

CORRECCIONES CUÁNTICAS A LA MASA DEL BOSÓN W EN EL MODELO ELECTRODÉBIL

ALDAIR ALBERTO RAMÓN BAUTISTA

Documento presentado al Programa de Física
como requisito para optar por el título de Físico.

Director: Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Básicas

Junio 2023

Resumen

En este trabajo se presenta el cálculo de la corrección cuántica a la masa del bosón W mediado por el campo del Higgs al orden de un-loop en el marco de la teoría electro-débil. El valor clásico a nivel árbol de la masa del bosón W se derivó usando el mecanismo de Higgs relacionado con el rompimiento espontáneo de la simetría $SU(2) \times U(1)$. Adicionalmente, utilizando el método diagramático basado en las reglas de Feynman, y con ayuda de los paquetes `FeynArts` y `FeynCalc` de `Mathematica`, se obtuvo una expresión analítica para la corrección cuántica a partir de las auto-energías del bosón W y se realizó una estimación numérica de su magnitud. Haciendo uso del código `SMDR` la contribución obtenida se incluyó en un análisis fenomenológico donde las correcciones radiativas, a distintos ordenes perturbativos, se incluyen en la predicción teórica de la masa del W para distintos valores de la escala de renormalización y del valor preciso de la masa del quark top. Estas predicciones se compararon con los valores experimentales publicados por CDF-II en 2022 y ATLAS en 2023. En particular, la auto-energía del W mediada por un bosón de Higgs tiene un valor de $\Delta M_W = 0.095447 \text{ GeV}$ evaluado a la escala electrodébil, lo cual equivale aproximadamente a 0.1 % del valor de la masa del W a nivel árbol. Si se incluye la corrección completa a un-loop la contribución aumenta a un 0.62 % del valor clásico. Las correcciones cuánticas hasta dos- y tres-loops no superan el 1 % del valor total, mostrando que en el Modelo Estándar no es posible solucionar la discrepancia observada por CDF-II.

Palabras clave— Bosón W, Diagramas de Feynman, Masa Física, Modelo Electrodébil, Mecanismo de Higgs.

Agradecimientos

Agradezco en primera instancia a Dios por guiarme en cada uno de los pasos dados hasta el día de hoy, a mis padres, hermanos y abuelos que han acompañado y apoyado cada uno de los proyectos que he emprendido. Agradezco de manera especial a un gran maestro, mi director de trabajo de grado Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas quién constantemente está realizando importantes aportes a la ciencia, en concreto a la Física de partículas y además transmite sus conocimientos para que futuras generaciones interesadas en la ciencia nos adentremos en este maravilloso mundo de la Física y podamos realizar procesos investigativos de calidad. Mil gracias por su paciencia y dedicación pues aún por fuera de el calendario académico de nuestra universidad el profesor estuvo apoyando constantemente este proceso a la hora de discutir cualquier tema referente a esta tesis, el cual resultó muy enriquecedor tanto a nivel académico como personal. De igual manera, agradezco a cada uno de los docentes que tuve durante mi pregrado en Física, a mis compañeros y amigos que de una u otra manera aportaron para que este proceso llegara feliz término. En resumen, agradezco a cada una de las personas que estuvieron presentes en el desarrollo de este trabajo.

Tabla de contenido

	Pag.
Resumen	I
Agradecimientos	II
TABLA DE CONTENIDO	III
1. Introducción.....	1
2. Teoría Cuántica de Campos	3
2.1 Campo de Klein-Gordon	7
2.1.1 Propagador del campo escalar de Klein-Gordon.....	14
2.2 Campos del Modelo Estándar.....	18
3. Fenomenología de las Interacciones Electrodébiles	25
3.1 Partículas elementales	25
3.1.1 Interacciones débiles.....	26
3.2 Simetrías Gauge	27
3.3 Ruptura espontánea de simetría	34
3.4 Lagrangiano del Modelo electrodébil	39
4. La Masa del Bosón W	45
4.1 Medición experimental de la masa del bosón W.....	45
4.2 Cálculo teórico de la masa del bosón W	48
4.2.1 Implementación en Wolfram Mathematica	53
5. Conclusiones	63
Referencias	65
Apendice. A. Notación y convenciones	70
A.1 Unidades	70
A.2 Relatividad y Tensores	71
A.3 Mecánica Cuántica	72
A.4 Transformadas de Fourier y distribuciones.....	73
A.5 Electrodinámica.....	74

Apendice. B. Propagador del campo de Klein-Gordon	75
B.1 Función de Green de la ecuación de Klein-Gordon	75

1. Introducción

En los aceleradores de partículas se realizan experimentos con el fin de investigar la naturaleza de las partículas subatómicas que componen el universo existente. Entre estos instrumentos de medida de alta precisión, se encuentran el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN con sede en Suiza y el Fermilab en USA. Además, se tiene planeado construir nuevos aceleradores, como el colisionador lineal internacional (ILC) o el colisionador circular futuro (FCC), que tendrán entre sus objetivos buscar señales de nueva física más allá de lo descrito en el Modelo Estándar (SM) y medir con mayor precisión los observables electrodébiles, entre los que se encuentran la masa, el spin, y los acoples de interacción de los bosones masivos Z, W y el bosón de Higgs [1]. La principal motivación para la realización de este trabajo es el hecho de que los datos publicados en el año 2022 por CDF II sobre la masa del bosón W han mostrado una discrepancia con los valores esperados por las predicciones teóricas del Modelo Estándar, aunque los datos recopilados de los experimentos LHC, LEP-2 y Thevatron vuelven a estar dentro de los valores esperados se ha generado incertidumbre y expectativa sobre la posible existencia de nueva física más allá del SM. Tales hechos, traen como consecuencia la necesidad de calcular estos mismos observables de manera teórica con una precisión aún mayor a la existente, incluyendo la evaluación de diagramas de Feynman hasta el orden perturbativo más alto posible, que puede llegar a ser de incluso 5-loops en distintos casos. Las correcciones obtenidas a partir de los diagramas de Feynman no pueden ser evaluadas de forma analítica para la mayoría de los casos, no obstante, existen alternativas como el teorema óptico que puede utilizarse como una herramienta poderosa para encontrar representaciones dispersivas que permite evaluar las integrales de Feynman obtenidas de forma numérica, o paquetes de software, implementados en lenguajes como *Wolfram Mathemática* o *FORM*, que permiten obtener las amplitudes usando programación simbólica. Entre los códigos más actuales que buscan cumplir este objetivo se encuentran TVID [2] para funciones de Green de cero y un punto y TVID2 [3] para auto-energías. Recientemente estos códigos siguen en desarrollo y se espera poder incluir en el futuro funciones de 3 y 4 puntos también.

Diferentes métodos analíticos se utilizan actualmente para obtener las correcciones cuánticas a distintos observables físicos, como las masas de los bosones W y Z de la

interacción débil y del bosón de Higgs [4], el momento magnético anómalo del electrón [5] y del muón [6], el cálculo de observables angulares como la correlación energía-energía (EEC) [7] y el cálculo de la sección eficaz de distintos procesos de scattering imponiendo la unitariedad de la matriz S . Todos estos cálculos implican la evaluación de funciones de Green de cero puntos (burbujas del vacío), un punto (tadpoles), dos puntos (propagadores o auto-energías), tres puntos (vértices) y hasta cuatro puntos (boxes). En particular, en este trabajo estamos interesados en calcular las correcciones cuánticas a la masa del bosón W y por lo tanto estudiaremos el propagador del W al orden de un-loop. El objetivo principal es obtener una expresión analítica para el propagador y hacer una estimación numérica de su contribución a la predicción teórica de la masa del W en la teoría electrodébil, usando explícitamente el método diagramático de Feynman con ayuda de los paquetes **FeynArts** [8] y **FeynCalc** [9] de **Mathematica**, útiles para determinar las reglas de Feynman a partir de la Lagrangiana de interacción, producir las amplitudes asociadas a los diagramas y evaluar el álgebra necesaria para obtener una expresión analítica.

Esta tesis está dividida en tres partes. En el Capítulo 2, se muestra el formalismo principal de la teoría cuántica de campos para una partícula libre escalar y se deduce el propagador libre del campo de Klein-Gordon asociado a la partícula de Higgs. Adicionalmente se estudia la teoría de perturbaciones. En el Capítulo 3 se analiza la fenomenología de las interacciones electrodébiles, esto incluye el contenido de materia de la teoría, las simetrías gauge de la Lagrangiana y una discusión acerca del mecanismo de Higgs donde se muestra explícitamente como se obtiene la predicción teórica de la masa del W a nivel árbol y los acoples de interacción del Higgs con el bosón W . En el Capítulo 4 se presenta una expresión analítica para el cálculo de la auto-energía del bosón W a un-loop usando el lenguaje de programación simbólico **Wolfram Mathematica**. Se discute el procedimiento de regularización dimensional para las integrales divergentes que aparecen en las correcciones obtenidas y, finalmente, se realiza un análisis fenomenológico donde la contribución obtenida se incluye en la predicción teórica de la masa del W , usando el programa **SMDR**, para estudiar su comportamiento como función de la escala de renormalización y del valor de la masa del quark top. Estos resultados teóricos, además, son comparados con los resultados experimentales obtenidos por los laboratorios CDF-II y ATLAS.

2. Teoría Cuántica de Campos

La teoría cuántica de campos (QFT) es el resultado de combinar dos de las principales ramas de estudio de la física moderna, la mecánica cuántica y la relatividad especial. La QFT es el marco teórico que logra describir con mayor precisión el mundo subatómico por lo que resulta ser la base del Modelo Estándar (SM) y además proporciona herramientas esenciales para áreas como la física nuclear, la astrofísica o la física de la materia condensada.

La mecánica cuántica fue la primera teoría en establecerse con la finalidad de describir correctamente los fenómenos físicos a escalas pequeñas (menores a $10^{-10}m$). Debido a que los resultados de la física clásica son notablemente imprecisos para predecir fenómenos atómicos, no fue hasta el desarrollo de la mecánica cuántica en la década de 1920, que se logró realizar un estudio adecuado de la estructura del átomo y una explicación rigurosa del comportamiento de las partículas elementales, además de dar solución a otros problemas que la física clásica no puede explicar; como la radiación de cuerpo negro, los espectros de emisión de diversos elementos o el efecto fotoeléctrico. La física clásica no describe adecuadamente estos fenómenos porque en esta teoría se asume que la energía toma valores arbitrarios dentro de un espectro continuo; en contraste, en mecánica cuántica la energía existe en paquetes discretos de energía llamados cuantos.

El formalismo desarrollado para reemplazar a la física clásica con el objetivo de realizar una correcta descripción del mundo subatómico recibe el nombre de primera cuantización y en términos generales consiste en la transformación de magnitudes físicas clásicas como la posición q_j y el momento p_j en operadores lineales actuando en el espacio de Hilbert que deben satisfacer las relaciones canónicas de conmutación [10].

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

si bien en la Ec. (2.1) aparece la constante de Planck reducida, en este trabajo $\hbar = 1$, ya que utilizamos la notación de unidades naturales como se explica en el apéndice

(A.1). Esta primera cuantización resulta insuficiente para la descripción de sistemas físicos con muchos o infinitos grados de libertad además de violar el principio de causalidad debido a que la teoría no es invariante de Lorentz, esto produce una descripción equivocada de la propagación de las partículas elementales, pero además prohíbe procesos como la creación y aniquilación de pares partícula - antipartícula, ya que durante la evolución de un sistema físico en mecánica cuántica el número de partículas debe mantenerse invariable en un sistema cerrado. La relación de Einstein para la energía, $E = mc^2$ permite la destrucción o creación de partículas. Por ejemplo, la desintegración de un fotón viajando en el vacío en un par electrón - positrón no puede ser explicada por la mecánica cuántica no relativista. En contraste, la QFT muestra que estos procesos se dan sólo cuando no se conserva la energía como consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg ($\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2}$) que permite la formación y aniquilación de partículas en tiempos suficientemente cortos como estados intermedios, los cuales reciben el nombre de partículas virtuales en la teoría de perturbaciones. Incluso existe la posibilidad de crear un numero arbitrariamente grande de estas partículas virtuales a medida que avanzamos hacia órdenes superiores en la teoría de perturbaciones.

La mayoría de estos problemas responden al hecho de que la mecánica cuántica fue formulada para procesos no relativistas en los que no se tiene en cuenta el principio de causalidad, el cual establece que ninguna partícula de materia con masa en reposo distinta de cero puede viajar con una velocidad igual o mayor a la velocidad de la luz en el vacío. Como veremos a continuación, el propagador de la mecánica cuántica $U(t)$, el cual representa la amplitud de probabilidad de que una partícula libre se propague de un punto inicial $\mathbf{x}_0$ a punto final $\mathbf{x}$ en un intervalo de tiempo t ,

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle, \quad (2.2)$$

no obedece la condición de causalidad. Es posible reescribir la Ec. (2.2) escribiendo explícitamente el Hamiltoniano de una partícula libre en la mecánica cuántica no relativista ($H = \mathbf{P}^2/2m$) y aplicando la relación de completitud para el momento lineal $\int d^3p |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = \hat{I}$.

$$U(t) = \int d^3p \langle \mathbf{x} | e^{-i(p^2/2m)t} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (2.3)$$

Después de que el operador H actúa sobre el ket $|\mathbf{p}\rangle$ es posible extraer la función exponencial del producto escalar $\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle$. Dado que este producto representa una onda plana en la representación de Dirac:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}, \quad \langle \mathbf{p}|\mathbf{x}_0\rangle = \frac{e^{-i\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{p}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.4)$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.4) por sus respectivas funciones exponenciales en el Ec. (2.3) se obtiene la siguiente expresión:

$$U(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i(p^2/2m)t} \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}. \quad (2.5)$$

Esta integral representa la transformada de Fourier de una función Gaussiana [11] que al ser resuelta nos da la expresión explícita del propagador de la mecánica cuántica:

$$U(t) = \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{im(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2t}. \quad (2.6)$$

El propagador en la ec. (2.6) debería anularse para partículas que recorren distancias grandes en intervalos de tiempo lo suficientemente pequeños como para superar la velocidad de la luz, debido a que esto implica una violación del principio de causalidad. No obstante, es distinto de cero para cualesquiera valores de $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ y t , esto implica que el propagador describe partículas propagándose por fuera del cono de luz como se ve en la figura (2.1) lo cual viola el principio de causalidad. Tener una probabilidad distinta de cero, de que las partículas de materia se muevan con velocidades mayores a la de la luz, es un error propio de la mecánica cuántica no relativista.

Podría pensarse que para solucionar dicho inconveniente bastaría remplazar el autovalor del Hamiltoniano ($p^2/2m$) por la energía relativista ($E = \sqrt{p^2 + m^2}$) en la Ec. (2.3), pero el resultado es una amplitud de propagación [12] de la forma :

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}, \quad (2.7)$$

que puede llegar a ser muy pequeña debido al exponencial negativo, pero nunca es cero para valores arbitrarios de x y t , implicando que existe una probabilidad diferente de cero de que las partículas viajen con velocidades mayores a la de la luz.

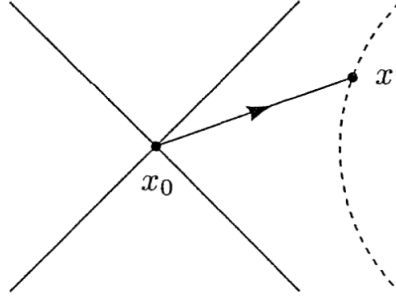


Figura 2.1: La velocidad de propagación de la partícula entre x y x_0 , indicada por la pendiente de la flecha, es mayor que la velocidad de la luz en el vacío. Es decir, la partícula viaja por fuera del cono de luz violando el principio de causalidad [12].

En QFT se puede resolver el problema de la probabilidad diferente de cero de la existencia de partículas moviéndose con velocidades mayores a la velocidad de la luz en el vacío imponiendo la invariancia de Lorentz. Un propagador construido a partir de cantidades que son invariantes de Lorentz respeta el principio de causalidad. Esto implica realizar una “segunda cuantización”, que consiste en transformar las funciones de onda de la mecánica cuántica en operadores lineales que deben satisfacer ciertas relaciones canónicas de conmutación o anti-conmutación. La teoría cuántica de campos es el resultado de aplicar las reglas de cuantización a una teoría clásica de campos, lo cual permite describir fenómenos como la existencia de antipartículas o el hecho de que los modos excitados de un campo cuántico se corresponden a un conjunto de partículas que pueden crearse y destruirse [13].

Para ejemplificar como la QFT corrige el problema del propagador, en la siguiente sección se estudiará el campo real de Klein-Gordon, un campo bosónico escalar neutro y sin spin, que aparece a través del mecanismo de Higgs. La importancia de estudiar este campo escalar de Higgs radica en que permite introducir un mecanismo para explicar el origen de la masa del bosón W dentro del modelo electro-débil. El objetivo de esta tesis es estimar dicho valor incluyendo la corrección cuántica al propagador del W mediada por el bosón de Higgs al menor orden perturbativo.

2.1 Campo de Klein-Gordon

Un campo $\Phi(x)$ puede entenderse como el paso de un sistema discreto con un número finito de grados de libertad a un medio continuo con infinitos grados de libertad, en otras palabras son una extensión al continuo de las coordenadas generalizadas q_i :

$$q_i \longrightarrow \Phi(x); \quad x = (t, \vec{x}) \quad (2.8)$$

El campo de Klein-Gordon $\phi(x)$ es un escalar de Lorentz, representa la distribución espacial de una magnitud que asocia a cada punto del espacio-tiempo un valor real ($\phi(x) = \phi(x)^*$), con carga eléctrica nula y de spin 0, por lo que es un bosón escalar. Este campo libre es solución de la ecuación de Klein-Gordon, la cual se deduce a partir de la definición de la energía relativista:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (2.9)$$

Cambiando la energía y el momento por:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \\ \vec{p} &\rightarrow -i \nabla, \end{aligned} \quad (2.10)$$

entonces obtenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.11)$$

Para cuantizar los campos bosónicos, que en mecánica cuántica son funciones de onda representando amplitudes de probabilidad relacionadas con la frecuencia de ocurrencia de una medida, estos se transforman en operadores lineales obligados a satisfacer las siguientes relaciones de conmutación¹:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] &= [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

¹La dependencia temporal de los campos no se tiene en cuenta mientras se trabaje en el cuadro de Schrödinger, cuando se trabaje en la imagen de Heisenberg, las ecuaciones (2.12) seguirán siendo válidas siempre que se consideren los campos en tiempos simultáneos.

Donde $\pi(\vec{x})$ es la densidad de momento conjugado del campo $\phi(\vec{x})$ definida como $\pi(\vec{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x})}$, siendo $\mathcal{L}$ la densidad Lagrangiana del sistema. Estas relaciones son análogas a las presentadas en la Ec. (2.1), pero en el límite del continuo. Por otra parte, para encontrar el espectro del Hamiltoniano conviene tomar el campo clásico de Klein-Gordon $\phi(t, \vec{x})$ y reescribirlo en el espacio de los momentos expandiéndolo mediante la transformada de Fourier:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \phi(t, \vec{p}). \quad (2.13)$$

Remplazando el campo (2.13) en la ecuación de movimiento (2.11) y resolviendo explícitamente, hallamos la siguiente ecuación diferencial

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(t, \vec{p}) = 0. \quad (2.14)$$

La Ec. (2.14) es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple con una frecuencia:

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{(|\vec{p}|^2 + m^2)}. \quad (2.15)$$

Esta frecuencia corresponde a la energía relativista E_p de un oscilador armónico cuántico (OAC) descrito por el siguiente Hamiltoniano:

$$H_{OAC} = \frac{\pi^2(\vec{x})}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_{\mathbf{p}}^2 \phi^2(\vec{x}). \quad (2.16)$$

En mecánica cuántica se acostumbra escribir las variables dinámicas para un oscilador de una sola partícula en función de los operadores escalera. En QFT con estos operadores es posible escribir el campo de Klein-Gordon $\phi(\vec{x})$ y su momento canónico conjugado $\pi(\vec{x})$ como una expansión en series de Fourier de ondas planas. Cada modo de Fourier de los campos es tratado como un oscilador independiente con coeficientes que son operadores aniquilación ($a_{\mathbf{p}}$) y creación ($a_{\mathbf{p}}^\dagger$):

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}), \\ \pi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

En un sistema multipartícula los operadores escalera ($a_{\mathbf{p}}^\dagger$) y ($a_{\mathbf{p}}$) resultan útiles para expresar la creación o aniquilación de partículas. Si definimos un estado de mínima

energía para una partícula libre con el ket $|0\rangle$, el operador creación $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ actúa sobre este estado de vacío creando una partícula de momento $\mathbf{p}$ y energía relativista $E_{\mathbf{p}}$ de acuerdo con

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = |\mathbf{p}\rangle. \quad (2.18)$$

Por su parte, el operador aniquilación actuando sobre el estado base debe ser cero:

$$a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0. \quad (2.19)$$

También es posible dar una interpretación a los campos $\pi(\vec{x})$ y $\phi(\vec{x})$ como las soluciones de la ecuación de auto-valores para H_{OAC} . Así, el campo $\phi(\vec{x})$ actuando sobre el estado de vacío crea una partícula en la posición $\mathbf{x}$:

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = |\mathbf{x}\rangle. \quad (2.20)$$

Por otra parte, si realizamos un cambio de $\mathbf{p}$ que va en $-\mathbf{p}$ y debido a que el determinante de la matriz Jacobiana es igual a uno, es posible escribir las ecuaciones (2.17) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ \pi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Así como en mecánica cuántica los operadores escalera satisfacen la relación de conmutación $[a, a^\dagger] = 1$ para una sola partícula, los operadores creación y aniquilación en la QFT escalar satisfacen una generalización de esta expresión:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.22)$$

Finalmente, remplazando las ecuaciones (2.21) y (2.22) en el Hamiltoniano:

$$H_{OAC} = \int d^3x \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{m^2\phi^2}{2} \right], \quad (2.23)$$

obtenemos la siguiente ecuación:

$$H_{OAC} = \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \right. \\ \left. + \frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \right\}. \quad (2.24)$$

El Hamiltoniano anterior puede simplificarse hasta quedar escrito únicamente en términos de los operadores aniquilación y creación, lo que facilita el cálculo explícito de sus autovalores,

$$H_{OAC} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]). \quad (2.25)$$

No obstante, en este punto se empiezan a presentar algunas inconsistencias en la teoría, como el hecho de que el segundo término de la Ec. (2.25) diverja por ser proporcional a $\delta^{(3)}(0)$. Si bien a nivel teórico este problema es de carácter fundamental, a nivel experimental puede ser omitido considerando que sólo se realizan mediciones de diferencias de energía respecto del estado base de H análogamente a como se miden diferencias de potencial en electrodinámica, por lo que es posible despreciar el término que tiende a infinito. En consecuencia, la energía del estado base será:

$$H_{OAC}|0\rangle = \omega_0|0\rangle, \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0. \quad (2.26)$$

Por otra parte, para escribir el espectro de la teoría es necesario revisar el siguiente conmutador:

$$[H_{OAC}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \left[\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger, a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \\ = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}'} \left(a_{\mathbf{p}'}^\dagger [a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] + [a_{\mathbf{p}'}^\dagger, a_{\mathbf{p}}^\dagger] a_{\mathbf{p}'} \right) \\ = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}'} \left(a_{\mathbf{p}'}^\dagger (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right) \\ = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger. \quad (2.27)$$

Al aplicar este conmutador al estado base $|0\rangle$, podemos ver que $a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ es un autoestado del Hamiltoniano con auto valor $\omega_{\mathbf{p}}$

$$\begin{aligned} [H_{OAC}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]|0\rangle &= \omega_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle) \\ (H_{OAC}) a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle - a_{\mathbf{p}}^\dagger (H_{OAC}) |0\rangle &= \omega_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle) \\ H_{OAC} (a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle) &= \omega_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle). \end{aligned} \quad (2.28)$$

El segundo termino de la Ec. (2.28) desaparece debido a que la energía del estado base es cero y realizando de manera sucesiva este procedimiento es posible escribir el espectro:

$$H_{OAC}(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \cdots |0\rangle) = (\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \cdots)(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \cdots |0\rangle). \quad (2.29)$$

Notemos que el espectro del Hamiltoniano es real, positivo y continuo, $E \in [0, \infty)$, sus autoestados representan partículas no localizadas con energías $\omega_{\mathbf{p}}, \omega_{\mathbf{q}}, \cdots$ y momentos $p, q, \cdots$ asociados. Las partículas de Klein-Gordon obedecen la estadística de Bose-Einstein ya que el estado $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle$ es simétrico bajo el intercambio de partículas debido a que los operadores $a_{\mathbf{q}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ conmutan.

Adicionalmente, debido a que el conmutador $[\phi(\vec{p}), \pi(\vec{q})]$ no es invariante bajo transformaciones de Lorentz la teoría es inconsistente. Esto se puede verificar aplicando un boost de Lorentz en la dirección z negativa y observando como transforma el cuadri-momento $p_\mu = (E_p, p_1, p_2, p_3)$, a saber:

$$\begin{aligned} E'_p &= \gamma(E_p + \beta p_3), \\ p'_3 &= \gamma(p_3 + \beta E_p). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Utilizando la siguiente propiedad de la función delta de Dirac:

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0). \quad (2.31)$$

obtendremos que:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= \frac{dp'_3}{dp_3} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \\ &= \gamma \left(1 + \beta \frac{dE_{\mathbf{p}}}{dp_3} \right) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}'). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mientras que las transformaciones de Lorentz en la Ec. (2.30) y la expresión de la energía relativista para una partícula con momento $\mathbf{p}$ nos permiten obtener la derivada

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2} \longrightarrow \frac{dE_{\mathbf{p}}}{dp_3} = \frac{p_3}{E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.33)$$

Entonces, la delta de Dirac se transforma bajo Lorentz como:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= \gamma \left(1 + \beta \frac{p_3}{E_{\mathbf{p}}} \right) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \\ &= \frac{\gamma}{E_{\mathbf{p}}} (E_{\mathbf{p}} + \beta p_3) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \\ &= \frac{E_{\mathbf{p}'}}{E_{\mathbf{p}}} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}'). \end{aligned} \quad (2.34)$$

De la Ec. (2.34) podemos observar que la delta de Dirac no es un invariante de Lorentz, lo cuál es de esperarse debido a que la delta puede interpretarse como un volumen. Lo anterior es una consecuencia de la contracción de la longitud que se explica mediante la relatividad especial. Sin embargo, de la Ec.(2.32) tambien es fácil ver que la cantidad invariante de Lorentz es el producto entre la energía y la delta de Dirac:

$$E_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = E_{\mathbf{p}'} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}'). \quad (2.35)$$

La ecuación anterior implica que podemos reescribir una serie de cantidades que ahora serán invariantes de Lorentz, tales como el el producto escalar en el espacio de momentos:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2.36)$$

Para que esta igualdad se cumpla se debe multiplicar el estado de una partícula con momento lineal $\mathbf{p}$ que fue definida en la Ec. (2.18) por $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$, donde el factor $\sqrt{2}$ se añade por convención para simplificar las ecuaciones (2.21),

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle. \quad (2.37)$$

De manera análoga la relación de completitud se redefine como:

$$1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p}|. \quad (2.38)$$

En general las integrales de volumen serán invariantes de Lorentz siempre y cuando sean de la forma:

$$V = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.39)$$

que además puede extenderse al espacio de Minkowski para incluir la componente temporal del cuadri-momento mediante la relación:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0}. \quad (2.40)$$

Los límites de la integral volumétrica en cuatro dimensiones se restringen a valores positivos para la componente temporal ($p^0 > 0$) porque no es posible dar una interpretación física a valores negativos de tiempo o energía.

Después de haber normalizado apropiadamente estas cantidades para que fueran invariantes de Lorentz, el siguiente paso a seguir es determinar cómo evoluciona en el tiempo el campo cuántico $\phi(\mathbf{x})$. En otras palabras, tendremos que pasar del cuadro de Schrödinger al cuadro de Heisenberg donde los operadores son quienes evolucionan en el tiempo mediante transformaciones de similaridad. Para el campo de Klein-Gordon la transformación es:

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}. \quad (2.41)$$

Donde H sólo incluye el término cinético sin el término de interacción debido a que la partícula se propaga libremente en el vacío. Para resolver explícitamente se reemplaza la Ec. (2.17) en (2.41) y se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{iHt} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}) e^{-iHt}, \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \{ (e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + (e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-iHt}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

en la cual se sustituyen las siguientes transformaciones de similaridad para los operadores aniquilación y creación:

$$\begin{aligned} e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt} &= a_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \\ e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-iHt} &= a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}}t}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

para finalmente obtener una expresion para el campo dependiente del tiempo.

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + a_p^\dagger e^{i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})}), \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}).\end{aligned}\tag{2.44}$$

Esta ecuación es invariante de Lorentz al igual que la Ec. (2.17) pero difiere de esta última en que el producto en las funciones exponenciales es un producto escalar en el espacio de Minkowski entre el cuadri-momento (p) y la cuadri-posición (x).

Después de haber definido el campo escalar de Klein-Gordon en el cuadro de evolución temporal $\phi(x)$, en la proxima sección se obtendrá una expresión para el propagador que respete el principio de causalidad y que por lo tanto sea un invariante de Lorentz.

2.1.1 Propagador del campo escalar de Klein-Gordon

Continuaremos trabajando en el cuadro de Heisenberg, pero ahora se estudiará la causalidad del propagador, para lo cual definimos la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague de un punto y a otro x como:

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle.\tag{2.45}$$

Reemplazando las expresiones para los campos $\phi(x)$ y $\phi(y)$ dados por la Ec. (2.44),

$$\begin{aligned}&= \langle 0 | \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} (a_{p'} e^{-ip' \cdot y} + a_{p'}^\dagger e^{ip' \cdot y}) | 0 \rangle, \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \langle 0 | (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) (a_{p'} e^{-ip' \cdot y} + a_{p'}^\dagger e^{ip' \cdot y}) | 0 \rangle, \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \langle 0 | a_p a_{p'}^\dagger | 0 \rangle e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot y}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (2.36) y (2.37) podemos remplazar $a_{p'}^\dagger|0\rangle$ por $\frac{1}{\sqrt{E_{p'}}}|\mathbf{p}'\rangle$ y $\langle\mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle$ por $2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$,

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} \langle\mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle e^{-ip\cdot x} e^{ip'\cdot y}, \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot x} \left\{ \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} \{2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\} e^{ip'\cdot y} \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Finalmente, aplicando la delta de Dirac obtendremos la expresión para la amplitud de probabilidad:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)}. \quad (2.48)$$

Si evaluamos esta integral teniendo en cuenta únicamente los componentes espaciales $(x-y) = (0, \vec{x}-\vec{y})$ y utilizando las coordenadas esféricas para remplazar $\vec{x}-\vec{y} = \vec{r}$, entonces tendremos:

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}, \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi p^2 dp \sin\theta d\theta \frac{1}{2E_p} e^{-i|\vec{p}||\vec{r}|\cos\theta}, \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty |\vec{p}|^2 dp \frac{1}{2E_p} \frac{1}{i|\vec{p}||\vec{r}|} \left| e^{-i|\vec{p}||\vec{r}|\cos\theta} \right|_0^\pi, \\ &= \frac{-i}{2(2\pi)^2|\vec{r}|} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{|\vec{p}| e^{i|\vec{p}||\vec{r}|}}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Considerando esta integral en el plano complejo como una función de $|\vec{p}|$ vemos que tiene singularidades para valores de $|\vec{p}| = \pm im$. Por lo tanto, es posible utilizar el teorema de los residuos [14] y así obtener:

$$D(x-y) \sim e^{-m|\vec{r}|}. \quad (2.50)$$

Como se observa, la amplitud de probabilidad continúa siendo distinta de cero para trayectorias por fuera del cono de luz, por lo tanto se sigue violando el principio de causalidad. Estos resultados nos indican que para resolver el problema de la causalidad debemos dejar de preguntarnos si es posible que las partículas se propaguen en intervalos espacio-temporales y comenzar a estudiar si dos eventos separados espacialmente están relacionados causalmente, es decir verificar si un evento es la causa del otro. Esto se traduce en calcular el conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$ ya que al igual que en la mecánica

cuántica los observables son compatibles cuando el conmutador entre sus operadores es igual a cero de modo que la medición de un observable no tiene ningún efecto sobre el resultado de la medición de otro. En este caso el conmutador sirve para verificar cómo la medida del campo ϕ realizada en el punto x puede afectar una medición en otro punto y cuya separación de x es como de espacio. En caso de que el conmutador sea cero para $(x - y)^2 < 0$ entonces una medida no afecta a la otra y la causalidad es preservada. Es trivial notar mediante la Ec. (2.12) que cuando $x^0 = y^0$ el conmutador se anula, no obstante, en el caso más general tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} [(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}), (a_q e^{-iq \cdot y} + a_q^\dagger e^{iq \cdot y})], \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} ([a_p, a_q^\dagger] e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + [a_p^\dagger, a_q] e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}), \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Esta expresión es precisamente la diferencia entre dos amplitudes de probabilidad:

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x). \tag{2.52}$$

En caso de que $(x - y)^2 < 0$ (fuera del cono de luz) es posible realizar una transformación de Lorentz que va de $(x - y) \rightarrow -(x - y)$, por lo tanto $D(x - y) = D(y - x)$ y $[\phi(x), \phi(y)] = 0$, preservando la causalidad. Por otra parte, cuando $(x - y)^2 > 0$ (dentro del cono de Luz) no existe una transformación continua que transforme $(x - y)$ en $(y - x)$, así se garantiza que el conmutador sea distinto de cero.

Otro punto de importancia, como se observa en el apéndice B, es que la función

retardada de Green $D_R(x - y)$ es equivalente al conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$.

$$\begin{aligned}
D_R(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-iE_p(x^0 - y^0)} - e^{iE_p(x^0 - y^0)} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_p} e^{-i[E_p(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})]} + \frac{1}{-2E_p} e^{-i[-E_p(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})]} \right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x - y)} \Big|_{p^0 = E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{-ip \cdot (x - y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \right\} \quad (2.53) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x - y)} - e^{ip \cdot (x - y)}) \\
&= [\phi(x), \phi(y)].
\end{aligned}$$

Sin embargo, dentro de las diferentes prescripciones para el contorno de integración

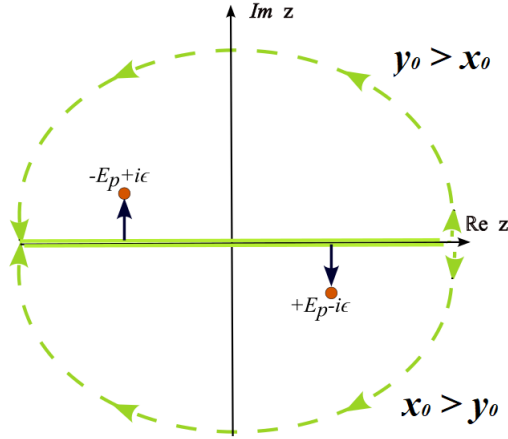


Figura 2.2: Contorno de integración para las condiciones del propagador de Feynman.

estudiadas en el apéndice B, la prescripción que da el propagador de Feynman $D_F(x - y)$ esquematizada en la figura (2.2) es la que resulta tener la interpretación física más conveniente para la QFT, además de ser de gran utilidad para calcular procesos de scattering. El propagador de Feynman se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
D_F(x - y) &= \begin{cases} D(x - y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ D(y - x) & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (2.54) \\
D_F(x - y) &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle.
\end{aligned}$$

El anterior propagador representa la amplitud de probabilidad de que una partícula

se cree en el punto y para propagarse hasta x donde es aniquilada en caso de que $x^0 - y^0 > 0$. Mientras que cuando $y^0 - x^0 > 0$, $D_F(y - x)$ representa la amplitud de probabilidad de que una anti-partícula se cree en x y se propague hasta y donde es aniquilada. Esta interpretación preserva la causalidad y no tiene el inconveniente de contener densidades de probabilidad negativa.

2.2 Campos del Modelo Estándar

Hasta este punto se ha obtenido el propagador libre del campo escalar de Klein-Gordon que describe partículas de spin 0, como el bosón de Higgs, ya que en este trabajo se estudia la corrección a la masa del bosón vectorial W que está mediada por una partícula escalar. No obstante, el bosón W es un bosón masivo de spin 1 cuya masa es adquirida a través del mecanismo de Higgs lo cual requiere estudiar el modelo electrodébil propuesto por Weinberg, Glashow y Salam en 1960 [15]. Además, solo se ha discutido la cuantización de una teoría de campo libre, pero para obtener una descripción más cercana del mundo real, debemos incluir nuevos términos de interacción no lineales en el Lagrangiano que acoplarán diferentes modos de Fourier (y las partículas que los ocupan) entre sí [12].

Como primera consideración debemos tener en cuenta que para preservar la causalidad, los términos de interacción solo pueden involucrar productos de campos en el mismo punto del espacio-tiempo, por ejemplo $[\phi(x)]^3$ está permitido, pero $\phi(x)\phi(y)\phi(z)$ no cumple con esta condición. Así, los términos que describen las interacciones serán de la forma:

$$H_{int} = \int d^3x \mathcal{H}_{int}[\phi(x)] = - \int d^3x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)]. \quad (2.55)$$

En nuestro caso nos limitaremos a teorías en las que $\mathcal{H}_{int}(-\mathcal{L}_{int})$ es una función sólo de los campos, no de sus derivadas. Una de las teorías más importantes de campos interactuantes es la teoría " $\lambda\phi^4$ ", con un Lagrangiano de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (2.56)$$

donde λ es una constante de acoplamiento adimensional. Una de las razones para introducir esta teoría es que varios de los modelos del mundo real contienen interacciones ϕ^4 ; el ejemplo más importante en física de partículas es la autointeracción del campo de Higgs en la teoría electrodébil. Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.57)$$

encontramos que la ecuación de movimiento para la teoría ϕ^4 es

$$(\partial^2 + m^2) \phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3, \quad (2.58)$$

que no puede resolverse mediante el análisis de Fourier como podría hacerlo la ecuación libre de Klein-Gordon, ver Ec. (2.11).

Un segundo ejemplo de una teoría de campos interactuantes es la electrodinámica cuántica (QED) en la cual los observables físicos se obtienen a partir de un Lagrangiano de interacción simple en el que el campo de los fotones (A_μ) interactúa con una cuadri-corriente (j^μ) construida a partir de los campos de partículas cargadas fermiónicas [16],

$$\mathcal{L}_i \sim e A_\mu(x) j^\mu(x). \quad (2.59)$$

El campo A_μ es un cuadri-potencial para partículas sin masa de spin 1 que satisface las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica:

$$\square A^\mu(x) = 0. \quad (2.60)$$

En el caso mas general donde la masa del campo vectorial es distinta de cero, como es el caso para el bosón W, la Ec. (2.60) se transforma en las ecuaciones de Proca [17]:

$$\square W^\mu(x) = m_W^2 W^\mu(x). \quad (2.61)$$

Por otra parte, utilizando la ecuación de Dirac para una partícula libre y su ecuación adjunta:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad -i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0, \quad (2.62)$$

multiplicando la primera ecuación por $\bar{\psi}$ a la izquierda, la segunda por ψ a la derecha y sumándolas:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi &= 0 \\ i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= 0 \\ \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0, \end{aligned} \tag{2.63}$$

obtenemos que la corriente conservada j^μ esta dada por:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\rho, \mathbf{j}), \tag{2.64}$$

siendo ρ la densidad de carga y $\mathbf{j}$ la densidad de corriente eléctrica. A partir de la ecuación de continuidad (2.63) se puede obtener un bilineal covariante de la teoría de Dirac, notando que bajo transformaciones de Lorentz, la cuadri-corriente transforma como un cuadri-vector $j^\mu \rightarrow j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu$. En consecuencia, la Ec. (2.63) es un invariante de Lorentz al ser un producto Minkowskiano de dos cuadri-vectores:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &\rightarrow \partial'_\mu j'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \Lambda^\mu_\nu j^\nu \\ &= \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\nu j^\nu = \partial_\nu j^\nu. \end{aligned} \tag{2.65}$$

En general cualquier corriente fermionica es de la forma $\bar{\psi}\Gamma\psi$, donde Γ es una matriz de dimensión 4×4 . Para construir el Lagrangiano de interacción de la QED y del modelo electrodébil, se deben usar solo aquellas corrientes que tienen propiedades de transformación de Lorentz definidas. Para ello primero se definen dos nuevas matrices, a partir de las matrices usuales de Dirac:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0; \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu], \quad \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Entonces $\bar{\psi}\Gamma\psi$ transforma covariantemente si Γ es una de las matrices dadas en el cuadro (2.1) donde se muestran el número de componentes linealmente independientes y las propiedades de transformación de $\bar{\psi}\Gamma\psi$ bajo paridad, donde una transformación de paridad o inversión de la paridad es el cambio simultáneo en el signo de toda coordenada espacio-temporal [18]. Las matrices $\{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5\}$ forma una base

Γ	Transforma como	Rango	número de componentes
1	escalar	0	1
γ^μ	vector	1	4
$\sigma^{\mu\nu}$	tensor	2	6
$\gamma^5\gamma^\mu$	vector axial	3	4
γ^5	pseudo-escalar	4	1

Cuadro 2.1: Bilineales covariantes.

vectorial para el conjunto de todas las matrices 4×4 . Estas corrientes Γ se denominan bilineales covariantes.

Adicionalmente, la construcción de la Lagrangiana de la QED debe tener las siguientes características ([16]):

i) Los términos que componen la Lagrangiana deben ser invariantes de Lorentz ($\psi\psi, \bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi, \dots$).

ii) Se requiere un procedimiento de renormalización debido a que las correcciones cuánticas a los observables físicos en general divergen, esto sólo es posible si la dimensión de la Lagrangiana es $[\mathcal{L}] \leq m^4$, dado que la acción $S = \int \mathcal{L} d^4x$ es adimensional, en consecuencia el Lagrangiano del SM, $[\mathcal{L}] = m^4$.

iii) La Lagrangiana debe conservar la carga eléctrica ($Q_i = Q_f$). Siguiendo el teorema de Noether una carga conservada implica una simetría. El grupo de simetría gauge de la QED es el grupo U(1) que transforma los campos $\psi, \bar{\psi}$ y A_μ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\psi &\rightarrow \psi' = e^{iQ\alpha(x)}\psi, \\
\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iQ\alpha(x)}, \\
A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{Q}\partial_\mu\alpha(x),
\end{aligned} \tag{2.67}$$

donde $\alpha(x)$ es un parámetro dependiente de cada punto del espacio-tiempo y Q es la constante de acoplamiento que determina la intensidad de la interacción, en el caso de la QED sera equivalente a la carga eléctrica fundamental e . Como consecuencia quedan prohibidos los términos escalares de tipo: $\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu}$, $A_\mu A_\nu F_{\mu\nu}$, donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor

de campo electromagnético. El Lagrangiano completo de la QED se escribe con los términos que cumplen las restricciones mencionadas anteriormente:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\partial_{\mu}\gamma^{\mu}\psi + e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu}. \quad (2.68)$$

La electrodinámica cuántica es una de las teorías físicas más exitosas presentando un alto nivel de acuerdo con diversos resultados experimentales entre los que se encuentra la medición del momento magnético anómalo del electrón y del muon. El cálculo de alta precisión más reciente de la contribución al momento magnético anómalo del electrón incluye diagramas de Feynman a 5-loops y fue realizado por Sergey Volkov y colaboradores en 2019 [19]. Que un Lagrangiano tan simple pueda explicar casi todos los fenómenos observados desde escalas macroscópicas hasta $10^{-16}m$ es uno de los grandes logros de la QED.

Otro ejemplo de importancia es el Lagrangiano de la teoría de Yukawa:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Klein-Gordon} - y_{\psi}\bar{\psi}\phi\psi. \quad (2.69)$$

Esta teoría es similar a la QED pero el fotón se reemplaza por una partícula escalar ϕ . El término de interacción contiene una constante de acoplamiento adimensional y_{ψ} , análoga a la carga del electrón, e . Yukawa estableció este marco teórico para describir los nucleones (ψ) y los piones (ϕ) [20]. Sin embargo, en la física de partículas moderna descrita por el Modelo Estándar los términos de interacción de Yukawa acoplan el campo escalar de Higgs con los campos de los quarks y leptones, la mayoría de los parámetros libres en el SM son constantes de acoplamiento de Yukawa.

Una vez establecido los campos e interacciones de la QED y de la teoría de Yukawa, se debe discutir qué otras interacciones podrían encontrarse en la naturaleza. En un principio parece que la lista es infinita, para una teoría escalar podría pensarse en escribir interacciones de la forma ϕ^n para cualquier n . Pero existe una restricción fuerte que selecciona únicamente algunas interacciones. Los términos de orden superior ($n > 1$) en la teoría de perturbaciones incluyen integrales sobre los cuadri-momentos de las partículas virtuales, estas integrales a menudo son divergentes y, por lo general, es necesario imponer algún tipo de procedimiento de corte; el más simple es cortar la integral para algún valor grande pero finito del momento que

llamaremos Λ . Al final del cálculo, uno toma el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, y se espera que las cantidades físicas resulten ser independientes de Λ . Si este es realmente el caso, se dice que la teoría es renormalizable. En las teorías de campo cuántico se impone que la teoría sea renormalizable para que las amplitudes no diverjan y el modelo tenga poder predictivo. Si la teoría incluye interacciones cuyas constantes de acoplamiento tienen dimensiones de masa elevada a alguna potencia negativa, para obtener una amplitud de dispersión adimensional esta constante de acoplamiento debe multiplicarse por alguna cantidad de dimensión de masa positiva, tal como la constante Λ . El término diverge cuando $\Lambda \rightarrow \infty$, por lo que la teoría no sería renormalizable. Es decir, que cualquier teoría que contenga una constante de acoplamiento con una dimensión de masa negativa no es renormalizable. El mismo análisis dimensional realizado para la construcción del Lagrangiano de Yukawa permite descartar una gran cantidad de interacciones, no se permiten términos de la forma ϕ^n para $n > 4$, ya que sus constantes de acoplamiento tendrían dimensión de masa $4 - n$. A partir de los términos cinéticos de los diversos Lagrangianos libres, se observa que los campos escalar ϕ y vectorial A_μ tienen dimensión 1, mientras que el campo espinorial ψ tiene dimensión $3/2$ dando como resultado todas las interacciones renormalizables permitidas [12]. Para teorías que involucran solo escalares, los términos de interacción permitidos son:

$$\mu\phi^3 \text{ y } \lambda\phi^4. \quad (2.70)$$

La constante de acoplamiento μ tiene dimensión 1, mientras que λ es adimensional. Las autointeracciones de espinores no están permitidas, ya que ψ^3 (además de violar la invarianza de Lorentz) tiene dimensión $9/2$. Por lo tanto, las únicas interacciones permitidas provienen del tercer término del Lagrangiano de la Ec. (2.69) llamado término de Yukawa, $y_\psi \bar{\psi} \phi \psi$ y de la interacción vector-espinor presentada en el segundo término del Lagrangiano de la Ec. (2.69), $e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$.

La lista de posibles interacciones que involucran partículas escalares, espinoriales y vectoriales es por lo tanto reducida debido a las restricciones muy estrictas que impone el procedimiento de renormalización para poder describir la naturaleza.

La formulación del Modelo Estándar incluye las interacciones previamente descritas en el Lagrangiano de Yukawa (2.69) y de la QED (2.68). Además, debe incluir términos que describan la cinemática de los fermiones por lo que existe un sector leptónico cuyo modelo fue propuesto por Steven Weinberg en 1967 [21], y

trabajos previos de Glashow, Salam y Ward [22], basado en la simetría gauge $SU(2) \times U(1)$, pero también un modelo para los quarks, el cual originalmente tenía tres partículas: up, down y strange. El mecanismo Glashow-Iliopolous-Maiani [23] predijo un cuarto quark (charm) y posteriormente el mecanismo Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM) predice una tercera generación de quarks: el quark top y el bottom. La dinámica de estas seis partículas está descrita por el Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica (QCD), sector encargado de mediar la interacción fuerte. La QCD fue propuesta a comienzos de los años 70 por David Politzer, Frank Wilczek y David Gross como teoría para entender la estructura de bariones (grupos de tres quarks) como los protones y neutrones, y de los mesones (pares quark-antiquark) como los piones [24]. Por su trabajo en QCD, a Gross, Wilczek y Politzer les fue concedido el Premio Nobel de Física en 2004.

Además, el Lagrangiano del SM debe incluir el sector de Higgs acoplado al de Yukawa que está relacionado con el mecanismo mediante el cual adquieren masa los leptones cargados y los quarks luego de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil. Finalmente, se debe incluir al sector electrodébil, responsable de procesos como el decaimiento beta, donde los bosones masivos Z y W juegan un papel crucial, el cual es de particular importancia para este trabajo por lo que será analizado con más detalle en los siguientes capítulos.

3. Fenomenología de las Interacciones Electrodébiles

3.1 Partículas elementales

El concepto de “Partícula Elemental” no está bien definido en física de altas energías, ha evolucionado con el tiempo en la medida que las técnicas experimentales progresan y se logra aumentar el poder de resolución de nuestras observaciones. En el siglo XX se demostró que los sistemas que se creían elementales están compuestos de constituyentes más pequeños. Entonces, los experimentos dieron cuenta, primero de la existencia de moléculas constituidas por átomos, los cuales tampoco resultaron ser indivisibles, sino que se observó que están constituidos por partículas subatómicas, en principio un núcleo y un electrón. No obstante, los núcleos están a su vez conformados por protones y neutrones, estos nucleones se asumieron elementales hasta la década de los 60, cuando los experimentos realizados en el Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) dieron indicios de la existencia de partones, a los cuales se les denominó quarks cuya evidencia definitiva se encontró en la década de los 70 [25], actualmente se sabe que los nucleones están formados por tres quarks unidos por los mediadores de la fuerza nuclear fuerte, llamados gluones. Por lo anterior, es posible que en los próximos años se encuentren nuevas partículas debido a la actualización de los dispositivos involucrados, el aumento de la luminosidad y de las energías de colisión en los experimentos. El Cuadro (3.1) resume nuestro conocimiento sobre las partículas existentes hasta este momento.

Existen partículas mediadoras responsables de la interacción para cada fuerza llamadas bosones. Como se menciono previamente los gluones son responsables de la interacción fuerte y existen ocho de ellos, para la fuerza electromagnética el mediador es el fotón y para la fuerza débil los bosones cargados $W^\pm$ y el bosón neutro Z^0 son los responsables de la interacción, todas estas partículas están asociadas con campos vectoriales de espín igual a 1. Las partículas constituyentes de la materia tienen espín $1/2$, estas se dividen en seis quarks, que forman un gran número de estados ligados llamados hadrones, y seis leptones que no tienen interacciones fuertes. Cada especie de quark, llamada “sabor”, aparece bajo tres formas, a menudo llamadas “colores”. De momento los quarks y gluones no se han observado como partículas libres. Esta

Cuantos mediadores de radiación		
Interacción fuerte		Ocho gluones
Interacción electromagnética		Fotón (γ)
Interacción débil		W^+, W^-, Z^0
Partículas de materia		
leptones		Quarks
primera generación	ν_e, e^-	$u_a, d_a, a = 1, 2, 3$
segunda generación	ν_μ, μ^-	$c_a, s_a, a = 1, 2, 3$
tercera generación	ν_τ, τ^-	$t_a, b_a, a = 1, 2, 3$

Cuadro 3.1: Partículas que conforman el Modelo Estándar. Los quarks y los gluones no existen como partículas libres, y el subíndice a indica la carga de color [16].

propiedad de “confinamiento” es uno de los problemas no resueltos de la física de partículas. No obstante, en el presente trabajo no abordaremos tales cuestiones, en su lugar nos centraremos en el sector electrodébil del SM, el cual unifica la interacción débil y el electromagnetismo.

3.1.1 Interacciones débiles

Los mediadores de las interacciones débiles son bosones vectoriales masivos. Hoy sabemos que existen tres, dos eléctricamente cargados (W^+, W^-) y uno neutro (Z^0). Al igual que con el fotón, los acoplamientos a la materia son descritos por operadores cuadri-corriente (j^μ), por lo que el Lagrangiano de interacción tiene la forma:

$$\mathcal{L}_i \sim V_\mu(x) j^\mu(x); \quad V_\mu : W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0, \quad (3.1)$$

donde las corrientes débiles son nuevamente bilineales en los campos fermiónicos. Dependiendo del correspondiente bosón vectorial se distinguen dos tipos de corrientes débiles: la corriente cargada, acoplada a $W^\pm$ y la corriente neutra acoplada a Z^0 . Estas corrientes tienen diferentes propiedades, para la corriente cargada se satisface:

- I. Contiene solo campos de fermiones con quiralidad de mano izquierda:

$$j_c^\mu \sim \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \sim \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi, \quad (3.2)$$

donde $\bar{\psi}_L$ es un fermión levógiro. La quiralidad para un fermión de Dirac ψ se define a través del operador γ^5 , que tiene auto-valores ± 1 . Cualquier campo de Dirac se puede proyectar en su componente de quiralidad izquierda o derecha actuando con los operadores de proyección de la siguiente manera:

$$\psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi. \quad (3.3)$$

II. Las constantes de acoplamiento son números complejos.

En cuanto a la corriente neutra sabemos que contiene campos de fermiones levógiros y dextrógiros:

$$j_n^\mu \sim C_L \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + C_R \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R. \quad (3.4)$$

Notemos que debido a la existencia de las corrientes cargadas en las interacciones débiles, algunas propiedades difieren de las corrientes electromagnéticas, esto incluye la violación de la simetría CPT e decir de la simetría de paridad (P) donde se invierte la paridad espacial del proceso mediante el intercambio de derecha e izquierda y el cambio en el espín de las partículas, de conjugación de carga (C) en la cual todas las partículas se sustituyen por sus correspondientes antipartículas y de inversión temporal (T) en la que se invierte el sentido del tiempo. Además, contrario al campo fotónico, los bosones vectoriales débiles son masivos por lo que es necesario estudiar su interacción con el campo de Higgs. Finalmente, otra diferencia esencial es el hecho de que los bosones vectoriales están auto-acoplados, estos acoplamientos se han determinado experimentalmente y son predicciones del marco teórico de las teorías gauge por lo que se hablará de ellas a continuación.

3.2 Simetrías Gauge

En física, el concepto de simetría se deriva de la suposición de que una cierta cantidad no es medible. Como resultado, las ecuaciones de movimiento son independientes de dicha cantidad, esto implica la existencia de cantidades conservadas. Esta relación entre simetrías y leyes de conservación, está establecida en el teorema de Noether [26]. Por ejemplo, el hecho de que la posición del origen del sistema de coordenadas no se puede medir físicamente y entonces su elección es

arbitraria, implica la invarianza de las ecuaciones bajo traslaciones espaciales y la conservación del momento lineal. De igual manera obtenemos las leyes de conservación de la energía (traslaciones temporales) y del momento angular (rotaciones). Se distingue también entre simetrías bajo transformaciones continuas (traslaciones y rotaciones) a las cuales se aplica el teorema de Noether, y discretas, como inversiones de espacio o de tiempo. Durante el siglo XX, además, se han considerado otras dos abstracciones, la idea de simetrías internas y la de simetrías gauge, cada una de las cuales ha tenido una profunda influencia en nuestra forma de describir las interacciones fundamentales.

Se denominan simetrías internas a aquellas cuyos parámetros de transformación no afectan el punto del espacio-tiempo x^μ . Este concepto ya se puede presentar en la física clásica, pero se vuelve natural en la mecánica cuántica y la QFT [16]. El ejemplo más simple es la fase de una función de onda, ya que no es una cantidad medible, la teoría debe ser invariante ante un cambio de fase. Esto es cierto tanto para la mecánica cuántica relativista como para la no relativista. Las ecuaciones de movimiento (Dirac o Schrödinger), así como la condición de normalización, son invariantes bajo la transformación:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Psi(x), \quad (3.5)$$

la cual es una simetría interna que a través del teorema de Noether implica la conservación de la corriente de probabilidad. La transformación de fase (3.5) corresponde al grupo abeliano $U(1)$.

Por otra parte, Heisenberg amplió el concepto a una simetría no abeliana introduciendo el isospín, suponiendo que las interacciones fuertes son invariantes bajo el grupo de transformaciones $SU(2)$ en las que el protón y el neutrón forman un doblete $N(x)$:

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}, \quad N(x) \rightarrow e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}} N(x). \quad (3.6)$$

En este caso las matrices τ son proporcionales a las matrices de Pauli y los parámetros θ son los ángulos de una rotación en el espacio de isospin análogos a los ángulos de rotación del espacio Euclídeo. Nuevamente, las transformaciones no se aplican sobre los puntos del espacio-tiempo ordinario sino sobre la representación cuántica de los estados físicos.

La dinámica de las partículas libres es invariante bajo traslaciones espaciales, este tipo de invariancia es global en el sentido de que el parámetro de la transformación, $(\vec{a})$, es independiente de las coordenadas del espacio-tiempo x^μ . Sin embargo, si este parámetro se reemplaza por una función que depende del punto del espacio-tiempo, $(\vec{a} \rightarrow \vec{a}(x))$, la dinámica deja de ser invariante bajo la transformación. Tanto la transformación de fase descrita por la Ec. (3.5) como las rotaciones son transformaciones globales, la diferencia radica en que las transformaciones de fase de un campo no son observables. Hay dos formas de interpretar la naturaleza no observable de las fases complejas, la primera es asumir que los estados descritos por una fase compleja diferente son físicamente iguales y difieren solo en la descripción matemática, la segunda forma de verlo es que los estados son indistinguibles aunque físicamente diferentes. En el primero de estos dos casos, la simetría global se denomina simetría gauge. La presencia de una simetría gauge revela así una redundancia en la descripción: hay más estructura matemática de lo estrictamente necesario para describir la realidad física [27]. El concepto de simetría gauge, fue introducido por Albert Einstein en su búsqueda de una teoría General de la Relatividad. Las simetrías gauge pueden ser locales o globales y no necesariamente una simetría local es una simetría gauge.

No obstante, las fuerzas gravitatorias no son las únicas que tienen un origen geométrico. Si consideramos una rotación de fase local del grupo $U(1)$ y la aplicamos el Lagrangiano libre de Dirac $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i \not{\partial} - m) \Psi(x)$, tal que:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \Psi(x), \quad (3.7)$$

es claro que las ecuaciones de movimiento no serán invariantes bajo un cambio local de fase $\theta(x)$, ya que al derivar el campo transformado aparecerá un término proporcional a $\partial_\mu \theta(x)$. Con la finalidad de restaurar la invariancia, se debe modificar el Lagrangiano, en cuyo caso ya no describirá un campo de Dirac libre. La invariancia bajo transformaciones gauge locales conduce a la introducción de interacciones, para lo cual se define un nuevo campo gauge $A_\mu(x)$ y se reemplaza el operador derivada ∂_μ por la “derivada covariante” D_μ dada por:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (3.8)$$

donde e es un parámetro constante real. El campo $A_\mu(x)$ transforma bajo $U(1)$ local

de la siguiente manera:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu(\theta). \quad (3.9)$$

Esta condición permite que D_μ sea una magnitud “covariante” porque satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} D'_\mu [e^{i\theta(x)} \Psi(x)] &= (\partial_\mu + ieA'_\mu) [e^{i\theta(x)} \Psi(x)] \\ &= e^{i\theta(x)} D_\mu \Psi(x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

En consecuencia, la densidad Lagrangiana de Dirac se convierte ahora en:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i \not{D}_\mu - m)\Psi(x) = \bar{\Psi}(x)(i \not{\partial}_\mu - e \not{A}_\mu - m)\Psi(x). \quad (3.11)$$

El resultado de transformar la ecuación de Dirac reemplazando la derivada parcial por una derivada covariante es una densidad Lagrangia invariante bajo las transformaciones gauge de las ecuaciones (3.7) y (3.9), que como resultado natural describe la interacción de un campo espinorial cargado representado por Ψ con un campo electromagnético externo representado por A_μ . A partir de un requisito puramente geométrico se tiene como consecuencia la aparición de una interacción que describe las fuerzas electromagnéticas.

La extensión de este formalismo de las teorías gauge a grupos no abelianos no es trivial y se descubrió por primera vez mediante prueba y error. Considerando una teoría de campos clásica dada por una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ que depende de un conjunto de N campos $\psi(x)^i$, $i = 1, \dots, r$, y sus primeras derivadas, suponemos que los campos $\psi(x)^i$ se transforman linealmente según una representación r -dimensional de un grupo de Lie G que no actúa sobre las coordenadas del espacio-tiempo, sino que actúa sobre el espacio interno de los estados físicos [16], de tal forma que

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^r \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) \rightarrow U(\omega)\Psi(x), \quad \omega \in G, \quad (3.12)$$

donde $U(\omega)$ es la matriz de la representación de G . Es posible utilizar la representación

exponencial de este operador unitario porque las matrices Θ son hermíticas ($\Theta = \Theta^\dagger$)

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\Theta}\Psi(x), \quad \Theta = \sum_{a=1}^m \theta^a T^a \quad (3.13)$$

donde los θ^a son un conjunto de m parámetros constantes, y los T^a son matrices que representan los generadores del álgebra de Lie de G y satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (3.14)$$

Las f son las constantes de estructura de G , donde la suma sobre el índice c está implícita siguiendo la convención de Einstein. La normalización de las constantes de estructura suele fijarse exigiendo que, en la representación fundamental, se normalicen las matrices correspondientes de los generadores T^a , de tal manera que:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (3.15)$$

Como se hizo para el caso Abelian, deseamos encontrar una nueva $\mathcal{L}$, invariante bajo las transformaciones de gauge correspondientes en las que las θ^a sean funciones arbitrarias de x . Este problema, fue resuelto primero por ensayo y error para el caso de $\text{SU}(2)$ por C.N. Yang y R.L. Mills en 1954 [28]. Por lo que estas teorías se denominan desde entonces "teorías de Yang-Mills". Los pasos son generalizaciones directas de las realizadas en el caso Abelian. Se necesita un campo gauge análogo al campo A_μ para la interacción electromagnética que "transporte" la información contenida en la transformación (3.13) de un punto a otro. Como podemos realizar m transformaciones independientes, hay el mismo número de generadores T^a en el álgebra de Lie de G y por lo tanto necesitamos m campos $A_\mu^a(x)$ con $a = 1, \dots, m$, de tal forma que definimos el campo gauge

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \sum_{a=1}^m A_\mu^a(x) T^a. \quad (3.16)$$

Las derivadas covariantes ahora pueden construirse como:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\mathcal{A}_\mu, \quad (3.17)$$

con g siendo una constante real arbitraria. De manera análoga a la Ec.(3.10) la derivada

covariante $\mathcal{D}_\mu$ satisfice:

$$\mathcal{D}_\mu e^{i\Theta(x)}\Psi(x) = e^{i\Theta(x)}\mathcal{D}_\mu\Psi(x), \quad (3.18)$$

siempre y cuando el campo gauge $\mathcal{A}_\mu$ transforme como:

$$\mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_\mu(x)e^{-i\Theta(x)} + \frac{i}{g}(\partial_\mu e^{i\Theta(x)})e^{-i\Theta(x)}. \quad (3.19)$$

En consecuencia es posible definir una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\Psi, D\Psi)$ invariante bajo las transformaciones (3.13) y (3.19) con un Θ dependiente de x^μ . Como se hizo para la interacción electromagnética, los nuevos grados de libertad gauge se agregan al término cinético de la Lagrangiana. Yang y Mills agregaron este término cinético invariante de gauge para el grupo SU(2) utilizando el tensor de fuerzas ($F_{\mu\nu} \sim \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu$) [16]. Primero multiplicamos por un campo Ψ :

$$(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu)\Psi = \mathcal{D}_\mu(\mathcal{D}_\nu\Psi) - \mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}_\mu\Psi), \quad (3.20)$$

luego utilizamos la definición de derivada covariante dada en la ecuación (3.17) para desarrollar el primer término,:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu(\mathcal{D}_\nu\Psi) &= \mathcal{D}_\mu(\partial_\nu\Psi + ig\mathcal{A}_\nu\Psi) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu\Psi + ig(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu)\Psi + ig\mathcal{A}_\nu(\partial_\mu\Psi) + ig\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Psi - g^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Psi, \end{aligned} \quad (3.21)$$

el segundo término se resuelve de manera equivalente:

$$\mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}_\mu\Psi) = \partial_\nu\partial_\mu\Psi + ig(\partial_\nu\mathcal{A}_\mu)\Psi + ig\mathcal{A}_\mu(\partial_\nu\Psi) + ig\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Psi - g^2\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Psi, \quad (3.22)$$

y finalmente los restamos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu)\Psi &= ig(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu)\Psi - ig(\partial_\nu\mathcal{A}_\mu)\Psi + g^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Psi - g^2\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Psi \\ &= [ig(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu) - ig(\partial_\nu\mathcal{A}_\mu) + g^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu - g^2\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu]\Psi \end{aligned} \quad (3.23)$$

Notamos que la Ec. (3.23) es valida para cualquier campo Ψ , además multiplicamos por

la constante $-\frac{i}{g}$ para obtener el término cinético ($\mathcal{G}_{\mu\nu}$):

$$-\frac{i}{g}(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu) = ig(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) + g^2[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \quad (3.24)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu].$$

Por convención, la matriz $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ es una combinación lineal de los generadores T^a como en la Ec. (3.16). Esta convención sirve para normalizar de manera adecuada el termino cinético de la densidad Lagrangiana, de tal manera que también pertenezca al algebra del grupo, escrito en términos de los campos gauge A_μ^a :

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu^a T^a) - \partial_\nu(A_\mu^a T^a) - ig[A_\nu^a T^a, A_\mu^b T^b]. \quad (3.25)$$

Desarrollando las derivadas y utilizando la Ec. (3.14) tendremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(A_\nu^a T^a) + A_\nu^a \partial_\mu(T^a) - \partial_\nu(A_\mu^a T^a) - A_\mu^a \partial_\nu(T^a) - igA_\mu^a A_\nu^b i f^{abc} T^c \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gA_\mu^b A_\nu^c f^{bca}) T^a, \end{aligned} \quad (3.26)$$

que puede escribirse de forma abreviada como:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a T^a, \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.27)$$

Para finalizar con la construcción del Lagrangiano invariante, vemos que bajo una transformación gauge, $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ transforma como $\mathcal{G}_{\mu\nu} \rightarrow e^{i\theta^a(x)T^a} \mathcal{G}_{\mu\nu} e^{-i\theta^a(x)T^a}$, por lo que el Lagrangiano completo ahora se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_{inv} = -\frac{1}{2} Tr(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}) + \mathcal{L}(\Psi, \mathcal{D}\Psi). \quad (3.28)$$

Podemos notar que, como ocurría con el campo electromagnético, este Lagrangiano no contiene términos proporcionales a $A_\mu A^\mu$ lo cual significa que los campos gauge describen partículas sin masa. Además, el término cinético contiene términos trilineales y cuadrilineales los cuales se tratarán como términos de acoplamiento cuya fuerza viene dada por una constante (g). En otras palabras, los campos gauge no abelianos están auto-acoplados, por lo que una teoría de Yang-Mills, que contiene solo campos gauge, sigue siendo una teoría cuántica de campo con una dinámica establecida, mientras que para los campos Abelianos (como el fotónico) sin los fermiones solo se tendría una teoría libre trivial [16].

3.3 Ruptura espontánea de simetría

Dado que las teorías gauge parecen predecir la existencia de bosones vectoriales sin masa, cuando se propusieron por primera vez no parecían ser aplicables directamente a la física de partículas más allá del electromagnetismo [16], pero posteriormente el mecanismo de Higgs logró explicar la aparición de estos bosones masivos por lo que proporcionó una descripción de la teoría electrodébil, cabe aclarar que el mecanismo de Higgs se presenta a menudo como una ruptura espontánea de una simetría gauge local. Pero este tipo de simetrías están basadas en la redundancia de la descripción, ya que las transformaciones gauge conectan estados que no se pueden distinguir físicamente. Por lo tanto, estas simetrías aplican sobre nuestra descripción de la naturaleza y no se puede esperar que la ruptura espontánea de tal simetría tenga efectos físicos. Si la ruptura espontánea de la simetría gauge no puede tener efectos físicos, esto causa problemas conceptuales para el mecanismo de Higgs [27].

En un sistema infinito se presentan transiciones de fase que a menudo implican una reducción en la simetría del estado fundamental. La QFT al ser un sistema con un número infinito de grados de libertad también puedan mostrar el fenómeno de las transiciones de fase. De hecho, en muchos casos, encontramos al menos dos fases. La fase previa a la ruptura de la simetría que se denomina fase de Wigner. Para una teoría gauge, los bosones vectoriales no tienen masa y pertenecen a la representación adjunta del grupo de simetría. Se supone que en esta fase todos los estados que no son singletes, como los correspondientes a los campos gauge, están confinados, en el sentido de que no aparecen como estados físicamente posibles. Posteriormente tendremos la fase de ruptura espontánea de la simetría, que en el caso de una teoría gauge da como resultado que algunos de los bosones se vuelvan masivos y aparezcan como estados físicos. Es este tipo de transición de fase la que se estudiara en esta sección.

Para revisar el concepto de masa en un formalismo de campos empecemos analizando el siguiente Lagrangiano de un campo escalar real ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (3.29)$$

Notemos que si $\mu^2 > 0$ ($\mu \in \mathbb{Z}$) este es el Lagrangiano de una partícula de Klein-Gordon con masa μ , donde el término ϕ^4 sería el término de interacción ($\lambda > 0$). Pero si

el termino $\mu^2 < 0$ entonces μ no representa una masa, sino que el segundo y tercer término del Lagrangiano son el potencial de una partícula no masiva, en este caso el potencial y en consecuencia el Lagrangiano tienen simetría ante reflexiones ($\phi \rightarrow -\phi$). Para llegar a la solución estable trasladamos el campo ϕ . Es claro que no hay pérdida de generalidad al elegir un punto particular, por conveniencia elegimos como punto de referencia aquel en el que el potencial es un mínimo ($\phi = \nu$) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi}(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4) &= 0, \\ \mu^2\phi + \lambda\phi^3 &= 0, \\ \mu^2 + \lambda\phi^2 &= 0, \\ \rightarrow \phi^2 &= -\frac{\mu}{\lambda} = \nu^2,\end{aligned}\tag{3.30}$$

y expandimos alrededor de este mínimo

$$\phi(x) = \nu + \eta(x).\tag{3.31}$$

Remplazando la Ec. (3.31) en el Lagrangiano de la Ec. (3.29) y teniendo en cuenta que $\nu^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \lambda\nu^2\eta^2 - \lambda\nu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + cte \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{m^2}{2}\eta^2 - \lambda\nu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + cte.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Donde $-\mu^2 = \frac{m^2}{2} \geq 0$, que al ser un termino positivo puede interpretarse como la masa del campo η . No obstante, debe enfatizarse que ambos Lagrangianos son completamente equivalentes. Pues describen la dinámica del mismo sistema físico ya que un cambio de variables, como el de la Ec. (3.31), no puede cambiar la física. Al elegir una descripción desde uno de los mínimos la simetría se ha roto a nivel descriptivo, es decir que la descripción de una partícula masiva es equivalente a la de una partícula sin masa donde los estados de menor energía no tienen la simetría del Lagrangiano.

Este mecanismo se puede generalizar para un campo escalar complejo, el cual justamente por ser complejo puede tener una invariancia bajo cambios de fase $\phi(x) \rightarrow e^{i\theta}\phi(x)$, es decir una simetría $U(1)$ global. Tenemos entonces un potencial de

la forma:

$$V(\phi, \phi^*) = \mu^2(\phi\phi^*) + \lambda(\phi\phi^*)^2, \quad (3.33)$$

y una densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - V. \quad (3.34)$$

Si escribimos el campo ϕ en sus partes real e imaginaria como $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ tenemos dos grados de libertad y un número infinito de mínimos que ocupan un círculo en el plano (ϕ_1, ϕ_2) como se observa en la Figura (3.1). De manera análoga al caso real

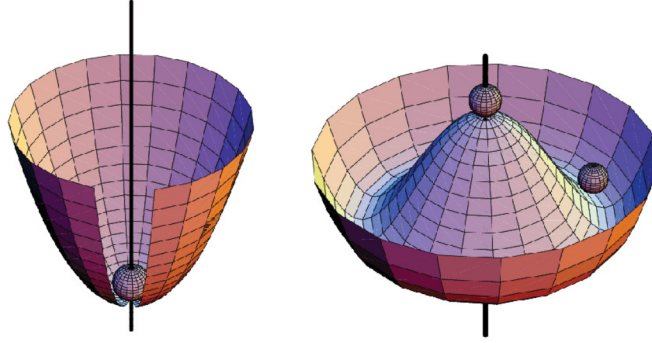


Figura 3.1: El potencial $V(\phi, \phi^*)$ con $\mu^2 \geq 0$ (izquierda) y $\mu^2 < 0$ (derecha). Para $\mu^2 > 0$ el mínimo está en $\phi = 0$ (solución simétrica, mostrada en el lado izquierdo de la figura, pero para $\mu^2 < 0$ hay un círculo completo de mínimos en el plano ϕ complejo con radio $\nu = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$, cualquier punto del círculo corresponde a una ruptura espontánea de la simetría [16].

escogemos uno de los mínimos y describimos el problema desde allí,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu + \psi(x) + i\chi(x)). \quad (3.35)$$

Sustituyendo ϕ en la Ec. (3.34) tenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda\nu^2)\psi^2 - \lambda\nu\psi(\psi^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4}(\psi^2 + \chi^2)^2. \quad (3.36)$$

Como resultado obtenemos un Lagrangiano que contiene términos cinéticos asociados al campo ψ y al campo χ , pero únicamente un término cuadrático asociado al campo ψ , como se observó previamente los términos cuadráticos con un coeficiente positivo se asocian a un campo con masa. No obstante, no hay término cuadrático asociado al

campo χ . La aparición de esta partícula de masa cero es un ejemplo del teorema de Goldstone [29]: Existe una partícula escalar sin masa, denominada bosón de Goldstone, por cada generador de la simetría global que se rompe, es decir, que no mantiene el estado de mínima energía.

Ahora veremos las consecuencias de la ruptura espontánea de la simetría en presencia de una simetría gauge local lo cual implica la introducción en el Lagrangiano de un campo vectorial sin masa donde las interacciones se obtienen reemplazando el operador de derivada ∂_μ por la derivada covariante D_μ . El Lagrangiano considerado será:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 - \mu^2\phi\phi^* - \lambda(\phi\phi^*)^2. \quad (3.37)$$

De manera análoga a los casos estudiados previamente consideramos el término μ^2 como negativo y escribimos el campo en términos de uno de los mínimos posibles, ν , como en la Ec. (3.35) y la reemplazamos en la Ec.(3.37) para obtener el siguiente Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{ev^2}{2}A_\mu^2 + evA_\mu\partial_\mu^\chi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\psi^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

El término que es proporcional a A_μ^2 podría interpretarse (erróneamente) como si el fotón se hubiera vuelto masivo. Si se toma como una teoría cuántica de campos, parece describir la interacción de una partícula vectorial masiva (A_μ) y dos escalares, uno masivo (ψ) y otro sin masa (χ). Sin embargo, podemos ver de inmediato que algo anda mal con este conteo ya que antes de la transformación tenemos un campo vectorial sin masa y un campo escalar, cada uno con 2 grados de libertad para un total de 4, pero después de la transformación obtenemos un campo vectorial masivo (3 grados de libertad) y dos campos escalares reales (2 grados de libertad) lo que implica 5 grados de libertad en total. Dado que los grados de libertad físicos no se crean mediante un simple cambio de variables, concluimos que el Lagrangiano de la Ec. (3.38) debe contener campos que no representan partículas físicas. No obstante, es sencillo escoger una transformación que hace desaparecer los campos no físicos. En lugar de parametrizar el campo complejo ϕ por sus partes real e imaginaria, elegimos su representación polar (modulo y fase) y obtendremos las siguientes transformaciones

gauge:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\nu + \rho(x)]e^{i\frac{\zeta(x)}{\nu}} ; \quad A_\mu(x) = B_\mu(x) - \frac{1}{e\nu}\partial_\mu\zeta(x). \quad (3.39)$$

Las cuales remplazamos en la Lagrangiana de la Ec. (3.36), este proceso deja fijo el campo $\zeta(x)$ y finalmente obtenemos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2v^2}{4}B_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)^2\rho^2 - \frac{\lambda}{4}\rho^4 + \frac{1}{2}e^2B_\mu^2(2v\rho + \rho^2). \quad (3.40)$$

Podemos observar que el campo $\zeta(x)$ ha desaparecido y este Lagrangiano describe dos partículas masivas, una vectorial (B_μ) y una escalar (ρ). Por lo tanto, se puede concluir que con la ruptura espontánea de una teoría gauge los bosones vectoriales adquieren masa y los bosones de Goldstone sin masa se desacoplan y desaparecen, así el número final de grados de libertad será igual al inicial. A partir de estas ideas en la siguiente sección construiremos el Lagrangiano de la teoría electrodébil y el sector de Higgs.

No debemos olvidar que la ruptura espontánea de la simetría gauge no es parte de la física, sino una redundancia descriptiva producto de la formulación matemática. Por lo tanto, el mecanismo de Higgs se puede producir de forma independiente, sin ruptura espontánea de la simetría gauge y se obtendrá el mismo resultado [30]. El proceso consiste en invertir los pasos, primero imponemos que los campos que aparezcan en el Lagrangiano $\phi(x)$ y $A_\mu(x)$, sean invariantes bajo la transformación gauge directamente, esto elimina la redundancia descriptiva ya que solo existirá un campo invariante que al introducirse en el Lagrangiano hará que este sea invariante bajo la transformación gauge pero ya no tendrá un conjunto infinito de posibles estados sino un único estado, lo cual además elimina directamente los bosones de Goldstone $\zeta(x)$ del Lagrangiano.

Desde esta perspectiva las masas se generan mediante el valor del estado fundamental distinto de cero del campo de Higgs $\phi(x)$, expandiendo el campo como en la Ec. (3.31), la diferencia radica en que ya no existe un numero infinito de mínimos degenerados sino un único valor esperado del vacío ν , por lo que el campo se expande en función de este mínimo y de un campo cuyo valor esperado sea cero η . En consecuencia el mecanismo de Higgs es una forma más consistente de producir los términos de masa evitando la necesidad de romper la simetría [27].

3.4 Lagrangiano del Modelo electrodébil

Comencemos observando la tabla de partículas elementales, Tabla (3.1) , donde vemos que, para las interacciones electromagnéticas y débiles combinadas, se tienen cuatro bosones gauge: $W^\pm, Z^0$ y el fotón γ . Como explicamos anteriormente, cada uno de ellos corresponde a un generador del grupo no trivial $SU(2) \times U(1)$. Los tres generadores de $SU(2)$ se denotan con T_i , ($i = 1, 2, 3$), mientras que el generador de $U(1)$ es la hipercarga Y . El operador de carga eléctrica Q se puede escribir como una combinación lineal de T_3 (Isoespín débil) e Y (hipercarga débil) como:

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y, \quad (3.41)$$

siempre y cuando los autovalores asociados a estos operadores sean:

$$Y(\Psi_L^i) = -1, \quad Y(R_i) = -2; \quad T_3(\Psi_L^i) = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.42)$$

El número de leptones está determinado por las observaciones, actualmente se conocen seis, caracterizados por el fenómeno de la repetición familiar, en la cual cada leptón (e^-, μ^-, τ^-) está asociado con su respectivo neutrino (ν_e, ν_μ, ν_τ). Si bien no se entiende completamente por qué la naturaleza elige repetirse tres veces, esto permite usar las mismas representaciones como dobletes para cada familia. Otro aspecto experimental a tener en cuenta es el hecho de que los W cargados se acoplan sólo a los componentes izquierdos de los campos de leptones, en contraste con el fotón, que se acopla con la misma fuerza tanto a las componente dextrógiras y levógiras. Estas consideraciones nos llevan asignar las componentes izquierdas a los campos de dobletes de $SU(2)$:

$$\Psi_L^i(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_i(x) \\ l_i^-(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.43)$$

No existen componentes dextrógiras para los neutrinos así que se asignan singletes de $SU(2)$ a los leptones cargados:

$$l_{iR}^-(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)l_i^-(x) = R_i(x). \quad (3.44)$$

Estos campos transforman bajo transformaciones locales de $SU(2)$ como $\Psi_L^i(x) \rightarrow e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)} \Psi_L^i(x)$, donde $\tau_i = \frac{\sigma_i}{2}$, son las tres matrices de Pauli. Por otra parte, para la elección de los campos escalares de Higgs se debe tener en cuenta que tres de los bosones vectoriales deben ser masivos y el cuarto, identificado con el fotón, se debe mantener sin masa. Recordemos que, por cada bosón vectorial que adquiere masa, se desacopla un escalar con los mismos números cuánticos. Al final queda al menos un campo físico escalar y sin carga eléctrica. De ello se deduce que el número mínimo de campos es cuatro, dos cargados y dos neutros con hipercarga de $U(1)$, $Y(\Phi) = 1$, los cuales podemos escribir como un doblete complejo de $SU(2)$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger = (\phi^-, \phi^{0*}), \quad \Phi(x) \rightarrow e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)} \Phi(x). \quad (3.45)$$

Escribimos el Lagrangiano más general y renormalizable que involucre los campos anteriormente descritos en las ecuaciones (3.43), (3.44), y (3.45) caracterizados por ser invariantes bajo transformaciones gauge de $SU(2) \times U(1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{weak} = & -\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu} + |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \\ & + \sum_{i=1}^3 [\bar{\Psi}_L^i i \not{D} \Psi_L^i + \bar{R}_i i \not{D} R_i - G_i (\bar{\Psi}_L^i R_i \Phi)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Donde B_μ el campo asociado a la simetría $U(1)$, con su correspondiente intensidad de campo $B_{\mu\nu}$ dada por la Ec. (3.24). De manera similar, las derivadas covariantes están determinadas por las propiedades de transformación establecidas en la Ec. (3.17):

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \Phi, \quad (3.47)$$

donde $\vec{W}_\mu$ es el campo de gauge asociado a $SU(2)$ con su correspondiente intensidad de campo $\vec{W}_{\mu\nu}$ y las constantes g y g' son acoplamientos correspondientes a los grupos $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente [31]. El potencial de Higgs $V(\Phi)$ más general compatible con las propiedades de transformación del campo es análogo al descrito en la Ec. (3.33):

$$V(\Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (3.48)$$

El último término en la Ec. (3.46) es un término de acoplamiento de Yukawa entre el campo escalar Φ y los fermiones. Como era de esperarse, los bosones gauge W_μ , B_μ y los fermiones aparentemente no son masivos. Por lo tanto, el siguiente paso consiste en trasladar el campo Φ en función de un mínimo para desencadenar la ruptura espontánea de la simetría, este procedimiento hará aparecer los términos de masa [32]. se espera que la masa de cada partícula en el modelo sea proporcional a $|\mu|$. Como se demostró en la Ec. (3.30) el mínimo del potencial ocurre en un punto $v^2 = -\mu^2/\lambda$, en este caso podemos elegir que la dirección de la ruptura sea a lo largo de la parte real del componente ϕ^0 ,

$$\Phi \rightarrow \Phi + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

La masa física del Higgs surge debido a que tres de los cuatro campos reales del doblete Φ fueron absorbidos por el mecanismo de Higgs para permitir que los tres bosones de norma W^+ , W^- , Z^0 adquieran masa. Para obtener la masa del boson de Higgs, M_{ϕ^0} , que corresponde al coeficiente del término $(|\phi^0\phi^{0\dagger}|)^{1/2}$, realizamos la traslación (3.49) y remplazamos en el potencial (3.48):

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\ &= \mu^2\left(\phi + \frac{1}{\sqrt{2}}\nu\right)^2 + \lambda\left(\phi + \frac{1}{\sqrt{2}}\nu\right)^4 \\ &= \mu^2(\phi^2 + \dots) + \lambda(3\phi^2\nu^2 + \dots). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Observando el coeficiente que acompaña la parte cuadrática del potencial, el cual está asociado al termino de masa, se obtiene la expresión para M_{ϕ^0} :

$$\mu^2\phi^2 + 3\lambda\nu^2\phi^2 = -2\mu^2\phi^2 \rightarrow M_{\phi^0} = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (3.51)$$

Además, este mecanismo asigna un término de masa para los bosones vectoriales que se deriva del termino del Lagrangiano que contiene la derivada covariante $|D_\mu\Phi|^2$. Al

sustituir explícitamente obtenemos:

$$\begin{aligned}
(D_\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi &= \left(\left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \Phi \right)^\dagger \left(\left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \Phi \right) \\
&= \frac{1}{4} \left| (g\sigma_i W_\mu^i + g' B_\mu) \left(\Phi + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \right) \right|^2 + \dots \\
&= \frac{1}{8} \nu^2 \left| (g\sigma_i W_\mu^i + g' B_\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 + \dots
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Remplazando explícitamente las matrices de Pauli:

$$\begin{aligned}
(D_\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi &= \frac{\nu^2}{8} \left| \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g' B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -gW_\mu^3 + g' B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 + \dots \\
&= \frac{\nu^2}{8} \left| \begin{pmatrix} g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ -gW_\mu^3 + g' B_\mu \end{pmatrix} \right|^2 + \dots \\
&= \frac{\nu^2}{8} [g^2(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + (g' B_\mu - gW_\mu^3)^2] + \dots
\end{aligned} \tag{3.53}$$

En particular, los bosones W cargados están definidos como:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \tag{3.54}$$

por lo que al multiplicar estos campos obtendremos:

$$\begin{aligned}
W_\mu^+ W^{-\mu} &= \left(\frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{W^{1\mu} + iW^{2\mu}}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Lo anterior implica que el primer termino de la Ec. (3.53) está asociado a la masa de los bosones W cargados [33], m_W ,

$$\left(\frac{\nu g}{2} \right)^2 \frac{1}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} \rightarrow M_W = \frac{\nu g}{2} = \frac{e\nu}{2\sin\theta_W}. \tag{3.56}$$

Podemos estimar el valor numérico de la masa del bosón W a nivel-árbol (sin incluir correcciones cuánticas) usando los parámetros ν y g en el esquema de renormalización

$\overline{MS}$ [34] fijando el valor de $Q = 173.1 \text{ GeV}$, donde Q es la escala de energía conocida como escala de regularización, la cual sirve para dar a la expresión una dimensión correcta de masa [35], así obtenemos:

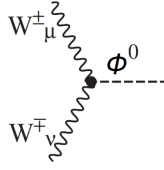
$$\begin{aligned}\nu(Q) &= 246.60109 \text{ GeV}, \\ g(Q) &= 0.64765961 \text{ GeV}, \\ M_W &= 79.85678 \text{ GeV}.\end{aligned}\tag{3.57}$$

Del mismo termino del Lagrangiano donde está la derivada covariante $|D_\mu \Phi|^2$ provienen los acoplamientos entre el campo escalar neutro de Higgs (ϕ^0) y los bosones gauge (W^+, W^-, Z^0):

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\phi^0 + \nu)^2 [g^2 W_\mu^+ W^{-\mu}] + (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu, \\ \frac{1}{4}((\phi^0)^2 + 2\phi^0 \nu + \nu^2) g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \dots, \\ \frac{1}{2} \nu g^2 \phi^0 W_\mu^+ W^{-\mu} + \dots.\end{aligned}\tag{3.58}$$

En este trabajo, estamos interesados particularmente en las reglas de Feynman derivadas del sector EW del Lagrangiano descrito previamente. En física teórica los diagramas de Feynman son una representación pictórica de las expresiones matemáticas que describen el comportamiento y la interacción de las partículas subatómicas [36].

Estos diagramas llevan el nombre del fisico estadounidense Richard Feynman, quien los introdujo en 1948. La interacción de las partículas subatómicas puede ser compleja y difícil de entender, los diagramas de Feynman dan una visualización simple de lo que de otro modo sería una formulación abstracta [37]. A continuación se presentan algunas de las reglas de Feynman para la teoría electrodébil. Estas reglas provienen del Lagrangiano descrito anteriormente y todas pueden ser consultadas en la referencia [38]. Las que utilizaremos en este trabajo son el propagador del campo de Higgs que fue construido en el capítulo 2 a partir de la Ec.(B.9) y los demás provienen del termino que contiene la derivada covariante $|D_\mu \Phi|^2$. El propagador de bosón W se obtiene de la Ec. (3.56) y el acoplamiento del W con el Higgs proviene de la Ec. (3.58). A continuación presentamos las reglas de Feynman asociadas a cada termino:

Propagador del bosón $W^\pm$	W boson 	$\frac{-i(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2})}{q^2 - M_W^2 + i\epsilon}. \quad (3.59)$
Acoplamiento con el bosón de Higgs		$igM_W g_{\mu\nu}. \quad (3.60)$
Propagador del bosón de Higgs ϕ^0	Higgs scalar 	$\frac{i}{p^2 - M_H^2 + i\epsilon}. \quad (3.61)$

Cuadro 3.2: Reglas de Feynman para los terminos asociados a la contribución a la auto-energía en donde se emite y reabsorbe un bosón de Higgs .

Utilizando las reglas de Feynman para la teoría electrodébil mencionadas anteriormente podemos realizar la construcción de la amplitud que calcularemos en la siguiente sección haciendo uso del software **Wolfram Mathematica**. Si bien existe una cantidad considerable de correcciones cuánticas a un-loop para la auto-energía del bosón W, nosotros calcularemos la contribución a la auto-energía en donde se emite y reabsorbe un bosón de Higgs.

4. La Masa del Bosón W

4.1 Medición experimental de la masa del bosón W

El bosón W está relacionado con los procesos de decaimiento β . En los experimentos se han observado dos tipos de procesos. El primero, es la desintegración β negativa (β^-) la cual se produce en núcleos con exceso de neutrones. Un neutrón se transforma en un protón que queda integrado en el núcleo, junto con un electrón y un anti-neutrino electrónico que son emitidos en forma de radiactividad [39],

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (4.1)$$

El segundo proceso es menos habitual que el decaimiento (β^-) y fue descubierto por Joliot y Curie en 1934. Este consiste en la emisión de positrones y recibe el nombre de desintegración β positiva (β^+), se produce en núcleos con exceso de protones los cuales se transforman en neutrones y emiten un positrón y un neutrino electrónico, sin embargo este decaimiento no se produce en protones libres, porque el protón no tiene la suficiente energía en reposo [40],

$$p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e. \quad (4.2)$$

En 1933 Fermi estudió el decaimiento β^- como una interacción de cuatro partículas fermiónicas que ocurre en un solo punto, es decir, que no requiere una partícula mediadora. Debido a que la fuerza débil es la responsable de la desintegración β y su alcance es extremadamente corto ($10^{-15}m$), el modelo de Fermi produce excelentes resultados a bajas energías [39]. Sin embargo, se reconoció ampliamente que este enfoque estaba destinado a fallar a altas energías ya que uno de los principales problemas de la teoría de Fermi radica en el hecho de que la sección eficaz $\bar{\sigma}$ para la dispersión neutrino-leptón (Ec. (4.3)) aumenta con el cuadrado de la energía del centro de masa como se ve en la definición: ($\mathbf{s} = E_{c.m.}^2$) [41],

$$\bar{\sigma}(\nu_\mu + e^- \rightarrow e^- + \nu_\mu) \sim (g^2 + gg' + g'^2) \frac{G_F^2}{3\pi} \mathbf{s}. \quad (4.3)$$

Como la Ec. (4.3) implica probabilidades de ocurrencia de la emisión β que divergen a altas energías, la teoría de Fermi tendría que ser remplazada por una teoría en la que la interacción estuviera mediada por el intercambio de alguna partícula. El mediador llegó a ser conocido con el nombre de bosón vectorial intermedio [42]. El desafío para los teóricos era predecir las propiedades del bosón vectorial intermedio, y el de los experimentadores, producir uno en el laboratorio.

Durante muchos años, las predicciones de la masa del bosón mediador fueron conjeturas provenientes en gran parte del fracaso de los experimentos a energías progresivamente más altas para detectar la partícula. Para 1962 se sabía que la masa tenía que ser al menos la mitad de la masa del protón, $M_p = 938,272 \text{ MeV}$. Diez años más tarde, el límite inferior experimental había aumentado a $2.5 \times M_p$. Posteriormente, Abdus Salam dedujo que la masa del bosón mediador tendría que ser de entre 50 y 137 masas protónicas [43]. No fue hasta la aparición de la teoría electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam (GWS) que fue posible una predicción realmente firme de la masa del bosón mediador, conocido desde entonces como el bosón W, $M_W = 82 \pm 2 \text{ GeV}$ [15].

A finales de la década de los setenta, el CERN comenzó la construcción de un colisionador protón-antiprotón diseñado específicamente para producir partículas pesadas. En enero de 1983 el grupo de Carlo Rubbia informó del descubrimiento del W con una masa de $81 \pm 5 \text{ GeV}$. Estos experimentos representaron un triunfo técnico extraordinario y fueron de fundamental importancia para confirmar un aspecto crucial del Modelo Estándar, con el que la comunidad física estaba en ese momento fuertemente comprometida y por el cual se había otorgado el Premio Nobel de física en 1979 a los autores del modelo GWS por sus contribuciones a la teoría de la interacción electromagnética y débil unificada entre partículas elementales [42].

En 2018, la European Physical Journal publicó una medida de M_W con gran precisión realizada por el detector ATLAS en el gran colisionador de hadrones (LHC) del CERN, con un valor de $80370 \pm 19 \text{ MeV}$, el cual es compatible con las predicciones del SM. Esta medida fue obtenida a partir de una muestra de alrededor de 14 millones de bosones W registrados por ATLAS durante 2011, cuando el LHC funcionaba a una energía de 7 TeV y 4.6 fb^{-1} de luminosidad integrada. Esta medida coincide con las anteriores obtenidas en el Large Electron-Positron collider (LEP),

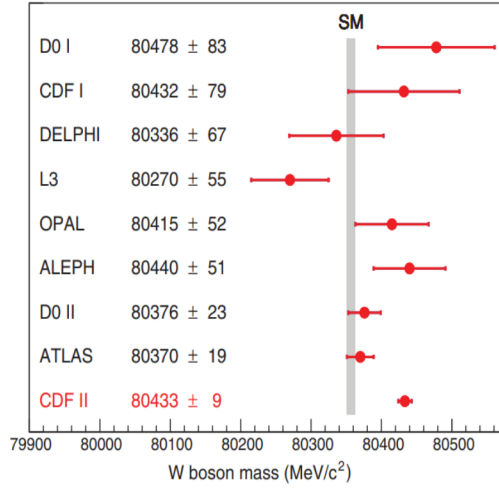


Figura 4.1: Comparación de la medición de CDF II para M_W con las mediciones anteriores realizadas por otros laboratorios y con la predicción del SM. Este último incluye las estimaciones de la incertidumbre teórica (8 MeV) [45].

antecesor del LHC en el CERN, y Tevatrón, acelerador de partículas de Fermilab [44]. El 7 de abril del 2022, el equipo científico CDF-II (Detector del Colisionador de Fermilab) publicó sus resultados sobre la masa del bosón W haciendo uso de los datos recopilados de colisiones protón-antiprotón a una energía de centro de masa de $1,96 \text{ TeV}$ y $8,8 \text{ fb}^{-1}$ de luminosidad integrada, utilizando una muestra aproximada de 4 millones de bosones W, obteniendo una masa $M_W = 80433.5 \pm 9.4 \text{ MeV}$, cuya precisión supera la de todas las medidas anteriores combinadas. Desde el punto de vista experimental, la masa del W se obtiene mediante el proceso Drell-Yan ($pp^- \rightarrow W \rightarrow l + \nu_l$), específicamente de la cinemática del decaimiento del bosón W ($W \rightarrow l + \nu_l$) [46]. El aumento en la precisión se debe a una reducción de las incertidumbres sistemáticas, además de otras mejoras como el uso de datos obtenidos de rayos cósmicos y de técnicas novedosas para recolectar información del colisionador que permitieron mejorar la uniformidad de la respuesta del calorímetro, la precisión y robustez de la respuesta del detector. Los detalles experimentales se encuentran en la referencia [45]. Como se puede observar en la figura (4.1), este resultado experimental se aleja alrededor de 70 MeV , equivalentes a 7σ , de la predicción teórica del Modelo Estándar, poniendo a prueba la validez de dicho modelo, por lo que resulta necesario realizar cálculos precisos con los cuales comparar los resultados del experimento.

Finalmente, cabe resaltar que recientemente, el laboratorio ATLAS ha mostrado un

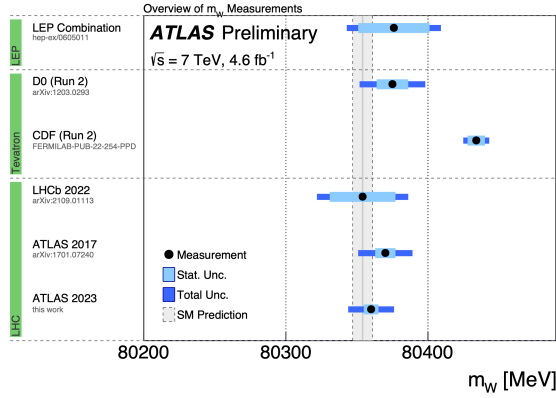


Figura 4.2: Comparación del valor medido de la masa del bosón W por ATLAS en 2023 con otros resultados publicados recientemente, como el del grupo CDF-II. La banda vertical gris muestra la predicción del Modelo Estándar, mientras que las bandas y líneas horizontales muestran las incertidumbres estadísticas totales de los diferentes resultados mostrados [47].

nuevo resultado preliminar que mejora el análisis de su medición inicial de la masa del bosón W realizada en 2017. Como se muestra en la figura (4.2), se encontró un valor de $M_W = 80360 \text{ MeV}$ con una incertidumbre experimental de 16 MeV . El valor medido es más bajo que el resultado anterior de ATLAS en 10 MeV y está de acuerdo con las predicciones del Modelo Estándar [47], lo cual podría indicar que existen algún tipo de error estadístico en la medición publicada por CDF-II. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que la incertidumbre experimental en ATLAS es mayor a la encontrada por CDF-II.

4.2 Cálculo teórico de la masa del bosón W

Los cálculos de las correcciones radiativas electrodébiles a la masa del W al orden de un-loop se realizaron de forma completa en la década de los noventa y fueron publicados en las referencias [48] y [49]. Los diagramas de Feynman para dichas correcciones pueden verse en la figura (4.3). Estos diagramas corrigen el polo complejo del propagador del bosón W. En la teoría de campos cuánticos, la masa de una partícula inestable suele definirse como la parte real del polo corregido. La posición del polo es una cantidad física, tiene un significado independiente de cualquier marco teórico y tampoco depende del proceso de dispersión concreto. Específicamente, en la teoría perturbativa, el propagador del bosón W incluyendo correcciones cuánticas en

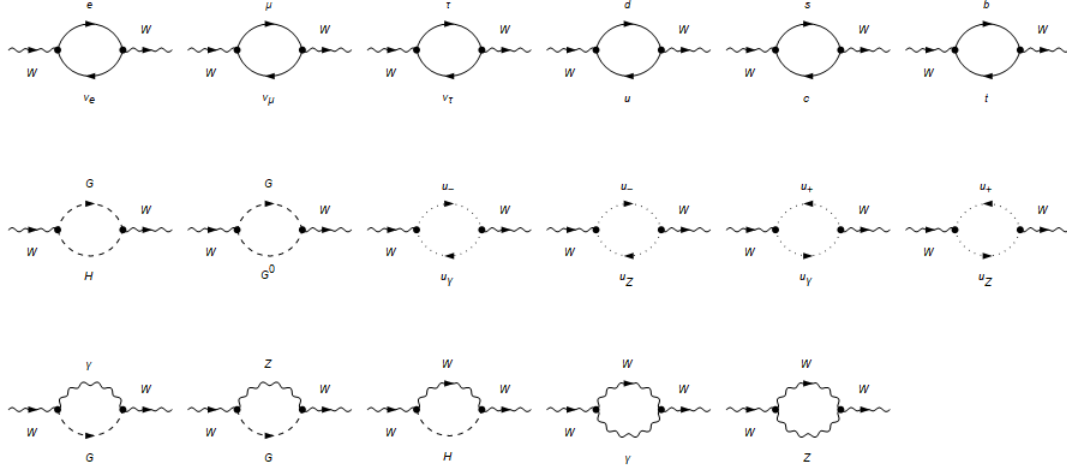


Figura 4.3: Diagramas de Feynman para la auto-energía de la masa del bosón W en el SM generados por el paquete `Feynarts` de `Mathematica`.

el gauge de Feynman, toma la forma de la Ec. (4.4):

$$D(q^2) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - M_{W_0}^2 + i\Gamma_W M_{W_0} - \Pi(q^2)}, \quad (4.4)$$

donde M_{W_0} es la masa a nivel árbol del bosón vectorial, Γ_W es el ancho de decaimiento del bosón W y $\Pi(q^2)$ es el factor de forma de la auto-energía del W proporcional a $-ig_{\mu\nu}$. Estas auto-energías son las funciones de Green de dos puntos, representadas con diagramas conectados con dos líneas externas, que se muestra en la figura (4.3). Su calculo es necesario para obtener las correcciones cuánticas a las masas de las partículas y, por lo tanto, modifican el valor de la masa física correspondiente a la parte real del polo del propagador [50]. Para visualizar esto, es conveniente expandir en series la parte real de $\Pi(q^2)$ alrededor del punto $q^2 = M_W^2$. Esta expansión se puede representar esquemáticamente mediante diagramas de Feynman como se observa en el cuadro (4.1), donde cada circulo representa una corrección cuántica 1PI (One-Particle-Irreducible) que permite únicamente diagramas conectados, es decir que no se pueden dividir en dos sub-diagramas cortando una linea interna [12]. Ignorando la parte imaginaria del polo, la expansión para la auto-energía del bosón W será la Ec. (4.5):



Corrección 1PI		$\Pi(q^2).$
Propagador libre		$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M_{W_0}^2}.$

Cuadro 4.1: Representación por medio de diagramas de Feynman de la expansión en serie geométrica. cada circulo vacío representa una corrección cuántica (1PI) o diagrama irreducible de una partícula.

$$\begin{aligned}
D(q^2) &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - M_{W_0}^2} + \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - M_{W_0}^2} \left(\frac{\Pi(q^2)}{q^2 - M_{W_0}^2} \right) + \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - M_{W_0}^2} \left(\frac{\Pi(q^2)}{q^2 - M_{W_0}^2} \right)^2 + \dots \\
&= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - M_{W_0}^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi(q^2)}{q^2 - M_{W_0}^2}} \right) \\
&= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - M_{W_0}^2 - \Pi(q^2)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Para llegar a este resultado se uso en la segunda linea la definición de serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}; \quad \text{si} \quad |s| < 1. \tag{4.6}$$

Por otra parte, definimos el parámetro de masa renormalizada (M_R) y el factor de renormalización (V) como:

$$\begin{aligned}
M_R^2 &= M_{W_0}^2 - Re[\Pi(M_R^2)], \\
V^{-1} &= 1 + Re[\Pi'(M_R^2)],
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde (Π') es la primera derivada de los terminos de la corrección 1PL, el parámetro M_R es la masa del bosón W en el esquema de renormalización on-shell y M_{W_0} es la masa sin renormalizar (masa desnuda), es decir, su masa en el límite cuando la energía de un proceso de dispersión tiende a infinito [51]. Por su parte, el factor de forma de la

auto-energía del W puede escribirse como la suma de una parte real y otra imaginaria:

$$\Pi(q^2) = Re[\Pi(q^2)] + iIm[\Pi(q^2)]. \quad (4.8)$$

Expandiendo la parte real en torno al punto $q^2 = M_R^2$:

$$Re[\Pi(q^2)] = Re[\Pi(M_R^2)] + Re'[\Pi(M_R^2)](q^2 - M_R^2) + \dots \quad (4.9)$$

y remplazando en el propagador obtenemos:

$$\begin{aligned} D(q^2) &= \frac{1}{q^2 - M_{W_0}^2 - Re[\Pi(q^2)] - iIm[\Pi(q^2)]} \\ &= \frac{1}{q^2 - M_{W_0}^2 - Re[\Pi(M_R^2)] - Re'[\Pi(M_R^2)](q^2 - M_R^2) + \dots - iIm[\Pi(q^2)]} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Despreciando los términos de orden superior de la expansión y usando la Ec. (4.7) es posible escribir el propagador de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D(q^2) &= \frac{1}{(1 + Re'[\Pi(M_R^2)])(q^2 - M_R^2) - iIm[\Pi(q^2)]} \\ &= \frac{V}{q^2 - M_R^2 + iVIm[\Pi(q^2)]}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La parte imaginaria de $\Pi(q^2)$ está relacionada con el ancho de decaimiento, cuando se evalúa en $q^2 = M_R^2$ se tiene

$$VIm[\Pi(M_R^2)] = M_R \Gamma_W. \quad (4.12)$$

La diferencia entre M_R y M_{W_0} es significativa si su efecto en la sección eficaz en colisiones protón-protón (pp) está dentro de la precisión del cálculo [50]. Para partículas estables $\Gamma_W = 0$, sin embargo, para partículas inestables $\Gamma_W \neq 0$ y la posición del polo, q_0 , es compleja. La masa física del bosón W denotada como M_W , que corresponde al valor medido experimentalmente, se define en términos del polo como [34]:

$$q_0^2 = M_W^2 - i\Gamma_W M_W. \quad (4.13)$$

El cálculo teórico de la masa física se ha realizado hasta el orden de dos-loops de forma completa en el Modelo Estándar usando el esquema de renormalización $\overline{MS}$

masas polo de partículas pesadas	$M_t, M_h, M_Z, M_w,$
masas de quarks ligeros	M_b, M_c, M_s, M_d, M_u
masas polo de leptones:	$M_\tau, M_\mu, M_e,$
Acoplamiento de 5 quarks en QCD	$\alpha_S^{(5)}(M_Z)$
Constante de Fermi	$G_F = 1.1663787 \dots \times 10^{-5} GeV^{-2}$
Constante de estructura fina	$a_0 = 1/137.035999139 \dots$

Cuadro 4.2: Observables físicos en el esquema on-shell calculados por el código **SMDR** [34].

puro. A. Sirlin derivó las fórmulas para M_W y M_Z en el modelo electrodébil a un-loop haciendo énfasis en el papel que juegan las masas de los fermiones y calculando las correcciones cuánticas al tiempo de vida medio del muón [52]. M. Consoli y sus colaboradores, por su parte, estudiaron el efecto del quark top sobre las masas de los bosones vectoriales y el posible desacoplamiento de los fermiones pesados en el límite de bajas energías [53]. Además, se han realizado correcciones a dos-loops en QCD de las componentes longitudinal y transversal de las auto-energías de los bosones gauge electrodébiles para un momento externo arbitrario y para diferentes masas de los quarks [54]. Recientemente se han llevado a cabo cálculos que incluyen algunos efectos mejorados en la QCD al orden de tres- y cuatro-loops. Sin embargo, los cálculos existentes se han hecho utilizando expansiones en relaciones de masa cuadráticas pequeñas, como en el caso de la referencia [55]. El trabajo más actual realizado por Martin [34] proporciona un cálculo que no emplea expansiones y utiliza el esquema $\overline{MS}$, lo que significa que el conjunto completo de parámetros de entrada consta solo de las cantidades del Modelo Estándar renormalizadas en este esquema.

Martin logra reunir los resultados obtenidos en los últimos años y los implementa en el código llamado **SMDR** (Standard Model in Dimensional Regularization). Esta librería está escrita en el lenguaje C con funciones que se pueden llamar desde cualquier programa realizado por el usuario, y permite obtener todos los parámetros del SM como función de la escala de renormalización Q en el esquema $\overline{MS}$ [56]. El código **SMDR** también proporciona los cálculos de los observables físicos en el esquema on-shell¹, como se observan en el Cuadro (4.2). La masa del bosón W es una predicción del Modelo Estándar y por lo tanto se obtiene en el código **SMDR** a partir de los parámetros calculados en el esquema $\overline{MS}$. El código **SMDR** también calcula el

¹En TCC las partículas que viajan dentro del cono de luz, es decir que satisfagan las combinaciones de energía E y momento $\vec{p}$ en la ecuación $E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$ permitido por la relatividad especial se llaman on-shell, y las que no son llamadas off-shell.

ángulo de mezcla débil según lo define la Review of Particle Properties (RPP) [57] del Particle Data Group.

En este trabajo realizamos explícitamente el cálculo a un-loop, en el sector electrodébil, de la corrección cuántica a la masa del W mediada por un bosón de Higgs. Estos resultados se incluyen en los datos proporcionados por el software **SMDR** para posteriormente estudiar la dependencia de M_W como función de la escala de renormalización Q .

4.2.1 Implementación en Wolfram Mathematica

El calculo a un-loop de la masa del bosón W se puede realizar utilizando **Mathematica** con ayuda de los paquetes **Feynarts** y **Feyncalc**, los cuales permiten construir y evaluar respectivamente amplitudes de Feynman. El código elaborado tiene las siguientes especificaciones:

- Utilizando el comando **PrependTo**, el cual agrega el directorio donde se encuentra **FeynCalc** a la lista de directorios donde están los programas ejecutables, indicamos el camino para llamar los paquetes **FeynCalc** y **Feynarts**. Debido a que el paquete **Feynarts** únicamente produce las amplitudes a nivel integral pero no realiza ninguna operación sobre dichas amplitudes es necesario exportarlas a **FeynCalc** por lo que debemos utilizar los comandos `$LoadFeynArts=True;` y `Get["FeynCalc.m"]` encargados de cargar **Feynarts** y que ejecutar **FeynCalc** respectivamente.

```
PrependTo[$Path, ToFileName[{"Path", "to", "FeynCalc"}]];
$LoadFeynArts=True;
Get["FeynCalc.m"]
```

- Creamos la Topología para el diagrama de la auto-energía del bosón W (**TopW**) utilizando la función **CreateTopologies**, cuyos argumentos permiten definir: el orden del loop, el número de líneas externas (entrante $\rightarrow$ saliente), los vertices excluidos usando la opción **ExcludeTopologies** $\rightarrow$ **Internal** en la función **CreateTopologies**, el número de líneas conectadas a los vértices, etc. Además, es posible dibujar e imprimir en pantalla la topología con el comando **Paint** el cual toma como argumentos la topología creada (**TopW**) y permite numerar cada

uno de los campos con el argumento `FieldNumbers`, como se ve en la figura (4.4).

```
TopW = CreateTopologies [1, 1 → 1,
                        ExcludeTopologies → {Internal},
                        Adjacencies → 3]
Paint[TopW, ColumnsXRows → 1, FieldNumbers → True]
```

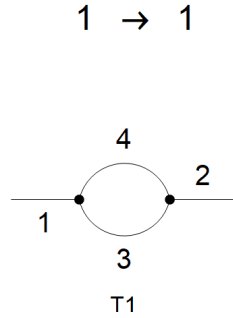


Figura 4.4: Topología de la auto-energía del bosón W.

- En la nueva línea de código escribimos la función `exclufields` de `FeynArts` que excluye una lista de partículas definidas mediante la siguiente nomenclatura: `F` representa campos fermiónicos, `S` escalares, `V` vectoriales y `U` fantasmas de Feynman; los cuales a su vez, tienen un número de clase que indica el tipo de partícula que simbolizan, por ejemplo `F[1]` neutrinos, `F[2]` leptones masivos, `F[3]` y `F[4]` quarks, mientras que las antipartículas se establecen con un signo menos atrás. Nosotros excluirémos todos los campos a excepción del bosón vectorial `W` representado con `V[3]` y el bosón de Higgs `S[1]`.

No obstante, si no incluimos la función `exclufields` generaríamos la totalidad de los diagramas de Feynman de las correcciones a un loop para la auto-energía del bosón `W` en donde las partículas intermedias pueden ser cualquiera de los leptones cargados con su respectivo neutrino, o diferentes combinaciones de quarks. Todas estas posibles combinaciones de partículas pueden ser generadas por `Feynarts` y se observan en los diagramas de la figura (4.3)

```
exclufields = {F[1, _], F[2, _], F[3, _], F[4, _],
               S[2], S[3],
               V[1], V[2], V[5],
               U[1 | 2 | 3 | 4 | 5 ]};
```

- Ahora vamos a insertar los campos en cada una de las línea de la topología creada previamente, para lo cual creamos una variable llamada **FDW** (Feynman Daigram W) y utilizamos **InsertFields** cuyos argumentos permiten definir la topología, campo entrante y saliente ($W \rightarrow W$, $V[3] \rightarrow V[3]$), el modelo para nuestro caso es el Modelo Estandar, **InsertionLevel** $\rightarrow$ **{Particles}** indica que el resultado contendrá inserciones solo a nivel de partículas, **ExcludeParticles** excluye la lista de partículas que definimos con anterioridad con **excludefields** y posteriormente usando de nuevo **Paint** podemos dibujar el diagrama con los campos insertados como se ve en la figura (4.5).

```
FDW=InsertFields[TopW, V[3]  $\rightarrow$  V[3],
                  Model  $\rightarrow$  "SM",
                  InsertionLevel  $\rightarrow$  {Particles},
                  ExcludeParticles  $\rightarrow$  excludefields]
Paint[FDW, ColumnsXRows  $\rightarrow$  1]
```

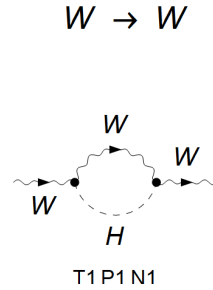


Figura 4.5: Diagrama de Feynman para la auto-energía del bosón W en donde se emite y se reabsorbe un bosón de Higgs.

- Para generar la amplitud en **Feynarts**, a la cual llamaremos **AmpFAW**, empleamos la función **CreateFeynAmp** encargada de tomar como argumento la topología **FDW** y aplicar las reglas de Feynman de las ecuaciones (3.54) y (3.55) al diagrama de la figura (4.5) generando la amplitud a nivel integral en 4 dimensiones, como estamos interesados en la corrección cuántica usamos el argumento **Truncated** $\rightarrow$ **True** que elimina las líneas externas y nos deja únicamente con el loop.

```
AmpFAW = CreateFeynAmp[FDW, Truncated  $\rightarrow$  True]
```

- Sin embargo, el cálculo de la amplitud se debe realizar con **FeynCalc**, por ende, pasamos del lenguaje de **FeynArts** a **FeynCalc** mediante la función **FCFAConvert** donde escribimos la dimensión de los cuadri-momentos con

ChangeDimension, la cual, debe especificarse en D-dimensiones para regularizar dimensionalmente las integrales divergentes de Feynman que aparecen en amplitud, el momento de loop (**k**) con **LoopMomenta** y los momentos de loop entrante y saliente (**p**) con **IncomingMomenta** y **OutgoingMomenta**.

```
AmpFCW=FCFAConvert[AmpFAW,
                    ChangeDimension → D,
                    IncomingMomenta → {p},
                    OutgoingMomenta → {p},
                    LoopMomenta → {k}]
```

- Como el resultado final será una amplitud que contiene tensores métricos usamos el comando **Contract** para contraer los índices repetidos. Además con **Changes** realizamos algunos cambios a los nombres de las variables que FeynCalc trae por defecto, $\text{FCGV}[b_]\rightarrow b$, $\text{Lor } 1 \rightarrow \mu$, $\text{Lor } 2 \rightarrow \nu$.

```
Contract[AmpFCW]
Changes = {FCGV[b_] :> b, Lor1 → b \ [Mu], Lor2 → b \ [Nu]}
AmpFCW = AmpFCW /. Changes
```

- Lo cual nos da como resultado la siguiente amplitud sin integrar, en donde EL es la carga del electrón, M_W es la masa del bosón W, M_H es la masa del bosón de Higgs y SW es el seno del ángulo de Weinberg o ángulo de mezcla débil.

$$\text{AmpFCW} = \left\{ \frac{iEL^2 M_W^2 g^{\mu\nu}}{16\pi^4 SW^2 (k^2 - M_H^2) ((k-p)^2 - M_W^2)} \right\}$$

- Finalmente la variable **res** guardará el resultado mediante la función **Oneloop** que calcula la amplitud del diagrama de Feynman a un loop. **Oneloop** tiene como primer argumento a **k** que denota la variable de integración, es decir, el momento del loop. El segundo argumento es la amplitud (**AmpFCW**) y el argumento **Dimension** $\rightarrow D$ indica que la dimension inicial es D que luego se reduce en el resultado a 4 dimensiones mediante $D \rightarrow 4$.

```
res=OneLoop[k,AmpFCW[[1]],
            Dimension → D,
            FeynCalcExternal → True] /. D → 4 // Simplify
```

- Así obtenemos la estructura abreviada del cálculo en términos de la función de Passarino-Veltman B_0 [58]

$$\Delta M_W = -\frac{e^2 M_W^2 g^{\mu\nu} B_0(p^2, M_H^2, M_W^2)}{16\pi^2 \sin^2 \theta_W}. \quad (4.14)$$

Para masas internas arbitrarias, la función B_0 tiene la siguiente forma [59]:

$$B_0(p^2; m_1, m_2) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} - \ln \left(\frac{m_1 m_2}{\mu^2} \right) - R + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} + 2 \right), \quad (4.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln \pi, \\ \gamma &= 0.577216 \quad (\text{constante de Euler-Mascheroni}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

y R está a su vez definida en términos de la función de Källén λ

$$\begin{aligned} R &= -\frac{\Lambda}{p^2} \ln \frac{p^2 - i\epsilon + M_W^2 + M_H^2 - \Lambda}{2M_W M_H}, \\ \Lambda^2 &= \lambda(-p^2, M_W^2, M_H^2) \quad (\text{función de Källén}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

La función triangular o función de Källén llamada así en honor al físico teórico Gunnar Källén, es una función polinomial en tres variables utilizada en geometría y en física de partículas. En este último campo fue introducida en el libro *Elementary Particle Physics* [60] denotada por símbolo λ :

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx). \quad (4.18)$$

Ahora remplazamos (4.15) en la ecuación (4.14):

$$\Delta M_W = -\frac{e^2 M_W^2 g^{\mu\nu}}{16\pi^2 \sin^2 \theta_W} \left[\frac{1}{\bar{\varepsilon}} - \ln \left(\frac{M_H M_W}{Q^2} \right) - R + \frac{M_H^2 - M_W^2}{2p^2} \ln \left(\frac{M_H^2}{M_W^2} + 2 \right) \right]. \quad (4.19)$$

La Ec. (4.19) se puede graficar en función de la escala de renormalización como se observa en la figura (4.6). Si dejamos fijo el valor de Q en 170 GeV podemos observar que aporta una corrección cuántica con un valor de $\Delta M_W = 0.095447 \text{ GeV}$ lo cual equivale aproximadamente al 0.1 % del valor de la masa del W a nivel árbol. El código realizado para obtener los resultados anteriores se encuentra en el link <https://github.com/fisicateoricaUDP>.

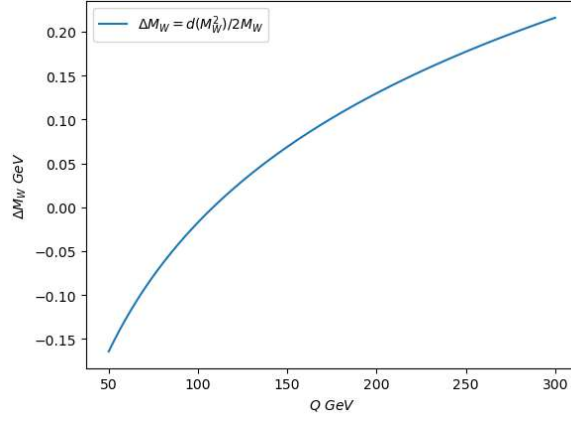


Figura 4.6: Corrección cuántica a la masa del bosón W mediada por un bosón de Higgs en función de la escala de renormalización.

Por otra parte, en **SMDR** los valores de entrada de Q y los parámetros $\overline{MS}$ como ν , λ , g y g' se especifican mediante las siguientes variables globales **SMDR_Q_in**, **SMDR_v_in**, **SMDR_lambda_in**, **SMDR_g'_in**, etc., las cuales podemos configurar o ajustar en cualquier momento, pero generalmente permanecen fijas a medida que se realizan múltiples tareas diferentes, con variables globales temporales correspondientes **SMDR_Q**, **SMDR_v**, **SMDR_lambda**, etc. Para la evaluación de las masas físicas de las cuatro partículas pesadas se utilizan las funciones **SMDR_Eval_Mt()**, **SMDR_Eval_Mh()**, **SMDR_Eval_MZ()** y **SMDR_Eval_MW()**. En este trabajo estamos utilizando las funciones que evalúan la masa del bosón W definida a partir de la Ec. (4.13) y la masa del quark top. Las funciones de los bosones W y Z también evalúan las masas Breit-Wigner, que son las formas tradicionales de evaluar esas masas. En cada caso, se puede especificar la escala de renormalización Q en la que se realiza el cálculo [34]. También se dan las masas en la convención PDG, como suelen citarla los experimentadores, que están relacionadas con las masas físicas por:

$$M_W^{PDG} = M_W \frac{(1 + \delta)}{\sqrt{(1 - \delta)}}, \quad (4.20)$$

donde $\delta = \frac{\Gamma_W^2}{4M_W^2}$.

Posteriormente los datos generados son graficados utilizando el paquete **PyLab** de **Python**. Además, comparamos los valores experimentales más recientes publicados en Science [45] de las mediciones realizadas por el CDF II y los resultados obtenidos de

los experimentos LHC, LEP-2 y Tevatron publicados en el Particle data group [57] en donde se establece que la incertidumbre sistemática común entre los resultados del LHC y Tevatron es 7MeV dando como resultado una masa promedio estimada de $80,377 \pm 0,013\text{GeV}$. Combinando este resultado con el valor LEP-2 el Particle Data Group obtuvo la masa W promedio de $80,377 \pm 0,012\text{GeV}$.

Las gráficas producidas por el software SMDR para este trabajo muestran la masa física del bosón W con correcciones radiativas en función de la escala de renormalización Q en un rango de valores entre 50 y 300 GeV . Tomamos como valor de referencia a $Q = 170\text{GeV}$ ya que se encuentra dentro de la escala electro-débil y obtuvimos un valor de M_W a nivel árbol de 79.87294GeV , mientras que con correcciones a 1-loop la masa física y la masa PDG fueron $M_W = 80.37194\text{GeV}$ y $M_W^{PDG} = 80.39036\text{GeV}$ respectivamente. Para el caso de 1-loop completo más 2-loop en QCD los valores arrojados por SMDR son $M_W = 80.36496\text{GeV}$ y $M_W^{PDG} = 80.38425\text{GeV}$. Finalmente la masa física del bosón W con correcciones radiativas completas a 2-loops más 3-loops en QCD arroja como resultados $M_W = 80.33232\text{GeV}$ y $M_W^{PDG} = 80.35269\text{GeV}$. También mostramos el valor central

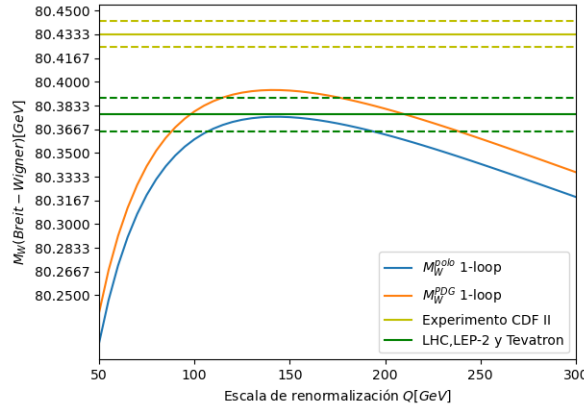
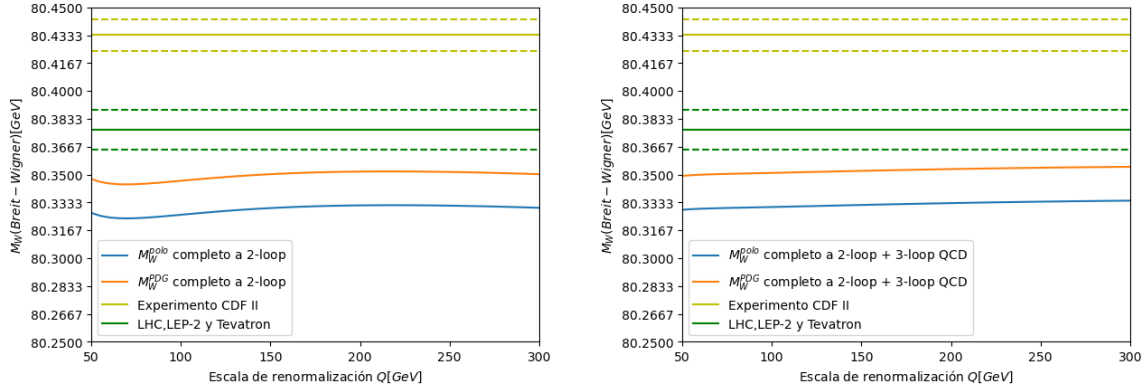


Figura 4.7: Masa física del bosón W con las correcciones radiativas completas a un-loop como función de la escala de renormalización Q . Mostramos el valor experimental dado por CDF II en 2022 [45] y por la combinación de los resultados obtenidos de los experimentos LHC, LEP-2 y Tevatron publicados por Particle Data Group [57].

experimental dado por CDF II en 2022 y por la combinación de los resultados obtenidos de los experimentos LHC, LEP-2 y Tevatron publicados por Particle Data Group en 2023. En la figura (4.7) se muestran las correcciones a un-loop tanto para la masa polo como para la masa PDG, es posible observar que existe coincidencia entre



(a) Correcciones radiativas a 2-loops completas como función de Q . (b) Correcciones radiativas a 2-loops completas más 3-loops en QCD como función de Q .

Figura 4.8: Masa física del W incluyendo correcciones cuánticas a distintos ordenes perturbativos.

las predicciones teóricas y los resultados experimentales combinados de LHC, LEP-2 y Tevatron para correcciones al orden de un-loop cuando la escala de renormalización (Q) se encuentra entre 100 y 200 GeV aproximadamente, sin embargo no existe coincidencia fuera de este rango de energías. Note que la predicción a un-loop depende significativamente de la escala de renormalización haciendo que la incertidumbre teórica sea mayor que la incertidumbre experimental y por lo tanto, el acuerdo mostrado en la figura (4.7) no es confiable. En el caso de los resultados obtenidos por CDF-II el valor central de la masa del W se aleja en 33 MeV del valor máximo obtenido en la predicción teórica a un-loop. Si se incluyen todas las contribuciones a un-loop mostradas en la figura (4.3), la corrección a un-loop toma un valor de 0.498 GeV, equivalente a un 0.62 % respecto del valor de la masa a nivel-árbol.

Por otra parte, como se observa en la figura (4.8), incluyendo además correcciones a 2-loops el valor se reduce a 0.492 GeV o 0.61 % del valor a nivel árbol. Adicionalmente incluyendo las correcciones a 3-loops que provienen de la QCD el valor puede reducirse aún más de manera que $\Delta M_W = 0.459$ GeV, equivalente a un 0.57 % del valor clásico. Es de interés notar que aunque la dependencia de M_W de la escala de renormalización es considerable cuando la corrección es a un-loop, esta disminuye significativamente en la medida que aumenta el orden perturbativo de las correcciones, como se observa en las gráficas (4.8a) y (4.8b). Este comportamiento se espera debido a que los observables físicos como la masa del W no deben depender de

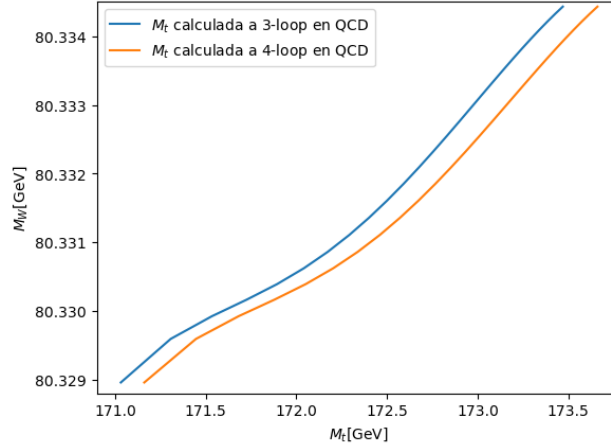


Figura 4.9: Masa física del bosón W con correcciones radiativas a 2-loops completas + 3-loops en QCD como función de la masa del quark top calculada mediante el software SMDR. El valor publicado por el Particles Data Group para la masa del top es $M_t = 172.89 \pm 0.30$ GeV [57].

escalas no físicas como Q , por lo que si truncáramos la serie en 3-loops la dependencia en la escala, aunque se vuelve muy pequeña, se mantiene.

Los datos graficados en la figura (4.9) fueron obtenidos utilizando los ejecutables `fig_MW_vs_Q` y `fig_Mt_vs_Q` los cuales generan la masas físicas del bosón W y del quark top como función de la escala de renormalización Q . Para la masa del bosón W las correcciones radiativas son del orden de 2-loops completos más 3-loops en QCD, la masa del quark top se calculó al orden de 3 y 4 loops respectivamente, es decir cada una de estas masas es calculada de manera independiente y posteriormente los datos de la masa del W se graficaron en función de la masa del top, esta curva es de interés porque se sabe que existe una dependencia entre la masa del bosón W y las medidas de la masa del quark top ya que en casi todos los casos, el quark top se descompone en un bosón W más un quark bottom. Pero también es posible que las colisiones en el LHC produzcan un quark top junto con un bosón W, mediante proceso denominado canal t-W [45]. Además el quark top es uno de los parámetros del SM que posee mayor incertidumbre experimental, la curva muestra la existencia de una proporcionalidad entre las masas de estos dos observables aunque para el valor aceptado de la masa del top $M_t = 172.89 \pm 0.30$ GeV el valor de M_W está por debajo de los valores publicados tanto por CDF II como por LHC, LEP-2 y Thevatron. Por otra parte, el conjunto completo de datos publicado por la colaboración CDF en abril de 2022 tiene una incertidumbre muy reducida con un valor de 80433.5 ± 9.4 MeV.

Este nuevo resultado de CDF reemplaza a los resultados anteriores y es de mayor precisión que el resultado del LHC. Sin embargo, las dos determinaciones difieren significativamente, tanto los cálculos realizados mediante el uso del Software SMDR como los resultados de los otros experimentos realizados en LEP-2 y Tevatron, lo cual ha sido interpretado como una señal de la existencia de nueva física más allá del SM. De hecho, otros experimentos han demostrado recientemente que las mediciones de alta precisión de los observables en el sector EW del Modelo Estándar están alejándose de las expectativas teóricas, en el 2022, la colaboración Fermilab MUON g-2 publicó sus resultados sobre el momento magnético anómalo del muón, mostrando una discrepancia entre el valor experimental y las predicciones de SM correspondientes a un 4.2σ de diferencia [4]. Por lo anterior, es necesario continuar realizando cálculos teóricos de mayor precisión que nos permitan comparar los resultados experimentales y teóricos.

5. Conclusiones

Se estudió la QFT para realizar la descripción del mundo subatómico y, conceptos físicos para la construcción del Modelo Estándar de la física de partículas con la finalidad de estudiar las correcciones cuánticas a la masa del bosón W al orden de un-loop, también conocidas como auto-energías del bosón W . Primero, el cálculo se realizó empleando la herramienta computacional **Wolfram Mathematica** que integra los programas **FeynArts** y **FeynCalc**. Las reglas de Feynman necesarias para el cálculo se derivaron del Lagrangiano de interacción de la teoría EW. Así, logramos el objetivo principal, obtener una expresión analítica para el propagador del bosón W mediado por un bosón de Higgs, la cual permitió realizar una estimación numérica del valor de la corrección cuántica a la masa de dicho bosón en el modelo electrodébil. En particular se observó que la corrección tiene una dependencia logarítmica en la escala de renormalización haciendo variar su valor numérico entre -0.15 y 0.20 GeV alrededor de la escala EW. Los resultados obtenidos mediante el cálculo simbólico fueron comparados con los resultados experimentales de los laboratorios CDF II y ATLAS, junto con los resultados teóricos producidos por el software SMDR. Se estudió la dependencia en la escala de renormalización (Q) y también en la masa del quark top de los diferentes ordenes perturbativos, incluyendo correcciones hasta el orden de 3-loops. Los resultados obtenidos muestran la existencia de discrepancias significativas entre los valores experimentales más recientes y las predicciones obtenidas computacionalmente. Al orden de un-loop, la corrección aportada por el calculo del diagrama mediado por un bosón de Higgs, así como la corrección a un-loop completa, no es suficiente para acercarnos al resultado experimental, pues la dependencia en la escala de renormalización, y por lo tanto la incertidumbre teórica, es grande haciendo que la predicción no sea confiable. Como consecuencia, es necesario realizar cálculos a mayores ordenes perturbativos que permitan reducir la dependencia en la escala para tener incertidumbres comparables con la precisión de los experimentos en los aceleradores de partículas. Sin embargo, la corrección hasta el orden perturbativo mas preciso que existe actualmente, tres-loops, modifica el valor clásico de la masa del W en alrededor de un 1%, haciendo imposible llegar al valor experimental obtenido en CDF-II incluyendo unicamente las correcciones dentro del SM. Finalmente, es posible que los resultados publicados por CDF II en 2022, los

cuales en principio parecían indicar la existencia de física más allá de Modelo Estándar, sean consecuencia de un error estadístico y deban tratarse con más cautela debido a que los demás resultados experimentales, además del resultado más reciente publicado por ATLAS en 2023, están en gran acuerdo con las predicciones teóricas del SM.

Referencias

- [1] J. de Blas, M. Cepeda, J. D’Hondt, R. Ellis, C. Grojean, B. Heinemann, F. Maltoni, A. Nisati, E. Petit, R. Rattazzi, and W. Verkerke, “Higgs boson studies at future particle colliders,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2020, jan 2020.
- [2] A. Freitas, “Three-loop vacuum integrals with arbitrary masses,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2016, nov 2016.
- [3] S. Bauberger, A. Freitas, and D. Wiegand, “TVID 2: evaluation of planar-type three-loop self-energy integrals with arbitrary masses,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2020, jan 2020.
- [4] E. A. Reyes. and A. R. Fazio, “Higgs boson mass corrections at n3lo in the top-yukawa sector of the standard model,” 2023.
- [5] R. H. Parker, C. Yu, W. Zhong, B. Estey, and H. Müller, “Measurement of the fine-structure constant as a test of the standard model,” *Science*, vol. 360, pp. 191–195, apr 2018.
- [6] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, and T. Blum, “The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model,” *Physics Reports*, vol. 887, pp. 1–166, dec 2020.
- [7] O. Gituliar and S.-O. Moch, “\textsf{fuchsia} and master integrals for energy–energy correlations at NLO in QCD,” *Acta Physica Polonica B*, vol. 48, no. 12, p. 2355, 2017.
- [8] T. Hahn, “Generating feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3,” *Computer Physics Communications*, vol. 140, pp. 418–431, nov 2001.
- [9] V. Shtabovenko, R. Mertig, and F. Orellana, “FeynCalc 9.3: New features and improvements,” *Computer Physics Communications*, vol. 256, p. 107478, nov 2020.
- [10] G. Mandl, F. Shaw, *Quantum Field Theory*. John Wiley & sons, 1984.
- [11] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw Hill, 2000.

- [12] M. Peskin, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [13] D. Restrepo, *Detailed lecture notes in Quantum Field Theory*. Universidad de Antioquia, 2012.
- [14] V. Radovanovic, *Problem Book in Quantum Field Theory*. Springer, 2008.
- [15] S. Bilenky, “Glashow-weinberg-salam theory of electroweak interactions and the neutral currents,” *Physics Reports*, pp. 73–157, 1982.
- [16] J. Iliopoulos, “Introduction to the standard model of electro-weak interactions,” *School of High-Energy Physics*, pp. 1–29, 2012.
- [17] D. Poenaru, “Alexandru proca (1897-1955) and his equation of the massive vector boson field,” *Europhysics News*, pp. 24–26, 2006.
- [18] I. I. Bigi and A. I. Sanda, *CP Violation*. Cambridge University Press, 2 ed., 2009.
- [19] S. Volkov, “Calculating the 5-loop qed contribution to the electron anomalous magnetic moment: graphs without lepton loops,” *Physical Review D*, pp. 1–29, 2019.
- [20] H. Yukawa, “On the interaction of elementary particles. i,” *Nippon Sugaku-Buturigakkwai Kizi*, pp. 48–57, 1934.
- [21] S. Weinberg, “A model of leptons,” *Phys. Rev. Lett.*, pp. 1264–1266, Nov 1967.
- [22] A. Salam and J. C. Ward, “Gauge theory of elementary interactions,” *Phys. Rev.*, vol. 136, pp. B763–B768, Nov 1964.
- [23] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, “Weak interactions with lepton-hadron symmetry,” *Phys. Rev. D*, vol. 2, pp. 1285–1292, Oct 1970.
- [24] A. Halzen, F. Martin, *QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. JOHN WILEY & SONS, 1984.
- [25] G. B. Lubkin, “Friedman, kendall and taylor win nobel prize for first quark evidence,” *Physics Today*, vol. 44, no. 1, pp. 17–20, 1991.
- [26] E. Noether and M. Tavel, “Invariant variation problems,” *Transport Theory and Statistical Physics*, vol. 1, pp. 186–207, 2005.

- [27] S. Van Dam, “Spontaneous symmetry breaking in the higgs mechanism,” *philsci-archive*, 2011.
- [28] C.-N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance,” *Physical review*, vol. 96, no. 1, p. 191, 1954.
- [29] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken symmetries,” *Phys. Rev.*, vol. 127, pp. 965–970, Aug 1962.
- [30] J. Fröhlich, G. Morchio, and F. Strocchi, “Higgs phenomenon without symmetry breaking order parameter,” *Nuclear Physics B*, vol. 190, no. 3, pp. 553–582, 1981.
- [31] U. Amaldi, W. de Boer, and H. Fürstenau, “Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at lep,” *Physics Letters B*, vol. 260, no. 3, pp. 447–455, 1991.
- [32] S. F. Novaes, *Standard Model: An Introduction*. Universidade Estadual Paulista, 2000.
- [33] J. Erler and P. Langacker, “Electroweak model and constraints on new physics,” 2004.
- [34] S. P. Martin, “Pole mass of the w boson at two-loop order in the pure $\overline{ms}$ scheme,” *Physical Review D*, vol. 91, jun 2015.
- [35] C. Gnendiger, A. Signer, D. Stöckinger, A. Broggio, A. L. Cherchiglia, F. Driencourt-Mangin, A. R. Fazio, B. Hiller, P. Mastrolia, T. Peraro, R. Pittau, G. M. Pruna, G. Rodrigo, M. Sampaio, G. Sborlini, W. J. T. Bobadilla, F. Tramontano, Y. Ulrich, and A. Visconti, “To $\overline{d}$, or not to $\overline{d}$: recent developments and comparisons of regularization schemes,” *The European Physical Journal C*, vol. 77, jul 2017.
- [36] Y. Nagashima, *Appendix B: Feynman Rules for the Electroweak Theory*, pp. 507–511. John Wiley & Sons, Ltd, 2013.
- [37] D. Kaiser, “Physics and feynman’s diagrams: In the hands of a postwar generation, a tool intended to lead quantum electrodynamics out of a decades-long morass helped transform physics,” *American Scientist*, vol. 93, no. 2, pp. 156–165, 2005.

- [38] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. CRC Press, 2019.
- [39] E. Fermi, “Fermi’s theory of beta decay,” *American Journal of Physics*, vol. 36, 1968.
- [40] R. Dominguez, *Emisión de partículas tras la desintegración β^+ en núcleos deficientes en neutrones: ^{17}Ne , ^{32}Ar y ^{33}Ar* . Grin, 2010.
- [41] B. Greiner, W. Müller, *Gauge Theory of Weak Interactions*. Springer, 1986.
- [42] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons, 1987.
- [43] A. Salam, “Weak and Electromagnetic Interactions,” *Conf. Proc. C*, vol. 680519, pp. 367–377, 1968.
- [44] M. Aaboud, “Measurement of the w-boson mass in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ tev with the atlas detector,” *The European Physical Journal C*, feb 2018.
- [45] T. Aaltonen *et al.*, “High-precision measurement of the W boson mass with the CDF II detector,” *Science*, vol. 376, no. 6589, pp. 170–176, 2022.
- [46] C. M. C. Calame, G. Montagna, O. Nicrosini, and M. Treccani, “Electroweak radiative corrections and the w boson mass at hadron colliders,” 2003.
- [47] A. Collaboration *et al.*, “Improved w boson mass measurement using $\sqrt{s} = 7$ tev proton proton collisions with the atlas detector,” *ATLAS CONF 2023 004*, 2023.
- [48] D. Wackeroth and W. Hollik, “Electroweak radiative corrections to resonant charged gauge boson production,” *Phys. Rev. D*, vol. 55, pp. 6788–6818, Jun 1997.
- [49] U. Baur, S. Keller, and D. Wackeroth, “Electroweak radiative corrections to w boson production in hadronic collisions,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 013002, Nov 1998.
- [50] S. Willenbrock and G. Valencia, “On the definition of the Z boson mass,” *Phys. Lett. B*, vol. 259, pp. 373–376, 1991.
- [51] S. Weinberg, *Dreams of a final theory: The scientist’s search for the ultimate laws of nature*. Vintage, 2011.

- [52] A. Sirlin, “ $o(\alpha^2)$ corrections to muon lifetime, m_W , and m_Z in the $SU(2)_L \times U(1)$ theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 29, pp. 89–95, Jan 1984.
- [53] M. Consoli, W. Hollik, and F. Jegerlehner, “The effect of the top quark on the $m_w - m_z$ interdependence and possible decoupling of heavy fermions from low energy physics,” *Physics Letters B*, vol. 227, no. 1, pp. 167–170, 1989.
- [54] A. Djouadi and P. Gambino, “Electroweak gauge bosons selfenergies: Complete QCD corrections,” *Phys. Rev. D*, vol. 49, pp. 3499–3511, 1994. [Erratum: *Phys.Rev.D* 53, 4111 (1996)].
- [55] F. Jegerlehner, M. Kalmykov, and O. Veretin, “vs. pole masses of gauge bosons: electroweak bosonic two-loop corrections,” *Nuclear Physics B*, vol. 641, pp. 285–326, oct 2002.
- [56] S. P. Martin, “Z boson pole mass at two-loop order in the pure $\overline{\text{ms}}$ scheme,” *Physical Review D*, vol. 92, jul 2015.
- [57] R. L. Workman *et al.*, “Review of Particle Physics,” *PTEP*, vol. 2022, p. 083C01, 2022.
- [58] G. Passarino and M. Veltman, “One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the weinberg model,” *Nuclear Physics B*, vol. 160, no. 1, pp. 151–207, 1979.
- [59] D. Bardin and G. Passarino, *The standard model in the making: Precision study of the electroweak interactions*, vol. 104. Oxford University Press, 1999.
- [60] G. Källén, *Radiative corrections in elementary particle physics*. Springer, 1968.
- [61] k. Kumericki, “Feynman diagrams for beginners,” *notes from Adriatic School on Particle Physics and Physics Informatics*, pp. 1–23, 2016.
- [62] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics Revised Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Apéndice A

Notación y convenciones

A.1 Unidades

Como es común para los cálculos asociados a la teoría cuántica de campos en este trabajo se utilizarán las unidades naturales es decir que la constante de Planck reducida ($\hbar$) y la velocidad de la luz (c) toman como valor la unidad.

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{A.1})$$

En consecuencia, el análisis dimensional para la longitud (L), el tiempo (T), la energía (E) y la masa (M) es:

$$[L] = [T] = [E]^{-1} = [M]^{-1}, \quad (\text{A.2})$$

por lo tanto la masa de una partícula (m) será igual a su energía en reposo (mc^2). Además, resultan útiles las siguientes relaciones de conversión[61]:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ kg} &= 5.61 \times 10^{26} \text{ GeV} \\ 1 \text{ m} &= 5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1} \\ 1 \text{ s} &= 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \\ m_e &= 0.511 \text{ MeV} \\ m_p &= 938.3 \text{ MeV} \\ 1 \text{ fm} &= 5.07 \text{ GeV}^{-1}, \quad \text{fm} \equiv \text{Fermi} \\ 1 \text{ barn} &= 100 \text{ fm}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Relatividad y Tensores

Se utilizará la siguiente convención para el tensor métrico o métrica de Minkowski:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Donde los índices griegos (μ, ν) corren desde 0 hasta 3, o se escriben (t, x, y, z) mostrando una componente temporal y tres componentes espaciales. Mientras que los índices latinos i, j y k varían de 1 hasta 3 e indican únicamente las tres coordenadas espaciales. También se utiliza el convenio de suma de Einstein que establece que índices repetidos se suman sobre todos los valores posibles del mismo. Los cuadri-vectores son etiquetados con letras cursivas y los vectores en tres dimensiones tiene la notación clásica con una flecha encima. Por ejemplo, para el cudrivector posición se tiene:

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\vec{x}). \quad (\text{A.5})$$

Debido a la métrica que se está utilizando es claro que la componente temporal covariante y contravariante de x^μ son iguales ($x^0 = x_0 = t$). Así, el producto escalar en el espacio de Minkowski se define de la siguiente forma:

$$p_\nu \cdot x^\nu = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}. \quad (\text{A.6})$$

Luego, el cuadri-momento al cuadrado para una partícula masiva será:

$$\begin{aligned} p^2 &= p^\mu p_\mu \\ &= (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 \\ &= E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Por otra parte, el operador derivada está definido como:

$$\begin{aligned} \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Y finalmente definimos el tensor totalmente antisimétrico $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ siguiendo la convención de Peskin [12] de modo que:

$$\begin{aligned}\epsilon^{0123} &= +1 \\ \epsilon_{0123} &= -1.\end{aligned}\tag{A.9}$$

A.3 Mecánica Cuántica

La energía y el momento lineal siguen las convenciones habituales de la mecánica cuántica por ende se representan como operadores:

$$\begin{aligned}E &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \\ \vec{p} &\rightarrow -i\vec{\nabla}.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Estas ecuaciones se pueden combinar para obtener el operador momento lineal en cuatro dimensiones:

$$p = (E, \vec{p}) \rightarrow p^\mu = i\partial^\mu.\tag{A.11}$$

También es posible definir el Hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico

$$H_{OAC} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2.\tag{A.12}$$

Donde m es la masa de la partícula y ω es la frecuencia angular. Los operadores posición y momento son Hermíticos pero conviene definirlos en términos de dos operadores no Hermíticos a y $a^\dagger$ [62]:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \frac{1}{\omega}(a + a^\dagger), \\ \mathbf{p} &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger).\end{aligned}\tag{A.13}$$

los operadores escalera a y $a^\dagger$ cumplen la relación de conmutación:

$$[a, a^\dagger] = 1,\tag{A.14}$$

lo cual permite simplificar el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H_{OAC} = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.15})$$

El estado base se define como $|0\rangle$, tal que $a|0\rangle = 0$ es un auto-estado de H_{OAC} (estado de mínima energía) con autovalor $\frac{\omega}{2}$. Por lo tanto los conmutadores entre el Hamiltoniano y los operadores escalera son:

$$[H_{OAC}, a^\dagger] = \omega a^\dagger, \quad [H_{OAC}, a] = -\omega a. \quad (\text{A.16})$$

Lo cual implica que los estados $|n\rangle$ del Hamiltoniano son proporcionales al estado base

$$|n\rangle \propto (a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (\text{A.17})$$

Con autovalores:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega. \quad (\text{A.18})$$

En otro orden de ideas, las matrices de Pauli están definidas de la siguiente forma:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

A.4 Transformadas de Fourier y distribuciones

Se hará uso de la función escalón de Heaviside $\theta(x)$ y la función delta de Dirac $\delta(x)$, definidas de la siguiente manera:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad \delta(x) = \frac{d}{dx} \theta(x). \quad (\text{A.20})$$

La función delta en n dimensiones, denotada $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$, es cero en todas partes excepto en $\mathbf{x} = 0$ y satisface:

$$\int d^n x \delta^{(n)}(\mathbf{x}) = 1. \quad (\text{A.21})$$

En las transformadas de Fourier siempre aparecerán factores 2π con la integral de momento. Por ejemplo, en cuatro dimensiones.

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(k). \quad (\text{A.22})$$

También aparecen estos factores en la siguiente identidad de la delta de Dirac:

$$\int d^4x e^{ik \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k). \quad (\text{A.23})$$

A.5 Electrodinámica

La carga eléctrica se etiqueta con la letra e para el electrón, de este modo el potencial de Coulomb Φ y la constante de estructura fina α serán:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, \\ \alpha &= \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0} = \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Además, se usa la forma relativista de las ecuaciones de Maxwell:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\mu. \quad (\text{A.25})$$

Donde el cuadri-potencial, la cuadri-corriente y el tensor electromagnético están definidos respectivamente:

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\Phi, \vec{A}) \\ j^\mu &= (\rho, \vec{j}) \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Apéndice B

Propagador del campo de Klein-Gordon

B.1 Función de Green de la ecuación de Klein-Gordon

Si multiplicamos el operador D'Alambertiano $\left(\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)$ y el parámetro de masa m^2 por el campo $\phi(x)$ e igualamos a un término $J \neq 0$, obtendremos la ecuación de Klein-Gordon no homogénea.

$$(\square + m^2)\phi(x) = -iJ. \quad (\text{B.1})$$

Para resolver esta ecuación es necesario introducir la función de Green $G(x - y)$, la cual remplace al campo $\phi(x)$ en la ecuación (B.1), a su vez el término inhomogéneo J se cambia por una delta de Dirac en cuatro dimensiones que representa una fuente puntual:

$$(\square + m^2)G(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y). \quad (\text{B.2})$$

Ahora multiplicamos la ecuación anterior por el termino no homogéneo e integramos en un cuadri-volumen

$$\begin{aligned} \int (\square + m^2)G(x - y)Jd^4x &= \int -i\delta^{(4)}(x - y)Jd^4x \\ (\square + m^2) \int G(x - y)Jd^4x &= -iJ. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Comparando la ecuación anterior con la ecu.(B.1) tendremos que el campo será:

$$\phi(x) = \int G(x - y)Jd^4x. \quad (\text{B.4})$$

Por otra parte, es necesario considerar la representación de Fourier de la función Green que acabamos de definir:

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) e^{-ip \cdot (x - y)}. \quad (\text{B.5})$$

Donde $g(p)$ es el propagador o función de Green en el espacio de momentos. Análogamente para el caso de la delta de Dirac δ , la representación en modos de Fourier es:

$$\delta^{(4)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (\text{B.6})$$

Evalutando las anteriores expresiones en la ecuación (B.2)

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) e^{-ip \cdot (x-y)} &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \\ \int d^4p g(p) (\square + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} &= -i \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \\ \int d^4p g(p) (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} &= -i \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De lo anterior obtenemos una expresión para el propagador escalar $g(p)$:

$$\begin{aligned} g(p)(-p^2 + m^2) &= -i \\ g(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ya que $p^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2$ es el cuadri-momento, podemos reescribir el propagador como:

$$g(p) = \frac{i}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2}. \quad (\text{B.9})$$

Por lo que la ecuación (B.5) se convierte en la siguiente expresion:

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (\text{B.10})$$

la cual es conocida como función de Green retardada $D_R(x-y)$ y es útil para definir el campo $\phi(x)$ de manera análoga a la ecuación (B.4):

$$\phi(x) = - \int d^4x' D_R(x-y) J(y) + \phi_0; \quad -\infty < t' < t. \quad (\text{B.11})$$

Por otra parte, podemos reescribir la ecu.(B.10) separando la parte espacial y temporal de la integral:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \frac{i}{2\pi} \int \frac{dp^0}{p^{02} - |\vec{p}|^2 - m^2} e^{-ip^0 \cdot (x^0 - y^0)}, \quad (\text{B.12})$$

La integral temporal es divergente, ya que presenta singularidades en los polos $p^0 = \pm E_p$. No obstante, es posible utilizar el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar la integral. El teorema establece que siendo D un dominio simplemente conexo y C un contorno simple cerrado que se halla completamente dentro de D; si una función es analítica sobre y en el intervalo de C, excepto en un número finito de singularidades $z_1, z_2, \dots, z_k$ del interior de C, entonces:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k). \quad (\text{B.13})$$

Donde el residuo de orden n en $z = z_0$ de la función $f(z)$ está definido como:

$$\text{Res}(f(z), z_k) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0) f(z). \quad (\text{B.14})$$

Si reescribimos la integral sobre dp^0 de la ecu.(B.12), en términos de la variable compleja $z = x + iy$ se tiene la siguiente integral, que puede ser representada como la diferencia entre dos integrales de contorno en el plano complejo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2} = \oint_C dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2} - \oint_{\Gamma} dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2}. \quad (\text{B.15})$$

La segunda integral se realiza sobre el contorno superior Γ , que en este caso corresponde a media circunferencia de radio R, la cual está acotada por un valor que podemos encontrar utilizando la desigualdad LM , donde L es la longitud de la curva.

$$\begin{aligned} \left| \oint_C dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2} \right| &\leq LM = \pi R \text{Max} \left| \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2} \right| \\ &\leq \pi R \frac{e^{y(x_0-y_0)}}{R^2 - E_p^2} \leq \frac{1}{R} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Ahora, es posible elegir cuatro tipos de contornos para resolver la integral restante [14]:

i.) En caso de que $(x_0 > y_0)$ para que la exponencial tienda a cero la parte imaginaria de z debe ser negativa ($\text{Im}(z) = y < 0$), entonces los polos se desplazan hacia abajo una distancia infinitesimal ϵ y se cierra el contorno por la parte inferior como se ve en la figura (B.1). Por lo tanto, la integral se convierte en:

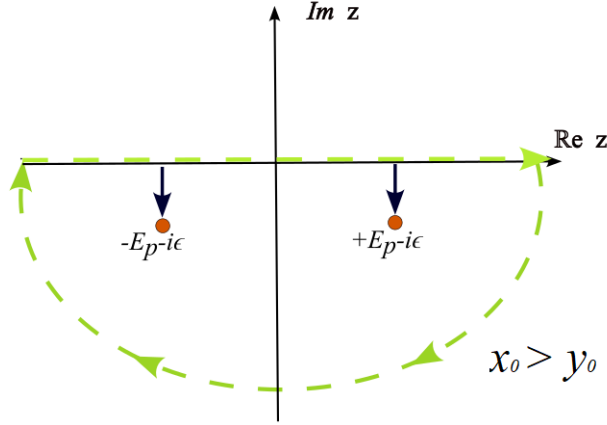


Figura B.1: contorno de integración para las condiciones de la función de Green retardada.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_c dz \frac{e^{-iz(x_0 - y_0)}}{(z + i\epsilon)^2 - E_p^2}. \quad (\text{B.17})$$

Por lo tanto $(z + i\epsilon)^2 - E_p^2 = 0 \rightarrow z = \pm E_p - i\epsilon$, ahora aplicamos el teorema de los residuos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_c dz \frac{e^{-iz(x_0 - y_0)}}{(z + i\epsilon)^2 - E_p^2} = -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) + \text{Res}(f(z), -E_p - i\epsilon)]. \quad (\text{B.18})$$

Debido a que la integral de contorno se realiza en el sentido horario se debe multiplicar por el signo (-). Ahora, utilizando la ecuación (B.14) calculamos el primer residuo explícitamente:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) &= \lim_{z \rightarrow E_p - i\epsilon} [z - (E_p - i\epsilon)] \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{[z - (E_p - i\epsilon)][z - (-E_p - i\epsilon)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow E_p - i\epsilon} \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{[z - (-E_p - i\epsilon)]} \\ &= \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{[(E_p - i\epsilon) - (-E_p - i\epsilon)]} \\ &= \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{2E_p}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

De manera análoga podemos encontrar el residuo $Res(f(z), -E_p - i\epsilon)$

$$Res(f(z), -E_p - i\epsilon) = \frac{e^{i(E_p+i\epsilon)(x^0-y^0)}}{-2E_p}. \quad (\text{B.20})$$

Reemplazando los residuos encontrados en la ecuación (B.18) llegamos a:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_c dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{(z+i\epsilon)^2 - E_p^2} &= -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-i(E_p-i\epsilon)(x^0-y^0)}}{2E_p} - \frac{e^{i(E_p+i\epsilon)(x^0-y^0)}}{2E_p} \right] \\ &= -2\pi i \left[\frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} - \frac{e^{iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Con la finalidad de garantizar que $x_0 > y_0$, es posible multiplicar los residuos por la función escalón unitario θ definida como:

$$\theta(x_0 - y_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 > y_0 \\ 0 & \text{si } x_0 < y_0 \end{cases}. \quad (\text{B.22})$$

Finalmente sustituimos el resultado de la integral (B.21) en la ecuación (B.12) donde estamos integrando sobre p^0

$$\begin{aligned} D_R(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{i}{2\pi} \left[-2\pi i \left(\frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} - \frac{e^{iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} \right) \right] \theta(x_0 - y_0) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)} \right) \theta(x_0 - y_0). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

A partir de lo anterior es posible concluir que la función retardada de Green $D_R(x - y)$ y el conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$ calculado en la ecuación (2.52) son idénticos y representan el propagador escalar asociado a partículas de Spin 0.

ii.) El segundo caso es cuando $y_0 > x_0$, entonces para que la integral converja el contorno de integración debe estar por encima del eje real, así la parte imaginaria de z será positiva. Si bien en la teoría clásica esta prescripción carece de interpretación física, en la QFT la función avanzada de Green sirve para describir antipartículas y se

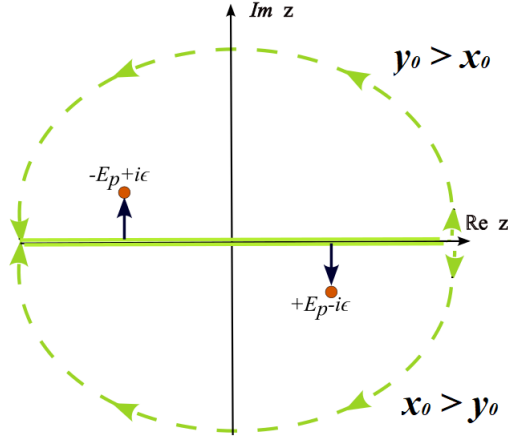


Figura B.2: Contorno de integración para las condiciones del propagador de Feynman.

calcula de manera análoga utilizando el teorema de los residuos:

$$D_A(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-iE_p(x^0 - y^0)} - e^{iE_p(x^0 - y^0)} \right) \theta(y_0 - x_0). \quad (\text{B.24})$$

iii.) La tercera prescripción se conoce como contorno de Feynman y consiste en desplazar una de las singularidades por encima del eje real y la otra por debajo como se ve en la figura (B.2), esto nos permite realizar las integrales de contorno inferior para $(x_0 > y_0)$ y superior para $(x_0 < y_0)$ llegando a:

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \theta(x_0 - y_0) - e^{iE_p(x^0 - y^0)} \theta(y_0 - x_0) \right). \quad (\text{B.25})$$

iv.) Finalmente tenemos la prescripción inversa del contorno de integración de Feynman y es la función de Green de Dyson

$$G_D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \theta(y_0 - x_0) - e^{iE_p(x^0 - y^0)} \theta(x_0 - y_0) \right). \quad (\text{B.26})$$