza unitaria y hermiticidad, obteniendo

$$\rho_e(t) = \rho_e(0) e^{-\Gamma t}, \quad (4.12)$$

$$\rho_g(t) = 1 - \rho_e(0) e^{-\Gamma t}, \quad (4.13)$$

$$\rho_{eg}(t) = \rho_{eg}(0) e^{-(i\epsilon + \frac{\Gamma}{2})t}, \quad (4.14)$$

$$\rho_{ge}(t) = \rho_{ge}(0) e^{(i\epsilon - \frac{\Gamma}{2})t}. \quad (4.15)$$

Estas ecuaciones nos proporciona información sobre el decaimiento de las ecuaciones y la coherencia debido a la interacción con el entorno.

Estado Completamente Cargado

Para comprender mejor el comportamiento de una batería cuántica consideramos primero un escenario en el que asumimos para un tiempo $t = 0$, un estado inicial completamente cargado, es decir $\rho_{eg}(0) = 0$ y $\rho_e(0) = 1$. Reemplazando en las ecuaciones 4.12-4.15, podemos ver que el estado cuántico que describe la batería con carga completa

es un estado no coherente en el tiempo, y por lo tanto se comporta como una batería clásica:

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Los autovalores y autovectores de esta matriz, ordenados de manera decreciente $\rho_1 > \rho_2$, para $t = 0$ son

$$\rho_1 = e^{-\Gamma t}, \quad |\rho_1\rangle = (1, 0)^T, \quad (4.17)$$

$$\rho_2 = 1 - e^{-\Gamma t}, \quad |\rho_2\rangle = (0, 1)^T, \quad (4.18)$$

y los autovalores se grafican en la figura 4.1.

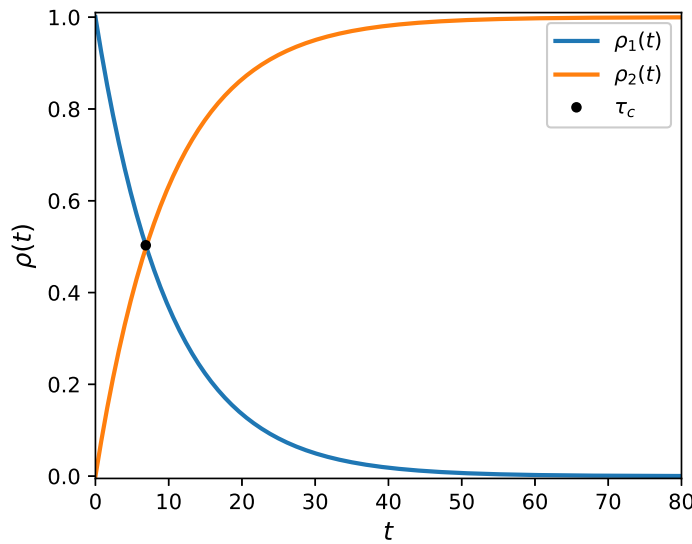


Figura 4.1: Evolución de las poblaciones en función del tiempo. Se observa que después de un tiempo crítico $t = \tau_c$ denominado tiempo de cruce, las poblaciones de los estados excitado y fundamental se invierten. Antes de este punto, la batería tiene una inversión de población, lo que significa que el estado excitado tiene una mayor población que el estado fundamental.

La energía interna del sistema se determina a partir de la traza del producto entre Hamiltoniano y del operador de estado

$$U(t) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t)\hat{\mathcal{H}}_0), \quad (4.19)$$

$$= \sum_i \langle i | \hat{\rho}(t)\hat{\mathcal{H}}_0 | i \rangle, \quad (4.20)$$

$$= \langle e | \hat{\rho}(t)\hat{\mathcal{H}}_0 | e \rangle + \langle g | \hat{\rho}(t)\hat{\mathcal{H}}_0 | g \rangle, \quad (4.21)$$

$$= \epsilon e^{-\Gamma t}. \quad (4.22)$$

Esta expresión nos da la energía total que posee el sistema y muestra cómo disminuye exponencialmente debido a la tasa de amortiguación. La ergotropía, que representa cuanta

de esa energía interna del sistema se puede convertir en trabajo útil, se calcula partir de la Ec 2.69, donde la dimensión del espacio de estado del sistema es $\mathcal{D} = 2$

$$\mathcal{W}(t) = \sum_{i,j}^2 \rho_i \varepsilon_j (|\langle \rho_i | \varepsilon_j \rangle|^2 - \delta_{ij}) . \quad (4.23)$$

En este caso, los autovalores y autovectores del Hamiltoniano se ordenan de manera creciente $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\varepsilon_1 = 0, \quad |\varepsilon_1\rangle = (0, 1)^T, \quad (4.24)$$

$$\varepsilon_2 = \epsilon, \quad |\varepsilon_2\rangle = (1, 0)^T. \quad (4.25)$$

Al expandir la expresión para la ergotropía, se obtienen varios términos, pero no todos contribuyen. Antes del tiempo de cruce, la ergotropía se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) = & \rho_1 \varepsilon_1 (|\langle \rho_1 | \varepsilon_1 \rangle|^2 - 1) + \rho_1 \varepsilon_2 (|\langle \rho_1 | \varepsilon_2 \rangle|^2) + \rho_2 \varepsilon_1 (|\langle \rho_2 | \varepsilon_1 \rangle|^2) \\ & + \rho_2 \varepsilon_2 (|\langle \rho_2 | \varepsilon_2 \rangle|^2 - 1), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) = & \rho_1 \varepsilon_2 (|\langle \rho_1 | \varepsilon_2 \rangle|^2) + \rho_2 \varepsilon_2 (|\langle \rho_2 | \varepsilon_2 \rangle|^2 - 1), \\ \mathcal{W}(t) = & (2e^{-\Gamma t} - 1) \epsilon. \end{aligned} \quad (4.27)$$

La Figura 4.1 muestra que, después de un tiempo crítico τ_c donde las poblaciones se cruzan, el sistema ya no posee inversión de población. En otras palabras, las poblaciones asociadas al nivel excitado ahora ocupa el nivel de energía más bajo. Esto impone la necesidad de redefinir el orden de los autovalores y autovectores del operador densidad para satisfacer el ordenamiento decreciente $\rho_1 > \rho_2$ necesario para el cálculo de la ergotropía (ecuaciones 2.62 y 2.63):

$$\rho_1 = 1 - e^{-\Gamma t}, \quad |\rho_1\rangle = (0, 1)^T, \quad (4.28)$$

$$\rho_2 = e^{-\Gamma t}, \quad |\rho_2\rangle = (1, 0)^T. \quad (4.29)$$

Esto conduce el hecho de que, después del cruce de poblaciones, el sistema ha perdido la propiedad de inversión de población y se encuentra en un estado pasivo. En este estado, no es posible extraer trabajo del sistema. Por lo tanto, la ergotropía después del tiempo de cruce es nula:

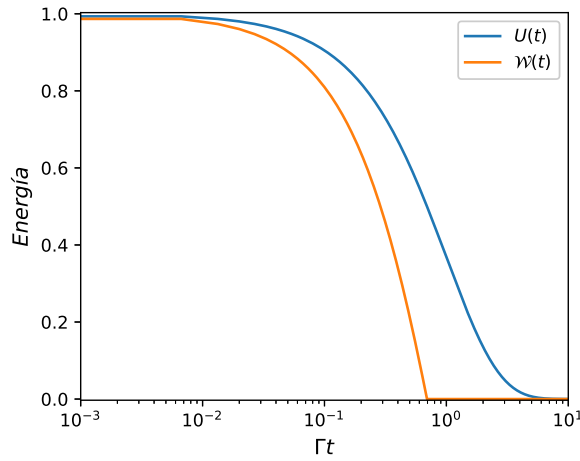
$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) = & \rho_1 \varepsilon_2 (|\langle \rho_1 | \varepsilon_2 \rangle|^2) + \rho_2 \varepsilon_2 (|\langle \rho_2 | \varepsilon_2 \rangle|^2 - 1), \\ \mathcal{W}(t) = & 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para describir de manera precisa cuándo el sistema está en un estado que permite la extracción de trabajo y cuándo alcanza un estado pasivo, introducimos la función escalón de Heaviside $\theta(\tau_c - t)$. El cruce de poblaciones es una manifestación del proceso de disipación que conducen a que las poblaciones asociadas al estado excitado decaigan a 0, mientras las poblaciones del estado fundamental crecen hacia 1. La ergotropía total se puede escribir de la forma

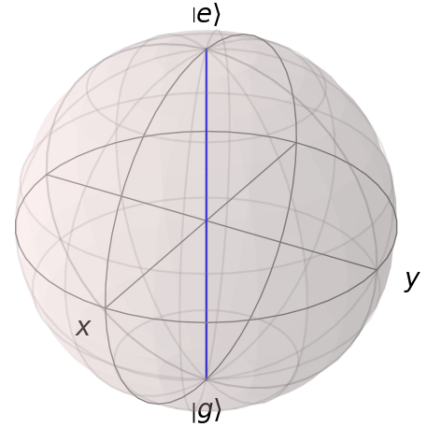
$$\mathcal{W}(t) = \theta(\tau_c - t) (2e^{-\Gamma t} - 1) \epsilon, \quad (4.31)$$

y se grafica en la figura 4.2a junto a la energía interna. El tiempo de cruce de las poblaciones τ_c , se puede determinar de manera sencilla al considerar el punto en el que $\rho_e(t) = \rho_g(t)$, es decir, donde las dos poblaciones se igualan. Por lo tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho_e(\tau_c) &= \rho_g(\tau_c), \\ e^{-\Gamma\tau_c} &= 1 - e^{-\Gamma\tau_c}, \\ \tau_c &= \ln 2/\Gamma.\end{aligned}\tag{4.32}$$



(a) Evolución de la energía interna y la máxima cantidad de trabajo extraíble (ergotropía) para el sistema preparado en un estado de carga completa $|\psi\rangle = |e\rangle$. Se asume la diferencia de energía $\epsilon = 1$ y la tasa de amortiguación $\Gamma = 0,1$



(b) Evolución del sistema en la representación de Bloch. Se observa que el sistema preparado en un estado de máxima carga representa un estado sin coherencias.

Para este caso particular, el estado completamente cargado inicialmente conduce a una realización clásica puesto que la evolución dinámica del sistema no exhibe coherencia cuántica, como se observa en la evolución del sistema en la figura 4.2b y en la ecuación 4.16.

Estado Máximamente Coherente

Con el fin de explorar las ventajas cuánticas en el contexto de las baterías, es esencial considerar el recurso de la coherencia cuántica dentro del sistema, una de las propiedades inherentes del mundo cuántico y que es un potencial recurso a explotar. Esta sección tiene como objeto comparar el desempeño de un sistema clásico y otro usa recursos cuánticos. Es importante destacar que al introducir la coherencia cuántica, surge una limitación fundamental: el estado inicial del sistema ya no puede considerarse completamente cargado porque esto conduce a un estado sin coherencia cuántica. Podemos entonces considerar que en un tiempo $t = 0$, el sistema inicia en un estado máximamente coherente definido de la forma

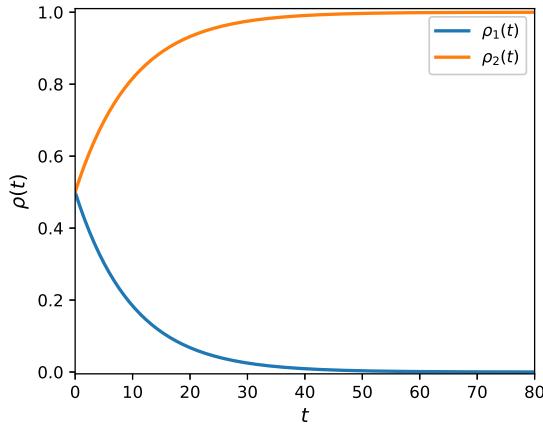
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle),\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(0) &= |\psi\rangle\langle\psi|, \\ &= |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|e\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|),\end{aligned}\quad (4.34)$$

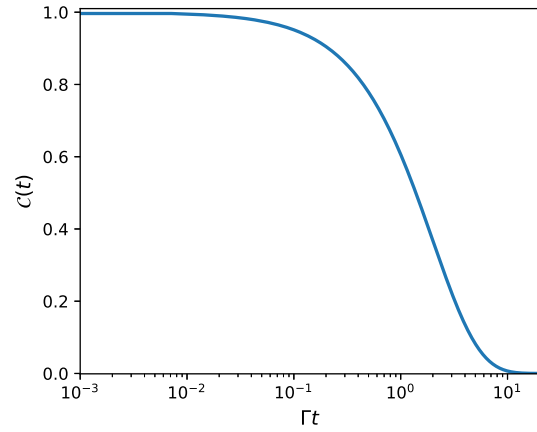
luego, las ecuaciones 4.12-4.15 se pueden expresar como la matriz densidad

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} & \frac{1}{2}e^{-(i\epsilon + \frac{\Gamma}{2})t} \\ \frac{1}{2}e^{(i\epsilon - \frac{\Gamma}{2})t} & 1 - \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

cuyas ocupaciones y coherencias se grafican en la Figura 4.3a y 4.3b.



(a) Evolución de las poblaciones en función del tiempo. Se observa que las poblaciones de los estados excitado y fundamental no se cruzan. Ambos estados inician en el mismo punto el estado excitado decae a 0 mientras que el estado fundamental tiende a 1.



(b) Dinámica de las coherencias. Se observa que en el tiempo inicial se tiene máxima coherencia en el sistema. A medida que el sistema evoluciona y se induce decoherencia debido a la interacción con el entorno, la cantidad de coherencia en el sistema decrece.

Diagonalizando 4.35 para el encontrar el conjunto de autovalores y autovectores del operador densidad, y definiendo $\delta = \sqrt{1 - e^{\Gamma t} + e^{2\Gamma t}}$, hallamos:

$$\begin{aligned}\det |\hat{\rho}(t) - \lambda \mathbb{I}| &= 0, \\ \rho_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\delta.\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}|\rho_1\rangle &= \left(\frac{e^{-i\epsilon}}{\sqrt{2}\sqrt{-e^{-\Gamma t}(\delta-1) + e^{\Gamma t} + \delta - 1}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{-\delta + e^{\Gamma t} + e^{-\Gamma t}(\delta+1) - 1}} \right)^T, \\ |\rho_2\rangle &= \left(-\frac{(\delta + e^{\Gamma t} - 1)e^{-i\epsilon}}{\sqrt{-2\delta + 2e^{\Gamma t}(\delta + e^{\Gamma t} - 1) + 2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{-e^{-\Gamma t}(\delta-1) + e^{\Gamma t} + \delta - 1}} \right)^T.\end{aligned}\quad (4.37)$$

Como el Hamiltoniano libre del sistema es independiente del tiempo, el orden establecido en las ecuaciones 4.24 y 4.25 se mantiene, entonces la energía interna total del sistema es

$$U(t) = \sum_i \langle i | \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}_0 | i \rangle, \quad (4.38)$$

$$= \epsilon e^{-\Gamma t}, \quad (4.39)$$

y la ergotropía total del sistema es

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) &= \rho_1 \varepsilon_2 (|\langle \rho_1 | \varepsilon_2 \rangle|^2) + \rho_2 \varepsilon_2 (|\langle \rho_2 | \varepsilon_2 \rangle|^2 - 1) \\ \mathcal{W}(t) &= e^{-\Gamma t} \left(1 - e^{\Gamma t} + \delta\right) \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Estos resultados se grafican en la figura 4.4.

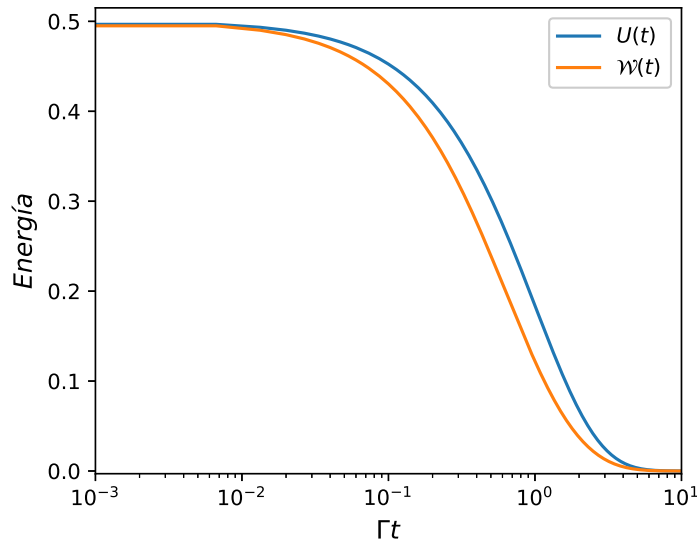


Figura 4.4: Evolución de la energía interna y la máxima cantidad de trabajo extraíble del sistema de un qubit.

Para llevar a cabo una comparación justa de la auto-descarga entre una realización cuántica y una clásica, vamos a imponer que ambos sistemas inicien con la misma cantidad de ergotropía. El operador densidad del estado cuántico en un tiempo inicial con condición de máxima coherencia $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ dado en su representación matricial es

$$\hat{\rho}_{qu}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Cuyos autovalores $\rho_{1,2} = 1, 0$, y sus respectivos autovectores son:

1. Para $\rho_1 = 1$

$$|\rho_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)^T \quad (4.42)$$

2. Para $\rho_2 = 0$

$$|\rho_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1)^T \quad (4.43)$$

Luego, de la ecuación 4.23 podemos hallar la ergotropía para un estado inicial de máxima coherencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{qu}(0) &= \rho_1 \varepsilon_2 (|\langle \rho_1 | \varepsilon_2 \rangle|^2) \\ \mathcal{W}_{qu}(0) &= \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ahora vamos a determinar el estado en el que un sistema clásico tiene la misma ergotropía que su contra-parte cuántica (estado de máxima coherencia), por lo tanto realizamos las siguientes consideraciones:

- El operador de estado es diagonal en la base del Hamiltoniano $\{|\varepsilon_i\rangle\}$

$$\hat{\rho} = \rho_1 |\varepsilon_1\rangle \langle \varepsilon_1| + \rho_2 |\varepsilon_2\rangle \langle \varepsilon_2|, \quad (4.45)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \varepsilon_1 |\varepsilon_1\rangle \langle \varepsilon_1| + \varepsilon_2 |\varepsilon_2\rangle \langle \varepsilon_2|, \quad \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \epsilon. \quad (4.46)$$

Aquí el conjunto de vectores en la base propia del sistema se definen como

$$|\varepsilon_1\rangle \rightarrow |g\rangle, \quad (4.47)$$

$$|\varepsilon_2\rangle \rightarrow |e\rangle. \quad (4.48)$$

Con la ergotropía del estado cuántico 4.44, establecemos la condición inicial del estado clásico, el cual debido a su naturaleza no posee coherencias, por lo tanto en su forma diagonal es:

$$\hat{\rho}_{cl}(0) = \rho_1 |e\rangle \langle e| + \rho_2 |g\rangle \langle g| \quad (4.49)$$

La ergotropía de este estado es:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{qu}(0) &= \rho_1 \varepsilon_2 (|\langle \rho_1 | \varepsilon_2 \rangle|^2) + \rho_2 \varepsilon_2 (|\langle \rho_2 | \varepsilon_2 \rangle|^2 - 1), \\ \mathcal{W}_{qu}(0) &= (\rho_1 - \rho_2) \epsilon, \end{aligned} \quad (4.50)$$

y con la condición conservación de la probabilidad $\rho_1 + \rho_2 = 1$, obtenemos una expresión general para los autovalores del estado clásico:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathcal{W}_{qu}(0)}{\epsilon} \right), \quad (4.51)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathcal{W}_{qu}(0)}{\epsilon} \right). \quad (4.52)$$

Por lo tanto, el estado mixto clásico que permite a la realización clásica, tener la misma ergotropía del caso cuántico de máxima coherencia, queda escrito de la forma:

$$\hat{\rho}_{cl}(t) = \frac{3}{4} |e\rangle \langle e| + \frac{1}{4} |g\rangle \langle g|. \quad (4.53)$$

A partir de esta descripción, se obtiene la dinámica de la ergotropía para este estado preparado clásicamente, de la misma forma que se hizo para el caso completamente cargado:

$$\mathcal{W}_{cl}(t) = \frac{\epsilon}{2} \theta(\tau_c - t) (3e^{-\Gamma t} - 2), \quad (4.54)$$

donde el tiempo de cruce es $\tau_c = \ln(3/2)/\Gamma$. Un parámetro que nos permite determinar el desempeño de las baterías se denomina el coeficiente de eficiencia; este nos dice cuanta de la energía almacenada en la batería realmente se puede utilizar para realizar trabajo útil y se establece mediante la relación

$$\varepsilon(t) = \mathcal{W}(t)/U(t). \quad (4.55)$$

En la Fig 4.5 se observan las energías propias del sistema y la ergotropía para cada estado inicial. En la realización cuántica la ergotropía se mantiene durante un período de tiempo más largo, antes de que se produzca una disipación significativa, en comparación con su análogo clásico.

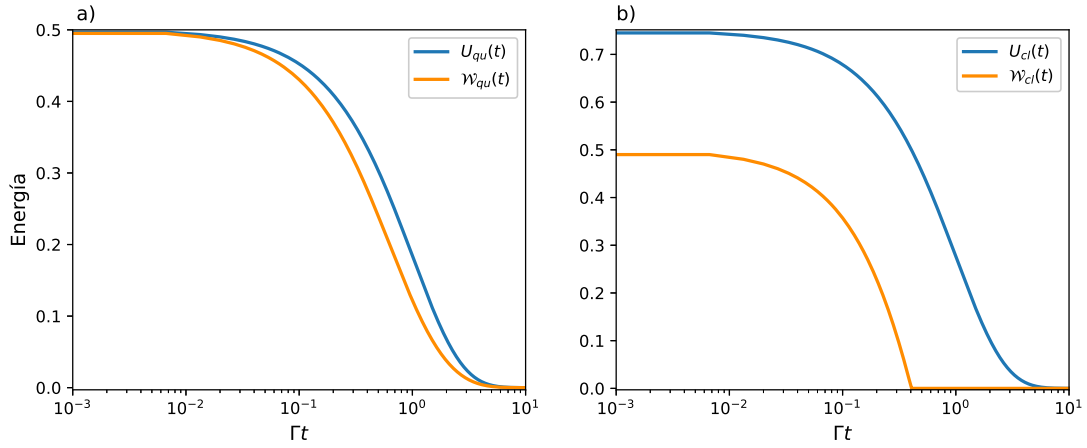
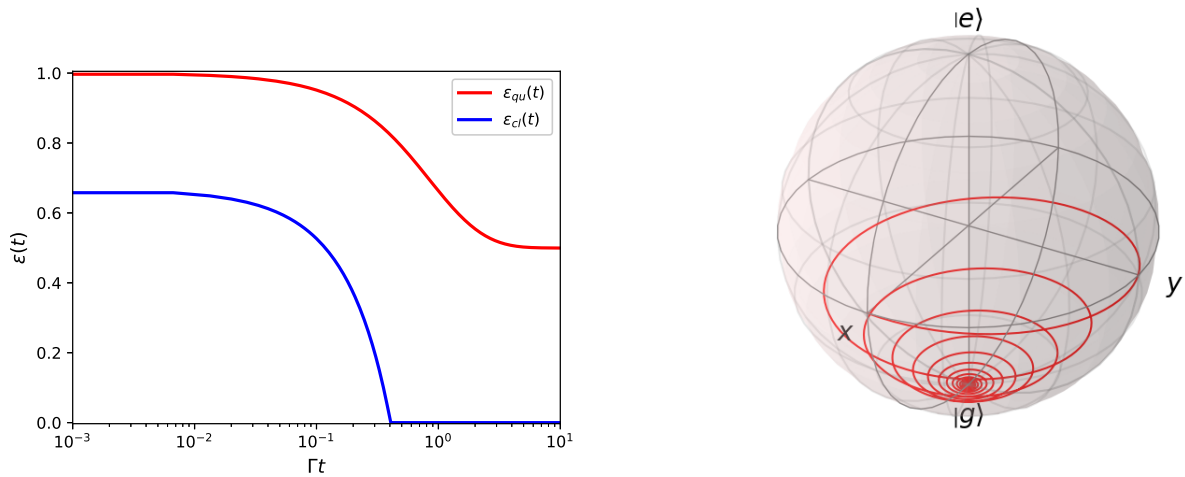


Figura 4.5: Energías del sistema en función del tiempo. Energía Interna y Ergotropía para a) un estado inicial cuántico y b) para un estado inicial clásico.

Por otra parte, el estado cuántico (*máximamente coherente*) permite observar una ventaja significativa en la eficiencia, incluso cuando el sistema está sujeto a procesos de disipación con el entorno, como se observa en la figura 4.6a. Además, se observa en la figura 4.6b como la coherencia cuántica afecta la evolución del sistema.



(a) Dinámica del coeficiente de eficiencia para el sistema preparado inicialmente en un estado cuántico y uno clásico (sin coherencias).

(b) Evolución del sistema preparado en un estado máximamente coherente en la esfera de Bloch.

En conclusión, se observa que el sistema preparado en un estado inicial de máxima coherencia exhibe un mejor desempeño en el almacenamiento de energía. Cuando se utilizan las coherencias para guardar energía en forma de ergotropía se observa como incrementan los tiempos de decaimiento del sistema en contraste con los del sistema preparado en un estado de máxima carga.

4.1.2. Batería Acoplada a un Campo Externo Resonante

Oscilaciones coherentes producidas por campos externos resonantes han sido observadas en sistemas como qubits individuales o qubits interactuantes [70], las cuales surgen como consecuencia del acoplamiento entre los niveles del sistema producido por el campo. Estas oscilaciones, conocidas en sistemas cerrados como “oscilaciones de Rabi”, desempeñan un papel crucial en la manipulación y control de estados en la computación cuántica [70, 71].

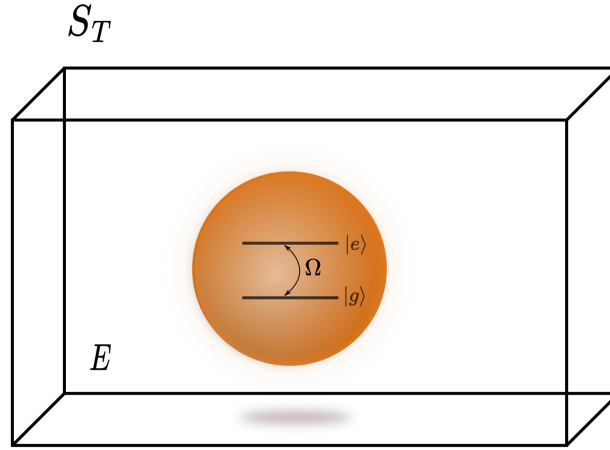


Figura 4.7: Bosquejo de un sistema de dos niveles con una frecuencia de conducción que da cuenta del acoplamiento entre los niveles de energía.

Consideremos ahora el caso en el que un sistema de dos niveles es conducido coherentemente entre sus estados por medio de un campo externo como se muestra en la Figura 4.7. El Hamiltoniano que describe el sistema puede definirse como

$$\hat{\mathcal{H}} = \varepsilon |e\rangle \langle e| + \Omega (|g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g|) \quad (4.56)$$

Donde Ω es la frecuencia de conducción, también denominada frecuencia de Rabi, que es proporcional a la amplitud del campo externo. Esta nueva contribución al Hamiltoniano describe la transición cuántica entre los estados del sistema.

Dinámica del Sistema

Mientras que la contribución correspondiente al campo de externo sea débil respecto a la energía interna del sistema, la ecuación maestra de Lindblad conserva la forma definida en la sección anterior, agregando el nuevo término del Hamiltoniano 4.55:

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t)] + \frac{\Gamma}{2} \left(2\sigma^- \hat{\rho}(t) \sigma^+ - \{ \sigma^+ \sigma^-, \hat{\rho}(t) \} \right). \quad (4.57)$$

Igual que antes, hallamos el conjunto de elementos matriciales de la evolución del operador densidad, el cual es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\dot{\rho}_e(t) = -i\Omega(\rho_{ge}(t) - \rho_{eg}(t)) - \Gamma\rho_e(t), \quad (4.58)$$

$$\dot{\rho}_g(t) = -i\Omega(\rho_{eg}(t) - \rho_{ge}(t)) + \Gamma\rho_e(t), \quad (4.59)$$

$$\dot{\rho}_{eg}(t) = -i(\varepsilon\rho_{eg}(t) + \Omega(\rho_g(t) - \rho_e(t))) - \frac{\Gamma}{2}\rho_{eg}(t), \quad (4.60)$$

$$\dot{\rho}_{ge}(t) = -i(\Omega(\rho_e(t) - \rho_g(t)) - \varepsilon\rho_{ge}(t)) - \frac{\Gamma}{2}\rho_{ge}(t). \quad (4.61)$$

En el caso de acoplamiento entre niveles, debido a la complejidad del sistema de ecuaciones, se requiere emplear métodos numéricos para solucionar el sistema. En este trabajo utilizamos QuTiP - Quantum Toolbox in Python para resolver la dinámica del sistema, como se puede ver en la gráfica 4.8 para la condición inicial de máxima coherencia.

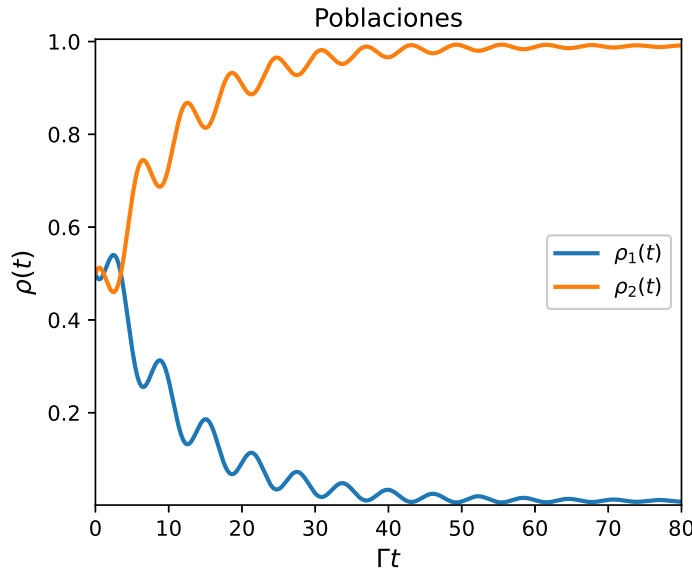


Figura 4.8: Evolución de las poblaciones en función del tiempo. Establecemos los parámetros $\Gamma = \Omega = 0,1$

Para resolver este sistema diagonalizamos el Hamiltoniano y encontramos los autovectores asociados a los autovalores $\epsilon_1 = \frac{1}{2}(\epsilon - \Delta)$, $\epsilon_2 = \frac{1}{2}(\epsilon + \Delta)$, donde se define $\Delta = \sqrt{\epsilon^2 + 4\Omega^2}$

$$|\epsilon_1\rangle = \left(\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \left(\frac{1}{2}(\epsilon - \Delta) - \epsilon\right)^2}}, \frac{\frac{1}{2}(\epsilon - \Delta) - \epsilon}{\sqrt{\Omega^2 + \left(\frac{1}{2}(\epsilon - \Delta) - \epsilon\right)^2}} \right)^T \quad (4.62)$$

$$|\epsilon_2\rangle = \left(\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \left(\frac{1}{2}(\epsilon + \Delta) - \epsilon\right)^2}}, \frac{\frac{1}{2}(\epsilon + \Delta) - \epsilon}{\sqrt{\Omega^2 + \left(\frac{1}{2}(\epsilon + \Delta) - \epsilon\right)^2}} \right)^T \quad (4.63)$$

Para realizar un comparativo entre un sistema con un estado cuántico y un sistema descrito por un estado clásico que representa el comportamiento de una batería convencional

(en este caso el Hamiltoniano sin el término de conducción coherente), se utilizan las definiciones propuestas en las Ec 4.51 y 4.52.

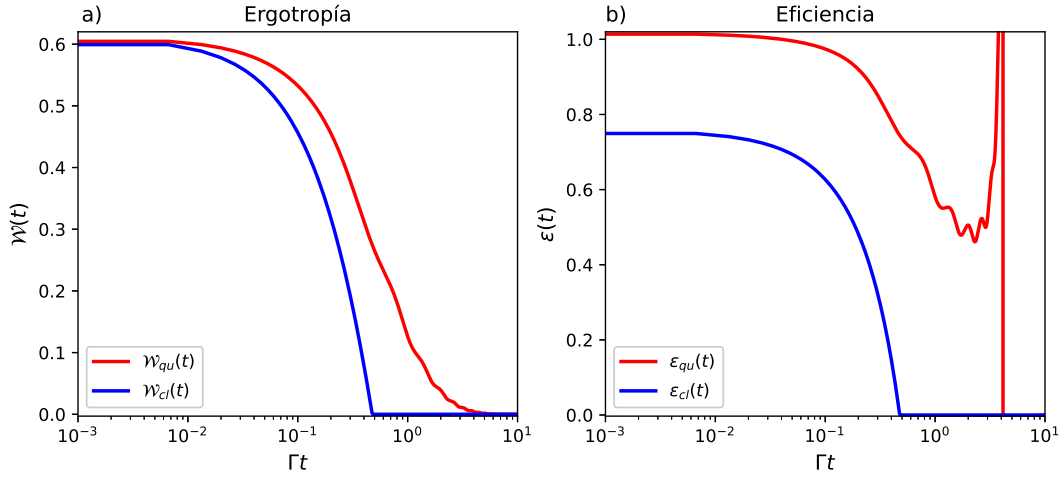


Figura 4.9: a) Ergotropía para el estado inicial cuántico y clásico de un sistema sujeto a un campo de conducción coherente. La realización cuántica permite que la energía extraíble se mantenga el sistema cuántico durante un período de tiempo más largo y por lo tanto su desempeño en función del tiempo sea mayor contraste con un análogo clásico. b) El coeficiente de eficiencia para la realización cuántica y clásica.

Podemos observar que la adición de un campo resonante no modifica de manera significativa los análisis ya realizados, mas allá de añadir algunas oscilaciones a la dinámica del sistema. Esto se debe a que el campo resonante es pequeño en relación a las escalas de energía del sistema. El análisis de campos resonantes de mayor intensidad puede ser interesante, pero se deben estudiar mediante una ecuación maestra diferente a la usada en esta sección, ya que la intensidad del campo va más allá de las aproximaciones usadas en este trabajo.

4.2. Múltiples Baterías

En la sección anterior, hemos analizado la dinámica de celdas de baterías individuales que interactúan exclusivamente con un único reservorio, que es el entorno. Este tipo de sistemas nos ha permitido investigar la coherencia cuántica como un recurso en sistemas de baterías. Sin embargo, la coherencia cuántica no es el único recurso cuántico explotable; el entrelazamiento cuántico, entre otros, también forma parte de este conjunto de recursos cuánticos [30]. Por esta razón, nos vemos motivados a considerar un sistema que permita exhibir ambas propiedades cuánticas. En otras palabras, nos enfocamos en sistemas compuestos por dos o más baterías. En esta sección, exploraremos sistemas de N celdas de baterías para examinar la dinámica del sistema cuando consideramos no solo la interacción con el entorno, sino también la interacción entre las baterías. En nuestro análisis de recursos cuánticos, examinaremos estados con máxima coherencia y máximo entrelazamiento. Además, consideraremos los efectos de la geometría en el proceso de autodescarga.

4.2.1. Cadena Lineal de N Baterías

Nuestro modelo consiste en una cadena lineal de N baterías interactuantes como se muestra en la Fig 3.3. Al extender el modelo previamente descrito en la sección anterior, que se centraba en sistemas de baterías individuales, introducimos nuevos términos que caracterizan la interacción en la cadena lineal y los procesos de decaimiento colectivo en el sistema. El Hamiltoniano del sistema, que incluye las contribuciones libres de cada batería y la parte de interacción, se expresa de la siguiente manera, como ya se discutió en la sección 3.4.2.

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_i^N \epsilon \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i^- + J \sum_{i,j=1}^N \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^-. \quad (4.64)$$

Si el estado inicial del sistema total (sea cuántico o clásico) no está entrelazado, está dado mediante el producto tensor

$$\hat{\rho}(N) = \bigotimes_{n=1}^N \hat{\rho}. \quad (4.65)$$

En términos generales, asumimos las siguientes condiciones: en relación con las contribuciones de la parte unitaria de la ecuación maestra de Lindblad, definida en la Ec. 3.37, consideramos que todas las baterías son idénticas, lo que implica que la diferencia de energía entre sus estados es constante, es decir, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_N = \epsilon$. Además, asumimos un acoplamiento homogéneo entre las baterías, lo que significa que la fuerza de interacción es uniforme para todas las parejas de baterías, es decir, $J_{ij} = J$. Por otro lado, en lo que respecta a la parte no unitaria de la dinámica, partimos del supuesto de que la interacción entre ellas y con el entorno tiene tasas de decaimiento iguales. Esto significa que el proceso de disipación de cada batería con el entorno se produce con la misma tasa de decaimiento, denotada como $\Gamma_{i=j} = \Gamma$ mientras que de manera análoga, el proceso disipativo debido a la interacción entre celdas se caracteriza por tasas de decaimiento idénticas, denotadas como $\Gamma_{i \neq j} = \Gamma_{icl}$. Es importante destacar que estas últimas tasas solo se consideran significativas cuando la interacción ocurre con la batería vecina más cercana. En una primera aproximación al análisis de estos sistemas multipartitos, consideramos el sistema de $N = 2$. El Hamiltoniano total del sistema toma la forma:

$$\hat{\mathcal{H}} = \epsilon (\hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_1^- + \hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_2^-) + J (\hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_2^- + \hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_1^-). \quad (4.66)$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema se describe a partir de las siguientes contribuciones

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & -i \left(\hat{\mathcal{H}} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}} \right) + \Gamma \left(\hat{\sigma}_1^- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_1^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_1^-, \hat{\rho}(t) \} \right) \\ & + \Gamma \left(\hat{\sigma}_2^- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_2^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_2^-, \hat{\rho}(t) \} \right) + \Gamma_{icl} \left(\hat{\sigma}_2^- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_1^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_2^-, \hat{\rho}(t) \} \right) \\ & + \Gamma_{icl} \left(\hat{\sigma}_1^- \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_2^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_1^-, \hat{\rho}(t) \} \right), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones: diferenciales

$$\dot{\rho}_{11}(t) = -2\Gamma\rho_{11}(t), \quad (4.67)$$

$$\dot{\rho}_{22}(t) = \Gamma(\rho_{11}(t) - \rho_{22}(t)) - \frac{1}{2}\Gamma_{icl}(\rho_{23}(t) + \rho_{32}(t)) + iJ(\rho_{23}(t) - \rho_{32}(t)), \quad (4.68)$$

$$\dot{\rho}_{33}(t) = \Gamma(\rho_{11}(t) - \rho_{33}(t)) - \frac{1}{2}\Gamma_{icl}(\rho_{23}(t) + \rho_{32}(t)) - iJ(\rho_{23}(t) - \rho_{32}(t)), \quad (4.69)$$

$$\dot{\rho}_{44}(t) = \Gamma(\rho_{22}(t) + \rho_{33}(t)) + \Gamma_{icl}(\rho_{23}(t) + \rho_{32}(t)), \quad (4.70)$$

$$\dot{\rho}_{12}(t) = \frac{1}{2}(-3\Gamma\rho_{12}(t) - \Gamma_{icl}\rho_{13}(t) + 2iJ\rho_{13}(t) - 2i\epsilon\rho_{12}(t)), \quad (4.71)$$

$$\dot{\rho}_{13}(t) = \frac{1}{2}(-3\Gamma\rho_{13}(t) - \Gamma_{icl}\rho_{12}(t) + 2iJ\rho_{12}(t) - 2i\epsilon\rho_{13}(t)), \quad (4.72)$$

$$\dot{\rho}_{14}(t) = \rho_{14}(t)(-\Gamma - 2i\epsilon), \quad (4.73)$$

$$\dot{\rho}_{23}(t) = -\Gamma\rho_{23}(t) + \Gamma_{icl}\left(\rho_{11}(t) - \frac{\rho_{22}(t)}{2} - \frac{\rho_{33}(t)}{2}\right) + iJ(\rho_{22}(t) - \rho_{33}(t)), \quad (4.74)$$

$$\dot{\rho}_{24}(t) = \Gamma\left(\rho_{13}(t) - \frac{\rho_{24}(t)}{2}\right) + \Gamma_{icl}\left(\rho_{12}(t) - \frac{\rho_{34}(t)}{2}\right) - i(J\rho_{34}(t) + \epsilon\rho_{24}(t)), \quad (4.75)$$

$$\dot{\rho}_{34}(t) = \Gamma\left(\rho_{12}(t) - \frac{\rho_{34}(t)}{2}\right) + \Gamma_{icl}\left(\rho_{13}(t) - \frac{\rho_{24}(t)}{2}\right) - i(J\rho_{24}(t) + \epsilon\rho_{34}(t)). \quad (4.76)$$

Donde $\dot{\rho}_{21}(t) = \dot{\rho}_{12}^*(t)$, $\dot{\rho}_{31}(t) = \dot{\rho}_{13}^*(t)$, $\dot{\rho}_{41}(t) = \dot{\rho}_{14}^*(t)$, $\dot{\rho}_{23}(t) = \dot{\rho}_{32}^*(t)$, $\dot{\rho}_{42}(t) = \dot{\rho}_{24}^*(t)$, $\dot{\rho}_{44}(t) = \dot{\rho}_{34}^*(t)$. Este mismo análisis se puede extender para una cadena lineal de hasta $N = 5$ mediante **Qutip**, mediante el cual solucionamos numéricamente los sistemas de ecuaciones diferenciales. En la Figura 4.10 se presentan los resultados de considerar el sistema con un estado inicial de máxima coherencia, que se construye como el producto tensorial del estado de máxima coherencia para un qubit (Ecuación 4.41):

$$|\psi(N)\rangle = \bigotimes_{n=1}^5 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \right]. \quad (4.77)$$

y se contrasta con los resultados de considerar un estado inicial clásico construido como

$$\hat{\rho}_{cl}(N) = \bigotimes_{n=1}^5 \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\mathcal{W}_{qu}(0)}{\epsilon} \right) |e\rangle \langle e| + \left(1 - \frac{\mathcal{W}_{qu}(0)}{\epsilon} \right) |g\rangle \langle g| \right]. \quad (4.78)$$

Aquí, la ergotropía inicial del sistema máximamente coherente establecida en 4.44, es $\mathcal{W}_{qu}(0) = 0,5\epsilon$. El estado inicial clásico fue construido para que inicialmente tengan una ergotropía igual al estado inicial cuántico $\mathcal{W}_{qu}(0)$ y así poder hacer una comparación justa, de la misma forma en que fue hecho para un qubit en las ecuaciones 4.51 y 4.52. En la primera columna de la figura 4.10, se observa la evolución del estado inicial cuántico, y se grafica la energía interna como múltiplo de la energía interna inicial $U_0 = N\epsilon/2$, lo que nos permite comparar comportamiento de la energía interna del sistema para diferentes números de celdas N . La ergotropía, está representada en la gráfica b) se como múltiplo de la ergotropía inicial $\mathcal{W}_0(N) = N\epsilon/2$ (Ecuación 4.44). En la segunda columna se presentan las mismas cantidades correspondientes al estado inicial clásico.

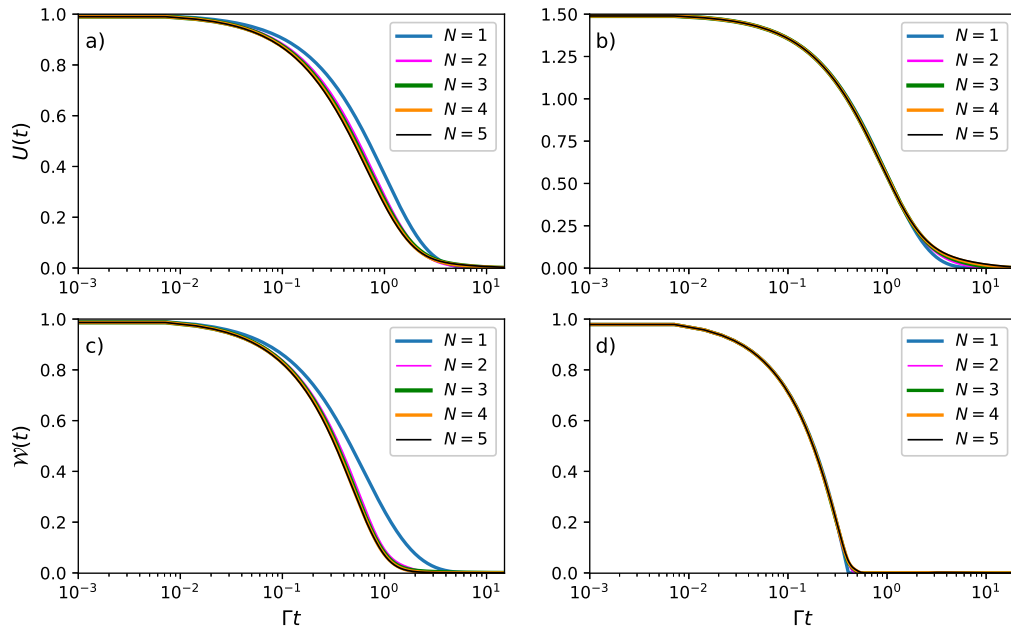


Figura 4.10: Energía interna de la batería para (a) estados cuánticos y (b) clásicos. Ergotropía para estados (c) cuánticos y (d) clásicos. Consideramos sistemas hasta $N = 5$ baterías y asumimos $\Gamma = 0,1$, $\Gamma_{icl} = \Gamma/2$ y $J = 2\Gamma$.

Aunque el sistema con estado inicial clásico almacena una cantidad de energía mayor, la energía aprovechable y/o extraíble, es decir, su ergotropía, decae a un ritmo más rápido, esto indica que para un estado clásico, una parte significativa de la energía interna almacenada no es aprovechable. En contraste, para el estado inicial cuántico, se observa que la cantidad de ergotropía, es decir, la energía útil, es más óptima en relación a la energía interna del sistema y sus tiempos de descarga.

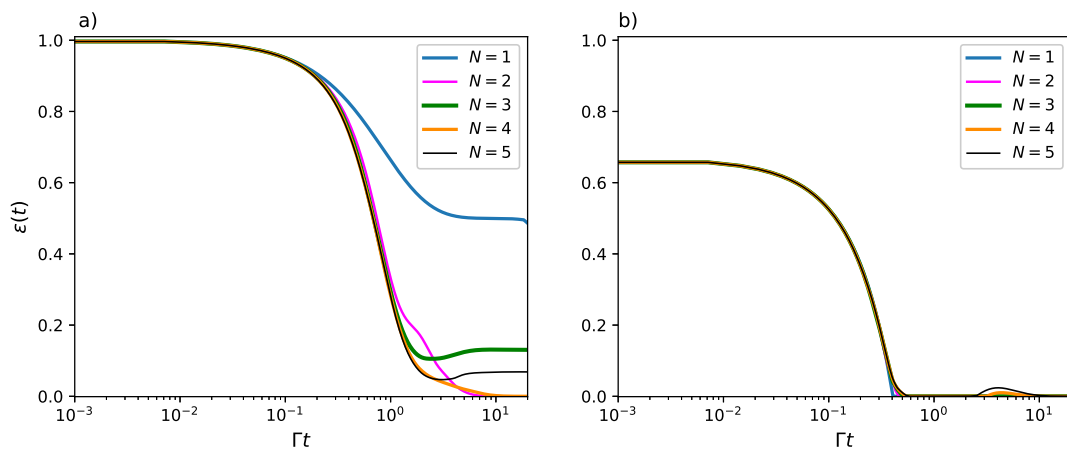


Figura 4.11: a). Coeficiente de eficiencia del sistema para algunos valores de N en estados a) cuánticos y b) clásicos.

En la Figura 4.11 se muestra la eficiencia de cada realización física, se puede observar un desempeño más óptimo en el almacenamiento de energía cuando se emplean un estado

inicial de máxima coherencia para cualquier valor de N . Al analizar el parámetro de eficiencia, se presentan dos posibilidades:

1. Sí $\varepsilon(t) \approx 1$, entonces $U(t) \approx \mathcal{W}(t)$. Esto implica que la casi toda la energía total que puede almacenar el sistema es utilizable para realizar trabajo útil.
2. Sí $\varepsilon(t) < 1$, entonces $U(t) > \mathcal{W}(t)$. Esto conduce a que exista una porción de energía interna que no se puede aprovechar como trabajo útil, lo que se conoce como energía muerta. En otras palabras, parte de la energía interna de la batería no puede ser extraída como trabajo (ergotropía).

Al analizar la eficiencia inicial para los estados cuánticos, se observa que inicialmente para cualquier valor de N , la cantidad $\varepsilon(0) \approx 1$ indica una alta eficiencia en el almacenamiento de energía en forma de ergotropía. Por otro lado, para el estado clásico inicialmente tiene que $\varepsilon(0) < 1$, lo que señala que no toda la energía interna del sistema es extraíble para realizar trabajo útil y por lo tanto se tiene un total de energía muerta correspondiente al 33,3 %. Se puede concluir que existe una ventaja cuántica al explotar la coherencia cuántica como recurso, ya que no solo permite aprovechar una mayor cantidad de energía en relación con la capacidad de almacenamiento del sistema, sino que también se traduce en tiempos de descarga más eficientes en comparación con una contraparte clásica.

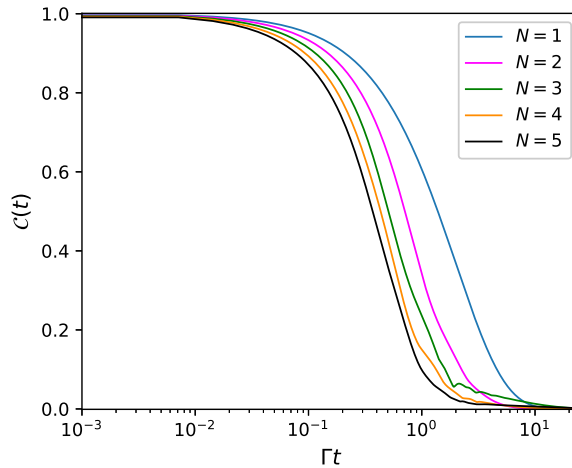


Figura 4.12: Cuantificación de la coherencia para algunos valores de N . Se observa la pérdida de coherencia a medida que el número N de baterías aumenta.

Hasta este punto, hemos podido evidenciar la ventaja de la coherencia como un recurso cuántico en los procesos de almacenamiento de energía. En la Figura 4.12 hemos cuantificado la coherencia para los modelos que hemos estudiado hasta ahora usando como medida de coherencia, aquella basada en la distancia, denominada coherencia de norma l_1 (Ecuación 2.76), que se puede normalizar de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}_{l_1}(t) = \frac{1}{\mathcal{C}_{\text{máx}}} \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}(t)|. \quad (4.79)$$

En este punto resulta intuitivo establecer una relación entre coherencia y eficiencia. Los resultados previos han establecido una distinción significativa entre el comportamiento de un sistema en un estado inicial máximamente coherente (cuántico) y un sistema en un

estado inicial no coherente (clásico). Es interesante notar que, a medida que aumentamos el número N de baterías, la medida de coherencia tiende a disminuir, lo que también podría estar relacionada con la eficiencia. Esto podría indicar que cuando consideramos sistemas más complejos que incluyan más interacciones, estas inducen decoherencia en el sistema. En todo caso, el comportamiento de la coherencia y la ergotropía es bastante similar, cuando disminuye una cantidad, la otra también disminuye, a medida que se varía N , lo que nos lleva a concluir que la coherencia como recurso cuántico mejora la ergotropía.

4.2.2. Explorando Efectos de Geometría

En este punto, nos interesa analizar la influencia de la geometría en los procesos de almacenamiento de energía y, por lo tanto, en la eficiencia de las baterías cuánticas. Para explorar esta idea se proponen tres tipos de geometrías además de la configuración convencional lineal. Estas son la geometría central, circular y simétrica. En un principio, preparamos el sistema en un estado de máxima coherencia, preparamos un estado clásico que sea análogo y determinamos el efecto de la geometría en el desempeño de los procesos de almacenamiento de energía de los arreglos de baterías. También, preparamos el sistema en un estado de máximo entrelazamiento por pares y se realiza el mismo análisis.

Estado Máximamente Coherente

Consideramos un arreglo de $N = 5$ baterías, tal como se muestra en el esquema de la Figura 4.13. Estos sistemas se consideran preparados inicialmente en un estado de máxima coherencia, descritos por la ecuación 4.77, y los comparamos con su análogo clásico 4.78.

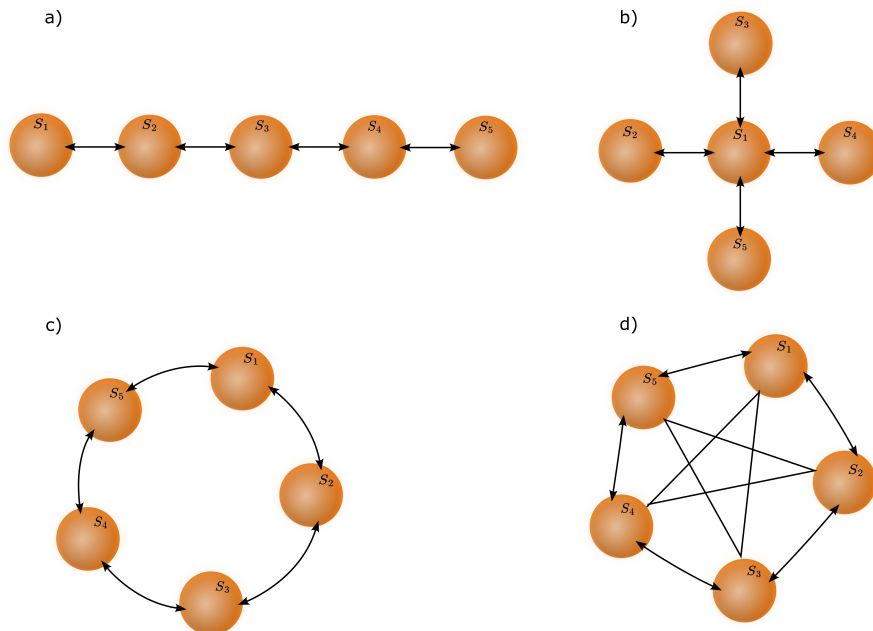


Figura 4.13: Configuración para la geometría: (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica. Las primeras tres geometrías se analizan desde el enfoque del vecino más cercano. La geometría simétrica considera todas las conexiones posibles entre las baterías del arreglo. Cada conexión entre pares de baterías inducen procesos de decaimiento colectivo entre ellas.

Estas configuraciones geométricas permiten nuevos canales de decaimiento; cuando se ubican las baterías de una forma particular, es posible considerar más conexiones e interacciones en el sistema. Por ejemplo, en el caso de la geometría central, observamos cuatro conexiones entre vecinos cercanos, mientras que en la geometría simétrica, donde todas las baterías interactúan entre sí, el número de conexiones asciende a diez.

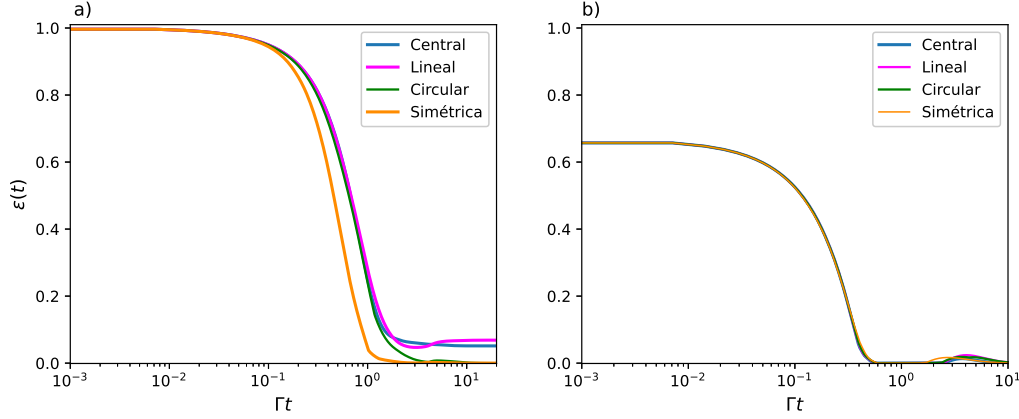


Figura 4.14: Coeficiente de eficiencia $\varepsilon(t)$ para cada configuración geométrica del sistema para estados (a) cuánticos y (b) clásicos. Se observa como la geometría y el número de conexiones entre baterías no tiene efectos en la eficiencia clásica.

Los resultados presentados en la Figura 4.14 muestran que la eficiencia de estos sistemas decae más lentamente para geometrías que implican menos interacciones. Este resultado es aparentemente contra intuitivo, dado que la disipación de energía entre baterías está modelada como un proceso en el que una batería emite una excitación en forma de energía a su vecina más cercana, quien la almacena temporalmente. Intuitivamente, uno podría esperar que un mayor número de conexiones condujera a una disipación mas lenta, lo que podría implicar una retención más prolongada de la energía almacenada. No obstante, los resultados obtenidos para la geometría simétrica contradicen esta intuición inicial, ya que muestran tiempos de decaimiento de energía más cortos. Podemos concluir entonces que la eficiencia del sistema es influenciada por efectos de geometría. Esto sugiere que ciertas configuraciones, son mas favorables en la retención de energía desde una perspectiva de eficiencia.

Adicionalmente, se observa que cualquier geometría tiene más eficiencia que su contraparte clásica, y decae más lentamente, además es claro que la geometría no afecta a los sistemas preparados en estados clásicos. Por lo tanto se concluye que son las características cuánticas de los estados con máxima coherencia, las que generan este mejoramiento de la eficiencia. Analizaremos la coherencia con la ecuación 4.12, y también cuantificaremos si surge entrelazamiento en las configuraciones, a medida que evolucionan en el tiempo, usando como cuantificador la concurrencia. Esta medida normalizada se determina a partir de la concurrencia por pares y se define como:

$$E(t) = \frac{1}{\mathcal{N}_{\{i,j\}}} \sum_{\{i,j\}} \mathcal{C}_{ij}(t) \quad (4.80)$$

Donde $\mathcal{N}_{\{i,j\}}$ representa el número total de conexiones entre baterías para cada configuración, siendo $\mathcal{N}_{\{i,j\}} = 4$ para las geometrías central y lineal, y $\mathcal{N}_{\{i,j\}} = 5$ y $\mathcal{N}_{\{i,j\}} = 10$

para las geometrías circular y simétrica, respectivamente.

La dinámica de la coherencia permite identificar un comportamiento similar entre la coherencia y la eficiencia. Así, se puede establecer una relación directa entre la coherencia y la eficiencia del sistema en el almacenamiento de energía. Cuando el sistema comienza a perder coherencia, como se muestra en la Figura 4.15a, debido a procesos disipativos que inducen decoherencia en el sistema, la eficiencia disminuye, como se evidencia en la Figura 4.14. Estos resultados nos llevan a concluir que el proceso de autodescarga, mediante el cual la energía del sistema se disipa, está directamente relacionado con la pérdida de coherencia del sistema. De esta manera, los procesos de decaimiento están asociados a la cantidad de coherencia presente en el sistema.

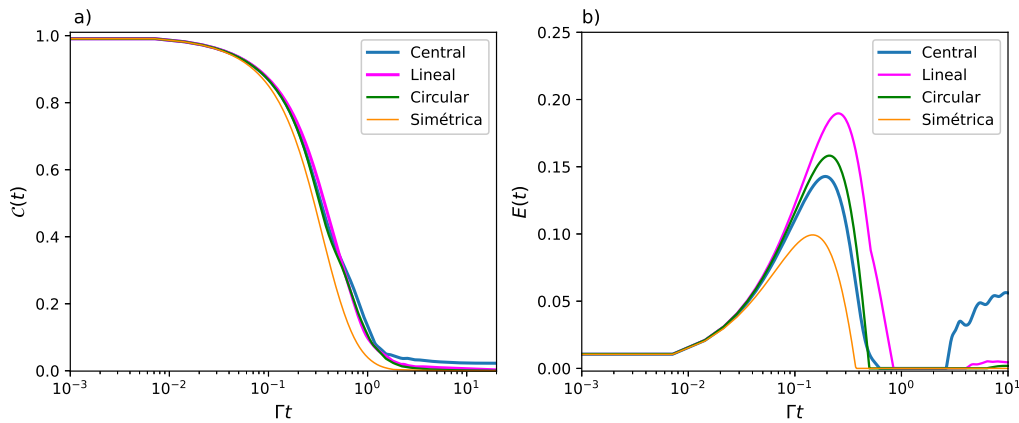


Figura 4.15: Medida de (a) la coherencia y (b) el entrelazamiento cuántico en el sistema para las cuatro geometrías.

En la figura la Figura 4.15b se puede observar la dinámica de formación de entrelazamiento. El estado inicial del sistema exhibe coherencia pero como es separable, no tiene entrelazamiento. No obstante, a medida que el sistema evoluciona se observa la generación temporal de entrelazamiento, que sin embargo decae rápidamente. Es importante notar que las geometrías con un mayor número de conexiones presentan una formación de entrelazamiento menor en comparación con las dos configuraciones que tienen menos conexiones, es decir, la geometría lineal y la central, sin embargo, el entrelazamiento aparentemente no tiene ningún efecto en la eficiencia.

Estados Máximamente Entrelazados por pares

Consideramos las geometrías analizadas previamente para arreglo de $N = 4$ baterías. En el caso anterior, preparamos el sistema en un estado máximamente coherente, ahora, exploraremos estados cuánticos máximamente entrelazados. En sistemas multipartitos, los estados de Bell se pueden generalizar para describir el entrelazamiento entre más de dos sistemas mediante los estados GHZ. Sin embargo, asumimos que el entrelazamiento se da entre pares de baterías, por lo que los estados se construyen en la base de Bell para sistemas bipartitos y en particular el estado de Bell definido en la Ec. 2.85. Es importante destacar que el entrelazamiento cuántico es un fenómeno no local, por lo tanto, el entrelazamiento entre las parejas de baterías se puede dar entre sistemas no vecinos. De este modo, para cada arreglo, suponemos que inicialmente existen dos pares de baterías entrelazadas, tal

como se esquematiza en la Figura 4.16, donde se representa cómo cada par de baterías están entrelazadas.

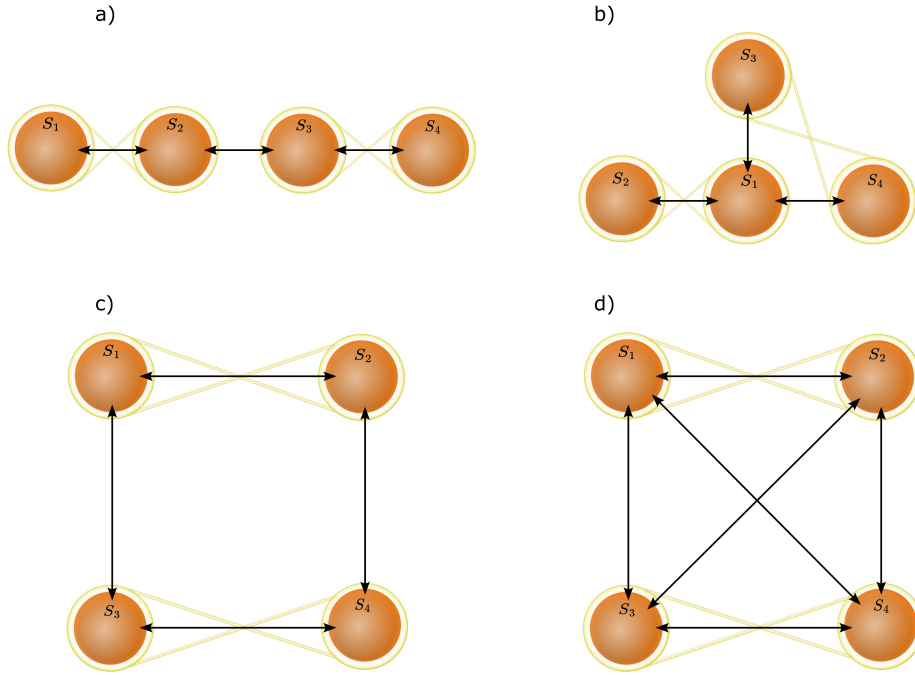


Figura 4.16: Sistemas en estados con máximo entrelazamiento en una geometría: (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica. El entrelazamiento se da entre parejas de baterías

Inicialmente, asumimos que los pares de baterías señalados se encuentran en un estado máximamente entrelazado, por lo tanto, el estado global inicial se construye mediante el producto tensorial de dos estados de Bell, formando una base máximamente entrelazada para las dos parejas de baterías en el espacio de Hilbert de $4^{N/2}$ dimensiones:

$$|\psi(N)\rangle = |\Psi^-\rangle \otimes |\Psi^-\rangle. \quad (4.81)$$

La propiedad de entrelazamiento no tiene equivalente clásico, por lo que necesitamos encontrar un estado clásico análogo que comience con la misma cantidad de ergotropía, tal como se hizo para el análisis de la coherencia. Para ello, construimos el estado clásico como:

$$\hat{\rho}_{cl}(N) = \bigotimes_{n=1}^2 \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\mathcal{W}_{qu}(0)}{\epsilon} \right) |ee\rangle \langle ee| + |eg\rangle \langle eg| + |ge\rangle \langle ge| + \left(1 - \frac{\mathcal{W}_{qu}(0)}{\epsilon} \right) |gg\rangle \langle gg| \right], \quad (4.82)$$

donde n recorre las parejas de baterías entrelazadas. El parámetro $\mathcal{W}_{qu}(0) \approx \epsilon$, es la cantidad de ergotropía inicial del sistema cuántico entrelazado para $N = 2$.

Observamos en la Figura 4.17 el comportamiento de la eficiencia para el sistema preparado en el estado cuántico, que muestra un comportamiento similar en las geometrías lineal, circular y simétrica hasta un punto donde la geometría circular decae más lentamente.

La geometría central exhibe una mayor perdida de eficiencia en el almacenamiento de energía.

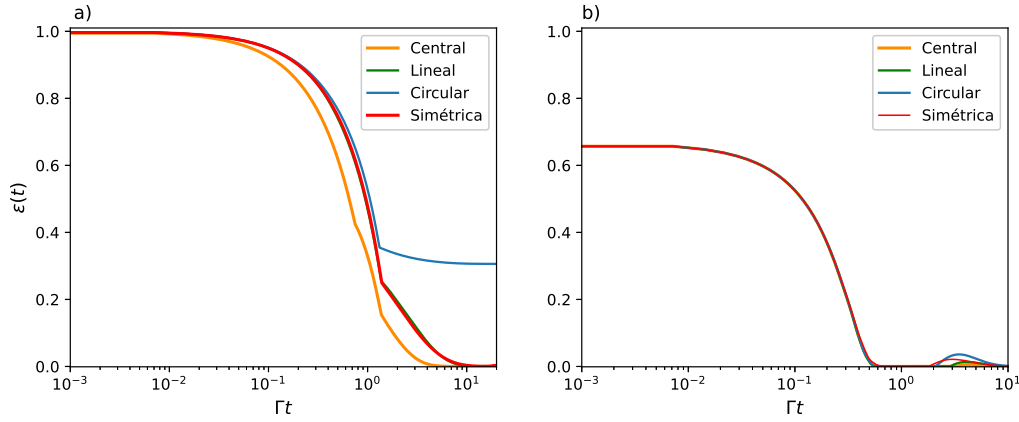


Figura 4.17: Coeficiente de eficiencia $\varepsilon(t)$ para cada configuración geométrica del sistema para estados (a) cuánticos y (b) clásicos. La geometría no tiene efectos en el sistema preparado clásicamente.

Al analizar la eficiencia del sistema preparado tanto en un estado cuántico como clásico en diferentes configuraciones se puede destacar lo siguiente:

1. Como en casos anteriores, el sistema preparado en un estado inicial clásico tiene un porcentaje inicial de eficiencia de $\varepsilon(0) \approx 0,66$. El restante de energía interna del sistema no se puede extraer como ergotropía.
2. En contraste, al preparar el sistema en un estado inicial máximamente entrelazado existe una ventaja cuántica notable y una alta eficiencia inicial. Además, los tiempos de decaimiento de energía del sistema son más lentos, lo que permite almacenar la energía por un periodo más largo que la realización clásica.

La dinámica de la medida de la coherencia y el entrelazamiento se muestra en la Figura 4.18 y presentan los siguientes comportamientos destacables: durante la evolución temporal del sistema, la medida de coherencia cuántica para las geometrías central y simétrica alcanzan su máximo en los estados iniciales de máximo entrelazamiento. A medida que se presentan los procesos de disipación de energía en el sistema, esta cantidad tiene un comportamiento decreciente. Por otro lado, para las geometrías lineal y circular, la coherencia tiene una tendencia creciente hasta alcanzar un pico y luego disminuye. Sin embargo, aún cuando el sistema está preparado en un estado inicial de máximo entrelazamiento por pares, el comportamiento de la concurrencia a lo largo del tiempo no permite establecer una relación de proporcionalidad directa entre la medida del entrelazamiento y el comportamiento de la eficiencia en relación a las diferentes geometrías. Es decir, que aunque en los resultados la geometría afecta la eficiencia del sistema y además, el entrelazamiento mejora la eficiencia, no hay una relación de proporcionalidad sencilla del entrelazamiento y la eficiencia.

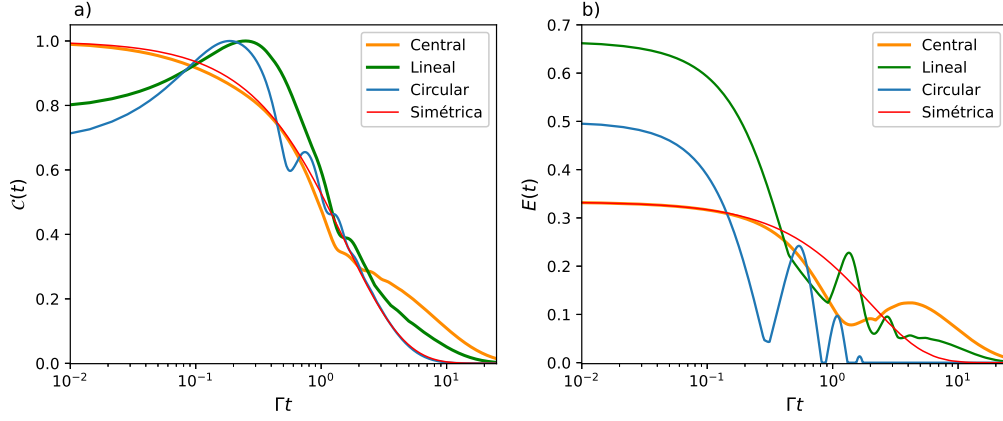


Figura 4.18: Medida de (a) la coherencia y (b) el entrelazamiento cuántico en el sistema para las cuatro geometrías.

4.2.3. Coherencia vs Entrelazamiento

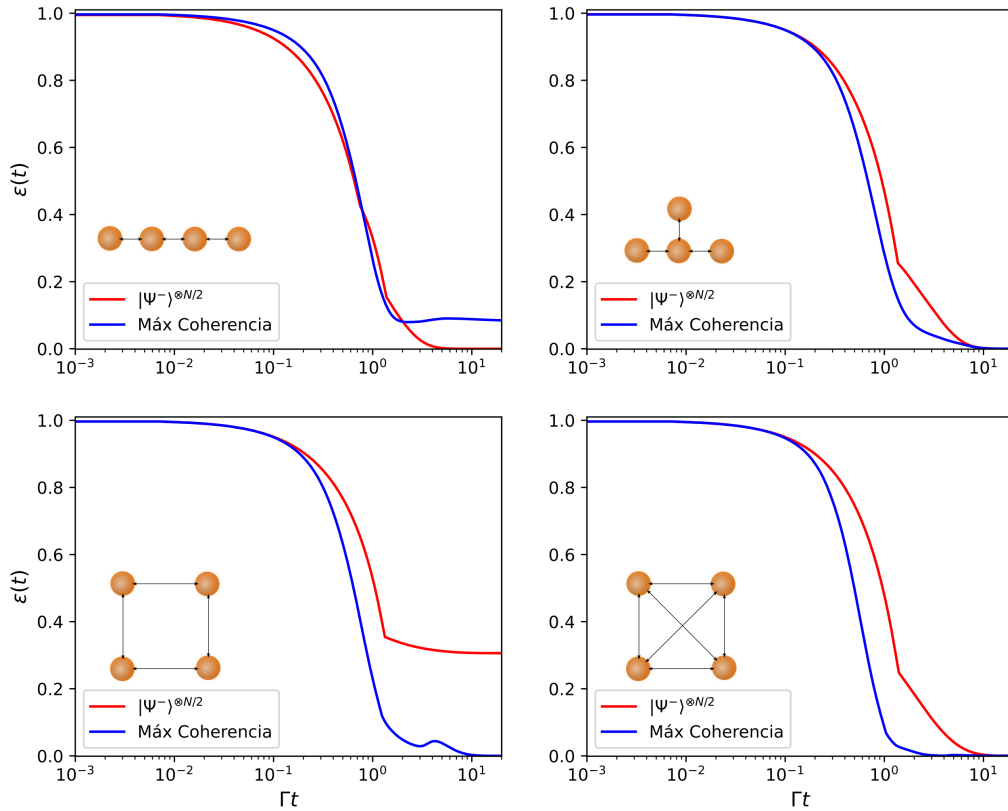


Figura 4.19: Coeficiente de eficiencia para un sistema de $N = 4$ baterías preparado en un estado de máximo entrelazamiento $(|eg\rangle - |ge\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 2}$ y un estado de máxima coherencia $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 4}$ en una configuración (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica.

Hasta aquí, hemos hecho el análisis de la dinámica de sistemas que han sido preparados en estados de máxima coherencia y máximo entrelazamiento por pares. Al comparar estos sistemas con aquellos que han sido preparados en estados clásicos, hemos demostrado que las baterías cuánticas exhiben un rendimiento superior, tanto para el caso de una sola celda como en el caso de múltiples celdas. No obstante, surge una pregunta natural: ¿cuál de los recursos cuánticos, la coherencia o el entrelazamiento cuántico, proporciona un mejor rendimiento en sistemas que funcionan como baterías? En la Figura 4.19 se muestra el comportamiento de un sistema compuesto por $N = 4$ baterías preparadas en estados de máxima coherencia y máximo entrelazamiento, definidos en las Ecuaciones 4.77 y 4.81 respectivamente.

Estos resultados nos indican que, en términos generales y para las diversas geometrías analizadas, el estado de máxima entrelazamiento $|\Psi^-\rangle^{\otimes 2}$ tiende a permitir que el sistema logre un mejor rendimiento en los procesos de almacenamiento de energía, excepto para la cadena lineal, en la que el comportamiento de ambas realizaciones es casi idéntico. Sin embargo, en las configuraciones central, circular y simétrica, el entrelazamiento emerge como el recurso cuántico que ofrece una ventaja mayor al prolongar el tiempo en el cual el sistema disipa la energía hacia su entorno en comparación con el estado de máxima coherencia. Esto sugiere que la energía puede mantenerse dentro del sistema durante un período de tiempo más largo para sistemas entrelazados por pares.

4.2.4. Realizaciones Experimentales

En el desarrollo de este trabajo de grado, se han presentado resultados sin una unidad de medida asociada es decir, cantidades adimensionales, proporcionando una visión general de la eficiencia de las baterías cuánticas. Sin embargo, es importante reconocer que los modelos analizados en este trabajo tienen diferentes propuestas para realizaciones reales que permiten conectar los resultados con la realidad física que permiten comprender mejor su aplicabilidad en entornos experimentales, tales como sistemas de espín o sistemas de estado sólido como los qubits superconductores. Por esta razón, en esta sección presentaremos los valores realistas de los parámetros para realizaciones específicas de baterías cuánticas como sistemas de qubits de espín y qubits superconductores basados en datos observados experimentalmente en artículos. Esto nos permitirá vincular nuestras conclusiones generales con aplicaciones prácticas.

Sistemas de Espín

Este tipo de sistemas físicos que sirven como realizaciones físicas reales para el estudio de las baterías cuánticas pueden ser por ejemplo conjuntos de qubits de espín de electrones, este tipo de representación de qubits consiste en un electrón confinado en un punto cuántico [72]. Los puntos cuánticos (o átomos artificiales) son estructuras a nanoescala que sirven como un potencial de confinamiento para electrones y huecos en un semiconductor [73]. Generalmente se utilizan para modelar átomos o moléculas. Algunos valores reales de trabajos experimentales $\Gamma = 0,05 \times 10^{-3} eV/h$ y $J = 0,1 \times 10^{-3} eV$ [74]

Sistemas de Qubits Superconductores

Algunas realizaciones experimentales de sistemas de estado sólido son los qubits superconductores. Estos sistemas se caracterizan por el uso de uniones Josephson y las propiedades cuánticas únicas de los superconductores a bajas temperaturas. En este contexto, hay algunos trabajos experimentales en los cuales los parámetros de decoherencia e interacción se toman como: $\Gamma = 0,1 \times 10^4 Hz$ y $J = h(0,2 \times 10^4 Hz)$ [75].

5. Conclusiones

En esta tesis, definimos modelos de baterías cuánticas como sistemas abiertos, centrándonos en el estudio de los recursos cuánticos de la coherencia y el entrelazamiento. Hemos establecido dos enfoques principales utilizando dos tipos de estados cuánticos como condiciones iniciales: el estado máximamente coherente y el estado máximamente entrelazado por pares. Se realizó un análisis comparativo entre la realización cuántica y la clásica, centrándonos en la coherencia y el entrelazamiento cuánticos como recursos aprovechables para mejorar las tareas operativas y su impacto en la autodescarga de las baterías. El primer enfoque de este trabajo de grado es la exploración del recurso de la coherencia cuántica. Este análisis se abordó para sistemas de una única celda y para sistemas multipartitos de hasta $N = 5$ baterías considerando diferentes configuraciones geométricas. El segundo enfoque de este estudio es el análisis del recurso de entrelazamiento cuántico por pares para un arreglo de $N = 4$ baterías. En este contexto, se estudió el comportamiento individual y colectivo de las baterías y la naturaleza de los procesos de disipación de energía.

Coherencia Cuántica

En el primer enfoque, exploramos la coherencia cuántica en sistemas de una única y de múltiples celdas (de hasta $N = 5$ baterías), considerando diferentes configuraciones geométricas. Reprodujimos los resultados de A. Santos, determinando que la coherencia cuántica optimiza la ergotropía del sistema, lo que resulta en una autodescarga más lenta en comparación con la realización clásica. Cuando la dimensión del sistema aumenta al igual que los canales de disipación con el entorno y entre celdas de baterías, el sistema conserva su capacidad de exhibir alta eficiencia en comparación con sus análogos clásicos. El comportamiento de la medida de coherencia en el sistema sigue un comportamiento decreciente similar al de la medida de eficiencia del sistema, lo que permitió establecer una relación directa entre el desempeño del sistema y la cantidad de coherencia que exhibe el sistema.

Entrelazamiento Cuántico

En el segundo enfoque, la extensión del análisis de múltiples baterías para un sistema (de $N = 4$) preparado en un estado máximamente entrelazado por pares fue estudiada, mostrando su influencia en la autodescarga del sistema y el aumento de los tiempos de decaimiento de la eficiencia y, por lo tanto, la disipación de energía con el entorno, lo que resulta en procesos de almacenamiento de energía más óptimos. Aunque se demostró un mejoramiento de la eficiencia y un decaimiento más lento de la misma para los sistemas entrelazados, no encontramos una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de entrelazamiento y la eficiencia del sistema para diferentes geometrías.

Finalmente, concluimos que tanto la coherencia cuántica como el entrelazamiento proporcionan ventajas cuánticas en las baterías de dos niveles durante los procesos de auto-descarga. También observamos la influencia de la geometría en el desempeño de la batería. En un análisis comparativo entre la coherencia y el entrelazamiento, este último recurso demostró un mejor rendimiento al prolongar el almacenamiento de energía útil como ergotropía en el sistema.

6. Perspectivas

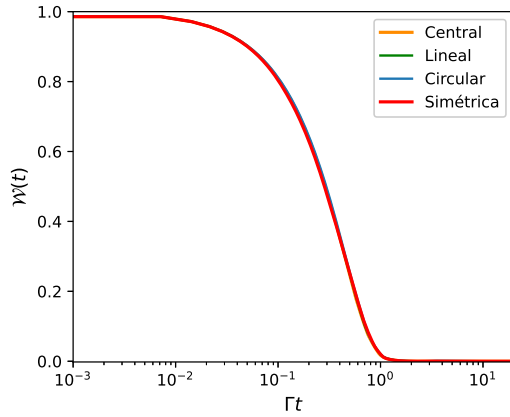
A lo largo de este trabajo de grado, hemos analizado los recursos cuánticos de coherencia y entrelazamiento en sistemas cuánticos que actúan como baterías. El enfoque se ha centrado en su influencia sobre el proceso de autodescarga y la eficiencia en el almacenamiento de energía. Nuestros resultados han corroborado la notable ventaja que tanto la coherencia cuántica como el entrelazamiento cuántico ofrecen en comparación con sus contrapartes clásicas.

En particular, en la sección 4.2.2 se exploró el caso de un sistema compuesto por un arreglo de $N = 4$ baterías preparadas en un estado máximamente entrelazado por pares. Sin embargo, es importante destacar que el entrelazamiento en la mecánica cuántica es un fenómeno diverso y presenta diferentes formas de caracterización. En este contexto, resulta de interés extender nuestro análisis para considerar sistemas en un estado GHZ (Greenberger–Horne–Zeilinger). Como se ha indicado previamente, los estados GHZ permiten la generalización del entrelazamiento entre tres o más sistemas, siendo su representación para un conjunto de $N = 4$ sistemas dada por:

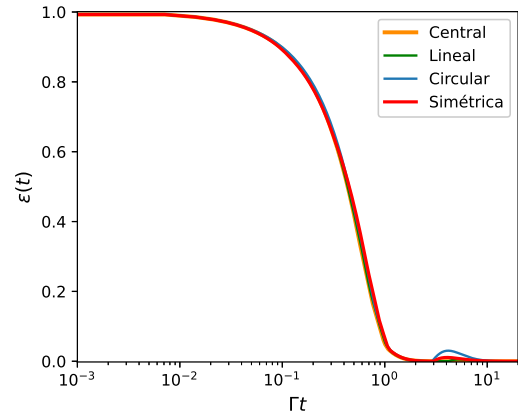
$$|GHZ\rangle = \frac{|eeee\rangle + |gggg\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (6.1)$$

En la figura 6.1a se muestra la dinámica de la ergotropía del sistema. Es notable observar que la máxima cantidad de trabajo extraíble del sistema tiene el mismo comportamiento para las diferentes configuraciones analizadas. Por lo tanto, esto implica que el coeficiente de eficiencia mostrado en la figura 6.1b es el mismo para cada configuración. Este resultado, sugiere que, para un sistema preparado en un estado GHZ, la geometría no tiene ningún efecto en el rendimiento del sistema y sus procesos de almacenamiento de energía.

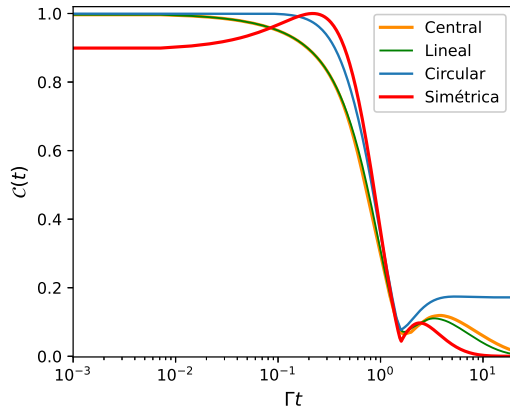
Por otro lado, las figuras 6.1c y 6.1d presentan la cuantificación de los recursos cuánticos bajo análisis en el marco de esta tesis. No obstante, se observa que, en el caso del entrelazamiento, los valores obtenidos se encuentran en proximidad a cero. Esto señala que la medida de concurrencia empleada no resulta idónea para medir adecuadamente la cantidad de entrelazamiento en el sistema. Cabe señalar que la concurrencia normalizada definida en la ecuación 4.80 constituye una medida de entrelazamiento por pares, por lo tanto no representa el entrelazamiento caracterizado por los estados GHZ. Este comportamiento subraya la necesidad de desarrollar una medida de entrelazamiento adecuada para sistemas compuestos por tres o más elementos entrelazados.



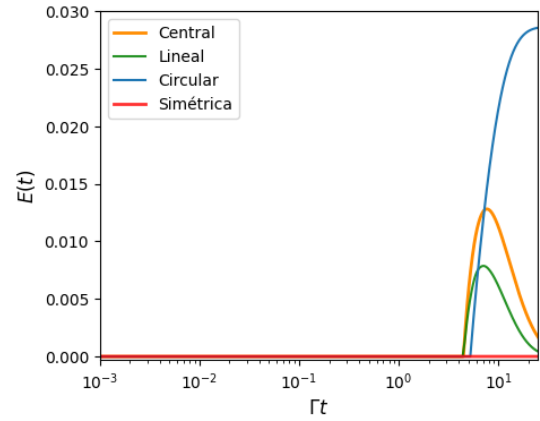
(a) Ergotropía del sistema preparado inicialmente en un estado GHZ en las diferentes configuraciones.



(b) Coeficiente de Eficiencia del sistema preparado en un estado GHZ en las diferentes configuraciones.



(c) Medida de la coherencia del sistema para diferentes configuraciones. Es notable observar como los procesos de disipación con el entorno generan la pérdida de coherencia del sistema.



(d) Medida del entrelazamiento. La concurrencia por pares no describe adecuadamente la cantidad de entrelazamiento que exhibe el sistema cuando las 4 baterías están entrelazadas.

Por otro lado, la realización clásica que hace de contraparte a esta realización cuántica, muestra el mismo desempeño caracterizado por la eficiencia obtenida en los resultados de la gráfica 4.17. Esto nos permite inferir que el estado GHZ como condición inicial del sistema provee una ventaja significativa en el rendimiento del sistema cuántico en contraste con su homólogo clásico.

Es importante destacar que los diversos estados cuánticos analizados han exhibido una clara ventaja en términos de eficiencia en los procesos de autodescarga cuando el sistema no está conectado a un centro de consumo. En la figura 4.19 se evidenció que la coherencia, como recurso cuántico, proporciona un rendimiento inferior en comparación con el entrelazamiento. Sin embargo, es pertinente señalar que la figura 6.2 presenta un escenario interesante, donde el estado GHZ tiende a mostrar un rendimiento menor en relación con los estados cuánticos analizados previamente. Este fenómeno sugiere que al considerar entrelazamiento entre un mayor número de sistemas, la complejidad intrínseca de la dinámica cuántica aumenta, lo que, en este contexto, podría resultar en un rendimiento

inferior.

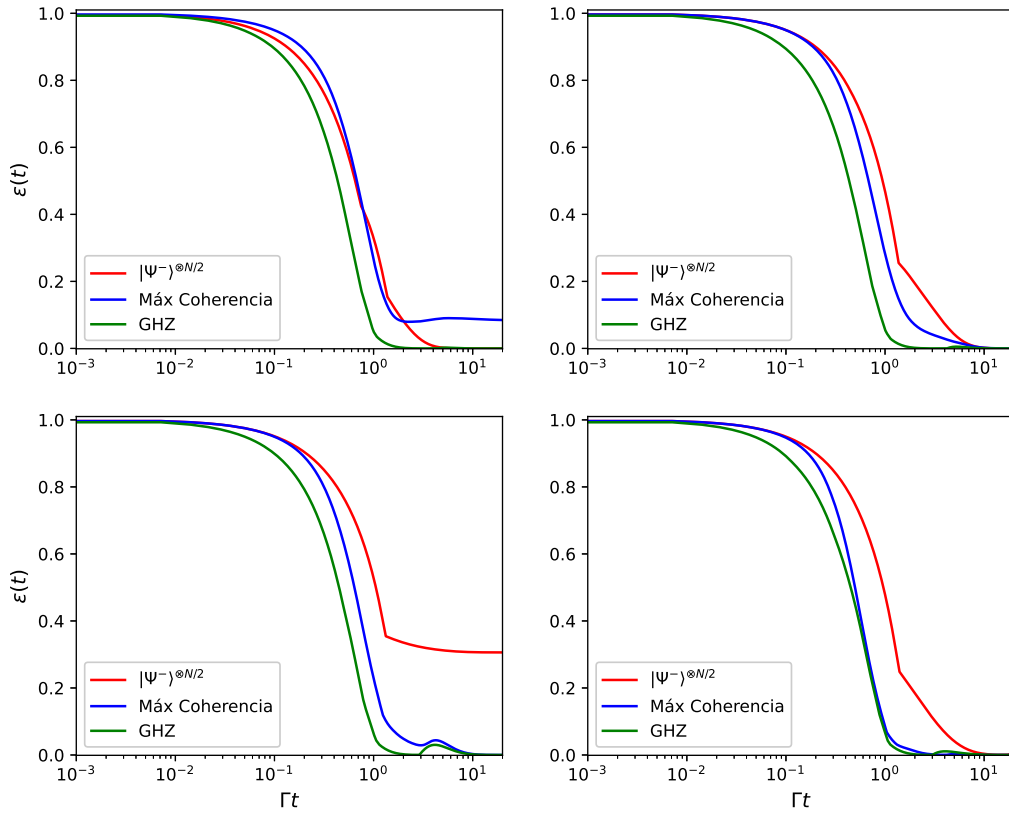


Figura 6.2: Coeficiente de eficiencia para un sistema de $N = 4$ baterías preparado en un estado de máximo entrelazamiento $(|eg\rangle - |ge\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 2}$, un estado de máxima coherencia $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 4}$, y un estado GHZ $|eeee\rangle - |gggg\rangle/\sqrt{2}$, en una configuración (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica.

Índice de figuras

2.1.	Representación de el estado $ \psi\rangle$ en la esfera de Bloch.	9
2.2.	Representación de estados cuánticos en la esfera de Bloch. a) Estado puro. b) Estado mixto. c) Estado de máxima mezcla.	10
2.3.	Representación de la medida de coherencia $\mathcal{C}_{l_1}$ en la esfera de Bloch. La gráfica muestra la proyección del estado del sistema en el plano xy , lo que representa la distancia mínima entre el estado coherente $\hat{\rho}$ y un estado en el eje z . En este contexto, el estado en el eje z corresponde al estado no coherente, que, en este caso, se refiere al estado de máxima mezcla.	19
3.1.	Representación de un sistema total cerrado S_T que consta de un sistema abierto S que interactúa con el entorno E	25
3.2.	Representación de una batería de dos niveles que interactúa con el entorno.	30
3.3.	Representación de un sistema multipartito. N baterías de dos niveles las cuales interactúan entre ellas y a su vez interactúan con el entorno.	31
4.1.	Evolución de las poblaciones en función del tiempo. Se observa que después de un tiempo crítico $t = \tau_c$ denominado tiempo de cruce, las poblaciones de los estados excitado y fundamental se invierten. Antes de este punto, la batería tiene una inversión de población, lo que significa que el estado excitado tiene una mayor población que el estado fundamental.	35
4.4.	Evolución de la energía interna y la máxima cantidad de trabajo extraíble del sistema de un qubit.	39
4.5.	Energías del sistema en función del tiempo. Energía Interna y Ergotropía para a) un estado inicial cuántico y b) para un estado inicial clásico.	41
4.7.	Bosquejo de un sistema de dos niveles con una frecuencia de conducción que da cuenta del acoplamiento entre los niveles de energía.	42
4.8.	Evolución de las poblaciones en función del tiempo. Establecemos los parámetros $\Gamma = \Omega = 0,1$	43
4.9.	a) Ergotropía para el estado inicial cuántico y clásico de un sistema sujeto a un campo de conducción coherente. La realización cuántica permite que la energía extraíble se mantenga el sistema cuántico durante un período de tiempo más largo y por lo tanto su desempeño en función del tiempo sea mayor contraste con un análogo clásico. b) El coeficiente de eficiencia para la realización cuántica y clásica.	44
4.10.	Energía interna de la batería para (a) estados cuánticos y (b) clásicos. Ergotropía para estados (c) cuánticos y (d) clásicos. Consideramos sistemas hasta $N = 5$ baterías y asumimos $\Gamma = 0,1$, $\Gamma_{icl} = \Gamma/2$ y $J = 2\Gamma$	47

4.11. a). Coeficiente de eficiencia del sistema para algunos valores de N en estados a) cuánticos y b) clásicos.	47
4.12. Cuantificación de la coherencia para algunos valores de N . Se observa la pérdida de coherencia a medida que el número N de baterías aumenta. . .	48
4.13. Configuración para la geometría: (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica. Las primeras tres geometrías se analizan desde el enfoque del vecino más cercano. La geometría simétrica considera todas las conexiones posibles entre las baterías del arreglo. Cada conexión entre pares de baterías inducen procesos de decaimiento colectivo entre ellas.	49
4.14. Coeficiente de eficiencia $\varepsilon(t)$ para cada configuración geométrica del sistema para estados (a) cuánticos y (b) clásicos. Se observa como la geometría y el número de conexiones entre baterías no tiene efectos en la eficiencia clásica. . .	50
4.15. Medida de (a) la coherencia y (b) el entrelazamiento cuántico en el sistema para las cuatro geometrías.	51
4.16. Sistemas en estados con máximo entrelazamiento en una geometría: (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica. El entrelazamiento se da entre parejas de baterías	52
4.17. Coeficiente de eficiencia $\varepsilon(t)$ para cada configuración geométrica del sistema para estados (a) cuánticos y (b) clásicos. La geometría no tiene efectos en el sistema preparado clásicamente.	53
4.18. Medida de (a) la coherencia y (b) el entrelazamiento cuántico en el sistema para las cuatro geometrías.	54
4.19. Coeficiente de eficiencia para un sistema de $N = 4$ baterías preparado en un estado de máximo entrelazamiento $(eg\rangle - ge\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 2}$ y un estado de máxima coherencia $(e\rangle + g\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 4}$ en una configuración (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica.	54
6.2. Coeficiente de eficiencia para un sistema de $N = 4$ baterías preparado en un estado de máximo entrelazamiento $(eg\rangle - ge\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 2}$, un estado de máxima coherencia $(e\rangle + g\rangle)/\sqrt{2}^{\otimes 4}$, y un estado GHZ $ eeee\rangle - gggg\rangle/\sqrt{2}$, en una configuración (a) lineal, (b) central, (c) circular y (d) simétrica. . .	61

Apéndice A. Apéndice A

Listing A.1: Código de Python para una única celda

```
1 def quantum_Hamiltonian():
2     #Estado de Maxima Coherencia
3     state = (1/np.sqrt(2))*(basis(2,0)+basis(2,1))
4
5     #Hamiltoniano interno del sistema
6     H0 = ep*(sigmap()*sigmam())
7     H0t = [H0 for step in range(steps)]
8     return(H0,state,H0t)
9
10 def eigen_system():
11     M_val = []
12     M_vec = []
13     H_val = []
14     H_vec = []
15     for n in range(len(Hci[2])):
16
17         qobjH = Qobj(Hci[2][n])
18         qobjM = Qobj(Density_M[n])
19
20         e_statesH = qobjH.eigenstates()
21         e_statesM = qobjM.eigenstates(sort='high')
22         autovals_H = e_statesH[0]
23         autovals_M = e_statesM[0]
24
25         #Conjunto de autovalores
26         H_val.append(autovals_H) #Hamiltoniano
27         M_val.append(autovals_M) #Matriz Densidad
28
29         #Conjunto de Autovectores
30         autovec_H = e_statesH[1]
31         H_vec.append(autovec_H)
32         autovec_M = e_statesM[1]
33         M_vec.append(autovec_M)
34     return(M_val, M_vec, H_val, H_vec)
35
36
37
38
39 def ergotropy():
```

```

40 Erg = []
41 Ut= []
42 Ergo_t = 0
43 for i in range(len(t)):
44     for j in range(len(M_val[0])):
45         for k in range(len(H_val[0])):
46             if j==k:
47                 Ergo_t = Ergo_t + M_val[i][j]*H_val[i][k]*((((M_vec[i][j]
48                     ].dag())*(H_vec[i][k])).norm())**2-1)
49             else:
50                 Ergo_t = Ergo_t + M_val[i][j]*H_val[i][k]*((((M_vec[i][j]
51                     ].dag())*(H_vec[i][k])).norm())**2)
52 Erg.append(Ergo_t)
53 Ergo_t = 0
54
55 #Energ a interna
56 E = np.dot(Density_M[i],Hci[2][i])
57 U = np.trace(E)
58 Ut.append(U)
59 return(Erg, Ut)
60
61 def efficiency():
62     Eff = np.divide(Erg,Ut)
63     return Eff
64
65 def coherence():
66     coherence = []
67     count,cohe = 0,0
68     for n in range(len(t)):
69         for i in range(len(Density_M[0][:])):
70             for j in range(len(Density_M[0][:])):
71                 if i!=j:
72                     count +=1
73                     cohe += abs(Density_M[n][i,j])
74             coherence.append(cohe)
75             cohe = 0
76     return coherence
77
78 #Parametros
79 gamma = 0.1
80 steps =3500
81 t = np.linspace(0,250,steps)
82 ep=1
83 Hci = quantum_Hamiltonian()
84 c_ops = [np.sqrt(gamma)*sigmam()]
85 Density_M = mesolve(Hci[0], Hci[1], t, c_ops).states

```

Apéndice B. Apéndice B

Listing B.1: Código de Python para N-baterías en un arreglo lineal

```
1
2 def sigma_composite(N):
3     #Operadores sigma para el espacio compuesto de N qubits
4     sx_list, sy_list, sz_list = [], [], []
5     sm_list, sp_list= [], []
6     for i in range(N):
7         op_list = [qeye(2)] * N
8         op_list[i] = sigmax()
9         sx_list.append(tensor(op_list))
10        op_list[i] = sigmay()
11        sy_list.append(tensor(op_list))
12        op_list[i] = sigmaz()
13        sz_list.append(tensor(op_list))
14        op_list[i] = sigmam()
15        sm_list.append(tensor(op_list))
16        op_list[i] = sigmap()
17        sp_list.append(tensor(op_list))
18    return (sx_list, sy_list, sz_list, sm_list, sp_list)
19
20
21 def quantum_hamiltonian():
22     # Estado Inicial de Maxima Coherencia
23     state_list = [(1/np.sqrt(2))*(basis(2, 0) + basis(2, 1))]*N
24     state = tensor(state_list)
25     ep = np.ones(N)
26
27     #Hamiltoniano interno del sistema
28     H0 = 0
29     for k in range(N):
30         H0 += ep[k]*sp_list[k]*sm_list[k]
31     H0t = [H0 for step in range(steps)]
32
33     #Hamiltoniano de Interacci n
34     Hint = 0
35     if N != 1:
36         for i in range(N):
37             if i == 0:
38                 Hint += J*(sp_list[i]*sm_list[i+1])
39             elif i == N-1:
```

```

40         Hint += J*(sp_list[i]*sm_list[i-1])
41     else:
42         Hint += J*(sp_list[i]*sm_list[i-1])
43         Hint += J*(sp_list[i]*sm_list[i+1])
44
45     H = H0 + Hint
46     return(H, state, H0t, state_list)
47
48
49
50
51 #Ecuacion maestra en el espacio de Liouville
52 def me_liouvillian(t: float, args: dict):
53     out = Li.copy()
54     for i in range(N):
55         for j in range(N):
56             if i==j:
57                 out += gamma*lindblad_dissipator(a=sm_list[j],b=sm_list[i])
58     if N!=1:
59         for i in range(N):
60             if i == 0:
61                 out += gamma_i*lindblad_dissipator(sm_list[i],sm_list[i
62                     +1])
63             elif i == N-1:
64                 out += gamma_i*lindblad_dissipator(sm_list[i],sm_list[i
65                     -1])
66             else:
67                 out += gamma_i*lindblad_dissipator(sm_list[i],sm_list[i
68                     -1])
69                 out += gamma_i*lindblad_dissipator(sm_list[i],sm_list[i
70                     +1])
71
72     return out
73
74
75 def eigen_system():
76     M_val = []
77     M_vec = []
78     H_val = []
79     H_vec = []
80
81     for n in range(len(Hci[2])):
82         qobjH = Qobj(Hci[2][n])
83         qobjM = Qobj(DensityM[n])
84
85         # AUTOVECTORES
86         e_statesH = qobjH.eigenstates()
87         e_statesM = qobjM.eigenstates(sort='high')
88
89         # AUTOVALORES
90         autovals_H = e_statesH[0]
91         autovals_M = e_statesM[0]
92
93

```

```

87     H_val.append(autovals_H)
88     M_val.append(autovals_M)
89
90
91     autovec_H = e_statesH[1]
92     H_vec.append(autovec_H)
93     autovec_M = e_statesM[1]
94     M_vec.append(autovec_M)
95
96     return(M_val, M_vec, H_val, H_vec)
97
98 def efficiency(qubits = None):
99     Eff = np.divide(Erg,Ut)
100     return Eff
101
102
103 def coherence():
104     coherence = []
105     count,cohe = 0,0
106     for n in range(len(t)):
107         for i in range(len(DensityM[0][:])):
108             for j in range(len(DensityM[0][:])):
109                 if i!=j:
110                     count +=1
111                     cohe += abs(DensityM[n][i,j])
112     coherence.append(cohe)
113     cohe = 0
114
115
116     return coherence
117
118 def concurrence_t():
119     Ctotal = []
120
121     cte = 1/(N-1)
122
123     for n in range(len(t)):
124         Csum = 0
125         for i in range(N-1):
126             Csum += concurrence(DensityM[n].ptrace([i,i+1]))
127         Ctotal.append(Csum)
128
129     return np.multiply(cte,Ctotal)
130
131
132 #Parametros del sistema
133 N = 4
134 gamma = 0.1
135 steps = 3500
136 t = np.linspace(0, 250, steps)
137

```

```
138 gamma_i = gamma/2
139 ep = 1
140 J = 2 * gamma
141 sx_list, sy_list, sz_list, sm_list, sp_list = sigma_composite(N)
142
143 Hci = quantum_hamiltonian()
144 Li = liouvillian(Hci[0],[])
145 DensityM = qutip.mesolve(me_liouvillian, Hci[1], t).states
```

Bibliografía

- [1] F. Mazzoncini, “Optimal methods for quantum batteries,” 2019.
- [2] S. Julià-Farré, T. Salamon, A. Riera, M. N. Bera, and M. Lewenstein, “Bounds on the capacity and power of quantum batteries,” *Physical Review Research*, vol. 2, no. 2, p. 023113, 2020.
- [3] J. P. Dowling and G. J. Milburn, “Quantum technology: The second quantum revolution,” 8 2003.
- [4] F. Binder, L. A. Correa, C. Gogolin, J. Anders, and G. Adesso, *Thermodynamics in the Quantum Regime Fundamental Aspects and New Directions*. 2018.
- [5] A. E. Allahverdyan, R. Balian, and T. M. Nieuwenhuizen, “Maximal work extraction from finite quantum systems,” *Europhysics Letters*, vol. 67, pp. 565–571, 8 2004.
- [6] R. Alicki and M. Fannes, “Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries,” *Physical Review E*, vol. 87, no. 4, p. 042123, 2013.
- [7] T. P. Le, J. Levinsen, K. Modi, M. Parish, and F. A. Pollock, “Spin-chain model of a many-body quantum battery,” 12 2017.
- [8] A. d. Campo, J. Goold, and M. Paternostro, “More bang for your buck: Superadiabatic quantum engines,” *Scientific reports*, vol. 4, no. 1, p. 6208, 2014.
- [9] D. Rossini, G. M. Andolina, D. Rosa, M. Carrega, and M. Polini, “Quantum advantage in the charging process of sachdev-ye-kitaev batteries,” *Physical Review Letters*, vol. 125, 12 2020.
- [10] M. B. Arjmandi, H. Mohammadi, and A. C. Santos, “Enhancing self-discharging process with disordered quantum batteries,” *Physical Review E*, vol. 105, no. 5, p. 054115, 2022.
- [11] A. C. Santos, “Quantum advantage of two-level batteries in the self-discharging process,” *Physical Review E*, vol. 103, 4 2021.
- [12] F. Kamin, F. Tabesh, S. Salimi, and A. C. Santos, “Entanglement, coherence, and charging process of quantum batteries,” *Physical Review E*, vol. 102, no. 5, p. 052109, 2020.
- [13] D. Farina, G. M. Andolina, A. Mari, M. Polini, and V. Giovannetti, “Charger-mediated energy transfer for quantum batteries: An open-system approach,” *Physical Review B*, vol. 99, 1 2019.

- [14] B. E. Conway, W. Pell, and T. Liu, “Diagnostic analyses for mechanisms of self-discharge of electrochemical capacitors and batteries,” *Journal of Power Sources*, vol. 65, no. 1-2, pp. 53–59, 1997.
- [15] J. J. Sakurai and E. D. Commins, “Modern quantum mechanics, revised edition,” 1995.
- [16] L. Ballentine, *Quantum Mechanics A Modern Development*. 1998.
- [17] C. Spinel, “Introducción al formalismo de la mecánica cuántica no relativista,” 2009.
- [18] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, “Quantum mechanics, volume 1,” *Quantum Mechanics*, vol. 1, p. 898, 1986.
- [19] K. Blum, “Density matrix theory and applications,” 2012.
- [20] D. Ter Haar, “Theory and applications of the density matrix,” *Reports on progress in Physics*, vol. 24, no. 1, p. 304, 1961.
- [21] J. Von Neumann, “Mathematische begründung der quantenmechanik,” *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1927, pp. 1–57, 1927.
- [22] U. Fano, “Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques,” *Reviews of modern physics*, vol. 29, no. 1, p. 74, 1957.
- [23] J. Gemmer, M. Michel, and G. Mahler, *Quantum thermodynamics: Emergence of thermodynamic behavior within composite quantum systems*, vol. 784. Springer, 2009.
- [24] A. Lenard, “Thermodynamical proof of the gibbs formula for elementary quantum systems,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 19, pp. 575–586, 1978.
- [25] A. M. Fox, *Quantum optics: an introduction*, vol. 15. Oxford University Press, USA, 2006.
- [26] P. Rice, *An Introduction to Quantum Optics: An Open Systems Approach*. IOP Publishing, 2020.
- [27] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press, USA, 2002.
- [28] J. Srinivasan, “Sadi carnot and the second law of thermodynamics,” *Resonance*, vol. 6, no. 11, pp. 42–48, 2001.
- [29] R. Balian, *From Microphysics to Macrophysics: Methods and Applications of Statistical Physics. Volume II*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [30] G. M. Andolina *et al.*, “Collective effects in many-body systems: The case of quantum batteries and photon condensation,” 2021.
- [31] W. Pusz and S. L. Woronowicz, “Passive states and kms states for general quantum systems,” 1978.
- [32] E. G. Brown, N. Friis, and M. Huber, “Passivity and practical work extraction using gaussian operations,” *New Journal of Physics*, vol. 18, 11 2016.

- [33] M. Perarnau-Llobet, K. V. Hovhannisyan, M. Huber, P. Skrzypczyk, J. Tura, and A. Acin, “Most energetic passive states,” *Physical Review E*, vol. 92, no. 4, p. 042147, 2015.
- [34] P. Skrzypczyk, R. Silva, and N. Brunner, “Passivity, complete passivity, and virtual temperatures,” *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 91, 5 2015.
- [35] M. Alimuddin, T. Guha, and P. Parashar, “Structure of passive states and its implication in charging quantum batteries,” *Physical Review E*, vol. 102, 8 2020.
- [36] B. Çakmak, “Ergotropy from coherences in an open quantum system,” *Physical Review E*, vol. 102, no. 4, p. 042111, 2020.
- [37] A. Mukherjee, A. Roy, S. S. Bhattacharya, and M. Banik, “Presence of quantum correlations results in a nonvanishing ergotropic gap,” *Physical Review E*, vol. 93, no. 5, p. 052140, 2016.
- [38] K. Baek, A. Sohbi, J. Lee, J. Kim, and H. Nha, “Quantifying coherence of quantum measurements,” *New Journal of Physics*, vol. 22, 9 2020.
- [39] E. Chitambar and G. Gour, “Quantum resource theories,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 91, 4 2019.
- [40] S. A. Hill and W. K. Wootters, “Entanglement of a pair of quantum bits,” *Physical review letters*, vol. 78, no. 26, p. 5022, 1997.
- [41] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, “Quantifying coherence,” *Physical review letters*, vol. 113, no. 14, p. 140401, 2014.
- [42] M.-J. Zhao, T. Ma, Z. Wang, S.-M. Fei, and R. Pereira, “Coherence concurrence for x states,” *Quantum Information Processing*, vol. 19, pp. 1–9, 2020.
- [43] M. García Díaz, “The theory of quantum coherence,” 2020.
- [44] A. Streltsov, S. Rana, P. Boes, and J. Eisert, “Structure of the resource theory of quantum coherence,” *Physical review letters*, vol. 119, no. 14, p. 140402, 2017.
- [45] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2010.
- [46] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical review*, vol. 47, no. 10, p. 777, 1935.
- [47] V. Scarani, *Quantum Physics A First Encounter Interference, Entanglement, and Reality*. 2006.
- [48] E. Schrödinger, “Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik,” *Naturwissenschaften*, vol. 23, no. 50, pp. 844–849, 1935.
- [49] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, pp. 865–942, 6 2009.

- [50] G. Jaeger, *Entanglement, information, and the interpretation of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [51] J. T. i Brugués, *Characterizing entanglement and quantum correlations constrained by symmetry*. Springer, 2016.
- [52] D. Bruß, “Characterizing entanglement,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43, no. 9, pp. 4237–4251, 2002.
- [53] A. Ekert and P. L. Knight, “Entangled quantum systems and the schmidt decomposition,” *American Journal of Physics*, vol. 63, no. 5, pp. 415–423, 1995.
- [54] P. Kaye, R. Laflamme, and M. Mosca, *An introduction to quantum computing*. OUP Oxford, 2006.
- [55] R. F. Werner, “Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model,” *Physical Review A*, vol. 40, no. 8, p. 4277, 1989.
- [56] A. Peres, “Separability criterion for density matrices,” *Physical Review Letters*, vol. 77, no. 8, p. 1413, 1996.
- [57] P. Rungta, V. Bužek, C. M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, “Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions,” *Physical Review A*, vol. 64, no. 4, p. 042315, 2001.
- [58] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, “Mixed-state entanglement and quantum error correction,” *Physical Review A*, vol. 54, no. 5, p. 3824, 1996.
- [59] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 10, p. 2245, 1998.
- [60] D. Manzano, “A short introduction to the lindblad master equation,” *AIP Advances*, vol. 10, 2 2020.
- [61] A. Rivas and S. F. Huelga, *Open quantum systems*, vol. 10. Springer, 2012.
- [62] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, “Completely positive dynamical semigroups of n-level systems,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 17, no. 5, pp. 821–825, 1976.
- [63] G. Lindblad, “On the generators of quantum dynamical semigroups,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 48, pp. 119–130, 1976.
- [64] D. Chruściński and S. Pascazio, “A brief history of the gkls equation,” *Open Systems & Information Dynamics*, vol. 24, no. 03, p. 1740001, 2017.
- [65] D. Manzano and P. Hurtado, “Harnessing symmetry to control quantum transport,” *Advances in Physics*, vol. 67, no. 1, pp. 1–67, 2018.
- [66] C. Cohen-Tannoudji and D. Guéry-Odelin, “Advances in atomic physics: an overview,” 2011.

- [67] R. S. Whitney, “Staying positive: going beyond lindblad with perturbative master equations,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 41, no. 17, p. 175304, 2008.
- [68] C. Gardiner and P. Zoller, *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [69] S. J. Masson, I. Ferrier-Barbut, L. A. Orozco, A. Browaeys, and A. Asenjo-Garcia, “Many-body signatures of collective decay in atomic chains,” *Physical review letters*, vol. 125, no. 26, p. 263601, 2020.
- [70] S. Ashhab, J. R. Johansson, and F. Nori, “Rabi oscillations in a qubit coupled to a quantum two-level system,” *New Journal of Physics*, vol. 8, 2006.
- [71] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, and J. S. Tsai, “Rabi oscillations in a josephson-junction charge two-level system,” *Physical Review Letters*, vol. 87, pp. 246601–1–246601–4, 12 2001.
- [72] D. Loss and D. P. DiVincenzo, “Quantum computation with quantum dots,” *Physical Review A*, vol. 57, no. 1, p. 120, 1998.
- [73] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum measurement and control*. Cambridge university press, 2009.
- [74] D. Zumbühl, C. Marcus, M. Hanson, and A. Gossard, “Cotunneling spectroscopy in few-electron quantum dots,” *Physical review letters*, vol. 93, no. 25, p. 256801, 2004.
- [75] A. Izmailkov, M. Grajcar, E. Il’ichev, T. Wagner, H.-G. Meyer, A. Y. Smirnov, M. Amin, A. M. Van Den Brink, and A. Zagorskin, “Evidence for entangled states of two coupled flux qubits,” *Physical review letters*, vol. 93, no. 3, p. 037003, 2004.