

**ESTUDIO DEL MODELO FÍSICO DE PROPAGACION DE LA LUZ POLICROMÁTICA EN UNA
CÁMARA MULTIESPECTRAL DE BARRIDO TIPO PUSHBROOM EN EL RANGO VNIR**

YEINNER YULIAN PINTO ACONCHA



PROGRAMA DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

PAMPLONA 2024

**ESTUDIO DEL MODELO FÍSICO DE PROPAGACIÓN DE LUZ POLICROMÁTICA EN UNA
CÁMARA MULTIESPECTRAL DE BARRIDO TIPO PUSHBROOM EN EL RANGO VNIR**

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de FÍSICO

YEINNER YULIAN PINTO ACONCHA

Director: NESTOR ALONSO ARIAS HERNANDEZ

Doctor en ciencias naturales - Física



Grupo de investigación Óptica Moderna

PROGRAMA DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

PAMPLONA 2024

Dedicatoria

A mi familia, que ha sido mi pilar para seguir siempre adelante y jamás rendirme; a quienes han confiado en mi capacidad y criterio, y cuyo apoyo constante ha hecho posible la realización de este trabajo, GRACIAS.

Agradecimientos

Expreso mis más sinceros agradecimientos a mi tutor, el doctor Néstor Alonso Arias Hernández, por su gran paciencia y guía acertada. También a todos los docentes que me acompañaron a lo largo de estos años de aprendizaje en la Universidad de Pamplona. A mis compañeros, con quienes recorrí este hermoso camino, y a mis amigos, que son como hermanos para mí: Jhonny, Luis y Osmar, con quienes compartí esta aventura desde el primer momento. Juntos aprendimos, nos equivocamos y disfrutamos en cada paso del camino.

Agradecemos al Ministerio de Ciencias, Tecnología e Innovación (MinCiencias) por el financiamiento del proyecto "Diseño e implementación de un sistema óptico-computacional tipo pushbroom para la clasificación de frutos cítricos de la agroindustria santandereana" (código 82271), seleccionado en la Convocatoria 890 para el fortalecimiento de la Ciencia, la Tecnología y la Innovación (CTeI) en Instituciones de Educación Superior (IES) de 2020, que sirvió como soporte para el desarrollo del presente trabajo.

Tabla de figuras

Figura 1 Principio de funcionamiento de un sensor tipo cepillo [31]	5
Figura 2 Fenómeno de difracción a través de una abertura [44]	9
Figura 3 El campo generado en M es el mismo en ambas situaciones (Principio de Huygens-Fresnel). Tomada de [48]	11
Figura 4 La iluminancia en el punto M de un detector. Tomada de [48]	12
Figura 5 Onda plana propagándose en la dirección del vector $\mathbf{k}$. La amplitud compleja en el punto ρ es proporcional a $\exp - ik\rho$, y es constante sobre un plano de onda que es ortogonal a $\mathbf{k}$. Tomada de [48]	13
Figura 6 Coordenadas cartesianas sobre un fragmento o porción de esfera. Tomada de [52]	18
Figura 7 Esferas A y B tangentes. Paso del campo $\mathcal{A}$ al $\mathcal{B}$ por una transparencia.	20
Figura 8 Difracción de Fraunhofer. Se transfiere de la amplitud del campo en $\mathcal{A}$ a la amplitud del campo en $\mathcal{F}$. Tomado de [48]	21
Figura 9. Difracción de Fraunhofer, transformada óptica de Fourier. Tomada de [48]	24
Figura 10 Dioptrio esférico. Tomada de [52]	26
Figura 11 Imagen coherente a través de un sistema de centros arbitrario S. Tomada de [52]	27
Figura 12 La lente L, representada por sus puntos principales H y H' y su foco objeto F, permite tener la misma amplitud del campo sobre el plano P que sobre la esfera A.	28
Figura 13 La amplitud compleja del campo sobre el plano P es la transformada de Fourier óptica de la amplitud del campo sobre T.	29
Figura 14 La transformada óptica de Fourier de la amplitud del campo en el plano A se haya en la esfera F'. Si A es el vértice de A, la esfera F' está centrada en A', la imagen paraxial de A. Tomada de [48]	30
Figura 15 La amplitud del campo en el plano $\mathcal{F}'$ es la transformada de Fourier de la amplitud del campo en el plano $\mathcal{A}$.	31
Figura 16 Ilustración esquemática de la iluminación del campo difractado por una rendija ilimitada de anchura ℓ , observada en el plano focal imagen de una lente. Tomado de [52]	32
Figura 17 Rejilla de difracción de transmisión.	33
Figura 18 Diagrama de una rejilla de difracción reflectante. Tomada de [52]	37
Figura 19 Definición del ángulo de incidencia θ_0 y del ángulo de difracción θ .	39
Figura 20 Influencia de la difracción, todo ocurre como si la rejilla, de anchura L, tuviese una anchura $L' = L \cos \theta$. Tomada de [48]	41
Figura 21 Arquitectura tradicional de adquisición de imágenes espectrales. (a) sensor Whiskbroom, (b) sensor pushbroom, (c) filtrado espectral.	43
Figura 22 Esquema lineal cámara pushbroom	44

Figura 23 Componentes ópticas de la cámara tipo pushbroom realizadas en SOLIDWORKS.

	45
Figura 24 Modelo cámara pushbroom dividido en secciones para su análisis	46
Figura 25 Montaje plano a plano primera sección de la cámara pushbroom	47
Figura 26 Campo incidente a la configuración de la cámara, plano $\mathcal{A}$	49
Figura 27 Patrón de la intensidad observada en el plano $\mathcal{B}$	49
Figura 28 Perfil de la intensidad del campo en el plano $\mathcal{B}$.	50
Figura 29 Rendija de anchura L y altura H	51
Figura 30 Esquema segunda sección de cámara pushbroom	52
Figura 31 Recorrido del haz desde que incide hasta el plano $\mathcal{C}$.	53
Figura 32 Irradiancia del campo incidente en la rendija, plano $\mathcal{B}$.	55
Figura 33 Intensidad que sale de la rendija de medidas $L \times H$. Plano $\mathcal{B}'$	55
Figura 34 Irradiancia del patrón de difracción de la rendija. Plano $\mathcal{C}$	56
Figura 35 Perfil de la intensidad en el plano $\mathcal{C}$.	56
Figura 36 Esquema tercera sección de la cámara pushbroom	59
Figura 37 Campo que incide en la rejilla.	62
Figura 38 Irradiancia del campo justo después de la rejilla.	63
Figura 39 Irradiancia del patrón de difracción de la rejilla	64
Figura 40 Perfil de la irradiancia normalizada	64
Figura 41 Perfiles de irradiancia de diferentes longitudes de onda.	65
Figura 42 Perfil de una placa de vidrio.	66
Figura 43 Campo incidente a la rejilla	70
Figura 44 Irradiancia justo después de la rejilla.	70
Figura 45 Irradiancia ampliada justo después de la rejilla.	71
Figura 46 Irradiancia del campo propagado	71
Figura 47 Perfil de irradiancia normalizado	72
Figura 48 Perfiles de diferentes longitudes de ondas	73

Tabla de contenido

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
2.	ESTADO DEL ARTE	3
3.	MARCO TEÓRICO.....	9
3.1.	Principio de Huygens-Fresnel.....	9
3.1.1.	Difracción-Propagación.....	9
3.1.2.	Formulación intuitiva del principio de Huygens-Fresnel.....	10
3.1.3.	Elementos de una teoría escalar	11
3.2.	Frecuencia espacial y espectro angular	12
3.2.1.	Frecuencia espacial.....	12
3.2.2.	Frecuencia espacial y onda plana	13
3.2.3.	Frecuencia angular.....	14
3.2.4.	Espectro angular y difracción	15
3.2.5.	Propagación del espectro angular	15
3.2.6.	Difracción vista como un filtro lineal	16
3.3.	Difracción Metaxial.....	17
3.3.1.	Coordenadas en un emisor o receptor esférico.....	17
3.3.2.	Aproximación metaxial	19
3.3.3.	Transparencia de curvatura	19
3.3.4.	Difracción de Fraunhofer	21
3.4.	Imagen coherente.....	25
3.4.1.	Dioptrio	25
3.4.2.	Formula de conjugación.....	25
3.4.3.	Sistemas centrados	27
3.5.	Patrones de difracción	28
3.5.1.	Modulación espacial de la luz	28
3.5.2.	Configuraciones practicas	29
3.5.3.	Difracción a través de una abertura	31
3.5.4.	Rejillas de difracción	33
3.6.	Espectrometría instrumental	36
3.6.1.	Rendija de difracción	37

3.6.2.	Resolución intrínseca	40
4.	SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES ESPECTRALES	43
4.1.	Sistemas de adquisición de barrido pushbroom	44
4.2.	Esquema de la cámara tipo pushbroom	44
4.3.	Esquema tridimensional de la cámara tipo pushbroom	44
5.	CALCULO TEÓRICO DEL CAMPO DE DIFRACCIÓN PRODUCIDO POR UNA CÁMARA TIPO PUSHBROOM	46
5.1.	Primera Sección	46
5.2.	Segunda Sección	51
5.3.	Tercera Sección.....	58
5.3.1.	Rejilla de fase de espesor sinusoidal	58
5.3.2.	Red de fase de espesor de tipo Echelette.....	66
5.4.	Resolución Sinusoidal.....	73
5.4.1.	Resolución espectral	74
5.4.2.	Resolución espacial.....	78
5.5.	Resolución Echelette.....	78
5.5.1.	Resolución espectral	79
5.5.2.	Resolución Espacial	81
6.	CONCLUSIONES	84
7.	REFERENCIAS.....	87

1. INTRODUCCIÓN

Desde los primeros estudios sobre la espectroscopía óptica moderna, iniciados con los fenómenos de colores descritos por Isaac Newton [1], hasta la actualidad, los espectrómetros ópticos han evolucionado como herramientas fundamentales para el análisis de las propiedades físicas y químicas de la materia. A lo largo de los siglos, la espectroscopía óptica ha demostrado ser una disciplina transversal con un impacto significativo en diversas áreas del conocimiento y la tecnología. En 1814 Joseph von Fraunhofer, utilizando un espectroscopio, descubrió las líneas oscuras en el espectro solar, conocidas hoy como líneas de Fraunhofer [2]. El desarrollo de la espectroscopía de absorción atómica [3], la espectroscopía de resonancia magnética nuclear (RMN) [4], y la espectroscopía de infrarrojos [5], ha permitido a los científicos analizar la composición y estructura de sustancias con una precisión sin precedentes.

En el ámbito de la química, la espectroscopía se utiliza para identificar y analizar la composición molecular de sustancias mediante la interpretación de sus características espectrales únicas. En medicina, este enfoque ha revolucionado la detección temprana de enfermedades como el cáncer, permitiendo un diagnóstico más preciso a través del análisis espectral de tejidos biológicos [6]. En disciplinas como la geología y la meteorología, las cámaras hiperspectrales han permitido estudiar con detalle la superficie terrestre y la atmósfera, mejorando la precisión de los modelos predictivos y los estudios medioambientales. En campos como la seguridad y el control de calidad es utilizada para la identificación de sustancias ilegales o peligrosas [7]. Además, en la industria y materiales la espectroscopía de fotoelectrones analiza la composición y estado de oxidación de superficies [8].

En la actualidad, vehículos terrestres o aéreos son comúnmente utilizados para la adquisición de imágenes en el rango visible e infrarrojo cercano (VNIR) mediante técnicas de espectroscopía de precisión, utilizando cámaras hiperspectrales que se les acoplan [9]

[10], para así poder implementar muestreos de tipo barrido. Otro enfoque es utilizar plataformas móviles y una cámara fija, donde son muy empleadas las cámaras hiperespectrales de barrido tipo pushbroom las cuales son bastante populares tanto comercial [11] como científicamente [12], debido a su diseño óptico compacto que no requiere el uso de partes móviles.

Este trabajo se centra en el estudio del modelo físico de propagación de la luz en cámaras hiperespectrales de barrido tipo *pushbroom*. La investigación busca avanzar en la capacidad de extraer información espectral precisa de muestras de interés, enfrentando los desafíos de mejorar la resolución espacial y la precisión espectral. La integración de modelos físicos avanzados permite optimizar estos sistemas, ampliando su aplicabilidad en áreas como la industria, la medicina y la investigación científica.

Para alcanzar estos objetivos, el documento se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se ofrece una revisión histórica del desarrollo y uso de cámaras multispectrales en distintos campos, destacando su evolución tecnológica y sus aplicaciones más relevantes. A continuación, se profundiza en los conceptos teóricos fundamentales, como la difracción de la luz, la óptica paraxial y metaxial, y los principios básicos de la espectroscopía, esenciales para comprender el funcionamiento de las cámaras hiperespectrales.

Posteriormente, se detalla el diseño de una cámara hiperespectral tipo pushbroom, abordando tanto su configuración óptica como las ventajas de su estructura compacta. Se realiza un análisis teórico del campo de difracción producido por esta cámara, lo que permite evaluar su capacidad para capturar información espectral con precisión. También se dedica un apartado al estudio de la resolución del dispositivo, considerando factores que afectan su rendimiento en escenarios prácticos.

Finalmente, se presentan las conclusiones derivadas del trabajo, donde se sintetizan los principales hallazgos y se destacan las posibles aplicaciones futuras de las cámaras hiperespectrales, junto con una lista de referencias bibliográficas que sustenta la investigación realizada.

2. ESTADO DEL ARTE

Este capítulo presenta un análisis del estado del arte dividido en dos enfoques principales. El primero se centra en la matemática necesaria para comprender y modelar las partes que conforman un espectrómetro, proporcionando las bases teóricas fundamentales para su estudio. El segundo aborda el desarrollo y las aplicaciones de las cámaras espectrales, con especial énfasis en las cámaras tipo *pushbroom*, destacando su diseño, funcionamiento y ventajas frente a otras tecnologías.

Matemáticas requeridas

En la actualidad la óptica de Fourier es una rama clásica de la óptica moderna. Esta surgió en los años 50, y aunque recibe el nombre en honor a Joseph Fourier, este no trabajó en el campo de la óptica que lleva su nombre. Si se quiere dar homenaje a un célebre, sería a Augustin Fresnel [13]. Las propiedades de la luz parcialmente coherente han sido estudiadas desde finales del siglo XIX y a lo largo de los primeros años del siglo XX (en los trabajos de Abbe, que contienen indudablemente elementos fundamentales para la actual “óptica coherente” [14] [15];

El láser [16], dio un empujón inmenso a la óptica coherente ([17] [18] [19]) en sus aplicaciones (ya sea en microscopia [20], óptica astronómica, formación de imagen [21], o holografía). Sin embargo, mientras la óptica utilice objetos incoherentes, la curvatura de estos últimos no influye en la formación de una imagen, y la óptica paraxial proporciona un marco aceptable para la formación de una imagen geométrica (antes de tener en cuenta los fenómenos de difracción debido a la apertura limitada de los instrumentos ópticos).

La literatura clásica de la óptica de Fourier [22] [23] [24] carece de enfoques en su aspecto metaxial. Pero esto cambió en 1960, ya no que había que preocuparse solamente de la amplitud del campo sino también de su fase (estrictamente, la amplitud contiene la fase).

En 1975-1978 G. Bonnet inventa la difracción metaxial [25] [26] [27] [28] [29] [30]. La difracción metaxial expresa la transferencia del campo electromagnético y su coherencia en

un medio homogéneo o a lo largo de un sistema óptico, pero a diferencia de la teoría clásica (óptica paraxial [23]) que se limita a objetos planos, la óptica metaxial contempla los emisores y receptores esféricos. La óptica metaxial se acerca a los emisores y receptores por sus esferas oscilantes en sus vértices, luego, supone una aproximación de segundo orden a las dimensiones transversales de los objetos y a los ángulos, de allí el nombre de metaxial.

Cámaras tipo pushbroom

Las cámaras espectrales tipo pushbroom representan un avance significativo en la tecnología de teledetección, permitiendo la adquisición de información espectral detallada y precisa de la superficie terrestre. Estas cámaras se utilizan en una variedad de aplicaciones, como agricultura de precisión, monitoreo ambiental, cartografía y estudios geológicos.

Principio de funcionamiento: Las cámaras pushbroom adquieren datos espectrales y espaciales a medida que la plataforma que las porta se desplaza. En lugar de capturar imágenes en instantáneas, estas cámaras emplean una línea estrecha de sensores para recopilar datos en una dirección continua, generando imágenes de alta resolución y espectrales. Esto permite capturar información detallada sobre diferentes longitudes de onda de luz.

Las cámaras espectrales tipo pushbroom se aplican en diversos campos. En agricultura de precisión, se utilizan para evaluar la salud de los cultivos, monitorizar el estrés hídrico y calcular la biomasa.

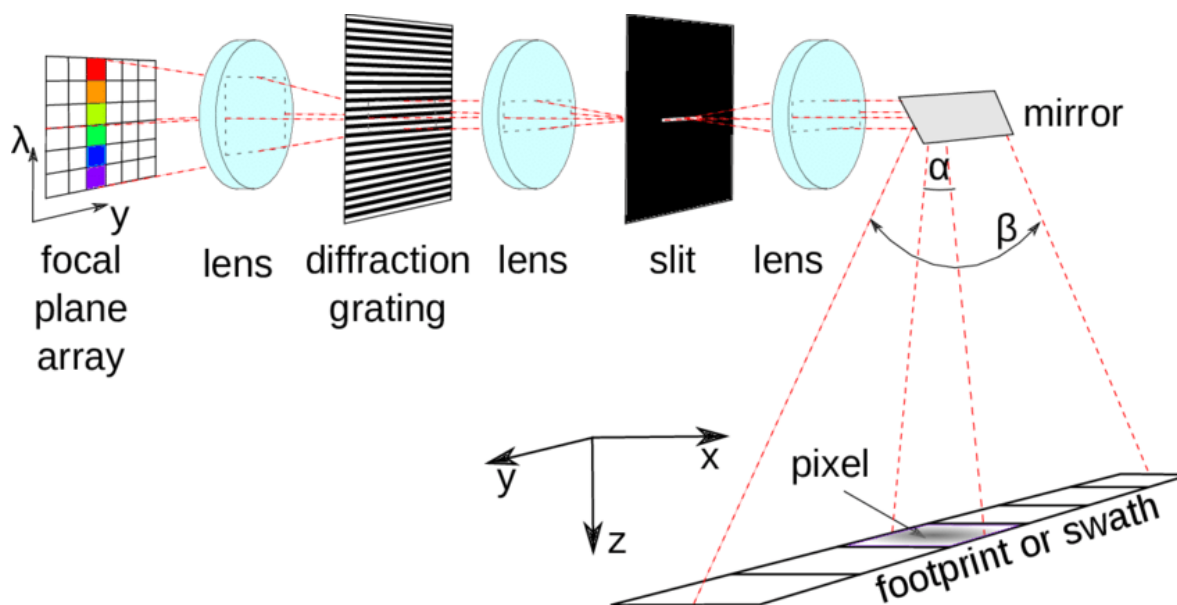


Figura 1 Principio de funcionamiento de un sensor tipo cepillo [31]

A continuación, se muestra una corta lista de estudios donde se han utilizado cámaras de barrido para la agricultura que ayudara a entender el entorno de este tipo de tecnología en el campo:

Titulo	Resumen	Referencia
Processing and Assessment of Spectrometric, Stereoscopic Imagery Collected Using a Lightweight UAV Spectral Camera for Precision Agriculture	La tecnología de imágenes con UAVs ligeros avanza rápidamente en teledetección. Una cámara FPI de menos de 700 g permite capturar imágenes espectrales con superposición estereoscópica. Se enfoca en medir y monitorear el medio ambiente, especialmente en agricultura de precisión, con resultados prometedores en la estimación de biomasa a pesar de condiciones climáticas desafiantes. La tecnología FPI tiene un gran potencial en este campo y señala áreas de investigación futura.	[32]
Review on Application of	En la agricultura de precisión, los UAV se utilizan para rociar pesticidas y evitar problemas de salud en	[33]

Drone Systems in Precision Agriculture	humanos. Esto es especialmente relevante en países en desarrollo como India, donde las enfermedades transmitidas por plagas causan pérdidas significativas en la agricultura.	
An Agricultural Perspective on Flying Sensors: State of the Art, Challenges, and Future Directions	Los sistemas aéreos no tripulados (UAS) con sensores adecuados son herramientas inteligentes que permiten a los agricultores monitorear el crecimiento de cultivos en tiempo real. Esto ofrece un gran potencial para colaboración entre diversas partes interesadas en la agricultura de precisión	[34]
Perspectives for Remote Sensing with Unmanned Aerial Vehicles in Precision Agriculture	La teledetección con UAVs es revolucionaria en la agricultura de precisión. Proporciona alta resolución en espectro, espacio y tiempo, y datos detallados sobre vegetación. En este artículo, se revisa su aplicación en sequías, detección de malezas y patógenos, evaluación de nutrientes y predicción de rendimiento. Para su implementación, se sugiere combinar datos espectrales con térmicos, usar modelos de crecimiento robustos y fusionar información de UAV con otros datos espaciales.	[35]
Evaluating the performance of xanthophyll, chlorophyll and structure-sensitive spectral	Este estudio evaluó varios índices espectrales para detectar el estrés hídrico en diferentes especies de árboles frutales mediante imágenes aéreas no tripuladas. Se utilizaron medidas de campo y se encontró que algunos índices, como PRI (570–515) y NDVI, se correlacionaron bien con el estado hídrico de los cultivos. Esto sugiere que los índices	[36]

indices to detect water stress in five fruit tree species Predicting cover crop biomass by lightweight UAS-based RGB and NIR photography: an applied photogrammetric approach	espectrales pueden usarse para monitorear el agua en una variedad de especies de cultivos.	
Camera Array for Multi-Spectral Imaging	Se presenta una matriz de cámaras para imágenes multi-espectrales con aplicaciones en biometría, agricultura y medicina. Esta solución captura imágenes desde múltiples puntos de vista, mejora la calidad en comparación con sistemas actuales y permite la flexibilidad en el intercambio de filtros. También genera información de profundidad para aplicaciones en imágenes 3D. Puede utilizarse en dispositivos móviles o drones a un costo razonable.	[37]
Chapter 3.3 - Hyperspectral imaging in crop fields: precision agriculture	La agricultura de precisión es esencial en la revolución agrícola actual. Este capítulo aborda el uso de imágenes hiperespectrales y multiespectrales para temas como detección de contaminantes, control del agua y salud de cultivos. Se discuten ventajas, desafíos y métodos de adquisición de imágenes.	[38]
State-of-the-art in UAV remote	Los UAV se usan cada vez más para la teledetección ambiental. La calidad de los datos espectrales es	[39]

sensing survey - First insights into applications of UAV sensing systems	crucial, pero su adquisición es compleja. Se necesitan estándares y protocolos para asegurar la comparabilidad. La acción COST ESSEM OPTIMISE organizó un taller y una encuesta para abordar estos desafíos y mejorar las prácticas en la obtención de datos espectrales con UAVs.	
---	--	--

3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta un resumen de la teoría de la óptica metaxial, desarrollada por Bonnet, como base para comprender el funcionamiento teórico de una cámara hiperespectral tipo *pushbroom*. Esta teoría, ampliamente estudiada y detallada en las referencias [31] y [32], proporciona los fundamentos necesarios para analizar el comportamiento óptico y la propagación de la luz en este tipo de dispositivos.

3.1. Principio de Huygens-Fresnel

El principio de Huygens-Fresnel es la base de la teoría de la difracción de las ondas electromagnéticas. Es un resultado directo de las ecuaciones de Maxwell y se puede expresar de manera estrictamente matemática [40] [41] [23] [42] [43].

3.1.1. Difracción-Propagación

Una fuente de luz casi puntual, casi monocromática, ilumina una pantalla con una abertura (Figura 2). La segunda pantalla (blanca) muestra un área iluminada sobre un fondo oscuro, que es el resultado de la proyección del haz de la luz proveniente de la fuente a través de la abertura. El cambio de sombra a la luz no es del todo claro: contiene flecos sutiles. Esto no puede ser explicado por la óptica geométrica.

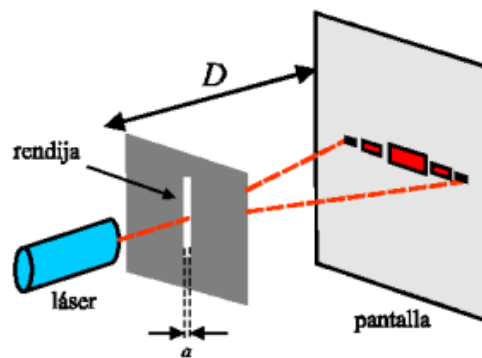


Figura 2 Fenómeno de difracción a través de una abertura [44]

Este fenómeno se conoce como difracción, y fue descrito por primera vez por Grimaldi [45] [46] [47]. Huygens construyó una teoría ondulatoria de la luz sin aplicarla a la difracción

[47], que triunfó en el siglo XIX gracias a los trabajos de Fresnel y Kirchhoff quienes dieron una explicación a la difracción. La confirmación de esta teoría, la da Maxwell en su teoría electromagnética. El problema de la difracción a través de una apertura óptica es comparable a la propagación de una onda electromagnética desde un emisor de la misma forma que la apertura. Por eso hablamos de difracción-propagación, por lo que el problema de la propagación de ondas electromagnéticas en el espacio libre es básicamente un problema de difracción.

3.1.2. Formulación intuitiva del principio de Huygens-Fresnel

Las ideas ondulatorias de Huygens fueron perfeccionadas a principios del siglo XIX por Fresnel [13], quien añadió la interferencia de la luz. Con esto pudo calcular el campo difractado por obstáculos simples, de ahí que el principio recibiera el nombre de ambos.

El principio de Huygens-Fresnel garantiza que, si se sabe el campo electromagnético, generado por una fuente, en cada punto de una superficie cerrada que delimita un volumen inferior que no contiene la fuente, entonces el campo en cualquier punto de este interior está determinado.

Sea S una fuente de luz y M un punto del espacio, de manera que se genere un campo electromagnético en M . Sea Σ una superficie. Replicamos en Σ el campo allí generado y eliminamos la fuente. El principio de Huygens-Fresnel dice que el campo en M no ha cambiado. Así la propagación de una onda electromagnética desde S hasta M puede hacerse directamente o introduciendo una superficie intermedia arbitraria que funciona como una fuente secundaria.

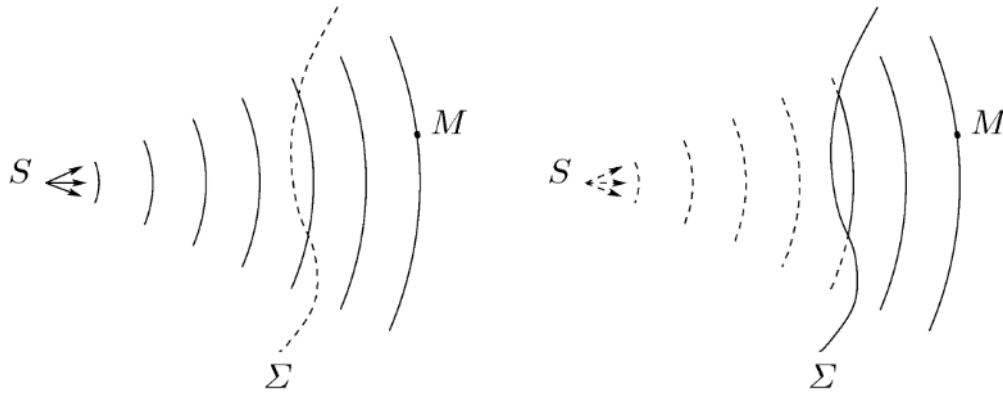


Figura 3 El campo generado en M es el mismo en ambas situaciones (Principio de Huygens-Fresnel). Tomada de [48]

3.1.3. Elementos de una teoría escalar

Ondas localmente planas

El campo magnético $\mathbf{H}$ en un punto de la superficie de onda se deduce del vector de campo eléctrico $\mathbf{E}$

$$\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{H}\|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z \quad \text{Ec. 3-1}$$

Donde Z es la impedancia del medio de propagación, μ su permeabilidad y ε su permitividad. La onda se caracteriza por el vector único $\mathbf{E}$. En adelante los fenómenos de polarización no se tendrán en cuenta, es decir, el campo electromagnético tiene polarización fija. La amplitud del campo eléctrico asociado a una frecuencia ν y considerada en el punto M y en tiempo t se escribe

$$E(M, t) = U(M)e^{2i\pi\nu t}, \quad \text{Ec. 3-2}$$

$U(M)$ es la amplitud del campo que se utilizara sin la parte temporal de la amplitud de la onda (Si no se trata con ondas policromáticas). Así se toma la parte real

$$E_r(M, t) = \Re\{E(M, t)\} \quad \text{Ec. 3-3}$$

Los sensores ópticos son sensibles a la iluminación asociada a este campo eléctrico. Dicha iluminación es proporcional al cuadrado del módulo del vector campo eléctrico, con la

impedancia del medio (generalmente se toma igual a 1) siendo el factor proporcional. Para una onda monocromática con una amplitud $U(M)$ en el punto M del detector genera

$$I(M) = |U(M)|^2 \cos \theta \quad \text{Ec. 3-4}$$

Donde θ es el ángulo entre la normal de la superficie del detector en M y rayo medio del haz que incide.

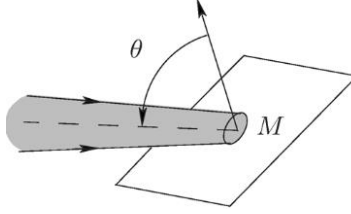


Figura 4 La iluminancia en el punto M de un detector. Tomada de [48]

Para simplificar el termino $\cos \theta$ de Ec. 3-4 la incidencia será normal al detector; entonces $I(M) = |U(M)|^2$ se le llamará intensidad vibratoria de la onda en el punto M.

3.2. Frecuencia espacial y espectro angular

Se desarrolla un método frecuencial, que muestra una de las virtudes de la transformada de Fourier en el análisis de la difracción.

3.2.1. Frecuencia espacial

Fuera una onda luminosa que se propaga en un sistema de coordenadas (x, y, z) en la dirección z . La amplitud del campo eléctrico en el plano $z = 0$ es representada por la función $U(x, y)$. El análisis de Fourier (o espectral) de U resulta:

$$\hat{U}(F_x, F_y) = \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y) e^{2i\pi(xF_x + yF_y)} dx dy \quad \text{Ec. 3-5}$$

Siendo $\hat{U}$ la transformada de Fourier de U y, F_x y F_y son las variables conjugadas de x y y . Se denomina frecuencia espacial a la variable vectorial $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$, y se nota $F = \|\mathbf{F}\|$ su módulo [49]. La transformada de Fourier inversa posibilita escribir:

$$U(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{U}(F_x, F_y) e^{-2i\pi(xF_x + yF_y)} dF_x dF_y \quad \text{Ec. 3-6}$$

Se observa la descomposición de $U(x, y)$ en la base de funciones exponenciales complejas $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)]$, que representan la vibración asociada con la frecuencia espacial pura $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$.

3.2.2. Frecuencia espacial y onda plana

A una frecuencia espacial la difracción hace corresponder una onda plana cuya dirección de propagación está definida perfectamente. Para entenderlo, recordemos que la representación de una onda plana que se propaga en la dirección del vector $\mathbf{k}$ (Figura 5), cuyos cosenos directores son α, β, γ , es (sin tener en cuenta la parte temporal del campo)

$$\exp[-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}] = \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right] \quad \text{Ec. 3-7}$$

La Ec. 3-7 da la amplitud del campo creado en el punto $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$ por la onda plana considera. La amplitud $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)]$ representa el campo generado en $z = 0$ por la onda plana en la dirección:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda F_x \\ \beta &= \lambda F_y \\ \gamma &= \sqrt{1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2} = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3-8}$$

Con $1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2 \geq 0$

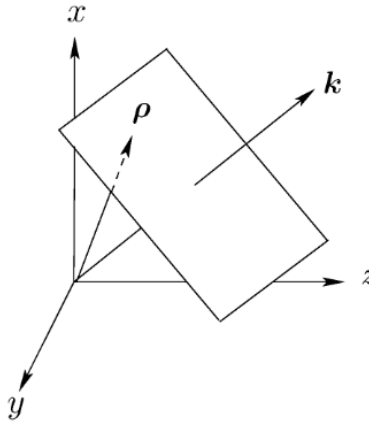


Figura 5 Onda plana propagándose en la dirección del vector $\mathbf{k}$. La amplitud compleja en el punto $\boldsymbol{\rho}$ es proporcional a $\exp[-ik\rho]$, y es constante sobre un plano de onda que es ortogonal a $\mathbf{k}$. Tomada de [48]

Consecuencia del principio de Huygens-Fresnel, la onda que se propaga en la región $z > 0$ es la misma si:

- El plano $z = 0$ se encuentra iluminado por la onda plana de cosenos directores α, β, γ (desde la región $z > 0$).
- El campo en el plano $z = 0$ es el campo asociado con la frecuencia espacial (F_x, F_y) que satisface las relaciones Ec. 3-8.

Esto muestra que cada frecuencia espacial se asocia una dirección de propagación, lo que permite trabajar algunos problemas de difracción.

3.2.3. Frecuencia angular

La Ec. 3-8 muestra que conociendo α y β basta para determinar la onda plana, dada en Ec. 3-7, asociada con la frecuencia $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$. Se incluye el vector Φ de componentes (α, β) en un espacio euclidiano de dos dimensiones, el espacio de las frecuencias angulares. De las definiciones de α y β de la Ec. 3-8 derivamos a $(\alpha, \beta) = \lambda(F_x, F_y)$, es decir:

$$\Phi = \lambda \mathbf{F} \quad \text{Ec. 3-9}$$

γ es el coseno director relativo a z , de la dirección de propagación de la onda plana asociada con $\mathbf{F}$, se tiene:

$$\gamma = \cos \theta_z \quad \text{Ec. 3-10}$$

Donde θ_z es el ángulo entre z y $\mathbf{k}$, γ , según la definición de γ de Ec. 3-8, se cumple:

$$|\sin \theta_z| = \lambda \mathbf{F} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \|\Phi\| = \Phi \quad \text{Ec. 3-11}$$

Para ángulos pequeños $\Phi \approx |\theta_z|$. El vector Φ es la frecuencia angular de la onda plana asociada a la frecuencia espacial $\mathbf{F}$. La Ec. 3-9 es importante, ya que relaciona una cantidad característica de la estructura de un objeto (en este caso, la frecuencia espacial) con una cantidad característica de la radiación difractada por este objeto (una dirección de propagación).

3.2.4. Espectro angular y difracción

Se toma la frecuencia angular como magnitud de trabajo en lugar de la frecuencia espacial, es decir, los cosenos directores α y β . Una onda plana se propaga a lo largo del eje z , de amplitud U en el plano $z = 0$, sea $\hat{U}$ la transformada de Fourier de U . Definimos la función (o distribución) V como:

$$V(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \hat{U} \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) \quad \text{Ec. 3-12}$$

La Ec. 3-6 se escribe como:

$$U(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} V(\alpha, \beta) \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta \quad \text{Ec. 3-13}$$

La función V representa el espectro angular de la onda de amplitud U en el plano $z = 0$. La introducción del termino $\frac{1}{\lambda^2}$ en la definición de espectro angular (Ec. 3-12) se justifica con razones dimensionales. Físicamente, V es el conjunto de las diferentes direcciones de propagación de las ondas planas que componen la onda incidente en el plano $z = 0$.

3.2.5. Propagación del espectro angular

Sea una onda que se propaga a lo largo de z , cuya amplitud en $z = 0$ es $U(x, y, 0)$. Su espectro angular es:

$$V_0(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y, 0) \exp \left[\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy \quad \text{Ec. 3-14}$$

Empleando la transformada de Fourier inversa

$$U(x, y, 0) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} V_0(\alpha, \beta) \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta \quad \text{Ec. 3-15}$$

La amplitud del campo en el plano z es $U(x, y, z)$, su espectro angular es:

$$V_z(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y, z) \exp \left[\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy \quad \text{Ec. 3-16}$$

Así,

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} V_z(\alpha, \beta) \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta \quad \text{Ec. 3-17}$$

U cumple la ecuación de Helmholtz [50] [51]:

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad \text{Ec. 3-18}$$

Teniendo en cuenta que $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$ y $k = 2\pi/\lambda$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 z} + \frac{4\pi\gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta = 0 \quad \text{Ec. 3-19}$$

Esta es una integral de Fourier, y es cero si y solo si

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 z} + \frac{4\pi\gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{Ec. 3-20}$$

La Ec. 3-20 es una ecuación diferencial en z , cuya integración da (para $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ es decir $\gamma^2 \geq 0$):

$$V_z(\alpha, \beta) = V_0(\alpha, \beta) \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda} \gamma z \right] \quad \text{Ec. 3-21}$$

Si conservamos solo la exponencial de signo negativo $\gamma \geq 0$ que corresponde a una onda que se propaga hacia z positivo, se entiende que la propagación se traduce por un cambio de fase en cada componente del espectro angular. Esto es importante debido a la linealidad de los sistemas encontrados en la práctica. Un filtro lineal conserva las frecuencias e introduce una atenuación y un desfase para cada una de las frecuencias.

3.2.6. Difracción vista como un filtro lineal

Teniendo el campo en el plano $z = 0$, por análisis espectral obtenemos el espectro angular V_0 . La propagación da lugar a un desplazamiento de fase relacionado con la distancia de propagación z . V_z se deduce de V_0 por medio de una multiplicación con una función de fase. La amplitud del campo en la abscisa z se alcanza con la transformada inversa de V_z .

Según la Ec. 3-21 se pasa de V_0 a V_z multiplicando por H_z tal que

$$H_z(\alpha, \beta) = \exp \left[-\frac{2i\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right] \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 \leq 1$$

$$H_z(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 > 1$$
Ec. 3-22

H_z actúa como una función de transferencia de manera que

$$V_z(\alpha, \beta) = H_z(\alpha, \beta)V_0(\alpha, \beta)$$
Ec. 3-23

Que expresa que la difracción de un plano a otro es un filtro lineal.

Ejemplo 1

Con incidencia normal, una onda plana incide en una abertura rectangular de lados L y H. Designamos la función $rect_\ell(x)$ que toma los valores de 1 si $|x| \leq \ell/2$, o 0 en otro caso. La amplitud inmediatamente detrás de la pantalla es

$$U(x, y) = U_0 rect_L(x) rect_H(y)$$

Donde U_0 es un factor de escala dimensional. El espectro angular de U es:

$$V_0(\alpha, \beta) = U_0 LH \frac{\sin \frac{\pi L \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi L \alpha}{\lambda}} \frac{\sin \frac{\pi H \beta}{\lambda}}{\frac{\pi H \beta}{\lambda}}$$

La onda difractada se compone de ondas plana. Cuando $\alpha = \beta = 0$ estamos observando la onda plana que se propaga en la dirección del eje z, y esta es la onda con la amplitud más significativa. En otras palabras, no se detectan ondas en las direcciones donde $\alpha = \lambda/L$ ni en las direcciones que satisfacen la condición $\beta = \lambda/H$

3.3. Difracción Metaxial

La transferencia de campo a través de la difracción se describe utilizando variables espaciales. Estos cálculos representan aproximaciones de segundo grado de las características de apertura de los sistemas, así como de las dimensiones transversales de los emisores y receptores.

3.3.1. Coordenadas en un emisor o receptor esférico

Se están tomando en cuenta transmisores y receptores de forma esférica. En realidad, se trata de casquetes esféricos con simetría rotacional alrededor de un eje específico. Estas

son superficies en las que se describe la amplitud del campo. En consecuencia, una misma superficie esférica puede funcionar tanto como emisor como receptor, dependiendo del punto de vista que se elija.

Un fragmento de esfera A con centro de curvatura C y vértice V (Figura 6). Su radio de curvatura es

$$R_A = \overline{VC} \quad \text{Ec. 3-24}$$

Su signo indica hacia qué lado se encuentra la concavidad de A . Se tomará que una longitud es positiva si va en el sentido de la propagación de la luminosidad.

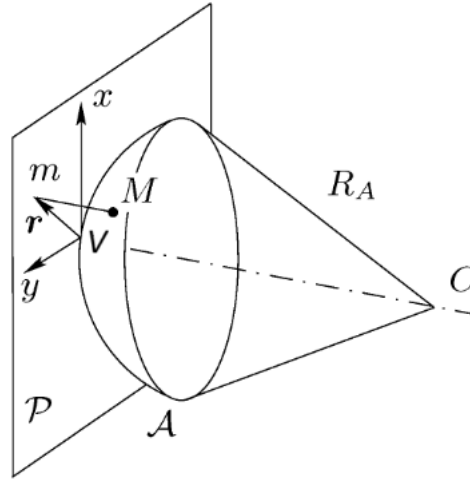


Figura 6 Coordenadas cartesianas sobre un fragmento o porción de esfera. Tomada de [52]

Imaginemos un punto sobre una (porción) esfera. Sea el plano $\mathcal{P}$ tangente a A en V (Figura 6) con coordenadas x e y . Ahora, si tomamos un punto M en la superficie de la esfera A y proyectamos este punto en el plano $\mathcal{P}$, obtenemos un punto que llamaremos m . Llamamos $\mathbf{r}$ al vector $\mathbf{V}m$. Las coordenadas de m en el plano $\mathcal{P}$ determinan inequívocamente el punto M en A (ya que A es solo un fragmento de esfera). De esta manera las coordenadas (x, y) de m sirven también para M . La amplitud del campo en M se denota

$$U(M) = U_A(x, y) = U_A(\mathbf{r}) \quad \text{Ec. 3-25}$$

Y para el campo en m

$$U(m) = U_P(x, y) = U_P(\mathbf{r})$$

Ec. 3-26

Aunque tengan las mismas coordenadas estos campos son diferentes: en campo en M es el campo sobre la esfera A , y el campo en m es el campo sobre el plano $\mathcal{P}$.

3.3.2. Aproximación metaxial

Esta es una aproximación de segundo orden en términos de los parámetros de apertura (que incluyen dimensiones laterales y ángulos). La aproximación metaxial se basa en las siguientes condiciones:

- Los transmisores y receptores se acercan a porciones de esferas siendo un plano una esfera de radio de curvatura infinito (los emisores y receptores planos se consideran casos especiales).
- Las aperturas son moderadas. Se traduce a que las dimensiones transversales de los transmisores y receptores son pequeñas en comparación con las distancias de observación y radios de curvatura, es decir, para un punto r en un emisor A de radio R_A

$$\|r\| \ll |R_A|$$

Ec. 3-27

- Los ángulos de los “rayos de luz” con el eje de un emisor o receptor son moderados.
- Los cálculos se elaboran hasta el segundo orden con respecto a los parámetros de apertura y ángulos, en base a las condiciones anteriores.

Debido a estas aproximaciones, independientemente de la forma del emisor o receptor, se puede aproximarlos como una esfera oscilante que se encuentra tangente en su vértice. Esta esfera tiene su radio de curvatura igual al del emisor.

3.3.3. Transparencia de curvatura

Veamos dos porciones de esferas A y B tangentes en su vértice. Sus respectivos radios son R_A y R_B ; y ya que ambas esferas tienen un plano tangente $\mathcal{P}$ en común sus coordenadas son las mismas. Considerando la Figura 7 se halla la relación entre la amplitud del campo en el punto M y la del campo en el punto m .

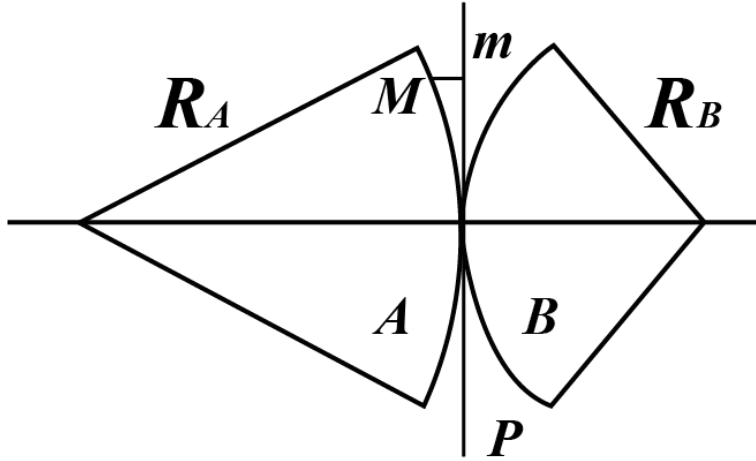


Figura 7 Esferas A y B tangentes. Paso del campo $\mathcal{A}$ al $\mathcal{B}$ por una transparencia.

Al segundo orden se tiene

$$\overline{Mm} = -\frac{r^2}{2R_A} \quad \text{Ec. 3-28}$$

Donde $r^2 = x^2 + y^2$. La diferencia de recorrido $\overline{Mm}$ corresponde a una diferencia de fase

$$\varphi = \frac{2\pi\overline{Mm}}{\lambda} = -\frac{\pi r^2}{\lambda R_A} \quad \text{Ec. 3-29}$$

Así

$$U_P(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r})\exp[-i\varphi] = U_A(\mathbf{r})\exp\left[\frac{i\pi r^2}{\lambda R_A}\right] \quad \text{Ec. 3-30}$$

Con el mismo análisis entre B y P se llega a

$$\begin{aligned} U_B(\mathbf{r}) &= U_P(\mathbf{r})\exp\left[-\frac{i\pi r^2}{\lambda R_B}\right] \\ &= U_A(\mathbf{r})\exp\left[\frac{i\pi r^2}{\lambda R_A}\right]\exp\left[-\frac{i\pi r^2}{\lambda R_B}\right] \\ &= U_A(\mathbf{r})\exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)r^2\right] \end{aligned} \quad \text{Ec. 3-31}$$

La transferencia del campo de A a B, representada en la Ec. 3-31, se denomina **transparencia de curvatura**. El nombre se debe a que los campos A y B solo difieren en un término de fase cuadrática, que desaparece si se considera la iluminación: la transparencia

no atenúa la onda; y curvatura, por permitir adaptar las curvaturas. Una transparencia de curvatura no tiene ningún efecto sobre una onda, solo refleja la relación entre la amplitud del campo en dos esferas tangentes, no hay que confundir una transparencia de curvatura con una lente fina que si transforma una onda esférica en otra.

3.3.4. Difracción de Fraunhofer

Sea A un emisor con radio de curvatura R_A , vértice S y centro C . Asumiendo conocer la amplitud del campo en A , se hallará el campo en $\mathcal{F}$ que tiene vértice C y centro S (se dice que A y $\mathcal{F}$ son esferas confocales). Las variables espaciales son r en A y s en $\mathcal{F}$.

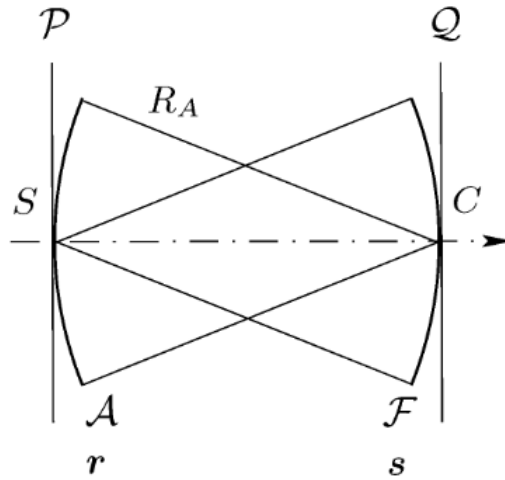


Figura 8 Difracción de Fraunhofer. Se transfiere de la amplitud del campo en A a la amplitud del campo en $\mathcal{F}$. Tomado de [48]

La amplitud del campo en el plano $\mathcal{P}$ está relacionada con la amplitud del campo en A a través de una transparencia de curvatura. Luego:

$$U_P(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp \left[\frac{i\pi r^2}{\lambda R_A} \right] \quad \text{Ec. 3-32}$$

De igual manera, la amplitud el campo en $\mathcal{F}$ se encuentra en función de la amplitud del campo en Q , tangente a $\mathcal{F}$ en su vértice C :

$$U_F(\mathbf{r}) = U_Q(\mathbf{s}) \exp \left[\frac{i\pi s^2}{\lambda R_A} \right] \quad \text{Ec. 3-33}$$

Ya que $R_F = -R_A$.

La propagación del espectro angular del plano $\mathcal{P}$ al plano Q se expresa teniendo en cuenta la transferencia correspondiente a la distancia $z = R_A$; teniendo a la frecuencia espacial como variable, según la Ec. 3-22

$$H_{R_A}(\mathbf{F}) = \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda} R_A \sqrt{1 - \lambda^2 F^2} \right] \quad \text{Ec. 3-34}$$

Luego la relación Ec. 3-23 se escribe como:

$$\hat{U}_Q(\mathbf{F}) = \hat{U}_P(\mathbf{F}) H_{R_A}(\mathbf{F}) \quad \text{Ec. 3-35}$$

La aproximación de segundo orden de $H_{R_A}(\mathbf{F})$ es:

$$H_{R_A}(\mathbf{F}) = \exp \left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] \exp[i\pi R_A \lambda F^2] \quad \text{Ec. 3-36}$$

De tal manera que, dentro de la aproximación metaxial, las transformadas de Fourier de las amplitudes de los campos en $\mathcal{P}$ y Q comprueban:

$$\hat{U}_Q(\mathbf{F}) = \hat{U}_P(\mathbf{F}) \exp \left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] \exp[i\pi R_A \lambda F^2] \quad \text{Ec. 3-37}$$

La amplitud del campo en Q se obtiene de la Ec. 3-37 a través de la transformada de Fourier inversa; se expresa como el producto de una convolución. Para esto definimos una función f_α , donde α es un número real:

$$f_\alpha(\mathbf{F}) = \exp[-i\pi\alpha F^2] \quad \text{Ec. 3-38}$$

De manera que:

$$f_{-1/\alpha}(\mathbf{r}) \rightleftharpoons i\alpha f_\alpha(\mathbf{F}) \quad \text{Ec. 3-39}$$

$\rightleftharpoons$ indica que las dos funciones forman un par de Fourier. Así la Ec. 3-38 lleva a:

$$U_Q(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp \left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] U_P * f_{1/\lambda R_A}(\mathbf{s}) \quad \text{Ec. 3-40}$$

O explícitamente:

$$U_Q(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp \left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] \int_{\mathbb{R}^2} U_P(\mathbf{r}) \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda R_A} \|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2 \right] d\mathbf{r} \quad \text{Ec. 3-41}$$

Teniendo en cuenta a Ec. 3-32 y Ec. 3-33, podemos escribir Ec. 3-41 resolviendo $\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2$

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp \left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] \int_{\mathbb{R}^2} U_A(\mathbf{r}) \exp \left[\frac{2i\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{\lambda R_A} \right] d\mathbf{r} \quad \text{Ec. 3-42}$$

O

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp \left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] \hat{U}_A \left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda R_A} \right) \quad \text{Ec. 3-43}$$

La amplitud del campo en $\mathcal{F}$ se deduce de la amplitud del campo sobre A fundamentalmente por una transformada de Fourier (y cambio de variable). **La esfera $\mathcal{F}$ recibe el nombre de esfera de Fourier de la esfera A .**

Tanto en Ec. 3-42 como en Ec. 3-43 aparece el termino $T = \exp[-2i\pi R_A/\lambda]$. Sea v la velocidad de fase de la onda luminosa en el medio de propagación. Si ν es la frecuencia de la onda, T es:

$$T = \exp \left[-\frac{2i\pi R_A \nu}{v} \right] = \exp[-2i\pi \nu \tau] \quad \text{Ec. 3-44}$$

Donde τ es el tiempo de propagación de la onda a partir del emisor A hasta su esfera de Fourier F . Ya que la onda contemplada es monocromática, T es una constante, que traduce el retardo de la vibración en C con respecto a la de S (este retardo es igual para todos los puntos de F en relación a todos los puntos en A). Con la intención de simplificar no se escribirá mas T .

Regla 1 (Origen del tiempo): Si D es la distancia entre el pico de un transmisor y el pico de un receptor y v la velocidad de fase de las ondas en el medio de propagación, el origen temporal en el receptor se elige para ser trasladado por D/v con respecto al origen temporal en el transmisor.

D es la distancia de difracción. Teniendo en cuenta lo trabajado anteriormente $D = R_A$. Así podemos escribir la Ec. 3-43 como:

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \hat{U}_A \left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda R_A} \right) \quad \text{Ec. 3-45}$$

O

$$U_F(s) = \frac{i}{\lambda R_A} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[\frac{2i\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{\lambda R_A} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{Ec. 3-46}$$

Decimos que U_F es la transformada de Fourier óptica de U_A .

Teorema 1 (Difracción de Fraunhofer): Sea A un emisor esférico monocromático (longitud de onda λ), con vértice S y centro C (Su radio de curvatura es $R_A = \overline{SC}$) y sea F su esfera de Fourier, centrada en S y con vértice en C . La transferencia del campo de A y F se consigue por una transformación óptica de Fourier. Concretamente, con variables $\mathbf{r}$ en A y $\mathbf{s}$ en F , la transferencia de la amplitud del campo se expresa (a término de fase constante) por Ec. 3-45 y Ec. 3-46.

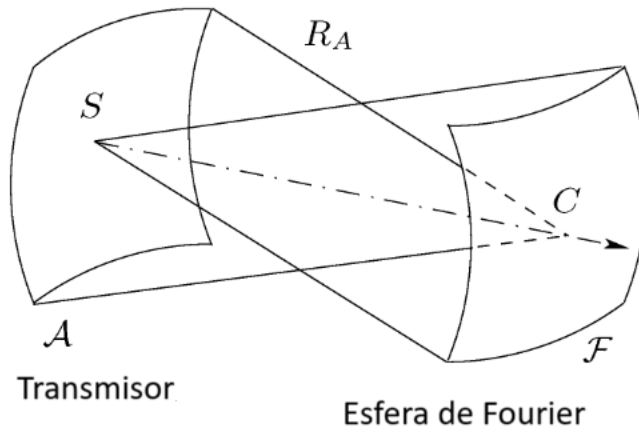


Figura 9. Difracción de Fraunhofer, transformada óptica de Fourier. Tomada de [48]

La Figura 9 representa el **teorema 1**. La escena descrita es la de un fenómeno de difracción de Fraunhofer [49]. Tradicionalmente, este fenómeno se ha detectado cerca del centro de curvatura de una onda esférica. El resultado expuesto acá es válido cerca del centro de curvatura de un emisor esférico.

Reciprocidad de la esfera de Fourier. Esfera virtual de Fourier. La proporción entre la amplitud del campo en la esfera A y la de su esfera de Fourier es recíproca. Con esto se quiere decir que

$$U_A(\lambda R_A \mathbf{F}) = -\frac{i}{\lambda R_A} \overline{U_F(\mathbf{F})} \quad \text{Ec. 3-47}$$

Donde $\overline{U}_f$ es la transformada inversa de Fourier de U_F . Un cambio de variable y sabiendo que $R_A = -R_F$ llegamos a que

$$U_A(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda R_F} \overline{U}_f\left(-\frac{\mathbf{r}}{\lambda R_F}\right) \quad \text{Ec. 3-48}$$

Así

$$U_A(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda R_F} \hat{U}_F\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda R_F}\right) \quad \text{Ec. 3-49}$$

Si $\mathcal{F}$ es la esfera de Fourier de A , entonces A es la esfera de Fourier de $\mathcal{F}$.

Por conclusión, si un emisor tiene un radio de curvatura positivo, su esfera de Fourier es real y la transmisión del campo tiene lugar mediante una transformada de Fourier (**teorema 1**). Si el radio de curvatura es negativo, la esfera de Fourier es virtual y se pueden considerar dos rutas para la transmisión del campo: por una transformada inversa de Fourier o por una transformada de Fourier tomando la distancia de difracción negativa (aún se cumple el **teorema 1**).

3.4. Imagen coherente

3.4.1. Dioptrio

Su estudio se lleva a cabo mediante casos particulares que desembocan a la formulación de condiciones de imagen coherente para un emisor esférico cualquiera. Cuando se habla de imagen coherente se da a entender que la imagen es una copia homotética del objeto, en amplitud y fase: el factor de homotecia es el aumento transversal. Se reconoce que el campo sobre la imagen puede ser igual al campo sobre el objeto con un coeficiente multiplicativo, siendo este el mismo para todos los puntos del objeto.

3.4.2. Formula de conjugación

Sea D un dioptrio esférico, o sea, un casquete esférico separando dos medios isotrópicos y homogéneos de índice de refracción n y n' respectivamente. La longitud de onda en cada medio es λ y λ' que satisfacen $n'\lambda' = n\lambda$. R_D es el radio de curvatura de V con vértice en

O . S es un punto luminoso ubicado en el eje del dioptrio, en el espacio objeto. Sea $d = \overline{SO}$.
 Sea S' un punto en el espacio imagen, el eje del dioptrio a una distancia $d' = \overline{OS'}$

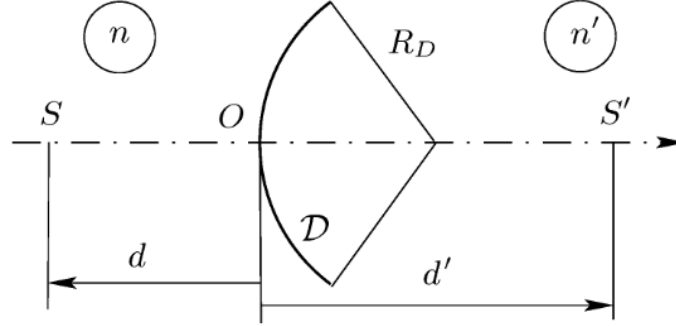


Figura 10 Dioptrio esférico. Tomada de [52]

El campo en D se obtiene considerando la esfera A tangente a D con radio de curvatura d , y vértice en S . Si el campo en A es igual a 1 (para simplificar), el campo en D se halla mediante una transparencia de curvatura

$$U_{D-}(\mathbf{r}) = \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_D} - \frac{1}{d} \right) r^2 \right] \quad \text{Ec. 3-50}$$

(U_{D-} indica que es el por el lado anterior al dioptrio). Si se tratara por el otro lado, el resultado sería similar

$$U_{D+}(\mathbf{r}) = \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda'} \left(\frac{1}{R_D} - \frac{1}{d'} \right) r^2 \right] \quad \text{Ec. 3-51}$$

S' será la imagen de S a través del dioptrio si la onda esférica que viene de S se transforma en una onda esférica convergente hacia S' , lo cual ocurre si $U_{D+}(r) = U_{D-}(r)$ para todo r .

Teniendo en cuenta que $n'\lambda' = n\lambda$ podemos concluir que

$$n' \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{R_D} \right) = n \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R_D} \right) \quad \text{Ec. 3-52}$$

O

$$\frac{n'}{d'} = \frac{n}{d} + \frac{n' - n}{R_D} \quad \text{Ec. 3-53}$$

La cual se conoce como la relación de conjugación del dioptrio.

La relación de conjugación para un espejo esférico se deduce de la misma forma. Esta función o relación de conjugación se completa con la definición de aumento transversal, que se dará un poco más adelante. Con esto es posible inferir del estudio de la dioptría y del espejo esférico las propiedades de un sistema de cualquier centro; así la óptica geométrica paraxial es incluida en la teoría de la difracción.

3.4.3. Sistemas centrados

Imagen coherente del campo en un emisor esférico.

Un sistema central (lente, objetivo) está constituido por una serie de dioptrías que poseen un eje común. En cada paso a través de una dioptría da una doble conjugación de los centros y de los vértices; esta doble conjugación es válida para la progresión de dioptrías, por ende, para el sistema centrado (Figura 11). Se afirma:

Teorema 2 (Imágenes coherentes. G. Bonnet): *La amplitud del campo en la esfera A' es la imagen coherente de la amplitud del campo en la esfera A a través de un sistema centrado si, y solo si, el vértice y el centro de A' son las respectivas imágenes paraxiales del vértice y del centro de curvatura de A . Si g_s es el aumento transversal de los vértices entre objeto y la imagen, entonces:*

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} U_A\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s}\right) \quad \text{Ec. 3-54}$$

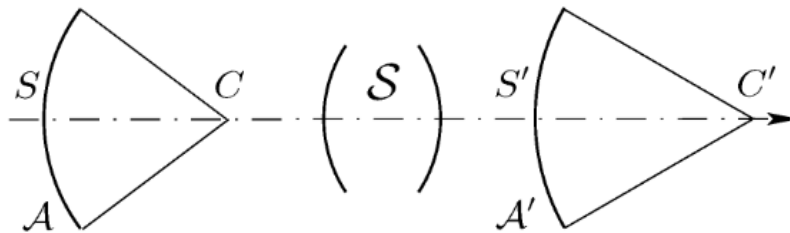


Figura 11 Imagen coherente a través de un sistema de centros arbitrario S . Tomada de [52]

Este teorema 2 se halla en el trabajo de Kogelnik [53] aunque limitado a espejos esféricos. G. Bonnet da una forma general que es válida para cualquier sistema centrado.

Obtención del campo en un plano que existe sobre una esfera

Sea $\mathcal{P}$ un plano vecino a una esfera A convexo, relativo a la dirección de propagación. La meta es formar una imagen plana de A , para lo cual se utiliza una lente L (Figura 12). Según el teorema 2 la imagen del centro de A debe estar en el infinito. Esto sucederá si C concuerda con el foco del objeto F del objetivo. El vértice P de $\mathcal{P}$ es la imagen (paraxial) del vértice de A . Para que el aumento transversal tenga un valor de 1 entre el campo sobre A y el campo sobre $\mathcal{P}$, el punto A debe coincidir con el punto principal H de L , y P debe coincidir con el punto imagen principal H' . Bajo estas circunstancias, las amplitudes de los campos A y $\mathcal{P}$ son iguales $U_P(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r})$.

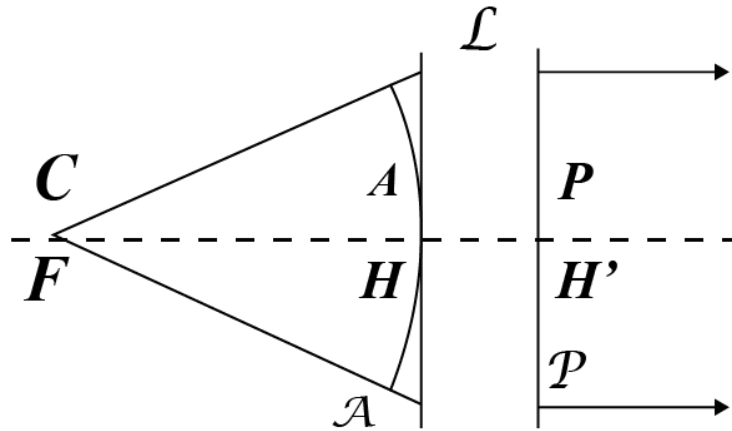


Figura 12 La lente L , representada por sus puntos principales H y H' y su foco objeto F , permite tener la misma amplitud del campo sobre el plano P que sobre la esfera A .

3.5. Patrones de difracción

3.5.1. Modulación espacial de la luz

Hay tres formas de modular una onda luminosa: modulación de amplitud (afecta la intensidad vibratoria), modulación de fase y modulación anisótropa (afecta la polarización).

Si $U_i(\mathbf{r})$ es la amplitud incidente y $U_t(\mathbf{r})$ la amplitud transmitida en el punto $\mathbf{r}$ de una transparencia, el coeficiente de transmisión de la transparencia en $\mathbf{r}$ es $t(\mathbf{r})$, de modo que

$$U_t(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r})U_i(\mathbf{r})$$

Ec. 3-55

La transparencia produce una modulación de amplitud si $t(r)$ es un número real tal que, para todo r ,

$$0 \leq t(r) \leq 1 \quad \text{Ec. 3-56}$$

La modulación es de fase si:

$$t(r) = e^{-i\varphi(r)} \quad \text{Ec. 3-57}$$

La modulación es anisótropa si el coeficiente de transmisión $t(r)$ depende de la polarización de la onda incidente.

3.5.2. Configuraciones practicas

Ópticamente, se efectúa una transformada de Fourier a través del llamado patrón de difracción de Fraunhofer (teorema 1). Si D es la distancia de la esfera A a su esfera de Fourier $\mathcal{F}$, las amplitudes de los campos en las dos esferas se relacionan de la siguiente manera:

$$U_F(s) = \frac{i}{\lambda D} \hat{U}_A\left(\frac{s}{\lambda D}\right) \quad \text{Ec. 3-58}$$

Aunque el punto de interés son otras circunstancias, en particular, situaciones que nos dejen observar la transformada de Fourier en un plano. Las lentes aplanan las dos esferas focales A y $\mathcal{F}$, como se explica en Obtención del campo en un plano que existe sobre una esfera. La Figura 13 ilustra como conseguir el espectro de la intensidad del campo en un plano $\mathcal{P}$, que también se visualiza en un plano $\mathcal{T}$. Si las dos lentes, representadas como lentes finas para simplificar, tienen la misma distancia focal f' , la transformada de Fourier se obtiene después de un recorrido de f' .

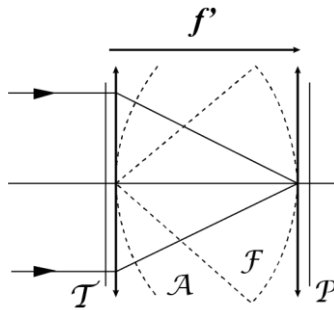


Figura 13 La amplitud compleja del campo sobre el plano $\mathcal{P}$ es la transformada de Fourier óptica de la amplitud del campo sobre $\mathcal{T}$.

Si t es la función de transmisión de la transparencia T , la amplitud del campo en A es $U_A(\mathbf{r}) = U_0 t(\mathbf{r})$ (U_0 es una constante adimensional) y la amplitud del campo en el plano $\mathcal{P}$ es igual a la amplitud del campo en la esfera de Fourier $\mathcal{F}$. Esto se escribe:

$$U_P(\mathbf{s}) = U_F(\mathbf{s}) = \frac{iU_0}{2\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\mathbf{s}}{2\lambda f'}\right) \quad \text{Ec. 3-59}$$

Otro modo de actuar es considerar que la esfera de Fourier $\mathcal{F}$ de un emisor plano A esta en el infinito, y que para traerla a una distancia finita es habitual en la óptica emplear una lente (convergente si se desea una imagen real). La Figura 14 muestra la esfera $\mathcal{F}'$ que es la imagen de $\mathcal{F}$, que está en el infinito, pero centrada en A . Por propiedades de imagen coherente (teorema 2) indican que $\mathcal{F}$ es la esfera que pasa por el foco imagen F' de la lente y está centrada en A' , imagen del centro de curvatura de $\mathcal{F}$, que es el punto A , vértice de A .

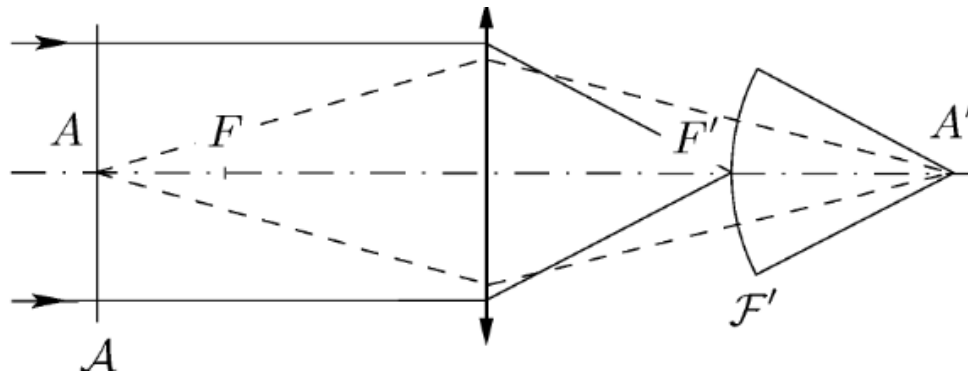


Figura 14 La transformada óptica de Fourier de la amplitud del campo en el plano A se haya en la esfera $\mathcal{F}'$. Si A es el vértice de A , la esfera $\mathcal{F}'$ está centrada en A' , la imagen paraxial de A . Tomada de [48]

Si se quiere que $\mathcal{F}'$ sea plano, A tendrá que estar en el foco objeto F de la lente, de manera que A' este en el infinito (Figura 15). Este es un montaje clásico que permite obtener una transformación de Fourier entre dos planos [23]. Si f' es la distancia focal imagen del objetivo, la transformada de Fourier se obtiene tras un recorrido de $2f$ y

$$U_{F'}(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda f'} \hat{U}_A\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda f'}\right) \quad \text{Ec. 3-60}$$

La Ec. 3-60 es la Ec. 3-58 donde la distancia de difracción D se reemplazó por la distancia focal imagen de la lente.

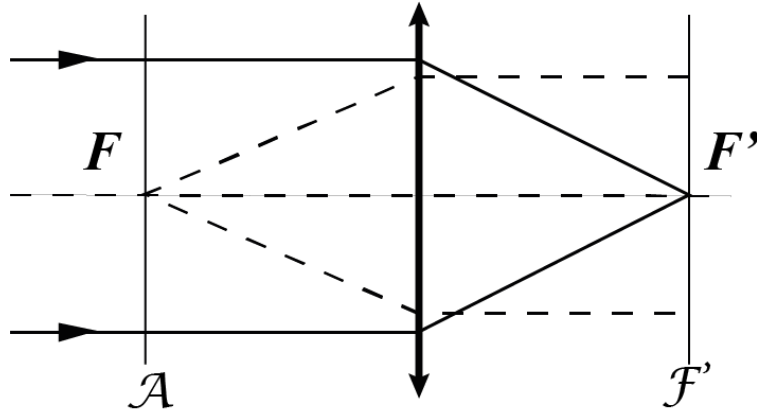


Figura 15 La amplitud del campo en el plano $\mathcal{F}'$ es la transformada de Fourier de la amplitud del campo en el plano $\mathcal{A}$.

Esto se justifica imaginando que la amplitud del campo en el plano focal del objeto es la amplitud asociada a una frecuencia espacial pura. La onda asociada se propaga en la dirección $\phi = \lambda F$, y esta onda es enfocada por la lente en su plano focal, en el punto $s = f' \lambda F$. La amplitud del campo en el punto s es el valor de la transformada de Fourier de U_A para la frecuencia espacial $F = s / \lambda f'$. El factor $i / \lambda f'$ se debe a que la lente enfoca una onda plana en su plano focal imagen. Esto viene a hacer converger una onda a la distancia $D = f'$.

La Ec. 3-60 continúa siendo válida si $\mathcal{F}'$ es una esfera como en la Figura 14 (esfera de Fourier de la imagen de A).

3.5.3. Difracción a través de una abertura

El plano focal de la lente es el plano de Fourier designado por $\mathcal{F}'$. La onda incidente es una onda plana monocromática de longitud de onda λ y amplitud U_0 (se mide en V/m , por motivos prácticos puede tomar el valor de 1) y con una incidencia normal.

Rendija ilimitada

El objeto A es una rendija ilimitada de anchura ℓ (Figura 16), descrita por la función de transmisión $t(x, y) = \text{rect}_\ell(x)$, donde $\text{rect}_\ell(x) = 1$ si $|x| \leq \ell/2$ o 0 en otro caso. La amplitud del campo en A es:

$$U_A(\mathbf{r}) = U_A(x, y) = U_0 \text{rect}_\ell(x)$$

Ec. 3-61

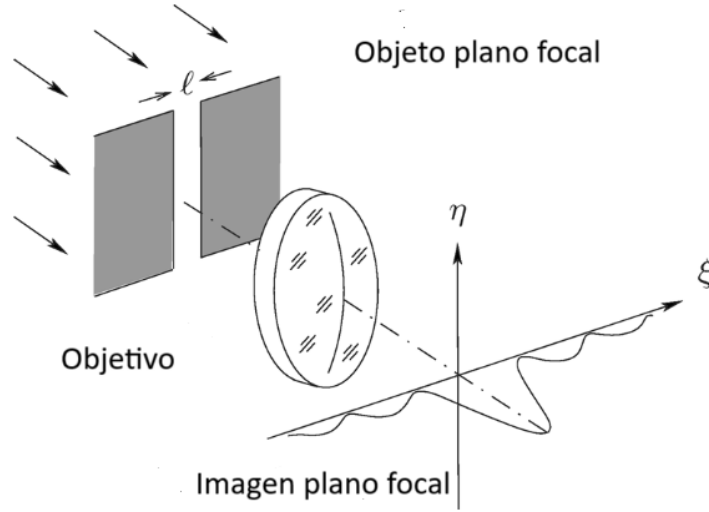


Figura 16 Ilustración esquemática de la iluminación del campo difractado por una rendija ilimitada de anchura ℓ , observada en el plano focal imagen de una lente. Tomado de [52]

Aunque la variable y no aparece explícitamente, es una función con variables separables, por lo que su transformada de Fourier bidimensional es el producto de dos transformadas de Fourier unidimensionales:

$$\hat{U}_A(F_x, F_y) = U_0 \ell \frac{\sin \pi \ell F_x}{\pi \ell F_x} \delta(F_y)$$

Ec. 3-62

Realizando un cambio de variables, con coordenadas ξ y η en el plano de Fourier (plano imagen focal de la lente):

$$F_x \rightarrow \frac{\xi}{\lambda f'}, \quad F_y \rightarrow \frac{\eta}{\lambda f'}$$

Ec. 3-63

Finalmente multiplicamos por $i/\lambda f'$:

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{i \ell U_0}{\lambda f'} \frac{\sin \frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}}{\frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}} \delta\left(\frac{\eta}{\lambda f'}\right) = i \ell U_0 \frac{\sin \frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}}{\frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}} \delta(\eta)$$

Ec. 3-64

Recordando que $|a|\delta(ax) = \delta(x)$. La aparición de la distribución de Dirac en la Ec. 3-64 señala que el campo se concentra en el eje ξ como se ve en la Figura 16.

3.5.4. Rejillas de difracción

Una rejilla de difracción es un grupo de ranuras que se encuentran paralelamente ubicadas, todas del mismo ancho y separadas a una distancia uniforme entre sus centros [44]. Este conjunto o grupo de elementos difractores tiene el efecto de producir alteraciones de manera periódica en la amplitud, fase o ambas.

La Figura 17 muestra una rejilla de transmisión; una onda monocromática plana incide normalmente desde el lado izquierdo, la luz que se transmite a través de las ranuras forma un patrón de interferencia. La distancia entre los centros de cada ranura se llama espaciado de rejilla. En este ejemplo solo se muestran 6 aberturas, pero una rejilla real puede tener miles.

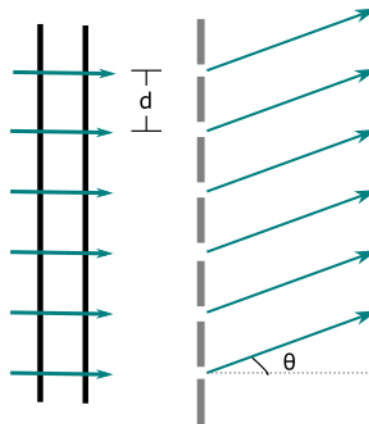


Figura 17 Rejilla de difracción de transmisión.

La distribución de “peine de Dirac” facilita la descripción de las estructuras periódicas. Y se define:

$$\Xi(x) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta(x - q) \quad \text{Ec. 3-65}$$

Y su transformada de Fourier es:

$$\mathfrak{F}[\Xi(x)](F_x) = \hat{\Xi}(F_x) = \Xi(F_x) \quad \text{Ec. 3-66}$$

Si el peine de Dirac tiene un paso p, se escribe:

$$\Xi_p(x) = \Xi\left(\frac{x}{p}\right) = p \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta(x - qp) \quad \text{Ec. 3-67}$$

De manera que:

$$\Xi_p(x) \Rightarrow p\Xi_{1/p}(F_x) \quad \text{Ec. 3-68}$$

Red de fase sinusoidal

Considere una placa de vidrio con un espesor sinusoidal de la forma:

$$e(x, y) = e_0 + a \sin 2\pi F_0 x \quad \text{Ec. 3-69}$$

Donde $0 < |a| < e_0$. Si n es el índice de refracción del vidrio, y si se trabaja en el vacío (o en el aire tomando el índice 1), el desfase provocado por la placa es:

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi(n-1)e(x, y)}{\lambda} \quad \text{Ec. 3-70}$$

A un factor de fase constante, la función de transmisión de la placa es:

$$t(x, y) = \exp \left[\frac{-2i\pi(n-1)a \sin 2\pi F_0 x}{\lambda} \right] \quad \text{Ec. 3-71}$$

Siendo J_q la función de Bessel de primer orden de orden q , se tiene la siguiente relación [54]:

$$e^{i\xi \sin \theta} = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q(\xi) e^{iq\theta} \quad \text{Ec. 3-72}$$

Permite escribir la función t como:

$$t(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) e^{-2\pi i q F_0 x} \quad \text{Ec. 3-73}$$

La transformada de Fourier de t es:

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta(F_x - qF_0, F_y) \quad \text{Ec. 3-74}$$

La amplitud del campo en la esfera de Fourier, siendo f' la distancia de difracción, es:

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{iU_0}{\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right)$$

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{iU_0}{\lambda f'} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q\left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{\xi}{\lambda f'} - qF_0, \frac{\eta}{\lambda f'}\right)$$

$$U_{F'}(\xi, \eta) = iU_0 \lambda f' \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q\left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda}\right) \delta(\xi - qF_0 \lambda f', \eta) \quad \text{Ec. 3-75}$$

El espectro de la rejilla está compuesto por una serie de puntos alineados en el eje ξ y espaciados periódicamente (la distancia entre dos puntos vecinos es $F_0 \lambda f'$). En el espectro aparecen términos armónicos que reflejan un efecto no lineal, lo que se debe a que la fase de la onda esta modulada según la Ec. 3-71. (Estos cálculos son válidos para rejillas finas, en caso de que sea una rejilla gruesa se manifiesta el efecto Bragg [55])

Eficacia de difracción de una rejilla

La amplitud difractada por una rejilla infinita con espaciado p es proporcional a la transformada de Fourier de la función de transmisión de la rejilla. Esta función se expresa utilizando las frecuencias espaciales como variables

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \sum_q C_q \delta\left(F_x - \frac{q}{p}\right) \delta(F_y) \quad \text{Ec. 3-76}$$

Donde C_q es una constante (La Ec. 3-75 es un ejemplo). La eficacia de difracción de orden q es la cantidad $\eta_q = |C_q|^2$. La fracción de la energía incidente (flujo) que se difracta en el orden q se conoce como eficiencia de difracción.

Red de fases de dos niveles

La red de paso p , es una matriz en fase de anchura $p/2$. La fase es 0 o π , y la función de transmisión de la red es:

$$t(x, y) = \frac{1}{p} \Xi_p * \text{rect}_{p/2}(x) + \frac{e^{i\pi}}{p} \Xi_p * \text{rect}_{p/2} * \delta_{p/2}(x) \quad \text{Ec. 3-77}$$

Su transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} \hat{t}(F_x, F_y) &= \frac{p(1 - e^{i\pi p F_x})}{2} \text{sinc} \frac{p F_x}{2} \Xi_{1/p}(F_x) \delta(F_y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} (1 - e^{i\pi q}) \text{sinc} \frac{q}{2} \delta\left(F_x - \frac{q}{p}\right) \delta(F_y) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3-78}$$

La red difracta solo en ordenes impares, no existe el orden 0. La Ec. 3-78 se sigue escribiendo

$$\hat{t}(F_x, F_y) = -2 \sum_{q'=-\infty}^{q'=+\infty} \left(\frac{(-1)^{q'}}{(2q' + 1)\pi} \right) \delta\left(F_x - \frac{2q' + 1}{p}\right) \delta(F_y) \quad \text{Ec. 3-79}$$

La eficiencia de difracción del orden $q=2q'+1$ es:

$$\eta_{2q'+1} = \frac{4}{(2q' + 1)^2 \pi^2} \quad \text{Ec. 3-80}$$

En particular $\eta_1 = \eta_{-1} = 4/\pi^2 \approx 0,40$.

La rejilla es de fase y, por lo cual, transparente, todo el flujo incidente es difractado. A medida que aumenta el número de niveles, el perfil de la rejilla se aproxima a una rejilla “Echelette” donde toda la potencia luminosa se difracta en un solo orden.

3.6. Espectrometría instrumental

La resolución de un espectrómetro de rejilla o de prisma depende del tamaño de su pupila, debido a la difracción. La teoría de señales y sistemas se aplica con una buena aproximación a la descripción de espectrómetros. Se suministrará una pequeña introducción a la espectroscopía instrumental, pero para profundidad hay libros especiales [56].

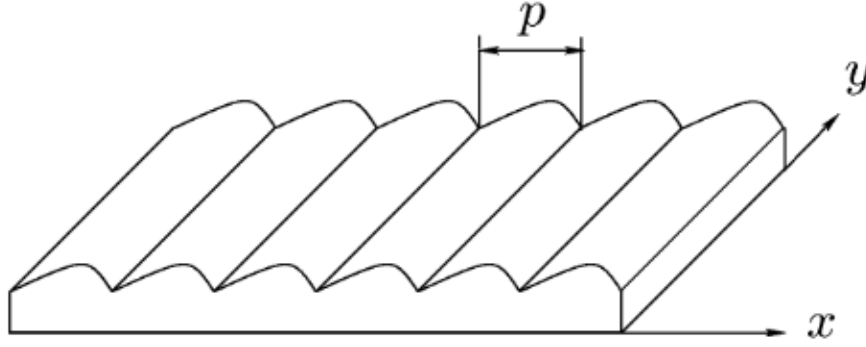


Figura 18 Diagrama de una rejilla de difracción reflectante. Tomada de [52]

3.6.1. Rendija de difracción

Se tiene en cuenta una rejilla de dimensiones infinitas; los efectos de la limitación de la superficie de la rejilla se tendrán en cuenta más adelante.

Con coordenadas x e y en el plano de la rejilla, la función de reflexión se escribe como la repetición de un patrón m de la forma (q es un número entero):

$$r(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} m * \delta_{qp}(x) = \frac{1}{p} m * \Xi_p(x) \quad \text{Ec. 3-81}$$

Donde p es el periodo de la rejilla y el producto de convolución se refiere a la única variable x (el patrón m es una función de una única variable, definida por el intervalo $[-p/2, p/2]$).

El análisis de Fourier permite escribir:

$$\hat{r}(F_x, F_y) = \hat{m}(F_x) \Xi_{1/p}(F_x) \delta(F_y) \quad \text{Ec. 3-82}$$

Si una onda plana monocromática de magnitud U_0 incide normalmente a la rejilla, la amplitud reflejada se escribirá:

$$U(x, y) = \frac{U_0}{p} m * \Xi_p(x) \quad \text{Ec. 3-83}$$

Y su espectro angular se escribe como:

$$\begin{aligned}
V_{\perp}(\alpha, \beta) &= \frac{U_0}{\lambda^2} \hat{m}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \exists_{1/p} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \\
&= \frac{U_0}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \hat{m}\left(\frac{q\lambda}{p}\right) \delta\left(\alpha - \frac{q\lambda}{p}\right) \delta(\beta)
\end{aligned}$$

Ec. 3-84

Donde $\perp$ indica incidencia normal. La onda reflejada es una superposición de ondas planas, cada una desplazándose en una dirección determinada. El orden de difracción q corresponde al término $\delta[\alpha - (q\lambda/p)]\delta(\beta)$ de la suma de la Ec. 3-84, es decir, la onda plana que se propaga en la dirección de los cosenos directores $q\lambda/p$ y 0, o frecuencia angular $(q\lambda/p, 0)$. La amplitud de esta onda es proporcional a $\hat{m}(q\lambda/p)$. Modificando el perfil de la rejilla, se favorece ciertos ordenes, por ejemplo, en una rejilla de Echelette difracta solo en una dirección, de modo que toda la energía luminosa se difracta en un orden.

Red de reflexión con perfil sinusoidal

El perfil de la red se describe en el intervalo $[-p/2, p/2]$ mediante la función:

$$f(x) = e_0 \cos 2\pi \frac{x}{p}$$

Ec. 3-85

Donde e_0 es una constante homogénea a una longitud. Si la rejilla está en el vacío, la desviación del camino óptico en una reflexión en x es $\delta(x) = 2f(x)$, de modo que el patrón de la rejilla se escribe para la longitud de onda λ ,

$$m(x) = \text{rect}_p(x) \exp\left[-\frac{4i\pi e_0}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{p}\right]$$

Ec. 3-86

Red Echelette

El intervalo $[-p/2, p/2]$ por la función:

$$f(x) = e_0 \frac{x}{p}$$

Ec. 3-87

Y el patrón se escribe:

$$m(x) = \text{rect}_p(x) \exp\left[-\frac{4i\pi e_0 x}{\lambda p}\right]$$

Ec. 3-88

Fórmulas de redes

Si la incidencia no es normal, la amplitud de la onda incidente se escribe como:

$$U_i(x, y) = U_0 \exp \left[-\frac{2i\pi\alpha_0 x}{\lambda} \right] \quad \text{Ec. 3-89}$$

Suponiendo que la normal a la onda incidente está en el plano perpendicular a la dirección y . Introducir el termino de fase lineal da como resultado una rotación global del espectro calculado anteriormente. Una onda plana asociada con el orden q se propaga en la dirección $\alpha_0 + q(\lambda/p)$. El espectro angular correspondiente a la onda incidente dada por la Ec. 3-89 es:

$$V(\alpha, \beta) = V_{\perp} * \delta_{\alpha_0, 0}(\alpha, \beta)$$

$$V(\alpha, \beta) = \frac{U_0}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} \hat{m} \left(\alpha_0 + \frac{q\lambda}{p} \right) \delta \left(\alpha - \alpha_0 - \frac{q\lambda}{p} \right) \delta(\beta) \quad \text{Ec. 3-90}$$

Hay interferencia constructiva en la dirección asociada con α si

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{q\lambda}{p} \quad \text{Ec. 3-91}$$

Para obtener la fórmula de la rejilla en su forma habitual, denotamos por θ_0 el ángulo incidente y θ el ángulo de reflexión, siendo el origen la normal (Figura 19). Entonces $\alpha_0 = -\sin\theta_0$ y $\alpha = \sin\theta$, la Ec. 3-91 se escribe:

$$\sin\theta + \sin\theta_0 = \frac{q\lambda}{p} \quad \text{Ec. 3-92}$$

Que es la relación de las redes. Cuando $\theta = -\theta_0$ se trata de la reflexión espectral.

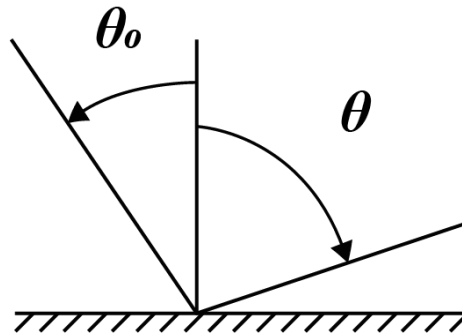


Figura 19 Definición del ángulo de incidencia θ_0 y del ángulo de difracción θ .

3.6.2. Resolución intrínseca

La resolución de una rejilla de difracción es el intervalo $\Delta\lambda_m$ más pequeño que puede detectarse. En las cercanías de la longitud de onda λ , la resolución $\mathfrak{R}$ se define por:

$$\mathfrak{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_m} \quad \text{Ec. 3-93}$$

La resolución queda definida de la siguiente manera. Para una dirección de incidencia fija, la relación de las redes da:

$$\cos\theta d\theta = \frac{qd\lambda}{p} \quad \text{Ec. 3-94}$$

A continuación:

$$\cos\theta\Delta\theta = \frac{|q|\Delta\lambda}{p} \quad \text{Ec. 3-95}$$

Tal que el alcance espectral mínimo detectable $\Delta\lambda_m$ está directamente relacionado con el alcance angular mínimo perceptible $\Delta\theta_m$.

Sea L la anchura de la rejilla a lo largo de la dimensión perpendicular a las ranuras. Para la incidencia θ_0 , el ángulo de difracción es θ , y para los fenómenos relacionados con la apertura de la rejilla, todo ocurre como si la rejilla tuviese una anchura aparente $L' = L\cos\theta$ (Figura 20). El patrón de difracción debido a la anchura limitada de la rejilla se representa mediante la función:

$$h(\theta) = L'^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi L' \theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi L' \theta}{\lambda}\right)^2} \quad \text{Ec. 3-96}$$

Que corresponde a una abertura rectangular de anchura L' .

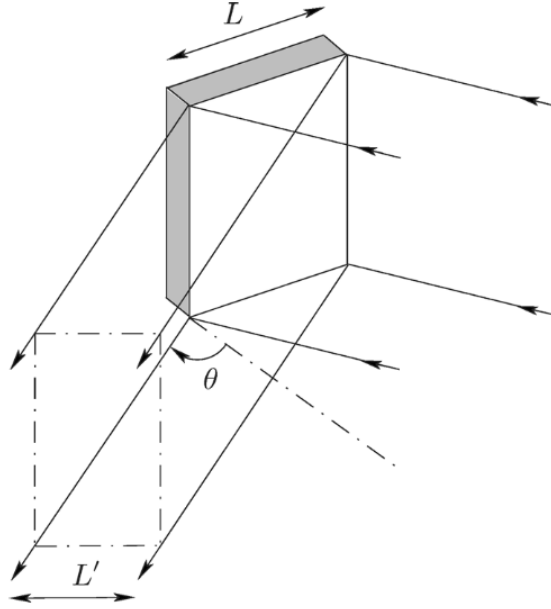


Figura 20 Influencia de la difracción, todo ocurre como si la rejilla, de anchura L , tuviese una anchura $L' = L \cos \theta$.

Tomada de [48]

Eligiendo el **criterio de Rayleigh**, de manera que el máximo en θ corresponder al mínimo valor discernible más próximo, entonces,

$$\Delta \theta_m = \frac{\lambda}{L'} \quad \text{Ec. 3-97}$$

La Ec. 3-95 da:

$$\mathfrak{R} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda_m} = \frac{|q|L'}{p \cos \theta} = |q|N \quad \text{Ec. 3-98}$$

N siendo el número de líneas de la rejilla.

Este resultado no es del todo satisfactorio debido a que q y N no son independientes; La Ec. 3-92 y Ec. 3-98 conducen a:

$$\mathfrak{R} = |\sin \theta + \sin \theta_0| \frac{L}{\lambda} \quad \text{Ec. 3-99}$$

La resolución $\mathfrak{R}$ parece aumentar con la resolución intrínseca (o teórica) de la rejilla, que es:

$$\mathfrak{R}_{\max} = \frac{2L}{\lambda}$$

Ec. 3-100

La resolución teórica depende esencialmente de la anchura de la rejilla, esto es debido a la difracción. No cubrir completamente la rejilla con el haz de iluminación hace que la rejilla funcione por debajo de su capacidad, debido a la difracción: al iluminar solo una parte de la rejilla, se trabaja con una pupila reducida y esto aumenta el tamaño del patrón de difracción.

4. SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES ESPECTRALES

Generalmente los sensores diseñados para adquirir imágenes espectrales escanean la escena espacial o espectralmente para obtener un cubo 3D. La configuración de escaneo de la escena determina el tipo de sensor o la arquitectura. Los sensores convencionales incluyen: sensores de tipo Whiskbroom, que realizan un escaneo espectral pixel por pixel [57]. Este emplea una serie de espejos giratorios que se enfocan en cada ubicación espacial de la escena dentro del espectrómetro; el sensor de tipo barrido o Pushbroom que realiza un escaneo progresivo espacial [58]. Este adquiere información espacial y espectral en una sección al barrer o escanear a lo largo de un eje determinado; el sensor de filtrado espectral, que escanea banda por banda a través del espectro electromagnético [59]. Este utiliza un conjunto de filtros ópticos para guiar la exploración bidimensional con tantos filtros como bandas sean deseadas haya en la imagen espectral adquirida. Estos diferentes diseños se muestran en la Figura 21.

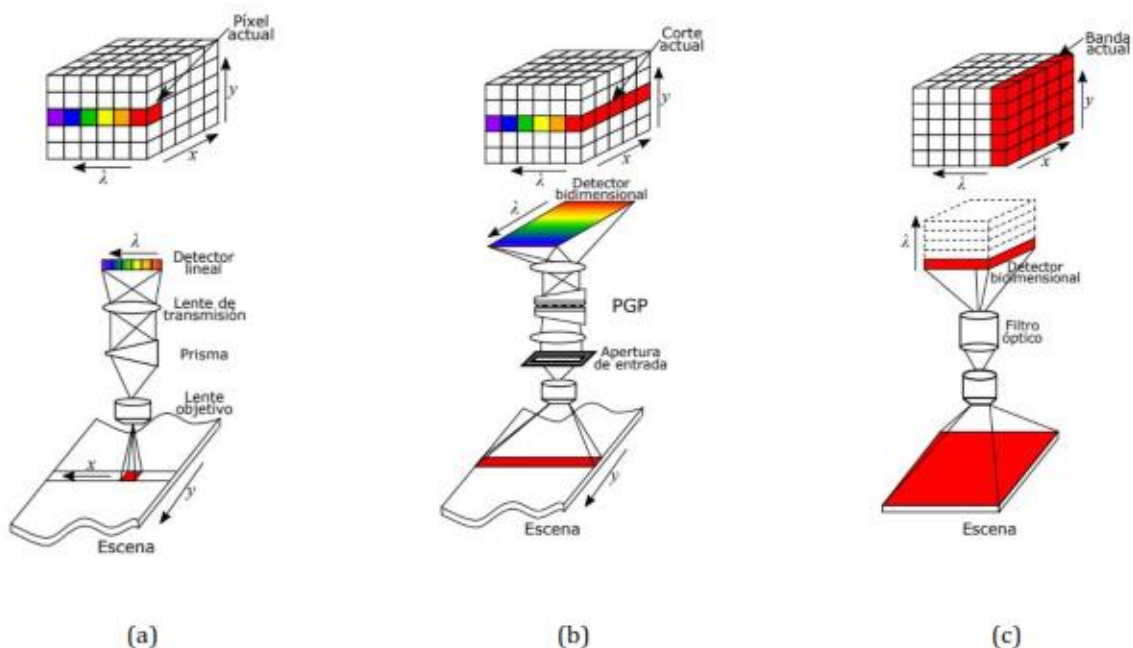


Figura 21 Arquitectura tradicional de adquisición de imágenes espectrales. (a) sensor Whiskbroom, (b) sensor pushbroom, (c) filtrado espectral.

4.1. Sistemas de adquisición de barrido pushbroom

Los sensores Pushbroom son actualmente los más utilizados en aplicaciones comerciales y de investigación debido a su arquitectura más pequeña y liviana en comparación con los demás sensores de escoba, ya que no requieren el uso de partes móviles. Además, estos sensores pueden adquirir simultáneamente imágenes en cientos o miles de bandas espectrales estrechas utilizando rejillas dispersivas o prismas. Vale la pena señalar que estas rejillas de dispersión forman una sección transversal vertical del objetivo en la dirección de desplazamiento [58]. En espectroscopía, el área de la sección transversal corresponde a la imagen de la rendija de entrada a medida que pasa a través del elemento dispersivo, formando una imagen llamada espectrograma.

4.2. Esquema de la cámara tipo pushbroom

En la Figura 22 se ve el modelo seleccionado para la cámara pushbroom. La luz incidente proveniente de la fuente, es enfocada por un lente convergente (1). Luego pasa por una rendija (2) antes de introducirse en una nueva lente colimadora (3). Después incide en una rejilla de difracción de transmisión (4). Por último, la luz pasa a través del sistema óptico de la cámara (5) para llegar al sensor deseado (6).

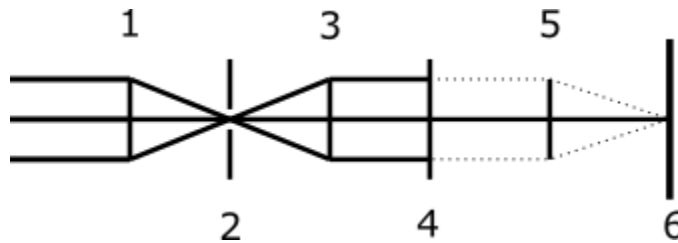


Figura 22 Esquema lineal cámara pushbroom

4.3. Esquema tridimensional de la cámara tipo pushbroom

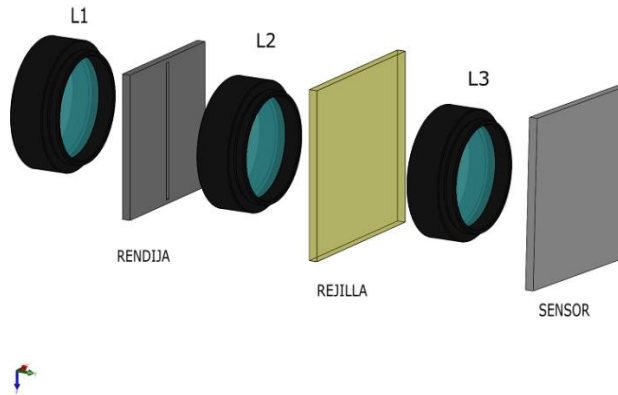


Figura 23 Componentes ópticas de la cámara tipo pushbroom realizadas en SOLIDWORKS.

En la Figura 23, se muestra una representación tridimensional de las componentes ópticas (lentes: L1, L2, L3, rendija, rejilla de difracción y pantalla de observación o sensor). Los lentes son lentes esféricos. Este diseño fue realizado en el software de diseño CAD 3D SOLIDWORKS [60], el cual permite modelar piezas y ensambles en 3D y planos en 2D.

En ella se puede apreciar la lente L1, cuya función es condensar la luz en una abertura o rendija. Posteriormente, la lente L2 colima el haz de luz hacia la rejilla de difracción. Por último, la lente L3 se encarga de formar la imagen en el sensor.

5. CALCULO TEÓRICO DEL CAMPO DE DIFRACCIÓN PRODUCIDO POR UNA CÁMARA TIPO PUSHBROOM

Para analizar una cámara tipo "pushbroom", se ha dividido el proceso en tres secciones con el fin de examinar cada sección por separado y facilitar la comprensión matemática involucrada en este tipo de cámaras.

La primera sección abarca desde la fuente de luz hasta un plano $\mathcal{B}$ que se encuentra directamente detrás de la rendija. La segunda sección comienza desde el plano $\mathcal{B}$ y se extiende a través de la rendija hasta un campo $\mathcal{C}$ que está ubicado inmediatamente detrás de la rejilla de difracción. La tercera sección se extiende desde el plano $\mathcal{C}$ hasta un plano $\mathcal{D}$ que se encuentra directamente detrás del sensor (consultar Figura 24).

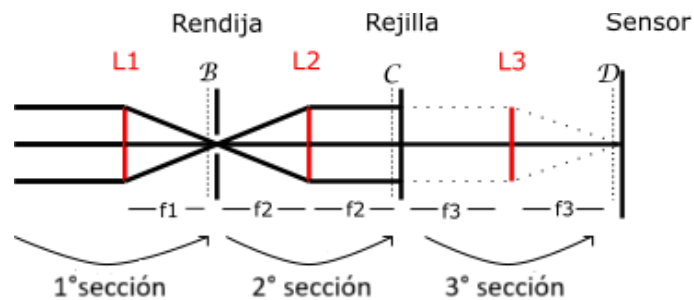


Figura 24 Modelo cámara pushbroom dividido en secciones para su análisis

A continuación, procedemos con el cálculo matemático de cada una de estas secciones:

5.1. Primera Sección

La fuente está a una distancia lo suficientemente grande comparada con las focales de las lentes trabajadas, como para considerarse que está en el infinito, así aseguramos que se pueda implementar la temática vista en el marco teórico.

Se sitúa un plano $\mathcal{A}$, con coordenadas $(\mathbf{r})$, a una distancia d de la primera lente (L1). Luego ubicamos el plano $\mathcal{B}$, con coordenadas $(\mathbf{s})$, a una distancia d' de la lente L1. Aplicando la óptica metaxial este problema se abordaría generalmente con la transferencia general o la difracción de Fresnel [48] que nos diría que la amplitud del campo sobre $\mathcal{B}$ es:

$$U_B(s) = \frac{i}{\lambda D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} s^2\right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} r^2\right] \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} s \cdot r\right] U_A(r) \quad \text{Ec. 5-1}$$

Donde D es la distancia del plano $\mathcal{A}$ al plano $\mathcal{B}$. Para ampliar la información de este tema puede inspeccionar en [48] [52]. En esta ocasión nos enfocaremos o trabajaremos con la difracción de Fraunhofer, de esta manera dispondremos de cierta manera las condiciones del dispositivo para cumplir con las condiciones que implica la difracción de Fraunhofer.

Si se sitúa el plano $\mathcal{A}$, con coordenadas (x, y) , a una distancia f_1 , que es la focal de la lente L1, de la lente L1 y situamos $\mathcal{B}$, con coordenadas (ξ_1, η_1) , a una distancia f_1' de la lente L1, inmediatamente detrás de la rendija, (donde $f_1 = f_1'$), podemos entenderlo como un caso típico de plano a plano, sección 3.5.2, se visualizaría (Figura 25).

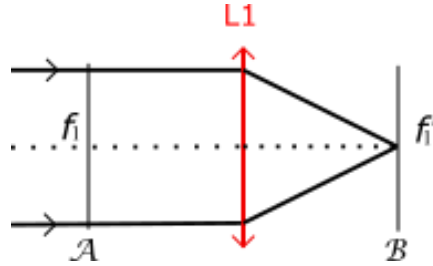


Figura 25 Montaje plano a plano primera sección de la cámara pushbroom

Recordando la Ec. 3-60 de la sección 3.5.2:

$$U_B(s) = \frac{i}{\lambda f'} \hat{U}_A\left(\frac{s}{\lambda f'}\right) \quad \text{Ec. 5-2}$$

Podemos expresar la amplitud del campo en el campo en el plano $\mathcal{B}$. Así, la amplitud del campo en el plano $\mathcal{B}$ se determina mediante:

$$U_B(\xi_1, \eta_1) = \frac{i}{\lambda f_1} \hat{U}_A\left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1}\right) \quad \text{Ec. 5-3}$$

De manera explícita:

$$U_B(\xi_1, \eta_1) = \frac{i}{\lambda f_1} \int_{\mathbb{R}^2} U_A(x, y) e^{2i\pi\left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}x + \frac{\eta_1}{\lambda f_1}y\right)} dx dy \quad \text{Ec. 5-4}$$

Si en $\mathcal{A}$ incide una onda plana, monocromática (longitud de onda λ) con amplitud U_0 (una constante dimensional de valor 1),

$$U_A(x, y) = U_0 \quad \text{Ec. 5-5}$$

Entonces el campo en $\mathcal{B}$ al resolver la transformada óptica de Fourier es:

$$U_B(\xi_1, \eta_1) = \frac{i}{\lambda f_1} \delta\left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1}\right) \quad \text{Ec. 5-6}$$

Aplicando una propiedad de los deltas de Dirac llegamos a:

$$U_B(\xi_1, \eta_1) = i\lambda f_1 \delta(\xi_1, \eta_1) \quad \text{Ec. 5-7}$$

De esta manera la intensidad, que es la que toma importancia, según la Ec. 3-4 es el módulo del campo en $\mathcal{B}$, $|U_B(\xi_1, \eta_1)|^2$

$$I(\xi_1, \eta_1) = [i\lambda f_1 \delta(\xi_1, \eta_1)]^2 \quad \text{Ec. 5-8}$$

Para una visualización utilizando MATLAB, damos unos valores a las constantes que encontramos en la formula anterior. Si $\lambda = 5 \times 10^{-6} \text{ m}$ y la distancia focal del lente es de $f_1 = 100 \text{ mm}$, el recorrido para obtener la transformada de Fourier es de 200 mm . Con esto datos, se puede realizar una simulación en Matlab de que se observaría en el campo $\mathcal{B}$.

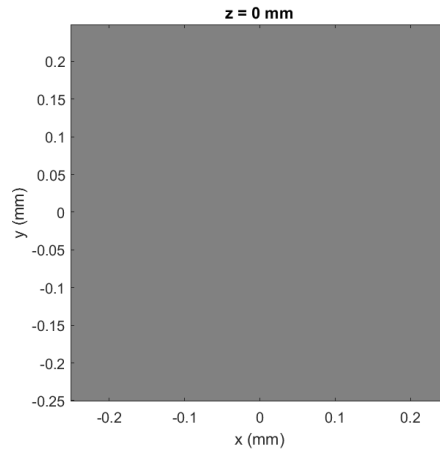


Figura 26 Campo incidente a la configuración de la cámara, plano $\mathcal{A}$

La Figura 28 muestra la intensidad concentrada en un solo punto, se hace un acercamiento para apreciarla más claramente.

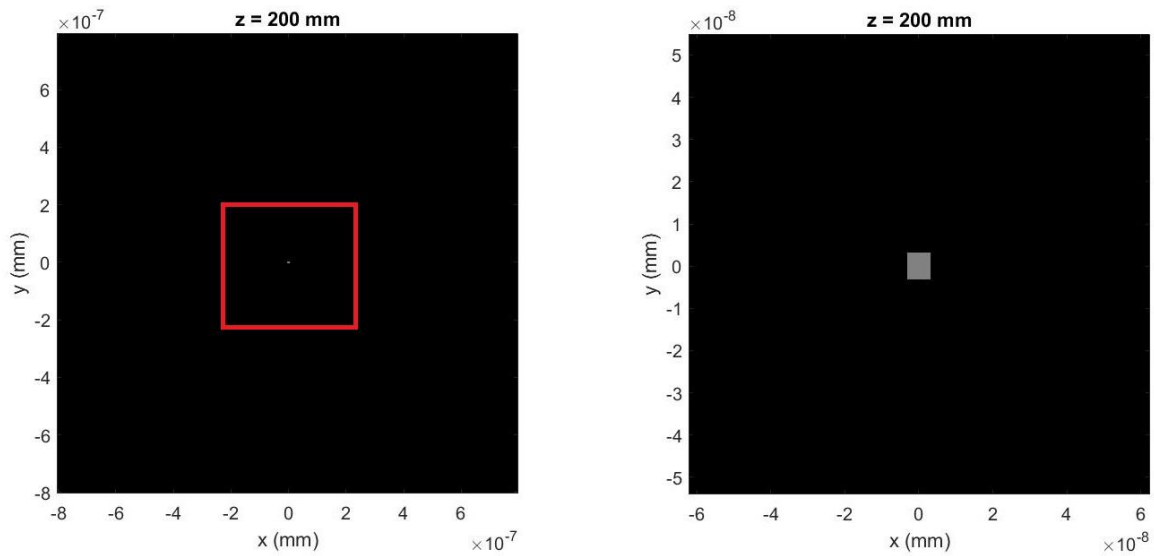


Figura 27 Patrón de la intensidad observada en el plano $\mathcal{B}$

Según la Ec. 5-6, después de calcular la transformada óptica de Fourier del campo incidente, el resultado es un delta de Dirac, el cual refleja claramente su perfil con el eje x en la Figura 28.

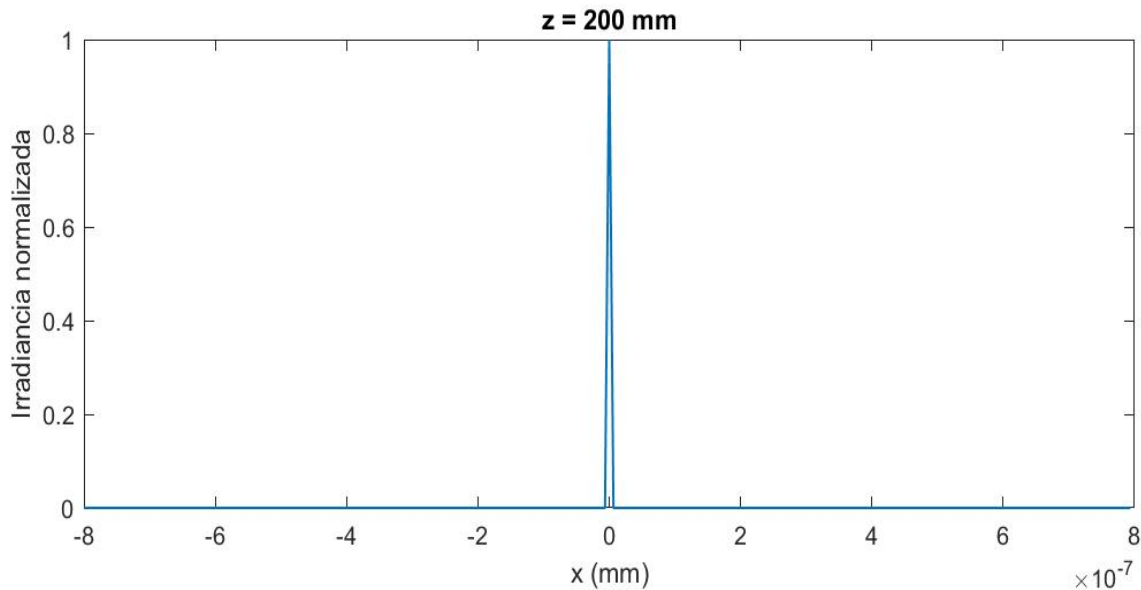


Figura 28 Perfil de la intensidad del campo en el plano $\mathcal{B}$

La figura muestra el perfil de la irradiancia normalizada en el plano de observación a una distancia de 200 mm del plano fuente. En este perfil, se puede observar una alta concentración de la luz en el centro del eje x , con un rápido decaimiento hacia los lados. Esta distribución simétrica y concentrada es típica del patrón de difracción de Fraunhofer para una fuente de luz uniforme. La irradiancia normalizada alcanza su máximo valor en el centro, indicando que la mayor parte de la energía luminosa se encuentra en esta región. La figura confirma la correcta propagación de la onda en espacio libre y es consistente con los resultados esperados para este análisis.

Este sería el análisis matemático, con su respectiva simulación, de la primera sección del recorrido que hace la amplitud del campo de un haz de luz que incide en un dispositivo de tipo pushbroom. A continuación, se realizará el análisis de la sección que continúa a esa primera lente empleada.

5.2. Segunda Sección

Prosiguiendo con el análisis del recorrido de la amplitud del campo dentro de la cámara, el siguiente obstáculo que se encuentra el haz incidente es la rendija, que cuenta con anchura de L y altura H (Figura 29). Llega la amplitud U_B del campo $\mathcal{B}$ que se encuentra ubicado inmediatamente delante de la rendija

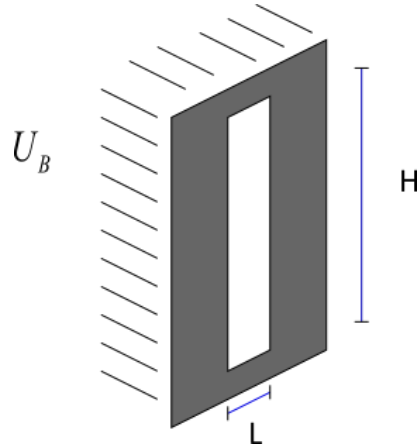


Figura 29 Rendija de anchura L y altura H

Teniendo en cuenta el Ejemplo 1 de la sección 3.2.6, conocemos que la rendija está representada mediante las funciones rectangulares $rect_L(\xi_1)$ y $rect_H(\eta_1)$.

Con esto claro, según la Ec. 3-61, de la rendija sale una amplitud $U_{B'}$, expresada de la siguiente manera:

$$U_{B'}(\xi_1, \eta_1) = U_B(\xi_1, \eta_1) rect_L(\xi_1) rect_H(\eta_1) \quad \text{Ec. 5-9}$$

La amplitud $U_{B'}$, se encuentra en el plano $\mathcal{B}'$, que esta inmediatamente detrás de la rendija rectangular (Figura 30).

Si colocamos la lente L2 a una distancia igual a su distancia focal de $\mathcal{B}'$; de la misma manera, un campo $\mathcal{C}$ se encuentra ubicado en el punto focal de la lente L2 (consulte la Figura 30). La amplitud del campo en el plano $\mathcal{C}$, con coordenadas (ξ_2, η_2) , es la transformada óptica de Fourier de la amplitud $U_{B'}$, es decir, el montaje nos permite trabajar de la misma manera

que en la primera sección (SECCION 5.1). Así la amplitud del campo en C se representaría de la siguiente manera:

$$U_C(\xi_2, \eta_2) = \frac{i}{\lambda f_2} \hat{U}_{B'}\left(\frac{\xi_2}{\lambda f_2}, \frac{\eta_2}{\lambda f_2}\right) \quad \text{Ec. 5-10}$$

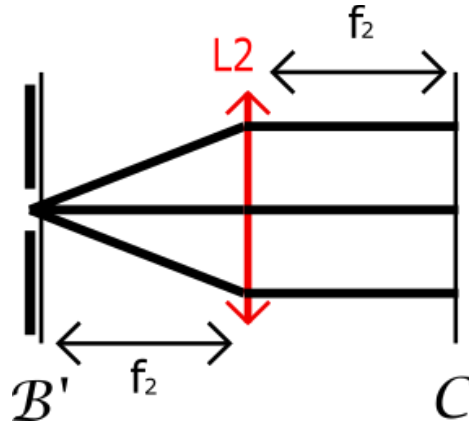


Figura 30 Esquema segunda sección de cámara pushbroom

Reemplazando $U_{B'}$ en Ec. 5-10 tenemos que:

$$U_C(\xi_2, \eta_2) = \frac{i}{\lambda f_2} \Im\{U_B(\xi_1, \eta_1)[rect_L(\xi_1)rect_H(\eta_1)]\} \quad \text{Ec. 5-11}$$

Sustituyendo el valor de U_B (Ec. 5-3) en (Ec. 5-11),

$$U_C(\xi_2, \eta_2) = \frac{i}{\lambda f_2} \Im\left\{\frac{i}{\lambda f_1} \hat{U}_A\left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1}\right)[rect_L(\xi_1)rect_H(\eta_1)]\right\} \quad \text{Ec. 5-12}$$

De esta manera podemos representar la amplitud en el campo C en términos de la amplitud incidente en el plano $\mathcal{A}$. Aplicando la transformada óptica de Fourier a U_C nos queda que la amplitud del campo en el plano C es, por propiedades de la convolución (referenciar convolución):

$$U_C(\xi_2, \eta_2) = \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \left[\Im\left\{\hat{U}_A\left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1}\right)\right\} \right] * \left[LHsenc\left(\frac{\xi_2 L}{\lambda f_2}\right) senc\left(\frac{\eta_2 H}{\lambda f_2}\right) \right] \quad \text{Ec. 5-13}$$

En el plano C (plano de Fourier), la intensidad es el módulo de la amplitud en dicho plano, $|U_c(\xi_2, \eta_2)|^2$.

$$I(\xi_2, \eta_2) = \left\{ \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \left[\mathfrak{F} \left\{ \hat{U}_A \left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1} \right) \right\} \right] * \left[L H \text{senc} \left(\frac{\xi_2 L}{\lambda f_2} \right) \text{senc} \left(\frac{\eta_2 H}{\lambda f_2} \right) \right] \right\}^2 \quad \text{Ec. 5-14}$$

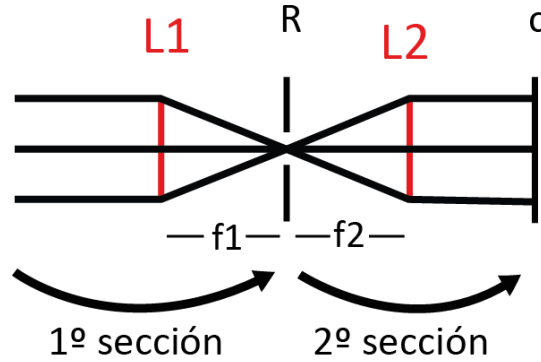


Figura 31 Recorrido del haz desde que incide hasta el plano C .

Retomando el caso propuesto en la primera sección 5.1, la amplitud que entra a la rendija es:

$$U_B(\xi_1, \eta_1) = i\lambda f_1 \delta(\xi_1, \eta_1)$$

Ahora, según lo expuesto anteriormente la amplitud del campo en el plano C viene dado por la Ec. 5-13. Reemplazando nos queda que:

$$U_c(\xi_2, \eta_2) = \frac{i}{\lambda f_2} \mathfrak{F} \{ i\lambda f_1 \delta(\xi_1, \eta_1) \} * \left[L H \text{senc} \left(\frac{\xi_2 L}{\lambda f_2} \right) \text{senc} \left(\frac{\eta_2 H}{\lambda f_2} \right) \right] \quad \text{Ec. 5-15}$$

Resolviendo la transformada de Fourier óptica para la función $\delta(\xi_1, \eta_1)$, obtenemos un resultado igual a 1. Esto se debe a que la transformada de Fourier de una función delta de Dirac es una constante. Así, podemos expresar el resultado de la siguiente manera:

$$U_c(\xi_2, \eta_2) = -\frac{f_1}{f_2} L H \text{senc} \left(\frac{\xi_2 L}{\lambda f_2} \right) \text{senc} \left(\frac{\eta_2 H}{\lambda f_2} \right) \quad \text{Ec. 5-16}$$

U_C es la amplitud del campo que llega al plano C , pero como anteriormente mencionamos, la magnitud a tener en cuenta es la intensidad de dicho campo, que se calcula fácilmente:

$$I_C(\xi_2, \eta_2) = \left[-\frac{f_1}{f_2} LH \operatorname{senc} \left(\frac{\xi_2 L}{\lambda f_2} \right) \operatorname{senc} \left(\frac{\eta_2 H}{\lambda f_2} \right) \right]^2 \quad \text{Ec. 5-17}$$

Para la representación visual del recorrido del campo a través de la cámara pushbroom seguiremos utilizando el software Matlab.

A continuación, se describen las medidas o valores de las constantes a tener en cuenta: la longitud de onda se mantiene constante en todo el recorrido, es decir, $\lambda = 5 \times 10^{-6} \text{ m}$. Definimos la distancia focal de la lente L_2 como $f_2 = 100 \text{ mm}$, y utilizamos f_1 definido en la sección anterior. En las longitudes de la rendija tenemos la proporción de que $H = 60L$ con $L = 0.025 \text{ m}$; con estos valores nuevamente podemos hacer una simulación en Matlab de lo que se observaría en el plano C .

En la Figura 32, Figura 33 y la Figura 34 muestran cómo se ve el campo atravesando cada una de las etapas calculadas:

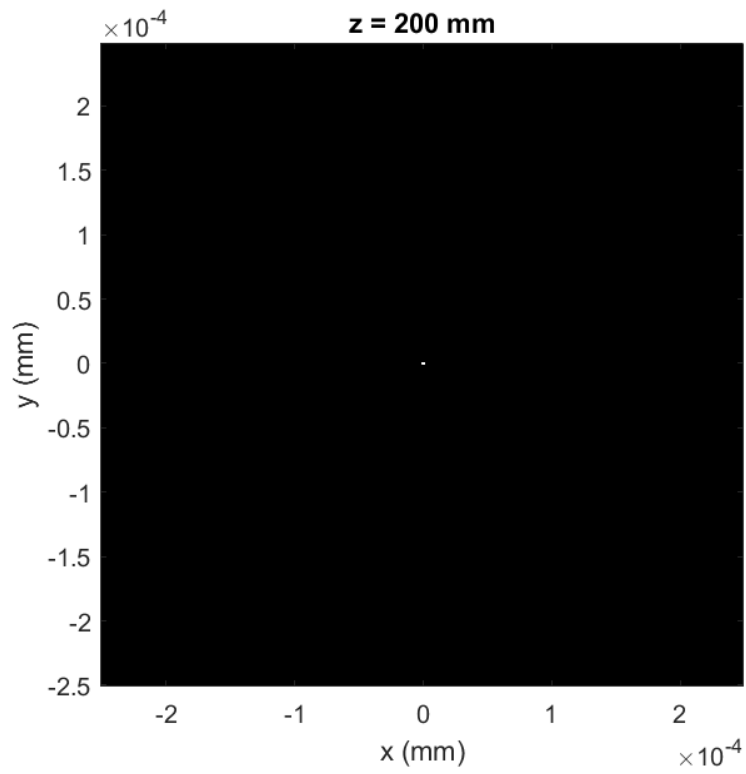


Figura 32 Irradiancia del campo incidente en la rendija, plano $\mathcal{B}$.

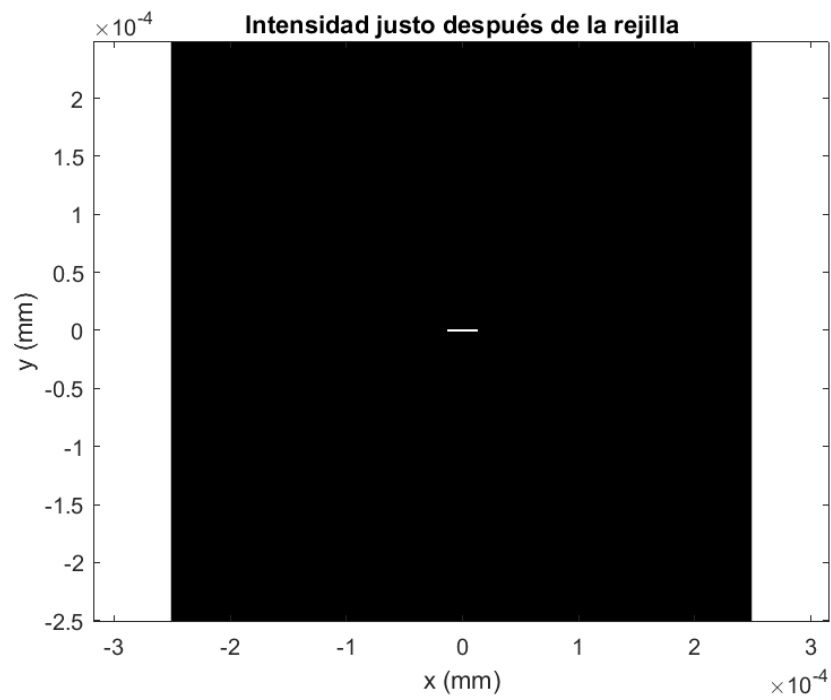


Figura 33 Intensidad que sale de la rendija de medidas $L \times H$. Plano $\mathcal{B}'$

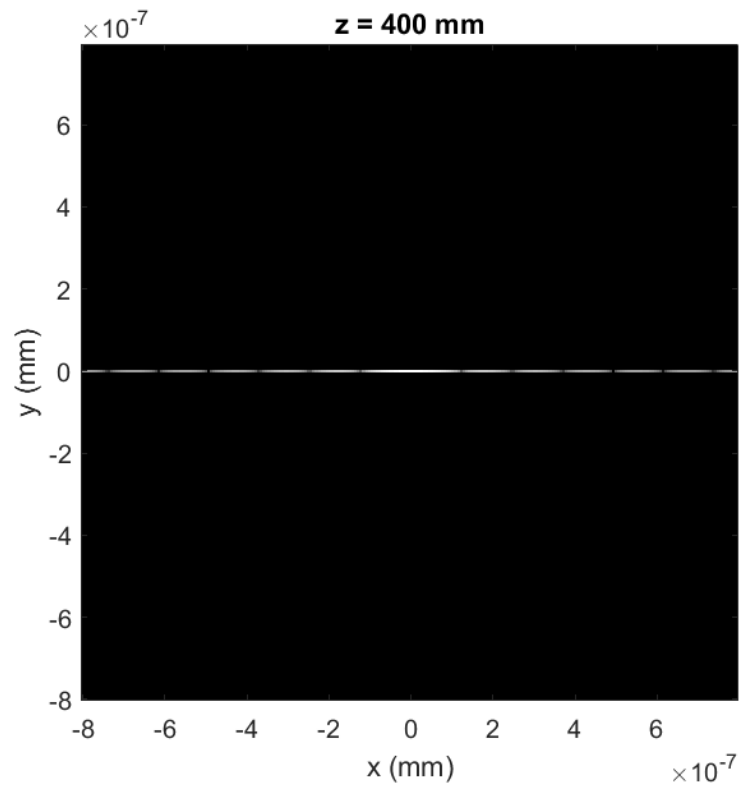


Figura 34 Irradiancia del patrón de difracción de la rendija. Plano C

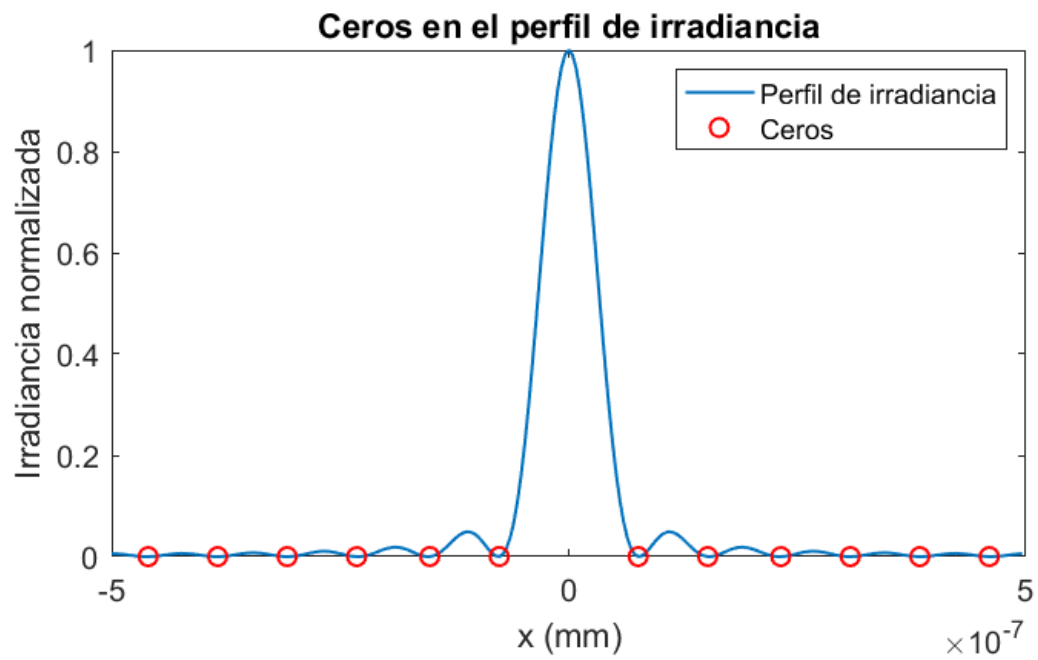


Figura 35 Perfil de la intensidad en el plano C.

La Figura 35 muestra el perfil de la irradiancia normalizada en el plano de observación a una distancia de 400 mm del plano fuente, después de la propagación de una rendija rectangular.

Podemos ver que la intensidad se comporta de la manera esperada. Se marcan los puntos ceros de la irradiancia, que es cuando se cumple que:

$$\frac{\xi_2 L}{\lambda f_2} = b\pi \quad \text{Ec. 5-18}$$

Para cualquier entero $b \neq 0$.

A continuación, se muestra una tabla donde vemos los valores donde se obtiene cada uno de los puntos donde se hace cero la irradiancia, con una distancia entre cada cero de $0.68 \times 10^{-7}\text{ m}$:

Tabla 1 Puntos obtenidos después de la aplicar la difracción de Fraunhofer a la rendija donde la irradiancia se hace 0.

Eje -X (mm) $\times 10^{-7}$	Eje X (mm) $\times 10^{-7}$
-0.68	0.68
-1.32	1.32
-2	2
-2.68	2.68
-3.32	3.32
-4	4

La irradiancia alcanza su valor máximo en el centro cuando $x = 0$, lo que indica una alta concentración de luz en esta región. Este comportamiento es el esperado en patrones de difracción con una rendija rectangular. Los puntos encerrados en la Figura 35 corresponden a los mínimos de interferencia, donde las ondas destructivamente interfieren y cancela la irradiancia. La distribución de la irradiancia es simétrica respecto al centro, lo cual es consistente con una rendija rectangular y una propagación en espacio libre sin distorsiones.

La imagen obtenida en Figura 35 es coherente con lo esperado para la propagación de una onda con una rejilla rectangular. La concentración en el centro de la irradiancia y la identificación de ceros en posiciones simétricas confirman que la simulación ha capturado correctamente el comportamiento de la difracción de Fraunhofer.

Con esto finalizamos el análisis matemático y la simulación del comportamiento de la amplitud del campo dentro del dispositivo hasta un plano C . Con esto entramos en la sección final del dispositivo.

5.3. Tercera Sección

Para continuar con el análisis, ubicamos la rejilla de difracción inmediatamente delante del plano C , de esta manera U_C es la amplitud que entra a la rejilla de difracción.

En el contexto de esta investigación, se trabajarán con dos tipos distintos de rejillas de fase: una de tipo sinusoidal y otra de tipo Echelette [61]. Se presentará y analizará en detalle la función de transmisión de estas rejillas, las cuales poseen dimensiones notables representadas por la relación $W \times T$, donde $T \gg W$. Este enfoque permitirá explorar y comparar las propiedades y comportamientos de ambas rejillas en un entorno controlado y establecer conexiones valiosas en el estudio de la óptica y la difracción.

5.3.1. Rejilla de fase de espesor sinusoidal

La rejilla de difracción posee un perfil de espesor sinusoidal. De acuerdo con la sección 3.5.4, ecuación (Ec. 3-73), el coeficiente de transmisión de la rejilla se expresa de la siguiente manera

$$t(\xi_2, \eta_2) = \left(\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) e^{-2\pi i q F_0 \xi_2} \right) \text{rect}_W(\xi_2) \quad \text{Ec. 5-19}$$

Donde la rejilla está limitada a un tamaño de W en x .

La amplitud U_C incide en dicha rejilla. De acuerdo con la ecuación (Ec. 3-83), la interacción de la rejilla con el campo incidente se describe de la siguiente manera:

$$U_{C'}(\xi_2, \eta_2) = [U_C(\xi_2, \eta_2) t(\xi_2, \eta_2)] \quad \text{Ec. 5-20}$$

Donde $U_{C'}$ es la amplitud en el plano C' , que se encuentra inmediatamente detrás de la rejilla (como se ilustra en la Figura 36). Para determinar el campo en el plano $\mathcal{D}$, que corresponde al plano de Fourier y está ubicado inmediatamente delante del sensor de la cámara tipo pushbroom, posicionamos la lente L3 a una distancia de f_3 del plano C' , que representa la distancia focal de L3. De manera similar, el plano $\mathcal{D}$ se encuentra a la misma distancia de L3, lo que nos lleva nuevamente a un proceso plano a plano.

El campo en el plano $\mathcal{D}$ se calcula aplicando la transformada óptica de Fourier con un recorrido de $2f_3$, lo que nos permite obtener una representación precisa de la amplitud en ese punto:

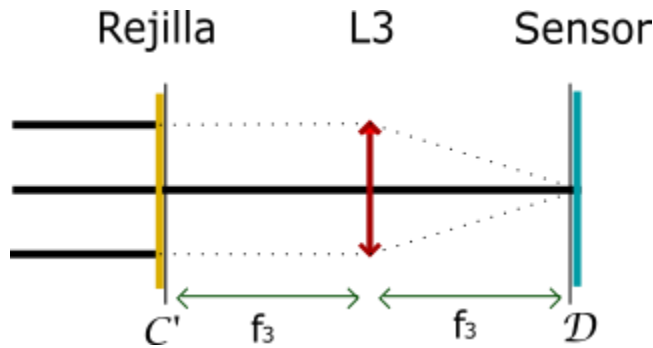


Figura 36 Esquema tercera sección de la cámara pushbroom

$$U_D(\xi_3, \eta_3) = \frac{i}{\lambda f_3} \hat{U}_{C'} \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}, \frac{\eta_3}{\lambda f_3} \right) \quad \text{Ec. 5-21}$$

Reemplazando el valor de $U_{C'}$ la amplitud del campo en el plano $\mathcal{D}$ es:

$$U_D(\xi_3, \eta_3) = \frac{i}{\lambda f_3} \mathfrak{F}\{[U_C(\xi_2, \eta_2)t(\xi_2, \eta_2)]\} \quad \text{Ec. 5-22}$$

De esta forma, por propiedades de la convolución se aplica la transformada de manera independiente a $U_C(\xi_2, \eta_2)$ y a $t(\xi_2, \eta_2)$.

La transformada de $t(\xi_2, \eta_2)$ produce el resultado descrito en la ecuación (Ec. 3-74) convolucionada con la transformada óptica de Fourier de la función rectangular que limita la rejilla en el eje x :

$$\hat{t}(\xi_3, \eta_3) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - qF_0, \frac{\eta_3}{\lambda f_3} \right) * W \text{senc} \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} \right) \quad \text{Ec. 5-23}$$

La transformada de $U_C(\xi_2, \eta_2)$ se expresa como:

$$\hat{U}_C(\xi_3, \eta_3) = \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \mathfrak{F} \left[\left[\mathfrak{F} \left\{ \hat{U}_A \left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1} \right) \right\} \right] * \left[L H \text{senc} \left(\frac{\xi_2 L}{\lambda f_2} \right) \text{senc} \left(\frac{\eta_2 H}{\lambda f_2} \right) \right] \right] \quad \text{Ec. 5-24}$$

Se obtiene:

$$\hat{U}_C(\xi_3, \eta_3) = \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \left[\mathfrak{F} \left(\mathfrak{F} \left\{ \hat{U}_A \left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1} \right) \right\} \right) \left[\lambda^2 f_2^2 \text{rect} \left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3} \right) \text{rect} \left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3} \right) \right] \right] \quad \text{Ec. 5-25}$$

De esta manera, la amplitud del campo en $\mathcal{D}$ es:

$$\begin{aligned} U_D(\xi_3, \eta_3) &= \frac{i}{\lambda f_3} \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \left[\mathfrak{F} \left(\mathfrak{F} \left\{ \hat{U}_A \left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1} \right) \right\} \right) \left[\lambda^2 f_2^2 \text{rect} \left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3} \right) \text{rect} \left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3} \right) \right] \right] \\ &\quad * \left[\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - qF_0, \frac{\eta_3}{\lambda f_3} \right) * W \text{senc} \left(\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-26}$$

Esta sería la expresión matemática que representa el recorrido que hace la amplitud de un campo U_A dentro de una cámara tipo pushbroom hasta llegar al sensor. Esta queda en términos de la transformada de Fourier óptica de la amplitud de dicho campo.

Una vez más lo que se hace es calcular la intensidad que es el módulo de la amplitud en el plano $\mathcal{D}$:

$$I_D(\xi_3, \eta_3) = \left[\frac{i}{\lambda f_3} \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \left[\Im \left(\Im \left\{ \hat{U}_A \left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1} \right) \right\} \right) \left[\lambda^2 f_2^2 \lambda^2 f_2^2 \text{rect} \left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3} \right) \text{rect} \left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3} \right) \right] \right] \right. \\ \left. * \left[\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - q F_0, \frac{\eta_3}{\lambda f_3} \right) * W_{\text{senc}} \left(\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3} \right) \right] \right]^2 \quad \text{Ec. 5-27}$$

Continuando con la solución del ejercicio pasado planteado en las secciones anteriores (5.1, 5.2), llegamos a que la amplitud del campo en el plano D viene dada por:

$$U_D(\xi_3, \eta_3) = -\frac{i f_1 f_2 \lambda}{f_3} \text{rect} \left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3} \right) \text{rect} \left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3} \right) \\ * \left[\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - q F_0, \frac{\eta_3}{\lambda f_3} \right) \right. \\ \left. * W_{\text{senc}} \left(\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3} \right) \right] \quad \text{Ec. 5-28}$$

Para la representación visual del recorrido del campo a través de la cámara de tipo pushbroom nuevamente se realiza con el software Matlab.

A continuación, se describen las medidas o valores de las constantes a tener en cuenta: la longitud de onda se mantiene constante en todo el recorrido, es decir, $\lambda = 5 \times 10^{-6} \text{ m}$. Definimos la distancia focal de la lente L3 como $f_3 = 100 \text{ mm}$, f_2 y f_1 mantiene el mismo valor. En las longitudes de la rendija tenemos la proporción de que $H = 60L$ con $L = 0.025 \text{ m}$; el índice de refracción tiene valor de $n = 1$; la amplitud de la modulación de fase de la rejilla tiene un valor de $a = 1$; el ancho de la rejilla es de $W = 0.015 \text{ m}$, la frecuencia espacial fundamental de la rejilla es de $F_0 = 10 \text{ mm}^{-1}$. Con estos valores nuevamente podemos hacer una simulación en Matlab de lo que se observaría en el plano $\mathcal{D}$.

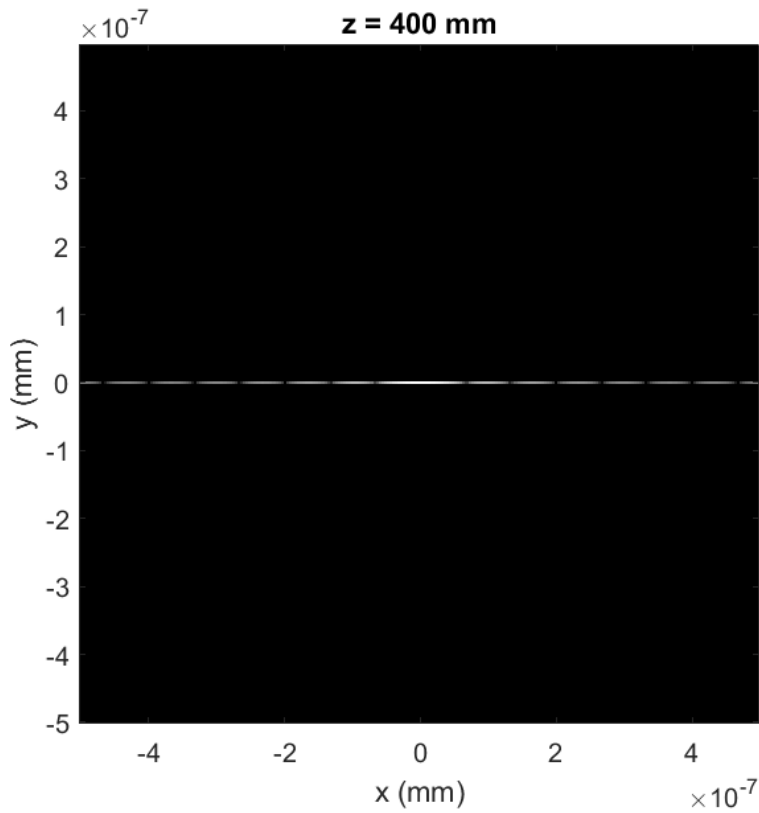


Figura 37 Campo que incide en la rejilla.

La Figura 37 muestra el campo de luz incidente sobre la rejilla. La distancia de propagación hasta ese punto es de $z = 400 \text{ mm}$. En esta representación se observa una distribución uniforme de la irradiancia en el plano de observación antes de que la luz pase a través de la rejilla.

La Figura 38 muestra la irradiancia después de que el campo de luz ha pasado por la rejilla. La distribución de la irradiancia se ha modificado debido a la estructura de la rejilla, mostrando patrones de difracción característicos. La distancia de propagación sigue siendo $z = 400 \text{ mm}$.

La Figura 39 es la imagen que muestra la irradiancia después de una propagación del campo de luz modificado por la rejilla. La distancia total de propagación es mayor y se observa los patrones de difracción más complejos resultantes de esta propagación.

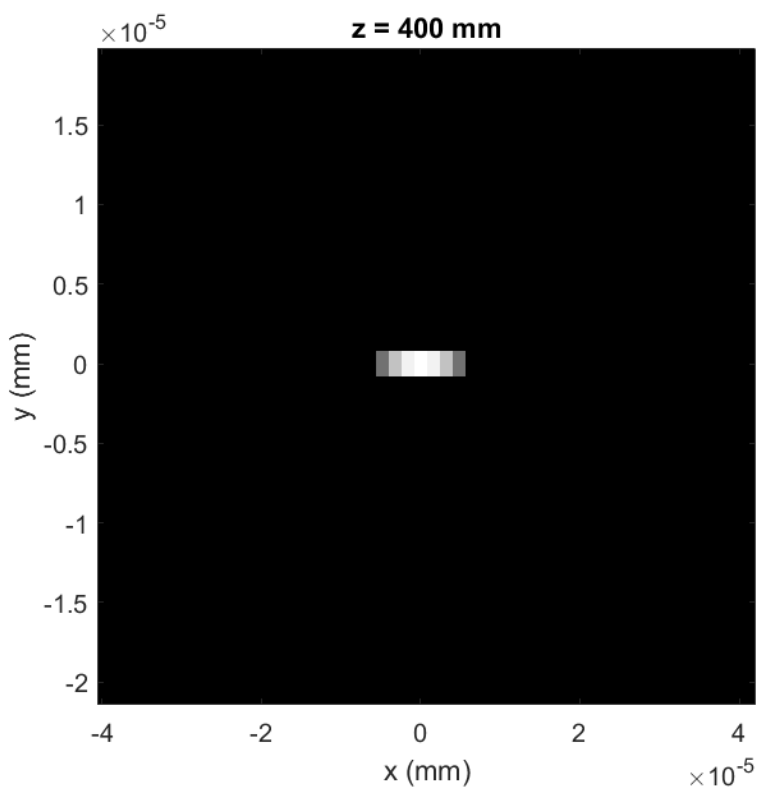
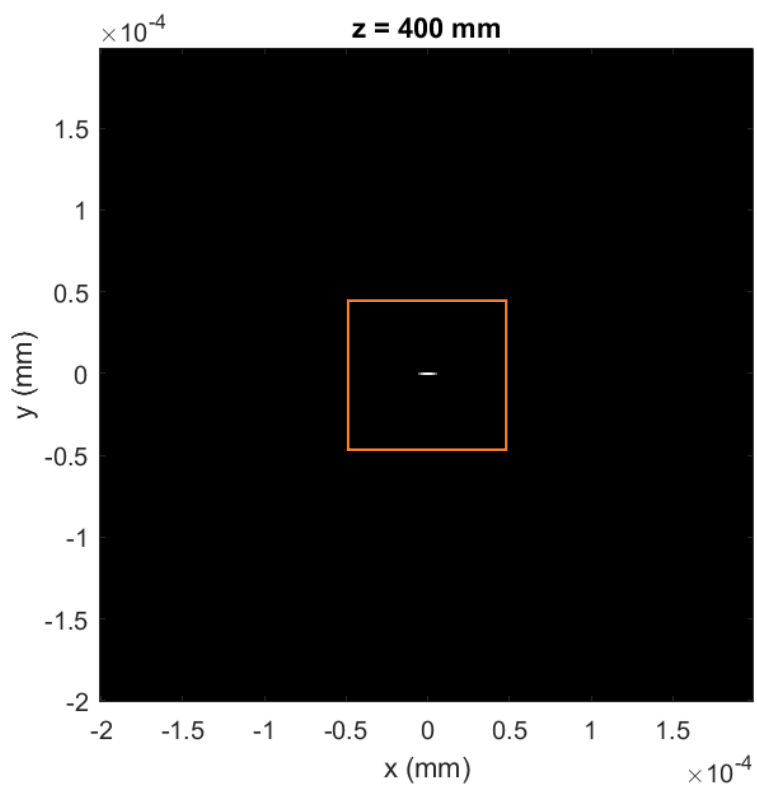


Figura 38 Irradiancia del campo justo después de la rejilla.

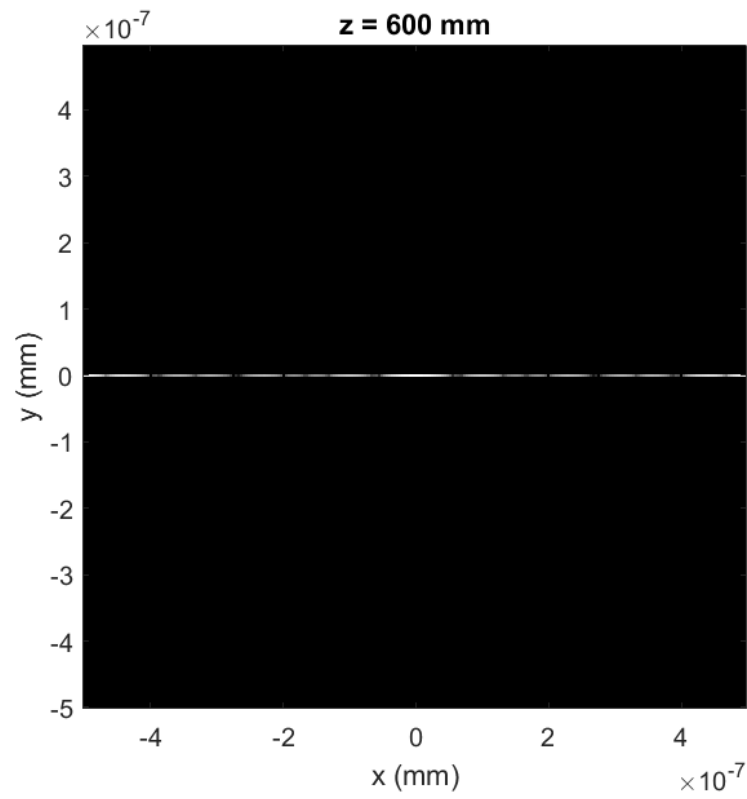


Figura 39 Irradiancia del patrón de difracción de la rejilla

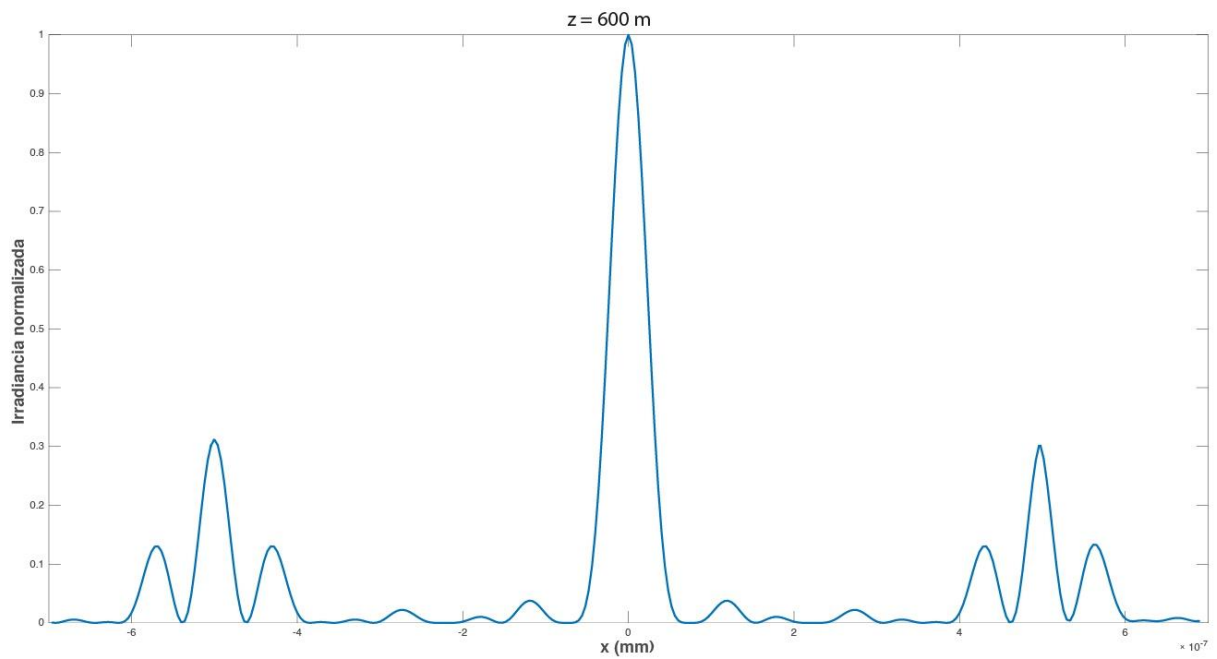


Figura 40 Perfil de la irradiancia normalizada

Como se observa en la Figura 40 hay un pico central muy pronunciado, correspondiente a la difracción principal, y varios picos secundarios. Esta distribución es característica de la difracción de Fraunhofer a través de una rejilla. El patrón obtenido corresponde a la difracción de Fraunhofer, mostrando el pico central prominente y varios picos secundarios. La rejilla introduce un patrón complejo en el campo, influenciado por los parámetros de dicha rejilla, de ahí que estos parámetros y la distancia de difracción toman tanta importancia para definir el patrón de difracción.

La simetría del patrón indica una buena alineación y uniformidad en la estructura de la rejilla. El análisis muestra que la red está difractando de manera efectiva la luz incidente en los diferentes ordenes esperados, cumpliendo con las expectativas teóricas de una red de este tipo.

Con esto se da finalizado el análisis matemático y la simulación del comportamiento del campo de luz a través de una rejilla de difracción de fase sinusoidal, que sería la sección final del dispositivo pushbroom.

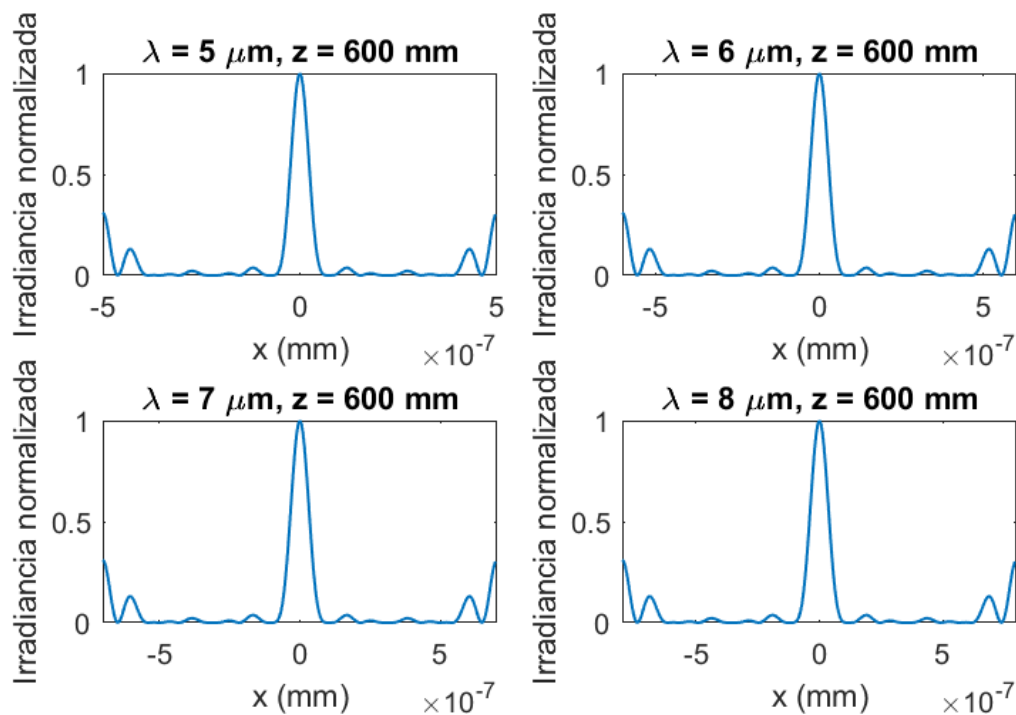


Figura 41 Perfiles de irradiancia de diferentes longitudes de onda.

La Figura 41 muestra los perfiles de la irradiancia generados por la rejilla sinusoidal para diferentes longitudes de onda. Vemos que los máximos secundarios varían ligeramente con la longitud de onda, para longitudes de ondas mayores los lóbulos secundarios son más amplios y la separación entre ellos es mayor, lo cual está en línea con la relación de dispersión de las rejillas.

5.3.2. Red de fase de espesor de tipo Echelette

Se emplea una transparencia de vidrio con un perfil delineado en la Figura 42, donde el índice de refracción del vidrio es representado por 'n', y este se encuentra en condiciones de operación en un entorno de aire

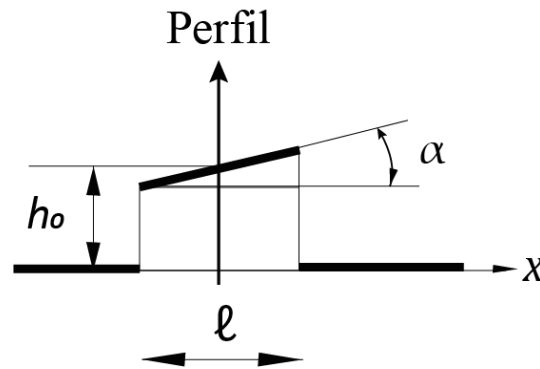


Figura 42 Perfil de una placa de vidrio.

Determinamos la función de la recta para el ángulo α (siendo α considerablemente pequeño).

$$e(x, y) = \tan \alpha x + h_0$$

Dado que α es muy pequeño, la representación de la recta se simplifica en la siguiente forma:

$$e(x, y) = \alpha x + h_0 \quad \text{Ec. 5-29}$$

La función corresponde al espesor del vidrio. Ahora, la fase inducida es:

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi(n-1)e(x, y)}{\lambda} = \frac{2\pi(n-1)(\alpha x + h_0)}{\lambda} \quad \text{Ec. 5-30}$$

La función de transmisión del vidrio, considerando un factor de fase constante a , se define como:

$$m(x, y) = a \text{rect}_\ell(x) \exp\left(-\frac{2i\pi(n-1)}{\lambda} \alpha x\right) \quad \text{Ec. 5-31}$$

Donde

$$a = \exp\left(-\frac{2i\pi(n-1)h_0}{\lambda}\right)$$

Para obtener una rejilla, se procede a la periodización de esta transparencia a través de una secuencia de una peinilla de Dirac con un período ℓ , como se describe en la Ec. 3-81. En nuestra situación específica, la función de transmisión completa de la rejilla se formula de la siguiente manera:

$$t(\xi_2, \eta_2) = \left[\frac{1}{\ell} m(\xi_2, \eta_2) * \Xi_\ell(\xi_2) \right] \text{rect}_W(\xi_2) \quad \text{Ec. 5-32}$$

La rejilla está limitada por una función rectangular de amplitud W en el eje x , siendo $W = n\ell$, donde n es cualquier número natural.

Por ende, la amplitud del campo en el plano C' se expresaría de la siguiente manera:

$$U_{C'}(\xi_2, \eta_2) = U_C(\xi_2, \eta_2) t(\xi_2, \eta_2) \quad \text{Ec. 5-33}$$

Una vez que se ha definido $U_{C'}$, el problema vuelve a ser un asunto de propagación de plano a plano, con un recorrido de $2f_3$. La amplitud del campo en el plano $\mathcal{D}$ es:

$$U_D(\xi_3, \eta_3) = \frac{i}{\lambda f_3} \hat{U}_C\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}, \frac{\eta_3}{\lambda f_3}\right) * \hat{t}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}, \frac{\eta_3}{\lambda f_3}\right) \quad \text{Ec. 5-34}$$

La transformada $\hat{U}_C$ se calculó previamente (Ec. 5-25). Por consiguiente, se procede a calcular la transformada de $\hat{t}$:

$$\hat{t}(\xi_3, \eta_3) = \frac{1}{\ell} \mathfrak{F}\{[m(\xi_2, \eta_2) * \Xi_\ell(\xi_2)] \text{rect}_W(\xi_2)\} \quad \text{Ec. 5-35}$$

Así $\hat{m}$ queda:

$$\hat{m}(\xi_3, \eta_3) = a\ell \text{senc}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) * \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda}\alpha\right) \quad \text{Ec. 5-36}$$

Por otro lado, la peinilla de Dirac según la Ec. 3-68:

$$\hat{\Xi}_\ell(\xi_3) = \Xi_{1/\ell}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) \quad \text{Ec. 5-37}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{t}(\xi_3, \eta_3) &= \left[a\ell \left[\text{senc}\left(\frac{\ell \xi_3}{\lambda f_3}\right) * \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda}\alpha\right) \right] \Xi_{1/\ell}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) \right] \\ &\quad * W \text{senc}\left(\frac{W \xi_3}{\lambda f_3}\right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-38}$$

La amplitud del campo en $\mathcal{D}$ es:

$$\begin{aligned} U_D(\xi_3, \eta_3) &= \frac{i}{\lambda f_3} \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \left[\Im\left(\Im\left\{\hat{U}_A\left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1}\right)\right\}\right) \left[\lambda^2 f_2^2 \text{rect}\left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3}\right) \text{rect}\left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3}\right) \right] \right] \\ &\quad * a\ell \left[\left[\text{senc}\left(\frac{\ell \xi_3}{\lambda f_3}\right) * \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda}\alpha\right) \right] \Xi_{1/\ell}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) \right] * W \text{senc}\left(\frac{W \xi_3}{\lambda f_3}\right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-39}$$

Nuevamente lo que nos interesa es la intensidad de dicho campo, que es el módulo de la amplitud de campo en el plano $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} I_D(\xi_3, \eta_3) &= \left(\frac{i}{\lambda f_3} \frac{i}{\lambda f_2} \frac{i}{\lambda f_1} \left[\Im\left(\Im\left\{\hat{U}_A\left(\frac{\xi_1}{\lambda f_1}, \frac{\eta_1}{\lambda f_1}\right)\right\}\right) \left[\lambda^2 f_2^2 \text{rect}\left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3}\right) \text{rect}\left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3}\right) \right] \right] \right. \\ &\quad \left. * a\ell \left[\left[\text{senc}\left(\frac{\ell \xi_3}{\lambda f_3}\right) * \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda}\alpha\right) \right] \Xi_{1/\ell}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) \right] * W \text{senc}\left(\frac{W \xi_3}{\lambda f_3}\right) \right)^2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 5-40}$$

Con esto resuelto procedemos a culminar el ejercicio práctico que se ha trabajado en las sesiones 5.1 y 5.2, al reemplazar las transformada del campo que incide desde el comienzo, U_A , llegamos a:

$$\begin{aligned}
U_D(\xi_3, \eta_3) = & \left[-\frac{if_1 f_2 \lambda}{f_3} \text{rect}\left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3}\right) \text{rect}\left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3}\right) \right] \\
& * a \ell \left[\left[\text{senc}\left(\frac{\ell \xi_3}{\lambda f_3}\right) * \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha\right) \right] \exists_{1/\ell}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) \right] \\
& * W \text{senc}\left(\frac{W \xi_3}{\lambda f_3}\right)
\end{aligned} \tag{Ec. 5-41}$$

Con ayuda de Matlab volvemos a representar visualmente la simulación de la intensidad de la amplitud del campo en el plano $\mathcal{D}$, que sería la amplitud que recibe el sensor del dispositivo pushbroom, es decir, es la amplitud del campo que lleva la información requerida para el análisis del espectro del objeto que se quiera trabajar.

A continuación, se especifican los valores de las constantes necesarias para el buen desarrollo de la simulación: la longitud de onda se mantiene constante, es decir, $\lambda = 5 \times 10^{-6} \text{ m}$. El ancho de la rendija permanece igual que en las secciones anteriores con $H = 60L$ con $L = 0.025 \text{ m}$; el índice de refracción tiene valor de $n = 1$; la amplitud de la modulación de fase de la rejilla tiene un valor de $a = 1$; el ancho de la rejilla es de $W = 0.03 \text{ m}$, Definimos la distancia focal de la lente L3 como $f_3 = 250 \text{ mm}$, $f_2 = 250$ y f_1 mantiene el mismo valor, para ampliar el patrón de difracción y observar mejor los picos secundarios. En este caso la amplitud de la fase de la rejilla es de 2π para darle impacto a la modulación de fase de la rejilla Echelette. El periodo de la rejilla es de 0.055 m , lo cual ayuda a hacer visibles los órdenes de difracción secundarios.

Las siguientes figuras muestran cómo se ve el campo atravesando cada una de las etapas del recorrido:

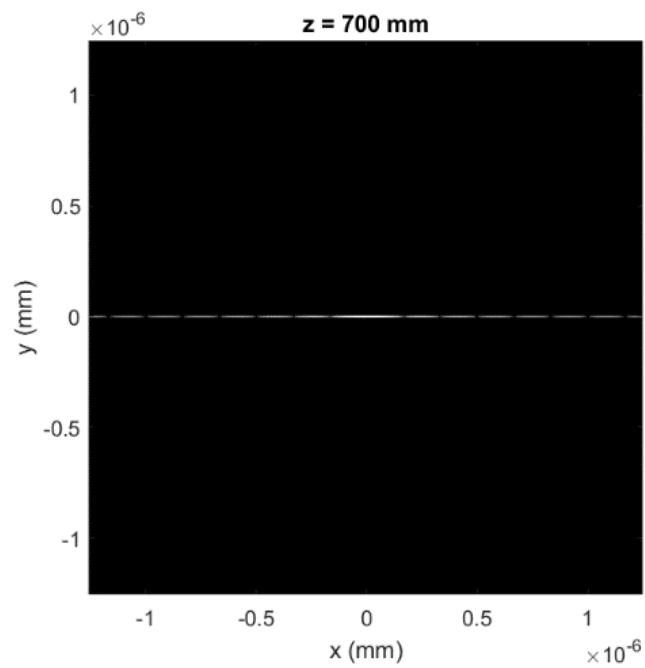


Figura 43 Campo incidente a la rejilla

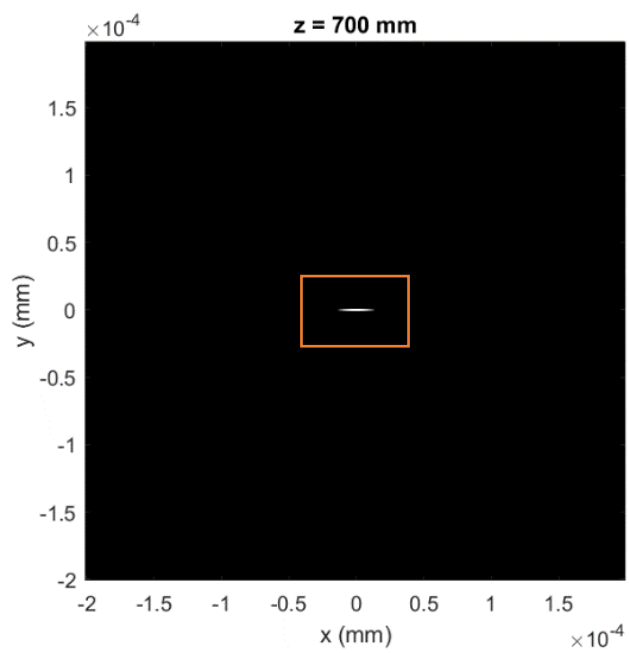


Figura 44 Irradiancia justo después de la rejilla.

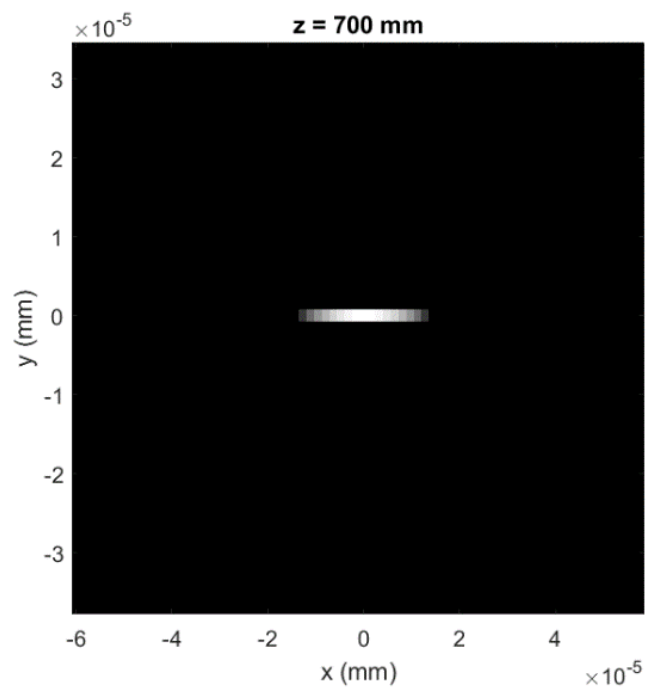


Figura 45 Irradiancia ampliada justo después de la rejilla.

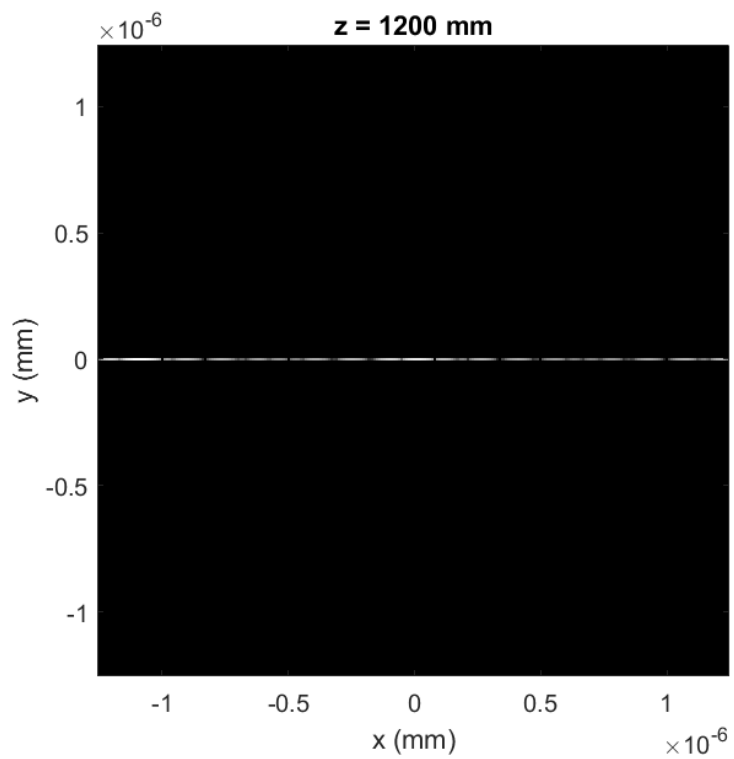


Figura 46 Irradiancia del campo propagado

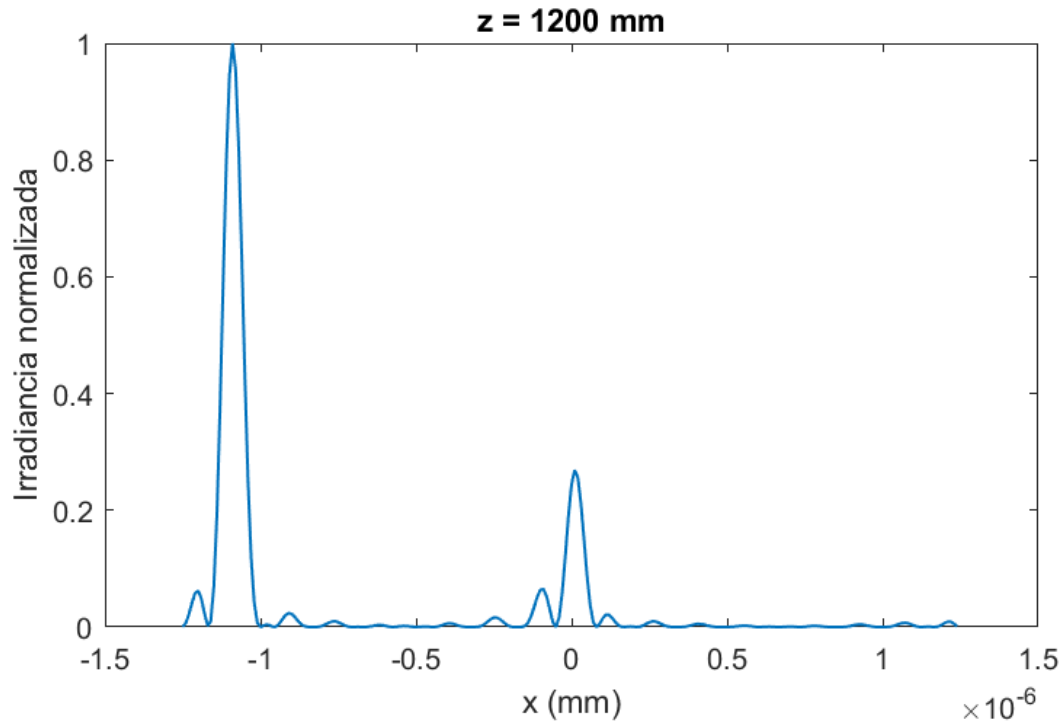


Figura 47 Perfil de irradiancia normalizado

La Figura 47 es coherente con lo que se espera de un patrón de difracción para una rejilla Echelette de fase [62] [63], donde se observa una clara concentración de energía en un orden de difracción. Este comportamiento es consistente con el diseño de la rejilla, la cual está optimizada para maximizar la difracción de la luz en un orden específico, generalmente el primero.

Además, el perfil presenta asimetrías que son propias de una rejilla Echelette, donde la inclinación de las ranuras introduce un desbalance en la distribución de energía entre los órdenes difractados. Este resultado concuerda con el principio de funcionamiento de una rejilla Echelette, cuyo diseño geométrico y fase ajustada permite controlar la dispersión espectral y la dirección predominante de la luz difractada.

En general, la Figura 47 es una representación adecuada para el comportamiento de una rejilla Echelette de fase. Con esto se da finalizado el análisis matemático y la simulación del comportamiento del campo de luz a través de una rejilla de difracción de fase tipo Echelette, que sería la sección final del dispositivo pushbroom. Esta sería la información

espectral que llegaría al sensor del dispositivo de barrido tipo pushbroom para el análisis de las características que se desee estudiar.

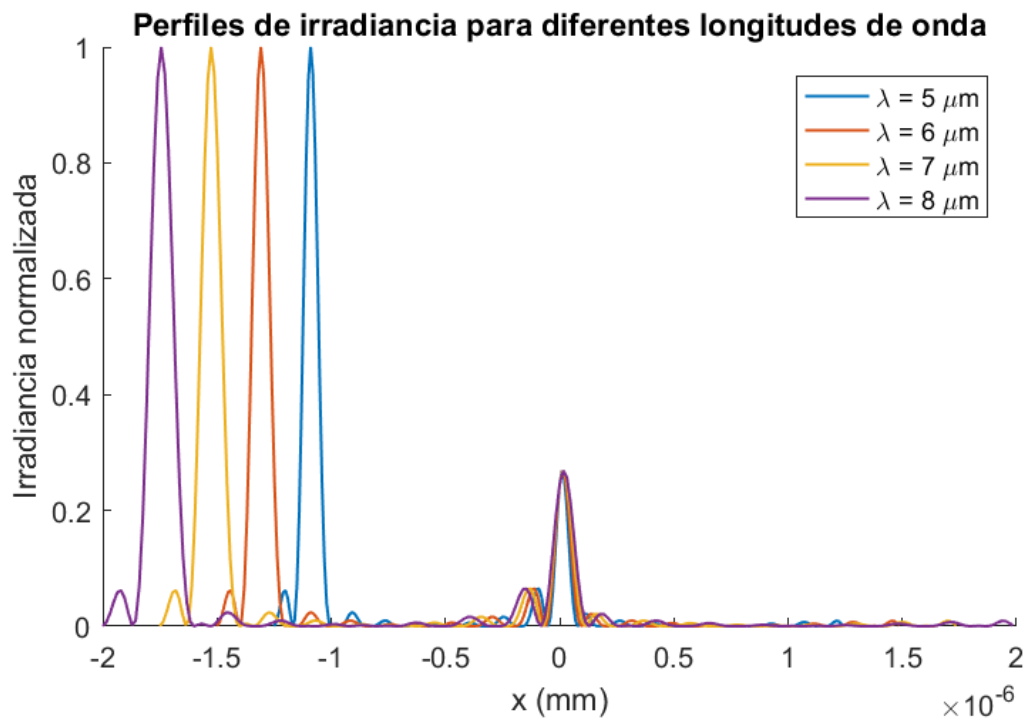


Figura 48 Perfiles de diferentes longitudes de ondas

La Figura 48 muestra los perfiles de irradiancia generados por una rejilla de Echelette para diferentes longitudes de onda. Esto demuestra que la rejilla de este estudio demuestra una alta capacidad de resolución espectral, separando eficientemente las diferentes longitudes de onda. Los resultados obtenidos son coherentes con las propiedades esperadas de las rejillas Echelette.

5.4. Resolución Sinusoidal

Para encontrar expresiones matemáticas a partir de la formula encontrada en la sección anterior (Ec. 5-28) que nos permita calcular las resoluciones espectrales y espaciales mínimas requeridas, analizaremos cada término de la formula y derivaremos expresiones para la resolución espectral mínima $\Delta\lambda$ y la resolución espacial mínima Δx .

Retomando la ecuación:

$$U_D(\xi_3, \eta_3) = -\frac{if_1f_2\lambda}{f_3} \text{rect}\left(\frac{f_2\xi_3}{Lf_3}\right) \text{rect}\left(\frac{f_2\eta_3}{Hf_3}\right) \\ * \left[\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q\left(\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - qF_0, \frac{\eta_3}{\lambda f_3}\right) \right. \\ \left. * Wsenc\left(\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3}\right) \right] \quad \text{Ec. 5-42}$$

Donde:

- $U_D(\xi_3, \eta_3)$ es el campo difractado en el plano D, es decir, la amplitud que llega al sensor.
- f_1, f_2, f_3 son las distancias focales de las lentes del sistema.
- λ es la longitud de onda de la luz
- $\text{rect}\left(\frac{f_2\xi_3}{Lf_3}\right) \text{rect}\left(\frac{f_2\eta_3}{Hf_3}\right)$ representan las aperturas finitas, siendo L y H el ancho de la apertura.
- J_q es la función de Bessel de orden q, que da la amplitud del máximo de difracción de orden q.
- $\delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - qF_0, \frac{\eta_3}{\lambda f_3}\right)$ representa las posiciones de los órdenes de difracción en las coordenadas ξ_3 y η_3 .
- $F_0 = \frac{1}{d}$ es la frecuencia espacial de la rejilla, donde d es el periodo de la rejilla.
- $Wsenc\left(\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3}\right)$ representa el envolvente de difracción debido al ancho de la rejilla.

5.4.1. Resolución espectral

Los órdenes de difracción se encuentran en las posiciones indicadas por los argumentos de las funciones delta:

$$\frac{\xi_3}{\lambda f_3} = qF_0 \text{ y } \frac{\eta_3}{\lambda f_3} = 0 \quad \text{Ec. 5-43}$$

Despejando ξ_3 :

$$\xi_3 = qF_0\lambda f_3 \quad \text{Ec. 5-44}$$

Para un pequeño cambio en la longitud de onda $\Delta\lambda$, el desplazamiento en la posición del orden q es:

$$\Delta\xi_3 = \frac{d\xi_{3q}}{d\lambda} \Delta\lambda = qF_0f_3\Delta\lambda \quad \text{Ec. 5-45}$$

El ancho de cada máximo de difracción está determinado por la función *senc*:

$$W_{senc} \left(\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3} \right)$$

El primer cero de la función *senc* ocurre cuando

$$\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3} = \pm\pi \quad \text{Ec. 5-46}$$

Por lo tanto, el ancho medio máximo $\delta\xi_3$ del máximo de difracción es:

$$\delta\xi_3 = \frac{\lambda f_3 \pi}{W} \quad \text{Ec. 5-47}$$

Según el criterio de Rayleigh, dos longitudes de onda λ y $\lambda + \Delta\lambda$ son justo resolubles cuando el desplazamiento en la posición $\Delta\xi_3$ es igual al ancho medio máximo $\delta\xi_3$:

$$\Delta\xi_3 = \delta\xi_3 \quad \text{Ec. 5-48}$$

Sustituyendo nos queda:

$$qF_0f_3\Delta\lambda = \frac{\lambda f_3 \pi}{W} \quad \text{Ec. 5-49}$$

Lo que nos lleva a

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda \pi}{qF_0W} \quad \text{Ec. 5-50}$$

De esta manera el poder de resolución R es:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{qF_0W}{\pi} \quad \text{Ec. 5-51}$$

Reconociendo que F_0 es la frecuencia de la rejilla:

$$R = \frac{qW}{\pi d} \quad \text{Ec. 5-52}$$

El número de periodos de la rejilla M contenidos en la apertura de ancho W es:

$$M = \frac{W}{d} \quad \text{Ec. 5-53}$$

Reemplazando llegamos a que:

$$R = \frac{qM}{\pi} \quad \text{Ec. 5-54}$$

Para valores grandes de M , el factor $\frac{1}{\pi}$ puede aproximarse o captarse como una constante de proporcionalidad, lo que nos lleva a:

$$R \approx qM \quad \text{Ec. 5-55}$$

De esta manera, la diferencia mínima de longitud de onda resoluble $\Delta\lambda$ está dada por:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{qM} \quad \text{Ec. 5-56}$$

En el análisis de fenómenos de difracción, es común estudiar como la posición de los máximos de difracción en un plano de detección cambian cuando varia la longitud de onda de luz, lo cual es fundamental para entender y calcular la resolución espectral. A continuación, se va a dar una breve explicación de un concepto que se utilizó para encontrar la expresión matemática de la resolución espectral.

Cuando tenemos una función que describe la posición de un máximo de difracción en función de la longitud de onda λ , podemos utilizar el cálculo diferencial para determinar cómo pequeños cambios en λ afectan la posición ξ_3 . Especialmente, para un pequeño cambio $\Delta\lambda$, el cambio correspondiente a la posición $\Delta\xi_3$ se puede aproximar mediante la derivada de ξ_3 respecto a λ :

$$\Delta\xi_3 \approx \frac{d\xi_3}{d\lambda} \Delta\lambda \quad \text{Ec. 5-57}$$

Esta aproximación es válida cuando $\Delta\lambda$ es lo suficientemente pequeño como para que los términos de orden superior en la expansión de Taylor sean despreciables:

$$\xi_3(\lambda + \Delta\lambda) = \xi_3(\lambda) + \frac{d\xi_3}{d\lambda}|_{\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi_3}{d\lambda^2}|_{\lambda}(\Delta\lambda)^2 + \dots \quad \text{Ec. 5-58}$$

Para valores pequeños de $\Delta\lambda$, los términos de orden superior $((\Delta\lambda)^2, \text{ etc})$ son muy pequeños y pueden ignorarse. Por lo tanto:

$$\Delta\xi_3 = \xi_3(\lambda + \Delta\lambda) - \xi_3(\lambda) \approx \frac{d\xi_3}{d\lambda}|_{\lambda}\Delta\lambda \quad \text{Ec. 5-59}$$

Este resultado nos dice que el desplazamiento en la posición del máximo de difracción es directamente proporcional al cambio en la longitud de onda. La constante de proporcionalidad es $\frac{d\xi_3}{d\lambda}$, que depende de los parámetros del sistema.

Criterio de Rayleigh

Este criterio es fundamental para determinar la capacidad de un sistema óptico para distinguir entre dos fuentes cercanas (por ejemplo, dos longitudes de onda ligeramente diferentes). Según este criterio, dos señales son justamente resolubles cuando la posición del máximo de una coincide con el primer mínimo de la otra.

En los cálculos anteriores se aplicó el criterio donde igualamos el desplazamiento en posición debido a una variación en la longitud de onda ($\Delta\xi_3$) con el ancho medio máximo ($\delta\xi_3$) de un pico de difracción.

$$\Delta\xi_3 = \delta\xi_3 \quad \text{Ec. 5-60}$$

- $\Delta\xi_3$: representa el desplazamiento en la posición del máximo de difracción debido a un pequeño cambio en la longitud de onda ($\Delta\lambda$). Indica cuanto se separan los picos de difracción correspondientes a dos longitudes de ondas diferentes.
- $\delta\xi_3$: es el ancho medio máximo de un pico de difracción individual, es decir, la distancia desde el máximo hasta el primer mínimo (el ancho del máximo central)

Según el criterio de Rayleigh, para que dos picos sean justamente resolubles:

$$\Delta\xi_3 \geq \delta\xi_3 \quad \text{Ec. 5-61}$$

En la derivación, consideramos el caso limite donde los picos justamente resueltos, por lo que

$$\Delta\xi_3 = \delta\xi_3$$

Este criterio se usa en el paso crucial donde se determina la resolución espectral mínima del sistema. Al aplicar este criterio, se puede encontrar la relación entre la diferencia mínima de longitud de onda detectable y los parámetros físicos del sistema óptico, como orden de difracción y características de la rejilla. Para más información [64] [65] [40] [66] [67].

5.4.2. Resolución espacial

La resolución espacial está limitada por el ancho de la función de dispersión de punto, que está determinada por la función de apertura y el patrón de difracción.

El máximo central de la función *senc* define la función de dispersión de punto:

$$\text{senc}\left(\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3}\right)$$

El primer cero de la función *senc* en el dominio espacial ocurre cuando:

$$\frac{\xi_3 W}{\lambda f_3} = \pm\pi$$

Despejando ξ_3 :

$$\delta\xi_3 = \frac{\lambda f_3 \pi}{W} \quad \text{Ec. 5-62}$$

Esto representa la separación espacial mínima resoluble Δx en el plano D:

$$\Delta x = \delta\xi_3 = \frac{\lambda f_3 \pi}{W} \quad \text{Ec. 5-63}$$

Al derivar estas expresiones matemáticas a partir de la formula encontrada, se puede calcular las resoluciones espectrales y espaciales mínimas requeridas para el sistema óptico basándose en los parámetros de la rejilla y la configuración del sistema.

5.5. Resolución Echelette

Para encontrar expresiones matemáticas a partir de la formula encontrada en la sección anterior (Ec. 5-41) que nos permita calcular las resoluciones espectrales y espaciales mínimas requeridas, analizaremos cada término de la formula y derivaremos expresiones para la resolución espectral mínima $\Delta\lambda$ y la resolución espacial mínima Δx .

Retomando la ecuación:

$$U_D(\xi_3, \eta_3) = \left[-\frac{if_1 f_2 \lambda}{f_3} \text{rect}\left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3}\right) \text{rect}\left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3}\right) \right] \\ * a \ell \left[\left[\text{senc}\left(\frac{\ell \xi_3}{\lambda f_3}\right) * \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha\right) \right] \exists_{1/\ell}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) \right] \\ * W \text{senc}\left(\frac{W \xi_3}{\lambda f_3}\right) \quad \text{Ec. 5-64}$$

Donde:

- $U_D(\xi_3, \eta_3)$ es el campo difractado en el plano D, es decir, la amplitud que llega al sensor.
- f_1, f_2, f_3 son las distancias focales de las lentes del sistema.
- λ es la longitud de onda de la luz
- $\text{rect}\left(\frac{f_2 \xi_3}{L f_3}\right) \text{rect}\left(\frac{f_2 \eta_3}{H f_3}\right)$ representan las aperturas finitas, siendo L y H el ancho de la apertura.
- a es un factor de amplitud.
- ℓ es el parámetro relacionado con la rejilla.
- $\delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha\right)$ es una función Delta desplazada.
- $\exists_{1/\ell}\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right)$ es la función peine de Dirac con periodo $1/\ell$.
- $W \text{senc}\left(\frac{W \xi_3}{\lambda f_3}\right)$ representa el envolvente de difracción debido al ancho de la rejilla.

5.5.1. Resolución espectral

Aplicamos la propiedad de convolución de la función *senc* con la función Delta desplazada:

$$senc(x) * \delta(x - x_0)$$

Ec. 5-65

Entonces, podemos escribir:

$$a\ell \left[senc\left(\frac{\ell \xi_3}{\lambda f_3}\right) * \delta\left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha\right) \right] = a\ell senc\left(\ell \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha\right)\right) \quad Ec. 5-66$$

La multiplicación por la función peine de Dirac produce replicas periódicas de la función *senc* desplazada:

$$\begin{aligned} a\ell senc\left(\ell \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha\right)\right) \exists_{1/\ell} \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3}\right) \\ = a\ell \sum_{k=-\infty}^{\infty} senc\left(\ell \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha - \frac{k}{\ell}\right)\right) \end{aligned} \quad Ec. 5-67$$

La función *senc* tiene máximos en $x = 0$. Por lo tanto, establecemos su argumento a cero:

$$\ell \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha - \frac{k}{\ell}\right) = 0 \quad Ec. 5-68$$

Despejando ξ_3 :

$$\xi_3 = f_3 \left((n-1)\alpha + \frac{\lambda k}{\ell} \right) \quad Ec. 5-69$$

Considerando una pequeña variación $\Delta\lambda$, derivando respecto a λ

$$\frac{d\xi_3}{d\lambda} = f_3 \left(\frac{d}{d\lambda} ((n-1)\alpha) + \frac{k}{\ell} \right) \quad Ec. 5-70$$

Ya que n y α son constantes:

$$\frac{d\xi_3}{d\lambda} = f_3 \left(\frac{k}{\ell} \right) \quad Ec. 5-71$$

De esta manera el desplazamiento en posición es:

$$\Delta\xi_3 = f_3 \left(\frac{k}{\ell} \right) \Delta\lambda \quad Ec. 5-72$$

Los ceros de la función *senc* ocurren cuando el argumento es un múltiplo de $\pm\pi$

$$\ell \left(\frac{\xi_3}{\lambda f_3} - \frac{(n-1)}{\lambda} \alpha - \frac{k}{\ell} \right) = \pm \pi \quad \text{Ec. 5-73}$$

El ancho hasta el primer cero es:

$$\delta \xi_3 = \frac{\pi \lambda f_3}{\ell} \quad \text{Ec. 5-74}$$

El criterio de Rayleigh establece:

$$\Delta \xi_3 = \delta \xi_3 \quad \text{Ec. 5-75}$$

Sustituyendo

$$f_3 \left(\frac{k}{\ell} \right) \Delta \lambda = \frac{\pi \lambda f_3}{\ell} \quad \text{Ec. 5-76}$$

Simplificando

$$\Delta \lambda = \frac{\pi \lambda}{k} \quad \text{Ec. 5-77}$$

La resolución es:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{k}{\pi} \quad \text{Ec. 5-78}$$

Asumiendo que $k = q$ (orden de difracción):

$$R = \frac{q}{\pi} \quad \text{Ec. 5-79}$$

Si consideramos el número total de periodos de la rejilla $M = W/\ell$, entonces R puede expresarse como:

$$R = qM \quad \text{Ec. 5-80}$$

5.5.2. Resolución Espacial

La resolución espacial viene dada por el ancho del máximo de difracción:

$$\Delta x = \delta \xi_3 = \frac{\pi \lambda f_3}{\ell} \quad \text{Ec. 5-81}$$

Si $\ell = \frac{1}{d}$:

$$\Delta x = \pi \lambda f_3 d \quad \text{Ec. 5-82}$$

Comparación de las dos rejillas:

A continuación, se muestra los resultados obtenidos en las resoluciones espectral y espacial mínimas:

Rejilla sinusoidal:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{qM}; \Delta x = \frac{\lambda f_3 \pi}{W}$$

Donde $M = 2wf_0 = \frac{2W}{d}$

Rejilla Echelette:

$$\Delta\lambda = \frac{\pi\lambda}{k}; \Delta x = \frac{\pi\lambda f_3}{\ell}$$

Ambas expresiones para $\Delta\lambda$ depende de la longitud de onda λ u el orden de difracción q . La resolución espectral de la rejilla sinusoidal depende del producto qM , donde M es el numero de periodos de la rejilla en la apertura. Esto implica que aumentar M mejora la resolución espectral, en cambio la resolución espectral solo depende de q . Esto implica que en la rejilla sinusoidal el número de periodos M es crucial para la capacidad de la rejilla.

Para mejorar la resolución espectral, en la rejilla sinusoidal se puede aumentar M y/o trabajar ordenes de difracción más altos q . La resolución espectral de la rejilla Echelette no es afectada, directamente, al aumentar M según la expresión matemática, sin embargo, en la práctica, el tamaño de la rejilla podría influir en otros aspectos del sistema.

Para Δx ambas expresiones dependen de la longitud de onda λ y la distancia focal f_3 .

La rejilla sinusoidal la resolución espacial es inversamente proporcional al ancho de la rejilla W lo que limita la resolución espacial, mientras que la rejilla Echelette es inversamente proporcional a ℓ lo que determina la resolución espacial.

Para mejorar la resolución de espacial de la rejilla sinusoidal se puede aumentar el ancho de la rejilla W . Para mejorar la resolución de la rejilla Echelette se puede reducir el periodo de la red al incrementar ℓ .

Las diferencias en las expresiones para las resoluciones espectral y espacial entre las dos rejillas reflejan diferencias en los modelos y aproximaciones utilizados en sus derivaciones: la rejilla sinusoidal sugiere que tanto el tamaño total de la rejilla como el número de periodos contribuyen a la resolución, lo que es consistente con una rejilla de difracción clásica; la rejilla Echelette destaca el papel del periodo de la rejilla y el orden de difracción, lo que es consistente con una rejilla de este tipo.

6. CONCLUSIONES

Se estudio de manera detallada y profunda la fundamentación general de la óptica metaxial, que incluyen conceptos tales como: emisor y receptor esférico, transparencia de curvatura, esfera de Fourier, difracción de Fraunhofer, entre otros; que permite describir la propagación de frente de onda y los cambios que sufre éste cuando atraviesa diferentes elementos ópticos. Y así mismo, la aplicación de la óptica metaxial al estudio de la propagación del campo en una cámara tipo *pushbroom*, la cual puede estar provista de rejillas sinusoidal y Echelette.

La descripción matemática del proceso de propagación de un frente de onda en una cámara *pushbroom* se ha desarrollado con éxito, empleando las ecuaciones de difracción de Fraunhofer y la transformada de Fourier óptica, mediante el uso de la óptica metaxial. Los cálculos detallados han permitido formular una ecuación que describe cómo se modula y propaga la luz a través del sistema, proporcionando una base sólida para la extracción de información espectral. Este modelo matemático incorpora las variables espectrales y espaciales de la luz, lo que facilita la identificación de características específicas a analizar.

La investigación sobre el modelo físico de propagación de la luz en una cámara espectral de barrido tipo *pushbroom* ha permitido comprender en detalle el comportamiento de la luz al interactuar con los elementos ópticos del sistema. La comprensión de la difracción producida por una rejilla tipo Echelette ha sido fundamental para optimizar el diseño del sistema, garantizando que cumpla con los estándares de calidad necesarios para su aplicación. En el trabajo, se puede ver que la red de difracción tipo Echelette ofrece mejor eficiencia de difracción y es la recomendada para ser utilizada en la cámara tipo *pushbroom*.

Las simulaciones realizadas en el software Matlab han validado los modelos matemáticos desarrollados. Se ha logrado simular el comportamiento del sistema óptico, confirmando que la configuración propuesta puede captar imágenes espectrales con la resolución

necesaria para el análisis. Las simulaciones han permitido ajustar parámetros críticos, como el tamaño de la apertura y el periodo de la rejilla de difracción, el cual permite optimizar el rendimiento del sistema.

Se ha derivado una expresión matemática que permite determinar las resoluciones espacial y espectral del sistema. Dicha expresión se fundamenta en la teoría de la difracción y en parámetros clave del sistema *pushbroom*, como la longitud de onda de la luz y el diámetro de la apertura. Para optimizar la resolución espectral, se sugiere aumentar el número de periodos por unidad de longitud en la rejilla.

En términos generales, el estudio del modelo físico de propagación de la luz en una cámara *pushbroom* ha aportado una comprensión profunda de los factores que condicionan la captura de imágenes espectrales. La integración del análisis matemático y las simulaciones ha sido clave para diseñar un sistema óptico que satisface los requisitos de resolución espectral y espacial. Este trabajo proporciona una base teórica detallada que incluye la óptica metaxial y un modelamiento matemático detallado de la propagación del campo en una configuración de cámara tipo *pushbroom*.

Aun así, la aproximación teórica utilizada en el análisis de la difracción de Fraunhofer y la óptica metaxial, aunque robusta, se basa en ciertos supuestos ideales. La homogeneidad y la coherencia del frente de onda emitido por la fuente de luz y la alineación perfecta de los componentes ópticos son condiciones difíciles de alcanzar en escenarios prácticos. La presencia de aberraciones ópticas y desviaciones mecánicas pueden afectar significativamente el comportamiento de la luz en el sistema, introduciendo errores que no fueron considerados en el modelo teórico. Por otra parte, aunque las simulaciones de MATLAB validaron de manera efectiva los modelos matemáticos desarrollados, estas también están sujetas a limitaciones inherentes a las simulaciones computacionales. Los modelos de simulación a menudo simplifican ciertos aspectos del comportamiento de la luz para hacer cálculos manejables, lo que puede llevar a resultados que no capturan completamente la complejidad del sistema real. La propiedad del material de los

componentes ópticos es otro aspecto a tener en cuenta en el diseño del sistema pushbroom. Las variaciones en el índice de refracción, las imperfecciones en la fabricación de las rejillas de difracción y las condiciones ambientales (como temperatura y humedad) pueden influir en el desempeño del sistema.

La complejidad matemática de la óptica metaxial y la transformada de Fourier óptica puede presentar desafíos en su implementación práctica. Errores en la formulación o ejecución de los cálculos pueden pasar desapercibidos y afectar la validez de las conclusiones, la sensibilidad de los parámetros iniciales y las condiciones de contorno también son donde pequeños errores también pueden ampliarse, afectando la confiabilidad del modelo. El trabajo proporciona una base teórica sólida y una validación mediante simulaciones para el diseño y análisis de la cámara pushbroom, es esencial considerar estas limitaciones y sesgos al interpretar los resultados para tener una visión más equilibrada del trabajo realizado para la mejora en áreas en futuras investigaciones.

Por último, como perspectiva de trabajos futuros, se recomienda utilizar programas especializados de diseño óptico que permiten realizar simulación de sistemas ópticos complejos, tal como el software Zemax OpticStudio. Por otro lado, explorar con mayor profundidad la óptica Metaxial en temas como la transferencia general, la difracción de Fresnel y la transformada fraccional de Fourier. Así mismo, realizar el mismo estudio para redes de difracción tipo sinusoidal y Echelette reflectivas, para comparar los resultados en resolución y eficiencia con las mismas redes utilizadas en este trabajo.

7. REFERENCIAS

- [1] J. James, Spectrograph Design Fundamentals, Cambridge, 2007.
- [2] E. L. Leonel Gutiérrez, «Telescopios e instrumentación la observación astronómica,» *revista.unam.mx*, 2004.
- [3] L. L. S. Rudolf K. Skogerboe, Atomic Absorption Spectroscopy.
- [4] G. B. y. A. W. Richard R. Ernst, Principles of Nuclear Magnetic Resonance in One and Two Dimensions.
- [5] J. Coates, «Interpretation of infrared spectra, a practical approach,» *Encyclopedia of Analytical Chemistry*, 2000.
- [6] K. E. H. C. L. G. M. R. & V. D. R. P. Shafer-Peltier, «Toward a clinical instrument for the diagnosis of disease based on surface-enhanced Raman scattering: head and neck cancer,» *Journal of Raman Spectroscopy*, 2002.
- [7] L. E. & A. M. E. Rodríguez-Saona, «Use of FTIR for Rapid Authentication and Detection of Adulteration of Food,» *Annual Review of Food Science and Technology*, 2011.
- [8] D. & S. M. P. Briggs, «Practical Surface Analysis by Auger and X-ray Photoelectron Spectroscopy,» 1990.
- [9] W. Jianwei, Z. Yan, P. Linlin, L. Weiyan, S. Jianying , L. Qunbo y L. Yangyang, «A Push-broom Computational Spectral Imager,» *Optical Society of America*, 2016.
- [10] Y. Noblet, S. Bennet, P. F. Griffin, P. Murray, S. Marshall, W. Roga, J. Jeffers y D. Oi, «Compact multispectral pushframe camera for nanosatellites,» *Optical Society of America*, 2020.
- [11] A. Maryanto, N. Widiyatmiko, W. Sunarmodo , M. Soleh y R. Arief, «DEVELOPMENT OF PUSHBROOM AIRBORNE CAMERA SYSTEM USING MULTISPECTRUM LINE SCAN INDUSTRIAL CAMERA,» *International Journal of Remote Sensing and Earth Sciences*, 2017.
- [12] S. Ortega , R. Guerra , M. Díaz, H. Fabelo, S. López , G. M. Callicó y R. Sarmiento , «Hyperspectral Push-Broom Microscope Development and Characterization,» *Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)*, 2019.
- [13] A. Fresnel, «Mémoire sur la diffraction de la lumière,» 1818, pp. 339-475.

- [14] H. Köhler, «On Abbe's Theory of Image Formation in the Microscope,» 1981.
- [15] S. A. E. Comastri, La condición de los senos de Abbe en la óptica de Fourier y su aplicación al análisis de sistemas ópticos., 1984.
- [16] M. Bertolotti, The History of the Laser, 1999.
- [17] M. Françon, Optique, formation et traitement des images, Paris, 1972.
- [18] S. Lowenthal y Y. Belvaux, «Progrès récents en optique cohérente : filtrage des fréquences spatiales, holographie,» 1967, pp. 1-67.
- [19] A. Maréchal y M. Françon, «Diffraction, structure de images,» 1960.
- [20] C. R. Burch y J. P. Stock, «Phase-Contrast Microscopy,» 1942.
- [21] H. H. Hopkins, «The Frequency response of a defocused optical system,» *The royal society*.
- [22] A. Papoulis, Systems and transforms with applications in optics, New York, 1968.
- [23] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, 2° ed, New York, 1996.
- [24] J. D. Gaskill, Linear systems, Fourier transforms, and optics, New York: John Wiley & Sons, 1972.
- [25] G. Bonnet, Réponse percussionnelle spatiotemporelle en diffraction polychromatique, 1975, pp. 251-269.
- [26] G. Bonnet, Cohérence partielle polychromatique : filtrage spatiotemporel et transformation de Fourier, 1976, pp. 235-258.
- [27] G. Bonnet, INTRODUCTION A L'OPTIQUE MÉTAXIALE Première partie: DIFFRACTION MÉTAXIALE DANS UN ESPACE HOMOGÈNE: TRILOGIE STRUCTURALE, DIOPTRE SPHÉRIQUE, 1978, pp. 143-165.
- [28] G. Bonnet, Introduction à l'optique métaxiale. Deuxième partie: systèmes dioptriques centrés (non diaphragmés et non aberrants), 1978, pp. 225-243.
- [29] G. Bonnet, La diffraction métaxiale : doctrine unitaire pour l'optique, l'acoustique et la radio-électricité, dans le langage des signaux, Septième colloque sur le traitement du signal et ses applications (GRETSI), 1979.
- [30] G. Bonnet, La notion de transparence en lumière polychromatique, 1977, pp. 243-266.

- [31] C. H. Köhler, «Airborne Imaging Spectrometer HySpex,» 2016.
- [32] E. Honkavaara, H. Saari, J. Kaivosoja, I. Pölönen, T. Hakala, P. Litkey, J. Mäkynen y P. Liisa, «Processing and Assessment of Spectrometric, Stereoscopic Imagery Collected Using a Lightweight UAV Spectral Camera for Precision Agriculture,» 2013.
- [33] U. R. Mogili, «Review on Application of Drone Systems in Precision Agriculture,» *ScienceDirect*, 2018.
- [34] M. A. Latif, «An Agricultural Perspective on Flying Sensors: State of the Art, Challenges, and Future Directions,» 2018.
- [35] W. H. Maes y K. Steppe, «Perspectives for Remote Sensing with Unmanned Aerial Vehicles in Precision Agriculture,» 2018.
- [36] C. Ballester, P. J. Zarco-Tejada, E. Nicolás, J. J. Alarcón, E. Fereres, D. S. Intrigliolo y V. Gonzalez-Dugo, «Evaluating the performance of xanthophyll, chlorophyll and structure-sensitive spectral indices to detect water stress in five fruit tree species,» 2017.
- [37] N. Genser, J. Seiler y A. Kaup, «Camera Array for Multi-Spectral Imaging,» *IEEE Transactions on Image Processing*, 2020.
- [38] D. Caballero, R. Calvini y J. M. Amigo, «Chapter 3.3 - Hyperspectral imaging in crop fields: precision agriculture,» de *Data Handling in Science and Technology*, vol. 32, 2019, pp. 453-473.
- [39] H. Aasen, «State-of-the-art in UAV remote sensing survey - First insights into applications of UAV sensing systems,» 2017.
- [40] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics*, 6° ed, Pergamond Press, Oxford, 1980.
- [41] J. M. Cowley, *Diffraction Physics*, North-Holland, 1995.
- [42] M. NIETO-VESPERINAS, *Scattering and Diffraction in Physical Optics*, New York, 1991.
- [43] A. Sommerfeld, *Optics (Lectures on Theoretical Physics, Vol. IV)*, San Diego, 1964.
- [44] H. D. Young y R. A. Freedman, *FÍSICA UNIVERSITARIA CON FÍSICA MODERNA*, vol. 2.
- [45] C. Taylor, *Diffraction*, Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [46] R. PRAT, *L'optique*, Paris: Editions du Seuil, 1962.
- [47] C. Huygens, *Traité de la lumiere*, Introduction de Michel Blay, Paris: Dunod, 1992.

- [48] P. Pellat-Finet, *Optique de Fourier Théorie métaxiale et fractionnaire*, France.
- [49] A. Marechal y M. Françon, *DIFFRACTION STRUCTURE DES IMAGES*, Paris, 1960.
- [50] C. M. C. Riveros y A. M. V. Corro, «Generalized Helmholtz equation,» *Selecciones Matemáticas Universidad Nacional de Trujillo*, p. 7, 2019.
- [51] S. Abe y J. T. Sheridan, «Wigner optics in the metaxial regime,» p. 3, 2003.
- [52] P. Pellat-Finet, *Lecciones de óptica de Fourier*, Francia, 2004.
- [53] H. Kogelnik, *Imaging of Optical Modes — Resonators with Internal Lenses*, 1965.
- [54] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Paris, 1965.
- [55] S. Mallick, *Effets d'épaisseur dans les réseaux*, 1990.
- [56] P. Bousquet, *Spectroscopie instrumentale*, Paris: Dunod, 1969.
- [57] R. O. Green, M. L. Eastwood, C. M. Sarture, T. G. Chrien, M. Aronsson, B. J. Chippendale, J. A. Faust, B. E. Pauri, C. J. Chovit, M. Solis, M. R. Olah y O. Williams, «Imaging Spectroscopy and the Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer (AVIRIS),» 1998.
- [58] B. Aiazzi, L. Alparone, A. Barducci, S. Baronti, P. Marcoionni, I. Pippi y M. Selva, «Noise modelling and estimation of hyperspectral data from airborne imaging spectrometers,» 2006.
- [59] N. Gupta, «Development of staring hyperspectral imagers,» pp. 1-8, 2011.
- [60] «SOLIDBI Inspira tu innovación,» [En línea]. Available: <https://solid-bi.es/solidworks/>.
- [61] E. G. & P. E. Loewen, «Diffraction Gratings and Applications,» 1997.
- [62] Y. Zhang, W. Li, W. Duan, Z. Huang y H. Yang, «Echelle Grating Spectroscopic Technology for High-Resolution and Broadband Spectral Measurement,» *applied sciences*, 2022.
- [63] [En línea]. Available: https://en.m.wikipedia.org/wiki/Echelle_grating.
- [64] J. W. Goodman, «Difracción por una apertura de tamaño finito,» de *Introducción a la Óptica de Fourier*.
- [65] E. Hecht, «Difracción,» de *Óptica*.

- [66] F. L. P. L. M. y. P. L. S. Pedrotti, «Difracción y resolución,» de *Introduction to Optics*.
- [67] B. E. A. y. T. M. C. Saleh, «Propagación de ondas ópticas en medios dieléctricos,» de *Fundamentals of Photonics*.
- [68] F. A. Jenkins y H. E. White, *Fundamentals Of Optics* 4th Edition.
- [69] E. Wolf y M. Born, *Principles of Optics*.
- [70] J. I. García Sucerquia, R. Castañeda, F. F. Medina y G. Matteucci, «Distinguishing between Fraunhofer and Fresnel diffraction by the Young's experiment,» *Optics Communications*, 2001.
- [71] K. Patorski, «Fraunhofer diffraction patterns of tilted planar objects,» *Optica Acta: International Journal of Optics*, vol. 30, 1983.
- [72] G. Zhou, «Far-field structure of a linearly polarized plane wave diffracted by a rectangular aperture,» *Optics & Laser Technology*, 2008.
- [73] X. C. P. Anguiano, «Diseño y caracterización de rejillas de difracción para un sistema láser de amplio espectro,» 2016.
- [74] A. MARECHAL, *Imagerie géométrique, aberrations*, Paris, 1967.
- [75] D. Malacara, *Óptica básica segunda edición*, 2004.