

CORRELACIÓN ENERGÍA-ENERGÍA EN CROMODINÁMICA CUÁNTICA.

John Alexander Gamboa Vera

Documento presentado al Programa de Física
como requisito para optar por el título de Físico.

Director: Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Básicas

Enero 2024

Resumen

En la actualidad, los experimentos y mediciones físicas han alcanzado niveles crecientes de precisión y exactitud, orientados a proporcionar una explicación más rigurosa de los diversos fenómenos observados en aceleradores de partículas como el LHC, el ILC y el FCC, con el objetivo de desentrañar la presencia de nueva física. En el marco de la ejecución de nuestro proyecto, nos enfocaremos en el estudio de la correlación energía-energía en el sistema conformado por dos partículas electrón-positrón. Buscamos comprender de manera más profunda los factores determinantes para su cálculo en el orden perturbativo más bajo, partiendo de diagramas de árbol asociados a este proceso bajo la influencia de la cromodinámica cuántica (QCD, por sus siglas en inglés). Se ha observado que, en el orden principal, la Correlación Energía-Energía (EEC), en función del ángulo, exhibe un comportamiento semejante a una función cuadrática. Esta característica se manifiesta de manera notable al acercarse a los ángulos límites, donde se destaca una contribución significativa de dicha función.

Palabras clave— Campos cuánticos, cromodinámica cuántica, sección eficaz, diagramas de Feynman, event shape.

Agradecimientos

Quiero expresar mis sinceros agradecimientos, en primer lugar, a Dios por guiarme en mi camino. Agradezco a mi madre, hija, pareja y demás familiares, quienes son el principal pilar en mi vida y por quienes me esfuerzo por mejorar cada día. Mi gratitud se extiende hacia mi director de tesis, el Ph.D. Edilson Alfonso Reyes Rojas, cuya transmisión de conocimientos y sabiduría ha sido fundamental para que personas como yo nos sumerjamos en este fascinante mundo de la ciencia. Reconozco y agradezco su paciencia y dedicación con este proceso, el cual ha resultado ser sumamente enriquecedor tanto a nivel académico como personal.

Además, quiero expresar mi agradecimiento a cada uno de los profesores que me acompañaron a lo largo de mi carrera como físico, así como a mis compañeros y amigos. En resumen, agradezco a cada persona que estuvo presente de una u otra forma en el desarrollo de esta tesis. Su apoyo ha sido invaluable y ha dejado una marca significativa en mi trayectoria académica y personal..

Tabla de contenido

	Pag.
Resumen	I
Agradecimientos	II
TABLA DE CONTENIDO	III
1. Introducción.....	1
2. Teoría Cuántica de Campos	3
2.1 Campo escalar real de Klein - Gordon.....	5
2.1.1 Propagador del campo escalar de Klein-Gordon.....	8
2.2 Ecuación de Dirac y campo vectorial de espín 1.....	10
2.3 Formulación Teórica de la QCD	17
3. Correlación Energía-Energía y Variables Event Shape	22
3.1 Sección eficaz diferencial	22
3.1.1 Explorando la sección eficaz en la QFT	30
3.1.2 Reglas de Feynman en QCD	35
3.2 Divergencias Infrarrojas en Física de Partículas.....	36
3.3 Jets en Colisionadores de Alta Energía	39
3.4 Variables Event Shape en Fenomenología de Colisionadores.....	43
3.5 Cálculo del EEC en LO en la QCD	45
4. Conclusiones	51
Referencias	52

1. Introducción

Los aceleradores de partículas son fundamentales en la investigación científica al llevar a cabo experimentos de una precisión cada vez mayor. El objetivo principal de estos experimentos es desentrañar la verdadera naturaleza de las partículas subatómicas que constituyen la base de toda la materia en el universo.

Entre los instrumentos de medición más destacados en la exploración de la física de partículas, se encuentran el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN [1] y el Fermilab. Estos centros de investigación desempeñan un papel fundamental al llevar a cabo experimentos de altas energías que permiten estudiar las propiedades fundamentales de las partículas subatómicas y las fuerzas que actúan entre ellas.

El descubrimiento del bosón de Higgs el 4 de julio de 2012 [2, 3, 4], representa un hito fundamental en la física de partículas, consolidando experimentalmente el mecanismo de Brout-Englert-Higgs [5, 6], proporciona una explicación coherente para el origen de la masa de las partículas elementales. No obstante, la implementación del mecanismo de Higgs conlleva la introducción de un sector escalar en la Lagrangiana del Modelo Estándar (SM) de la física de partículas, generando nuevos retos teóricos, como lo son el problema de las jerarquías [7, 8, 9] y la inestabilidad del potencial asociado al campo de Higgs [10, 11, 12, 13].

Hasta la fecha, no se ha identificado de manera concluyente ninguna señal experimental que apunte a la existencia de nueva física capaz de resolver estos desafíos, así como otros problemas bien conocidos del SM, como la ausencia de un candidato a materia oscura [14] o la carencia de un marco teórico unificado que incorpore la interacción gravitacional.

Recientemente, se ha despertado un interés particular en los observables físicos que analizan la forma de los eventos finales en ciertos procesos de scattering. Más allá de las masas de las partículas y los decaimientos del bosón de Higgs, estos observables proporcionan una vía para realizar pruebas indirectas sobre la existencia de nuevos grados de libertad físicos. Este enfoque, que ya demostró su utilidad en la validación del gluón y la consistencia de la QCD en épocas anteriores, se dirige ahora hacia la aniquilación electrón-positrón. La observación de una estructura de tres jets en este proceso en 1978 proporcionó evidencia concreta de la existencia de gluones, corroborando la teoría.

En el estado actual del arte, el cálculo de la correlación energía-energía (EEC) ha alcanzado el orden perturbativo NNLO mediante estimaciones numéricas basadas en diagramas de Feynman [15], mientras que los resultados analíticos se limitan al orden NLO en la QCD [16, 17, 18]. La combinación de estos resultados con procedimientos de resumación de logaritmos grandes hasta el orden NNLL, incluyendo efectos de hadronización a bajas energías, ha permitido comparaciones directas con los resultados experimentales del gran colisionador electrón-positrón (LEP).

El proyecto de investigación propuesto estudiará las correcciones en el cálculo de la correlación energía-energía para la aniquilación electrón-positrón. El análisis se centrará en los efectos del sector de la QCD al menor orden perturbativo.

Esta tesis se estructura en dos capítulos distintos, cada uno abordando aspectos específicos de la investigación. En el Capítulo 2, se lleva a cabo un exhaustivo análisis centrado en la Teoría Cuántica de Campos. Se exploran detalladamente conceptos fundamentales, como el campo escalar, la ecuación de Dirac y los principios teóricos subyacentes a la QCD.

Por otro lado, el Capítulo 3 se dedica a la exposición detallada de elementos esenciales de la QCD. Aquí se abordan temáticas cruciales, tales como la sección eficaz, las divergencias infrarrojas, los jets y las variables de forma del evento. Todos estos elementos desempeñan un papel indispensable en el desarrollo y la comprensión integral de la presente investigación.

Al concluir ambas secciones, se presentan las reflexiones y conclusiones derivadas de este estudio, proporcionando una visión integral de los hallazgos y contribuciones alcanzadas en el curso de esta tesis.

2. Teoría Cuántica de Campos

La teoría cuántica de campos (QFT) constituye una base fundamental para el modelo estándar (SM) de la física de partículas. Surge en respuesta a la necesidad de comprender y explicar fenómenos físicos que la física no relativista no podía responder, fenómenos tales como la creación y aniquilación de partículas. La QFT es la rama de la física dedicada al estudio de procesos físicos en escalas de energía elevadas y procesos a escalas extremadamente pequeñas (escala electro-débil ~ 200 GeV). Esta teoría resulta de la combinación de la mecánica cuántica, la relatividad especial y la introducción del concepto de campo cuántico. En este último, las partículas fundamentales (quarks, leptones y bosones) se manifiestan como el resultado de perturbar dicho campo [19].

La mecánica cuántica, en su búsqueda por comprender de manera más precisa el mundo microscópico, reemplazó a la física clásica a través de lo que se conoce como la primera cuantización. Mediante este enfoque, magnitudes físicas como la posición q_j y el momento p_j son transformados en operadores lineales en el espacio de Hilbert. Estos operadores cumplen con las siguientes relaciones de conmutación canónica.

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [q_i, p_j] = i\delta_{ij} . \quad (2.1)$$

La principal limitación de la mecánica cuántica residía en su dificultad para describir de manera precisa el comportamiento de las partículas a velocidades cercanas a la de la luz. Además no basta con cuantizar partículas relativistas, la cuantización de partículas relativistas generaba ciertas inconsistencias. Para abordar estos desafíos, se introdujo el concepto de campo. En la mecánica cuántica convencional, el número de partículas y sus propiedades se conservaban, lo que impedía la creación y aniquilación de partículas.

Para superar estas dificultades, fue necesario recurrir al formalismo de campos cuánticos para campos continuos, utilizando coordenadas generalizadas (q_i y p_i). Este enfoque permitió abordar adecuadamente los fenómenos físicos asociados con velocidades cercanas a la velocidad de la luz y resolver las inconsistencias que surgían en la cuantización de partículas relativistas.

Además, el principio de causalidad establece que ninguna partícula con una masa en reposo diferente de cero puede viajar igual o mas rápido que la luz. Esta restricción no es cumplida por el propagador de la mecánica clásica. Esta discrepancia se evidencia al considerar la amplitud de probabilidad de una partícula libre (ecuación 2.2), la cual viaja del punto inicial $\mathbf{x}_0$ a un punto final $\mathbf{x}$ en cierto tiempo t :

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle, \quad (2.2)$$

donde, al aplicar la relación de completitud para el momento lineal y considerando que el operador hamiltoniano para una partícula libre esta dado por $H = \mathbf{p}^2/2m$, obtenemos:

$$U(t) = \int d^3p \langle \mathbf{x} | e^{-i(p^2/2m)t} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle, \quad (2.3)$$

en donde $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle$ es la representación de una onda plana de Dirac:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

y, por tanto, la amplitud quedará definida como:

$$U(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}. \quad (2.5)$$

Resolviendo la ecuación (2.5) mediante transformada de Fourier conduce al propagador de la mecánica cuántica:

$$U(t) = \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{im(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2/2t}. \quad (2.6)$$

Al considerar valores arbitrarios para $\mathbf{x}$ y t , el propagador obtenido en la ecuación (2.6) exhibe una violación del principio de causalidad. Esto se manifiesta al permitir que las partículas viajen entre dos puntos distantes en lapsos de tiempo extremadamente cortos, incluso superando la velocidad de la luz. Aunque esta solución pueda parecer sencilla, al realizar el mismo cálculo para una energía relativista, definiendo la energía como $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, se obtiene un propagador de la forma:

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{\mathbf{x}^2 - t^2}}, \quad (2.7)$$

dicho propagador continúa violando el principio de causalidad, por lo que incluir una

energía relativista, no resuelve este problema. Esta limitación es abordada por la teoría cuántica de campos que define propagadores en términos de campos cuantizados. Estos campos son invariantes de Lorentz, dando como resultado la llamada segunda cuantización. Este enfoque implica la transformación de amplitudes de probabilidad en operadores lineales, imponiendo que dichos operadores cumplan ciertas reglas de conmutación y anti-conmutación. Para comprender mejor este concepto, a continuación veremos el campo escalar de Klein-Gordon y su respectivo propagador .

2.1 Campo escalar real de Klein - Gordon.

El campo escalar de Klein-Gordon, representado por $\phi(x)$, se define como un campo real que constituye una generalización al continuo del las coordenadas q_j , donde $(q_j \rightarrow \phi(x), \quad x = (t, \mathbf{x}))$. Esta generalización posibilita la transformación de sistemas discretos a sistemas continuos. $\phi(x)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon, expresada como la ecuación (2.8) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.8)$$

en mecánica cuántica, utilizamos el hamiltoniano del sistema para determinar los autoestados del estado físico. Inicialmente, expresamos el campo mediante un transformada de Fourier en la base de los momentos lineales.

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{p}), \quad (2.9)$$

reemplazando la ecuación (2.9) en (2.8), se obtiene la ecuación diferencial de un Oscilador Armónico Simple. En esta expresión, $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$, representa la frecuencia asociada a la energía relativista $E_{\mathbf{p}}$ para un oscilador cuántico:

$$\frac{\partial^2 \phi(t, \mathbf{p})}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{p}}^2 \phi(t, \mathbf{p}) = 0; \quad (2.10)$$

descrito por el Hamiltoniano $H_{OAC} = \frac{\pi^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_{\mathbf{p}}^2 \phi^2$, el campo $\phi(\mathbf{x})$ y su momento canónico conjugado $\pi(\mathbf{x})$ se expresan en términos de los operadores creación ($a_{\mathbf{p}}^\dagger$) y aniquilación ($a_{\mathbf{p}}$). Estos operadores cumplen ciertas reglas de conmutación

$\left([a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\right)$, y la expresión para el campo y su momento conjugado es:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (2.11)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \quad (2.12)$$

Realizando un cambio de variable $p \rightarrow -p$ en el segundo término de las ecuaciones (2.11) y (2.12), obtenemos:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.13)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.14)$$

Definiendo un estado de mínima energía como $|0\rangle$, el operador $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ actuando sobre dicho estado genera una partícula con momento $\mathbf{p}$ y energía $E_{\mathbf{p}}$, mientras que el operador $a_{\mathbf{p}}$ no originara ninguna partícula:

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}\rangle, a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0. \quad (2.15)$$

Así, si hacemos que el campo $\phi(\mathbf{x})$, actúe sobre el estado de mínima energía, el campo creará una partícula en la posición $\mathbf{x}$, $(\phi(\mathbf{x})|0\rangle = |\mathbf{x}\rangle)$, lo que nos permite calcular las relaciones de conmutación entre los campos $\phi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

la expresión (2.16) transforma funciones de onda en operadores y se conoce como “segunda cuantización”. A diferencia de la primera cuantización, el primer término lleva un delta de Dirac, lo que resulta en que el conmutador no sea una cantidad invariante de Lorentz. El cuadri-vector momento se transforma en:

$$\begin{aligned} E'_{\mathbf{p}} &= \gamma (E_{\mathbf{p}} + \beta p_3), \\ p'_3 &= \gamma (p_3 + \beta E_{\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilizando la identidad de la función delta $\left(\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)\right)$ tendremos que:

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \cdot \frac{dp'_3}{dp_3} \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \gamma \left(1 + \beta \frac{dE_{\mathbf{p}}}{dp_3}\right),\end{aligned}\tag{2.18}$$

en donde, derivando la energía relativista respecto a p_3 , obtenemos $\frac{dE_{\mathbf{p}}}{dp_3} = \frac{p_3}{E_{\mathbf{p}}}$ y por tanto, la ecuación (2.18) se transforma en:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{\gamma}{E_{\mathbf{p}}} (E_{\mathbf{p}} + \beta p_3),\tag{2.19}$$

donde utilizando la ecuación (2.17), se llega a:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{E'_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}.\tag{2.20}$$

Dado que el delta de Dirac no es invariante de Lorentz, se hace necesario definir una cantidad que si sea invariante y que no viole el principio de causalidad. A partir de la ecuación (2.20), se observa que la cantidad verdaderamente invariante de Lorentz es el producto entre la energía ($E_{\mathbf{p}}$) y la delta de Dirac: $(E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = E'_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}'))$. Además, la relación de completitud también debe modificarse, en la ecuación (2.13), se simplifica el factor $\sqrt{2}$, agregando un 2 junto a la energía, de manera que :

$$1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p}|.\tag{2.21}$$

Una vez modificada la relación de completitud, la normalización de la mecánica cuántica cambia de ser $\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ a:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}),\tag{2.22}$$

para permitir definir estados para múltiples partículas, se introduce el factor de normalización $(\sqrt{2E_p})$ en la ecuación (2.15), que se reescribe como:

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}} \dots a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots |0\rangle.\tag{2.23}$$

Para que sea un invariante de lorentz, la medida de la integral de volumen (V), debe ser:

$$V = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.24)$$

Para incluir la componente temporal del cuadri-momento p , dicho volumen puede ser expandido al espacio de Minkowski mediante la relación:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0}. \quad (2.25)$$

Para el volumen cuadri-dimensional, los límites de la variable temporal se restringen únicamente a los valores positivos, ya que los tiempos negativos carecen de significado físico. Esta limitación contribuye a proporcionar una normalización adecuada a las cantidades invariantes de Lorentz.

Ahora, realizaremos la transición del cuadro de Schrödinger al de Heisenberg con el fin de determinar la evolución temporal del campo $\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}$. Al resolver este proceso, obtenemos una expresión para un campo escalar dependiente del tiempo:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (2.26)$$

donde la ecuación anterior es similar a la ecuación (2.13). Ambas son invariantes de Lorentz, y la diferencia entre ellas es el producto escalar Minkowskiano ($p \cdot x$), el cual queda definido para la ecuación (2.26) como:

$$p \cdot x = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \cdot (t, \mathbf{x}) = E_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.27)$$

2.1.1 Propagador del campo escalar de Klein-Gordon

Habiendo definido el campo escalar de Klein-Gordon, se calcula un propagador que no viola el principio de causalidad para una partícula que se desliza de un punto y a un punto x . La amplitud de probabilidad en este contexto es:

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x - y)}. \quad (2.28)$$

Evaluando en el límite $(x - y) = (0, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ y llamando $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}$, obtenemos:

$$D(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \frac{-i}{2(2\pi)^2|\mathbf{r}|} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{|\mathbf{p}| e^{-i|\mathbf{p}||\mathbf{r}|}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}, \quad (2.29)$$

en donde existe singularidad para $\mathbf{p} = \pm im$ y mediante el uso del teorema de residuo en el plano complejo, se obtiene:

$$D(x - y) \sim e^{-m|\mathbf{r}|}. \quad (2.30)$$

Pero aun así, se sigue violando el principio de causalidad. Para abordar este problema, se debe calcular el conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$. Esto se realiza para verificar si un campo ϕ medido en un punto x afecta a una medición en un punto y del mismo campo con separación de x . Si el resultado del conmutador es nulo, una medida no afecta a la otra y la causalidad se conserva [19]. Ahora, para un caso más general, tendremos:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}). \quad (2.31)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.28), (2.31) se puede reescribir como:

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x), \quad (2.32)$$

en donde, si estamos fuera del cono de luz ($(x - y)^2 < 0$), realizando una transformada de Lorentz de la siguiente manera, $(x - y) \rightarrow -(x - y)$, se tiene que, $D(x - y) = D(y - x)$ y por tanto $[\phi(x), \phi(y)] = 0$, conservando así la causalidad. Mientras que, para dentro del cono de Luz ($(x - y)^2 > 0$), no existe una transformación que me convierta $(x - y)$ en $(y - x)$, lo que hace que el conmutador nunca sea cero.

Ahora veremos que el conmutador (2.31) que representa el propagador escalar, es igual a la función retardada de Green (FRG) cuando $x > y$.

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip\cdot(x-y)}, \quad (2.33)$$

en donde (2.33), tiene singularidades para $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Empleando el teorema de los residuos de Cauchy en el plano complejo, se puede elegir un contorno bajo el eje

real para $x^0 > y^0$ para obtener:

$$D_R(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} 2\pi i [\text{Res}(+E_{\mathbf{p}}) + \text{Res}(-E_{\mathbf{p}})] \theta(x^0 - y^0), \quad (2.34)$$

en donde la función paso ($\theta(x^0 - y^0)$) se define como:

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 0 & x^0 < y^0 \\ 1 & x^0 > y^0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Dando como solución:

$$\begin{aligned} D_R(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x - y)} \Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x - y)} \Big|_{p^0 = -E_{\mathbf{p}}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x - y)} - e^{ip(x - y)}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Donde se observa que (2.31) es igual a (2.36), lo que significa que la función retardada de Green es igual al conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$. Existen diversas funciones de Green del operador de Klein-Gordon, dependiendo el contorno de integración al que se le aplique el teorema de los residuos.

El propagador de campo escalar de Klein-Gordon que se ha abordado hasta ahora describe exclusivamente partículas de espín 0. Sin embargo, para el desarrollo de este documento, se requiere estudiar partículas de spin 1/2 (electrón-positrón) y de spin 1 (fotones). En consecuencia, reescribiremos dicho propagador mediante el estudio de la ecuación de Dirac y la ecuación de Proca, con el fin último de encontrar los propagadores asociados a las partículas de la Electrodinámica Cuántica (QED).

2.2 Ecuación de Dirac y campo vectorial de espín 1

Como resultado de la unificación de la mecánica cuántica y la relatividad especial, y con el objetivo de describir la dinámica de los fermiones de spin 1/2 que viajan a velocidades cercanas a la de la luz, Paul Dirac en 1928 formula una ecuación física. Esta ecuación explica la existencia del espín y de las antipartículas, como el Positrón, que fue descubierto en años posteriores por Carl David Anderson al fotografiar huellas de rayos cósmicos en una cámara de niebla. [20] .

Para hallar esta ecuación, partimos de la fórmula para la energía relativista (E) para una partícula libre

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (2.37)$$

donde m representa la masa en reposo de dicha partícula, y recordando la teoría clásica la primera cuantización, tenemos:

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.38)$$

Reemplazando la expresión (2.38) en la ecuación (2.37) y aplicando una función cualquiera $\psi(x)$ al operador resultante de dicho remplazo, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon en términos del operador D'Alembertiano ($\square = \partial_\mu \partial^\mu$), como se muestra a continuación:

$$(\square + m^2) \psi(x) = 0, \quad (2.39)$$

en donde podemos observar una ecuación diferencial de segundo orden que nos permite tener dos posibles soluciones representadas mediante ondas planas, donde los argumentos de estas pueden tener dos valores de energía ($E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$). A diferencia de la teoría clásica relativista, en donde la energía negativa es ignorada dado que estudia únicamente la cinemática de las partículas, la teoría cuántica estudia tanto la cinemática como la dinámica de las mismas, es decir, la interacción entre las partículas. Por lo tanto, se deben considerar todas las soluciones, tanto positivas como negativas. Sin embargo, esto llevaría a la predicción de la existencia de partículas con energía negativa, generando inconsistencias físicas.

Dirac resolvió este problema reescribiendo la ecuación de Klein-Gordon como el producto de dos ecuaciones lineales:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = 0. \quad (2.40)$$

En esta formulación, se introduce un factor γ , que permite obtener un producto escalar en el espacio de Minkowski, asegurando así que la ecuación sea covariante de Lorentz. Ahora, al resolver explícitamente la ecuación (2.40) se obtiene:

$$[\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu + im(\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu) + m^2]\psi(x) = 0. \quad (2.41)$$

Para que haya una equivalencia entre las ecuaciones (2.39) y (2.41), deben cumplirse

las siguientes condiciones:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu, \quad \gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu = 0. \quad (2.42)$$

Donde estas condiciones aseguran que el factor γ satisface el álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

donde se pueden observar elementos del tensor métrico g como $g^{\mu\nu}$. Los elementos gamma, con el fin de satisfacer el álgebra de Clifford, deben ser matrices de un orden 4×4 o superior. Estas matrices γ^μ tienen diferentes representaciones, siendo la representación de Dirac la más utilizada:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

En esta expresión, σ^i son las matrices de Pauli, asociada con el espín, una propiedad intrínseca de las partículas.

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Ahora, al considerar el término correspondiente a la energía positiva que se obtiene en la ecuación (2.40), se obtiene la ecuación de Dirac

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0. \quad (2.46)$$

En esta ecuación, $\not{\partial}$ corresponde al slash de Feynman aplicado a la cuadri-derivada ($\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$) y $\psi(x)$ debe ser un espinor de cuatro componentes compuesta por números complejos. Ahora, al calcular la ecuación adjunta de Dirac apartir de la ecuacion (2.46) obtenemos:

$$(i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi}) = 0, \quad (2.47)$$

siendo $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ la representación del espinor adjunto.

Ahora, primero consideramos que el espinor ψ y espinor adjunto $\bar{\psi}$ representan dos partículas con distintas masas, m_1 y m_2 respectivamente. Esto se hace para hallar la

ecuación de continuidad. multiplicamos por $\bar{\psi}$ a la izquierda de la ecuaciones (2.46), por ψ a la derecha de la ecuación (2.47), y luego sumando dichas ecuaciones. Tenemos:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= (m_1 - m_2)\bar{\psi}\psi \\ i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= (m_1 - m_2)\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Si la masa de las partículas es la misma ($m_1 = m_2$), entonces:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.49)$$

En esta expresión, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\rho, \mathbf{j})$ representa la cuadricorriente conservada, donde ρ es la densidad de carga y $\mathbf{j}$ es la densidad de corriente eléctrica..

Además, se pueden obtener los bilineales covariantes de la teoría de Dirac a partir de la ecuación de continuidad, los cuales, mediante transformaciones de Lorentz, transforman la cuadricorriente en un tetravector:

$$j^\mu \rightarrow j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu, \quad \Lambda \equiv \text{Matriz de Lorentz}. \quad (2.50)$$

Dado que es un producto minkowskiano de dos cuadvectores, la relación de continuidad es un invariante de Lorentz:

$$\partial_\mu j^\mu \rightarrow \partial'_\mu j'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \Lambda^\mu_\nu j^\nu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\nu j^\nu = \partial_\nu j^\nu. \quad (2.51)$$

De esta deducción, se puede inferir que el bilineal $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es también un cuadvector. Además, con respecto a la ecuación (2.48) se puede deducir que el producto escalar $\bar{\psi}\psi$ es un invariante de Lorentz. Por lo tanto, si $j^0 = \rho$ y $\rho > 0$ entonces $\bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = ||\psi||^2 > 0$, lo que implica que la probabilidad es positiva.

Normalmente, una corriente fermiónica se caracteriza como $\bar{\psi}\Gamma\psi$, donde Γ es un matriz 4×4 . Para la obtención de la interacción Lagrangiana de la QED, el modelo electro-débil y otras teorías físicas, solo deben usar corrientes que tienen definidas propiedades de transformación de Lorentz. Para esto, se definen dos matrices:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \stackrel{\text{rep. Dirac}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.52)$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}. \quad (2.53)$$

Ahora $\bar{\psi}\Gamma\psi$ transforma covariantemente si Γ esta definida en el cuadro 2.1. En dicho cuadro también se muestran las propiedades de transformación de $\bar{\psi}\Gamma\psi$, el número de diferentes matrices γ y el número de componentes, totalizando 16 componentes, lo que significa que el grupo de matrices $\{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^5\}$ forma una base completa para cualquier matriz de 4×4 . Las corrientes Γ son denominadas covariantes bilineales en la teoría de Dirac. Ahora examinaremos las soluciones de la ecuación de Dirac. Para ello,

Γ	Transforma como	Rango	# de componetes
1	escalar	0	1
γ^μ	vector	1	4
$\sigma^{\mu\nu}$	tensor	2	6
$\gamma^5\gamma^\mu$	vector axial	3	4
γ^5	pseudo-escalar	4	1

Cuadro 2.1: Covariantes Bilineales.

nos trasladamos al espacio de momentos utilizando la relación $p_\mu = i\partial_\mu$ transformando la ecuación (2.47) en:

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (2.54)$$

Esta última expresión es una ecuación matricial que podemos reformular como:

$$\begin{pmatrix} E - m & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

representando a y b como:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Por lo tanto, del sistema (2.55), se obtienen las siguientes ecuaciones como resultado:

$$(E - m) a - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) b = 0, \quad (2.57)$$

$$-(E + m) b + (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) a = 0. \quad (2.58)$$

De la ecuación (2.58) despejamos b y remplazamos en la ecuación (2.57), llegando así a

la ecuación de Klein-Gordon (ecuación (2.60)):

$$b = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + m} a, \quad E \geq m > 0, \quad (2.59)$$

$$(E^2 - \mathbf{p}^2 - m) a = 0. \quad (2.60)$$

Para esto, se ha considerado energía positiva, es decir, la condición $E \geq m > 0$, la cual se hace necesaria para evitar la divergencia del espinor. a debe tener una solución de la forma:

$$a(\mathbf{p}, \sigma) = N \chi^{(\sigma)} e^{-ip \cdot x}, \quad (2.61)$$

donde $\chi^{(\sigma)}$ representa las autofunciones de la matriz σ_z o los autoestados de espín 1/2 y N es una constante de normalización.

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

De este modo, la solución para una partícula libre con energía positiva es:

$$\begin{aligned} \psi_{(+)} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} a \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \chi^{(\sigma)} \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} \chi^{(\sigma)} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}, \quad \sigma = 1, 2, \\ &= N u(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) e^{-ip \cdot x}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Ahora, en lugar de despejar b de la ecuación (2.58), despejamos el espinor a de la ecuación (2.57) :

$$a = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E - m} b, \quad (2.64)$$

donde se considera $E \neq m$ para evitar que el espinor diverja y E pueda tener valores negativos. Posteriormente, realizando un análisis similar al hecho para energía positiva, se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} \psi_{(-)} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} b \\ b \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} \chi^{(\sigma)} \\ \chi^{(\sigma)} \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} \quad \sigma = 1, 2, \\ &= N v(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) e^{-ip \cdot x}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Cabe tener presente, que para el anterior resultado, se tuvo en cuenta una interpretación de E que llevó a la predicción teórica de las antipartículas. De este modo, las soluciones con “ energías negativas ” representan antipartículas con energía positiva moviéndose

hacia atrás en el espacio-tiempo. Los espinores $u(\mathbf{p}, \sigma)$ y $v(\mathbf{p}, \sigma)$ deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$(\not{p} - m)u = 0; \quad (\not{p} + m)v = 0; \quad (2.66)$$

dando la solución a la ecuación de Dirac como una superposición de ondas planas, esta permite obtener el campo fermiónico al ser expresada en el límite del continuo:

$$\psi(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} [u(\mathbf{p}, \sigma)a(\mathbf{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x} + v(\mathbf{p}, \sigma)a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)e^{ip \cdot x}], \quad (2.67)$$

en donde $a(\mathbf{p}, \sigma)$ y $a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)$ son las representaciones de coeficientes de expansión, y $1/\sqrt{(2\pi)^3 2E}$ es un factor de normalización, el cual es invariante de Lorentz, garantizado por el término $\sqrt{E}$. Ahora tomamos los coeficientes a , $a^{c\dagger}$ y mediante la segunda cuantización, los transformamos en operadores, implantando las relaciones de anti-conmutación, cuantizando así el campo de Dirac ($\psi(x)$)

$$\{a(\mathbf{p}, \sigma), a^{\dagger}(\mathbf{p}', \sigma')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (2.68)$$

en donde $a^{c\dagger}$ (la letra c en $a^{c\dagger}$ indica la conjugación de carga) es el operador creación (crea una anti-partícula) y a es el operador aniquilación (aniquila una partícula). Tanto el campo escalar (2.26) que describe partículas de spin 0 como el campo de Dirac que describe fermiones, mantienen la misma esencia: "las partículas se crean a partir de los modos normales de oscilación de los campos". Ahora, se lleva a cabo el análisis del campo vectorial para partículas de Spin 1, el cual satisface la siguiente ecuación:

$$\square A^{\mu}(x) = m^2 A^{\mu}(x), \quad (2.69)$$

dicha ecuación es conocida como la ecuación de Proca, en la cual podemos observar el cuadri-potencial usual de la electrodinámica $A^{\mu}(x)$. El caso del fotón ($m = 0$) es un caso particular, para el cual la ecuación de Proca se transforma en:

$$\square A^{\mu}(x) = 0, \quad (2.70)$$

por lo tanto, su solución debe ser:

$$A^{\mu}(x) = N \epsilon^{\mu}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}, \quad (2.71)$$

en donde λ representa la helicidad o proyección del espín a lo largo del momento lineal ($\lambda = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$) y $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ un vector de polarización. Ahora, al llevar la solución de la ecuación de Proca al límite del continuo, se obtiene el campo fotónico:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} [\epsilon^\mu(p, \lambda) a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ipx} + \epsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{ipx}] . \quad (2.72)$$

Al igual que vimos anteriormente, el coeficiente $a^\dagger$ es el operador de creación y a es el operador de aniquilación.

Ahora que conocemos la estructura matemática de los campos que representan a los fermiones y a los bosones vectoriales, resulta necesario definir la densidad Lagrangiana para la QCD necesaria en el cálculo de la EEC.

2.3 Formulación Teórica de la QCD

Históricamente, los físicos han buscado de manera recurrente demostrar que las partículas están formadas por otras partículas más elementales. Un ejemplo de esto se da con Born y Nagendra [21], quienes intentaron describir que los neutrinos eran parte elemental del fotón. Fermi y Yang [22] propusieron que nucleones como el protón y el neutrón eran elementales para creación de piones. Gell-Mann [23] propuso el modelo de quarks, que planteaba la inclusión de tres nuevas partículas elementales: los quarks up, down y strange. Este modelo de quarks fue el que prevaleció. Los quarks poseen spin- $\frac{1}{2}$, constituyéndolos como fermiones. Sus cargas eléctricas son fracciones de la carga del protón [24] y se escriben como $u^{\frac{2}{3}}$, $d^{-\frac{1}{3}}$, $s^{-\frac{1}{3}}$ respectivamente, donde el superíndice es su correspondiente carga eléctrica. A cada tipo de quark se le llama sabor. La interacción entre estos se da en múltiplos hadrónicos los cuales muestran independencia entre el espín descrito por $SU(2)_{spin}$ y el sabor descrito por $SU(3)_{sabor}$. Los sabores u , d y s poseen diferentes masas, las cuales son mucho menores que las masas de una escala hadrónica típica [25]. Al agrupar estas partículas, se originan partículas compuestas; a las parejas quark-antiquark se les llama mesones y a las partículas compuestas por 3 quarks se les llama bariones.

Este modelo presentaba una inconsistencia que se puede observar con el barión delta o resonancia delta Δ^{++} , que es una partícula compuesta por 3 quarks u y de

spin $\frac{3}{2}$. En este caso, se observó simetría en las funciones de onda espaciales y de espín. Dado que los quarks son fermiones, esta simetría no es permitida por la teoría de la estadística del espín, ya que requiere que la función de onda en el estado fundamental sea totalmente antisimétrica. Para resolver esto, se incluyó el concepto de grado de libertad del color, donde se asigna una carga de color a con tres valores posibles, $a = 1, 2, 3$, permitiendo que la función de onda se vuelve antisimétrica bajo este nuevo índice. Además, se introdujo la restricción de que solo los singletes de color están presentes en la naturaleza. Dados los quarks con el índice de color q_a , los estados de singlete de color serán $q^a \bar{q}_a$ para los mesones y $\varepsilon^{abc} q_a q_b q_c$ para los bariones, donde ε^{abc} es el símbolo de Levi-Civita. Posteriormente, se descubrieron tres sabores de quarks más, charm $c^{\frac{2}{3}}$, bottom $b^{-\frac{1}{3}}$ y top $t^{\frac{2}{3}}$.

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría que describe las interacciones fuertes entre gluones y quarks. La densidad lagrangiana de QCD [19] está dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^A)^2 + \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi + \frac{1}{2\lambda} (\partial^\mu \mathcal{A}_\mu^A)^2 + \bar{c}^A (-\partial^\mu D_\mu^{AC}) c^C, \quad (2.73)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ig t^A \mathcal{A}_\mu^A$ es la derivada covariante. Esta Lagrangiana tiene 3 componentes distintos. El primero es el Lagrangiano de Yang-Mills, que corresponde a los 2 primeros términos de la ecuación (2.73). Aquí representamos campos de quarks con $\psi_{\rho af}$, donde ρ es el índice de Dirac, a el índice de color y f el índice de sabor.

Los campos de gluones se representan con $\mathcal{A}_\mu^A$, siendo μ un índice de Lorentz y A el índice de color. Los quarks están en la representación fundamental del grupo de color $SU(3)$, mientras que los gluones están en la representación adjunta. Esto implica que el índice de color a de los quarks toma 3 valores diferentes mientras que el índice de color de los gluones A toma 8 valores diferentes. El tensor de intensidad de campo es

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A + gf^{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C, \quad (2.74)$$

en donde g es una constante de acoplamiento y caracteriza la intensidad de interacción. El lagrangiano de Yang-Mills describe la propagación de los campos de quarks y gluones y sus interacciones. La diferencia clave con el tensor de intensidad de campo de QED radica en el último término. Este término surge de la no conmutabilidad de la teoría. Esto, a su vez, introduce términos $\mathcal{A}_\mu^A$ cúbicos y cuartos, que se traducen en vértices

de interacción con 3 y 4 gluones. Los coeficientes f^{ABC} son las constantes de estructura del grupo gauge G (Grupo de Lie).

El siguiente componente del Lagrangiano (tercer término) se llama el término gauge-fixing. Se requiere definir el propagador del campo de gluones. El término gauge-fixing hace necesario un término de gauge-compensating que es el último término del Lagrangiano. Este último término introduce un nuevo tipo de campo. Estos son los campos fantasma y se representan con c . Fueron derivados por los físicos rusos Liúdvig Faddéyev y Víktor Popov [26]. Los campos fantasma proporcionan solo líneas internas en los diagramas de Feynman y no representan estados asintóticos. Son partículas escalares pero obedecen a la estadística de Fermi. Este hecho, contrario a la intuición implica que producen amplitudes con probabilidades de transición negativas. De esta forma, estos campos cancelan grados de libertad no físicos que se propagan en gauge covariantes, completando así este Lagrangiano.

La QED tiene una sorprendente precisión debido a que las observaciones se pueden calcular perturbativamente. Esto se debe a que su constante de acoplamiento, $a = 1/137$, es pequeña, pero la constante de acoplamiento fuerte a_s no es pequeña, $a_s \approx 1$, y se relaciona con g como $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$. Sin embargo, a energías muy altas, los quarks actúan casi como si fueran libres, fenómeno conocido como libertad asintótica [27].

En la renormalización de una QFT, se imponen condiciones que dependen de una escala de masa arbitraria μ . La función beta en la QCD determina cómo cambia la constante de acoplamiento con respecto a esta escala. En la QED, la constante de acoplamiento aumenta con la escala de masa, mientras que en la QCD, la función beta explica tanto el confinamiento como la libertad asintótica [28, 29, 30].

$$\beta_{QCD}(g_s) = -\frac{\epsilon}{2}g_s - \frac{g_s^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}n_f T_F \right], \quad (2.75)$$

dónde n_f es el número de sabores activos y g_s es la fuerza de acoplamiento renormalizada. Los sabores activos se refieren a los quarks cuyas masas son menores que la escala de masa en consideración, excluyendo, por ejemplo, el quark top si su masa es significativamente mayor que la escala de interés. La contribución del quark top se integra en escalas más pequeñas. Se introduce el concepto de operadores de Casimir, que ofrecen una manera independiente de la base para caracterizar representaciones en teoría de grupos. En particular, se define el Casimir cuadrático

$C_2(r)$ como una medida básica de la representación R del grupo $SU(3)$:

$$t_R^a t_R^a = C_2(R) \mathbb{I}, \quad (2.76)$$

donde t_R^a son los generadores del grupo $SU(3)$ en una representación general R y $\mathbb{I}$ es el matriz de identidad. De manera similar, el índice de la representación se define como

$$Tr [t_R^a t_R^b] = T(R) \delta^{ab}. \quad (2.77)$$

Se observa que ambos Casimir dependen de la representación. Las dos representaciones más importantes son la adjunta (A) y la fundamental (F). Los Casimir asumen los siguientes valores en estas dos representaciones:

$$C_F = \frac{3}{4}, \quad C_A = 3, \quad T_F = \frac{1}{2}, \quad T_A = 3. \quad (2.78)$$

Los Casimir desempeñan un papel crucial en los cálculos de la QCD, siendo inherentes a las reglas de Feynman de QCD con generadores $SU(3)$. La función beta muestra una disminución de la constante de acoplamiento fuerte α_s para energías altas, confirmada experimentalmente [31], como se puede observar en la Figura 2.1.

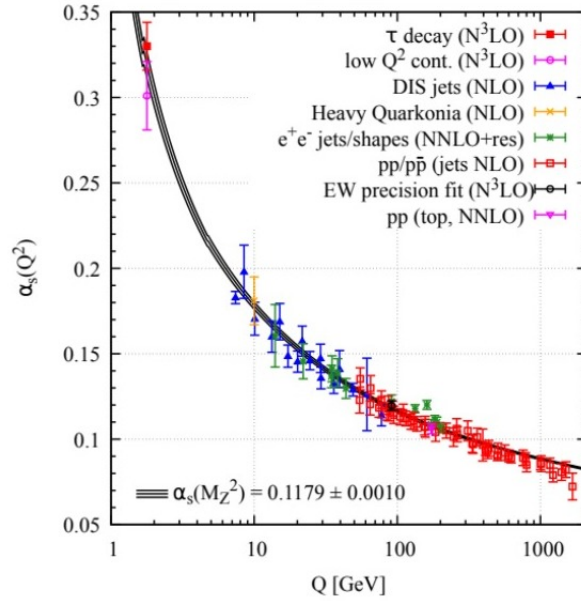


Figura 2.1: Predicciones y observaciones para la constante de acoplamiento en funcionamiento α_s [31].

Aunque la libertad asintótica permite cálculos perturbativos en la interacción de quarks, la distribución precisa de momentos de partones en hadrones es desconocida. La no perturbatividad de las Funciones de Distribución Partónica (PDF) y la hadronización durante procesos como la aniquilación e^+e^- complican los cálculos. La radiación en el estado inicial es más compleja en QCD que en QED debido a emisiones múltiples de partones con carga de color. La falta de coherencia puede resultar en la producción de partículas físicas observables. La hadronización, un proceso no perturbativo, convierte partones en hadrones y requiere modelos fenomenológicos para estudiar probabilidades de producción de hadrones.

3. Correlación Energía-Energía y Variables Event Shape

En este capítulo hablaremos del concepto de sección eficaz, el cual es fundamental debido a su papel central en la física de partículas. La sección eficaz proporciona una medida de la probabilidad de interacción entre partículas en un proceso específico. Al comprenderla, podemos cuantificar la tasa de producción de eventos particulares en un experimento. En relación con la EEC, la sección eficaz influye directamente en la probabilidad de ocurrencia de eventos que generan patrones específicos de correlación de energía. Un entendimiento profundo de la sección eficaz, por lo tanto, permite una interpretación más precisa de la EEC, contribuyendo así a la comprensión general de los fenómenos observados en experimentos de alta energía.

3.1 Sección eficaz diferencial

En la mecánica cuántica se hace necesario el estudio de procesos de scattering, los cuales son procesos que transforman estados continuos desde un estado inicial a un estado final mediante la acción de un potencial. Estos procesos experimentales nos permiten comprender las distribuciones de la energía potencial con respecto a los sistemas atómicos y moleculares. Los experimentos de dispersión se llevan a cabo disponiendo dos detectores para los estados finales fuera del rango potencial, con el objetivo de aproximar los cálculos analíticos a grandes distancias.

Se iniciará el estudio con la dispersión elástica independiente del tiempo, considerando el Hamiltoniano ($H = H_0 + V$), en donde $H_0 = P^2/2m$ representa el operador de energía cinética y V es el potencial con el que interactúa dicha partícula. En ausencia de un dispersor, V sería cero, y un auto-estado de energía sería simplemente un estado de partícula libre $|p\rangle$. La presencia de V hace que el auto-estado de energía sea diferente del estado de una partícula libre. Sin embargo, si el proceso de dispersión es elástico (es decir, sin cambios de energía), interesa es hallar una solución a la ecuación hamiltoniana de Schrödinger con el mismo auto-valor de energía. Más específicamente, sea $|\phi\rangle$ el auto-vector de energía de H_0 , en $H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle$. Ahora, la ecuación de

Schrödinger que deseamos resolver es :

$$(H_0 + V) |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (3.1)$$

Tanto H_0 como $H_0 + V$ presentan estados de energía continuos, de modo que al buscar una solución para la ecuación (3.1), tal que, como $V \rightarrow 0$, tengamos $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$, en donde $|\psi\rangle$ es la solución de la ecuación de Schrödinger de una partícula libre, con el mismo auto-valor de energía. con lo cual se puede argumentar que la solución deseada es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{E - H_0} V |\psi\rangle + |\phi\rangle. \quad (3.2)$$

En donde el operador $1/(E - H_0)$ presenta una singularidad, la cual se evidencia al aplicar el bra $\langle\phi|$. La presencia de $|\phi\rangle$ es razonable, por que $|\psi\rangle$ debe reducirse a $|\phi\rangle$ cuando V desaparece. Ahora, si se considera E como un número complejo, añadiendo $\pm i\varepsilon$ con $\varepsilon \rightarrow 0$, es posible eliminar dicha divergencia de energía, ya que si no se trata como un operador singular, la ecuación (3.2) carecería de significado, todo esto conduce a la obtención de la ecuación de Lippmann-Schwinger:

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle + |\phi\rangle, \quad (3.3)$$

siendo una representación abstracta en el espacio de los kets, se requiere proyectar el estado $|\psi^{(\pm)}\rangle$ en el espacio de las coordenadas, obsérvese que se ha añadido a la función de onda ψ un $\pm$ entre paréntesis para indicar que se trata de una cantidad que se ha sumado o restado al denominador original, en donde el signo $+$ denota una onda transmitida y el signo $-$ denota una onda reflejada. Si se esta interesado en trabajar en el espacio-posición, podemos empezar pre-multiplicando esta ecuación Lippmann-Schwinger con un bra de posición (tridimensional) y recurriendo en esta operación a un operador identidad tridimensional:

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \int d^3x' \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \right| x' \right\rangle \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle + \langle \mathbf{x} | \phi \rangle, \quad (3.4)$$

donde para el segundo término , si $|\phi\rangle$ representa un onda plana, con momento lineal $\mathbf{p}$, este se expresa como:

$$\langle \mathbf{x} | \phi \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (3.5)$$

y donde para dar solución al primer término, es necesario resolver primero la función de Green de dos puntos de la ecuación integral, la cual está definida por:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \frac{1}{2m} \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} \right| \mathbf{x}' \right\rangle, \quad (3.6)$$

evaluemos la ecuación (3.6) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} \right| \mathbf{x}' \right\rangle = \\ & \frac{1}{2m} \int d^3 p' \int d^3 p'' \langle \mathbf{x} | \mathbf{p}' \rangle \times \left\langle \mathbf{p}' \left| \frac{1}{E - (\mathbf{p}'^2/2m) \pm i\epsilon} \right| \mathbf{p}'' \right\rangle \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{x}' \rangle, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde H_0 actúa sobre $\langle \mathbf{p}' |$. Ahora tendremos:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{p}' \left| \frac{1}{E - (\mathbf{p}'^2/2m \pm i\epsilon)} \right| \mathbf{p}'' \right\rangle &= \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')}{E - (\mathbf{p}'^2/2m \pm i\epsilon)}, \\ \langle \mathbf{x} | \mathbf{p}' \rangle &= \frac{e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}, \\ \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{x}' \rangle &= \frac{e^{-i\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

el lado derecho de la ecuación (3.7) se convierte en:

$$= \frac{1}{2m} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{[E - (\mathbf{p}'^2/2m) \pm i\epsilon]}. \quad (3.9)$$

Ahora, reescribiendo la energía $E = \mathbf{k}^2/2m$ y el momento $\mathbf{p}' = \mathbf{q}$, teniendo en que $\mathbf{k}$ y $\mathbf{q}$ son vectores de onda, y utilizando coordenadas esféricas, podemos resolver la ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q^2 dq \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \frac{d(\cos \theta) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cos \theta}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \\ G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{-1}{8\pi^2} \frac{1}{i |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{(e^{iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|})}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} dq, \end{aligned} \quad (3.10)$$

en donde, aplicando el teorema de los residuos en el plano complejo a la ecuación (3.10),

ya que presenta singularidad para $q = \pm k \pm i\varepsilon$, se llega a:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \quad (3.11)$$

Remplazando (3.11) en la ecuación (3.4), tendremos:

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = -2m \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle + \langle \mathbf{x} | \phi \rangle. \quad (3.12)$$

Ahora, consideramos un potencial V local, dependiente de la posición en el espacio, es decir, un potencial diagonal que satisface una ecuación de autovalores y autovectores que puede escribirse como:

$$\langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{x}'' \rangle = V(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''), \quad (3.13)$$

esto con el fin de dar continuidad con el análisis del comportamiento de $\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle$ y, como consecuencia, tendremos:

$$\langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle = V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(\pm)} \rangle. \quad (3.14)$$

Sustituyendo la igualdad (3.14) en la ecuación (3.12), se obtiene:

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = -2m \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(\pm)} \rangle + \langle \mathbf{x} | \phi \rangle, \quad (3.15)$$

el primer término de la ecuación (3.15) corresponde a una onda esférica de la forma $e^{\pm ikr/r}$, evidenciando la dependencia espacial en el exponencial de dicho término para distancias muy grandes. Dado que se presentan dos soluciones en esta ecuación, y siempre y cuando el potencial V sea finito [32], la solución con exponencial positivo corresponde a una onda esférica saliente con respecto al dispersor, mientras que la solución con exponencial negativo corresponde a una onda esférica entrante. En la Figura 3.1 se observa la disposición de los instrumentos de medición para un experimento de dispersión, cuyos detectores se encuentran fuera del rango del potencial.

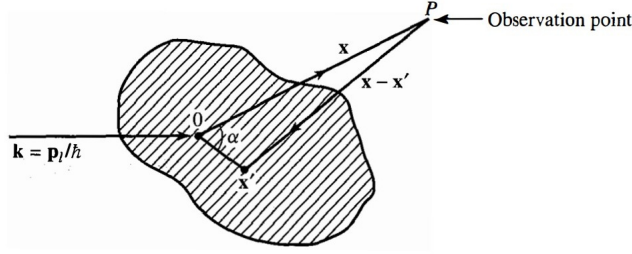


Figura 3.1: **Potencial V de scattering de rango finito** : en el punto de observación P, se evaluará la función de onda $\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle$, mientras que la contribución a la integral en la ecuación (3.15) es para $|\mathbf{x}'|$ menor que el rango del potencial, como se representa en la región sombreada de la Figura [32].

Esto es bastante relevante desde un punto de vista practico, por que no podemos colocar un detector a corta distancia cerca del centro de dispersión. La observación se realiza siempre con un detector situado muy lejos del dispersor a una distancia r muy superior al alcance del potencial :

$$|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|, \quad (3.16)$$

$$r = |\mathbf{x}|, r' = |\mathbf{x}'|, \quad (3.17)$$

$$\alpha = \angle (\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (3.18)$$

Para $r \gg r'$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\alpha) + r'^2}, \quad (3.19)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r \left(1 - \frac{2r'}{r} \cos(\alpha) + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

ahora, mediante aproximación binomial

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}', \quad (3.21)$$

en donde

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}. \quad (3.22)$$

Teniendo en cuenta el principio de conservación del momento lineal, se establece que la magnitud de los momentos iniciales y finales deben ser la misma. Además, se especifica que el momento del haz dispersado después de la colisión se dirige a lo largo de la línea

OP (véase la Figura 3.1), por tanto $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}}$, y como resultado, para distancias grandes, el exponencial de la ecuación (3.15), puede aproximarse a:

$$e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \simeq e^{\pm ikr} e^{\mp i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} \quad (3.23)$$

Dado que el estado $|k\rangle$ satisface la condición de ortonormalidad $\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, tendremos:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.24)$$

Para un proceso de scattering, la función de onda que describe dicho proceso se obtiene fuera del rango del potencial ($r \gg r'$), tomando la parte positiva de la solución de la ecuación (3.15), de modo que:

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(+)} \rangle \xrightarrow{r \gg r'} \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle - 2m \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(+)} \rangle, \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right], \quad (3.26)$$

donde se muestra que la onda resultante es la suma entre una onda esférica saliente con amplitud de probabilidad $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ dada por:

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -2m \frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \langle \mathbf{k}' | V | \psi^{(+)} \rangle, \quad (3.27)$$

y una onda plana en la dirección de propagación original $\mathbf{k}$. Ahora definimos un operador transición que satisface la relación $V|\psi^+\rangle = T|\phi\rangle$, y realizando el producto entre la ecuación de Lippmann-Schwinger (3.3) y el potencial V , tendremos:

$$T|\phi\rangle = V \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} T|\phi\rangle + V|\phi\rangle, \quad (3.28)$$

donde el operador T satisface la siguiente relación entre operadores:

$$T = V \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} T + V, \quad (3.29)$$

esto siempre y cuando $|\phi\rangle$ represente una onda plana y constituya una base vectorial.

Mediante una serie de Neumann, la ecuación (3.29) puede iterarse, obteniendo:

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V + V \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V + \dots \quad (3.30)$$

En base a $(V|\psi^+ = T|\phi\rangle)$, la amplitud de dispersión (3.27) se transforma en:

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -2m \frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle, \quad (3.31)$$

así, basta con determinar el operador de transición con el número de iteraciones necesarias para calcular $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, y lograr que el cálculo sea lo suficientemente preciso.

La sección eficaz se define como la cantidad necesaria para determinar el número de partículas que atraviesan un plano perpendicular a la dirección de incidencia por unidad de área y por unidad de tiempo. Si preparamos un experimento con un gran número de partículas idénticas, todas caracterizadas por la función de onda (3.24), consideramos un haz incidente conformado por N_H partículas que viajan con velocidad v y colisiona con el plano perpendicular (blanco o dispersor), el cual esta conformado por N_B partículas en reposo. La superficie de colisión entre las diferentes partículas es A (Figura 3.2):

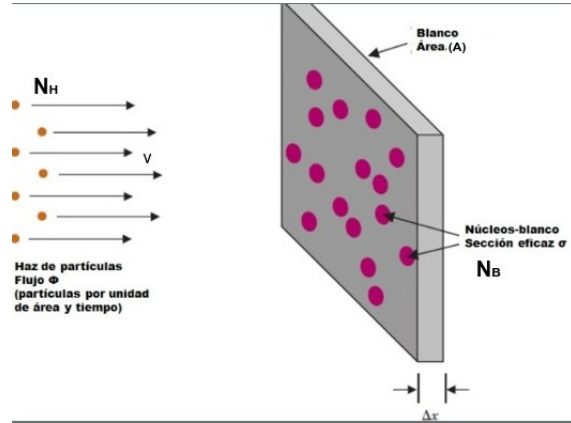


Figura 3.2: Plano perpendicular o dispersor con N_B partículas es bombardeado por un haz de N_H partículas con velocidad v [33].

la probabilidad de colisión entre una partícula en reposo y una partícula incidente

viene dada por:

$$P = \frac{N_B \sigma}{A}, \quad (3.32)$$

donde σ denota la sección eficaz o área efectiva de una partícula (dispersora) vista por un proyectil (haz incidente) [33], y posee unidades de área. Ahora bien, el número de eventos que se originan para N_H partículas del haz que incide, será:

$$\#eventos = N_H P = N_H \frac{N_B \sigma}{A}, \quad (3.33)$$

de modo que la sección eficaz será:

$$\sigma = \frac{(\#eventos)}{N_H N_B} A. \quad (3.34)$$

Experimentalmente, el haz incidente está compuesto por un conjunto de partículas con densidad ρ_H , que se desplaza a una velocidad v , de modo que el número de partículas sería $N_H = \rho_H v t A$, y por tanto:

$$\sigma = \frac{(\#eventos)}{\rho_H v t N_B}, \quad (3.35)$$

esto significa que la sección eficaz es igual a la razón entre el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo y el flujo de partículas incidentes. Podemos comprender a σ como una forma de cuantificar el efecto del centro de dispersión de las partículas, permitiéndonos conocer el estado final de las partículas. Experimentalmente, también se busca medir los momentos iniciales de las partículas dispersadas, por lo que se hace necesario la definición de la sección transversal diferencial, expresándola como:

$$\int \frac{d\sigma}{d^3 p_1 \dots d^3 p_n} d^3 p_1 \dots d^3 p_n = \sigma, \quad (3.36)$$

en donde la sección transversal de dispersión σ , se obtiene integrando un diferencial de área ($d\sigma$) sobre elementos infinitesimales de cuadri-momentos ($d^3 p_1 \dots d^3 p_n$). Debido a la conservación de la energía, los diferentes momentos de los estado finales de las partículas no son todos independientes [19]. La sección transversal habitual en términos del ángulo sólido $d\Omega$ se da debido al integrando $d\sigma/d^3 p_1 \dots d^3 p_n$ sobre las componentes del cuadri-

momento restringido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\# \text{ de partículas dispersadas por unidad de tiempo en un ángulo sólido } d\Omega}{\# \text{ de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo}}, \quad (3.37)$$

de donde podemos definir la sección eficaz diferencial en términos de la amplitud para la onda esférica saliente $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ de la ecuación (3.31) de acuerdo con:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2. \quad (3.38)$$

En resumen, el área que captura la cantidad de flujo que va en dirección $d\Omega$ es lo que se conoce como la sección transversal diferencial. También se puede decir que la sección transversal diferencial es la probabilidad de que una partícula sea dispersada en una dirección arbitraria dándonos una idea de la interacción entre las partículas y el dispersor.

3.1.1 Explorando la sección eficaz en la QFT

La sección eficaz es una de las cantidades que se calculan con mayor frecuencia en la QFT. Su cálculo es fundamental para comprender los procesos de dispersión que ocurren en la mayoría de los experimentos físicos. Estos experimentos implican la colisión de haces de partículas con momentos lineales definidos. Un ejemplo de esto se encuentra al medir la sección eficaz de un proceso en el cual colisiona un par electrón-positrón e^-e^+ y dan origen a un par muon-antimuon $\mu^-\mu^+$ [19]:

$$e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+, \quad (3.39)$$

y así como este ejemplo, existen incontables procesos de scattering.

Ahora, desde la perspectiva de la mecánica cuántica no relativista, con la presencia de un potencial V , la tasa de transición de un estado inicial $|\mathbf{k}\rangle$ a uno final $|\mathbf{k}'\rangle$, se determina a partir de la siguiente ecuación:

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' \\ \text{tasa de transición} \end{array} \right) = 2\pi |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2 \times \left(\begin{array}{c} \text{densidad de los estados} \\ \text{cuánticos finales} \end{array} \right), \quad (3.40)$$

llamada la regla de oro de Fermi, donde T es el operador transición, el cual, mediante la serie de Neumann, existe una expresión equivalente en la QFT, que consiste en realizar el siguiente cambio:

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle, \quad (3.41)$$

en donde S es la matriz de scattering, la cual nos permite conocer la amplitud de probabilidad de medir un conjunto de partículas salientes como consecuencia de la colisión entre partículas incidentes. Además, S es una matriz unitaria, es decir, $S^\dagger S = 1$, y se define como $(S = \mathbb{I} - iM)$, en donde M representa la matriz de transición. Ahora tendremos la siguiente igualdad:

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbb{I} | \mathbf{k} \rangle - i \langle \mathbf{k}' | M | \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - iM_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}, \quad (3.42)$$

la cual se obtiene a partir de la evaluación de los elementos matriciales de S , para tener una cantidad invariante de Lorentz y que se conserve el cuadri-momento de las partículas. La matriz de transición puede ser redefinida, donde $\mathcal{M}$ representa la amplitud de probabilidad de la transición de un estado inicial $|\mathbf{k}\rangle$ a un estado final $|\mathbf{k}'\rangle$ y E_i es la energía relativista de cada partícula, dando:

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - i (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathcal{M}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \prod_{i=\mathbf{k}'\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}}. \quad (3.43)$$

Considerando las ecuaciones (3.31), (3.38) y (3.40), se puede determinar la relación que existe entre la sección eficaz diferencial y la amplitud $\mathcal{M}$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{M}|^2, \quad (3.44)$$

ahora, aplicando mayor rigurosidad, se define la regla de oro en términos de los momentos lineales de las partículas para un par de casos:

1. Una partícula decae, dando lugar a la creación de n partículas, de la siguiente manera:

$$1 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n', \quad (3.45)$$

Su tasa de decaimiento se define como:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_1} \overline{|\mathcal{M}_{k',k}|^2} (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p'_2 - \dots - p'_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i}. \quad (3.46)$$

2. El choque de dos partículas, que resulta en la creación de n partículas, que se describe de la siguiente manera:

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n', \quad (3.47)$$

la sección eficaz de dicha dispersión viene dada como:

$$d\sigma = \frac{1}{v_\alpha} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \overline{|\mathcal{M}_{k',k}|^2} (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p'_2 - \dots - p'_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i}, \quad (3.48)$$

en donde, v_α es el parámetro de velocidad relativa de las partículas 1 y 2.

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1 m_2}}{E_1 E_2}, \quad (3.49)$$

donde m_1 y m_2 son las masas en reposo de cada partícula, respectivamente. Además, $\overline{|\mathcal{M}_{k',k}|^2}$ corresponde a la amplitud de Feynman promediada sobre todos los espines de las partículas. Esto se debe a la no polarización de las partículas en experimentos de altas energías. Por esta razón, se promedian todos los espines en los estados iniciales y se suman todos los espines en los estados finales. Un ejemplo de esto se da en el colisión entre dos partículas que da origen a dos nuevas partículas, definida como:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4. \quad (3.50)$$

La amplitud de dicha colisión debe ser promediada de la siguiente forma:

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} = \overbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2}}^{\text{promedio espines iniciales}} \overbrace{\sum_{\sigma_3 \sigma_4}}^{\text{sumatoria espines finales}} |\mathcal{M}|^2. \quad (3.51)$$

En resumen, es suficiente con determinar la amplitud $\mathcal{M}$ e integrar en el espacio de fase para obtener la probabilidad de medición de observables físicos. Estas

amplitudes no se calculan con exactitud, y es necesario recurrir a una serie de perturbaciones para obtener valores más precisos. Las series de Dyson permiten calcular de manera aproximada la matriz S , que está relacionada con $\mathcal{M}$ como se mostró en las ecuaciones (3.36) y (3.38). La matriz S puede ser calculada hasta cualquier orden perturbativo, siempre y cuando se conozca la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$ o Lagrangiana, mediante la siguiente expresión:

$$S = 1 - i \int d^4x_1 \mathcal{H}(x_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int \int d^4x_1 \int d^4x_2 \mathcal{T} \{ \mathcal{H}(x_1) \mathcal{H}(x_2) \} + \dots, \quad (3.52)$$

donde $\mathcal{T}$ es el operador ordenamiento temporal necesario para respetar el orden iterativo de los procesos. Un ejemplo de esto se presenta cuando se tienen tres interacciones arbitrarias de $\mathcal{H}$, dando lugar a:

$$\mathcal{H}(x_3) \mathcal{H}(x_1) \mathcal{H}(x_2) \rightarrow \mathcal{T} \{ \mathcal{H}(x_3) \mathcal{H}(x_1) \mathcal{H}(x_2) \} = \mathcal{H}(x_1) \mathcal{H}(x_2) \mathcal{H}(x_3), \quad (3.53)$$

donde $x_1 < x_2 < x_3$.

Ahora, con el propósito de ordenar, medir y calcular las interacciones de las partículas fundamentales, Richard Feynman introdujo los diagramas que llevan su nombre. Estos diagramas proporcionan una representación más sencilla de las series de Dyson. La idea de Feynman fue asignar a cada parte del diagrama un objeto matemático que permitiera construir la amplitud de probabilidad, siguiendo ciertas reglas derivadas de la Lagrangiana. Estos diagramas poseen ciertas características:

1. Son representados en un plano bidimensional, donde un eje corresponde al espacio y el otro al tiempo. La elección de estos ejes es arbitraria.
2. Las partículas elementales (fermiones) se representan mediante líneas rectas con flechas que apuntan en la dirección del eje temporal, mientras que las antipartículas (antifermyones) se consideran partículas que viajan hacia atrás en el tiempo. Por lo tanto, se simbolizan también con líneas rectas con flechas que apuntan en la dirección contraria del eje temporal.
3. Los bosones, que median en la interacción entre partículas, suelen representarse mediante líneas onduladas en los diagramas de Feynman.

4. Los vértices son los puntos de conexión entre las líneas y representan la interacción entre las partículas. Es decir, son lugares donde pueden crearse, destruirse o dispersarse partículas en los diagramas de Feynman.

Para comprender esto de manera más clara, observemos como se escribe en la QED la amplitud $\mathcal{M}$ del proceso de dispersión, como se muestra en la ecuación (3.39). Esta ecuación se puede reformular como:

$$\langle \mu^- \mu^+ | H_I | e^- e^+ \rangle. \quad (3.54)$$

El cálculo de esta amplitud utilizando el lenguaje de los diagramas de Feynman se realiza teniendo en cuenta las siguientes consideraciones. En primer lugar, H_I representa la parte de interacción del Hamiltoniano, $\langle \mu^- \mu^+ |$ es el estado final del proceso de aniquilación mientras que $| e^- e^+ \rangle$ es el estado inicial. Dado que en la QED el Hamiltoniano de interacción une los electrones con los muones a través de campos electromagnéticos (fotones), la expresión (3.54) puede escribirse de la siguiente manera [19]:

$$\mathcal{M} \sim \langle \mu^- \mu^+ | H_I | \gamma \rangle^\mu \langle \gamma | H_I | e^- e^+ \rangle_\mu. \quad (3.55)$$

En términos de los diagramas de Feynman, la amplitud 3.55 se representa con el diagrama mostrado en la (Figura 3.3), donde se muestra una representación esquemática del proceso de aniquilación de un par electrón-positrón, resultando en la creación de un par muon-antimuon.

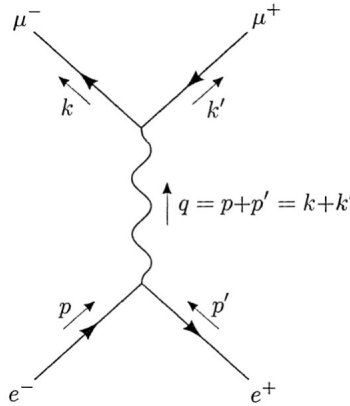


Figura 3.3: Diagrama de Feynman para el término de orden más bajo en la sección transversal $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$, en este orden el único estado intermedio posible es un fotón γ [19].

El diagrama está compuesto de cuatro líneas externas que ilustran las partículas entrantes y salientes, las cuales poseen espinores columna $u^s(\mathbf{p})$, $v^{r'}(\mathbf{k}')$ y fila $\bar{v}^{s'}(\mathbf{p}')$, $\bar{u}^r(\mathbf{k})$, los índices s, s', r y r' denotan el estado del espín, ya sea hacia arriba o hacia abajo. También incluye una línea interna que representa a la interacción electromagnética, y contiene el propagador del fotón ($\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$), en donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski, y dos vértices que indican las uniones de las líneas mediante $(-ie\gamma^\mu)$. Estos vértices miden la intensidad de la interacción y conservan la corriente eléctrica y el cuadri-momento. Además, el elemento γ^μ corresponde a un conjunto de matrices gamma de Dirac 4×4 . Utilizando las reglas de Feynman para cada línea y vértice, la amplitud de probabilidad quedará definida como:

$$\mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(\mathbf{p}') (-ie\gamma^\mu) u^s(\mathbf{p}) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^r(\mathbf{k}) (-ie\gamma^\nu) v^{r'}(\mathbf{k}'), \quad (3.56)$$

$$\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2} \left(\bar{v}^{s'}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u^s(\mathbf{p}) \right) \left(\bar{u}^r(\mathbf{k}) \gamma_\mu v^{r'}(\mathbf{k}') \right). \quad (3.57)$$

El cuadrado del módulo de la amplitud en la ecuación (3.57) nos permite calcular la sección eficaz para el proceso.

3.1.2 Reglas de Feynman en QCD

En esta sección mostramos las reglas de Feynman para QCD (Figura 3.4). Se hallan a partir del Lagrangiano de la QCD, como está escrito en la ecuación (2.73). El Lagrangiano se puede dividir en una parte libre $\mathcal{L}_0$ y una parte de interacción $\mathcal{L}_I$. La parte libre contiene términos que son bilineales en los campos. Los propagadores de quarks, gluones y ghost provienen de estos términos. Los términos cúbicos y cuárticos están en la parte de interacción y proporcionan las reglas de Feynman para los vértices. Los índices de Lorentz se representan con letras griegas $\{\mu, \nu, \dots\}$. que, en regularización dimensional, van de 1 a d dimensiones del espacio-tiempo. Los índices de color de la representación fundamental son letras minúsculas $\{a, b, c\}$ que van del 1 al 3 mientras que los índices de color de la representación adjunta se representa con letras mayúsculas $\{A, B, C, \dots\}$ y van de 1 a 8.

$$\begin{aligned}
\frac{a \quad b}{p} &= \frac{i\delta^{ab}}{p - m + i\epsilon} \\
\frac{A \mu \quad B \nu}{p} &= \frac{-i\delta^{AB} g^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \\
\frac{A \quad B}{p} &= \frac{i\delta^{AB}}{p^2 + i\epsilon} \\
\frac{a \quad b}{p} &= -ig(t^A)_{ab}\gamma^\mu \\
\frac{B \quad C}{p} &= gf^{ABC}p^\mu \\
\frac{A \mu \quad B \nu}{p} &= -gf^{ABC}[(p-q)^\rho g^{\mu\nu} + (q-r)^\mu g^{\nu\rho} + (r-p)^\nu g^{\rho\mu}] \\
\frac{A \mu \quad B \nu}{p} &= -ig^2 f^{XAC} f^{XBD} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \\
&\quad - ig^2 f^{XAD} f^{XBC} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}] \\
&\quad - ig^2 f^{XAB} f^{XCD} [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}]
\end{aligned}$$

Figura 3.4: Reglas de Feynman para el Lagrangiano de QCD [34].

3.2 Divergencias Infrarrojas en Física de Partículas

Antes de que se reconociera que la interacción fuerte era explicada por la QCD, existía un desafío persistente en la teoría cuántica general de la radiación, las divergencias [35]. Con frecuencia, se observaban resultados infinitos en las cantidades calculadas por esta teoría [36]. Estas divergencias surgen debido a la integración de 4-momentos intermedios, especialmente en regiones de momentos extremadamente altos o bajos.

Las divergencias infrarrojas (IR), a diferencia de las divergencias ultravioleta (UV), no pueden ser controladas mediante la renormalización. Estas divergencias, están vinculadas al tratamiento incorrecto de ciertos procesos. En la QFT, la emisión de bosones vectoriales sin masa (partículas de espín 1) se aborda de manera distinta a la corrección radiativa de bosones virtuales, ya que surgen de procesos diferentes. Esta distinción es una descripción no física de los procesos, ya que en realidad no podemos distinguir entre ambos. En el caso de la emisión de gluones de baja energía, también conocidos como gluones blandos, si su energía es extremadamente baja, ningún detector podría observarlo. Esto se debe a que los detectores tienen un umbral en el que los gluones con energías más bajas simplemente no pueden ser detectados. Si el problema surge de la separación de estos procesos íntimamente relacionados, la solución debe surgir de su recombinación. La recombinación de la emisión de gluones blandos y las correcciones de gluones virtuales elimina las divergencias infrarrojas en

todos los procesos y en todos los órdenes de aproximación [37]. La recombinación, aplicada al proceso $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, será el punto central de este capítulo, ya que es esencial para el cálculo de la EEC.

Las restricciones debidas a las resoluciones angulares también generan divergencias en el infrarrojo (IR), dado que los detectores no pueden distinguir entre dos partículas diferentes si están muy cercanas, es decir, presentan una incapacidad para resolver dos partículas casi colineales. Estos problemas de resolución motivaron para introducir el concepto de jets.

Este concepto de jet se originó cuando Stermán y Weinberg buscaban calcular la sección transversal de aniquilación e^-e^+ que evitaba las divergencias IR. La sección transversal experimenta divergencias suaves, las cuales se manifiesta cuando se emite un gluón con un impulso tan bajo que es prácticamente indetectable y divergencias colineales, que ocurren cuando dos de los partones del estado final tienen momentos casi paralelos, tan cercanos que es difícil distinguir uno del otro.

Ahora veamos cómo el cálculo de la sección transversal para $(e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g)$ origina estas divergencias. Considere la Figura 3.5.

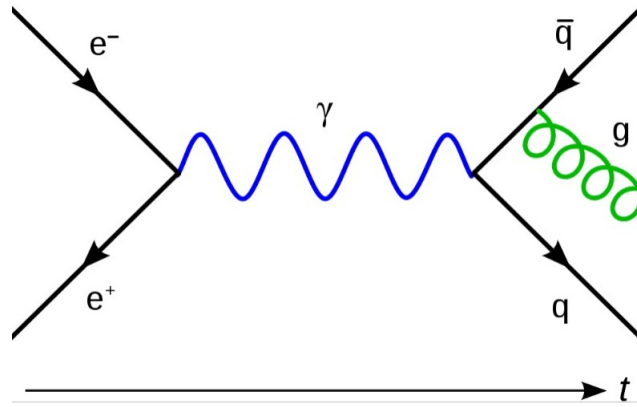


Figura 3.5: En este diagrama de Feynman a nivel de árbol, un electrón y un positrón se aniquilan, produciendo un fotón (representado por la onda sinusoidal azul) que se convierte en un par quark-antiquark, después de lo cual el antiquark irradia un gluón (representado por la hélice verde) [38].

El método convencional para los diagramas de Feynman, al aplicar las reglas de Feynman, genera la amplitud para el proceso a nivel de árbol.

$$\mathcal{M} = \frac{ig e^2 Q_q}{E^2} \bar{\nu}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \left[t^a \gamma^\nu \frac{k + \not{l}}{2k \cdot l} \gamma^\mu - \gamma^\mu \frac{k' + \not{l}}{2k' \cdot l} t^a \gamma^\nu \right] \nu(k') \epsilon_\nu. \quad (3.58)$$

Para analizar la parte divergente de la sección transversal asociada a la amplitud $\mathcal{M}$, se considera un gluón con impulso bajo [39], Permitiendo así despreciar el término $\not{l}$. Además, esta amplitud puede expresarse en términos de la amplitud Born $\mathcal{M}_0$, lo cual resulta conveniente para observar cómo aparecen las divergencias solo en el caso de una emisión de gluones soft. Simplificando la ecuación (3.58) a:

$$\mathcal{M} = g\mathcal{M}_0 \left[\frac{k_\nu}{k \cdot l} - \frac{k'_\nu}{k' \cdot l} \right] \epsilon_\nu t^A. \quad (3.59)$$

El factor contenido entre paréntesis es conocido como el factor eikonal, y es independiente del espín de los partones u otros números cuánticos. En el contexto de la electrodinámica clásica, se observa que la aceleración de partículas cargadas resulta en la emisión de radiación de frenado o radiación de bremsstrahlung [40], la cual es una radiación electromagnética producida por la deceleración de una partícula cargada, como por ejemplo un electrón, cuando es desviada por otra partícula cargada, como por ejemplo un núcleo atómico. Su interpretación como un espectro de radiación de fotones conduce exactamente al mismo término eikonal presente en el cálculo del número de fotones emitidos. Además, el cálculo de la sección transversal se simplifica aún más al tener en cuenta que en los diagramas a nivel de árbol no hay vértices de tres gluones, por lo que no es necesario incluir ghost, el cual es una partícula artificial sin ninguno significado físico, los acoplamientos y el propagador de esta partícula se elige de tal manera que esta partícula cancele las contribuciones gluónicas no físicas. La relación de completitud en el gauge axial es:

$$\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu}{k \cdot \bar{k}}. \quad (3.60)$$

Al elevar al cuadrado la amplitud y realizar la integración sobre el espacio de fase, se obtiene la sección transversal total.

$$\sigma = \sigma_0 g^2 C_F \int \frac{k \cdot k'}{(k \cdot l)(k' \cdot l)} \frac{d^3 l}{(2\pi)^3 l^0}. \quad (3.61)$$

Donde σ_0 representa la sección transversal de Born, la cual está completamente libre de divergencias IR dado que no involucra emisiones de gluones, C_F es el casimir fundamental y equivale a $\frac{4}{3}$. Para obtener una comprensión más clara de las divergencias en el IR, la sección transversal total puede ser reformulada en el marco del centro de masa, donde $\vec{p}_q = -\vec{p}_{\bar{q}}$ y θ es el ángulo entre el eje quark-antiquark y el

gluón emitido:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \int \frac{4}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \frac{dl^0 d \cos \theta}{l^0}. \quad (3.62)$$

Cuando el momento del gluón l_0 tiende a cero, la sección transversal total presenta una divergencia, denominada divergencia en el IR, ya que se da al integrar sobre todos los posibles momentos de gluones en el espacio de fase, específicamente hacia el extremo inferior del rango de integración. Las demás términos del denominador dan lugar a la divergencia colineal. Cuando el gluón es paralelo al quark o al antiquark ($\theta = 0$ o $\theta = \pi$), la sección transversal vuelve divergir. Estas divergencias están asociadas con distancias largas. Debido al principio de incertidumbre, sería necesario tener intervalo de tiempo muy grande, para poder determinar con precisión el momento de la partícula, y por tanto su dirección.

3.3 Jets en Colisionadores de Alta Energía

Los hadrones se generan con baja transferencia de momento transversal, resultando en que los hadrones finales sean aproximadamente colineales con los partones. El enfoque se centra en la energía y la dirección de estos hadrones, ya que están directamente relacionados con los partones salientes. Después de la producción de las partes del estado final, como en la aniquilación e^-e^+ , se emiten numerosas partículas debido a la hadronización. Sin embargo, estas partículas no se emiten uniformemente en todos los ángulos; más bien, parecen agruparse en jets altamente colineales. Estos grupos de partículas son conocidos como jets hadrónicos [41]. La evidencia de la estructura de jets se observó por primera vez en 1975 [42]. Aunque nuestro cálculo perturbativo está en el nivel de partones, experimentalmente solo se observan jets de partículas como subproductos. Para comparar las observaciones experimentales (jets) con las predicciones teóricas (partones), es necesario vincular ambas ideas, mediante algoritmos de jets

En experimentos de física de partículas, como en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC), los detectores registran todas las partículas emitidas, utilizando calorímetros y detectores de muones. Un ejemplo de evento típico en CMS muestra tres chorros claramente separados, identificables por la dirección original de movimiento de las partículas. La tarea consiste en determinar el número de jets y asignar cada partícula a su respectivo jet.

La clasificación de partículas en Jets no siempre es tan fácil. Se emplean algoritmos de jets para abordar esta tarea. Un primer algoritmo, propuesto por Stermán y Weinberg [43], utiliza conos definidos por un ángulo de apertura d para contener toda la energía, excepto una pequeña fracción ϵ . Este método es eficaz en eventos con dos jets, ya que los partones suelen estar uno al lado del otro en el marco del centro de masa, debido a la conservación del momento. En eventos con dos partones, como en la sección transversal de Born, ambos partones siempre estarán dentro de las regiones de chorro. Esto se aplica también a la corrección virtual.

$$\sigma_V = -\sigma_0 \frac{4\alpha_s C_F}{2\pi} \int_0^E \frac{dl_0}{l_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{d\cos\theta}{1 - \cos^2\theta}. \quad (3.63)$$

Sin embargo, al analizar la contribución real, se consideran dos situaciones. Primero, si el gluón se emite con una energía muy baja $l_0 < \epsilon E$, contribuirá a la observación independientemente de su dirección, gracias a la tolerancia permitida para partones fuera de los conos de jets. Esta contribución se denota como $\sigma_R^{(1)}$:

$$\sigma_R^{(1)} = \sigma_0 \frac{4\alpha_s C_F}{2\pi} \int_0^{\epsilon E} \frac{dl_0}{l_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{d\cos\theta}{1 - \cos^2\theta}. \quad (3.64)$$

En la segunda situación, cuando el gluón emitido tiene una energía $l_0 > \epsilon E$, su contribución cuenta solo si se emite dentro del cono definido por $(\theta \in [0, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi])$, ya que emitir fuera del cono superaría el umbral de energía y no contribuiría. Esta contribución se denota como $\sigma_R^{(2)}$, y se representa como:

$$\sigma_R^{(2)} = \sigma_0 \frac{4\alpha_s C_F}{2\pi} \int_0^{\epsilon E} \frac{dl_0}{l_0} \left[\int_{\theta=0}^{\delta} \frac{d\cos\theta}{1 - \cos^2\theta} + \int_{\theta=\pi-\delta}^{\pi} \frac{d\cos\theta}{1 - \cos^2\theta} \right]. \quad (3.65)$$

Estos términos tienen denominadores que generan divergencias en las integrales, especialmente cuando $l_0 \rightarrow 0$ o $\cos^2\theta \rightarrow 1$. Estos límites, son las principales fuentes de divergencias IR. Utilizando el método de Stermán y Weinberg, las contribuciones reales $\sigma_R^{(1)}$ y $\sigma_R^{(2)}$ deben sumarse a las virtuales para obtener la sección transversal total. Las integraciones se realizan sobre $l_0 \in [\epsilon E, E]$ y $\theta \in [\delta, \pi - \delta]$. La sección transversal resultante de Stermán Weinberg es:

$$\sigma_{SW} = \sigma_0 \left(1 - \frac{4\alpha_s C_F}{2\pi} \ln(\epsilon) \ln\left(\frac{\delta^2}{4}\right) \right). \quad (3.66)$$

La sección transversal modificada es finita cuando δ y ϵ son diferentes de cero, ya que estos valores son esenciales para definir correctamente los conos de los jets. Esta modificación elimina las divergencias al recortar las regiones problemáticas del espacio de fase. Todas las secciones transversales de jets en la aniquilación de e^-e^+ resultan ser finitas [44].

Este algoritmo de jets es efectivo para eventos con dos jets, pero ha inspirado algoritmos más avanzados que permiten más de dos jets. Las dos categorías principales de algoritmos de jets son los de cono y secuenciales. Los algoritmos de cono, como el de conos fijos, se basan en la idea de agrupar partículas dentro de círculos alrededor de las más energéticas para formar jets. Este enfoque intuitivo se repite hasta que todas las partículas se asignan a un jet.

El algoritmo de conos fijos no es seguro frente a radiación colineal, ya que la asignación de jets se ve afectada cuando una partícula se ramifica en dos colineales. Para solucionar este problema, se propone el algoritmo de conos estables, que agrupa todas las partículas dentro de un cono en un solo jet, con el eje del cono llamado eje del jet. En el plano $y - \phi$, en donde y es la rapidez y ϕ es el ángulo azimutal del momento, el cono se puede ver como un círculo de radio R . Por lo tanto, todas las partículas con momento p_i que pertenecen al jet j satisfacen:

$$(y_i - y_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2 \leq R^2. \quad (3.67)$$

En el algoritmo de conos estables, el eje del jets se elige a partir de las partículas constituyentes, generalmente como un promedio ponderado. Para encontrar los conos de los jets, se pueden usar seeds iniciales basadas en los momentos de las partículas. Sin embargo, este método puede pasar por alto algunos conos estables.

Se han desarrollado algoritmos más eficientes, como SISCone, que prescinden de seeds y utilizan técnicas geométricas computacionales para encontrar conos estables en el plano $\eta - \phi$, donde η es la pseudo-rapidez. Estos algoritmos son seguros frente a IR y tienen un costo computacional más bajo, del orden de $O(Nn \ln n)$, en comparación con el método original de conos estables, que tiene un costo de $O(nN_{cell})$.

Otro problema a abordar es la posible superposición de jets encontrados. Después de identificar con éxito todos los conos estables, podría haber partículas que pertenezcan a dos jets contiguos diferentes, llamados "proto-jets". Se resuelve este problema mediante un procedimiento de división-fusión: si la superposición entre proto-jets es significativa (por encima de un umbral, como el 50 % o 75 % de la energía total), se

fusionan en un solo jet; de lo contrario, se asignan las partículas compartidas a uno de los proto-jets según su proximidad al eje del jet.

Además, existen algoritmos de agrupamiento que comparan alguna versión de "distancia" entre pares de partículas para determinar la disposición de los jets. Un ejemplo es el "algoritmo JADE" [45], que utiliza la masa invariante escalada al cuadrado como medida de distancia.

$$d_{ij} = \frac{M_{ij}^2}{E_{vis}^2}, \quad (3.68)$$

donde

$$M_{ij}^2 = 2E_i E_j (1 - \cos \theta_{ij}). \quad (3.69)$$

E_{vis} representa la energía total visible del evento. El algoritmo JADE es un algoritmo de agrupamiento que busca pares de partículas con la distancia más baja y las combina en una nueva pseudopartícula con momento $p_{ij} = p_i + p_j$. Este proceso se repite hasta que ninguna distancia cae por debajo de un umbral d_{cut} . Las agrupaciones resultantes representan jets y el algoritmo es seguro frente a la radiación IR, es decir, no se ve afectado por la división de partones o emisiones suaves.

Sin embargo, el algoritmo JADE puede no capturar eficazmente la estructura original de la radiación en la QCD. Una versión mejorada es el algoritmo k_t [46], que utiliza el momento transversal en lugar de la masa invariante, logrando un mejor rendimiento al mapear la información experimental del nivel hadrónico al nivel teórico de partones.

$$d_{ij} = 2(1 - \cos \theta_{ij}) \frac{\min(E_i^2, E_j^2)}{E_{vis}^2}. \quad (3.70)$$

Para la nueva pseudopartícula agrupada p_{ij} , hay cuatro esquemas de recombinación de momento. El esquema E en donde se suma simplemente el cuadrimomento de las dos partículas, el esquema P , donde la energía se ajusta para que la masa invariante sea cero, es decir $E = |\vec{p}_i + \vec{p}_j|$, el esquema E_0 , donde la energía es la suma de las dos energías de las partículas, ajustando el momento para una masa invariante cero, y el esquema p_0 , el cuadrimomento es igual al del esquema p , pero E_{vis} se reemplaza por la energía total de las pseudopartículas después de cada combinación.

Recientemente, se ha desarrollado una variante del algoritmo k_t llamada algoritmo

$anti - k_t$ [47], donde la distancia se define como:

$$d_{ij} = \min(E_i^{-2}, E_j^{-2}) \frac{\Delta_{ij}^2}{R^2}. \quad (3.71)$$

En la expresión $\Delta_{ij}^2 = (y_i - y_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2$ y R es el parámetro del radio. La denominación "*anti*" proviene del hecho de que los exponentes en el momento transversal son negativos. Aunque los exponentes negativos pueden parecer preocupantes al principio, resulta que este algoritmo tiene un rendimiento superior al algoritmo k_t regular.

3.4 Variables Event Shape en Fenomenología de Colisionadores

Las variables event Shape en la QCD son observables que describen aspectos geométricos de la distribución de energía de jets en colisionadores. Estas variables, como la estructura plana o esférica de un evento [48, 49], actúan como un puente entre la teoría y los experimentos. Son más generales que las secciones transversales de jets y destacan por su simplicidad y facilidad de medición [50, 51].

A lo largo de la historia, los event Shape han sido cruciales para probar la QCD y siguen siendo objeto de investigación actual. Son observables seguros en la región IR y proporcionan información valiosa para entender la hadronización no perturbativa [52]. Su practicidad se refleja en su capacidad para determinar con precisión α_s [53, 54] y comparar generadores de eventos Monte Carlo [55].

Las variables event Shape son seguras en la Región IR ya que son invariantes bajo la ramificación del momento de partón $\vec{p}_i \rightarrow \vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2}$. Si un momento llega a cero, el término correspondiente en la suma desaparece, eliminando divergencias colineales y suaves. Estas formas se definen como sumas de momentos.

Tomando el empuje (T), definido como $T = \max_n \frac{|\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{p}_i|}$ como ejemplo, mide cómo la energía se distribuye a lo largo de un eje llamado eje de empuje $\vec{n}$. Su máximo se alcanza cuando los jets están colineales ($T \approx 1$), y el mínimo ($T \approx 2/3$) cuando están dispersos, representando un evento esférico.

En el ensanchamiento del jet, se divide el evento en hemisferios con un plano perpendicular al eje de empuje. Las sumas indican a cuál hemisferio pertenece el momento. El cálculo de los event Shape implica integrar la sección transversal diferencial sobre el espacio de fase, con una función delta que fija la variable event

Shape. Esto se observa en la definición de la EEC en la ecuación:

$$\frac{d\sum}{d\cos\chi} = \sum_{i,j} \int \frac{E_i E_j}{E^2} \delta(\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j - \cos\chi) d\sigma, \quad (3.72)$$

dónde $\hat{n}_i$ es el vector unitario que apunta a lo largo del momento del partón, E_i son las energías de los partones correspondientes, E es la energía entrante electrón-positrón inicial y χ es el ángulo entre los dos partones. Utilizando funciones delta $\delta(X - f_X(x_i))$.

En este contexto, X es la variable event Shape y x_i son las variables en las que dependen las secciones transversales, generalmente las variables de Mandelstam. La función $f_X(x_i)$ es la función de medida que restringe el espacio de fase según la definición de event Shape. Para el caso del EEC, que mide el ángulo entre dos calorímetros que detectan partones finales, el ángulo se fija para coincidir con el ángulo entre los partones, de ahí el término $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j$.

Los productos escalares de momentos provienen del factor de ponderación $\frac{E_i E_j}{E^2}$. El Empuje es la única variable con relación lineal en la función de medida, mientras que el EEC tiene un polinomio cuadrático y la esfericidad y el parámetro C tienen funciones racionales.

El EEC fue estudiado intensamente en la década de 1980 [56, 57] y ha vuelto a ser de interés recientemente. Su expansión perturbativa comienza en orden α_s , y el término LO se calculó analíticamente en 1980. Aunque algunas variables event Shape se han calculado analíticamente en LO , otras, como el parámetro C , requieren integración numérica. En cuanto a las contribuciones de orden Siguiendo al Límite (NLO), ninguna variable event Shape, excepto el EEC, se ha calculado analíticamente. La falta de cálculos analíticos en NLO ha llevado a aproximaciones numéricas con resultados diversos. Una solución analítica sería crucial para resolver discrepancias y permitir comparaciones precisas entre métodos numéricos. Por esta razón, nos enfocamos en el EEC con la esperanza de una mejor comprensión del cálculo analítico.

Event shape	Función de medida
Empuje	$max \left\{ \frac{2p_i \cdot q}{E^2} \right\} - T$
Esferocidad	$\frac{4E^4}{\pi^2} \frac{\prod_i \left(1 - \frac{2p_i \cdot q}{E^2} \right)}{max \{ (p_i \cdot q)^2 \}}$
Parámetro C	$\frac{3E^6}{4} \frac{\prod_i \left(1 - \frac{2p_i \cdot q}{E^2} \right)}{max \{ p_1 \cdot q \ p_2 \cdot q \ p_3 \cdot q \}}$
EEC	$(p_i \cdot q \ p_j \cdot q) (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j - \cos \chi)$

Cuadro 3.1: Funciones de medida para las cuatro principales variables de event shape

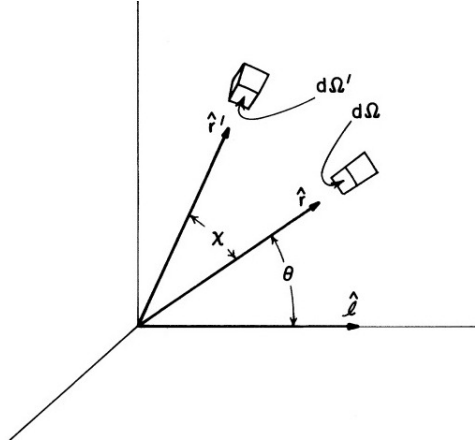


Figura 3.6: Montaje para realizar el experimento EEC [58]

3.5 Cálculo del EEC en LO en la QCD

Nos centramos en el EEC, una variable event Shape que mide la distribución de energías de los jets y cómo cambian según el ángulo entre ellos. La idea es tener observables seguras en la Región IR. Para el EEC, se colocan calorímetros a un ángulo χ y se mide la distribución de energía al variar el ángulo.

Comenzamos calculando el término $LO(O_{(\alpha_s)})$ del EEC, considerando solo los diagramas a nivel de árbol de $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$. Evitamos situaciones donde el espacio de

fase parece un estado final de dos partículas, es decir, estamos considerando $|\cos \chi| < 1$. Cuando $\chi = \pi$, tenemos partones en direcciones opuestas. Debido a la conservación del momento, el tercer partón debe ser colineal con uno de los dos primeros, nuevamente pareciendo un estado final de dos partículas. Tomando el cuadrado de la amplitud, promediando sobre las polarizaciones de estado inicial y sumando sobre las polarizaciones de estado final, encontramos que se factoriza como:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2 e^4}{4E^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (3.73)$$

La traza del leptón es:

$$L_{\mu\nu} = 4 \left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - p \cdot p' g_{\mu\nu} \right) \equiv 4 \{p, p'\}_{\mu\nu}. \quad (3.74)$$

La contribución mencionada proviene de la suma de los espines del cuadrado de la corriente leptónica $v(p')\gamma_\mu u(p)$, es decir, del par electrón-positrón entrante. Aquí hemos definido $\{p, q\}_{\mu\nu}$, que es una expresión que suele surgir en estos cálculos, específicamente, a partir de la traza de cuatro matrices gamma de Dirac. Por otro lado, la traza hadrónica es

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} = & \frac{4}{k \cdot l} (\{k', l\}^{\mu\nu} - \{k, k\}^{\mu\nu} + \{k, k'\}^{\mu\nu}) \\ & + \frac{4}{k' \cdot l} (\{k, l\}^{\mu\nu} - \{k', k'\}^{\mu\nu} + \{k, k'\}^{\mu\nu}) \\ & + \frac{4k \cdot k'}{(k \cdot l)(k' \cdot l)} (2\{k, k'\}^{\mu\nu} + \{k, l\}^{\mu\nu} + \{k', l\}^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde k, k' y l son los cuadvectores de los partones del estado final. En este caso, la suma de la definición del EEC sobre los partones del estado final tiene 3 términos ($q\bar{q}, qg, \bar{q}g$). Consideremos uno de los términos, cuando χ es el ángulo entre el quark y el antiquark, es decir, $i = q$ y $j = \bar{q}$. La integral que debe calcularse es

$$\frac{d\sum}{d\cos\chi} = \frac{1}{E^2 (2\pi)^5} \int \frac{d^3\vec{p}_q}{2E_q} \frac{d^3\vec{p}_{\bar{q}}}{2E_{\bar{q}}} \frac{d^3\vec{p}_g}{2E_g} \frac{E_q E_{\bar{q}}}{E^2} |\mathcal{M}|^2 \delta^3(\vec{p}_q + \vec{p}_{\bar{q}} + \vec{p}_g) \delta(E - E_q - E_{\bar{q}} - E_g). \quad (3.76)$$

integramos uno de los momentos del gluón usando la primera función delta y expresamos los dos restantes en coordenadas esféricas. Notamos que las energías provenientes de la definición del EEC cancelan algunas de las energías en el denominador del espacio de fase invariante de Lorentz, evitando posibles divergencias infrarrojas. La función delta de conservación del momento en la integral impone restricciones sobre los momentos,

lo que nos permite resolver para la energía del gluón (E_g). Estamos trabajando en el régimen de alta energía, donde consideramos que las partículas son sin masa.

$$\vec{p}_g = \vec{p}_q - \vec{p}_{\bar{q}} \implies E_g = \sqrt{E_q^2 + E_{\bar{q}}^2 + 2E_q E_{\bar{q}} \cos \chi}. \quad (3.77)$$

Ahora podemos expresar la función delta de conservación de energía como una función de $E_{\bar{q}}$

$$\begin{aligned} & \delta \left(E - E_q - E_{\bar{q}} - \sqrt{E_q^2 + E_{\bar{q}}^2 + 2E_q E_{\bar{q}} \cos \chi} \right) \\ &= \frac{E - E_q - E_{\bar{q}}}{E + E_q (\cos \chi - 1)} \delta \left(E_{\bar{q}} - \frac{1}{2} \frac{E - 2E_q}{1 + \frac{E_q}{E} (\cos \chi - 1)} \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Haciendo la sustitución $z = \frac{1 - \cos \chi}{2}$, la expresión $1 - \cos \chi$ se simplifica. Notamos que el numerador en el prefactor de la función delta es E_g , y se cancelará con el término correspondiente en el denominador del espacio de fase. La amplitud al cuadrado se expresa en términos de productos internos de cuadvectores, específicamente en términos de las energías de los 3 partones.

$$\begin{aligned} k \cdot k' &= E_q E_{\bar{q}} - \vec{p}_q \cdot \vec{p}_{\bar{q}} = 2z E_q E_{\bar{q}} \\ k \cdot l &= E_q E_g + E_q^2 + E_q E_{\bar{q}} (1 - 2z) \\ k' \cdot l &= E_{\bar{q}} E_g + E_{\bar{q}}^2 + E_q E_{\bar{q}} (1 - 2z). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Para tres partículas en el marco del centro de masas, la conservación del momento restringe la cinemática a un plano, y toda la dependencia angular se describe mediante el ángulo χ . Utilizando estos resultados, podemos expresar la ecuación (3.76) como:

$$\frac{d\Sigma}{d \cos \chi} = \frac{1}{E^4 (2\pi)^5} \int E_q^2 dE_q d\Omega_q E_{\bar{q}}^2 d\Omega_{\bar{q}} \frac{|\mathcal{M}|^2}{E - 2z E_q} \delta \left(E_{\bar{q}} - \frac{E}{2} \frac{E - 2E_q}{E - 2z E_q} \right), \quad (3.80)$$

donde la amplitud al cuadrado será:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2 e^4 C_F}{2E^2} \left[2 (k \cdot k') \frac{k \cdot k' + k \cdot l + k' \cdot l}{4 (k \cdot l) (k' \cdot l)} + (k \cdot l) (k' \cdot l) \left(\frac{1}{(2k \cdot l)^2} + \frac{1}{(2k' \cdot l)^2} \right) \right]. \quad (3.81)$$

Después de simplificar las trazas leptónicas y hadrónicas, las integrales de ángulo sólido son fáciles de resolver. El integrando no tiene dependencia angular debido a la función delta que fija el ángulo χ en la ecuación (3.72). La integral resultante se reduce

a una sola variable, E_q , y después de usar las funciones delta restantes, se puede calcular analíticamente con software simbólico como Mathematica [34]. El resultado se evalúa en el intervalo $[0, E/2]$ y la expresión resultante es:

$$\frac{(4\pi)^2 E^4}{192z^5(1-z)} \left[z(z^2 + 6z - 24) + 6(3z - 4) \ln(1-z) \right]. \quad (3.82)$$

El resultado de los otros 2 términos de la suma es el mismo. Cada término es:

$$-\frac{(4\pi)^2 E^4}{192z^5(1-z)} \frac{1}{2} \left[z(-53z^2 + 123z - 78) + 6(z-1)(4z^2 - 14z - 13) \ln(1-z) \right]. \quad (3.83)$$

Combinando las tres contribuciones, llegamos a la expresión para el EEC en LO

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d\cos\chi} = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{3-2z}{4(1-z)z^5} \left[3z(2-3z) + 2(2z^2 - 6z + 3) \ln(1-z) \right]. \quad (3.84)$$

En la Figura 3.7, se observa la relación que existe entre el ángulo de separación χ y la EEC , en una escala de 10^9 , y la Figura 3.8, observamos la misma gráfica, para una escala menor, del rango 10^8 .

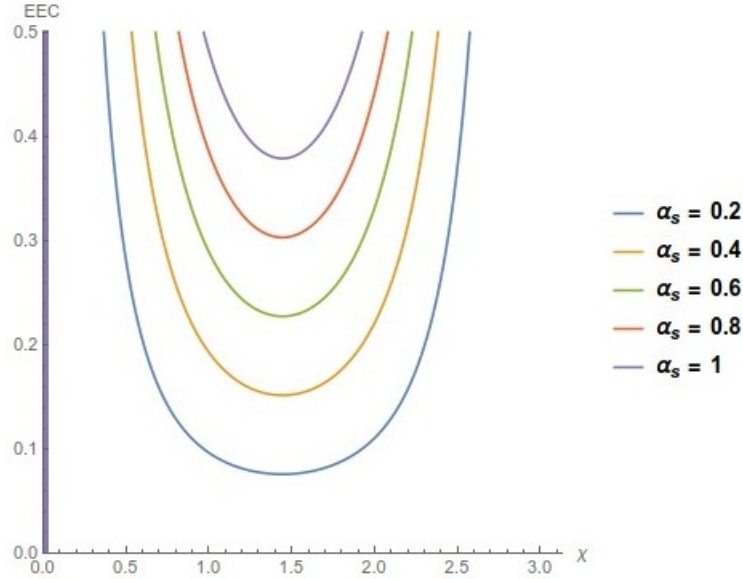


Figura 3.7: Gráfica EEC en función del ángulo de separación χ en escala 10^{-1} .

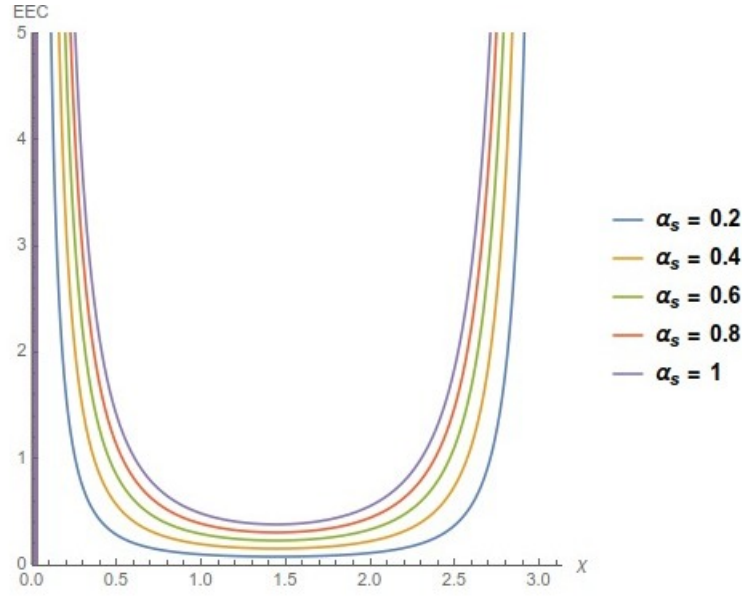


Figura 3.8: Gráfica EEC en función del ángulo de separación χ en en escala 10^0 .

Sobre los resultados obtenidos, tanto de la ecuación (3.84) y la gráfica 3.7 se puede realizar varias observaciones:

1. En las regiones límite destaca que esta contribución es especialmente fuerte, es decir, cuando los detectores son colineales $\chi \rightarrow 0$ o anticolineales $\chi \rightarrow \pi$.
2. La distribución no es simétrica alrededor del ángulo $\chi = \frac{\pi}{2}$. Este hallazgo coincide de manera precisa con las conclusiones derivadas en la década de 1980.
3. La contribución de la EEC aumenta en la medida en que la constante de acoplamiento α_s aumenta. En la Figura 2.1 se pudo observar que la constante de acoplamiento aumentaba su valor, cuando la energía disminuye, deduciendo así, que la contribución de la EEC aumenta a bajos niveles de energía.
4. La contribución se observa para valores de energía bajos. A niveles altos de energía, la contribución tiende a ser nula, esto se puede observar en la Figura (3.8).

En este capítulo, se exploraron conceptos claves de la QCD, que motivan el estudio de aniquilaciones específicas en lugar de colisiones generales.

Se presentaron algoritmos para identificar jets, esenciales para comparar teoría y experimento. Además, se introdujeron variables event shape y el EEC, siendo este último el enfoque central.

La contribución al menor orden perturbativo al observable EEC fue discutida, subrayando su importancia en la interpretación experimental. Este capítulo sienta las bases teóricas esenciales para comprender fenómenos relevantes en la física de partículas.

4. Conclusiones

En el marco de este proyecto de investigación, nos adentramos en un análisis detallado de la Correlación Energía-Energía (EEC) en el contexto del menor orden perturbativo para un diagrama de Feynman a nivel de árbol. Este estudio se originó desde la comprensión de la teoría de campos, pasando por una inmersión en los principios de la Cromodinámica Cuántica (QCD), hasta llegar a la fase de cálculo, representación gráfica y análisis de la EEC. Uno de los hallazgos clave fue la identificación de una contribución significativa cuando $\chi \rightarrow 0$ y $\chi \rightarrow \pi$, equivalente a $z \rightarrow 0$ y $z \rightarrow 1$, respectivamente. En estos puntos, el estado final exhibe características similares a un espacio de fase de dos cuerpos, evidenciando colinealidad y anticolinealidad entre los detectores.

Además, se destacó que la distribución de la EEC no es simétrica alrededor de $z = \frac{1}{2}$. Se observaron también los límites colineales blandos que generan divergencias en la región infrarroja (IR), manifestándose cuando dos de las tres partes del estado final son colineales o cuando al menos una de ellas es blanda. Se abordó la variación de las constantes de acoplamiento de las interacciones fundamentales, ilustrando cómo la constante de acoplamiento fuerte α_s experimenta cambios significativos con la energía, disminuyendo a medida que esta aumenta.

Al analizar las gráficas generadas en el estudio, se pudo establecer una relación directa entre la contribución de la EEC y los valores de α_s , evidenciando que a mayores valores de esta constante, también se observa una mayor contribución de la EEC. Se derivó la conclusión adicional de que, en situaciones de energía considerablemente elevada, la contribución de la EEC tiende a disminuir. Estos resultados proporcionan una comprensión más profunda de las complejidades de las interacciones en el contexto perturbativo y contribuyen a la creciente comprensión de los fenómenos en la física de partículas.

Referencias

- [1] G. B. Gelmini. El boson de higgs. *arXiv:1407.1741 [physics.pop-ph]*, (2014).
- [2] G. Aad et al ATLAS, CMS collaboration. Phys. rev. lett. *Lett. 114, 191803*, (2015).
- [3] ATLAS Collaboration. Phys. lett. *B 784, 345-366 (2018)*], arXiv:1806.00242 [hep-ex]].
- [4] CMS Collaboration. Jhep 1711, 047. [*arXiv:1706.09936 [hep-ex]*], (2017).
- [5] F. Englert and R. Brout. Phys. rev. lett. 13. *321*, (1964).
- [6] Peter W. Higgs. Phys. rev. lett. 13. *508*, (1964).
- [7] K. G. Wilson. Phys. rev. d 3. *1818*, (1971).
- [8] E. Gildener and S. Weinberg. Phys. rev. d 13. *3333*, (1976).
- [9] EG. 't Hooft. Nato adv. study inst. ser. b phys. 59. *135*, (1980).
- [10] G. Degrassi, S. Di Vita, J. Elias-Miró, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, and A. Strumia. Jhep 1208. [*arXiv:1205.6497 [hep-ph]*], 098 (2012).
- [11] D. Buttazzo, G. Degrassi, P. P. Giardino, G. Giudice, F. Sala, A. Salvio, and A. Strumia. Jhep 1312. [*arXiv:1307.3536 [hep-ph]*], 089 (2013).
- [12] B. A. Kniehl, A. F. Pikelner, and O. L. Veretin. Nucl. phys. b 896. [*arXiv:1503.02138[hep-ph]*], 19 (2015).
- [13] A. V. Bednyakov, B. A. Kniehl, A. F. Pikelner, and O. L. Veretin. Phys. rev. lett. 115, no. 20. [*arXiv:1507.08833 [hep-ph]*], 201802 (2015).
- [14] Princeton U M. Lisanti. Tasi. *arXiv:1603.03797v2 [hep-ph]*, (2015).
- [15] V. Del Duca, C. Duhr, A. Kardos, G. Somogyi, and Z. Trocsanyi. Phys. rev. lett. *117(15):152004*, (2016).
- [16] O. Gituliar and S. Moch. Acta phys. polon. *B 48 (2017)*, [arXiv: 1711.05549 [hep-ph]].

- [17] et al. Lance J. Dixon. Phys. rev. lett. 120. 02001 (2018), [arXiv:1801.03219v2 [hep-ph]].
- [18] R. K. Ellis, D. A. Ross, and A. E. Terrano. Nucl. phys. b 178. B 178, 421-456, (1981).
- [19] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, (2018).
- [20] Carl D. Anderson. The positive electron. *Phys. Rev.*, 43:491–494, Mar 1933.
- [21] M. Born y N. Nagendra Nath. *Proceedings Indian Academy of Science*. 318, (1936).
- [22] E. Fermi y C. N. Yang. Physical review. 76, 1739 (1949).
- [23] M. Gell-Mann. Physics letters. 8, 214 (1964).
- [24] P. F. Smith. Annual review of nuclear and particle science. 39, 73 (1989).
- [25] P. Langacker y H. Pagels. Physical review. *Physical Review D* 19, (1979).
- [26] L. Faddeev y V. Popov. Physics letters b. 25, 1967.
- [27] D. Gross y J. Smith. A review of asymptotic freedom (united kingdom: Science reasearch council. *Rutherford Laboratory*, 1974.
- [28] F. Tkachov. Physics letters b 100. 65, (1981).
- [29] K. Chetyrkin, A. Kataev, and F. Tkachov. Nuclear physics b 174. 345, (1980).
- [30] W. Celmaster y R. J. Gonsalves. Physical review letters 44. 560, (1980).
- [31] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group). Progress of theoretical and experimental physics. 2020, (2020).
- [32] J.J. Sakurai & Jim Napolitano. Modern quantum mechanics. 2nd ed, (2011).
- [33] Dr. Leonardo Errico y Dra. Luciana Montes
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas UNLP.
[http://www.fisica.unlp.edu.ar/materias/radioactividad/
clase-5-reacciones-nucleares-y-produccion-de-radiosotopos.pdf](http://www.fisica.unlp.edu.ar/materias/radioactividad/clase-5-reacciones-nucleares-y-produccion-de-radiosotopos.pdf).

- [34] S. Quintero Soto. Hadronic energy-energy correlation from electron-positron annihilation at next-to-leading order in quantum chromodynamics. (*Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia*), Apendice C (2021).
- [35] J. Jauch y F. Rohrlich. Helvetica physic. *Acta* *27*, 613.
- [36] L. Landau. Nuclear physics *13*. *181*, (1959).
- [37] J. Jauch y F. Rohrlich. The theory of photons and electrons: The relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half. *2nd (Springer Publishing Company, Incorporated 2012)*, 613.
- [38] Wikipedia contributors. (n.d.). Diagrama de Feynman. Wikipedia The Free Encyclopedia. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=diagrama_de_feynman&oldid=154155698.
- [39] P. Nason. Lecture notes for the xi jorge andre swieca summer school. *Particles and Fields*, 2001.
- [40] F. E. Low. Physical review. *110*, 974 (1958).
- [41] A. Banfi. Hadronic jets (morgan & claypool publishers, 2016). *pp*, (30-33).
- [42] G. Hanson. et al. *Physical Review Letters* *35*, 1975.
- [43] G. F. Sterman y S. Weinberg. Physical review letters. *39*, (1977).
- [44] G. F. Sterman. Physical review letters. *D 17*, (1977).
- [45] W. Bartel et al (JADE collaboration). Zeitschrift für physik c *33*. *23-31*, (1986).
- [46] S. Catani, Y. L. Dokshitzer, M. Olsson, G. Turnock, and B. R. Webber. Physics letters. *B269*, (1991).
- [47] M. Cacciari, G. Salam, and G. Soyez. The anti-kt jet clustering algorithm. *Journal of High Energy Physics*, 2008.
- [48] E. Farhi. Physical review letters. *39*, (1977).
- [49] S. Brandt, C. Peyrou, R. Sosnowski, and A. Wroblewski. Physics letters. *12*, (1964).

- [50] A. Banfi, G. P. Salam, and G. Zanderighi. Journal of high energy physics. *06*, (2010).
- [51] S. Kluth, P. Movilla Fernández, S. Bethke, C. Pahl, and P. Pfeifenschneider. The european physical journal. *21*, (2001).
- [52] G. P. Korchemsky y G. F. Sterman. Nuclear physics. *B437*, (1995).
- [53] S. Bethke. Nuclear physics b - proceedings supplements. *121*, (2003).
- [54] A. Kardos, S. Kluth, G. Somogyi, Z. Tulipánt, and A. Verbytskyi. The european physical journal. *C 78*, (2018).
- [55] G. Corcella, I. G. Knowles, G. Marchesini, S. Moretti, K. Odagiri, P. Richardson and M. H. Seymour, and B. R. Webber. Journal of high energy physics. *01*, (2001).
- [56] K. Fabricius, I. Schmitt, G. Kramer, and G. Schierholz. Zeitschrift für physik. *C11*, (1981).
- [57] J. A. M. Vermaseren, K. J. F. Gaemers, and S. J. Oldham. Oldham, nuclear physics. *B187*, (1981).
- [58] C. Louis Basham, Lowell S. Brown, Stephen D. Ellis, and Sherwin T. Love. Energy correlations in electron-positron annihilation: Testing quantum chromodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 41:1585–1588, Dec 1978.