

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

Formando líderes para la construcción de un nuevo país en paz



MATRIZ DE MEZCLA DE NEUTRINOS EN EL MARCO DE LA SIMETRÍA $\mu - \tau$ DE REFLEXIÓN

*Trabajo de grado presentado al programa de física
como requisito para obtener el título de **Físico***

Nelson Enrique Valderrama Florez

Directora:

(Ph.D.) Diana Carolina Rivera Agudelo

Codirectora:

(Ph.D.) Blanca Cecilia Cañas Orduz

Facultad de Ciencias Básicas

Línea de Investigación

Física de Partículas

Grupo de Investigación: *Integrar*

Semillero de Investigación: *Chitarero*

2024

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincera gratitud a aquellas persona que han sido un pilar fundamental a lo largo de mi carrera y en el desarrollo de este trabajo de investigación.

Agradezco a mi madre, padre y hermanos, por su apoyo incondicional y por creer en mí siempre. Nada de esto hubiera sido posible sin su respaldo.

Agradezco a mis maestras y directoras de tesis, Dra. Carolina Rivera y Dra. Blanca Cañas por su instrucción, guía y especialmente paciencia durante todo este proceso, sus enseñanzas me han permitido crecer como profesional y como persona.

Agradezco a mis evaluadores, Dr. Víctor Basto y Dr. Andrés Felipe Rivera por su disposición al aceptar supervisar este trabajo y contribuir desde su experiencia a la calidad de esta tesis.

Agradecido profundamente a mis amigos Óscar, Ángel, Darwin y Mafe. Su compañía, amistad y apoyo durante estos años han sido invaluable para mí.

Agradezco a todos los docentes del programa de física de la universidad de Pamplona por su paciencia, amabilidad y consejos.

A todos ustedes les agradezco por ser parte de este momento tan significativo en mi vida.

Resumen

Las oscilaciones de neutrinos proporcionaron la primera evidencia directa de física más allá del modelo estándar, demostrando así la mezcla de neutrinos. La determinación experimental de los parámetros de oscilación sugiere la existencia de una simetría presente en la matriz de mezcla denominada simetría $\mu - \tau$. Este trabajo de investigación se centra en el estudio la simetría $\mu - \tau$ de reflexión y las posibles implicaciones, de su desviación, en los parámetros de oscilación. Bajo la aproximación de pequeñas desviaciones se logró determinar que las fases de Majorana están fuertemente correlacionadas, y se muestra la implicación de esta correlación en el espacio de parámetros para la masa efectiva de Majorana. Esta información es importante en la construcción de modelos para la generación de masas y mezclas de neutrinos incluyendo fases de violación CP.

Palabras clave: Oscilaciones de neutrinos, matriz de mezcla, simetría $\mu - \tau$, masa efectiva de Majorana.

Abstract

Neutrino oscillations provided the first direct evidence of physics beyond the Standard Model, thus demonstrating neutrino mixing. The experimental determination of the oscillation parameters suggests the existence of a symmetry present in the mixing matrix known as $\mu - \tau$ symmetry. This research work focuses on the study of $\mu - \tau$ reflection symmetry and the possible implications of its deviation on the oscillation parameters. Under the approximation of small deviations, it was determined that the Majorana phases are strongly correlated, and the implication of this correlation in the parameter space for the effective Majorana mass is shown. This information is important in the construction of models for the generation of neutrino masses and mixings, including CP-violating phases.

Keywords: Neutrino oscillations, mixing matrix, $\mu - \tau$ symmetry, effective Majorana mass.

Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	1
1. Modelo Estándar y el Lagrangiano electrodébil	3
1.1. Modelo Estándar	3
1.2. Lagrangiano Electrodébil	4
1.3. Interacciones electrodébiles	6
2. Oscilaciones de Neutrinos	8
2.1. Parametrización de una matriz unitaria	8
2.1.1. Parametrización para una matriz unitaria 2×2	8
2.1.2. Parametrización en el caso de $N=3$	9
2.2. Teoría de las oscilaciones de neutrinos	10
2.3. Jerarquía de Masas	11
2.3.1. Jerarquía Normal (JN)	12
2.3.2. Jerarquía Inversa (JI)	12
2.4. Oscilaciones de dos neutrinos en el vacío	13
2.5. Tipos de experimentos en las oscilaciones de neutrinos	14
2.5.1. Experimentos de neutrinos solares	14
2.5.2. Experimentos de neutrinos atmosféricos	14
2.5.3. Experimentos de neutrinos de reactor	15
2.5.4. Experimentos de neutrinos de acelerador	15
3. Términos de masa de Dirac y Majorana	18
3.1. Términos de masas de Dirac	18
3.2. Términos de masa de Majorana	20
3.2.1. Diagonalización de la matriz M^M	21
3.3. Decaimiento doble beta sin neutrinos ($0\nu\beta\beta$)	23
3.4. Masa efectiva de Majorana	23
4. Simetría $\mu - \tau$	25
4.1. Simetría $\mu - \tau$ de reflexión	27
4.1.1. Invariante de Jarlskog para $U_{\mu-\tau}$	27
4.1.2. Invariante de Jarlskog para U_{PMNS}	28
4.2. Leves rompimientos de la simetría $\mu - \tau$ de reflexión	30

5. Resultados	32
5.1. Análisis Numérico	32
5.1.1. Primera parametrización ($U_{\mu-\tau}^M$)	32
5.1.2. Segunda parametrización ($U_{\mu-\tau}^{M'}$)	37
6. Conclusiones	42
A. Código implementado en Wolfram Mathematica	43
A.1. Invariante de Jarlskog y algunas características de la matriz de mezcla U_{PMNS} . .	43
A.2. Determinación de las matrices $U_{\mu-\tau}$ y M_ν^0 para U_{PMNS}	44
A.3. Forma de la matriz M_ν^0 para $U_{\mu-\tau}$	45
A.4. Determinación de las matrices $U_{\mu-\tau}$ y M_ν^0 para U_{PMNS}^R	46
B. Diagrama de flujo que describe el código implementado en Python	47

Índice de figuras

1.1. Esquema del Modelo Estándar.	3
2.1. Esquema de las jerarquías de masas.	12
2.2. Probabilidad de transición y supervivencia para dos neutrinos en el vacío.	14
4.1. Ilustración de las magnitudes relativas de los elementos de las matrices PMNS.	26
5.1. Regiones permitidas de fases Majorana para la Jerarquía Normal e Invertida.	32
5.2. Regiones permitidas de las fases Majorana respecto a cada uno de los parámetros de ruptura adimensional.	33
5.3. Regiones permitidas de para los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} en la Jerarquía Normal e Invertida.	34
5.4. Masa efectiva de Majorana en función de la masa más ligera del neutrino	35
5.5. Regiones permitidas de la masa efectiva de Majorana respecto a la restricción de los parámetros de ruptura adimensional $\text{Max} \lesssim 0.5$	35
5.6. Regiones permitida de la masa efectiva de Majorana respecto a las restricción de los parámetros de ruptura adimensional.	36
5.7. Regiones permitidas de fases Majorana para la Jerarquía Normal e Invertida.	37
5.8. Regiones permitidas de las fases Majorana respecto a cada uno de los parámetros de ruptura adimensional	38
5.9. Regiones permitidas de para los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} en la Jerarquía Normal e Invertida.	39
5.10. Masa efectiva de Majorana en función de la masa mas ligera del neutrino	40
5.11. Regiones permitidas de la masa efectiva de Majorana respecto a las restricción de los parámetro de ruptura adimensional $\text{Max} \lesssim 0.5$	40
5.12. Regiones permitida de la masa efectiva de Majorana respecto a las restricción de los parámetro de ruptura adimensional.	41

Introducción

El Modelo Estándar de la física de partículas es una de las teorías más exitosas en la descripción de las partículas y fuerzas fundamentales del universo. Basada en observaciones experimentales, esta teoría describe a los neutrinos como partículas eléctricamente neutras, es decir, sin carga eléctrica. Por lo tanto, interactúan únicamente a través de la interacción débil, lo que las hace muy difíciles de detectar y estudiar. Además, inicialmente, dentro de dicha teoría los neutrinos se describían como partículas sin masa. Sin embargo, investigaciones posteriores sobre el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos demostraron la intrigante capacidad de los neutrinos de cambiar de sabor (e, μ, τ) a medida que se desplazan por el espacio, confirmando así que los neutrinos sí poseen masa, aunque extremadamente pequeña.

El Lagrangiano Electrodébil, es una parte fundamental del Modelo Estándar, ya que proporciona un modelo que unifica dos de las cuatro fuerzas fundamentales (electromagnética y débil) y por tanto describe las interacciones de los neutrinos. A pesar de la abundancia de los neutrinos en el universo, son muchos los interrogantes que la comunidad científica está buscando responder. Entre las preguntas principales se encuentran ¿Qué teoría explica la mezcla de los neutrinos, es decir, cuál es la naturaleza de sus masas?, ¿Cuál es la jerarquía de masas de neutrinos?, ¿Existe violación CP en este sector?. Lo que nos deja claro que el Modelo Estándar no es una teoría completa.

Muchas ideas existen en la literatura para explicar la mezcla de los neutrinos, especialmente aquellas basadas en simetrías discretas de sabor, en este trabajo de investigación, abordaremos diversos temas fundamentales en el estudio de los neutrinos y sus interacciones, siendo el objetivo principal restringir los parámetros de violación de CP en el marco de la simetría $\mu - \tau$ de reflexión. En el primer capítulo se presentará una revisión del Lagrangiano electrodébil y las interacciones electrodébiles.

El segundo capítulo se centrará en las oscilaciones de neutrinos, incluyendo la parametrización de matrices unitarias y las jerarquías de masas. Además, se describirán distintos experimentos diseñados para investigar las oscilaciones de neutrinos, desde neutrinos solares y atmosféricos hasta experimentos de reactores y aceleradores.

El tercer capítulo abordará el concepto de los términos de Dirac y Majorana. Mientras que los términos de masa de Dirac pueden estar contenidos dentro la teoría del Modelo Estándar, los términos de Majorana proponen a los neutrinos como su propia antipartícula, lo que implica diversas consecuencias en la física del neutrino y la violación del número leptónico.

El cuarto capítulo explora la simetría $\mu - \tau$, la cual simplifica la estructura de la matriz de mezcla de neutrinos. También se determinará qué valores deben tener los parámetros de oscilación para alcanzar la simetría de reflexión y sus pequeños rompimientos, así como su relación con el tiempo de vida medio y la masa efectiva de Majorana.

El quinto capítulo muestra un análisis numérico realizado en Python, donde se presentaran los valores de las regiones permitidas de las fases de Majorana y los ángulos de mezcla, en función de pequeños valores para los parámetros de ruptura. Basados en esos resultados, se restringirán a su vez las regiones totales de la masa efectiva de Majorana, para ambas jerarquías de masas.

El sexto capítulo presenta las conclusiones y discusiones derivadas del análisis y la interpretación de los temas abordados en este trabajo de investigación.

Finalmente se anexará un apéndice en el que se mostrarán los códigos realizados en Wolfram Engine, que es motor de software de uso gratuito, que implementa Wolfram Language. Estos códigos fueron implementados para: obtener el valor del invariante de Jarlskog, comprobar algunas características de la matriz de mezcla y determinar la forma de la matriz de mezcla y de la matriz de masas, bajo esta simetría $\mu - \tau$ de reflexión.

1. Modelo Estándar y el Lagrangiano electro-débil

1.1. Modelo Estándar

El Modelo Estándar (ME) es aquel modelo que describe las interacciones fuerte, electromagnética y débil de las partículas elementales en el marco de la teoría cuántica de campos. Este modelo fue formulado en 1967 por S. Weinberg y A. Salam, a partir de un modelo gauge $SU(2) \times U(1)$ propuesto seis años antes por S.L. Glashow [1, 2, 3]; teniendo como resultado una teoría gauge basada en el grupo de simetría local $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, donde los subíndices C, L e Y denotan color, quiralidad izquierda e hipercarga débil, respectivamente.

El descubrimiento en 1974 del quark charm por BNL (J) y SLAC (ψ) y el posterior descubrimiento de los bosones $W^\pm$ y Z en el CERN establecieron firmemente el ME como el modelo que describe las interacciones leptónicas, hadrónicas débiles y electromagnéticas (electrodébiles) [4, 5, 6, 7]. Tras el descubrimiento del tercer leptón τ , por M. Perl en 1975, los quarks b y t fueron descubiertos en 1977 y 1995 respectivamente en el Fermilab, completando todos los bloques constructores del ME con tres generaciones como se muestra en la Fig.(1.1). El número de generaciones se fijó en tres en 1989 por las medidas realizadas por los experimentos LEP en el CERN de la anchura invisible del bosón Z [8, 9, 10].



Figura 1.1: Esquema del Modelo Estándar. Tomado de [11]

Es importantes mencionar que el grupo gauge determina de manera irrefutable las interacciones y el número de bosones vectoriales gauge corresponden a los generadores del grupo. Por lo que las partículas que median en las interacciones fuertes, son ocho gluones sin masa, correspondientes a los ocho generadores de $SU(3)_C$. Cuatro bosones gauge, de los cuales tres son masivos $W^\pm$ y Z

y uno sin masa γ , correspondientes a los tres generadores de $SU(2)_L$ y un generador de $U(1)_Y$, responsables de las interacciones electrodébiles.

Además, el Modelo Estándar incorpora el denominado mecanismo de Higgs. El mecanismo de Higgs permite que los bosones gauge W y Z , que originalmente no poseen masa, adquieran grados de libertad longitudinales y, por ende, se vuelvan masivos. Asimismo, el mecanismo de Higgs también es responsable de que los leptones y los quarks adquieran masa a través de su interacción con el campo de Higgs [12, 13, 14].

Por otra parte es de nuestro interés tener presente que dentro del ME los neutrinos son de las pocas partículas fundamentales en las que los valores de sus masas y cargas eléctricas son iguales a cero, como consecuencia, estas partículas solo pueden hacer parte de las interacciones electrodébiles, de las cuales se hablará más a detalle la siguiente sección.

Ningún experimento realizado hasta la fecha ha detectado desviaciones concluyentes del ME, excepto los experimentos de oscilación de neutrinos (cuyo descubrimiento mereció el premio Nobel en 2015 [15]), que han demostrado que los neutrinos son masivos y están mezclados. En el ME, esto no es así. Este descubrimiento sugiere que el ME es una teoría efectiva de la aún desconocida teoría más allá del ME.

1.2. Lagrangiano Electrodébil

Las interacciones del neutrino, pueden ser determinadas a partir de la sección electrodébil del Lagrangiano del ME; al considerar a $SU(2)_L \times U(1)_Y$, que es solo una parte del grupo de simetrías del ME.

Al grupo de simetría $SU(2)_L$ se le denomina isospín débil, donde el subíndice L hace referencia a que solo actúa sobre sus componentes quirales izquierdas. Este grupo de simetría tiene 3 generadores que denotaremos como I_α ($\alpha = 1, 2, 3$) quienes satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular $[L_A, L_B] = i\varepsilon_{ABC}L_C$

$$\Rightarrow [I_a, I_b] = i\varepsilon_{abc}I_c.$$

Debido a esta relación de conmutación, la representación bidimensional de estos generadores es de la forma $I_a = \frac{\sigma_a}{2}$, donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son las matrices de Pauli.

Por otra parte al grupo de simetría $U(1)_Y$ se le denomina hipercarga, el subíndice Y representa el operador de hipercarga (quien es generador de este grupo de simetría), que asocia a I_3 y al operador de carga Q por medio de la relación de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad [16]. \quad (1.1)$$

Para garantizar la invarianza de norma local, se requiere la existencia de campos de norma vectoriales. Para la simetría $SU(2)_L$ se introducen los campos bosónicos A_a^μ ($a = 1, 2, 3$) asociados a los tres generadores I_a ($a = 1, 2, 3$). Mientras que la simetría local $U(1)_Y$ requiere un campo bosónico B^μ asociado al generador Y . De esta manera, la derivada covariante del sector electrodébil es de la siguiente forma

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\underline{A}^\mu \cdot \underline{I} + ig'B^\mu \frac{Y}{2} \quad [17], \quad (1.2)$$

donde para A^μ e I se utiliza la notación vectorial: $\begin{cases} \underline{A}^\mu \equiv (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu) \\ \underline{I} \equiv (I_1, I_2, I_3) \end{cases}$.

El siguiente paso en la construcción de la teoría electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$ es elegir las representaciones para los campos de fermiones. Los componentes quirales izquierdos de los campos de fermiones se agrupan en dobletes de isospín débil. Para simplificar, consideremos sólo la primera generación de leptones y quarks, así,

$$L_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad Q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}.$$

Partiendo de esta representación del campo de los fermiones, y tomando en cuenta que los generadores del grupo $SU(2)_L$ están determinados por $I_a = \frac{\sigma_a}{2}$, por lo tanto

$$\underline{I}L_L = \frac{\sigma}{2}L_L, \quad \underline{I}Q_L = \frac{\sigma}{2}Q_L, \quad (1.3)$$

donde para los fermiones con quiralidad izquierda los valores para I_3 y el operador Q son:

$$\begin{aligned} L_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} &\rightarrow I_3 \equiv \begin{cases} 1/2 \\ -1/2 \end{cases}, \quad Q \equiv \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}, \\ Q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} &\rightarrow I_3 \equiv \begin{cases} 1/2 \\ -1/2 \end{cases}, \quad Q \equiv \begin{cases} 2/3 \\ -1/3 \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A partir de la teoría de dos componentes de Landau, Lee y Yang; se puede asumir que el neutrino solo tiene una componente quiral izquierda, entonces las componentes derechas de los fermiones dentro del ME son:

$$e_R, u_R, d_R.$$

Debido a esto, bajo el grupo de transformaciones de isospín estos se comportan como singletes:

$$\underline{I}f_R = 0; \quad (f = e, u, d). \quad (1.5)$$

Además al igual que para las componentes izquierdas podemos conocer el valor de las hipercargas a partir de la relación Gell-Mann-Nishijima 1.1, Teniendo en cuenta que para las componentes quirales derechas de los fermiones sus valores para I_3 y Q son

$$\begin{aligned} e_R &\rightarrow I_3 \equiv 0, \quad Q = -1; \\ u_R &\rightarrow I_3 \equiv 0, \quad Q = 2/3; \\ d_R &\rightarrow I_3 \equiv 0, \quad Q = -1/3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

El Lagrangiano electrodébil del ME, es aquel Lagrangiano renormalizable más general invariante bajo el grupo de simetría local $SU(2)_L \times U(1)_Y$; escrito en términos de los campos fermiónicos, los campos bosónicos gauge, y un doblete de Higgs Φ ; para la primera generación de leptones y quarks, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\overline{L}_L \not{D} L_L + i\overline{Q}_L \not{D} Q_L + \sum_{f=e,u,d} i\overline{f}_R \not{D} f_R \\ & - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ & - y^e (\overline{L}_L \Phi e_R + h.c.) - y^d (\overline{Q}_L \Phi d_R + h.c.) - y^u (\overline{Q}_L \tilde{\Phi} u_R + h.c.) \quad [18], \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde $\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$, es conocida comúnmente como notación slash. La segunda línea contiene los términos cinéticos y los auto-acoplamientos de los bosones gauge. La tercera línea es el Lagrangiano del campo de Higgs que genera la ruptura espontánea de simetría. La cuarta línea, describen la generación de masa fermiónica cuando el campo de Higgs adquiere un valor esperado de vacío distinto de cero, por medio de las matrices de acoplamiento de Yukawa y^k ($k = e, d, u$) [13, 19, 20].

1.3. Interacciones electrodébiles

Tomando la primera línea del Lagrangiano electrodébil dado en la Ec.(1.7)

$$\Rightarrow \mathcal{L} = i\overline{L}_L \gamma^\mu D_\mu L_L + i\overline{Q}_L \gamma^\mu D_\mu Q_L + \sum_{f=e,u,d} i\overline{f}_R \gamma^\mu D_\mu f_R,$$

y expandiendo las derivadas covariantes

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \overline{L}_L \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + i^2 g \gamma^\mu \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i^2 g' \gamma^\mu B_\mu \frac{Y}{2} \right) L_L \\ & + \overline{Q}_L \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + i^2 g \gamma^\mu \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i^2 g' \gamma^\mu B_\mu \frac{Y}{2} \right) Q_L \\ & + \sum_{f=e,u,d} \overline{f}_R \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + i^2 g \gamma^\mu \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i^2 g' \gamma^\mu B_\mu \frac{Y}{2} \right) f_R, \end{aligned}$$

obtendremos un Lagrangiano que describe el acoplamiento de los fermiones con los bosones gauge, donde los primeros productos de cada uno de los términos corresponden al Lagrangiano libre ($\mathcal{L}_L$), mientras que los productos de los términos restantes corresponden al Lagrangiano de interacción ($\mathcal{L}_I$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L = & \overline{L}_L (i\gamma^\mu \partial_\mu) L_L + \overline{Q}_L (i\gamma^\mu \partial_\mu) Q_L + \sum_{f=e,u,d} \overline{f}_R (i\gamma^\mu \partial_\mu) f_R, \\ \mathcal{L}_I = & \overline{L}_L \left(i^2 g \underline{A} \cdot \underline{I} + i^2 g' \underline{B} \frac{Y}{2} \right) L_L + \overline{Q}_L \left(i^2 g \underline{A} \cdot \underline{I} + i^2 g' \underline{B} \frac{Y}{2} \right) Q_L \\ & + \sum_{f=e,u,d} \overline{f}_R \left(i^2 g \underline{A} \cdot \underline{I} + i^2 g' \underline{B} \frac{Y}{2} \right) f_R. \end{aligned}$$

Reemplazamos los resultados de las Ec.(1.3) y Ec.(1.5) en $\underline{I}$, y los de las Ec.(1.4) y Ec.(1.6) en Y (teniendo en cuenta la Ec.(1.1)), en sus respectivas componentes quirales

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_I = & -\frac{1}{2} \overline{L}_L (g \underline{A} \cdot \underline{\sigma} - g' \underline{B}) L_L - \frac{1}{2} \overline{Q}_L \left(g \underline{A} \cdot \underline{\sigma} + \frac{1}{3} g' \underline{B} \right) Q_L \\ & + \overline{e}_R g' \underline{B} e_R + \frac{2}{3} \overline{u}_R g' \underline{B} u_R + \frac{1}{3} \overline{d}_R g' \underline{B} d_R. \end{aligned}$$

Considerando solo los leptones, tenemos

$$\mathcal{L}_{I,L} = -\frac{1}{2} \overline{L}_L (g \underline{A} \cdot \underline{\sigma} - g' \underline{B}) L_L + \overline{e}_R g' \underline{B} e_R,$$

donde $g \underline{A} \cdot \underline{\sigma} - g' \underline{B} = \begin{pmatrix} g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B} & g(\mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2) \\ g(\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2) & -g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B} \end{pmatrix}.$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{I,L} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu}_{eL} & \overline{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B} & g(\mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2) \\ g(\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2) & -g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + \overline{e}_R g' \underline{B} e_R,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L} = & -\frac{1}{2} \left[\overline{\nu}_{eL} (g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B}) e_L + \overline{\nu}_{eL} (g(\mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2)) \nu_{eL} \right. \\ & \left. + \overline{e}_L (g(\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2)) e_L + \overline{e}_L (-g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B}) \nu_{eL} \right] + \overline{e}_R g' \underline{B} e_R. \end{aligned}$$

Separamos el Lagrangiano de interacción para los leptones en su parte de corriente cargada (CC) y corriente neutra (NC)

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{1}{2} \left[\overline{\nu_{eL}} (g(\mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2)) e_L + \overline{e_L} (g(\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2)) \nu_{eL} \right],$$

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = -\frac{1}{2} \left[\overline{\nu_{eL}} (g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B}) \nu_{eL} + \overline{e_L} (-g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B}) e_L \right] + \overline{e_R} g'\mathcal{B} e_R.$$

Definiendo los campos de los bosones W^+ y W^- como

$$W_\mu^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp iA_\mu^2}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} &= -\frac{g\sqrt{2}}{2} \left[\overline{\nu_{eL}} \mathcal{W}^+ e_L + \overline{e_L} \mathcal{W}^- \nu_{eL} \right], \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\overline{\nu_{eL}} \gamma^\mu W_\mu^+ e_L + \overline{e_L} \gamma^\mu W_\mu^- \nu_{eL} \right], \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\overline{\Psi}_L = \overline{\Psi} \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad ; \quad \Psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi.$$

$$\therefore \mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\overline{\nu_e} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e W_\mu^+ + \overline{e} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e W_\mu^- \right].$$

Tomando en cuenta las siguientes propiedades de γ^5 :

$$\begin{aligned} \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0, \\ (\gamma^5)^2 &= I_{4 \times 4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\overline{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e W_\mu^+ + \overline{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e W_\mu^- \right], \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\overline{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e W_\mu^+ + h.c. \right]. \end{aligned}$$

Si la corriente cargada leptónica se define como:

$$j_{W,L}^\mu = \overline{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e = 2\overline{\nu_{eL}} \gamma^\mu e_L. \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[j_{W,L}^\mu W_\mu^+ + h.c. \right], \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\overline{\nu_{eL}} \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + h.c. \right]. \quad (1.10)$$

2. Oscilaciones de Neutrinos

Cuando hablamos de las oscilaciones de neutrinos nos referimos al cambio de un neutrino de sabor ν_α a un neutrino de sabor ν_β a medida que este se traslada por el espacio; donde α y β pueden ser e , μ o τ .

Las oscilaciones de neutrinos fueron propuestas por Bruno Pontecorvo a finales de los años 50, como una analogía de las oscilaciones de los kaones [21, 22]. Debido a que en un principio solo se conocía al neutrino electrónico, Pontecorvo creó el concepto de neutrino estéril, que es un fermión neutro que no participa en las interacciones débiles. Tras el descubrimiento del neutrino muónico en el experimento Brookhaven de Lederman, Schwart, Steinbeger y colaboradores [23], fue posible formular teóricamente oscilaciones entre neutrinos de sabores, para lo cual deben ser partículas masivas que se mezclan.

Para describir este fenómeno en 1962 Maki, Nakagawa y Sakata [24] consideraron un modelo en los que las bases de sabor (ν_α ; $\alpha = e, \mu, \tau$) y de masa (ν_j ; $j = 1, 2, 3$), se relacionaban mediante una matriz unitaria denominada matriz PMNS (Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata), de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

2.1. Parametrización de una matriz unitaria

Una parte fundamental en la comprensión de los experimentos de oscilaciones de neutrinos, es el determinar y describir de manera precisa cada uno de los componentes de la matriz de mezcla U_{PMNS} , partiendo de las restricciones implicadas por su unitariedad. Es de nuestro interés utilizar la parametrización estándar, la cual puede ser explicada de manera análoga a la parametrización de la matriz de mezcla CKM (Cabbibo-Kobayashi-Maskawa), que es la responsable de describir los cambios de sabor en la corriente cargada de los quarks [25].

2.1.1. Parametrización para una matriz unitaria 2×2

Debido a la naturaleza de una matriz unitaria $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^\dagger = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene como resultado las siguientes expresiones:

$$\sum_j^2 |V_{ij}|^2 = \sum_j^2 |V_{ji}|^2 = 1 \quad \text{para } i = 1, 2; \quad (2.2)$$

$$V_{ii}V_{ji}^* + V_{ij}V_{jj}^* = 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \quad \text{y } i \neq j, \quad (2.3)$$

por lo que partiendo de la Ec.(4.23) se puede introducir un ángulo de mezcla θ tal que:

$$|V_{11}| = |V_{22}| = \cos \theta \equiv c \quad \text{y} \quad |V_{12}| = |V_{21}| = \sin \theta \equiv s;$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \begin{pmatrix} ce^{i\alpha_{11}} & se^{i\alpha_{12}} \\ se^{i\alpha_{21}} & ce^{i\alpha_{22}} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la Ec.(2.3) se pueden determinar que:

$$c s e^{i(\alpha_{11}-\alpha_{21})} + s c e^{i(\alpha_{12}-\alpha_{22})} = 0,$$

de acuerdo con la ecuación anterior una fase puede ser eliminada. Por lo tanto, la forma general para esta matriz unitaria es:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} ce^{i\alpha_{11}} & se^{i\alpha_{12}} \\ -se^{i(\alpha_{11}-\alpha_{12}+\alpha_{22})} & ce^{i\alpha_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha_{22}-\alpha_{12})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_{11}} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{12}} \end{pmatrix}.$$

De esta manera, una matriz unitaria $N \times N$ depende de N^2 parámetros reales. Los cuales se dividen en

$$\frac{N(N-1)}{2} \quad \text{ángulos de mezcla, y} \quad \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{fases,} \quad (2.4)$$

donde el número total de fases físicas son $(2N-5)$ si el neutrino es una partícula de Dirac y $3(N-2)$ si el neutrino es una partícula de Majorana.

2.1.2. Parametrización en el caso de $N=3$

En este caso denotaremos a la matriz unitaria 3×3 como $\mathbf{U}$ y si trabajamos de manera análoga como en la matriz anterior, la mezcla en el sector de neutrinos se describe por una matriz con las siguientes características:

- Tres ángulos de mezcla:
 - θ_{12} : Llamado ángulo de mezcla solar; que describe la mezcla entre los neutrinos electrónicos y muónicos.
 - θ_{13} : Llamado ángulo de mezcla de reactor; que describe la mezcla entre los neutrinos electrónicos y tauónicos.
 - θ_{23} : Llamado ángulo de mezcla atmosférico; que describe la mezcla entre los neutrinos muónicos y tauónicos.
- Tres fases físicas: dos fases β denominadas como fases de Majorana y una fase δ denominada fase de Dirac.
- Tres fases λ no físicas.

De tal manera que $\mathbf{U}$ puede expresarse de la siguiente forma [26]:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_2} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

2.2. Teoría de las oscilaciones de neutrinos

Para un neutrino de sabor α y momento lineal p , creado por una corriente de carga de interacción débil de un leptón cargado l_α^- , su oscilación puede ser descrita por el estado de sabor:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle, \quad (\alpha = e, \mu, \tau). \quad (2.6)$$

Los estados el neutrino masivos $|\nu_k\rangle$ son autoestados del Hamiltoniano,

$$\mathcal{H} |\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle, \quad (k = 1, 2, 3),$$

donde el autovalor de energía es

$$E_k = \sqrt{p^2 + m_k^2}.$$

De la ecuación de Schrödinger conocemos que:

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu_k(t)\rangle,$$

por lo que esto implica que los estados de masa de los neutrinos evolucionan en el tiempo como ondas planas

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle.$$

Ahora si se considera un estado de sabor $|\nu_\alpha(t)\rangle$ que describe a un neutrino creado en un sabor definido α en un tiempo $t = 0$, la evolución temporal del estado, está dada por:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle, \quad (2.7)$$

tal que $|\nu_\alpha(t = 0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$.

Recordando las características unitarias de la matriz de mezcla U :

$$U^\dagger U = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_\alpha U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} = \delta_{kj}.$$

Además podemos expresar los estados de masa en términos de los estados de sabor, invirtiendo la Ec.(2.6):

$$\begin{aligned} |\nu_k\rangle &= \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle. \\ \Rightarrow |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} \left[\sum_\beta U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle \right], \quad (\beta = e, \mu, \tau). \\ \therefore |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left[\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right] |\nu_\beta\rangle, \end{aligned} \quad (2.8)$$

debido a esto, la superposición de masas para un neutrino en un estado $|\nu_\alpha(t)\rangle$, es un estado de sabor puro en $t=0$. Mientras que es una superposición de diferentes estados de sabor para $t > 0$, con el coeficiente de $|\nu_\beta\rangle$ es:

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle,$$

$$\begin{aligned}
\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle &= \sum_k \langle \nu_k | U_{\beta k} \left[\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} | \nu_k \rangle \right] , \\
&= \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t} ,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

esta es la amplitud para la transición $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ en función del tiempo. Por lo que la probabilidad de transición viene dada por:

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 , \\
&= \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} .
\end{aligned}$$

Para la energía tenemos:

$$E_k = \sqrt{p^2 + m_k^2} = p \sqrt{1 + \frac{m_k^2}{p^2}} ,$$

cuya aproximación por series de Taylor, considerando $p \gg m$ es:

$$E_k \approx p \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m_k^2}{p^2} + \dots \right] , \tag{2.10}$$

para un neutrino ultrarelativista es posible utilizar las siguientes aproximaciones: $E \sim |p|$ y $t \sim L$,

$$\Rightarrow E_k \simeq p + \frac{m_k^2}{2p} .$$

En nuestro caso

$$E_k - E_j = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2p} \approx \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} ,$$

donde $\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2$.

Por lo tanto, la probabilidad de transición se puede aproximar a

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) . \tag{2.11}$$

2.3. Jerarquía de Masas

La probabilidad de transición de las oscilaciones de neutrinos (Ec.(2.11)), es dependiente de las diferencias de masas cuadradas Δm_{kj}^2 . Se les denomina como diferencias de masas cuadradas en la escala solar a Δm_{SOL}^2 , mientras que en la escala atmosférica a Δm_{ATM}^2 . Por medio de los datos experimentales de oscilaciones que tienen en cuenta efectos de materia en neutrinos solares [27], se sabe que la diferencia de masa solar es positiva. Sin embargo, en la escala atmosférica solo conocemos el valor absoluto de Δm_{31}^2 , por lo que aún no es posible determinar si el autovalor de masa del neutrinos ν_3 es mas o menos ligero que los autovalores de masa de los neutrinos ν_1 y ν_2 . En el caso en que ν_3 sea el más pesado se le denomina comúnmente como ordenamiento o jerarquía de masa normal (JN), mientras que si ν_3 es el más ligero se le denominará como ordenamiento o jerarquía de masa inversa (JI) [28, 29]. En la figura 2.1 podemos observar la diferencia entre cada uno estos ordenamientos de masas.

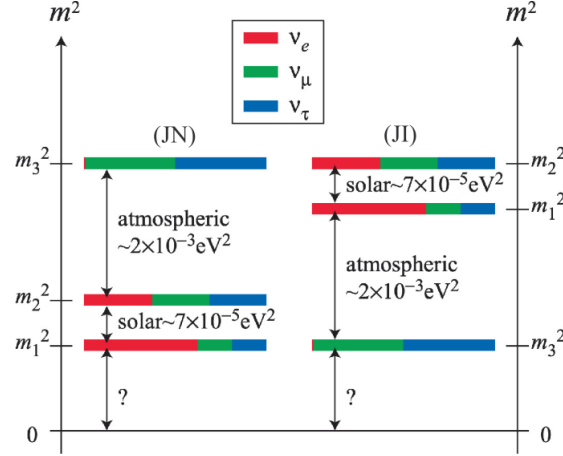


Figura 2.1: Representación gráfica de las jerarquías de masas y la probabilidad de encontrar el neutrino de sabor α en cada uno de los autovalores de masa. Tomado y adaptado de [30].

2.3.1. Jerarquía Normal (JN)

Si definimos a m_3 como el autovalor de masa más pesado, tendríamos que:

$$m_3 > m_2 > m_1 ,$$

por lo que en este caso m_1 será la masa mínima (m_0), mientras que, si partimos de las diferencias de masas cuadradas solares y atmosféricas; podemos determinar los valores para m_2 y m_3 :

■

$$m_1 = m_0 . \quad (2.12)$$

$$\Delta m_{SOL}^2 \equiv \Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2 .$$

$$\Rightarrow m_2 = \sqrt{\Delta m_{SOL}^2 + m_0^2} . \quad (2.13)$$

$$\Delta m_{ATM}^2 \equiv \Delta m_{32}^2 = m_3^2 - m_2^2 .$$

$$\Rightarrow m_3 = \sqrt{\Delta m_{ATM}^2 + \Delta m_{SOL}^2 + m_0^2} . \quad (2.14)$$

2.3.2. Jerarquía Inversa (JI)

Si definimos a m_3 como la el autovalor de masa más liviano, tendríamos que:

$$m_2 > m_1 > m_3 ,$$

ahora en este caso m_3 será la masa mínima (m_0), mientras que, si partimos de las diferencias de masas cuadradas atmosféricas y solares; podemos determinar los valores para m_1 y m_2 :

■

$$m_3 = m_0 . \quad (2.15)$$

$$\Delta m_{ATM}^2 \equiv \Delta m_{13}^2 = m_1^2 - m_3^2 .$$

$$\Rightarrow m_1 = \sqrt{\Delta m_{ATM}^2 + m_0^2} . \quad (2.16)$$

$$\Delta m_{SOL}^2 \equiv \Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2 .$$

$$\Rightarrow m_2 = \sqrt{\Delta m_{SOL}^2 + \Delta m_{ATM}^2 + m_0^2} . \quad (2.17)$$

2.4. Oscilaciones de dos neutrinos en el vacío

Un caso mas simplificado que nos puede ayudar a entender de manera más sencilla el funcionamiento de las oscilaciones de neutrinos, es considerar solo la existencia de dos neutrinos con sabor ν_α y ν_β , ($\alpha, \beta = e, \mu; e, \tau; \mu, \tau$), o combinaciones lineales de sus estados puros de sabor [13]. Estos dos estados de sabor son superposiciones lineales de dos estado de masas, descritos por la siguiente matriz de mezcla:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde θ es el ángulo de mezcla. En este caso solo habrá una diferencia de masas cuadradas:

$$\Delta m^2 \equiv \Delta m_{kj}^2; \quad (k, j = 3, 1; 3, 2; 2, 1).$$

Con estas consideraciones, podemos determinar que la probabilidad de transición descrita en la Ec.(2.11), para $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ con $\alpha \neq \beta$ es:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \left(1 - \cos^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right) \right) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right). \quad (2.19)$$

La probabilidad de supervivencia $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}$, que responde al caso en que $\alpha = \beta$ puede calcularse a partir de la conservación de la probabilidad:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right). \quad (2.20)$$

De la Ec.(2.19) podemos observar que, para una energía fija, la probabilidad de transición es una función periódica de la distancia. Cuando el argumento del seno al cuadrado es π , a L se le llama longitud de oscilación, y esta determinada por

$$L_{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}. \quad (2.21)$$

La probabilidad de transición es muy pequeña si $L \ll L_{\text{osc}}$, y oscila rápidamente si $L \gg L_{\text{osc}}$. Para observar oscilaciones de neutrinos se debe satisfacer que

$$\Delta m^2 \gtrsim \frac{E}{L}. \quad (2.22)$$

Se dice que un experimento es sensible a Δm^2 cuando se cumple la anterior condición. Diferentes experimentos pueden ser distinguidos para ser sensibles a diferentes valores de Δm^2 , escogiendo valores apropiados de la razón L/E .

La figura 2.2 permite observar de manera clara el comportamiento de la probabilidad de transición y supervivencia para dos neutrinos que, por ejemplo, tienen una diferencia de masas al cuadrado de $\Delta m^2 = 7,5 \times 10^{-5} \text{eV}^2$ y un ángulo de mezcla $\theta = 46^\circ$.

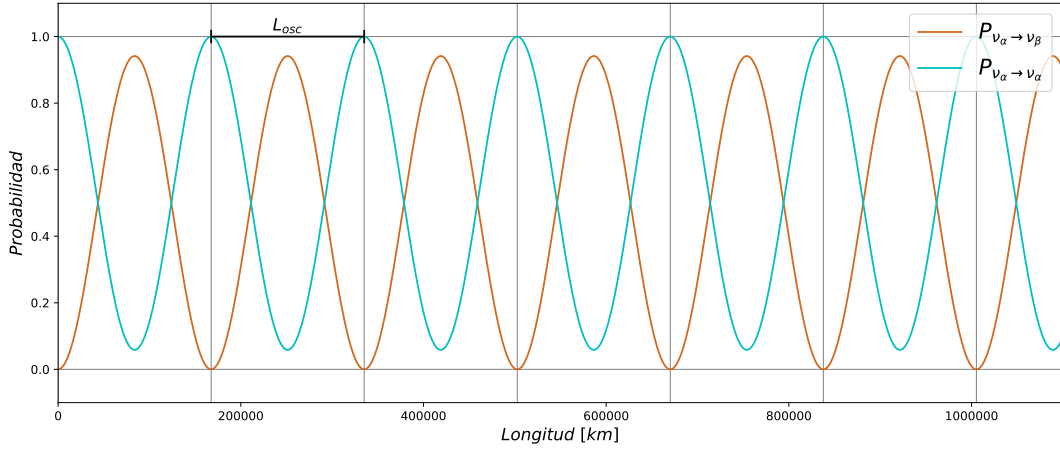


Figura 2.2: Probabilidad de transición y supervivencia, con una diferencia de masas cuadradas $\Delta m^2 = 7,5 \times 10^{-5} \text{eV}^2$ y un ángulo de mezcla $\theta = 46^\circ$. Adaptado de [13].

2.5. Tipos de experimentos en las oscilaciones de neutrinos

Algunos de los tipos mas comunes de experimentos que estudian las oscilaciones de neutrinos son:

2.5.1. Experimentos de neutrinos solares

En estos experimentos se estudian los neutrinos generados por las reacciones termonucleares en el centro del Sol. Dado la gran distancia que existe entre el Sol y la Tierra (aproximadamente de $1,5 \times 10^{11} \text{m}$) los neutrinos experimentan oscilaciones durante su propagación dentro del Sol. Debido a que la energía detectada para los neutrinos en estos procesos puede tener valores entre $0,2 - 15 \text{ MeV}$, el rango de L/E y la sensibilidad a las diferencias de masas cuadradas Δm^2 es

$$\frac{L}{E} \lesssim 10^{12} \text{m/MeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 10^{-12} \text{eV}^2. \quad (2.23)$$

Por lo que estos experimentos son muy sensibles a valores pequeños de Δm^2 . Algunos experimentos de este tipo son: Homestake [31] (donde se observó por primera vez el déficit de neutrinos solares), Kamiokande [32], Super-Kamiokande [33] (que confirmó el déficit de neutrinos solares y midió la tasa de eventos de neutrinos muónicos), SNO [34] (demostró que los neutrinos solares oscilan al medir la tasa de diferentes tipos de eventos de neutrinos), GNO [35], GALLEX [36], SAGE [37], KamLAND [38], etc.

2.5.2. Experimentos de neutrinos atmosféricos

En estos experimentos se estudian los neutrinos generados por la interacción de los rayos cósmicos con la atmósfera, en la que se producen un gran flujo de piones y kaones, los cuales decaen en muones y neutrinos, a su vez, muchos muones decaen en electrones y neutrinos antes de llegar a la superficie de la Tierra. La distancia entre la fuente y el detector es de aproximadamente 20 km , si estos vienen de arriba hacia abajo, mientras que, para los que se producen al otro lado de la Tierra y la cruzan es de aproximadamente $1,3 \times 10^4 \text{ km}$. La energía detectable de estos neutrinos cubre un gran rango de al rededor de $500 \text{ MeV} - 100 \text{ GeV}$. Los valores típicos de L/E y la sensibilidad a Δm^2 es

$$\frac{L}{E} \lesssim 10^4 \text{km/GeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 10^{-4} \text{eV}^2. \quad (2.24)$$

Algunos experimentos que de este tipo son: Kamiokande [32], IMB [39], NUSEX [40], Frejus [41], Super-Kamiokande[33], MACRO [42], Soudan-2 [43], MINOS [44], etc.

2.5.3. Experimentos de neutrinos de reactor

En estos experimentos se estudian mayormente los antineutrinos electrónicos generados por reactores nucleares mediante decaimiento β^- de núcleos pesados (principalmente en fragmentos de fisión de ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{241}Pu). Estos experimentos pueden dividirse según la distancia que haya entre el reactor y el detector, de la siguiente manera:

- **Experimentos de corta distancia (Short BaseLine experiments (SLB)):** La energía típica de los antineutrinos electrónicos ($\bar{\nu}_e$) es del orden de pocos MeV y la distancia entre la fuente y el detector es de varias decenas de metros. El rango de L/E cubierto por reactores SLB y su sensibilidad a Δm^2 son

$$\frac{L}{E} \lesssim 10 \text{ m/MeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 0,1 \text{ eV}^2. \quad (2.25)$$

Debido a la muy poca cantidad de energía que poseen los antineutrinos no es posible la producción de muones y tauones, por lo que en estos experimentos solo se puede medir la probabilidad de supervivencia de $\bar{\nu}_e$ por detección, en líquido centellador, a través de la reacción del decaimiento β inverso

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \quad (2.26)$$

con una energía mínima para ν_e de $E_{th} = 1,8 \text{ MeV}$. Algunos experimentos de este tipo son: ILL [45], Gosgen [46], Rovno [47], Krasnoyarsk [48], Bugey [49], Savannah River [50], etc.

- **Experimentos de larga distancia (Long BaseLine experiments (LBL)):** En estos experimentos la distancia entre la fuente y el reactor es del orden de kilómetros. El rango de L/E y la sensibilidad a Δm^2 son

$$\frac{L}{E} \lesssim 10^3 \text{ m/MeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 10^{-3} \text{ eV}^2. \quad (2.27)$$

Algunos experimentos de este tipo son: CHOOZ [51], Palo Verde [52], Double CHOOZ [53], Daya Bay, RENO, etc.

- **Experimentos de muy larga distancia (Very Long-Baseline experiments (VLB)):** En estos experimentos la distancia entre la fuente y el reactor es del orden de 100 km. El rango de L/E y la sensibilidad a Δm^2 son

$$\frac{L}{E} \lesssim 10^5 \text{ m/MeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 10^{-5} \text{ eV}^2. \quad (2.28)$$

Algunos experimentos de este tipo son KamLAND [38] y Borexino [54].

2.5.4. Experimentos de neutrinos de acelerador

En estos experimentos se utilizan aceleradores de partículas para producir haces de neutrinos producidos por el decaimiento de piones, kaones y muones creados por un haz de protones que golpea un blanco. Al igual que los experimentos de reactores estos experimentos pueden también dividirse según la distancia:

- **Experimentos de corta distancia (SLB):** En este rango de distancias, los experimentos se pueden clasificar en:

- **Decaimiento del pion:** En estos experimentos los haces están compuestos mayormente por ν_μ o $\bar{\nu}_\mu$ producidos por el decaimiento de kaones y piones. Estos decaen a una distancia de 100 m. En el caso de un haz de ν_μ producidos por $\pi^+, K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, existen alrededor de 1 % de $\bar{\nu}_\mu$ y de ν_μ debido principalmente al decaimiento de $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$. La energía típica de los neutrinos es del orden de unos pocos GeV. La distancia típica entre la fuente y el detector es del orden de los kilómetros. El rango de L/E cubierto por aceleradores SLB y su sensibilidad a Δm^2 son

$$\frac{L}{E} \lesssim 1\text{km/GeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 1\text{eV}^2. \quad (2.29)$$

En el caso de $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$, la energía debe ser de un orden de magnitud mayor (la energía mínima para la producción de τ en la reacción del decaimiento β inverso es de 3,5 GeV), tal que $L/E \lesssim 0,1 \text{ km/GeV} \rightarrow \Delta m^2 \gtrsim 10 \text{ eV}^2$. Algunos experimentos que de este tipo son: BEBC [55] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_e$), FNAL-E531 [56] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$), CHARM [57] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$), LSND [58] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_e$), etc.

- **Decaimiento del muon:** En estos experimentos los haces están compuestos por antineutrinos muónicos ($\bar{\nu}_\mu$), los cuales se producen en el decaimiento

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \quad (2.30)$$

Los μ^+ son producidos en el decaimiento del pion

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (2.31)$$

(los π^- son absorbidos en su mayoría por el núcleo) y frenados en el blanco. Estos $\bar{\nu}_\mu$ tienen energías del orden de varias decenas de MeV y pueden ser usados para medir transiciones de $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$, ya que podemos garantizar que estos no están presentes en los productos de π^+ o μ^+ . La distancia típica entre la fuente y el detector es del orden de varias decenas de metros, con un rango de L/E y la sensibilidad a Δm^2 de

$$\frac{L}{E} \lesssim 1\text{m/MeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 1\text{eV}^2. \quad (2.32)$$

Algunos experimentos que de este tipo son: LAMPF-0645 [59], LSND [58], KARMEN [60], etc.

- **Experimentos de larga distancia (LBL):** Al igual que en los reactores SBL, en este caso los haces producen neutrinos o antineutrinos del muon, los cuales vienen del decaimiento de los piones y kaones, la distancia entre la fuente y el detector es de alrededor de $10^2 - 10^3 \text{ km}$, lo que implica un rango de L/E y la sensibilidad a Δm^2 de

$$\frac{L}{E} \lesssim 10^3\text{km/GeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 10^{-3}\text{eV}^2. \quad (2.33)$$

En este caso los experimentos han sido pocos, algunos de ellos son: K2K [61] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$), MINOS [44] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$), ICARUS [62] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$), T2K [63] ($\nu_\mu \rightarrow \nu_e, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$).

- **Experimentos de muy larga distancia (VLB):** La distancia entre la fuente y el detector de estos experimentos del orden de miles de kilómetros, comparable con el diámetro de la Tierra. El rango de L/E y la sensibilidad a Δm^2 son

$$\frac{L}{E} \lesssim 10^4\text{km/GeV} \implies \Delta m^2 \gtrsim 10^{-4}\text{eV}^2. \quad (2.34)$$

Los proyectos que existen actualmente para la implementación de estos experimentos son; Super-Beam [64], Beta-Beam[65] y Neutrino Factory[66].

Como bien sabemos ya, las oscilaciones de neutrinos, sus amplitudes y frecuencias son sensibles a al menos uno de los ángulos θ_{ij} y a las diferencias de masa cuadradas Δm_{ij}^2 , respectivamente. Por lo que en nuestro caso, para los cálculos que realizaremos más adelante tendremos en cuenta los resultados del análisis global de los datos de oscilaciones que se presentan en la Tabla 2.1. Estos resultados provienen de una combinación de datos de experimentos de neutrinos: solares, atmosféricos, de acelerador LBL y de reactores SBL, para los casos separados de JN y JI.

Parámetro	Jerarquía	Mejor ajuste	1σ rango	2σ rango	3σ rango
$\Delta m_{SOL}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	JN	7,34	7,20 – 7,51	7,05 – 7,69	6,92 – 7,90
	JI	7,34	7,20 – 7,51	7,05 – 7,69	6,92 – 7,91
$\Delta m_{ATM}^2 [10^{-3} \text{eV}^2]$	JN	2,485	2,453 – 2,514	2,419 – 2,547	2,389 – 2,578
	JI	2,465	2,434 – 2,495	2,404 – 2,526	2,374 – 2,556
$\sin^2 \theta_{12} [10^{-1}]$	JN	3,05	2,92 – 3,19	2,78 – 3,32	2,65 – 3,47
	JI	3,03	2,90 – 3,17	2,77 – 3,31	2,64 – 3,45
$\sin^2 \theta_{13} [10^{-2}]$	JN	2,22	2,14 – 2,28	2,07 – 2,34	2,01 – 2,41
	JI	2,23	2,17 – 2,30	2,10 – 2,37	2,03 – 2,43
$\sin^2 \theta_{23} [10^{-1}]$	JN	5,45	4,98 – 5,65	4,54 – 5,81	4,36 – 5,95
	JI	5,51	5,17 – 5,67	4,60 – 5,82	4,39 – 5,96
δ/π	JN	1,28	1,10 – 1,66	0,95 – 1,90	$0 - 0,07 \oplus 0,81 - 2$
	JI	1,52	1,37 – 1,65	1,23 – 1,78	1,09 – 1,90

Tabla 2.1: Valores de los parámetros de la matriz de mezcla obtenidos por los ajustes globales de diferentes experimentos de oscilaciones de neutrinos. Tomado de [67].

3. Términos de masa de Dirac y Majorana

A partir de la formulación del concepto de neutrino por Wolfgang Pauli, se postularon diversas teorías respecto a la naturaleza de su masa, tales como que era equivalente a la del electrón e incluso que no la poseía. Gracias al descubrimiento y estudio de las oscilaciones de neutrinos, hoy podemos afirmar que estas partículas fundamentales si poseen masa. Sin embargo, no conocemos sus valores exactos y hasta el momento sabemos de manera aproximada el rango valores que pueden tomar sus diferencias de masas al cuadrado [20, 68, 13].

3.1. Términos de masas de Dirac

El Lagrangiano de Dirac que describe los campos fermiónicos libres, Ψ , está dado por

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_D) \Psi.$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos deducir la ecuación de movimiento para las partículas de spin 1/2 ; por ejemplo para un campo $\bar{\Psi}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_D) \Psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0. \\ \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_D) \Psi &= 0. \end{aligned}$$

que es conocida como la ecuación de Dirac.

El Lagrangiano de Dirac puede dividirse en un término cinético y un término masivo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Cinético}} + \mathcal{L}_{\text{Masivo}} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m_D \bar{\Psi} \Psi.$$

El término de masa de Dirac para los leptones se expresa como:

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{\Psi=e,\mu,\tau} m_D \bar{\Psi} \Psi.$$

Recordando que un espinor cualquiera puede expresarse en sus proyecciones quirales como:
 $\Psi = P_L \Psi + P_R \Psi = \Psi_L + \Psi_R$; $\bar{\Psi}_L = \bar{\Psi} P_R$; $\bar{\Psi}_R = \bar{\Psi} P_L$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^D = - \sum_{\Psi=e,\mu,\tau} m_D (\bar{\Psi}_R + \bar{\Psi}_L) (\Psi_R + \Psi_L),$$

donde Ψ_R y Ψ_L son las componentes quirales derecha e izquierda de los campos fermiónicos.

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}_R + \bar{\Psi}_L)(\Psi_R + \Psi_L) &= \bar{\Psi}_R\Psi_R + \bar{\Psi}_L\Psi_L + \bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R, \\
&= \bar{\Psi}P_L P_R \Psi + \bar{\Psi}P_R P_L \Psi + \bar{\Psi}P_L P_L \Psi + \bar{\Psi}P_R P_R \Psi.
\end{aligned}$$

Además que los operadores proyección P_R y P_L cumplen las siguientes relaciones:
 $P_L P_R = P_R P_L = 0$, $P_L + P_R = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$.

$$(\bar{\Psi}_R + \bar{\Psi}_L)(\Psi_R + \Psi_L) = \bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R \quad , \quad \bar{\Psi}_R\Psi_L = (\bar{\Psi}_L\Psi_R)^\dagger.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^D = - \sum_{\psi=e,\mu,\tau} m_D (\bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R) = - \sum_{\psi=e,\mu,\tau} m_D \bar{\Psi}_R\Psi_L + h.c. \quad . \quad (3.1)$$

Debido a la conservación de la carga eléctrica total, el Lagrangiano del ME es invariante bajo las transformaciones globales

$$\Psi'_L = e^{i\Lambda}\Psi_L, \quad \Psi_R = e^{-i\Lambda}\Psi_R, \quad W'_\alpha = e^{i\Lambda}W_\alpha, \quad V'_{aL} = V_{aL},$$

donde Λ es una constante arbitraria. El término de masa Ec.(3.1) es el término de masa de Dirac y Ψ es el campo de Dirac de los leptones Ψ^+ y antileptones Ψ^- .

En el caso de los neutrinos, realizando una analogía con los leptones supondremos que además de las tres componentes quirales izquierdas, se le adicionan al Lagrangiano tres componentes quirales derechas, por lo que el término de masas para el neutrino tiene la forma:

$$\Rightarrow \mathcal{L}^D = - \sum_{a,b=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{aR} M_{ab}^D \nu_{bL} + h.c. \quad ,$$

donde M^D es una matriz compleja no diagonal. Ahora bien, si queremos mostrar esta expresión en su forma diagonalizada m_i debemos realizar una transformación bi-unitaria a la matriz compleja M^D :

$$M^D = U_R^\dagger m_i V_L \Rightarrow m_i = U_R M^D V_L^\dagger ,$$

donde U y V son matrices unitarias tales que cumplen: $U U^\dagger = U^\dagger U = 1$; $V V^\dagger = V^\dagger V = 1$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^D = - \sum_{a,b} \bar{\nu}_{aL} U_L^\dagger m_i V_R \nu_{bR} + h.c.$$

Estas matrices unitarias transforman las componentes quirales (R y L) de la siguiente manera:

$$\nu_{aL} = \sum_{i=1}^3 U_{aiL} \nu_{iL} \quad , \quad \nu_{aR} = \sum_{i=1}^3 V_{biR} \nu_{iR}. \quad (3.2)$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}_{iR} m_i \nu_{iL} + h.c. \quad , \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{i=1}^3 (m_i \bar{\nu}_{iR} \nu_{iL} + m_i \bar{\nu}_{iL} \nu_{iR}) = - \sum_{i=1}^3 m_i (\bar{\nu}_{iR} + \bar{\nu}_{iL}) (\nu_{iR} + \nu_{iL}),$$

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (3.4)$$

3.2. Términos de masa de Majorana

Como pudimos observar el mecanismo de masa de Dirac requiere la existencia de campos de neutrinos derechos. Por otro lado, si se considera que debe existir una conservación del numero total de Leptones L, no será posible construir la masa del neutrino a partir únicamente de sus componentes izquierdas, de hecho tenemos que:

$$\gamma_5 \nu_{\ell L} = -\nu_{\ell L}, \quad (3.5)$$

$$\bar{\nu}_{\ell L} \gamma_5 = \bar{\nu}_{\ell L}. \quad (3.6)$$

Por lo que el producto de campos de neutrinos invariantes bajo transformaciones globales, es igual a cero:

$$\bar{\nu}_{\ell' L} \nu_{\ell L} = (\bar{\nu}_{\ell' L} \gamma_5)(-\gamma_5 \nu_{\ell L}) = -\bar{\nu}_{\ell' L} \nu_{\ell L} = 0.$$

Ahora bien, si consideramos que se viola la conservación del numero leptónico, podemos construir el término de masa solo a partir del campo de neutrino de sabor $\nu_{\ell L}$. De hecho si consideramos la Ec.(3.6) observamos que

$$(\bar{\nu}_{\ell L} \gamma_5)^T = \gamma_5^T \bar{\nu}_{\ell L}^T = \bar{\nu}_{\ell L}^T,$$

y al multiplicar la anterior ecuación por la matriz unitaria de la conjugación de cargas C, que satisface las relaciones:

$$\begin{aligned} C \gamma_\mu^T C^{-1} &= -\gamma_\mu, & C^T &= -C, \\ C \gamma_5^T C^{-1} &= \gamma_5, & C \bar{\nu}_{\ell L}^T &= (\nu_{\ell L})^C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C \gamma_5^T \bar{\nu}_{\ell L}^T &= C \bar{\nu}_{\ell L}^T, \\ \gamma_5 C \bar{\nu}_{\ell L}^T &= (\nu_{\ell L})^C, \\ \gamma_5 (\nu_{\ell L})^C &= (\nu_{\ell L})^C. \end{aligned} \quad (3.7)$$

por lo tanto el producto de campos izquierdos de neutrinos teniendo en cuenta las Ec.(3.6) y Ec.(3.7), entonces:

$$\bar{\nu}_{\ell L} (\nu_{\ell L})^C = (\bar{\nu}_{\ell L} \gamma_5)(\gamma_5 (\nu_{\ell L})^C) \neq 0,$$

cabe recalcar que este producto no es invariante bajo transformaciones globales.

Considerando todo esto, podemos formular los términos de masas para el Lagrangiano de Majorana tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M &= -\frac{1}{2} \left[\sum_{\ell', \ell = e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{\ell' L} M_{\ell' \ell}^M (\nu_{\ell L})^C + h.c. \right], \\ \mathcal{L}^M &= -\frac{1}{2} [\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^C + h.c.], \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde:

- El factor 1/2, se utilizara para evitar una doble contabilidad; debido a que su hermitico conjugado es idéntico.

- ν_L , tiene la forma $\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}$.

- M^M , es una matriz compleja 3×3 no diagonal simétrica que tiene la forma:

$$M^M = \begin{pmatrix} M_{ee} & M_{e\mu} & M_{e\tau} \\ M_{e\mu} & M_{\mu\mu} & M_{\mu\tau} \\ M_{e\tau} & M_{\mu\tau} & M_{\tau\tau} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

3.2.1. Diagonalización de la matriz M^M

Considerando al neutrino como una partícula de Majorana, los términos de masas para los leptones cargados y para los neutrinos (Ec.(3.8)), pueden escribirse como:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_\nu^M (\nu_L)^C - \bar{l}_L M_l^M l_R + h.c. \quad (3.10)$$

En general, estas matrices no diagonales, se diagonalizan por las siguientes transformaciones

$$V_\nu^T M_\nu^M V_\nu = M_\nu^d, \quad (3.11)$$

$$V_l^\dagger M_l^M M_l^{M\dagger} V_l = (M_l^d)^2. \quad (3.12)$$

Entonces, al realizar esta diagonalización, es posible reescribir $\mathcal{L}^{CC}$, dado en la Ec.(1.10), en términos de los autoestados de masas, por lo que:

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \overline{(e \ \mu \ \tau)_L} \gamma^\mu U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^- + h.c. \ , \quad (3.13)$$

donde $U = V_l^\dagger V_\nu$.

Sin pérdida de generalidad, podemos escoger la base en la que los autoestados de sabor de los leptones cargados corresponden a los autoestados de masa, es decir $V_l = I$ y por ende $U = V_\nu$, cabe aclarar que esto no puede ser de manera contraria debido a que sabemos que los neutrinos son masivos.

Por lo tanto, al considerar al neutrinos como una partícula de Dirac, el Lagrangiano de corriente cargada descrito en la Ec.(3.13), es invariante bajo las transformaciones de fase globales

$$\nu_{kL} \rightarrow e^{i\varphi_k} \nu_{kL}, \quad \nu_{kR} \rightarrow e^{i\varphi_k} \nu_{kR} \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\varphi_\alpha} \ell_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\varphi_\alpha} \ell_{\alpha R} \quad (\alpha = e, \mu, \tau),$$

de los campos neutrino y leptón cargado respectivamente, por lo que en la matriz de mezcla unitaria $\mathbf{U}$ descrita en la Ec.(2.5) se pueden eliminar las tres fases no físicas λ , de modo que solo dependerá de tres ángulos de mezcla y una fase física que viola CP, la cual reescribimos como:

$$U^D = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Además, esta matriz puede representarse como el producto de tres matrices de rotación de Euler:

$$\begin{aligned} U^D &= R_{23}(\theta_{23}; 0) R_{13}(\theta_{13}; \delta) R_{12}(\theta_{12}; 0), \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sin embargo, al considerar al neutrino como una partícula de Majorana, el Lagrangiano $\mathcal{L}^{CC}$ no será invariante bajo las transformaciones de fase $\nu_{kL} \rightarrow e^{i\varphi_k} \nu_{kL}$. Esto debido a que los campos de neutrinos izquierdos no podrán ser re-fasados, lo que implica que las fases físicas β_1 y β_2 no serán eliminadas, de modo que la matriz de mezcla unitaria $\mathbf{U}$ dependerá de tres ángulos de mezcla y tres fases físicas que violan CP, la cual reescribimos como:

$$U = U^D U_{Diag}^M, \quad (3.15)$$

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_2} \end{pmatrix}.$$

La representación de la matriz $\mathbf{U}$ por la Ec.(3.15) es denominada como la matriz unitaria PMNS (Pintecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) en su parametrización estándar [24].

$$\therefore U = U_{PMNS},$$

$$\therefore M_\nu^d = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L (U M_\nu^d U^T) (\nu_L)^C + \bar{l}_L M_l l_R + h.c. , \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L U M_\nu^d U^T C (\bar{\nu}_L)^T + \bar{l}_L M_l l_R + h.c. . \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que:

- $\bar{\nu}_L U = \nu_L^\dagger \gamma_0 U = \nu_L^\dagger U \gamma_0 = (U^\dagger \nu_L)^\dagger \gamma_0 = \overline{U^\dagger \nu_L}.$
- $U^T C (\bar{\nu}_L)^T = C U^T (\bar{\nu}_L)^T = C (\bar{\nu}_L U)^T = C (\overline{U^\dagger \nu_L})^T = (U^\dagger \nu_L)^C.$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -\frac{1}{2} \left(\overline{U^\dagger \nu_L} M_\nu^d (U^\dagger \nu_L)^C \right) + \bar{l}_L M_l l_R + h.c. . \\ \therefore \mathcal{L}_m &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L^M M_\nu^d (\nu_L^M)^C + \bar{l}_L M_l l_R + h.c. . \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{donde } \nu_L^M = U^\dagger \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo que el Lagrangiano de masas para los neutrinos de Majorana es:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L^M M_\nu^d (\nu_L^M)^C + h.c. ,$$

Además recordemos que cualquier campo fermionico se puede escribir como la suma de sus componentes quirales derechas e izquierdas, donde:

$$(\nu_L^M)^C = C \frac{1 + \gamma_5^T}{2} (\bar{\nu}^M)^T = \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu^M = \nu_R^M, \quad (3.18)$$

por lo que

$$\nu^M = \nu_L^M + \nu_R^M. \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}^M &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M M_\nu^d \nu^M = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_1 \\ \bar{\nu}_2 \\ \bar{\nu}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{1}{2} (m_1 \bar{\nu}_1 \nu_1 + m_2 \bar{\nu}_2 \nu_2 + m_3 \bar{\nu}_3 \nu_3) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \end{aligned}$$

De aquí podemos determinar que ν_i es el campo de neutrinos para la masa m_i . Además observando la Ec.(3.19) podemos concluir que sí se cumple la condición de Majorana [69], dado que:

$$(\nu^M)^C = (\nu_L^M)^C + (\nu_R^M)^C = \nu_R^M + \nu_L^M = \nu^M.$$

$$\therefore (\nu_i)^c = \nu_i.$$

3.3. Decaimiento doble beta sin neutrinos ($0\nu\beta\beta$)

La observación de la doble desintegración beta sin neutrinos ($0\nu\beta\beta$), en la que

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-,$$

demonstraría la existencia de la violación del numero leptónico y por ende proporcionaría información sobre la escala absoluta de los autovalores de masa del neutrino. Uno de los parámetros de mayor interés dentro del estudio de la desintegración $0\nu\beta\beta$ es el tiempo de vida medio del núcleo [70]. Bajo la suposición de que la única fuente de violación de número leptónico, a bajas energías, es la masa tipo Majorana del neutrino, está dada por

$$\left(T_{1/2}^{0\nu}\right)^{-1} = |m_{\beta\beta}|^2 |M^{0\nu}|^2 G^{0\nu}(Q, Z),$$

que depende del producto de los siguientes factores:

- $M^{0\nu}$ es un elemento de la matriz nuclear, que representa la amplitud para la transición nuclear desde el núcleo de estado inicial al final.
- $G^{0\nu}(Q, Z)$ es el factor de espacio fase, que indica la viabilidad de la desintegración según su cinemática.
- $|m_{\beta\beta}|$ es la masa efectiva de Majorana.

3.4. Masa efectiva de Majorana

Bajo la hipótesis de que solo tres neutrinos conocidos (ν_e, ν_μ, ν_τ) participan en el proceso de la desintegración $0\nu\beta\beta$, la masa efectiva de Majorana puede deducirse a partir de la combinación de los autoestados de masa m_1, m_2 y m_3 , junto con los términos de la primera fila de la matriz de mezcla de los neutrinos, los cuales están relacionados con los ángulos de mezcla θ_{12}, θ_{13} , así como dos fases de Majorana β_1 y β_2 [71]. Por lo que $|m_{\beta\beta}|$ viene dada por:

$$|m_{\beta\beta}| = \left| \sum_{i=1}^3 U_{ei}^2 m_i \right|. \quad (3.20)$$

Al sustituir en la expresión anterior, los parámetros descritos por la Ec.(3.15) da como resultado:

$$|m_{\beta\beta}| = |(c_{12}c_{13})^2 m_1 + (s_{12}c_{13} e^{i\beta_1})^2 m_2 + (s_{13}e^{-i\delta} e^{i\beta_2})^2 m_3|. \quad (3.21)$$

Resientes búsquedas experimentales de la desintegración doble beta sin neutrinos, muestran que las restricciones más fuertes sobre los tiempos de vida de la desintegración $0\nu\beta\beta$ provienen de los experimentos KamLAND-Zen [72] y GERDA [73] para el xenón y el germanio, respectivamente. En ellos se ha establecido un límite para las vidas medias correspondientes de $T_{1/2}^{0\nu} > 2,3 \times 10^{26}$ años [72], y $T_{1/2}^{0\nu} > 1,8 \times 10^{26}$ años [73], al 90 %C.L. Por lo que, sus correspondientes límites para la masa efectiva de Majorana son

$$\begin{aligned} m_{\beta\beta} &< 36 - 156 \text{ meV [72]}, \\ m_{\beta\beta} &< 79 - 180 \text{ meV [73]}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

4. Simetría $\mu - \tau$

Es importante recordar algunos conceptos de los que ya hemos hablado en los capítulos anteriores:

- Los autoestados de sabor de los leptones se describen a través de su participación en las interacciones electrodébiles, como se expresa en la Ec.(1.10).
- Los autoestados de masa de los leptones están descritos por su propagación por el espacio libre, como se expresa en la Ec.(3.10).
- Los autoestados de sabor y masa de los neutrinos, pueden relacionarse a partir de la matriz de transformación unitaria U_{PMNS} descrita en la Ec.(3.14), en el caso de Dirac, y en la Ec.(3.15), en el caso de Majorana.

Partiendo de los rangos en 3σ para los parámetros de oscilación θ_{ij} y δ mostrados de la Tabla 2.1, podemos calcular el valor de las componentes de la matriz $|U^D|$ y obtener los siguientes resultados para cada jerarquía de masas:

- Jerarquía Normal:

$$|U^D| = \begin{pmatrix} 0,798 - 0,849 & 0,509 - 0,583 & 0,142 - 0,155 \\ 0,249 - 0,525 & 0,444 - 0,688 & 0,652 - 0,764 \\ 0,240 - 0,522 & 0,478 - 0,712 & 0,629 - 0,743 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

- Jerarquía Invertida:

$$|U^D| = \begin{pmatrix} 0,799 - 0,849 & 0,508 - 0,581 & 0,142 - 0,156 \\ 0,229 - 0,520 & 0,448 - 0,690 & 0,654 - 0,764 \\ 0,247 - 0,531 & 0,471 - 0,711 & 0,628 - 0,741 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Para observar de manera mas intuitiva las características de estas matrices, ilustraremos las magnitudes relativas de cada uno de sus elementos como se muestra en la figura 4.1.

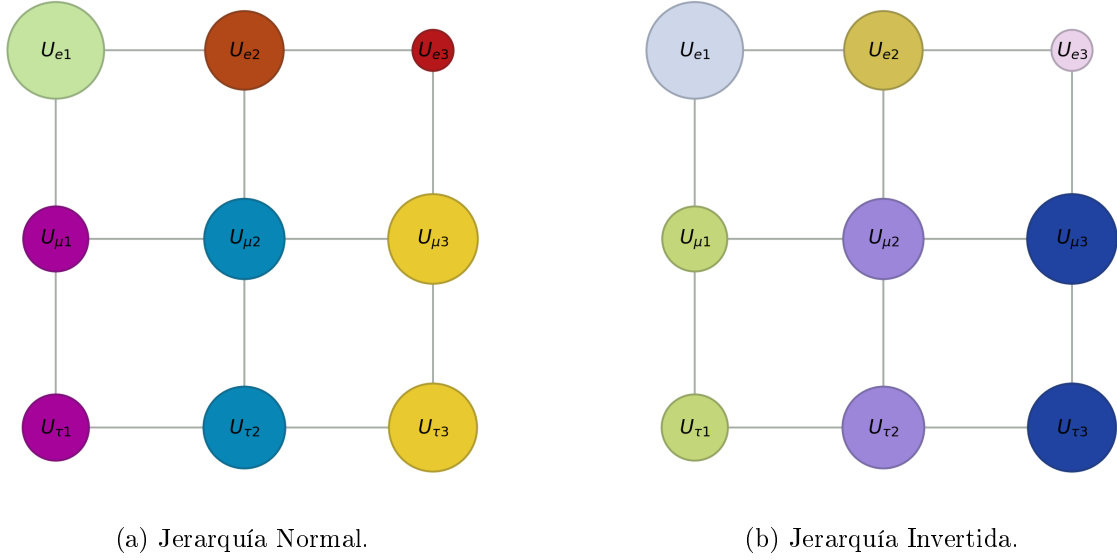


Figura 4.1: Ilustración de las magnitudes relativas de los elementos de las matrices PMNS, donde el área coloreada de cada círculo es proporcional a $|U_{\alpha i}|$ (para $\alpha = e, \mu, \tau$ e $i = 1, 2, 3$). Adaptada de [74].

Al observar las figuras anteriores y los resultados obtenidos en las Ec.(4.1) y Ec.(4.2), podemos determinar que existe una interesante simetría de intercambio entre las filas μ y τ , tal que,

$$|U_{\mu i}| \simeq |U_{\tau i}| \quad (\text{para } i = 1, 2, 3). \quad (4.3)$$

De hecho, algunas componentes de $|U^D|$ son esencialmente iguales o muy cercanas a ciertos coeficientes Clebsh-Gordan simples pero típicos de la teoría de grupos (como $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{3}$ y $1/\sqrt{6}$), por lo que puede existir una especie de simetría de sabor global y discreta. Por tanto, es razonable conjeturar $U = U_0 + \Delta U$, donde U_0 denota un patrón de mezcla de sabores constante que se origina a partir de un grupo de simetría de sabores subyacente, y ΔU representa pequeñas correcciones o perturbaciones de U_0 como resultado de algunos efectos suaves de ruptura de simetría [74, 75].

Por otra parte, la Ec.(4.3) puede cumplirse de manera exacta para cualquiera de los siguientes dos conjuntos de condiciones:

$$|U_{\mu i}| = |U_{\tau i}| \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \theta_{23} = \frac{\pi}{4}, & \theta_{13} = 0; \\ \text{ó} \\ \theta_{23} = \frac{\pi}{4}, & \delta = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Está claro que $\theta_{13} = 0$ ya ha sido descartado, $\theta_{23} = \pi/4$ está permitido dentro de los rangos a un sigma o a dos sigmas. Mientras la fase de violación CP δ tiene un valor central casi máximo de $3\pi/2$, como se muestra en la Tabla 2.1. Sin embargo, el valor de $\delta = \pi/2$ es permitido, según indicios de violación CP procedente de los datos de T2K [63], que en el ajuste global fueron algo diluidos por la combinación con los datos actuales de NO ν A [76].

A partir de los conjuntos de condiciones mostrados en la Ec.(4.4), es posible determinar dos tipos de simetría $\mu - \tau$:

- **Simetría de permutación:** donde el término de masa del neutrino no cambia bajo las transformaciones

$$\nu_e \rightarrow \nu_e, \quad \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau, \quad \nu_\tau \rightarrow \nu_\mu. \quad (4.5)$$

- **Simetría de reflexión:** donde el término de masa del neutrino se mantiene invariable bajo las transformaciones

$$\nu_e \rightarrow \nu_e^c, \quad \nu_\mu \rightarrow \nu_\tau^c, \quad \nu_\tau \rightarrow \nu_\mu^c, \quad (4.6)$$

donde el superíndice c denota la conjugación de carga del campo de neutrinos.

Dentro de este trabajo de investigación solo nos enfocaremos en la simetría de reflexión.

4.1. Simetría $\mu - \tau$ de reflexión

Originalmente esta simetría fue propuesta por Harrison y Scott [77], quienes partiendo de las características mostradas por las Ec.(4.1) y Ec.(4.2) para la matriz de mezcla, postularon la posibilidad de que $|U_{\mu i}| = |U_{\tau i}|$, eliminando las dos fases Majorana, llegando a la siguiente parametrización de U_{PMNS} (Ec.(3.15)) en una convención de fases apropiada:

$$U_{\mu-\tau} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\mu 1}^* & U_{\mu 2}^* & U_{\mu 3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1^* & v_2^* & v_3^* \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

donde los elementos u_i se han dispuesto para que sean reales.

Dentro de la física de partículas la invariante de Jarlskog proporciona una forma sencilla de cuantificar la violación CP en la matriz de mezcla, que matemáticamente se expresa como

$$\mathcal{J} = \text{Im}(U_{11}U_{12}^*U_{21}^*U_{22}) \quad [78]. \quad (4.8)$$

Por medio de este término invariante presente en todas las parametrizaciones de la matriz de mezcla, estableceremos una expresión que compare la violación CP para las matrices unitarias U_{PMNS} y $U^{\mu-\tau}$. Así podremos demostrar que los valores que deben tomar algunos de los parámetros de oscilación para que la simetría de reflexión sea consistente.

4.1.1. Invariante de Jarlskog para $U_{\mu-\tau}$

Al reemplazar los elementos de la matriz $U_{\mu-\tau}$ en la Ec.(4.8) obtenemos que

$$\mathcal{J} = \text{Im}(u_1 u_2^* v_1^* v_2) = u_1 u_2 \text{Im}(v_1^* v_2). \quad (4.9)$$

Así que primero debemos tener en cuenta algunas características de la matriz de mezcla (comprobadas en el Apéndice A.1):

- Al normalizar de cualquier columna de la matriz de mezcla U_{PMNS}^R (Ec.(4.21)), es posible determinar que

$$\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} |U_{\alpha i}|^2 = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3; \quad (4.10)$$

por lo que, si aplicamos la propiedad anterior a la matriz $U^{\mu-\tau}$ descrita en la Ec.(4.7) obtenemos

$$\begin{aligned} |u_i|^2 + 2|v_i|^2 &= 1, \\ \Rightarrow |v_i|^2 &= \frac{1 - |u_i|^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

- Debido a la ortogonalidad de cualquier par de columnas de U_{PMNS}^R (Ec.(4.21)) es posible determinar que

$$U_{ei}U_{ej}^* + U_{\mu i}U_{\mu j}^* + U_{\tau i}U_{\tau j}^* = 0 \quad \text{para todo } i \neq j,$$

por lo que para $U^{\mu-\tau}$ obtenemos

$$u_i u_j^* = -2 \operatorname{Re}(v_i v_j^*). \quad (4.12)$$

- Para una variable compleja $z = a + ib$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\theta = \operatorname{Arg}(z) \iff \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}. \quad (4.13)$$

De aquí es posible definir a $\gamma_1 = \operatorname{Arg}(v_1)$ y por tanto la diferencia de fase $\gamma_{21} \equiv \gamma_2 - \gamma_1$, de donde es posible determinar que:

$$\cos(\gamma_{21}) = \frac{\operatorname{Re}(v_1^* v_2)}{|v_1^* v_2|}, \quad (4.14)$$

$$\operatorname{sen}(\gamma_{21}) = \frac{\operatorname{Im}(v_1^* v_2)}{|v_1^* v_2|}. \quad (4.15)$$

Al reemplazar las Ec.(4.15), Ec.(4.14), Ec.(4.12) y Ec.(4.11) en la Ec.(4.9) obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}| &= |u_1||u_2||\operatorname{Im}(v_1^* v_2)| = |u_1||u_2| \left[|v_1 v_2| |\operatorname{sen}(\gamma_{21})| \right], \\ &= |u_1||u_2| \left[|v_1 v_2| \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_{21}} \right] = |u_1||u_2| \left[|v_1 v_2| \sqrt{1 - \left(-\frac{u_1 u_2}{2|v_1 v_2|} \right)^2} \right], \\ &= |u_1||u_2| \left[|v_1 v_2| \sqrt{\frac{4|v_1 v_2|^2 - (u_1 u_2)^2}{4|v_1 v_2|^2}} \right] = |u_1||u_2| \left[\frac{1}{2} \sqrt{4|v_1|^2 |v_2|^2 - (u_1 u_2)^2} \right], \\ &= |u_1||u_2| \left[\frac{1}{2} \sqrt{(1 - |u_1|^2)(1 - |u_2|^2) - (u_1 u_2)^2} \right] = |u_1||u_2| \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 - |u_1|^2 - |u_2|^2} \right], \\ &= \frac{1}{2} |u_1||u_2||u_3|. \\ \therefore |\mathcal{J}| &= \frac{1}{2} |U_{e1} U_{e2} U_{e3}|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.1.2. Invariante de Jarlskog para U_{PMNS}

Como se muestra en el Apéndice A.1, al reemplazar los elementos de la matriz U_{PMNS} en la Ec.(4.8) obtenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}| &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 s_{13} c_{23} s_{23} |\sin \delta|, \\ &= \underbrace{(c_{12} c_{13})}_{|U_{e1}|} \underbrace{(s_{12} c_{13})}_{|U_{e2}|} \underbrace{(s_{13})}_{|U_{e3}|} \underbrace{(c_{23} s_{23})}_{\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta_{23})} |\sin \delta|. \\ \therefore |\mathcal{J}| &= \frac{1}{2} |U_{e1} U_{e2} U_{e3}| |\sin \delta| \operatorname{sen}(2\theta_{23}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Igualando las Ec.(4.16) y Ec.(4.17) determinamos que

$$|\sin \delta| \sin(2\theta_{23}) = 1.$$

y por tanto

$$\delta = \pm\pi/2 ; \theta_{23} = \frac{\pi}{4}. \quad (4.18)$$

Sin embargo, como se muestra en el Apéndice A.2, al evaluar los resultados obtenidos para δ y θ_{23} en U_{PMNS} (Ec.(3.15)), obtenemos que la forma de la matriz de transformación $U^{\mu-\tau}$ no es consistente con la mostrada en la Ec.(4.7). Para solucionar dicha inconsistencia tendremos en cuenta que la matriz $M_\nu^0 = (U_{\mu-\tau}) \text{diag}(m1, m2, m3)(U_{\mu-\tau})^T$, tiene la siguiente forma (ver Apéndice A.3):

$$M_\nu^0 = \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\mu}^* \\ m_{e\mu} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{e\mu}^* & m_{\mu\tau} & m_{\mu\mu}^* \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

por lo que, los elementos de esta matriz deben satisfacer las siguientes condiciones de textura:

$$m_{ee} = m_{ee}^*, \quad m_{e\mu} = m_{e\tau}^*, \quad m_{\mu\mu} = m_{\tau\tau}^*, \quad m_{\mu\tau} = m_{\mu\tau}^*. \quad (4.20)$$

En el caso de U_{PMNS} (Ec.(3.15)), una de estas condiciones no se cumple, ya que, de acuerdo con lo mostrado en el A.2, $m_{e\mu} = -m_{e\tau}^*$. Por lo tanto, será necesario cambiar la parametrización de U_{PMNS} . Una de las posibles formas en las que se podrían satisfacer las condiciones anteriores es cuando la parametrización para U_{PMNS} tenga la siguiente convención de signos:

$$U_{PMNS}^R = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ s_{12}c_{23} + c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & -c_{12}c_{23} + s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & -c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \times \text{diag} [1, e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}], \quad (4.21)$$

para llegar a este resultado es necesario que los valores de las fases no físicas (que aparecen en la Ec.(2.5)) sean $\lambda_2 = \pi$ y $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Es importante mencionar que aunque la ecuación anterior contenga la fases de Majorana, dentro del marco de la simetría de reflexión exacta estas no son consideradas. Además que, aunque los valores de las fases no físicas afecten en la forma de la parametrización de la matriz de mezcla, los resultados no variarían debido a que estas fases no físicas serán reabsorbidas por el mecanismo de oscilaciones de neutrinos.

Por lo que la matriz de masas no diagonal para la nueva parametrización U_{PMNS}^R , sigue manteniendo su forma

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{e\mu} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{e\tau} & m_{\mu\tau} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

estos resultados pueden comprobarse en el Apéndice A.4.

Entonces ahora al evaluar los resultados obtenidos en la Ec.(4.18) en (U_{PMNS}^R) obtenemos que la matriz de transformación $U_{\mu-\tau}$ tiene la forma

$$U_{PMNS}^R(\delta = \frac{-\pi}{2}, \theta_{23} = \frac{\pi}{4}, \beta_{1,2} = 0) = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & \mp i s_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{12} \pm i c_{12}s_{13}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_{12} \pm i s_{12}s_{13}) & -\frac{c_{13}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{12} \mp i c_{12}s_{13}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_{12} \mp i s_{12}s_{13}) & \frac{c_{13}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = U_{\mu-\tau}, \quad (4.23)$$

y en consecuencia los elementos de la matriz M_ν^0 (Ec.(4.19)), se parametrizaran tal que:

$$\begin{aligned} m_{ee} &= c_{13}^2(c_{12}^2 m_1 + m_2 s_{12}^2) - m_3 s_{13}^2, \\ m_{e\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{12}c_{13}s_{12}(m_1 - m_2) - ic_{13}s_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_2 s_{12}^2 + m_3)), \\ m_{\mu\mu} &= \frac{1}{2} (c_{12}^2 (m_2 - m_1 s_{13}^2) - 2ic_{12}s_{12}s_{13}(m_1 - m_2) + c_{13}^2 m_3 + s_{12}^2 (m_1 - m_2 s_{13}^2)), \\ m_{\mu\tau} &= \frac{1}{2} (c_{12}^2 (m_1 s_{13}^2 + m_2) - c_{13}^2 m_3 + s_{12}^2 (m_1 + m_2 s_{13}^2)). \end{aligned} \quad (4.24)$$

La determinación de los resultados de las Ec.(4.23) y Ec.(4.24), pueden verse de manera detallada en el Apéndice A.4. En el que se utilizó la herramienta computacional de Wolfram Engine como kernel dentro del editor de código Visual studio code.

4.2. Leves rompimientos de la simetría $\mu - \tau$ de reflexión

Es posible llegar a la forma de la matriz de mezcla $U_{\mu-\tau}$, utilizando los valores de θ_{23} y δ mostrados en la Ec.(4.18); mientras que θ_{12} y θ_{13} pueden ser parámetros libres, tales que pueden acomodarse fácilmente dentro del intervalo experimental de 3σ mostrados en la Tabla 2.1. Por lo que partiendo de los datos experimentados de los ángulos de mezcla, podemos suponer que la matriz de mezcla tenga la forma

$$U_{\mu-\tau}^M = U_{\mu-\tau} \times \text{diag} [1, e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}] = U_{PMNS}^R(\delta = \frac{-\pi}{2}, \theta_{23} = \frac{\pi}{4}), \quad (4.25)$$

como es de esperar, esta forma de la matriz de mezclas permite que la matriz de masa presente una desviación del patrón simétrico observado en la Ec.(3.9), directamente inducida por las fases Majorana. Debe quedar claro que en el límite $\beta_1 = \beta_2 = 0$, el patrón simétrico se restaura.

En este trabajo se consideran las fases de Majorana como fuente de desviación de la simetría de reflexión en la matriz de masa.

Modulemos entonces las desviaciones de una matriz de masa simétrica de la forma

$$\delta M = M_\nu - M_\nu^0, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \delta M &= \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{e\mu} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{e\tau} & m_{\mu\tau} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\mu}^* \\ m_{e\mu} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{e\mu}^* & m_{\mu\tau} & m_{\mu\mu}^* \end{pmatrix}, \\ \delta M &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{e\tau} - m_{e\mu}^* \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{e\tau} - m_{e\mu}^* & 0 & m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu}^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que, a partir de estos resultados podemos definir a $\delta = m_{e\tau} - m_{e\mu}^*$ y $\epsilon = m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu}^*$.

$$\Rightarrow \delta M(\delta, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

donde δ y ϵ serán los parámetros que medirán las desviaciones de la simetría de reflexión. Sin embargo, la textura de la matriz de masa de corrección podría escribirse de otra manera, por ejemplo, situando los parámetros de ruptura en las entradas $\delta M_{\mu\mu}$, $\delta M_{e\mu}$ y $\delta M_{\mu e}$, pero sus

valores no cambiarían si se toma el módulo de estos parámetros. También podemos definir los dos parámetros adimensionales de la siguiente manera

$$\hat{\delta} \equiv \frac{\delta}{m_{e\mu}^*} \quad , \quad \hat{\epsilon} \equiv \frac{\epsilon}{m_{\mu\mu}^*} . \quad (4.28)$$

Es sencillo demostrar que en el caso límite en el que $\beta_1 = \beta_2 = 0$ dichos parámetros desaparecen, restaurando el patrón simétrico de la Ec.(4.23). Por lo tanto, la magnitud de la ruptura de la simetría de reflexión en la matriz de masa de neutrinos está directamente relacionada con los valores no evanescentes de las fases de Majorana. En el siguiente capítulo se muestran los resultados computacionales y analíticos, basados en la exigencia de pequeñas desviaciones del patrón simétrico, examinando el espacio de parámetros en las fases de CP de Majorana compatible con la imposición de $|\hat{\delta}|, |\hat{\epsilon}| \lesssim 1$, lo que también se denomina una ruptura leve o suave de la simetría $\mu - \tau$ [75].

5. Resultados

5.1. Análisis Numérico

Es factible determinar los valores que pueden tomar las fases de Majorana, partiendo de las potenciales desviaciones de la simetría $\mu - \tau$ de reflexión, mencionadas en la Ec.(4.28). En la figura 5.1 se presentan las distintas regiones permitidas de las fases de Majorana para diferentes valores de los parámetros de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$, para la jerarquía normal e invertida. Para obtener dichas gráficas, se realizó una simulación en Python, en la que se calculan 4×10^6 puntos para el valor de U_{PMNS}^R (Ec.(4.21)), donde la fase de Dirac $\delta = \frac{-\pi}{2}$ y el ángulo de mezcla $\theta_{23} = \frac{\pi}{4}$, se mantendrán fijos. Mientras que, se seleccionaran de manera aleatoria los valores de: la masa más ligera en un intervalo $0 \leq m_0 \leq 0.1$ [eV], las fases de Majorana en un intervalo $-\pi \leq \beta_{1,2} \leq \pi$ y tanto los ángulos de mezcla como el resto de autovalores de masa variaban dentro del intervalos de 3σ mostrados en la Tabla 2.1. El Apéndice B, describe el procedimiento anterior de manera ilustrativa. En este primer análisis utilizaremos la parametrización de la matriz de mezcla descrita por la Ec.(4.25). Más adelante, tomaremos un segundo caso donde las fases de Majorana cambien de posición, como se mostrará en la Ec.(5.1).

5.1.1. Primera parametrización ($U_{\mu-\tau}^M$)

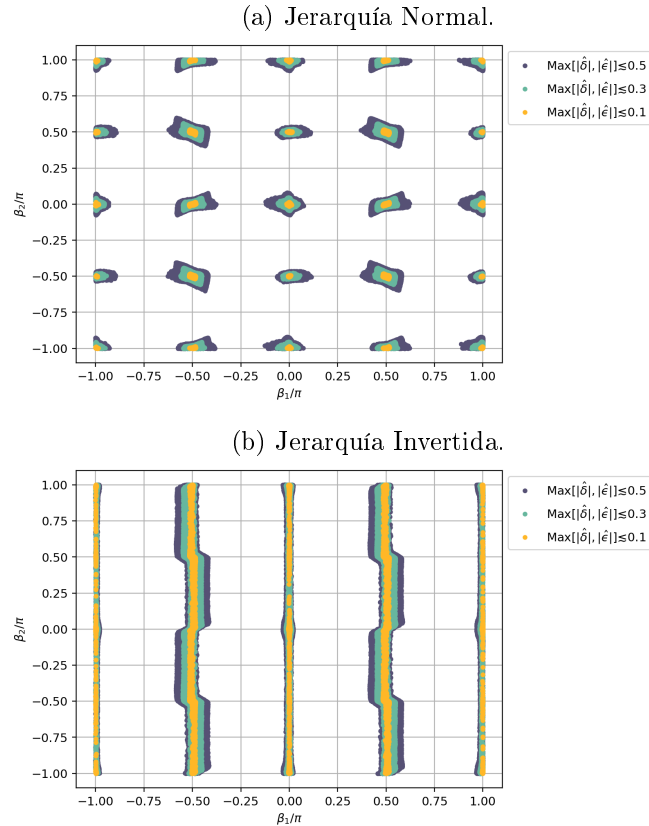


Figura 5.1: Regiones permitidas de fases Majorana para la Jerarquía Normal e Invertida. Las regiones pequeñas, medianas y grandes corresponden a $\text{Max}[|\hat{\delta}|, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0.1, 0.3, 0.5$, respectivamente. Fuente: Autor.

En las gráficas anteriores podemos notar que se obtuvieron diferentes combinaciones de fases Majorana, que están permitidas dentro de las pequeñas desviaciones de la matriz de masas simétrica. Como era de esperar, el tamaño del área permitida varía según los valores seleccionados de los parámetros de ruptura adimensional. Es necesario destacar que, mientras que para la JN ambas fases de Majorana están condicionadas a extenderse alrededor de algunos valores enteros de $\pi/2$; en el JI, la fase β_2 no tiene ninguna restricción respecto a su posible valor, incluso para las desviaciones más pequeñas. Esto se puede comprender teniendo en cuenta que las fases de Majorana, están en las posiciones de la diagonal (2,2) y (3,3) para la parametrización en la Ec.(4.25), es decir acompañan a m_2 y m_3 . Así, para la jerarquía normal (en el caso límite de $m_1 = m_0$), ambas fases son relevantes, mientras que en el límite de jerarquía invertida ($m_3 = m_0$), la fase β_2 queda indeterminada. Dichas diferencias en ambas jerarquías pueden observarse de manera mas clara al comparar el comportamiento de cada una de las fases de Majorana respecto a los parámetros de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$. Como se muestra en la figura 5.2.

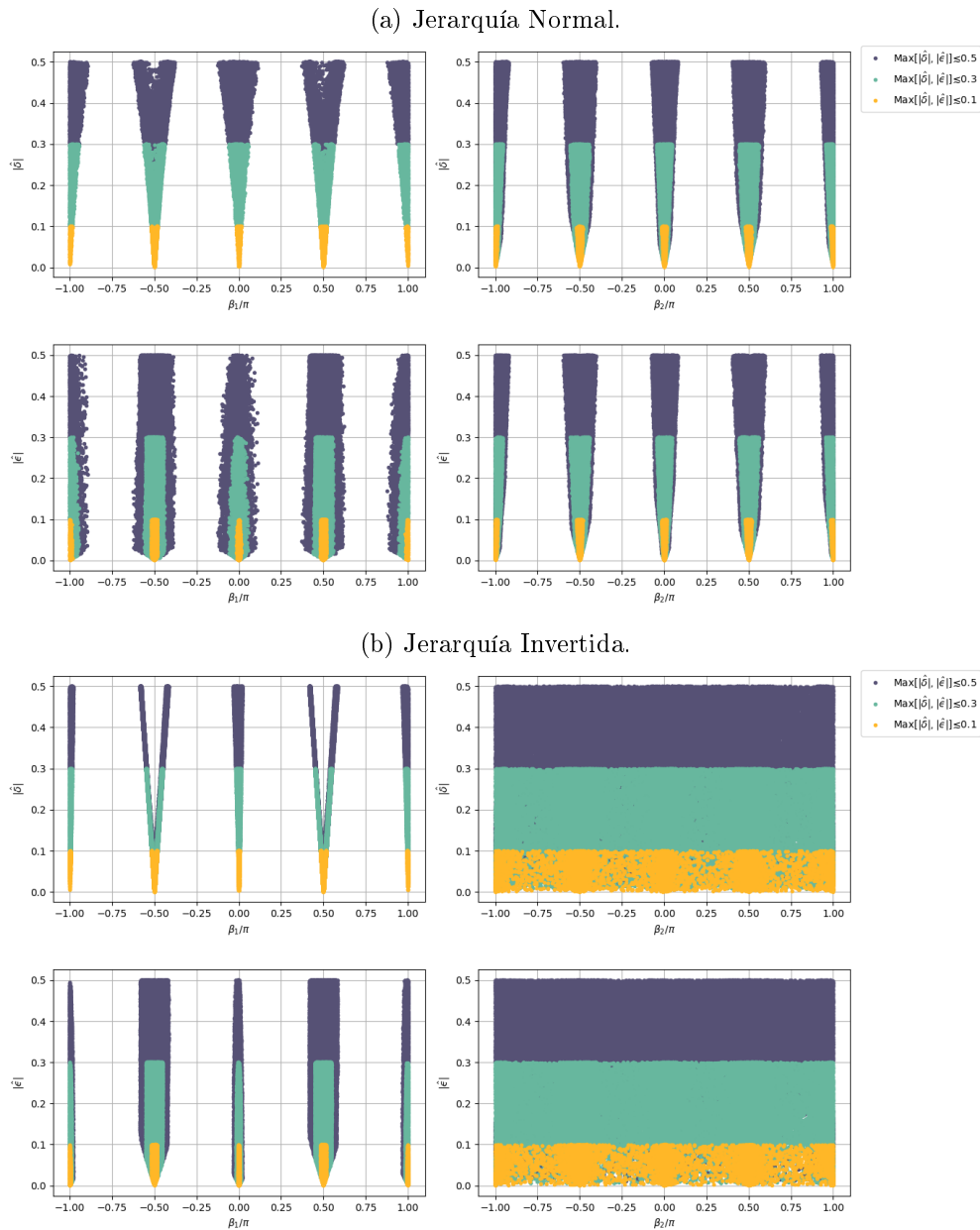


Figura 5.2: Regiones permitidas de las fases Majorana β_1 y β_2 respecto a cada uno de los parámetros de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$. Fuente: Autor.

A partir de la figura 5.2, se observa, además de las características ya mencionadas, la independencia de los parámetros de ruptura de simetría en ambas jerarquías de masas respecto a β_1 . Esto se evidencia en que, por ejemplo, no todos los valores de las fases de Majorana que cumplen con la condición $|\hat{\delta}| \lesssim 0,1$ cumplen también con la condición $|\hat{\epsilon}| \lesssim 0,1$. En contraste, los valores de β_2 presentan un comportamiento similar para ambos parámetros de ruptura.

Otros parámetros de oscilación cuyo comportamiento queremos conocer bajo las restricciones de la simetría de reflexión son los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} . Bajo el mismo análisis computacional realizado anteriormente, estos ángulos tomarán valores aleatorios para la JN ($0,5408 \leq \theta_{12} \leq 0,6299$ y $0,1423 \leq \theta_{13} \leq 0,1559$) y para la JI ($0,5396 \leq \theta_{12} \leq 0,6278$ y $0,143 \leq \theta_{13} \leq 0,1565$). Y al aplicar las restricciones de los parámetros de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$, obtenemos las gráficas mostradas en la Figura 5.3.

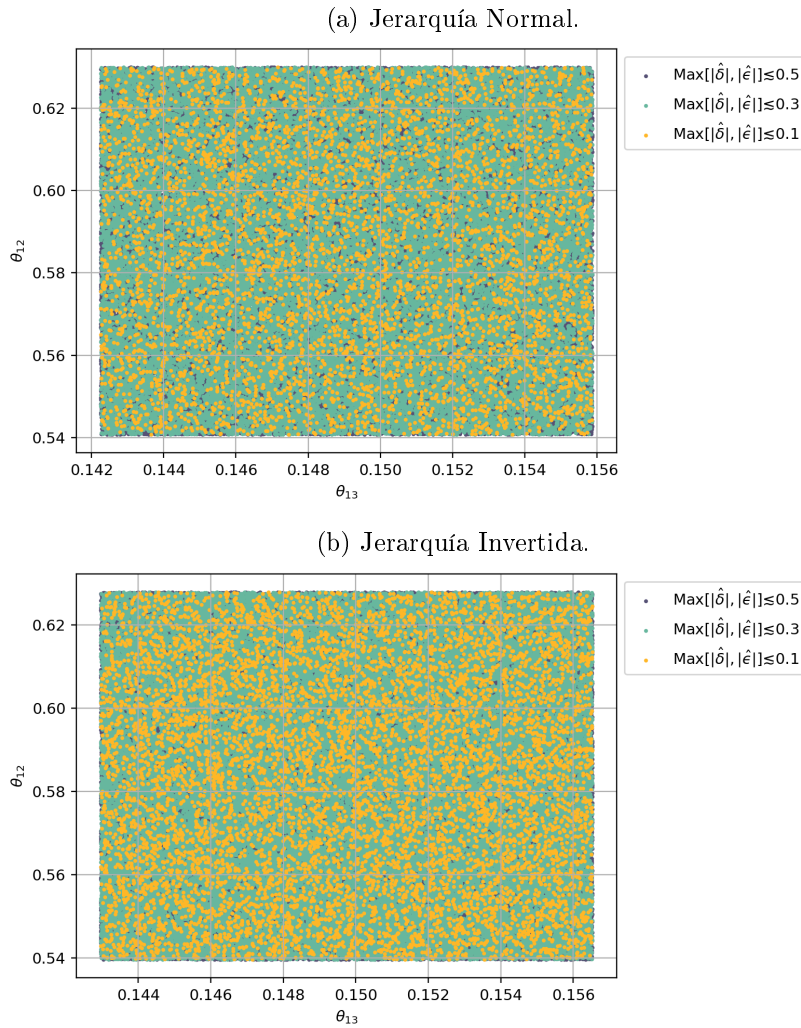


Figura 5.3: Regiones permitidas de para los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} en la Jerarquía Normal e Invertida. Fuente: Autor.

Al observar los resultados obtenidos en la figura 5.3 se puede ver que los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} no exhiben ninguna restricción en sus rangos de valores permitidos, luego de haber aplicado las condiciones de $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$, presentes en la Figura 5.3.

Debido a la gran importancia que tiene el concepto de la masa efectiva de Majorana dentro del estudio de la desintegración $0\nu\beta\beta$, nos interesa observar el comportamiento de dicha masa efectiva (Ec.(3.20)) respecto a la masa más ligera del neutrino (JN: Ec.(2.12), JI: Ec.(2.15)). Para ello lo haremos en el marco de la simetría $\mu - \tau$ de reflexión. Por lo que en un principio solo tendremos en cuenta las restricciones provenientes de la simetría de reflexión, para los parámetros de oscilación δ y θ_{23} (Ec.(4.18)). Para ello, utilizando los mismos puntos de muestreo del análisis computacional previo y además agregaremos el valor límite de la masa ligera obtenido del análisis de las observaciones cosmológicas ($\sum m_\nu \lesssim 0,12$ eV) [79] y los límites obtenidos por KamLAND-Zen ($|m_{\beta\beta}| < (36 - 156)$ [meV]) [72], expresiones (3.22).

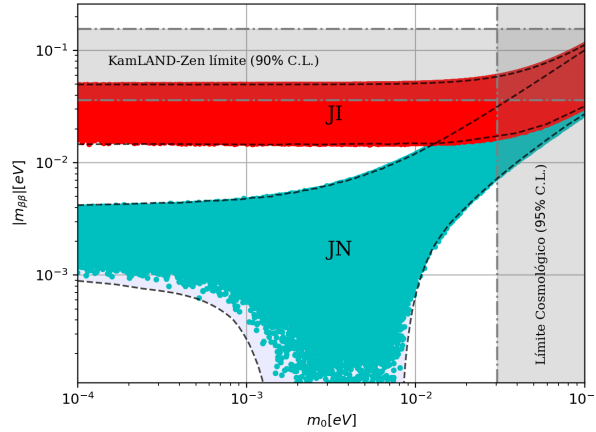


Figura 5.4: Masa efectiva de Majorana en función de la masa mas ligera del neutrino, la línea punteada representa la región completa de JI y JN, mientras que las líneas discontinuas con puntos representan los límites de KamLAND-Zen y los límites cosmológicos. Fuente: Autor.

Ahora, a los datos obtenido en la gráfica anterior aplicaremos la restricción de los parámetros de ruptura adimensional $\text{Max}[|\hat{\delta}|, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0,5$. Esto nos permitirá identificar las regiones permitidas para $|m_{\beta\beta}|$ en cada una de las jerarquías de masa. Adicionalmente, consideraremos los resultados de la figura 5.1 para diferenciar estas regiones en función de la fase de Majorana correspondiente a cada punto.

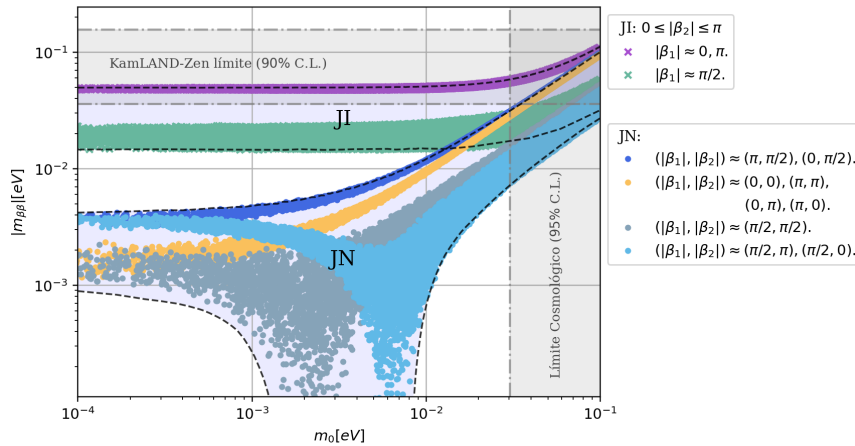
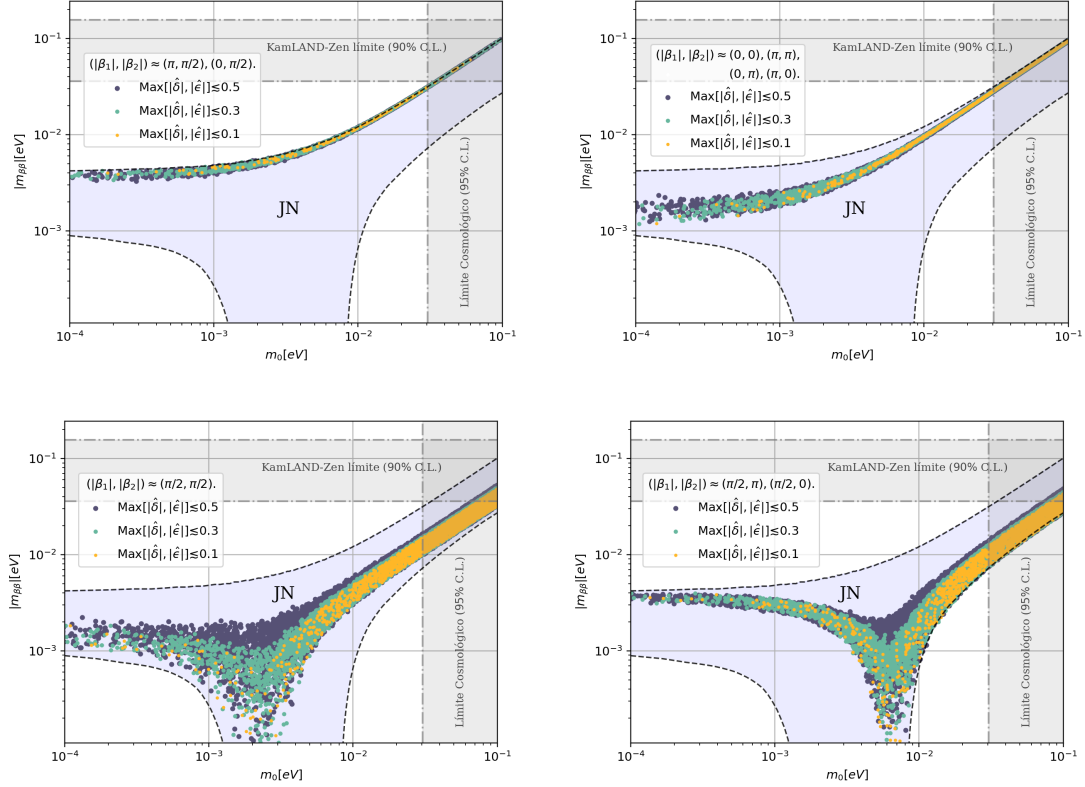


Figura 5.5: Regiones permitidas de la masa efectiva de Majorana respecto a la restricción de los parámetros de ruptura adimensional $\text{Max}[|\hat{\delta}|, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0,5$. Diferentes valores de las fases de Majorana tienen el mismo color, debido a que sus respectivos puntos comparten las mismas regiones para $|m_{\beta\beta}|$. Fuente: Autor.

Separaremos cada una de las regiones permitidas en diferentes gráficas para observar de manera mas clara su comportamiento, además agregaremos una distinción de color respecto a restricciones aun mas leves del rompimiento de la simetría de reflexión. Como se muestra en la figura 5.6, existe una reducción en los posibles valores que pueden tomar todas la regiones permitidas, siendo dicha reducción proporcional a los valores de máximos que pueden tener los parámetros de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$.

(a) Jerarquía Normal.



(b) Jerarquía Invertida.

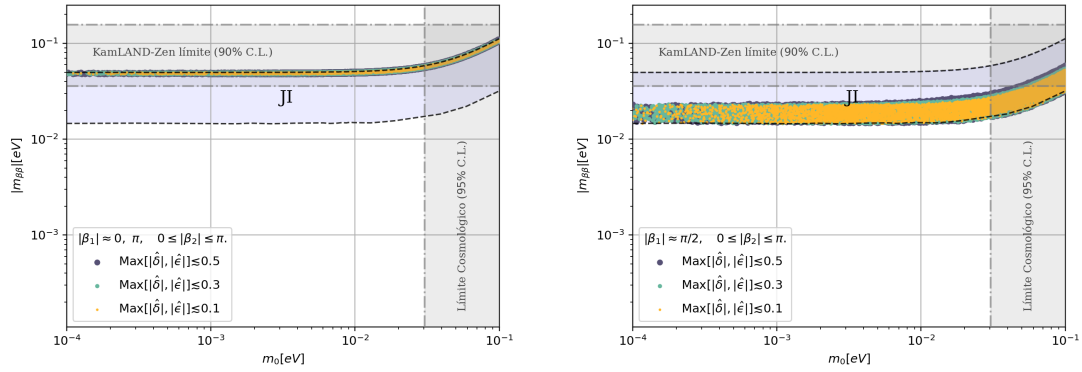


Figura 5.6: Regiones permitida de la masa efectiva de Majorana respecto a las restricción de los parámetro de ruptura adimensional $\text{Max}[|\hat{\delta}|, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0.1, 0.3, 0.5$. Fuente: Autor.

5.1.2. Segunda parametrización ($U_{\mu-\tau}^{M'}$)

Por otra parte, surge una inquietud respecto a las regiones permitidas de la masa efectiva de Majorana. Dado que los parámetros de ruptura son sensibles a los valores de las fases de Majorana, ¿qué sucedería si tomamos una parametrización diferente de la matriz de mezcla, en la que la posición de las fases dentro de la matriz diagonal sean modificadas? Si tomamos la siguiente parametrización

$$U_{\mu-\tau}^{M'} = U_{\mu-\tau} \times \text{diag} \left[e^{i\beta_2}, e^{i\beta_1}, 1 \right], \quad (5.1)$$

que es otra parametrización muy común dentro del estudio de las oscilaciones de neutrinos. Obtendremos las figuras que se mostraran a continuación, en las cuales se tuvieron en cuenta las mismas restricciones provenientes de la simetría $\mu - \tau$ de reflexión para los parámetros de oscilación. En consecuencia las restricciones en los valores de las fases de Majorana respecto a los posibles valores máximos de los parámetro de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$ se verían de la siguiente manera

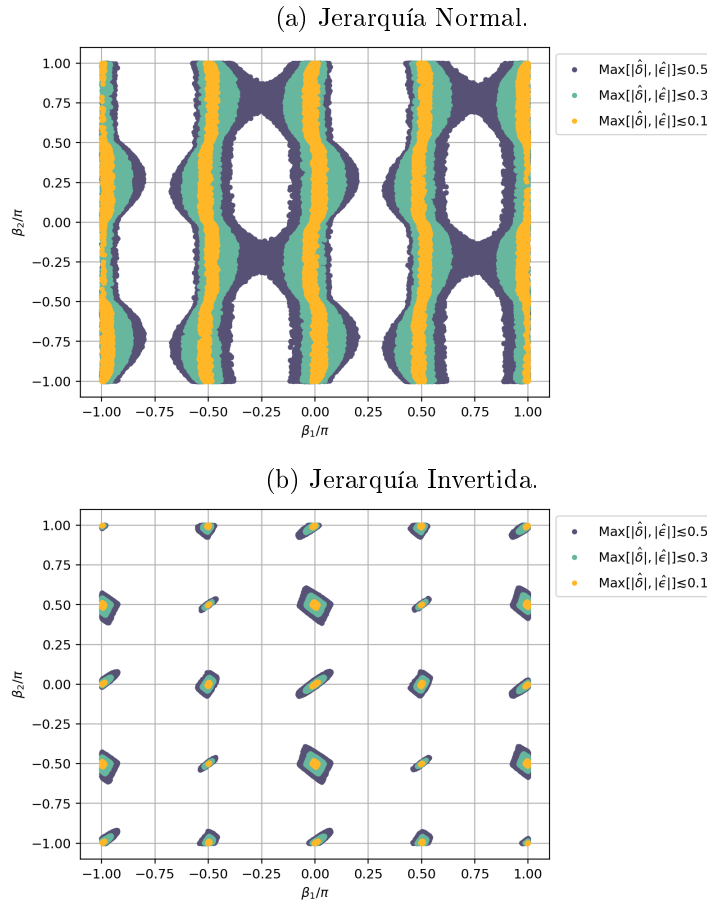


Figura 5.7: Regiones permitidas de fases Majorana para la Jerarquía Normal e Invertida. Las regiones pequeñas, medianas y grandes corresponden a $\text{Max}[|\hat{\delta}|, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0.1, 0.3, 0.5$, respectivamente. Fuente: Autor.

Al comparar los resultados de la figura 5.7 con los obtenidos en la figura 5.1, es notoria la diferencia para cada jerarquía de masas entre ambas parametrizaciones. Si bien se mantiene el hecho de que en una de las jerarquías los valores de ambas fases de Majorana se sitúan al rededor de algunos valores enteros de $\pi/2$ y en la otra jerarquía una de las fases no presenta ningún tipo de restricción, los mismos resultados se presentan en la jerarquía contraria dependiendo de la parametrización, lo que es de esperar, ya que la parametrización estamos considerando las fases

en las diagonales (1,1) y (2,2), lo que en el límite $m_1 = 0$ hace irrelevante la fase β_1 . Este tipo de cambios en las características de las regiones permitidas de las fases de Majorana, pueden observarse de manera mas clara al ser comparados con cada uno de los parámetros de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$. Como se muestra a continuación.

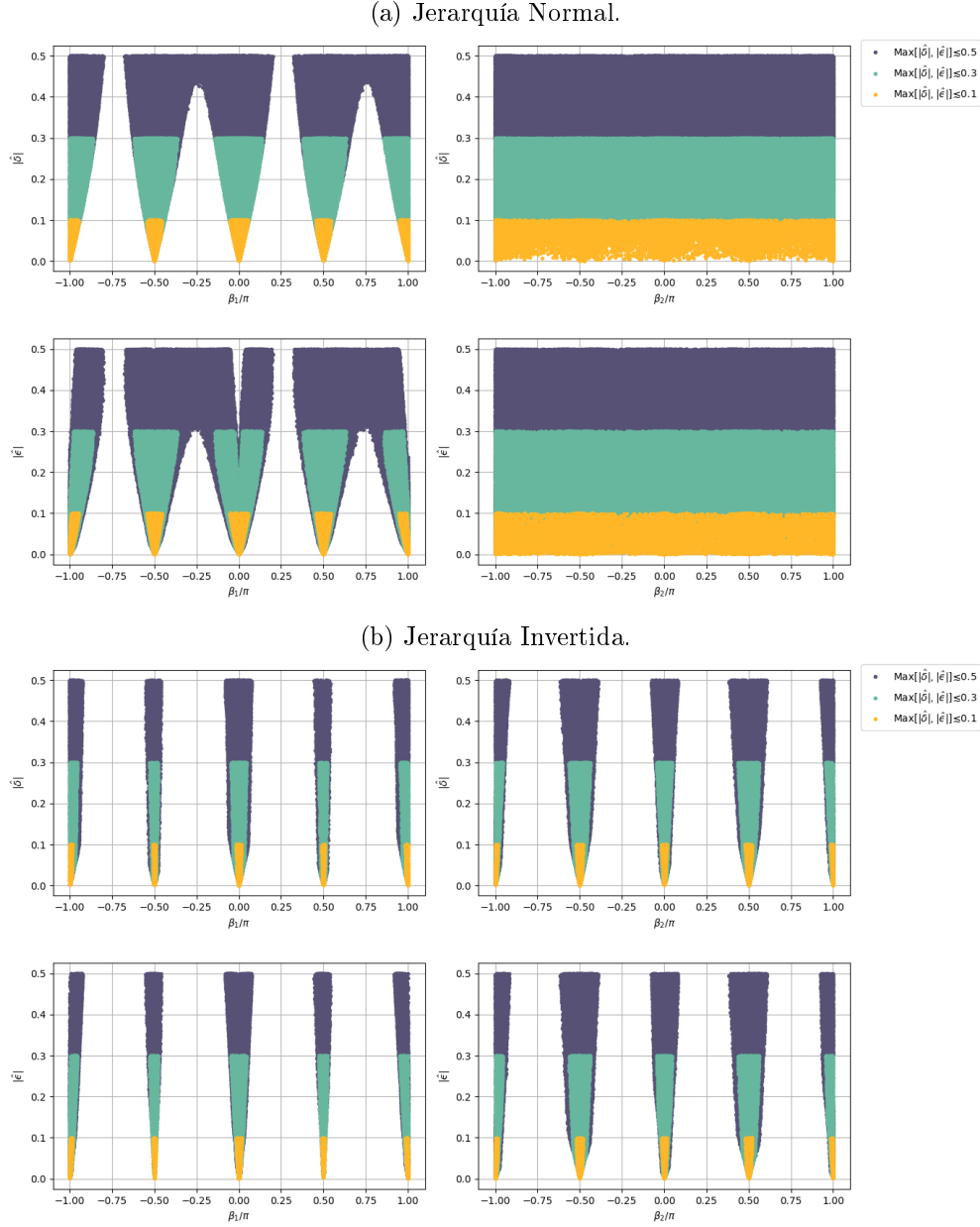


Figura 5.8: Regiones permitidas de las fases Majorana β_1 y β_2 respecto a cada uno de los parámetros de ruptura adimensional $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$. Fuente: Autor.

Al comparar las áreas de las regiones permitida de la fase β_2 en la figura 5.8 con los de la figura 5.2, se observa que, a pesar del cambio de parametrización, las áreas de dichas regiones siguen manteniendo una forma similar. Sin embargo, ahora se muestran en la jerarquía contraria. Mientras que a pesar de que la fase β_1 no modifica su posición dentro de la matriz diagonal, se observa un cambio muy notorio en la forma de dichas regiones permitidas por los de parámetros de ruptura adimensional.

En el caso de esta nueva parametrización, los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} (que continúan teniendo el mismo rango valores permitidos que en la parametrización anterior) se comportan de la siguiente manera tras aplicar las restricciones de los pequeños rompimientos de la simetría de reflexión

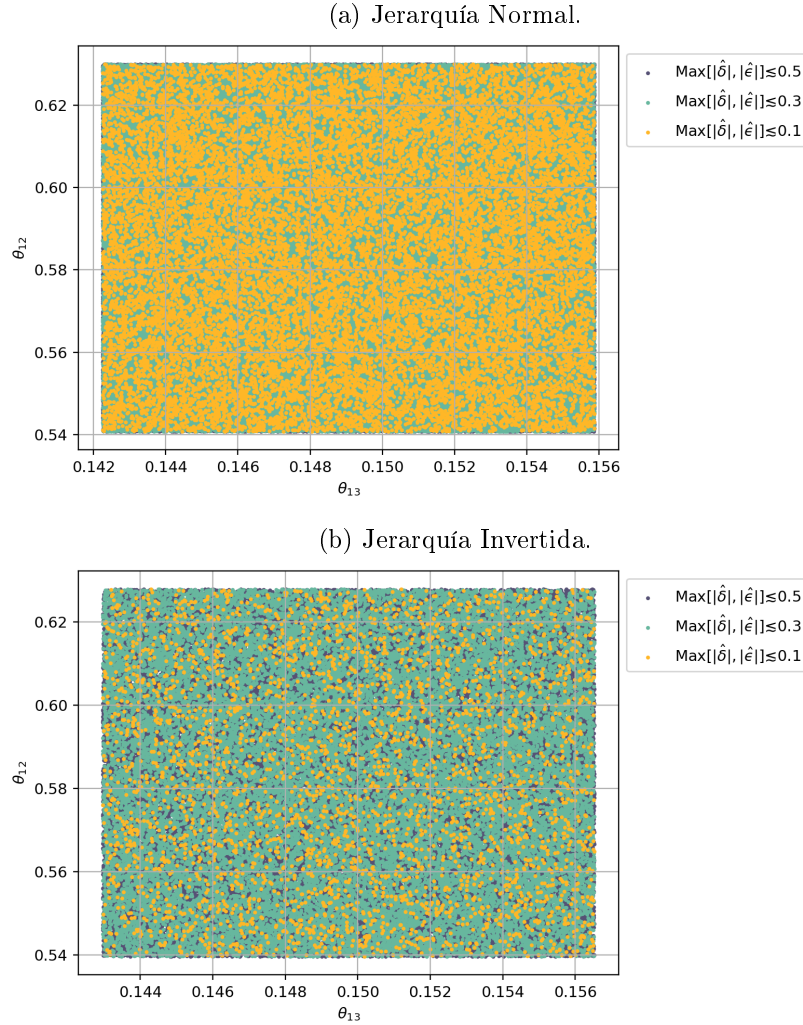


Figura 5.9: Regiones permitidas de para los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} en la Jerarquía Normal e Invertida. Fuente: Autor.

Contrastando los resultados obtenidos en la figura 5.9 con los obtenidos en la figura 5.3, podemos notar que independientemente de la parametrización de la matriz de mezcla que utilizemos, no existirá ninguna restricción en los valores que pueden tomar los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} . Es interesante ver que, aunque en ambas figuras se evalúa la misma cantidad de puntos durante la simulación, en la figura 5.9 se aprecia un cambio significativo en la cantidad de puntos que cumplen con las condiciones de restricción aplicadas.

Finalmente, analizaremos la dependencia de la masa efectiva de Majorana respecto a la masa mas ligera del neutrino, en las mismas consideraciones que en la figura 5.4, pero utilizando ahora la parametrización U'_{PMNS} (Ec.(5.1)) en lugar de U^R_{PMNS} (Ec.(4.21)). Como se muestra en la figura 5.10, no se observan cambios significativos en los limites de las regiones totales para masa efectiva de Majorana en ambas jerarquías (JN y JI).

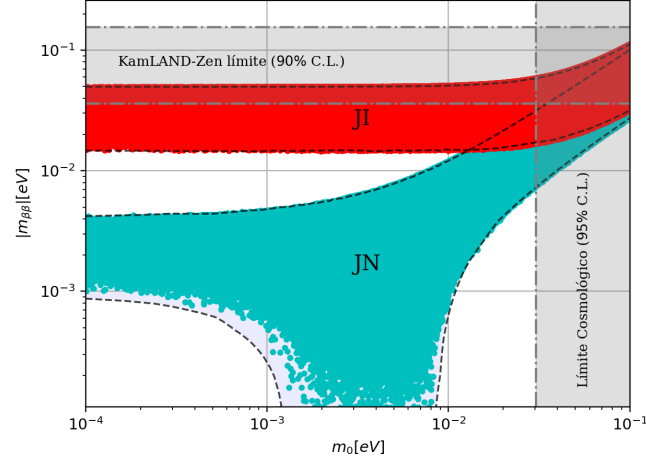


Figura 5.10: Masa efectiva de Majorana en función de la masa mas ligera del neutrino, la línea punteada representa la región completa de JI y JN, mientras que las líneas discontinuas con puntos representan los limites de KamLAND-Zen y los limites cosmológicos. Fuente: Autor.

Al combinar los datos obtenidos en la figura 5.7, con los obtenidos en la figura 5.10, donde solo aplicaremos la restricción máxima para los parámetros de ruptura adimensional $[\hat{\delta}, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0,5$.

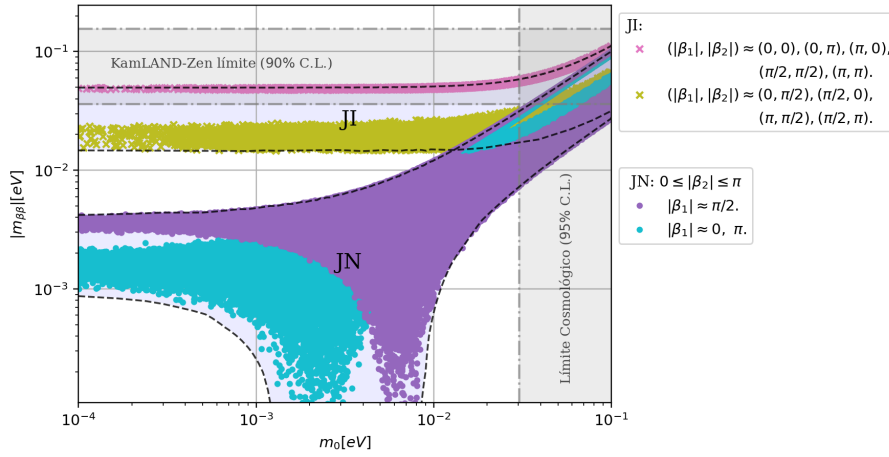
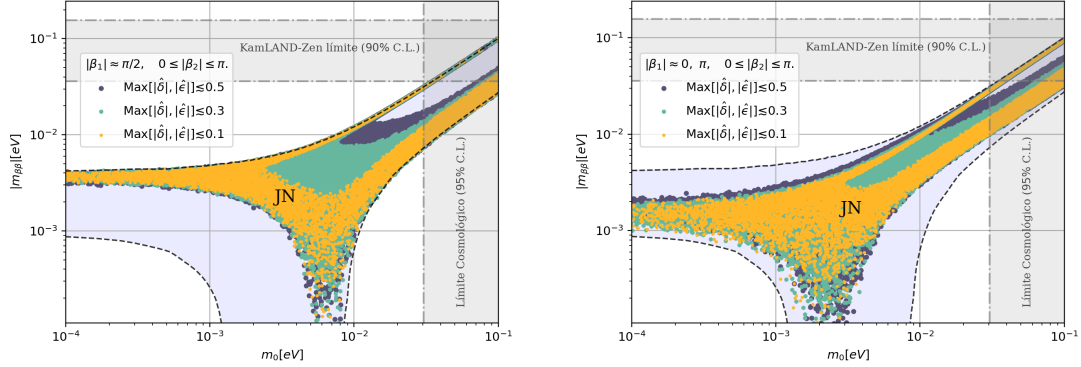


Figura 5.11: Regiones permitidas de la masa efectiva de Majorana respecto a las restricción de los parámetro de ruptura adimensional $\text{Max}[\hat{\delta}, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0.5$. Diferentes valores de las fases de Majorana tienen el mismo color, debido a que sus respectivos puntos comparten las mismas regiones para $|m_{\beta\beta}|$. Fuente: Autor.

En la figura 5.11 podemos observar que, comparado con la figura 5.5, en la JN se reducen la cantidad regiones permitidas para la masa efectiva de Majorana. Sin embargo, en la JI la cantidad de regiones permitidas y sus respectivas áreas se mantienen constantes, solo hubo un cambio en los valores de las fases de Majorana correspondientes a cada región.

Separaremos cada una de las regiones permitidas en diferentes gráficas para observar de manera mas clara su comportamiento. Además, dichas regiones tendrán un color distinto dependiendo del valor máximo de los parámetros de ruptura de la simetría de reflexión.

(a) Jerarquía Normal.



(b) Jerarquía Invertida.

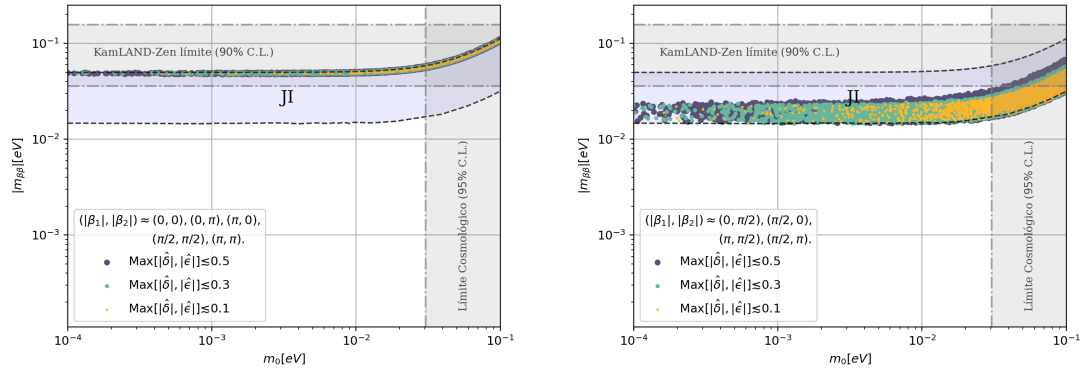


Figura 5.12: Regiones permitida de la masa efectiva de Majorana respecto a las restricción de los parámetro de ruptura adimensional $\text{Max}[|\hat{\delta}|, |\hat{\epsilon}|] \lesssim 0.1, 0.3, 0.5$. Fuente: Autor.

Al igual que se observa en la figura 5.6, la figura 5.12 muestra una reducción en los posibles valores de las regiones permitidas, proporcionales a los valores de máximos que pueden tener los parámetros de ruptura. Sin embargo, en este último caso, cuando los valores máximos de los parámetros de ruptura $|\hat{\delta}|$ y $|\hat{\epsilon}|$ son menores o iguales a 0.1, en la JI se observa una tendencia aún mayor a que los puntos se concentren más después de los 10^{-2} [eV] para la masa más ligera.

6. Conclusiones

Como se ha visto a lo largo de este trabajo de investigación, la matriz de mezcla U es fundamental en la comprensión del comportamiento de la teoría de oscilaciones de neutrino. Esta matriz actúa como intermediaria entre los autoestados de sabor, descritos por $\mathcal{L}_{I,L}^{(CC)}$, y los autoestados de masa, descritos por $\mathcal{L}_m$. Por otra parte, la simetría $\mu - \tau$ que parece tener, de manera exacta o aproximada, la matriz de mezcla, al ser evaluados los valores experimentales de los parámetros de oscilación, motivó a plantearnos la pregunta de si se pueden obtener predicciones de las fases de Majorana en el contexto de simetría mu-tau de reflexión. Después de realizar un cuidadoso análisis numérico podemos concluir que hay una reducción considerable en las regiones permitidas de ambas fases de Majorana, al menos para un ordenamiento de masa. Experimentos enfocados a la detección del proceso del decaimiento doble beta sin neutrinos, podría a mediano plazo descartar o validar estos resultados. En conclusión, la matriz de mezcla U y la simetría $\mu - \tau$ son elementos esenciales para interpretar la naturaleza del neutrino en el universo.

Como pudimos observar en la parte final de la Sección 4.1, para realizar una selección adecuada de la parametrización de la matriz de mezcla, es imprescindible tener en cuenta el patrón de la textura de la matriz de masas que se utilizará. Ya que además esto permitirá determinar de manera acertada las condiciones necesarias para llegar a la simetría $\mu - \tau$ de reflexión y, posteriormente, a los parámetros de ruptura.

Este estudio demuestra que la aplicación de restricciones de los pequeños rompimientos de la simetría $\mu - \tau$ de reflexión reduce significativamente los valores permitidos de las fases de Majorana y, por ende, el espacio de parámetros para la masa efectiva de Majorana. Independientemente de la parametrización, las regiones de los valores permitidos en una de las jerarquías se concentran alrededor de valores enteros de $\pi/2$, mientras que en la otra jerarquía solo una fase presenta estos valores discretos y la otra permite valores continuos entre 0 y π . Cabe destacar que los valores de los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} no presentan restricción alguna. Estos resultados son de gran importancia, ya que proporcionan fuentes de violación de CP adicionales, que podrían ser útiles para explicar la asimetría bariónica del Universo.

Sería interesante realizar futuros estudios en los que, además de las restricciones de la simetría de reflexión $\mu - \tau$, agreguemos otras restricciones para la matriz de mezcla provenientes de la simetría mágica. La simetría mágica implica que la suma de los elementos de cada fila o columna es igual [80]. Esto podría ayudar a restringir aún más los valores de las fases de Majorana y posiblemente a que los valores de los ángulos de mezcla también se restrinjan.

Apéndice A. Código implementado en Wolfram Mathematica

A.1. Invariante de Jarlskog y algunas características de la matriz de mezcla U_{PMNS}

The screenshot shows the Wolfram Mathematica interface with the following code and output:

```

Ue1=Cos[t12]*Cos[t13];
Ue2=Sin[t12]*Cos[t13];
Ue3=Sin[t13]*Exp[-I*d];

Um1=-Sin[t12]*Cos[t23] - Cos[t12]*Sin[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Um2=Cos[t12]*Cos[t23] - Sin[t12]*Sin[t23]*Sin[t13]* Exp[I*d];
Um3=Sin[t23]*Cos[t13];

Ut1=Sin[t12]*Sin[t23] - Cos[t12]*Cos[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Ut2=-Cos[t12]*Sin[t23] - Sin[t12]*Cos[t23]*Sin[t13]* Exp[I*d];
Ut3=Cos[t23]*Cos[t13];

s={Cos[t12] -> c12 , Cos[t13] -> c13 , Sin[t12] -> s12 , Sin[t13] -> s13, Cos[t23] -> c23 , Sin[t23] -> s23 };

U = {{Ue1, Ue2, Ue3},{-Um1, -Um2, -Um3},{Ut1, Ut2, Ut3}};
Print["U_{PMNS}="];
MatrixForm[Simplify[U/.s]]
Print[]

J=Im[Ue1*Conjugate[Ue2]*Conjugate[Um1]*Um2];
Print["J= ",Simplify[ComplexExpand[J/.s]]]

```

[1] ✓ 1.4s

Wolfram Language

U_{PMNS}=

$$\begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & c_{13} s_{12} & e^{-i d} s_{13} \\ c_{23} s_{12} + c_{12} e^{i d} s_{13} s_{23} & -c_{12} c_{23} + e^{i d} s_{12} s_{13} s_{23} & -c_{13} s_{23} \\ -c_{12} c_{23} e^{i d} s_{13} + s_{12} s_{23} & -c_{23} e^{i d} s_{12} s_{13} - c_{12} s_{23} & c_{13} c_{23} \end{pmatrix}$$

...

J= $c_{12} c_{13}^2 c_{23} s_{12} (c_{12}^2 + s_{12}^2) s_{13} s_{23} \sin[d]$

```

l={e,m,t};
Print["i=",1]
For[i = 1, i <= 3, i++,
Print["Sum(|U_{",1[[i]],",i}|^2)= ", FullSimplify[ComplexExpand[Total[Conjugate[#][[2]] * #[[2]] & /@ U]]]]]

```

[17] ✓ 0.4s

Wolfram Language

i={e, m, t}

Sum(|U_{ei}|^2)= 1

Sum(|U_{mi}|^2)= 1

Sum(|U_{ti}|^2)= 1

```

For[i = 1, i <= 3, i++, For[j = 1, j <= 3, j++,
  If[j != i,
    Print["Sum(U_{i,i} . U_{i,j}) = ", FullSimplify[ComplexExpand[Total[Conjugate#[[i]] * #[[j]] & /@ U]]]]]]]

```

[20] ✓ 0.5s Wolfram Language

... Sum(U_{i1} . U_{i2}) = 0
 ... Sum(U_{i1} . U_{i3}) = 0
 ... Sum(U_{i2} . U_{i1}) = 0
 ... Sum(U_{i2} . U_{i3}) = 0
 ... Sum(U_{i3} . U_{i1}) = 0
 ... Sum(U_{i3} . U_{i2}) = 0

Spaces: 4 Celda 1 de 3 ✓ Wolfram Kernel Spell

A.2. Determinación de las matrices $U_{\mu-\tau}$ y M_ν^0 para U_{PMNS}

```

t23=Pi/4;
d=-Pi/2;

Ue1=Cos[t12]*Cos[t13];
Ue2=Sin[t12]*Cos[t13];
Ue3=Sin[t13]*Exp[-I*d];

Um1=-Sin[t12]*Cos[t23] - Cos[t12]*Sin[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Um2=Cos[t12]*Cos[t23] - Sin[t12]*Sin[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Um3=Sin[t23]*Cos[t13];

Ut1=Sin[t12]*Sin[t23] - Cos[t12]*Cos[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Ut2=-Cos[t12]*Sin[t23] - Sin[t12]*Cos[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Ut3=Cos[t23]*Cos[t13];

s={Cos[t12] -> c12, Cos[t13] -> c13, Sin[t12] -> s12, Sin[t13] -> s13};

U = {{Ue1, Ue2, Ue3}, {Um1, Um2, Um3}, {Ut1, Ut2, Ut3}};
md=DiagonalMatrix[{m1,m2,m3}];

Print["U_{PMNS} (delta=-pi/2, t23=pi/4)"];
Print["=> U_{m-t}="];
Simplify[MatrixForm[U]/.s]
Print[];

Print["Re[M^0_nu="];
FullSimplify[MatrixForm[ComplexExpand[Re[U.(md).Transpose[U]]/.s]]]
Print[];

Print["Im[M^0_nu="];
FullSimplify[MatrixForm[ComplexExpand[Im[U.(md).Transpose[U]]/.s]]]

```

[1] ✓ 2.3s Wolfram Language

... U_{PMNS} (delta=-pi/2, t23=pi/4)
 ... => U_{m-t}=

$$\begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & c_{13} s_{12} & i s_{13} \\ \frac{s_{12} - i c_{12} s_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{12} + i s_{12} s_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{13}}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_{12} + i c_{12} s_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{12} - i s_{12} s_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{13}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

...

... $\text{Re}[M^0_\nu]=$

...

$$\begin{pmatrix} c_{13}^2 (c_{12}^2 m_1 + m_2 s_{12}^2) - m_3 s_{13}^2 & \frac{c_{12} c_{13} (-m_1 + m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{12} c_{13} (m_1 - m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_{12} c_{13} (-m_1 + m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} (c_{13}^2 m_3 + c_{12}^2 (m_2 - m_1 s_{13}^2) + s_{12}^2 (m_1 - m_2 s_{13}^2)) & \frac{1}{2} (c_{13}^2 m_3 - c_{12}^2 (m_2 + m_1 s_{13}^2) - s_{12}^2 (m_1 + m_2 s_{13}^2)) \\ \frac{c_{12} c_{13} (m_1 - m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} (c_{13}^2 m_3 - c_{12}^2 (m_2 + m_1 s_{13}^2) - s_{12}^2 (m_1 + m_2 s_{13}^2)) & \frac{1}{2} (c_{13}^2 m_3 + c_{12}^2 (m_2 - m_1 s_{13}^2) + s_{12}^2 (m_1 - m_2 s_{13}^2)) \end{pmatrix}$$

...

... $\text{Im}[M^0_\nu]=$

...

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} & c_{12} (-m_1 + m_2) s_{12} s_{13} & 0 \\ \frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & c_{12} (m_1 - m_2) s_{12} s_{13} \end{pmatrix}$$

...

0 28 16 0 Live Share ✓ Spaces: 4 CRLF Celda 1 de 1 ✓ Wolfram Kernel Spell

A.3. Forma de la matriz M_ν^0 para $U_{\mu-\tau}$

Tesis (Libro)

U_mt - .wlnb

C: > Users > Nelson Valderrama > Dropbox > Nelson Tesis > Bibliografía > Libros > Cap 4 > U_mt - .wlnb > ...

+ Código + Markdown | Ejecutar todo | Borrar todas las salidas | Export As... | Wolfram Language

```

Um = {{u1, u2, u3},{v1, v2, v3},{v1c, v2c, v3c}};
md=DiagonalMatrix[{m1,m2,m3}];

Print["U_{m-t}= "]
Simplify[MatrixForm[Um]]
Print[];

Print["M^0="];
FullSimplify[MatrixForm[Um.(md).Transpose[Um]]]
Print[];

```

[1] ✓ 0.8s Wolfram Language

... $U_{\{m-t\}}=$

...

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_{1c} & v_{2c} & v_{3c} \end{pmatrix}$$

...

... $M^0=$

...

$$\begin{pmatrix} m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 & m_1 u_1 v_1 + m_2 u_2 v_2 + m_3 u_3 v_3 & m_1 u_1 v_{1c} + m_2 u_2 v_{2c} + m_3 u_3 v_{3c} \\ m_1 u_1 v_1 + m_2 u_2 v_2 + m_3 u_3 v_3 & m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 & m_1 v_1 v_{1c} + m_2 v_2 v_{2c} + m_3 v_3 v_{3c} \\ m_1 u_1 v_{1c} + m_2 u_2 v_{2c} + m_3 u_3 v_{3c} & m_1 v_1 v_{1c} + m_2 v_2 v_{2c} + m_3 v_3 v_{3c} & m_1 v_{1c}^2 + m_2 v_{2c}^2 + m_3 v_{3c}^2 \end{pmatrix}$$

0 283 18 0 Live Share ✓ Spaces: 4 CRLF Celda 1 de 1 ✓ Wolfram Kernel Spell [off]

A.4. Determinación de las matrices $U_{\mu-\tau}$ y M_ν^0 para U_{PMNS}^R

The screenshot shows a Wolfram Mathematica notebook with the following code and output:

```

t23=Pi/4;
d=-Pi/2;

Ue1=Cos[t12]*Cos[t13];
Ue2=Sin[t12]*Cos[t13];
Ue3=Sin[t13]*Exp[-I*d];

Um1=-Sin[t12]*Cos[t23] - Cos[t12]*Sin[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Um2=Cos[t12]*Cos[t23] - Sin[t12]*Sin[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Um3=Sin[t23]*Cos[t13];

Ut1=Sin[t12]*Sin[t23] - Cos[t12]*Cos[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Ut2=-Cos[t12]*Sin[t23] - Sin[t12]*Cos[t23]*Sin[t13]*Exp[I*d];
Ut3=Cos[t23]*Cos[t13];

s={Cos[t12] -> c12, Cos[t13] -> c13, Sin[t12] -> s12, Sin[t13] -> s13};

U = {{Ue1, Ue2, Ue3}, {-Um1, -Um2, -Um3}, {Ut1, Ut2, Ut3}};
md=DiagonalMatrix[{m1,m2,m3}];

Print["U_{m-t}="];
Simplify[MatrixForm[U]/.s]
Print[];

Print["Re[M^0]="];
FullSimplify[MatrixForm[ComplexExpand[Re[U.(md).Transpose[U]/.s]]]
Print[];

Print["Im[M^0]="];
FullSimplify[MatrixForm[ComplexExpand[Im[U.(md).Transpose[U]/.s]]]

```

The output shows the simplified matrix U_{m-t} and the real and imaginary parts of M^0 .

$U_{m-t} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{c_{12} c_{13}}{s_{12} - i c_{12} s_{13}} & \frac{c_{13} s_{12}}{c_{12} + i s_{12} s_{13}} & \frac{i s_{13}}{c_{13}} \\ \frac{s_{12} + i c_{12} s_{13}}{\sqrt{2}} & -\frac{c_{12} - i s_{12} s_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{13}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

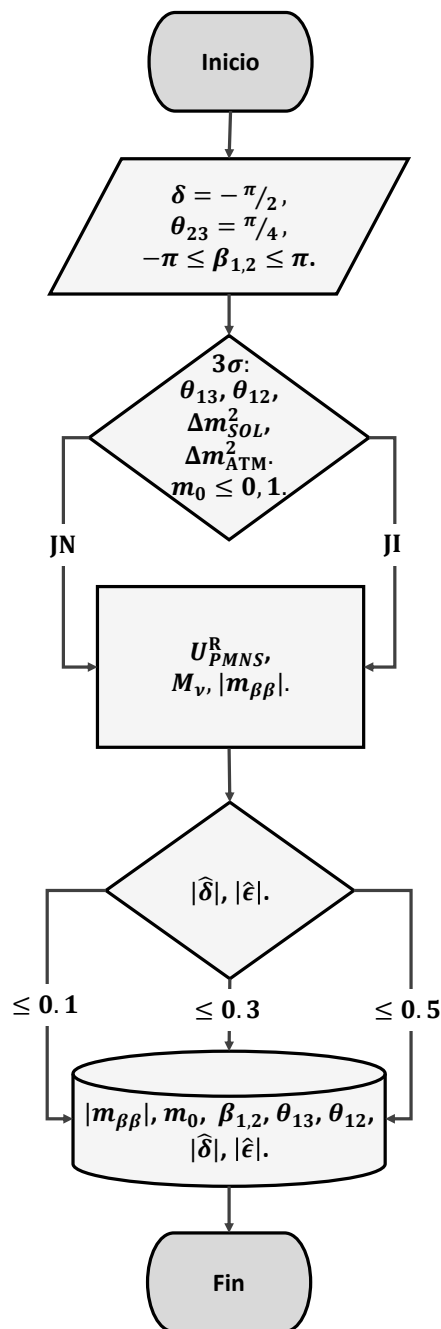
$Re[M^0] =$

$$\begin{pmatrix} c_{13}^2 (c_{12}^2 m_1 + m_2 s_{12}^2) - m_3 s_{13}^2 & \frac{c_{12} c_{13} (m_1 - m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{12} c_{13} (m_1 - m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_{12} c_{13} (m_1 - m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} (c_{13}^2 m_3 + c_{12}^2 (m_2 - m_1 s_{13}^2) + s_{12}^2 (m_1 - m_2 s_{13}^2)) & \frac{1}{2} (-c_{13}^2 m_3 + c_{12}^2 (m_2 + m_1 s_{13}^2) + s_{12}^2 (m_1 + m_2 s_{13}^2)) \\ \frac{c_{12} c_{13} (m_1 - m_2) s_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} (-c_{13}^2 m_3 + c_{12}^2 (m_2 + m_1 s_{13}^2) + s_{12}^2 (m_1 + m_2 s_{13}^2)) & \frac{1}{2} (c_{13}^2 m_3 + c_{12}^2 (m_2 - m_1 s_{13}^2) + s_{12}^2 (m_1 - m_2 s_{13}^2)) \end{pmatrix}$$

$Im[M^0] =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} & c_{12} (-m_1 + m_2) s_{12} s_{13} & 0 \\ \frac{c_{13} (c_{12}^2 m_1 + m_3 + m_2 s_{12}^2) s_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & c_{12} (m_1 - m_2) s_{12} s_{13} \end{pmatrix}$$

Apéndice B. Diagrama de flujo que describe el código implementado en Python



Bibliografía

- [1] S. Weinberg, “A model of leptons,” *Physical review letters*, vol. 19, no. 21, p. 1264, 1967.
- [2] N. Svartholm, “Elementary particle theory(relativistic groups and analyticity),” 1968.
- [3] S. L. Glashow, “Partial-symmetries of weak interactions,” *Nuclear physics*, vol. 22, no. 4, pp. 579–588, 1961.
- [4] J.-J. Aubert, U. Becker, P. Biggs, J. Burger, M. Chen, G. Everhart, P. Goldhagen, J. Leong, T. McCorriston, T. Rhoades, *et al.*, “Experimental observation of a heavy particle j ,” *Physical Review Letters*, vol. 33, no. 23, p. 1404, 1974.
- [5] J.-E. Augustin, A. M. Boyarski, M. Breidenbach, F. Bulos, J. Dakin, G. Feldman, G. Fischer, D. Fryberger, G. Hanson, B. Jean-Marie, *et al.*, “Discovery of a narrow resonance in e^+e^- annihilation,” *Physical Review Letters*, vol. 33, no. 23, p. 1406, 1974.
- [6] G. Arnison, A. Astbury, B. Aubert, C. Bacci, G. Bauer, A. Bézaguët, R. Böck, T. Bowcock, M. Calvetti, T. Carroll, *et al.*, “Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at $s = 540$ gev,” *Physics Letters B*, vol. 122, no. 1, 1983.
- [7] M. Banner, R. Battiston, P. Bloch, F. Bonaudi, K. Borer, M. Borghini, J.-C. Chollet, A. Clark, C. Conta, P. Darriulat, *et al.*, “Observation of single isolated electrons of high transverse momentum in events with missing transverse energy at the cern pp collider,” *Physics Letters B*, vol. 122, no. 5-6, pp. 476–485, 1983.
- [8] S. Herb, D. Hom, L. Lederman, J. Sens, H. Snyder, J. Yoh, J. Appel, B. Brown, C. Brown, W. Innes, *et al.*, “Observation of a dimuon resonance at 9.5 gev in 400-gev proton-nucleus collisions,” *Physical Review Letters*, vol. 39, no. 5, p. 252, 1977.
- [9] C. Collaboration *et al.*, “Observation of top quark production in $p\bar{p}$ -p collisions,” *arXiv preprint hep-ex/9503002*, 1995.
- [10] D. Decamp, B. Deschizeaux, J.-P. Lees, M.-N. Minard, J. Crespo, M. Delfino, E. Fernandez, M. Martinez, R. Miquel, M. Mir, *et al.*, “Determination of the number of light neutrino species,” *Physics Letters B*, vol. 231, no. 4, pp. 519–529, 1989.
- [11] MissMJ, “Standard model of elementary particles - modelo estándar de la física de partículas - wikipedia, la enciclopedia libre.” https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_est%C3%A1ndar_de_la_f%C3%ADsica_de_part%C3%ADculas#/media/Archivo:Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg.
- [12] R. Mann, *An introduction to particle physics and the standard model*. Taylor & Francis, 2010.
- [13] C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press, 2007.

- [14] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2020.
- [15] J. J. H. Rey, “Premio nobel de física 2015. t. kajita y ab mcdonald. el descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos,” *Revista Española de Física*, vol. 29, no. 4, pp. 57–61, 2015.
- [16] S. Hanawa, “Mathematical formulation of the gell-mann-nishijima scheme for new particles,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 17, no. 4, pp. 592–602, 1957.
- [17] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995. Section 20.2: The Glashow-Weinberg-Salam Model.
- [18] S. Weinberg, “A model of leptons,” *Physical review letters*, vol. 19, no. 21, p. 1264, 1967.
- [19] P. Langacker, *The standard model and beyond*. Taylor & Francis, 2017.
- [20] S. Bilenky, *Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos*, vol. 947. Springer, 2018.
- [21] B. Pontecorvo, “Mesonium and antimesonium,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 6, p. 429, 1957.
- [22] B. Pontecorvo, “Inverse β processes and nonconservation of lepton charge,” *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.*, vol. 34, 1958.
- [23] G. Danby, J. M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger, “Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos,” *Physical Review Letters*, vol. 9, no. 1, p. 36, 1962.
- [24] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, “Remarks on the unified model of elementary particles,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 28, no. 5, pp. 870–880, 1962.
- [25] A. Rasin, “Diagonalization of quark mass matrices and the cabibbo-kobayashi-maskawa matrix,” *arXiv preprint hep-ph/9708216*, 1997.
- [26] M. Gonzalez-Garcia and M. Yokoyama, “Neutrino masses, mixing, and oscillations,” *Prog. Theor. Exp. Phys.*, vol. 2020, p. 083C01, 2019.
- [27] A. Smirnov, “The mikheyev-smirnov-wolfenstein (msw) effect,” *arXiv preprint arXiv:1901.11473*, 2019.
- [28] X. Qian and P. Vogel, “Neutrino mass hierarchy,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 83, pp. 1–30, 2015.
- [29] P. F. De Salas, S. Gariazzo, O. Mena, C. A. Ternes, and M. Tórtola, “Neutrino mass ordering from oscillations and beyond: 2018 status and future prospects,” *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, vol. 5, p. 36, 2018.
- [30] K. V. Mistry, *Exploring Electron-neutrino-argon Interactions*. Springer, 2023.
- [31] B. T. Cleveland, T. Daily, R. Davis Jr, J. R. Distel, K. Lande, C. Lee, P. S. Wildenhain, and J. Ullman, “Measurement of the solar electron neutrino flux with the homestake chlorine detector,” *The Astrophysical Journal*, vol. 496, no. 1, p. 505, 1998.
- [32] Y. Fukuda, T. Hayakawa, K. Inoue, T. Ishida, S. Joukou, T. Kajita, S. Kasuga, Y. Koshio, T. Kumita, K. Matsumoto, *et al.*, “Atmospheric ν_{μ} ν_e ratio in the multi-gev energy range,” *Physics Letters B*, vol. 335, no. 2, pp. 237–245, 1994.

- [33] Y. Fukuda, T. Hayakawa, E. Ichihara, K. Inoue, K. Ishihara, H. Ishino, Y. Itow, T. Kajita, J. Kameda, S. Kasuga, *et al.*, “Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos,” *Physical review letters*, vol. 81, no. 8, p. 1562, 1998.
- [34] S. Ahmed, A. Anthony, E. Beier, A. Bellerive, S. Biller, J. Boger, M. G. Boulay, M. Bowler, T. Bowles, S. Brice, *et al.*, “Measurement of the total active b 8 solar neutrino flux at the sudbury neutrino observatory with enhanced neutral current sensitivity,” *Physical review letters*, vol. 92, no. 18, p. 181301, 2004.
- [35] M. Altmann, M. Balata, P. Belli, E. Bellotti, R. Bernabei, E. Burkert, C. Cattadori, G. Cerichelli, M. Chiarini, M. Cribier, *et al.*, “Gno solar neutrino observations: Results for gno i,” *Physics Letters B*, vol. 490, no. 1-2, pp. 16–26, 2000.
- [36] W. Hampel, J. Handt, G. Heusser, J. Kiko, T. Kirsten, M. Laubenstein, E. Pernicka, W. Rau, M. Wojcik, Y. Zakharov, *et al.*, “Gallex solar neutrino observations: Results for gallex iv,” *Physics Letters B*, vol. 447, no. 1-2, pp. 127–133, 1999.
- [37] J. Abdurashitov, S. Collaboration, *et al.*, “Measurement of the solar neutrino capture rate by the russian-american gallium solar neutrino experiment during one half of the 22-year cycle of solar activity,” *arXiv preprint astro-ph/0204245*, 2002.
- [38] K. Collaboration *et al.*, “A high sensitivity search for $\bar{\nu}_e$ ’s from the sun and other sources at kamland,” *arXiv preprint hep-ex/0310047*, 2003.
- [39] R. Becker-Szendy, C. Bratton, D. Casper, S. Dye, W. Gajewski, M. Goldhaber, T. Haines, P. Halverson, T. Jones, D. Kielczewska, *et al.*, “Search for muon neutrino oscillations with the irvine-michigan-brookhaven detector,” *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 7, p. 1010, 1992.
- [40] M. Aglietta, G. Badino, G. Bologna, C. Castagnoli, A. Castellina, B. Piazzoli, W. Fulgione, P. Galeotti, G. Mannocchi, P. Picchi, *et al.*, “Experimental study of upward stopping muons in nusex,” *Europhysics Letters*, vol. 15, no. 5, p. 559, 1991.
- [41] F. Collaboration, K. Daum, W. Rhode, P. Bareyre, R. Barloutaud, G. Chardin, B. Degrange, J. Ernwein, B. Kuznik, H. Meyer, *et al.*, “Determination of the atmospheric neutrino spectra with the frejus detector,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 66, no. 3, pp. 417–428, 1995.
- [42] M. collaboration *et al.*, “Atmospheric neutrino oscillations from upward throughgoing muon multiple scattering in macro,” *arXiv preprint hep-ex/0304037*, 2003.
- [43] S. . Collaboration *et al.*, “Observation of atmospheric neutrino oscillations in soudan 2,” *arXiv preprint hep-ex/0307069*, 2003.
- [44] P. J. Litchfield, “Atmospheric neutrinos in minos,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 451, no. 1, pp. 187–191, 2000.
- [45] H. Kwon, F. Boehm, A. Hahn, H. Henrikson, J.-L. Vuilleumier, J.-F. Cavaignac, D. Koang, B. Vignon, F. v. Feilitzsch, and R. Mossbauer, “Search for neutrino oscillations at a fission reactor,” *Physical Review D*, vol. 24, no. 5, p. 1097, 1981.
- [46] G. Zacek, F. v. Feilitzsch, R. Mossbauer, and a. o. Oberauer, “Neutrino-oscillation experiments at the gosgen nuclear power reactor,” *Physical Review D*, vol. 34, no. 9, p. 2621, 1986.

- [47] A. Afonin, S. Bogatov, A. Vershinskiĭ, S. Ketov, Y. V. Klimov, B. Kopeĭkin, A. Kubshnikov, A. Labzov, I. Machulin, L. Mikaélyan, *et al.*, “ ν -tilde e spectra at two distances from the reactor of the rovno nuclear power plant: search for oscillations,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. 45, p. 247, 1987.
- [48] G. Vidyakin, V. Vyrodo, Y. V. Kozlov, A. Martem’yanov, V. Martem’yanov, A. Odinokov, S. Sukhotin, V. Tarasenzov, E. Turbin, S. Tyurenkov, *et al.*, “Limitations on the characteristics of neutrino oscillations,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. 59, p. 390, 1994.
- [49] B. Achkar, R. Aleksan, M. Avenier, G. Bagieu, J. Bouchez, R. Brissot, J.-F. Cavaignac, J. Collot, M. Cousinou, J.-P. Cussonneau, *et al.*, “Search for neutrino oscillations at 15, 40 and 95 meters from a nuclear power reactor at bugey,” *Nuclear Physics B*, vol. 434, no. 3, pp. 503–532, 1995.
- [50] Z. Greenwood, W. Kropp, M. Mandelkern, S. Nakamura, E. Pasierb-Love, L. Price, F. Reines, S. Riley, H. Sobel, N. Baumann, *et al.*, “Results of a two-position reactor neutrino-oscillation experiment,” *Physical Review D*, vol. 53, no. 11, p. 6054, 1996.
- [51] M. Apollonio, A. Baldini, C. Bemporad, E. Caffau, F. Cei, Y. Declais, H. d. Kerret, B. Dieterle, A. Etenko, L. Foresti, *et al.*, “Search for neutrino oscillations on a long base-line at the chooz nuclear power station,” *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, vol. 27, pp. 331–374, 2003.
- [52] F. Boehm, J. Busenitz, B. Cook, G. Gratta, H. Henrikson, J. Kornis, D. Lawrence, K. Lee, K. McKinny, L. Miller, *et al.*, “Final results from the palo verde neutrino oscillation experiment,” *Physical Review D*, vol. 64, no. 11, p. 112001, 2001.
- [53] F. Ardellier, I. Barabanov, J. Barriere, M. Bauer, L. Bezrukov, C. Buck, C. Cattadori, B. Courty, M. Cribier, F. Dalnoki-Veress, *et al.*, “Letter of intent for double-chooz: a search for the mixing angle theta13,” *arXiv preprint hep-ex/0405032*, 2004.
- [54] C. Arpesella, H. Back, M. Balata, G. Bellini, J. Benziger, S. Bonetti, A. Brigatti, B. Caccianiga, L. Cadonati, F. Calaprice, *et al.*, “Direct measurement of the be 7 solar neutrino flux with 192 days of borexino data,” *Physical Review Letters*, vol. 101, no. 9, p. 091302, 2008.
- [55] C. Angelini, A. Baldini, L. Bertanza, R. Fantechi, V. Flaminio, R. Pazzi, B. Saitta, A. Apostolakis, P. Ioannou, S. Katsanevas, *et al.*, “New experimental limits on $\nu \mu \rightarrow \nu e$ oscillations,” *Phys. Lett., B*, vol. 179, no. 3, pp. 307–312, 1986.
- [56] N. Ushida, T. Kondo, S. Tasaka, I. Park, J. Song, T. Hara, Y. Homma, Y. Tsuzuki, G. Fujioka, H. Fukushima, *et al.*, “Limits to, oscillations and,-direct coupling,” *Physical review letters*, vol. 57, no. 23, pp. 2897–2900, 1986.
- [57] C. Collaboration, F. Bergsma, J. Dorenbosch, C. Nieuwenhuis, J. Allaby, U. Amaldi, G. Barbiellini, A. Capone, Y. Eisenberg, W. Flegel, *et al.*, “A search for neutrino oscillations,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 40, pp. 171–192, 1988.
- [58] C. Athanassopoulos, L. Auerbach, R. Burman, D. Caldwell, E. Church, I. Cohen, J. Donahue, A. Fazely, F. Federspiel, G. Garvey, *et al.*, “Evidence for $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ neutrino oscillations from lsnd,” *arXiv preprint nucl-ex/9709006*, 1997.
- [59] S. Freedman, B. Fujikawa, J. Napolitano, J. Nelson, R. McKeown, K. Lesko, J. Donahue, G. Garvey, V. Sandberg, W. Choi, *et al.*, “Limits on neutrino oscillations from $\nu^- e$ appearance,” *Physical Review D*, vol. 47, no. 3, p. 811, 1993.

- [60] B. Armbruster, I. Blair, B. Bodmann, N. Booth, G. Drexlin, J. Edgington, C. Eichner, K. Eitel, E. Finckh, H. Gemmeke, *et al.*, “Upper limits for neutrino oscillations $\nu^- \mu \rightarrow \nu^- e$ from muon decay at rest,” *Physical Review D*, vol. 65, no. 11, p. 112001, 2002.
- [61] S. Ahn, S. An, S. Aoki, H. Berns, H. Bhang, S. Boyd, D. Casper, T. Chikamatsu, J. Choi, S. Echigo, *et al.*, “Detection of accelerator-produced neutrinos at a distance of 250 km,” *Physics Letters B*, vol. 511, no. 2-4, pp. 178–184, 2001.
- [62] P. Aprili, I. Collaboration, *et al.*, “Cloning of the t600 modules to reach the design sensitive mass,” 2002.
- [63] Y. Itow, T. Kajita, K. Kaneyuki, M. Shiozawa, Y. Totsuka, Y. Hayato, T. Ishida, T. Ishii, T. Kobayashi, T. Maruyama, *et al.*, “The jhf-kamioka neutrino project,” *arXiv preprint hep-ex/0106019*, 2001.
- [64] J. J. Gomez-Cadenas, A. Blondel, J. Burguet-Castell, D. Casper, M. Donega, S. Gilardoni, P. Hernandez, and M. Mezzetto, “Physics potential of very intense conventional neutrino beams,” *arXiv preprint hep-ph/0105297*, 2001.
- [65] S. Geer, “Neutrino beams from muon storage rings: Characteristics and physics potential,” *Physical Review D*, vol. 57, no. 11, p. 6989, 1998.
- [66] P. Zucchelli, “A novel concept for a $\nu e/\nu e$ neutrino factory: the beta-beam,” *Physics Letters B*, vol. 532, no. 3-4, pp. 166–172, 2002.
- [67] F. Capozzi, E. Di Valentino, E. Lisi, A. Marrone, A. Melchiorri, and A. Palazzo, “Addendum to “global constraints on absolute neutrino masses and their ordering,”” *Physical Review D*, vol. 101, no. 11, p. 116013, 2020.
- [68] K. Zuber, *Neutrino physics*. Taylor & Francis, 2020.
- [69] E. Majorana, “Nuovo cim,” no. 14, p. 171–184, 1937.
- [70] M. Agostini, G. Benato, J. Detwiler, J. Menéndez, and F. Vissani, “Toward the discovery of matter creation with neutrinoless double-beta decay. arxiv 2022,” *arXiv preprint arXiv:2202.01787*.
- [71] G. Benato, “Effective majorana mass and neutrinoless double beta decay,” *The European Physical Journal C*, vol. 75, no. 11, p. 563, 2015.
- [72] S. Abe, S. Asami, M. Eizuka, S. Futagi, A. Gando, Y. Gando, T. Gima, A. Goto, T. Hachiya, K. Hata, *et al.*, “Search for the majorana nature of neutrinos in the inverted mass ordering region with kamland-zen,” *Physical Review Letters*, vol. 130, no. 5, p. 051801, 2023.
- [73] M. Agostini, G. Araujo, A. Bakalyarov, M. Balata, I. Barabanov, L. Baudis, C. Bauer, E. Bellotti, S. Belogurov, A. Bettini, *et al.*, “Final results of gerda on the search for neutrinoless double- β decay,” *Physical review letters*, vol. 125, no. 25, p. 252502, 2020.
- [74] Z.-z. Xing, “The μ - τ reflection symmetry of majorana neutrinos,” *Reports on Progress in Physics*, 2023.
- [75] Z.-Z. Xing and Z.-H. Zhao, “A review of μ - τ flavor symmetry in neutrino physics,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 79, no. 7, p. 076201, 2016.
- [76] M. Acero, P. Adamson, L. Aliaga, T. Alion, V. Allakhverdian, S. Altakarli, N. Anfimov, A. Antoshkin, A. Aurisano, A. Back, *et al.*, “First measurement of neutrino oscillation parameters using neutrinos and antineutrinos by nova,” *Physical review letters*, vol. 123, no. 15, p. 151803, 2019.

- [77] P. Harrison and W. Scott, “ μ - τ reflection symmetry in lepton mixing and neutrino oscillations,” *Physics Letters B*, vol. 547, no. 3-4, pp. 219–228, 2002.
- [78] C. Jarlskog, “Commutator of the quark mass matrices in the standard electroweak model and a measure of maximal cp nonconservation,” *Physical Review Letters*, vol. 55, no. 10, p. 1039, 1985.
- [79] G. F. Abellán, Z. Chacko, A. Dev, P. Du, V. Poulin, and Y. Tsai, “Improved cosmological constraints on the neutrino mass and lifetime,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 8, pp. 1–25, 2022.
- [80] S. Verma and M. Kashav, “Magic neutrino mass model with broken μ - τ symmetry and leptogenesis,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 47, no. 8, p. 085003, 2020.