

LOOP-TREE DUALITY THEOREM FOR THE COMPUTATION OF THE STANDARD MODEL MASSES.

JEFFERSON ORLANDO JAIMES ARCINIEGAS

Documento presentado al Programa de Física
como requisito para optar por el título de Físico.

Director: Ph.D Prof. Edilson Alfonso Reyes Rojas



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Básicas

Enero 2024

Resumen

En esta tesis se estudia inicialmente la construcción del Modelo Estándar de la física de partículas, clasificando el espectro de interacciones y materia de acuerdo con el teorema espin-estadística. Las partículas libres se representan mediante campos cuánticos contruidos como una superposición de Fourier de ondas planas con coeficientes que son operadores escalera de creación y aniquilación. En particular, los bosones escalares se describen mediante el campo de Klein-Gordon, los fermiones a través del campo de Dirac y los bosones vectoriales de fuerza usando el campo de Maxwell para bosones sin masa y el campo de Proca para bosones masivos. Usando el principio de mínima acción, se obtienen las ecuaciones de movimiento asociadas a cada campo libre. Adicionalmente, se discute los posibles términos de interacción que pueden incluirse en el Lagrangiano del Modelo Estándar asumiendo el principio gauge y la renormalizabilidad de la teoría. Por otro lado, se discute el cálculo de los propagadores libres usando la prescripción usual de Feynman. En esta prescripción se observa que las correcciones cuánticas a los propagadores presentan divergencias infrarrojas y ultravioletas que deben eliminarse de las amplitudes, ya sea usando el método de regularización dimensional junto con un procedimiento de renormalización, o utilizando los teoremas integrales del análisis complejo para identificar los coeficientes de los polos correspondientes. Con la ayuda del teorema de árbol de Feynman (FTT) se establece que las amplitudes de dispersión dominantes a altas energías están representadas por los diagramas a nivel árbol, mientras que usando el teorema de dualidad loop-árbol (LTD) es posible relacionar las amplitudes de dispersión que incluyen correcciones cuánticas (loops) con las amplitudes a nivel clásico. Esto tiene como ventaja, con respecto a la técnica convencional diagramática de Feynman, que las singularidades cinemáticas asociadas a las integrales de Feynman con loops pueden ser eliminadas directamente en cuatro dimensiones.

Palabras Clave: Dualidad Loop-Arbol. Propagador. Causalidad. Modelo Estándar, Integrales de Feynman.

Dedicatoria

A:

Mi madre: Leonor Arciniegas Florez.

Mis hermanos: Joao Andrey Jaimes Arciniegas y Eibar JeamPierre Florez Arciniegas.

*Mi sobrina: Valery Isabella Jaimes Montañez,
por que Dios nos eligió en el momento indicado para coincidir en esta vida.*

Agradecimientos

Quiero expresar sinceros agradecimientos a quienes hicieron posible la realización de esta tesis.

A Dios y mi familia por su inquebrantable apoyo y paciencia a lo largo de mi vida y formación académica, al Ph.D Edilson A. Reyes R. por la dedicación y aporte a la comunidad científica, al grupo de investigación GOM de la universidad de Pamplona en especial a quienes conforman el grupo de física teórica, quiero agradecer a mis compañeros a lo largo de mi formación en especial a Juan Diego Florez Vera, Maria Fernanda Bustos, Dilmer Fabian Suarez, Jesus David Delgado. A todos y cada uno de los docentes que formaron parte de este proceso con su aporte a la enseñanza de la física en especial al Ph.D Juan David Vasquez Jaramillo. A mi amigo de infancia Eimard Lizcano Carrillo. A Karen Dayana Quiguanas Balcucho por su apoyo y afecto al transcurso de los años.

Tabla de contenido

	Pag.
Resumen	I
Dedicatoria.....	II
Agradecimientos	III
TABLA DE CONTENIDO	IV
1. Introducción.....	1
2. TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS.....	3
2.1 El Modelo Estándar de la Física de Partículas	3
2.1.1 Identidad de las Partículas.....	4
2.1.2 Campos Cuánticos Asociados a las Partículas Elementales.....	9
2.1.2.1 El Campo Escalar de Klein-Gordon	12
2.1.2.2 El Campo Fermionico de Dirac	16
2.1.2.3 El Campo Vectorial de Maxwell-Proca	19
2.1.3 Cuadro de Interacción.....	22
3. Dualidad loop-árbol (LTD)	25
3.1 Propagador del Campo de K-G.....	25
3.2 Propagador del Campo de Dirac.....	29
3.3 El Propagador del Fotón	39
3.4 Teorema de Árbol de Feynman (FTT)	40
3.5 Teorema de la Dualidad Loop-Árbol (LTD) a Un-Loop	44
4. Conclusiones	51
Referencias	53
Apendice. A. Convenciones	58
A.1 Unidades y análisis dimensional	58
A.2 tensor métrico.....	59
A.3 Factores de normalización.....	60
A.4 Algebra de Dirac.....	61

A.4.1	suma de spin	63
-------	--------------------	----

1. Introducción

Dentro de la agenda de los colisionadores futuros como el ILC, FCC e incluso el HL-LHC [1, 2] se espera medir con mayor precisión los observables electrodébiles, entre los que se encuentran las masas de las partículas, como la masa del bosón de Higgs o la masa de los leptones. Las predicciones teóricas del Modelo Estándar deben tener incertidumbres teóricas del mismo orden de las incertidumbres experimentales, lo cual implica disminuir en hasta un orden de magnitud sus valores numéricos. Las técnicas que se usan actualmente, basadas en la reducción tensorial, la invarianza de Lorentz y las relaciones obtenidas por el método de integración por partes, que incluyen el procedimiento de Regularización Dimensional (DREG) [3, 4], se están haciendo ineficientes al aumentar el orden perturbativo de las contribuciones calculadas y el número de escalas de energía involucradas. Es necesario empezar a revisar enfoques alternativos donde los procedimientos usuales de reducción a integrales irreducibles se puedan evitar, ya que es en los coeficientes de estas integrales donde aparece el cuello de botella de este tipo de cálculos. Estos coeficientes son funciones racionales con denominadores que contienen polinomios de ordenes altos con singularidades cinemáticas (dependientes de las escalas de energía) y dinámicas (dependientes de la dimensión del espacio-tiempo) que en realidad son espurias y por lo tanto surgen de un procedimiento ineficiente. Hay un esfuerzo continuo en la comunidad de física de altas energías para desarrollar nuevas estrategias que regularicen localmente la QFT mientras mantienen las cuatro dimensiones del espacio-tiempo [5] evitando así dichas singularidades. De hecho, las singularidades pueden eliminarse con distintos métodos, pero en general es una tarea cada vez más difícil en la medida que las correcciones cuánticas son cada vez más precisas. Un método alternativo para hacer el cálculo de las integrales involucradas en las correcciones cuánticas a las masas de las partículas lo proporciona el teorema LTD [6, 7, 8] que está fuertemente basado en las propiedades analíticas de las integrales y por lo tanto en su estructura causal. Durante los años 2019 y 2020, se han explorado nuevas características del método basando en el teorema LTD [9, 10] posibilitando un análisis más general de la estructura singular de las amplitudes de diagramas con múltiples loops y líneas externas. En particular, al orden de uno y dos loops [11], ya se ha demostrado que es posible deshacerse de las singularidades no

físicas y retener sólo aquellas contribuciones compatibles con el principio de causalidad. Para un estudio detallado sobre la estructura causal de las amplitudes de dispersión, se pueden consultar las referencias [12, 13, 14]. El teorema LTD proporciona el marco perfecto para manejar los cálculos de las secciones transversales de una manera totalmente unificada, dado que su representación dual de las integrales de loop se define en el espacio Euclidiano, mientras que las contribuciones virtuales y reales se pueden combinar directamente a nivel de integrando para lograr una cancelación completamente local de las singularidades infrarrojas (IR) eludiendo procedimientos de regularización como la DREG [15, 16, 17]. También se ha desarrollado una interpretación puramente geométrica [18], que muestra un enfoque complementario para abordar la estructura causal de las amplitudes asociadas a las integrales de Feynman. Finalmente, el procedimiento basado en el teorema LTD para resolver amplitudes de Feynman de múltiples loops y líneas externas ha sido implementado en un paquete de Mathematica llamado `lotty` [19, 20], que incluye la evaluación numérica de las correspondientes amplitudes.

El propósito de esta tesis es estudiar y analizar el cálculo de los propagadores, diagramas con dos líneas externas, asociados a las partículas contenidas en el Modelo Estándar usando los métodos basados en el teorema LTD. Para facilitar la presentación, la tesis se organiza en dos capítulos. En el Capítulo 2 se da una explicación sobre la construcción del Modelo Estándar a partir del estudio de las propiedades de las partículas elementales y su clasificación con respecto al teorema espín-estadística. Adicionalmente, se estudian los campos cuánticos asociados a las partículas libres, incluyendo el campo escalar de Klein-Gordon, el campo fermiónico de Dirac y los campos vectoriales de Maxwell y Proca. Este capítulo se finaliza con una breve descripción de las interacciones entre los diferentes campos. En el Capítulo 3 se introduce el cálculo de los propagadores libres asociados a cada uno de los campos estudiados en el capítulo anterior. El cálculo se realiza usando la prescripción usual de Feynman a nivel árbol, sin incluir correcciones cuánticas de loops. Posteriormente se estudia el formalismo del teorema de árbol de Feynman (FTT) y el formalismo del teorema de dualidad loop-árbol (LTD), describiendo las ventajas y desventajas de utilizar la LTD en comparación con los cálculos diagramáticos de Feynman. Finalmente, se dan las Conclusiones y Perspectivas de nuestro trabajo. En el Apéndice A se muestra el sistema de unidades en el que se trabajó y se incluyen las definiciones necesarias para el desarrollo de la tesis.

2. TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

La física es la ciencia que estudia las interacciones fundamentales en la naturaleza, a través de la observación sistemática y la experimentación, entre una de las ramas de esta gran ciencia, encontramos la física de partículas cuyo objetivo es el estudio de las propiedades de las partículas elementales y sus interacciones que son fundamentales para entender la estructura y el comportamiento de la materia en el universo. Actualmente, la descripción más exitosa de la estructura microscópica de la naturaleza la proporciona el Modelo Estándar de la física de partículas (SM) que se basa en teorías cuánticas de campos (QFT) con simetrías gauge específicas o simetrías de calibre.¹

La QFT es un marco teórico fundamental en la física que une los principios de la relatividad especial y de la mecánica cuántica en el contexto de una teoría de grupos y representaciones para describir la naturaleza de las partículas subatómicas y sus interacciones. Esta teoría no trata a las partículas subatómicas como objetos puntuales si no mas bien como fluctuaciones de campos cuánticos, de tal forma que, cada tipo de partícula (fermión, bosón escalar y bosón vectorial) tienen asociado un campo correspondiente.

2.1 El Modelo Estándar de la Física de Partículas

El concepto de átomo fue propuesto por filósofos griegos desde el siglo V A.C. y hasta principios del siglo XX definiéndolo como la unidad fundamental e indivisible de la materia. Pero este concepto cambio a medida que la ciencia avanzaba y se obtenían nuevas evidencias experimentales, como lo fue en el caso del físico británico Joseph John Thomson con su experimento de tubo de rayos catódicos². Thomson demostró que estos rayos poseían carga negativa y los llamo *corpúsculos*. Pero fue un poco menos de tres décadas después que el físico Ernest Rutherford con su experimento de dispersión de partículas alfa, las cuales están constituidas por dos protones y dos

¹La simetría de calibre es una propiedad matemática que satisfacen las ecuaciones de movimiento y describe como ciertos campos pueden transformarse sin cambiar la física subyacente.

²Realizado en la década de 1890 este experimento involucro el uso de tubos de vacío con electrodos en los que se generaban rayos catódicos hoy conocidos como electrones.

neutrones al desprenderse del núcleo idénticamente como los núcleos de Helio, están cargadas positivamente y su masa es de cuatro unidades de masa atómica, sobre laminas de Oro (Au), demostró que el núcleo del átomo contenía protones con carga positiva y que la mayor parte del átomo era espacio vacío. Finalmente en la década de 1930 el físico James Chadwick descubre con su experimento de dispersión de partículas alfa sobre laminas de Berilio (Be), la emisión de partículas que no estaban cargadas eléctricamente y tenían aproximadamente la misma masa de los protones, a las cuales denomino neutrones [21]. los resultados de los experimentos anteriores se pueden observar muy puntualmente en la siguiente tabla 2.1, las unidades utilizadas en esta tabla son las propuestas por el Sistema Internacional (S.I).

Partícula	Símbolo	Carga eléctrica [C]	Masa [kg]
Electrón	e^{-}	$-1,6022 \times 10^{-19}$	$9,1094 \times 10^{-31}$
Protón	p^{+}	$1,6022 \times 10^{-19}$	$1,6726 \times 10^{-27}$
Neutrón	n	0	$1,6749 \times 10^{-27}$

Tabla 1 Propiedades de las partículas constituyentes de los átomos.

Estas son las primeras partículas que fueron descubiertas experimentalmente, sin embargo en la actualidad se han observado diecisiete partículas elementales y sus correspondientes anti-partículas. El área de la física encargada de estudiar las propiedades de estas partículas a nivel subatómico es conocida como la física de partículas elementales o física de altas energías (HEP). Con el avance de la tecnología de detectores [22, 2] y aceleradores [23], se ha desarrollado un modelo, el Modelo Estándar, el cual al día de hoy describe con gran precisión la identidad de las partículas, las fuerzas fundamentales y la interacción entre ellas.

2.1.1 Identidad de las Partículas

El Modelo Estándar esta constituido por tres grupos de partículas. i) Fermiones: los cuales se dividen en quarks y leptones, cada división se clasifican en tres familias. Estas partículas presentan un espín semi-entero de valor $1/2$ que obedecen al principio de exclusión de Pauli. ii) Por otra parte esta la familia de los bosones vectoriales los

cuales son los encargados de portar las interacciones, su espín es entero de valor 1. iii) Finalmente existe un bosón escalar con espín 0, el bosón de Higgs [24, 25, 26, 27, 28, 29], que tiene el papel importante de dar masa a las partículas que interactúan con el.

Los quarks y leptones consta cada uno de seis partículas con diferentes propiedades de carga, masa, espín, que pueden clasificarse en tres familias o generaciones diferentes de la siguiente manera:

Primera Generación:

- Quarks tipo arriba (up) **u** y abajo (down) **d**. Sus masas son: $m_u = 2,16 \text{ MeV}$, $m_d = 4,67 \text{ MeV}$. Un protón es la partícula subatómica compuesta que surge de la unión de dos quarks up y de un quark down. Los neutrones, por su parte, surgen de la unión de dos quark down y de un quark up.
- Electrón **e**. una de sus propiedades principales es el valor de su masa $0,5109989461 \text{ MeV}$, La carga del electrón es la más pequeña que se conoce en la naturaleza, siendo todas las demás múltiplos enteros de ella, por lo que en los fenómenos de escala atómica es considerada como la carga unitaria, posee un momento angular intrínseco de $\frac{1}{2}$, es parte fundamental de la materia ordinaria.
- Neutrino electrónico ν_e . Es una partícula extremadamente ligera ya que su masa es demasiado pequeña por el orden de $(10^{-6}) \text{ MeV}$ y no posee carga eléctrica. Interactúa débilmente con la materia, lo que las hace difíciles de detectar y además (debido a la oscilación) es prácticamente indistinguible de los otros dos neutrinos del modelo estándar de la física de partículas. Se produce en reacciones nucleares, como el proceso de decaimiento beta³.

³Decaimiento beta es un proceso mediante el cual un núcleido inestable emite una partícula beta (un electrón o positrón) para compensar la relación de neutrones y protones del núcleo atómico. Esta desintegración viola la paridad.

Segunda Generación:

- Quarks encanto (charm) **c** y extraño (strange) **s**. Estos quarks son mas pesados que los de la primera familia, interactúan a través de la fuerza nuclear fuerte que es una de las cuatro fuerzas fundamentales. El quark **c** Tiene una carga eléctrica igual a $\frac{2}{3}$ de la carga elemental, un espín de $\frac{1}{2}$, con lo cual es un fermión y cumple el principio de exclusión de Pauli, y una masa de $1,27 GeV$. El quark **s** se diferencia de el quark **c** en que su carga eléctrica es igual a $-\frac{1}{3}$ de la carga elemental, sintiendo la interacción fuerte.
- Muon μ . Es una partícula elemental, actualmente solo se encuentra en los rayos cósmicos y laboratorios, su masa es de $105.65 MeV$ aproximadamente pesa 200 veces mas que el **e** su tiempo de vida media es $\tau = 2,2 * (10^{-6})s$, su cargada y espín es el mismo al electrón, interactúan a través de la fuerza electromagnética y la fuerza débil.
- Neutrino muonico ν_μ . Es un leptón de segunda generación el cual no posee carga eléctrica y tiene una masa muy pequeña ($< 0,19 MeV$) comparada con la masa del muon, aunque es mayor a la masa del ν_e . Solo interactúa con la fuerza nuclear débil.

Tercera Generación:

- Quarks tipo cima (top) **t** y fondo (bottom) **b**. Son los quarks mas pesados considerando la masa del **t** igual a $172,69 GeV$ y la masa del **b** igual a $4,18 GeV$ ambos con espín $\frac{1}{2}$ solo se producen en condiciones de altas energías en experimentos de colisiones de partículas, como los realizados en el LHC[30]. Son demasiado inestables, lo que quiere decir que su tiempo de vida es $\tau \approx 10^{-25} s$.
- Tau τ : actualmente el valor de su masa es de $1776.86 MeV$, su tiempo de vida media es de aproximadamente $3 * (10^{-15})s$ Posee carga eléctrica exactamente igual al **e** y μ su equivalente $\frac{1}{2}$ consecuente que obedezca la estadística de Fermi-Dirac.
- Neutrino tauonico ν_τ . Al igual que los demás neutrinos, este es neutro, posee masa inferior $0,3 eV$ lo que implica que como mucho un millón de veces menor que la del **e**, pero no nula, su espín es $\frac{1}{2}$, sólo interacciona a través de la interacción débil.

Las propiedades de los quarks y los leptones se resumen en la siguiente Tabla 2.

Fermiones							
Quarks				Leptones			
Generación I							
símbolo	masa	carga	espín	símbolo	masa	carga	espín
u	$\approx 2.2\text{MeV}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	e	$\approx 0.511\text{MeV}$	-1	$\frac{1}{2}$
d	$\approx 4.7\text{MeV}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	ν_e	$< 1.0\text{eV}$	0	$\frac{1}{2}$
Generación II							
símbolo	masa	carga	espín	símbolo	masa	carga	espín
c	$\approx 1.28\text{GeV}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	μ	$\approx 105.66\text{MeV}$	-1	$\frac{1}{2}$
s	$\approx 96\text{MeV}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	ν_μ	$< 0.17\text{MeV}$	0	$\frac{1}{2}$
Generación III							
símbolo	masa	carga	espín	símbolo	masa	carga	espín
t	$\approx 173.1\text{GeV}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	τ	$\approx 1.7768\text{GeV}$	-1	$\frac{1}{2}$
b	$\approx 4.18\text{GeV}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	ν_τ	$< 18.2\text{MeV}$	0	$\frac{1}{2}$

Tabla 2. Partículas elementales del SM y su caracterización para Fermiones, las unidades empleadas en esta tabla son las unidades naturales descritas en A.1. estos datos son recientes del particle date group[31].

Los fermiones obedecen una estadística descrita por Enrico Fermi (1901 – 1954) de Italia, Paul Dirac (1902 – 1984) de Inglaterra y Wolfgang Pauli (1900 – 1958) de Austria, llamada principio de exclusión, que establece que los fermiones no pueden ocupar el mismo estado cuántico, es decir no pueden tener los mismos números cuánticos.

Los bosones, por el contrario, no tienen problema en ocupar el mismo lugar al mismo tiempo, de manera formal, dos o más bosones pueden describirse mediante los mismos números cuánticos. Las reglas estadísticas que obedecen los bosones fueron descritas por primera vez por Satyendra Bose (1894 – 1974) de la India y Albert Einstein (1879 – 1955) de Alemania. Los fotones, los gluones, los bosones $W^\pm$, el bosón Z y el bosón de Higgs satisfacen todos la estadística de Bose-Einstein, y son las partículas encargadas de mediar las diferentes interacciones entre los fermiones.

Las interacciones entre la materia se pueden entender en términos de cuatro fuerzas fundamentales: gravitacional, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil. En el SM de la física de partículas al día de hoy se ha podido explicar y unificar las tres ultimas interacciones, quedando por fuera únicamente la gravedad, cuya dinámica es descrita por las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general. La unificación de la gravedad con las otras fuerzas fundamentales que describe el SM es un problema abierto en la actualidad y el objetivo mas importante de la física teórica. De manera simplificada, la interacción electromagnética ocurre entre partículas con carga eléctrica y esta descrita a nivel clásico por medio de las ecuaciones de Maxwell. A nivel cuántico, la electrodinámica cuántica (QED) proporciona la descripción de la interacción electromagnética entre partículas fermionicas. La interacción ocurre gracias al intercambio de fotones (γ) que son partículas sin masa, con spin 1 y que viajan en todos los sistemas de referencia inerciales con la misma velocidad, $c \approx 3 \times 10^8 m/s$.

Por su parte, la interacción nuclear débil es responsable de la desintegración de las partículas subatómicas que conforman los núcleos atómicos, protones y neutrones, conocida como la desintegración beta. Uno de los efectos mas familiares es la radiactividad, el decaimiento beta negativo, produce como resultado del decaimiento de un neutrón: un protón, un electrón y un anti-neutrino electrónico. Esta radiación además es emitida en una dirección privilegiada, la dirección del spin nuclear, violando de esta manera la simetría de paridad. La interacción débil no solo ocasiona efectos de atracción y repulsión, además, puede cambiar la identidad de las partículas debido a que los bosones portadores de esta fuerza, bosones $W^\pm$ y Z , son masivos.

Adicionalmente, la interacción nuclear fuerte descrita por la cromodinámica cuántica (QCD) [32], es la interacción entre quarks y entre hadrones, partículas constituidas por quarks. Los efectos de esta fuerza solo son significativos a distancias del orden del radio de un núcleo atómico ($\sim 10^{-15}m$) y no se manifiesta a distancias mayores. Esta interacción es la responsable de mantener unidos a los protones y neutrones en el núcleo atómico, pero también de mantener estables a estos nucleones. La partícula de fuerza asociada a esta interacción se le denomina gluón: una partícula sin espín, sin masa, sin carga eléctrica, pero con un nuevo numero cuántico denominado carga de color, que a diferencia de los fotones, permite la interacción entre ellos [33].

Finalmente, el bosón de Higgs interactúa con todas las partículas anteriores, a excepción del fotón y del gluón, dando a través del mecanismo de Higgs una masa a cada una de ellas. El resumen de las propiedades de los bosones se encuentran en la

Tabla 3.

Bosones							
Vectorial				Escalar			
símbolo	masa	carga	espín	símbolo	masa	carga	espín
g	0	0	1	H	$\approx 125.250\text{GeV}/\text{c}^2$	0	0
γ	0	0	1				
Z	$\approx 91.190\text{GeV}/\text{c}^2$	0	1				
W	$\approx 80.360\text{GeV}/\text{c}^2$	± 1	1				

Tabla 3. Partículas elementales del SM y su caracterización para Bosones, las unidades empleadas en esta tabla son las unidades naturales descritas en A.1. estos datos son recientes del Particle Data Group[31].

2.1.2 Campos Cuánticos Asociados a las Partículas Elementales

En el SM, el estado físico de una partícula libre, partícula que no interactúa con ninguna otra partícula o campo externo, se representa mediante un campo cuántico, construido como una superposición de Fourier con coeficientes que son operadores escalera de creación y destrucción, que crean o destruyen un estado con un momento lineal específico en un determinado tiempo. El procedimiento de cuantizar la función de onda para representar el estado físico de un sistema con un operador lineal se conoce como segunda cuantización, y fue introducido para poder describir la dinámica de sistemas físicos en procesos de dispersión altamente inelásticos, donde los grados de libertad no se conservan. La primera cuantización se introduce en una de las teorías propuestas por los físicos para realizar una descripción de los fenómenos naturales a escala subatómica, conocida como la mecánica cuántica (QM), ya que la mecánica clásica no es adecuada para describirlos. Con la QM se pueden solucionar problemas como la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, entre otros, esto gracias a que en QM la energía existe en paquetes discretos llamados cuantos⁴. En este marco teórico los observables físicos posición q_j y momento lineal p_j se representan con

⁴Un cuanto de energía se refiere a la cantidad mínima de energía que un sistema cuántico puede absorber o emitir. La idea fundamental es que la energía está cuantizada, lo que significa que solo puede tomar valores discretos en sistemas ligados.

operadores lineales, no son solo números, en el espacio equipado de Hilbert [34] obligados a satisfacer las siguientes relaciones canónicas de conmutación:

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad (2.1)$$

que reflejan el hecho físico de que la posición y el momento lineal de una partícula cuántica no pueden ser medidos simultáneamente con precisión arbitraria y por lo tanto no son observables compatibles. Este es la idea principal de la primera cuantización.

Cuando se trabajan sistemas físicos con infinitos grados de libertad, la primera cuantización no es suficiente ya que conduce a la violación del principio de causalidad debido a que la teoría no es invariante de Lorentz, permitiendo que la propagación de las fluctuaciones de los campos posean una velocidad con un valor mayor a la velocidad de la luz en el vacío c , y por lo tanto permitiendo procesos que se encuentran fuera del cono de luz aún cuando el principio de incertidumbre de Heisenberg ($\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$) se siga cumpliendo. Para entender la afirmación anterior, se debe revisar el propagador de una partícula libre [35]. En mecánica cuántica no relativista el propagador representa la amplitud de probabilidad de que la partícula viaje desde un punto inicial x_0 hasta un punto final x en un tiempo t , y esta dado por la expresión:

$$U(t) = \langle x | e^{iHt} | x_0 \rangle, \quad (2.2)$$

donde el Hamiltoniano es:

$$\vec{H} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}. \quad (2.3)$$

Aplicando la relación de completitud para el momento lineal: $\int d^3\vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \hat{I}$, tenemos explícitamente de la ecuación anterior que:

$$U(t) = \int d^3\vec{p} \langle \vec{x} | e^{-i(\frac{\vec{p}^2}{2m})t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle. \quad (2.4)$$

Recordando la definición de onda plana en la notación de Dirac:

$$\langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle = \frac{e^{-i\vec{x}_0 \cdot \vec{p}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}, \quad \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.5)$$

se obtiene finalmente,

$$U(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} e^{-i(\frac{\vec{p}^2}{2m})t} \cdot e^{i\vec{p} \cdot (x-x_0)}. \quad (2.6)$$

Esta integral representa la transformada de Fourier de una función Gaussiana que al ser resuelta nos muestra explícitamente la expresión para el propagador:

$$U(t) = \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{im(x-x_0)^2/2t}. \quad (2.7)$$

El propagador anterior viola el principio de causalidad, debido a que si tomamos una distancia muy grande en un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño como para que en algún momento la velocidad de la partícula sea mayor a la velocidad de la luz en el vacío, este no se anula, es distinto de cero. Esto es equivalente a decir que la partícula se mueve fuera del cono de luz. Un posible camino para intentar solucionar este problema consiste en reemplazar el autovalor del Hamiltoniano por la energía relativista $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, obteniendo como resultado:

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}. \quad (2.8)$$

Como es notable, la ecuación cambia de forma pero sigue existiendo el mismo problema de causalidad, ya que otra vez el tiempo puede ser muy pequeño y la distancia muy grande sin que este exponencial se anule.

La QFT tiene la capacidad de resolver estos problemas de causalidad imponiendo que todas las cantidades para construir el propagador sean explícitamente invariantes de Lorentz. Sin embargo, esto requiere de un procedimiento de segunda cuantización el cual implica transformar las funciones de onda de la QM en operadores lineales que deben satisfacer ciertas relaciones canónicas de conmutación o anti-conmutación dependiendo de la estadística de las partículas. Tomando esto en consideración se estudiará a continuación la descripción de un estado físico en la QFT para bosones escalares, bosones vectoriales y además para estados fermionicos.

2.1.2.1 El Campo Escalar de Klein-Gordon

En una teoría de campo cuántico en el espacio de Minkowski la acción esta definida de la siguiente manera:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.9)$$

donde $\mathcal{L}$ representa la densidad Lagrangiana como función de los campos y sus derivadas. La ecuación de movimiento del sistema físico se obtiene a partir del principio de mínima acción estableciendo que un sistema evoluciona de una configuración dada a otra entre un tiempo inicial t_i y un tiempo final t_f , lo hace a lo largo de un camino o trayectoria en el espacio de configuración para el cual la acción es un mínimo $\delta S = 0$, se puede representar como:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} = 0, \quad (2.10)$$

usando la regla de derivada del producto de dos funciones:

$$0 = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right\}, \quad (2.11)$$

e integrando la derivada de una función se obtiene la misma función evaluada en la frontera, así:

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi|_{\text{ext}}, \quad (2.12)$$

evaluando:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\phi_f - \phi_0), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (0) = 0, \quad (2.13)$$

la expresión se reduce a reemplazar la ecuación 2.13 en 2.11:

$$0 = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right\}, \quad (2.14)$$

con un poco de desarrollo matemático se llega a la ecuación de Euler-Lagrange para el campo escalar,

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (2.15)$$

Los Hamiltonianos en la QFT por lo general no se utilizan ya que estos violan la simetría de Lorentz, partiendo de la densidad Lagrangiana de un campo escalar real dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (2.16)$$

siendo m la masa de la partícula que representa el Bosón escalar y ϕ el campo cuántico asociado, si sacamos factor común, utilizamos la notación $\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial t}$, agrupamos, y utilizamos la definición de cuadri-derivada covariante $(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}) = \partial$, tenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.17)$$

Podemos sustituir esta densidad Lagrangiana en la ecuación de Euler-Lagrange y obtener así la ecuación conocida como ecuación de Klein-Gordon la cual describe el movimiento para bosones escalares así:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}. \\ 0 &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right)}{\partial\phi}, \\ 0 &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 \right)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) + \frac{\partial \left(\frac{1}{2}m^2\phi^2 \right)}{\partial\phi}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

obteniendo la ecuación de movimiento de K-G

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0. \quad (2.19)$$

El campo $\phi(x)$ es un escalar de Lorentz, representa el paso de las coordenadas generalizadas de un sistema discreto con finitos grados de libertad a un sistema continuo con infinitos grados de libertad, como:

$$q_i \rightarrow \phi(x), \quad x = (t, \vec{x}), \quad (2.20)$$

una forma explicita de escribir la ecuación de K-G es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi(t, \vec{x}) = 0, \quad (2.21)$$

Debemos expresar el campo en el espacio de los momentos por que esta se encuentra en el espacio de la posición, esto es posible gracias a utilizar el método de Fourier que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales aplicando una transformada de Fourier[36], así:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(t, \vec{p}). \quad (2.22)$$

Si reemplazamos 2.22 en la ecuación de movimiento 2.21 tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(t, \vec{p}) = 0, \quad (2.23)$$

expandiendo terminos a terminos, realizando algunas operaciones básicas, esta expresión toma la forma de una ecuación diferencial de movimiento armónico simple, así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \vec{p}) + (|\vec{p}|^2 + m^2) \phi(t, \vec{p}) &= 0, \quad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} = E_{\vec{p}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \vec{p}) + \omega_{\vec{p}}^2 \phi(t, \vec{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Podemos concluir que es una ecuación diferencial de un oscilador armónico cuántico, ya que notamos que las frecuencias toma el mismo valor de la energía relativista de este, por eso debemos partir de expresar el campo de K-G $\phi(x)$ a partir de operadores escalera, donde a_p es el operador que aniquila las fluctuaciones de los campos y $a_p^\dagger$ es el operador que crea dichas fluctuaciones. de este modo el campo y el momento canónico conjugado expresado en términos de operadores creación y aniquilación se muestra respectivamente como:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}), \quad (2.25)$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} (a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}). \quad (2.26)$$

Teniendo presente que el estado de mínima energía representado en la notación de ket esta dado como $|0\rangle$ si actúa el operador creación en el estado de vacío este crea una fluctuación en el campo, produciendo una partícula con momento p . lo contrario sucede con el operador aniquilación en su estado de mínima energía ya que este se anula así:

$$a_p^\dagger |0\rangle = |p\rangle, \quad a_p |0\rangle = 0. \quad (2.27)$$

El proceso de cuantización que se ha utilizado para construir el campo escalar de K-G esta basado en la existencia de operadores creación y aniquilación que deben satisfacer las siguientes identidades:

$$\left[a_i, a_j^\dagger \right] = \delta_{ij}, \quad \left[a_i, a_j \right] = \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger \right] = 0. \quad (2.28)$$

El operador numero $N_i = a_i^\dagger a_i$ satisface entonces:

$$\left[N_i, a_j \right] = \delta_{ij} a_j, \quad \left[N_i, a_j^\dagger \right] = \delta_{ij} a_j^\dagger, \quad (2.29)$$

Para describir partículas con espín semi-entero $\frac{1}{2}$, es necesario la construcción de un espacio de estados fermiónico. Dado que:

$$\left[N_i, A \right] = a_i^\dagger \left[a_i, A \right] + \left[a_i^\dagger, A \right] a_i = a_i^\dagger \left\{ a_i, A \right\} - \left\{ a_i^\dagger, A \right\} a_i, \quad (2.30)$$

si imponemos relaciones de anticonmutación para los operadores $a_i, a_i^\dagger$,

$$\left\{ a_i, a_j^\dagger \right\} = \delta_{ij}, \quad \left\{ a_i, a_j \right\} = \left\{ a_i^\dagger, a_j^\dagger \right\} = 0, \quad (2.31)$$

Se deben normalizar apropiadamente todas las cantidades para que sean consecuentemente invariantes de Lorentz. Para incluir la evolución temporal del campo se debe trabajar en el cuadro de Heisenberg, evolucionando los operadores en el tiempo a través de transformadas de similaridad, de tal forma que:

$$\phi(x) \Rightarrow e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt}, \quad (2.32)$$

reemplazamos en representación de la ecuación de campo

$$\phi(x) = e^{iHt} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) e^{-iHt}, \quad (2.33)$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left\{ \left(e^{iHt} a_p e^{-iHt} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \left(e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} \right) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (2.34)$$

sustituyendo las siguientes transformaciones de similaridad para los operadores creación y aniquilación:

$$e^{iHt} a_p e^{-iHt} = a_p e^{-iE_p t}, \quad e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = a_p^\dagger e^{iE_p t}, \quad (2.35)$$

obteniendo finalmente la representación de Fourier para el campo en la imagen de Heisenberg [37]:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + a_p^\dagger e^{i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right), \\ \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right).\end{aligned}\tag{2.36}$$

El campo cuántico anterior es la representación de Fourier en la QFT de un bosón escalar real propagándose libremente. Cualquier observable físico puede construirse a partir de funciones de correlación de n puntos que incluyen productos ordenados temporalmente de dichos campos. En particular la función de Green de dos puntos permite calcular la amplitud de probabilidad de que las fluctuaciones del campo de K-G se propaguen desde un punto inicial a un punto final sin violar el principio de causalidad. En el siguiente capítulo se discutirá este tipo de observables.

2.1.2.2 El Campo Fermionico de Dirac

La electrodinámica cuántica (QED) es la teoría cuántica de campo que describe la interacción electromagnética entre las partículas cargadas como electrones y positrones. Los fermiones elementales libres, partículas con espín 1/2, satisfacen la ecuación de movimiento de Dirac, que tiene la forma:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0,\tag{2.37}$$

donde m es la masa de la partícula, ψ representa el campo, γ^μ son las matrices gamma de Dirac y x las coordenadas espacio temporales en el espacio de Minkowski. Por otro lado, a partir del campo de Dirac se puede construir un Lagrangiano Hermítico y escalar de Lorentz, simetrizando respecto de los campos ψ y $\bar{\psi}$:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x),\tag{2.38}$$

donde $\bar{\psi}$ es conocido como el conjugado hermitico de la función de onda de Dirac, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, cuya ecuación de Euler-Lagrange corresponda a la ecuación de Dirac 2.37.

El momento canónico conjugado del campo $\psi(x)$ es:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger(x). \quad (2.39)$$

En esta descripción el momento canónico conjugado correspondiente al campo $\bar{\psi}(x)$ es nulo. El Hamiltoniano de Dirac adopta la forma:

$$\mathcal{H} = i\psi^\dagger \dot{\psi} - \mathcal{L} = i\psi^\dagger \dot{\psi}, \quad (2.40)$$

donde en la ultima igualdad se a utilizado las ecuaciones de movimiento con la densidad Lagrangiana nula ($\mathcal{L} = 0$), el operador N_i sigue satisfaciendo las propiedades 2.29, sin embargo en este caso $N_i^2 = N_i$, por lo que el operador numero $N_i = 0, 1$, es idempotente y por lo tanto tiene dos posibles auto-valores. El correspondiente sub-espacio de Fock esta caracterizado por:

$$\begin{aligned} a_i |0\rangle &= 0 \quad \forall i, \\ |1_i\rangle &\equiv a_i^\dagger |0\rangle, \\ |1_i 1_j\rangle &\equiv a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = -a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle = -|1_j 1_i\rangle, \end{aligned} \quad (2.41)$$

si los campos son solución de la ecuación de Dirac. Entonces, después de aplicar el principio de mínima acción a la densidad Lagrangiana, y obteniendo las ecuaciones de movimiento y posteriormente la ecuación De Euler-Lagrange idéntico como se realizo para el campo de K-G, la solución general de la ecuación de Dirac esta descrita por:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 (C_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x}) \quad (2.42)$$

Donde:

- $\psi(x)$ es el campo de Dirac en función de las coordenadas espacio-temporales x .
- s denota la proyección del espín del fermión.
- p es el cuadri-momento del fermión, con componentes $p^\mu = (E_p, \vec{p})$.
- $c_s(p)$ y $d_s^\dagger(p)$ son los operadores de aniquilación y creación de partículas y antipartículas, respectivamente.
- $u_s(p)$ y $v_s(p)$ son los espinores de partícula y antipartícula que dependen de la masa

m y la dirección del espín.

Los coeficientes de la expansión pueden obtenerse fácilmente mediante las siguientes transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} a_s(\vec{p}) &= \int d^3x e^{ip \cdot x} u_s(\vec{p}) \psi(x), & a_s^\dagger(\vec{p}) &= \int d^3x e^{-ip \cdot x} \psi^\dagger(x) u_s(\vec{p}), \\ b_s(\vec{p}) &= \int d^3x e^{ip \cdot x} \psi^\dagger(x) v_s(\vec{p}), & b_s^\dagger(\vec{p}) &= \int d^3x e^{-ip \cdot x} v_s^\dagger(\vec{p}) \psi(x). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Imponiendo las relaciones canónicas de anticonmutación, a tiempos iguales:

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \pi_\beta(y)\}_{x^0=y^0} &= i \left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y) \right\}_{x^0=y^0} = i \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\}_{x^0=y^0} &= \left\{ \psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta^\dagger(y) \right\}_{x^0=y^0} = 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

es inmediato demostrar que los operadores $a_s(\vec{p})$ y $b_s(\vec{p})$ satisfacen un álgebra de operadores creación-aniquilación fermiónica:

$$\begin{aligned} \{a_s(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{p}')\} &= \{b_s(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{sr} \Delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \\ \{a_s(\vec{p}), a_r(\vec{p}')\} &= \{a_s^\dagger(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{p}')\} = \{b_s(\vec{p}), b_r(\vec{p}')\} = \{b_s^\dagger(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{p}')\} = 0, \\ \{a_s(\vec{p}), b_r(\vec{p}')\} &= \{a_s^\dagger(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{p}')\} = \{a_s(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{p}')\} = \{a_s^\dagger(\vec{p}), b_r(\vec{p}')\} = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

De forma similar, se puede imponer las relaciones 2.45 y a partir de ellas demostrar 2.44. Adicionalmente, utilizando las relaciones de anticonmutación 2.45, se obtiene:

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot (x-y)} + v_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) e^{ip \cdot (x-y)})_{\alpha\beta}, \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left[(\gamma^\mu p^\mu + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)} + (\gamma^\mu p^\mu - m)_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x-y)} \right], \\ &= (i\gamma^\mu \partial_x^\mu + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Podemos observar que el termino $u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p})$ fue reemplazado por $\gamma^\mu p^\mu + m$ lo cual se

demuestra explícitamente en A.4.1. entonces:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = iS(x-y)_{\alpha\beta} \equiv i(i\gamma^\mu \partial_x^\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta(x-y). \quad (2.47)$$

A partir de esta ecuación, se realizan los cálculos analíticos para abordar el propagador de los fermiones lo cual es desarrollado en el capítulo 3.

2.1.2.3 El Campo Vectorial de Maxwell-Proca

Los bosones $W^\pm$, Z^0 , el fotón y los gluones, poseen spin igual a 1 y representan las interacciones electro-débiles y fuerte respectivamente. El fotón y los gluones son partículas que no poseen masa mientras que los bosones $W^\pm$ y Z^0 poseen masa del orden de 10^2 GeV.

Partiendo del Lagrangiano de Proca para un Bosón Vectorial masivo de espín 1[38]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{V\dagger}F_V^{\mu\nu} + m^2V_\mu^\dagger V^\mu, \quad F_V^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu, \quad (2.48)$$

como es el caso del $W^\pm$, las ecuaciones de Euler-Lagrange toman la forma:

$$\partial_\nu F_V^{\nu\mu} + m^2 V^\mu = \left[g^{\nu\mu} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) + m^2 \right) - \partial^\mu \partial^\nu \right] V_\nu(x) \equiv O_V^{\mu\nu} V_\nu(x) = 0, \quad (2.49)$$

donde se utilizo la definición del tensor de intensidad de campo $F_V^{\mu\nu}$. En el gauge de Lorentz, $\partial_\mu V^\mu = 0$, la ecuación de movimiento se reduce a la ecuación de Proca:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) V^\mu(x) = 0. \quad (2.50)$$

Los momentos canónicos conjugados son:

$$\pi_\mu = \partial_\mu V_0^\dagger - \dot{V}_\mu^\dagger, \quad \pi_\mu^\dagger = \partial_\mu V_0 - \dot{V}_\mu. \quad (2.51)$$

Las componentes temporales de los momentos canónicos conjugados son idénticamente nulas,

$$\pi^0(x) = \pi^{0\dagger} = 0, \quad (2.52)$$

producto del hecho de que el campo V^μ solo tiene tres grados de libertad. Podemos eliminar las componentes temporales del campo vectorial usando a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\dot{V}^0 &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{V}, & V^0 &= -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}^\dagger, \\ \dot{V}^{0\dagger} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^\dagger, & V^0 &= -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}.\end{aligned}\tag{2.53}$$

Los bosones como se estudio anteriormente son los mediadores de las fuerzas fundamentales pero además estos poseen propiedades intrínsecas una de estas es la masa aunque hay otros bosones vectoriales sin masa que son partículas que se describen mediante la QFT y tienen espín 1 la característica de los bosones vectoriales sin masa, es que no poseen masa en reposo, lo que los diferencia de las otras partículas del SM que si tienen masa en reposo. El ejemplo mas conocido son los fotones aun que se consideran otros como los bosones W y Z. Ahora sin la presencia de corrientes externas o cargas, las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético libre pueden representarse por:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \left[g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) - \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu \equiv O^{\mu\nu} A_\nu = 0.\tag{2.54}$$

El tensor $F^{\nu\mu}$ es invariante bajo transformaciones de gauge del campo electromagnético $A^\mu \longrightarrow A'^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu \Lambda$. En el gauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, las ecuaciones de Maxwell 2.54 toman la forma de la ecuación de K-G sin masa: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A^\mu = 0$, como consecuencia el fotón es una partícula sin masa. La cuantización del campo electromagnético es mas delicado debido al hecho de que un campo sin masa solo puede tener dos posibles polarizaciones. Podemos imponer el gauge de Lorentz mediante un multiplicador de Lagrange de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2.\tag{2.55}$$

En este caso la respectiva ecuación de movimiento es:

$$\left[g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu \equiv O_\xi^{\mu\nu} A_\nu = 0.\tag{2.56}$$

El Lagrangiano 2.55 y la ecuación de movimiento 2.56 toma una forma particularmente simple en el gauge donde $\xi = 1$, obteniendo el llamado Lagrangiano de Fermi [39]:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu}) (\partial^{\mu} A^{\nu}). \quad (2.57)$$

La expresión anterior es la suma de cuatro Lagrangianos de K-G sin masa, uno por cada componente del campo A^{μ} .

La solución mas general de las ecuaciones de movimiento 2.56 se expresa mediante la descomposición de Fourier:

$$A^{\mu}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=0}^3 [a_s(\vec{p}) \epsilon_s^{\mu}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a_s^{\dagger}(\vec{p}) \epsilon_s^{\mu*}(\vec{p}) e^{ip \cdot x}], \quad (2.58)$$

donde los cuadvectores $\epsilon_s^{\mu}(\vec{p})$ representan las cuatro polarizaciones del campo A^{μ} , s representa los estados de helicidad, es necesario tomar una dirección temporal de referencia n^{μ} , donde $n^2 = 1$ y $n^0 > 0$.

Los cuadvectores $\epsilon_s^{\mu}(\vec{p})$ corresponden a la base canónica $\epsilon_0^{\mu}(\vec{p}) = (1, 0, 0, 0)$, $\epsilon_1^{\mu}(\vec{p}) = (0, 1, 0, 0)$, $\epsilon_2^{\mu}(\vec{p}) = (0, 0, 1, 0)$, $\epsilon_3^{\mu}(\vec{p}) = (0, 0, 0, 1)$. $\epsilon_1^{\mu}(\vec{p})$ y $\epsilon_2^{\mu}(\vec{p})$ se denominan polarizaciones transversales [$p_{\mu} \epsilon_{1,2}^{\mu}(\vec{p}) = 0$], $\epsilon_3^{\mu}(\vec{p})$ polarización longitudinal y $\epsilon_0^{\mu}(\vec{p})$ polarización escalar. por lo tanto obedecen las siguientes relaciones de orto-normalidad y completitud:

$$\epsilon_{s,\mu}^*(\vec{p}) \epsilon_r^{\mu}(\vec{p}) = g_{sr} \quad , \quad \sum_{s=0}^3 \frac{\epsilon_s^{\mu*}(\vec{p}) \epsilon_r^{\nu}(\vec{p})}{\epsilon_s^*(\vec{p}) \cdot \epsilon_s(\vec{p})} = g^{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

La descomposición de Fourier puede ser invertida obteniendo así los operadores creación-aniquilación:

$$\begin{aligned} a_s(\vec{p}) &= i g_{ss} \epsilon_s^{\mu*}(\vec{p}) \int d^3 x \left[e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\mu}(x) \right], \\ a_s^{\dagger}(\vec{p}) &= -i g_{ss} \epsilon_s^{\mu}(\vec{p}) \int d^3 x \left[e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\mu}(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Podemos tomar arbitrariamente $\xi = 1$ ya que los resultados físicos son independientes del parámetro ξ . Las reglas de conmutación de los operadores 2.60 creación-aniquilación

se pueden hallar mediante la relación:

$$\begin{aligned} [a_s(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{p})] &= -g_{sr} \Delta_{\vec{p}\vec{p}}, \\ [a_s(\vec{p}), a_r(\vec{p})] &= [a_s^\dagger(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{p})] = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

La relación de conmutación covariante para tiempos arbitrarios esta dado por:

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = -ig^{\mu\nu} \Delta(x-y)|_{m=0}, \quad (2.62)$$

este conmutador 2.62 se anula para intervalos espacio-temporales fuera del cono de luz, consecuente de este resultado se preserva la condición de causalidad.

Hasta este punto hemos trabajado con teorías de campo libre, las cuales describen partículas que se encuentran en la naturaleza sin interactuar ni participar en ningún proceso de scattering. Para dar cuenta de partículas interactuando con campos externos, se debe incluir nuevos términos en los Lagrangianos con coeficientes que representen la intensidad de la interacción.

2.1.3 Cuadro de Interacción

Partiendo de la construcción de un Hamiltoniano que representa las leyes físicas del sistema descrito por la ecuación:

$$H_{int} = - \int d^3x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)]. \quad (2.63)$$

Generalmente en QFT se trabaja con Lagrangianos y no con Hamiltonianos ya que la formulación Lagrangiana es intrínsecamente covariante bajo transformaciones de Lorentz, entonces, para la teoría ϕ^4 el Lagrangiano esta constituido por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.64)$$

donde λ es una constante de acoplamiento adimensional, a partir de este Lagrangiano después de introducirlo en la acción y variar la acción uno puede llegar a la ecuación canónica de Euler-Lagrange la cual su solución es llegar a la ecuación de movimiento, tal cual, como se realizo con los campos libres anteriores, como resultado llegamos a la

ecuación de movimiento para la teoría ϕ^4 dada por:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3. \quad (2.65)$$

Se puede además trabajar con otros campos interactuantes como lo es el campo de la teoría de la electrodinámica cuántica (QED) donde su Lagrangiano es expresado como la suma de otros Lagrangianos, estos Lagrangianos son: Lagrangiano de Dirac, Lagrangiano de Maxwell mas un termino de interacción.

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (2.66)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético, A_μ es el potencial del vector electromagnético, una propiedad crucial de la QED es que su Lagrangiano es invariante bajo la transformación de calibre

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.67)$$

que se realiza en el campo de Dirac como una rotación de fase local. Tenga en cuenta que dado que $\dot{A}^0$ no aparece en el lagrangiano 2.65, el momento conjugado con A^0 es idénticamente cero. Esto contradice la relación de conmutación canónica $[A^\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = i\delta(x - y)$. Una solución es cuantificar el gauge de Coulomb, donde $\nabla \cdot A = 0$ y A^0 es una variable restringida. Se puede cuantificar el campo aplicando el gauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$. Entonces, es posible modificar el Lagrangiano, agregando un término $\dot{A}^0$. Se obtienen las relaciones de conmutación $[A^\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = -ig^{\mu\nu}\delta(x - y)$.

Por ultimo para el estudio del SM se puede hablar y tratar la teoría de Yukawa, y los términos de interacción existentes, donde el Lagrangiano de Yukawa esta descrito como:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{K-G} - y_j \bar{\psi}_j \psi_j \phi. \quad (2.68)$$

El término de interacción contiene una constante de acoplamiento adimensional g , Yukawa inventó originalmente esta teoría para describir nucleones (ψ) y piones (ϕ). En la teoría de partículas moderna, el SM contiene términos de interacción de Yukawa que acoplan el campo escalar de Higgs a quarks y leptones; la mayoría de los parámetros libres en el SM son constantes de acoplamiento de Yukawa. Además de estas teorías, existen otras en la naturaleza, pero, sorprendentemente, un axioma

simple y razonable elimina todas las interacciones posibles, excepto unas pocas este es que la teoría sea renormalizable esto implica, que los términos de orden superior en la teoría de la perturbación, involucran integrales sobre los cuadri-momentos de partículas intermedias ("virtuales"). Estas integrales suelen ser formalmente divergentes y generalmente es necesario imponer algún tipo de procedimiento de corte; lo más simple es cortar la integral en un momento Λ grande pero finito. Al final del cálculo se toma el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ y se espera que las cantidades físicas resulten ser independientes de λ . Si este es realmente el caso, se dice que la teoría es renormalizable. La teoría que contenga una constante de acoplamiento con dimensión de masa negativa no es renormalizable. Un poco de análisis dimensional nos permite descartar casi todas las interacciones candidatas. Dado que la acción es adimensional y la densidad Lagrangiana posee unidades de (masa)⁴, podemos tabular todas las interacciones renormalizables permitidas. Para teorías que involucran sólo escalares, los términos de interacción permitidos son $\mu\phi^3$ y $\lambda\phi^4$. La constante de acoplamiento μ tiene dimensión 1, mientras que λ no tiene dimensiones. No se permiten términos de la forma ϕ^n para $n > 4$, ya que sus constantes de acoplamiento tendrían dimensión $4 - n$. En la teoría de Yukawa el termino de interacción permitido es $y_j\bar{\psi}_j\psi_j\phi$ donde $j = 1, 2, \dots, 12$ recorres hasta 12 por que son el numero existente de Fermiones en el SM.

Para las teorías de Gauge, existen teorías que describen las interacciones entre las partículas mediante campos cuánticos que representan las fuerzas fundamentales de la naturaleza entre ellas se encuentran la QED que describe la interacción electromagnética entre partículas cargadas y esta basada en el grupo de simetría $U(1)$. También esta la QCD que describe la interacción fuerte entre quarks y esta basada en el grupo de simetría $SU(3)$ y la Teoría Electrodébil Unificada que unifica las interacciones electromagnética y débil en una sola teoría y esta basada en el grupo de simetría $SU(2) \times U(1)$ y el termino de interacción es $e\bar{\psi}_j\gamma^\mu\psi_jA_\mu$.

Finalmente otros términos de interacción que pudiesen presentarse son los Escalares Gauge: $gA^\mu\phi\partial_\mu\phi$, $g^2\phi^2A^2$, $gA^2\partial_\mu A^\mu$ y gA^4 .

Estudiado el MS y su construcción, se da paso a la parte fundamental de esta tesis, el cálculo de los propagadores de los campos libres, el teorema FFT y la LTD que se estudiara en el siguiente capítulo.

3. Dualidad loop-árbol (LTD)

El campo escalar descrito por la ecuación de K-G es uno de los mas estudiados en la QFT debido a su importancia metodológica a la hora de abordar campos que poseen una estructura espacio-temporal más compleja, tales como los campos espinoriales y vectoriales. Pero su importancia no solamente radica en su carácter didáctico, sino también en el uso que se le puede dar en la física de partículas. En el propagador de Feynman propone la propagación de partículas de energía positiva hacia el futuro y partículas de energía negativa hacia el pasado (antipartículas). existen distintas formas para realizar estos cálculos este capítulo se enfoca principalmente en el calculo diagramatico de Feynman y posteriormente se realiza una técnica de regularización actual conocida como Loop-Tree Duality (LTD) aprovechando el teorema de los residuos de Cauchy para integrales complejas.

En teoría cuántica de campos, un propagador es una función de Green, es decir un tipo de solución de una ecuación diferencial, que da la amplitud de probabilidad de que una partícula se desplace entre dos puntos en un tiempo dado, o de que se mueva con cierta energía y momento. La partícula que se desplaza puede ser real o virtual, de forma que un diagrama de Feynman es esencialmente una representación de propagadores de partículas virtuales entre nodo[40].

3.1 Propagador del Campo de K-G

Considerando la descripción de campo, dado por la ecuación 2.36 la expresión para el campo cuántico que representa los bosones escalares, después de realizarle primera y segunda cuantización, se puede calcular la amplitud de probabilidad de las fluctuaciones de campo de K-G que se propaguen desde un punto inicial a un punto final a través del tiempo, así:

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle . \quad (3.1)$$

Reemplazamos el valor de los campos

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= \langle 0 | \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (a_q e^{-iq \cdot y} + a_q^\dagger e^{iq \cdot y}) |0\rangle, \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \langle 0 | (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) (a_q e^{-iq \cdot y} + a_q^\dagger e^{iq \cdot y}) |0\rangle, \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot y} \langle 0 | (a_p a_q^\dagger) |0\rangle,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

utilizamos la relación:

$$\langle 0 | (a_p a_q^\dagger) |0\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(q-p), \tag{3.3}$$

y aplicamos el delta de Dirac obteniendo:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}, \tag{3.4}$$

al evaluar la integral en sus componentes espaciales $(x-y) = (0, \vec{x}-\vec{y})$ y utilizando las coordenadas esféricas para su solución donde $\vec{x}-\vec{y} = \vec{r}$ la expresión sera:

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}, \\
D(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot r}, \\
D(x-y) &= \frac{-i}{2(2\pi)^2 |r|} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{|p| e^{-i|p||r|}}{\sqrt{p^2 + m^2}},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

al considerar la integral en el plano complejo se pueden obtener singularidades en $|\vec{p}| = \pm im$ como función de $|\vec{p}|$, es necesario utilizar el teorema de los residuos de Cauchy para integrales complejas, para poder solucionar este tipo de integrales, obteniendo:

$$D(x-y) \sim e^{-m|r|}, \tag{3.6}$$

al interpretar este resultado se deduce que la amplitud de probabilidad es distinta de cero para trayectorias por fuera del cono de luz, lo cual viola el principio de causalidad ya que habrían partículas con velocidades superiores a c . Para solucionar estos problemas es necesario tratar dos eventos separados espacialmente y comprobar que un evento es causa del otro, en otros términos verificar que es causal, lo que nos lleva a desarrollar el conmutador de dos campos $[\phi(x), \phi(y)]$, si al realizar el calculo el valor es nulo quiere

decir que los observables son compatibles preservando el principio de causalidad. en el caso mas general se puede denotar el conmutador como:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} [(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}), (a_q e^{-iq \cdot y} + a_q^\dagger e^{iq \cdot y})], \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} ([a_p, a_q^\dagger] e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + [a_p^\dagger, a_q] e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}), \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}), \tag{3.7}
\end{aligned}$$

la diferencia de amplitudes es el resultado anterior, por lo que es conlleva a:

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x), \tag{3.8}$$

si encontramos la propagación de las fluctuaciones de los campos fuera del cono de luz, denotado como $(x - y)^2 < 0$, es necesario realizar una transformación de Lorentz que realice $(x - y) \rightarrow -(x - y)$. Necesariamente la función de Green se vería transformada también en $D(x - y) = D(y - x)$ y por tanto el conmutador de los campos sera nulo $[\phi(x), \phi(y)] = 0$. Preservando el principio de la causalidad. También podemos mostrar que la función retarda de Green es equivalente al conmutador entre los campos, así:

$$\begin{aligned}
D_R(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-y)} \frac{1}{2E_p} (e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)}), \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_p} e^{-i[E_p(x^0-y^0) - p \cdot (x-y)]} + \frac{1}{-2E_p} e^{-i[-E_p(x^0-y^0) - p \cdot (x-y)]} \right\}, \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} \right\}, \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}), \\
D_R(x - y) &= [\phi(x), \phi(y)]. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Solucionando la función de Green retardada se utiliza la prescripción de Feynman, ya que se pueden utilizar diferentes contornos de integración pero esta prescripción es la que aporta todo el significado físico y preserva la causalidad.

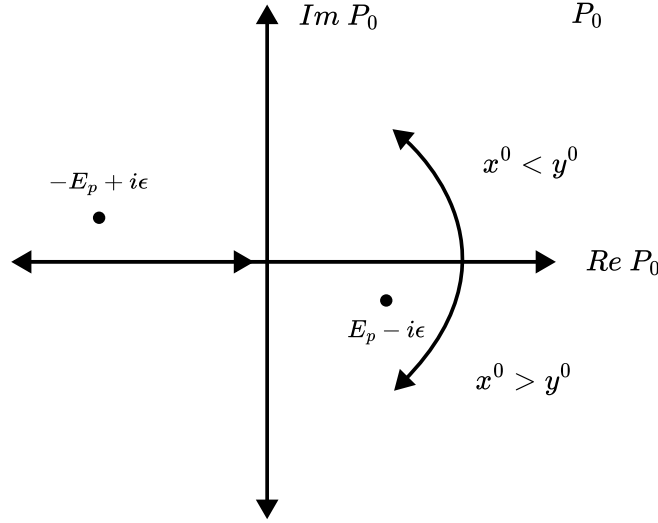


Figura 1. Plano complejo P_0 . Contorno de integración para las condiciones del propagador del bosón escalar en la prescripción de Feynman.

La expresión de la función retardada de Green $D_R(x - y)$ dada por:

$$D_R(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - y)}, \quad (3.10)$$

se puede separar las componentes espaciales de la componente temporal esto con el fin de apartar las singularidades y poder solucionar de acuerdo a la prescripción de Feynman, entonces:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{i}{2\pi} \int \frac{dp^0}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2} e^{-ip^0 \cdot (x^0 - y^0)}, \quad (3.11)$$

la integral temporal diverge, presentando singularidades en los polos $p^0 = \pm E_p$, para tratar estas singularidades se puede hacer uso del teorema de los residuos de Cauchy [41], este enuncia, siendo D un dominio simplemente conexo y C un contorno simple cerrado que se halla completamente dentro de D; si una función es analítica sobre y en el intervalo de C, entonces:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k), \quad (3.12)$$

donde el residuo de orden en $z = z_0$ de la función $f(z)$ esta definido por:

$$\text{Res}(f(z), z_k) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0) f(z), \quad (3.13)$$

se toma la integral sobre la coordenada temporal del cuadri-momento (dp^0) en términos de la variable compleja $z = x + iy$ se obtiene la siguiente integral, que se representa como la diferencia de integrales de contorno en el plano complejo así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2} = \oint_C dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2} - \oint_{\Gamma} dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z^2 - E_p^2}, \quad (3.14)$$

la integral sobre el contorno Γ corresponde a media circunferencia con radio R , desarrollando la integral para el contorno superior cuando ($x_0 < y_0$) e inferior para ($x_0 > y_0$) se obtiene el propagador en la prescripción de Feynman 3.1 siendo el resultado mas significativo ya que es un termino causal, así:

$$D_F(x - y) = \begin{cases} D(x - y) & \text{si } x_0 > y_0 \\ D(y - x) & \text{si } x_0 < y_0 \end{cases}, \quad (3.15)$$

definiendo el producto T-ordenado de dos campos como:

$$\begin{aligned} T[\phi(x)\phi(y)] &= \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x). \\ \langle 0 | T[\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &\equiv iD_F(x - y). \\ iD_F(x - y) &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

el valor esperado en el vacío del T-ordenado de dos campos reales es el resultado del propagador de Feynman $\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = D_F(x - y)$, en 3.15 el primer termino cuando $x_0 > y_0$ es la amplitud de probabilidad de que la partícula sea creada en el punto y^μ y aniquilada en x^μ , mientras que el segundo termino con $x_0 < y_0$ corresponde a la amplitud de probabilidad que la partícula creada en el punto x^μ se aniquile en y^μ .

3.2 Propagador del Campo de Dirac

El campo de Dirac describe la dinámica de fermiones (partículas con espín $\frac{1}{2}$) en el marco de la teoría cuántica de campos. El campo de Dirac es un objeto cuántico

que actúa sobre el espacio-tiempo y permite describir cómo los fermiones se propagan e interactúan, en este caso se tratan a las partículas libres lo que quiere decir que no hay interacción. El campo de Dirac para un fermión con masa m se puede escribir como una suma de componentes de partícula y antipartícula:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 (C_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x} + d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip \cdot x}). \quad (3.17)$$

Los espinores $u_s(p)$ y $v_s(p)$ son soluciones de la ecuación de Dirac y se calculan a partir de las matrices de Dirac γ^μ . Estas matrices y sus propiedades son esenciales para definir completamente el campo de Dirac y la teoría de fermiones en general.

Aplicando propiedad distributiva para la suma dentro del campo:

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} C_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x} + \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip \cdot x}, \quad (3.18)$$

donde se utilizara la siguiente notación:

$$\psi(x) = \underbrace{\sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} C_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x}}_{\psi^+} + \underbrace{\sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip \cdot x}}_{\psi^-}. \quad (3.19)$$

El campo en el estado de vacío o mínima energía toma la forma:

$$\begin{aligned} \psi(x) |0\rangle &= \psi^+ |0\rangle + \psi^- |0\rangle, \\ \psi(x) |0\rangle &= \left(\sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} C_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x} \right) |0\rangle + \\ &\quad \left(\sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip \cdot x} \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Es importante mostrar como actúan los operadores de creación y aniquilación en el estado de vacío:

$$\begin{aligned} C_s(p) |0\rangle &= 0 \text{ operador aniquilación.} \\ d_s^\dagger(p) |0\rangle &= |e_s^+(p)\rangle \text{ operador creación.} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Teniendo que para ψ^+ el operador aniquilación en estado de vacío es igual a cero, por tanto, se anula la expresión, obteniendo:

$$\psi^+ |0\rangle = 0. \quad (3.22)$$

Análogamente, para la otra componente del campo en el estado de vacío:

$$\psi^- |0\rangle = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} v_s(p) e^{ip \cdot x} |e_s^+(p)\rangle = \psi(x) |0\rangle, \quad (3.23)$$

notando que en este campo aplicado al estado de vacío crea positrones con momento p y spin s . pero no están presentes los electrones dentro de la ecuación, por tanto, se debe aplicar el complejo conjugado del campo. tomando el complejo conjugado $\psi^\dagger(y)$:

$$\psi^\dagger(y) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{r=1}^2 (C_r^\dagger(q) u_r^\dagger(q) e^{iq \cdot y} + d_r(q) v_r(q) e^{-iq \cdot y}), \quad (3.24)$$

se aplica propiedad distributiva a la expresión:

$$\psi^\dagger(y) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) v_r(q) e^{-iq \cdot y} + \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) u_r^\dagger(q) e^{iq \cdot y}, \quad (3.25)$$

nuevamente utilizando notación abreviada para cada una de las componentes de este campo conjugado así:

$$\psi^\dagger(y) = \underbrace{\sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) v_r(q) e^{-iq \cdot y}}_{\psi^{\dagger+}} + \underbrace{\sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) u_r^\dagger(q) e^{iq \cdot y}}_{\psi^{\dagger-}}, \quad (3.26)$$

la expresión para el campo conjugado en el estado de vacío sera:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(y) |0\rangle &= \psi^{\dagger+} |0\rangle + \psi^{\dagger-} |0\rangle, \\ \psi^\dagger(y) |0\rangle &= \left(\sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) v_r(q) e^{-iq \cdot y} \right) |0\rangle + \\ &\quad \left(\sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) u_r^\dagger(q) e^{iq \cdot y} \right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.27)$$

nuevamente las actuaciones de los operadores creación y aniquilación en el estado de vacío son aplicadas como en la ecuación 3.20 y se obtienen las siguientes expresiones para cada una de las componentes del campo conjugado:

$$\begin{aligned}\psi^{\dagger+} |0\rangle &= 0, \\ \psi^{\dagger-} |0\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) |0\rangle u_r^\dagger(q) e^{iq \cdot y}, \\ \psi^{\dagger-} |0\rangle &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} u(q) e^{iq \cdot y} |e_r^-(q)\rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

en este campo conjugado se obtiene la creación de un electrón con momento q y spin r . como en el producto interior $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$, es necesario multiplicar el campo conjugado con la matriz γ^0 para obtener $\bar{\psi}$ definidos por:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad \bar{v}_r(q) = v_r^\dagger(q) \gamma^0, \quad \bar{u}_r(q) = u_r^\dagger(q) \gamma^0, \quad (3.29)$$

entonces al multiplicar cada una de las componentes del campo conjugado por la matriz de Dirac γ^0 se obtiene:

$$\psi^\dagger(y) \gamma^0 |0\rangle = \psi^+ \gamma^0 |0\rangle + \psi^- \gamma^0 |0\rangle. \quad (3.30)$$

reemplazando cada una de las componentes:

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(y) \gamma^0 |0\rangle &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) v_r(q) \gamma^0 e^{-iq \cdot y} |0\rangle + \\ &\quad \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) u_r^\dagger(q) \gamma^0 e^{iq \cdot y} |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.31)$$

aplicando la definición anterior 3.30 se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(y) |0\rangle &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) \bar{v}_r(q) e^{-iq \cdot y} |0\rangle + \\ &\quad \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) \bar{u}_r(q) e^{iq \cdot y} |0\rangle, \\ \bar{\psi}(y) |0\rangle &= \bar{\psi}^+ |0\rangle + \bar{\psi}^- |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.32)$$

como en las ecuaciones 3.22 y 3.23 los operadores creación y aniquilación actúan y el campo es expresado por:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^+ |0\rangle &= 0 \\ \bar{\psi}(y) |0\rangle &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) \bar{u}_r(q) e^{iq \cdot y} |0\rangle = \bar{\psi}(y) |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.33)$$

ahora se calculara el producto interior $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$, reemplazando cada uno de los campos:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \\ \langle 0 | \left[\sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} C_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x} \right] \\ \left[\sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) \bar{v}_r(q) e^{-iq \cdot y} + \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) \bar{u}_r(q) e^{iq \cdot y} \right] |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

después de que los operadores creación y aniquilación actúan en el vacío se puede reducir la expresión anterior a:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \\ \left\langle 0 \left| \left[\sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} C_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} \right] \left[\sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} C_r^\dagger(q) \bar{u}_r(q) e^{iq \cdot y} \right] \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.35)$$

sacando del producto interior lo que no sean operadores teniendo:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \\ &\quad e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot y} u_s(p) \bar{u}_r(q) C_s(p) C_r^\dagger(q) \langle 0 | C_s(p) C_r^\dagger(q) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.36)$$

la expresión $\langle 0 | C_s(p) C_r^\dagger(q) | 0 \rangle$ es relevante por tanto se utiliza la relación:

$$[C_s(p), C_r^\dagger(q)] = (2\pi)^3 \delta^3(p - q) \delta_{sr}, \quad (3.37)$$

tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\langle 0 | C_s(p) C_r^\dagger(q) | 0 \rangle &= \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^3(p - q) \delta_{sr} | 0 \rangle \\ \langle 0 | C_s(p) C_r^\dagger(q) | 0 \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(p - q) \delta_{sr} \langle 0 | 0 \rangle,\end{aligned}\quad (3.38)$$

utilizando la identidad $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ ya que el estado de vacío esta normalizado:

$$\langle 0 | C_s(p) C_r^\dagger(q) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p - q) \delta_{sr}, \quad (3.39)$$

reemplazando:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \\ \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot y} u_s(p) \bar{u}_r(q) (2\pi)^3 \delta^3(p - q) \delta_{sr},\end{aligned}\quad (3.40)$$

primero vamos aplicar el delta de Kronecker donde se cancela una sumatoria y ahora todo lo que era r es reemplazado por s , así:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \\ \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot y} u_s(p) \bar{u}_s(q) (2\pi)^3 \delta^3(p - q),\end{aligned}\quad (3.41)$$

aplicando la delta de Dirac donde se cancelara una integral y todo lo que era q pasa a ser p como:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \\ \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} e^{ip \cdot y} u_s(p) \bar{u}_s(p) (2\pi)^3,\end{aligned}\quad (3.42)$$

la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot x} e^{ip \cdot y} u_s(p) \bar{u}_s(p), \\ \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(y-x)} \sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p),\end{aligned}\quad (3.43)$$

el termino se puede reemplazar $\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) = m + p_\mu\gamma^\mu$ se demuestra esta igualdad en el apéndice A.4.1 reemplazando se obtiene:

$$\langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(y-x)} m + p^\mu \gamma^\mu, \quad (3.44)$$

$$\langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2E_p} e^{-ip(y-x)} \text{ con } x^0 > y^0. \quad (3.45)$$

El significado físico de la anterior expresión 3.45 da cuentas de la amplitud de probabilidad de la propagación de electrones con la condición de que la coordenada temporal de x sea posterior a la coordenada temporal de y . Como se esta estudiando a el campo para los fermiones, de alguna forma no esta completo a lo que se quiere llegar ya que no están presentes los positrones, es necesario realizar el siguiente producto interior $\langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle$, recordando que $\psi(x) = \psi^+ + \psi^-$ y $\bar{\psi}(y) = \bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-$, entonces:

$$\langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) (\psi^+ + \psi^-) | 0 \rangle. \quad (3.46)$$

Aplicando los operadores en el vacío se expresan los campos como:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) | 0 \rangle, \\ &= \left\langle 0 \left| \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) \bar{v}_r(q) e^{-iq \cdot y} \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x} \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.47)$$

se debe tener presente que $\bar{\psi}(y)$ es una matriz fila $(y_a \ y_b \ y_c \ y_d)$ y $\psi(x)$ es una matriz

columna $\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{pmatrix}$, por tanto, al multiplicar estas dos matrices el resultado va a ser un

numero, por lo que seria inconsistente con lo que se esta trabajando ya que los campos en este ámbito son matrices, por tanto debemos hablar de componentes de los campos a, b así:

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b^+(y) \psi_a^-(x) | 0 \rangle, \quad (3.48)$$

reemplazamos:

$$\left\langle 0 \left| \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} d_r(q) (\bar{v}_r(q))_b e^{-iq \cdot y} \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d_s^\dagger(p) (v_s(p))_a e^{ip \cdot x} \right| 0 \right\rangle, \quad (3.49)$$

por propiedades todo lo que no son operadores pueden salir del producto interior, así:

$$\sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-iq \cdot y} e^{ip \cdot x} (\bar{v}_r(q))_b (v_s(p))_a \langle 0 | d_r(q) d_s^\dagger(p) | 0 \rangle, \quad (3.50)$$

se tiene nuevamente el termino $\langle 0 | d_r(q) d_s^\dagger(p) | 0 \rangle$ y por propiedades de anticonmutación utilizamos la relación:

$$\langle 0 | d_r(q) d_s^\dagger(p) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p - q) \delta_{sr}, \quad (3.51)$$

realizando lo pertinente como anteriormente ya se realizo en la ecuación 3.40 hasta 3.43, donde se simplifica un $(2\pi)^3$ que multiplica con uno que divide, posterior aplicando el delta de kronecker quedando una sola sumatoria y cambiamos r por s , se procede aplicar el Delta de Dirac simplificando una integral y procediendo a cambiar a q por p procediendo a operar las raíces y factorizar las exponenciales, la expresión se reduce a:

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b^+(y) \psi_a^-(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(y-x)} \sum_{s=1}^2 (v_s(\bar{p}) v_s(p))_{ba}, \quad (3.52)$$

anteriormente se mostró $\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = m + p_\mu \gamma^\mu$, análogamente se puede mostrar utilizando

$$v_1(p) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2(p) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

que la expresión $\sum_{s=1}^2 \bar{v}_s(p) v_s(p) = p_\mu \gamma^\mu - m$, donde se obtiene:

$$\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{2E_p} e^{-ip(y-x)} \text{ con } y^0 > x^0. \quad (3.54)$$

El significado físico de la anterior expresión 3.54, da cuentas de la amplitud de probabilidad de la propagación de positrones con la condición de que la coordenada temporal de y sea posterior a la coordenada temporal de x .

Recalcando que en la notación utilizada las componentes temporales son:

$$x^0 = t', \quad y^0 = t. \quad (3.55)$$

Se debe solucionar ahora las función de Green's, incluir un ordenamiento temporal es muy acertado para que el termino sea causal:

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle, \quad (3.56)$$

donde relaciona los dos productos interiores anteriores calculados, en función de la función paso de Heaviside, así:

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \theta(t - t') \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(t - t') \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle, \quad (3.57)$$

donde la función de Heaviside es 1 si la entrada es positiva y 0 si la entrada es negativa, así:

$$\theta(t - t') = \begin{cases} 1 & t - t' \succ 0 \\ 0 & t - t' \prec 0 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \theta(t - t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)i} \frac{e^{-\omega(t-t')}}{\omega - i\epsilon}, \quad (3.58)$$

reemplazando respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)i} \frac{e^{-\omega(t-t')}}{\omega - i\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2E_p} e^{-ip(y-x)} \\ &\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)i} \frac{e^{-\omega(t-t')}}{\omega - i\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{2E_p} e^{ip(y-x)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{\omega - i\epsilon} e^{-i(E_p - \omega)(t-t') - i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \\ &\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{\omega - i\epsilon} e^{i(E_p - \omega)(t-t') - i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

sustituyendo $E_p - \omega = p_0$ entonces $-d\omega = dp_0, d\omega = -dp_0, \int_{-\infty}^{\infty} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0$, se obtiene:

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi) i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{E_p - p_0 - i\epsilon} e^{-ip_0(t-t') - i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \\ - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi) i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{E_p - p_0 - i\epsilon} e^{-ip_0(t-t') - i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}, \quad (3.61)$$

aplicando paridad a la segunda expresi3n $p_0 = -p_0$ y $\vec{p} = -\vec{p}$, esta no afecta a la integral:

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi) i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{E_p - p_0 - i\epsilon} e^{-ip_0(t-t') - i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \\ - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi) i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{E_p + p_0 - i\epsilon} e^{-ip_0(t-t') + i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}, \quad (3.62)$$

factorizando:

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2iE_p} e^{ip(y-x)} \left[\frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{E_p - p_0 - i\epsilon} - \frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{E_p + p_0 - i\epsilon} \right] \right], \quad (3.63)$$

realizando la resta de fracciones haciendo $p_\mu \gamma^\mu = E_p \gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$, en el numerador se tiene:

$$\text{NUM: } [(E_p \gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m)(E_p + p_0 - i\epsilon) - (E_p \gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m)(E_p - p_0 - i\epsilon)], \\ \text{NUM: } 2E_p(p_\mu \gamma^\mu + m) + 2(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m)i\epsilon. \quad (3.64)$$

Para el denominador:

$$\text{DEN: } (E_p - p_0 - i\epsilon)(E_p + p_0 - i\epsilon) = E_p^2 - p_0^2 - i\epsilon 2E_p. \quad (3.65)$$

Reemplazando:

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2iE_p} e^{ip(y-x)} \left[\frac{2E_p(p_\mu \gamma^\mu + m) + 2(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m)i\epsilon}{E_p^2 - p_0^2 - i\epsilon 2E_p} \right], \quad (3.66)$$

con $-E_p^2 = -\vec{p}^2 - m^2$,

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2iE_p} e^{ip(y-x)} \left[\frac{2E_p(p_\mu \gamma^\mu + m)}{-\vec{p}^2 - m^2 + p_0^2 + i\epsilon 2E_p} + \frac{2(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m)i\epsilon}{-\vec{p}^2 - m^2 + p_0^2 + i\epsilon 2E_p} \right], \quad (3.67)$$

aplicando el limite a la expresión y factorizando:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(y-x)} \frac{i(p_\mu \gamma^\mu + m)}{-\vec{p}^2 - m^2 + p_0^2 + i\epsilon 2E_p} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(y-x)} \frac{i(p_\mu \gamma^\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon 2E_p}, \quad (3.68)$$

el denominador divergen cuando $p_0^2 = \vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon 2E_p$ por tanto se iguala a cero el denominador y se encuentran cuales son los valores en que esta integral diverge, así:

$$\begin{aligned} p_0^2 &= \vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon 2E_p, \\ p_0 &= \pm \sqrt{E_p^2 - i\epsilon 2E_p}, \\ p_0 &= \pm E_p \sqrt{1 - \frac{i\epsilon 2}{E_p}}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

expandiendo la raíz: $p_0 = \pm E_p \mp i\epsilon$, tal cual como se observa en la figura 3.1 los polos están uno por encima del eje real negativo y otro por la parte inferior del eje real positivo. Obteniendo:

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p_\mu \gamma^\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ip(y-x)} = S_F(x - y) \quad (3.70)$$

$$S_F = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & \text{para } x^0 > y^0 \\ \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & \text{para } x^0 < y^0 \end{cases}. \quad (3.71)$$

Finalmente se llega a la expresión que interpreta físicamente como el propagador libre de los fermiones el cual da cuentas de la amplitud de probabilidad de detectar fermiones desde un punto inicial hasta un punto final en el espacio de Minkowski y esta solución satisface la ecuación de movimiento de Dirac.

3.3 El Propagador del Fotón

De acuerdo al carácter bosónico vectorial de los campos electromagnéticos, el producto T-ordenado se define como:

$$T[A^\mu(x), A^\nu(y)] \equiv \theta(x^0 - y^0) A^\mu(x) A^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) A^\nu(y) A^\mu(x), \quad (3.72)$$

su valor esperado en el vacío es el correspondiente propagador de Feynman $D_F^{\mu\nu}(x - y)$, utilizando las reglas de conmutación 2.61, con $(\xi = 1)$. Al igual que en el caso del

propagados de K-G y el propagador de Dirac, se resuelve análogamente el propagador vectorial. Es correcto afirmar:

$$\begin{aligned}
iD_F^{\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle 0|T[A^\mu(x), A^\nu(y)]|0\rangle, \\
&= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\sum_{s=0}^3 g_{ss} \epsilon_r^\mu(\vec{p}) \epsilon_s^{\nu*}(\vec{p}) \right) \\
&\quad \left\{ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right\}, \\
&= -ig^{\mu\nu} \Delta_F(x-y)|_{m=0} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}. \tag{3.73}
\end{aligned}$$

El primer termino con $x^0 > y^0$ describe un fotón creado en el punto y^μ y aniquilado en x^μ , mientras que el segundo termino cuando $y^0 > x^0$ corresponde a la amplitud de probabilidad de que el fotón sea creado en x^μ y aniquilado en y^μ sin embargo la interpretación física es mas sutil que en el caso de K-G y Dirac.

La Teoría perturbativa en la QFT es un enfoque que se utiliza para calcular cantidades físicas como amplitudes de dispersión y correcciones a las masas y acoplamientos en términos de una expansión en potencias de una cantidad pequeña llamada constante de acoplamiento. En esencial cuando se realizan correcciones cuánticas a las masas de las partículas, los métodos convencionales se están quedando cortos ya que la comparación entre la predicción teoría y la predicción experimental deben ser muy semejantes, a la hora de resolver integrales maestras con múltiples tramos y múltiples loops que es donde se encuentra la diferencia mas estrecha en ambos resultados. A la hora de realizar los cálculos, debido a la complejidad de las integrales y la tardanza de ejecución en las implementaciones computacionales, se han implementado nuevas técnicas para optimizar, tener trazabilidad y eficiente a la hora de abarcar estos desarrollos, las técnicas estudiadas (LTD y FFT) se desarrollan a continuación.

3.4 Teorema de Árbol de Feynman (FTT)

Si tenemos una QFT local y unitaria en el espacio de Minkowski es una candidata opcional para aplicar el teorema FTT [42, 43], relacionando amplitudes de dispersión perturbativas y funciones de Green a nivel loop con el mismo orden a nivel árbol. Esta

relación se deriva de una relación básica y elemental entre integrales de loop e integrales de espacio de fase con múltiples cortes.

Este teorema establece que en QFT renormalizables osea en la que las divergencias ultravioleta asociadas con los cálculos perturbativos puedan ser absorbidas sistemáticamente en una redefinición finita y finitamente parametrizada de las constantes físicas de la teoría. Las amplitudes de dispersión de partículas en el limite de altas energías (momentum grande) están dominadas por los diagramas de Feynman de árbol que no contienen ciclos de partículas virtuales. Este teorema simplifica los cálculos en las teorías donde es empleado ya que permite enfocarse en los diagramas de árbol para calcular procesos de dispersión a alta energía.

El FTT parte de considerar el integrando $I(k)$ la integral de loop con momento k puede escribirse como la productoria de los propagadores de Feynman F por una función regular $N(k)$ como:

$$I(k) = N(k) \prod_i F(k + p_i, m_i), \quad (3.74)$$

donde, p_i representa la combinación lineal de los momentos externos, m_i son las masas de las partículas físicas a las que corresponde el propagador. Denotada así:

$$F_i \equiv F(k + p_i, m_i) = \frac{i}{(k + p_i)^2 - m_i^2 + i\varepsilon}. \quad (3.75)$$

Pudiendo descomponer el propagador en fracciones parciales como:

$$F_i = \frac{i}{2E_i} \left(\frac{1}{k^0 - (-p_i^0 + E_i - i\varepsilon)} - \frac{1}{k^0 - (-p_i^0 - E_i + i\varepsilon)} \right),$$

$$E_i = \sqrt{(\vec{k} + \vec{p}_i)^2 + m_i^2}, \quad (3.76)$$

si se reemplazan las funciones de Green de Feynman por las funciones de Green avanzadas se obtiene:

$$A_i = \frac{i}{2E_i} \left(\frac{1}{k^0 - (-p_i^0 + E_i + i\varepsilon)} - \frac{1}{k^0 - (-p_i^0 - E_i + i\varepsilon)} \right). \quad (3.77)$$

La diferencia de las funciones de Green de Feynman y la avanzada da como resultado

una función- Δ de modo que:

$$\Delta_i^\ell \equiv F_i - A_i = \frac{i}{2E_i} \left(\frac{1}{k^0 - (-p_i^0 + E_i) + i\varepsilon} - \frac{1}{k^0 - (-p_i^0 + E_i) - i\varepsilon} \right),$$

$$\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{2\pi}{2E_i} \delta(k^0 - (-p_i^0 + E_i)). \quad (3.78)$$

La función (Δ_i^ℓ) cancela la integral- k^0 y corte el loop estableciendo el momento del propagador original F_i en su capa de masa. La estructura del numerador de este propagador se puede factorizar en un producto de funciones de onda de la partícula correspondiente. Donde la integral de loop original se puede escribir como una suma de gráficos de árbol con una integración del espacio de fase, reemplazando a la integral de loop. Se obtiene:

$$0 = \int N(k) \prod_i^n A_i. \quad (3.79)$$

Como $\Delta_i^\ell = F_i - A_i$ entonces $A_i = F_i - \Delta_i^\ell$. El FTT establece que la integral de loop sobre $I(k)$, se puede reemplazar una integral sobre una suma de términos, donde en cada termino uno o mas propagadores F_i se reemplazan por funciones- Δ así:

$$0 = \int N(k) \left[-\sum \Delta^\ell F \dots + \sum \Delta^\ell \Delta^\ell F \dots - \dots + (-1)^n \sum \Delta^\ell \dots \Delta^\ell F \right]. \quad (3.80)$$

Para utilizar el FTT en una evaluación numérica de integrales de loop que involucran sólo números reales, en algún momento tenemos que establecer los términos $i\varepsilon$ en los denominadores en cero. Usando la identidad

$$\frac{1}{x - a \pm i\varepsilon} = PV \frac{1}{x - a} \mp i\pi \delta(x - a), \quad (3.81)$$

con PV como valor principal de Cauchy's, reescribiendo la ecuación 3.75 se tiene:

$$F_i = p_i + \frac{1}{2}\Delta_i^\ell + \frac{1}{2}\Delta_i^u,$$

$$p_i = PV \frac{i}{(k + p_i)^2 - m^2}, \quad \Delta_i^u = \frac{2\pi}{2E_i} \delta(k^0 - (-p_i^0 - E_i)), \quad (3.82)$$

se puede sustituir cualquier F_i para obtener una versión de FTT siendo mas adecuado

para una integración numérica directa, entonces:

$$\begin{aligned} \int I(k) = \int N(k) & [\Delta_i^\ell p_2 \cdots p_n + p_1 \Delta_2^\ell p_3 \cdots p_n + \cdots + p_1 \cdots p_{n-1} \Delta_n^\ell] \\ & + \int N(k) \sum_{U+L \geq 2} \frac{1}{2^{L+U}} (1 - (-1)^L) \Delta^{\ell^L} \Delta^{\ell^U} P^P, \end{aligned} \quad (3.83)$$

la suma recorre todas las posibles permutaciones, donde las funciones $\Delta^{\ell^L} \Delta^{\ell^U} P^P$ aparecen (L, U, P) veces, escribiendo explícitamente en la ecuación 3.83 los términos que contienen una función Δ^ℓ . Después de integrar sobre k^0 todos los términos se pueden interpretar como gráficos a orden árbol con una partícula entrante y saliente adicional y una integral de espacio de fase adicional sobre el momento de esta partícula. Esta integral ahora se puede sacar de los gráficos individuales y ponerla delante de la amplitud, junto con las integrales del espacio de fases sobre las partículas externas que están presentes en un cálculo de sección transversal. Como se observa en la figura 3.4. Si los momentos de dos o más propagadores entran simultáneamente en la capa en la integración de momento, los términos con más de una función- Δ en la ecuación 3.83 no desaparecen. Estas dan lugar a una mayor contribución al resultado final, pueden evaluarse con bastante facilidad, ya que después de la integración k^0 , las funciones- Δ restantes reducen la dimensión de integración a dos o menos.

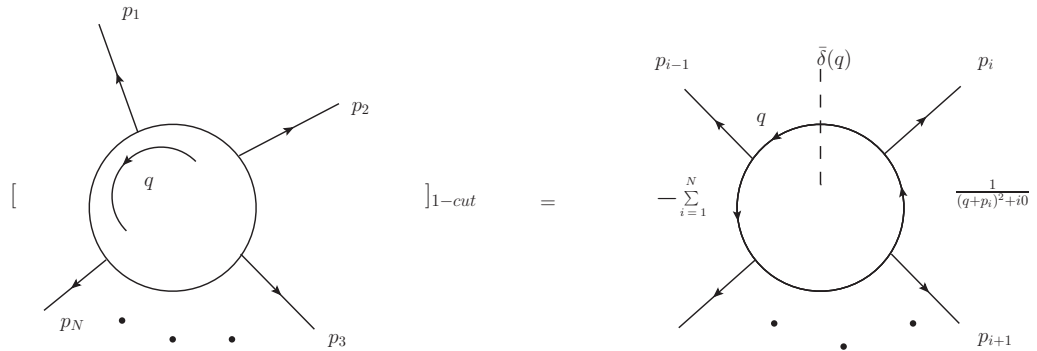


Figura 2. La contribución de un solo corte del teorema del árbol de Feynman a la integral escalar de N puntos de un loop. Representación gráfica como suma de N integrales básicas de espacio de fase de corte único.

3.5 Teorema de la Dualidad Loop-Árbol (LTD) a Un-Loop

Esta sección tiene como objetivo revisar y exponer las ideas principales que impone el método de la LTD. El formalismo de la dualidad loop-árbol ha sido utilizado en teorías cuánticas de campo para simplificar cálculos y obtener resultados fácilmente interpretables, algunas Teorías en las que sea aplicado este formalismo son: Teoría Cuántica de Campos Electrodinámica (QED) aplicando la dualidad en cálculos perturbativos como cálculos a las auto-energías para relacionar contribuciones de diagramas de loop con contribuciones de diagramas de árbol. La Cromodinámica Cuántica (QCD) y la Teoría Electrodébil [44]. Considerando una integral escalar de un loop con N-partículas dado por la expresión:

$$L^{(1)}(p_1, \dots, p_N) = \int_{\ell} \prod_{i=1}^N G_F(q_i). \quad (3.84)$$

El cuadri-momento de las líneas externas está denotado por p_i , con $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ en dirección horaria, o sea en sentido a la dirección de las manecillas del reloj y salientes tal como se observa en la figura 3.5, se utilizan integrales dimensionalmente regularizadas [45, 3] con el número de dimensiones espacio-temporales igual a d , se introduce la siguiente notación abreviada:

$$\int_{\ell} \bullet = -i\mu^{4-d} \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \bullet. \quad (3.85)$$

La LTD y el FTT son dependientes de la estructura de polos de Feynman y del propagador avanzado, los cuales se representan por:

$$G_F(q_i) = \frac{1}{q_i^2 - m_i^2 + i0}, \quad G_A(q_i) = \frac{1}{q_i^2 - m_i^2 - i0q_{i,0}}, \quad (3.86)$$

donde q_i el cuadri-momento en d dimensiones, cuya energía (componente de tiempo) es $q_{i,0}$. Los polos de ambos tipos de propagadores en el plano complejo $q_{i,0}$ están situados en:

$$q_{i,0}^F = \pm \sqrt{\vec{q}_i^2 - m_i^2 - i0}, \quad q_{i,0}^A \approx \pm \sqrt{\vec{q}_i^2 - m_i^2 + i0}, \quad (3.87)$$

respectivamente. Donde, el polo con energía positiva del propagador de Feynman está ligeramente desplazado por debajo del eje real y el polo con energía negativa esta ligeramente desplazado por encima del eje real, mientras que ambos polos (independientes del signo de la energía) del propagador avanzado están ligeramente desplazados por encima del eje real. Usando la identidad elemental 3.81, se encuentra la siguiente relación entre los dos propagadores:

$$G_A(q_i) = G_F(q_i) + \tilde{\delta}(q_i), \quad \tilde{\delta}(q_i) = 2\pi\theta(q_i)\delta(q_i^2 - m_i^2). \quad (3.88)$$

Vale la pena mencionar que la presencia de la función de Heaviside restringe el dominio de integración a la región de energía positiva (es decir, $q_{i,0} > 0$). Dado que LTD se deriva mediante la aplicación del teorema del residuo de Cauchy, la integración $d - 1$ dimensional restante se realiza sobre los hiperboloides directos en la capa definidos por la solución de $G_F(q_i)^{-1} = 0$ con $q_{i,0} > 0$, estos hiperboloides en la capa de masa degeneran en conos de luz cuando las partículas internas no tienen masa. Ahora para la integral de loop avanzada partiremos de la definición habitual de la integral de loop 3.84 reemplazando a Feynman por propagadores avanzados, así:

$$L_A^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_N) = \int_{\ell} \prod_{i=1}^N G_A(q_i). \quad (3.89)$$

Después, en el plano complejo inferior cerrando un contorno y calculando la integral con el método del residuo, se tiene que:

$$L_A^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_N) = 0, \quad (3.90)$$

el resultado de la ecuación 3.90 es acorde con el teorema de Cauchy, ya que este establece que si tenemos un contorno cerrado en el plano complejo y no existen polos o singularidades dentro de este contorno, entonces la integral de la función holomorfa en este contorno es igual a cero, y como observamos en la figura 3.1 los polos del propagador avanzado están por encima del eje real. podemos entonces escribir la expresión:

$$L^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_N) = - \left[L_{1-cut}^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_N) + \dots + L_{N-cut}^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_N) \right]. \quad (3.91)$$

Esta ecuación es el FFT en un loop. Relaciona la integral de un loop con integrales de corte múltiple. Cada función delta $\tilde{\delta}(q_i)$ en los múltiples términos de corte, reemplaza al correspondiente propagador de Feynman, cortando la línea interna con momento q_i . En lugar de partir de $L_A^{(1)}$, se aplica directamente el teorema del residuo al cálculo de $L^{(1)}$. Cerrando el contorno de integración en el infinito en la dirección del eje imaginario negativo, Según el teorema de Cauchy [41], se toma un polo de cada uno de los N propagadores de Feynman.

$$L^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_N) = -2\pi i \int_{\ell_1} \sum \text{Res}_{\{\text{Im} q_{i,o} < 0\}} \left[\prod_{j=1}^N G_F(q_j) \right]. \quad (3.92)$$

Definiendo

$$\text{Res}_{\{\text{Im} q_{i,o} < 0\}} \frac{1}{q_i^2 - m_i^2 + i0} = \int d\ell_{1,0} \delta_+(q_i^2 - m_i^2). \quad (3.93)$$

El valor del resto de los propagadores en el residuo se muestra como:

$$\left[\prod_{j \neq i} G_F(q_j) \right]_{\{q_i^2 - m_i^2 = -i0\}} = \prod_{j \neq i} \frac{1}{q_j^2 - m_j^2 - i0\eta(q_j - q_i)}, \quad (3.94)$$

donde η es un cuadri-vector de tipo futuro:

$$\eta = (\eta_0, \vec{\eta}), \quad \eta_0 \geq 0, \eta^2 = \eta_\mu \eta^\mu \geq 0 \quad (3.95)$$

obteniendo finalmente:

$$L^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_N) = - \sum_{i=1}^N \int_{\ell} \tilde{\delta}(q_i) \prod_{j \neq i} G_D(q_i; q_j), \quad (3.96)$$

con:

$$G_D(q_i; q_j) = \frac{1}{q_j^2 - m_j^2 - i0\eta(q_j - q_i)} \quad (3.97)$$

$k_{ji} = (q_j - q_i)$, los momentos internos se definen por:

$$q_i = \ell + k_i, \quad k_i = \sum_{j=1}^i p_j \quad (3.98)$$

debe satisfacer la conservación del momento por lo que es correcto imponer que:

$$k_N = 0 \tag{3.99}$$

La representación dual que se evidencia en la ecuación 3.96 se elabora sumando todos los cortes simples posibles del diagrama de loop original, en este tratamiento, el propagador asociado con la línea en la capa de masa se reemplaza por la ecuación 3.88 donde los propagadores de Feynman restantes sin cortes se convierten en propagadores duales. Al tener estos propagadores duales se modifica la prescripción $i0$ ya que depende del signo del producto entre $\eta \cdot k_{ji}$. La presencia del vector η es una consecuencia del uso del teorema del residuo y del hecho de que los residuos en cada uno de los polos no son cantidades invariantes de Lorentz. como se observa en la figura 3.5 La invariancia de Lorentz de la integral de loop se recupera después de sumar todos los residuos.

La diferencia entre LTD y el Teorema del árbol de Feynman (FTT), donde la integral de loop se obtiene después de sumar todos los cortes m posibles, se codifica en la prescripción dual, donde las correlaciones que provienen de cortes múltiples en el FTT son recuperadas en la LTD considerando solo cortes únicos con la prescripción $i0$ modificada. En otras palabras, tener prescripciones diferentes para cada corte es una condición necesaria para la consistencia del método. Como se discutió en la referencia [46]. Diagramáticamente al utilizar el FTT se observar que para el diagrama mas simple de un loop con dos patas externas es necesario tres cortes a nivel árbol generalmente en este teorema se realizan $N + 1$ cortes, donde N es el numero de patas externas, mientras que en la LTD solo son necesario N cortes esto reduce los cálculos significativamente y la eficiencia computacional aumenta, visto en la tabla 3.5

FTT:

$$\begin{array}{c}
\text{FTT:} \\
\begin{array}{c}
\text{Diagram 1: A circle with a clockwise arrow labeled } q. \text{ External lines } p_1 \text{ (left) and } p_2 \text{ (right).} \\
= - \text{Diagram 2: A circle with a clockwise arrow. Top vertical dashed line labeled } \frac{1}{(q+p_1)^2 + i0}. \text{ Bottom vertical dashed line labeled } \tilde{\delta}(q). \\
- \text{Diagram 3: A circle with a clockwise arrow. Top vertical dashed line labeled } \tilde{\delta}(q). \text{ Bottom vertical dashed line labeled } \frac{1}{(q-p_1)^2 + i0}. \\
- \text{Diagram 4: A circle with a clockwise arrow. Top vertical dashed line labeled } \tilde{\delta}(q+p_1). \text{ Bottom vertical dashed line labeled } \tilde{\delta}(q).
\end{array}
\end{array}$$

Duality:

$$\begin{array}{c}
\text{Duality:} \\
\begin{array}{c}
\text{Diagram 1: A circle with a clockwise arrow labeled } q. \text{ External lines } p_1 \text{ (left) and } p_2 \text{ (right).} \\
= - \text{Diagram 2: A circle with a clockwise arrow. Top vertical dashed line labeled } \frac{1}{(q+p_1)^2 - i0\eta p_1}. \text{ Bottom vertical dashed line labeled } \tilde{\delta}(q). \\
- \text{Diagram 3: A circle with a clockwise arrow. Top vertical dashed line labeled } \tilde{\delta}(q). \text{ Bottom vertical dashed line labeled } \frac{1}{(q-p_1)^2 + i0\eta p_1}.
\end{array}
\end{array}$$

Figura 3. Función de dos puntos, comparación diagramática utilizando técnicas como FTT y LTD, para cortes a nivel árbol.

Además de la comprensión matemática del origen de las singularidades mediante el uso de LTD, una de las aplicaciones más prometedoras es el posible cálculo de procesos de dispersión en NLO directamente en cuatro dimensiones espacio-temporales sin regularización dimensional (DREG). También se ha mostrado en la referencia [47] que uno de los ingredientes para construir las integrales $4D$ son las constantes de renormalización. De hecho, incluso si algunas integrales desaparecen a nivel integral, son importantes para la cancelación local de singularidades y la definición de cantidades renormalizadas en el formalismo LTD.

Rank	Tensor Pentagon	Real Part	Imaginary Part	time [s]
2	LoopTools	-1.86472×10^{-8}		
	SecDec	$-1.86471(2) \times 10^{-8}$		45
	LTD	$-1.86462(26) \times 10^{-8}$		1
3	LoopTools	1.74828×10^{-3}		
	SecDec	$1.74828(17) \times 10^{-3}$		505
	LTD	$1.74808(283) \times 10^{-3}$		1
2	LoopTools	-1.68298×10^{-6}	$+i 1.98303 \times 10^{-6}$	
	SecDec	$-1.68307(56) \times 10^{-6}$	$+i 1.98279(90) \times 10^{-6}$	66
	LTD	$-1.68298(74) \times 10^{-6}$	$+i 1.98299(74) \times 10^{-6}$	36
2	LoopTools	-8.34718×10^{-2}	$+i 1.10217 \times 10^{-2}$	
	SecDec	$-8.33284(829) \times 10^{-2}$	$+i 1.10232(107) \times 10^{-2}$	1501
	LTD	$-8.34829(757) \times 10^{-2}$	$+i 1.10119(757) \times 10^{-2}$	38

tabla 3.5 Resultados tiempo de ejecución del programa implementando la LTD VS LoopTools [48] y SecDec [49]. Figura tomada de LOTTY [20]

Ventajas que a suministrado el formalismo de la LTD al ser implementada en cálculos de física de partículas se evidencian en la eficiencia computacional: Se implemento en Mathematica un paquete denomino Lotty [20] centrado en la evaluación de amplitudes de dispersión siguiendo las ideas de la novedosa formulación de la LTD. Las rutinas implementadas en Lotty aplican de manera directa y sistemática las ideas desarrolladas en las referencias [50, 19, 51]. Para ilustrar la implementación de LTD descrita en este capítulo, las funciones principales de Lotty para encontrar la representación dual de integrandos de Feynman de múltiples loops junto con la descomposición de amplitudes de dispersión en dos y tres loops, puede desarrollarse utilizando dos enfoques diferentes el enfoque convencional y el enfoque de LTD. En el enfoque convencional se deben realizar integrales de momento para cada diagrama de Feynman individualmente, lo que puede ser costo a la otra de ejecución si hay muchos diagramas involucrados. El enfoque de la LTD reutiliza las expresiones matemáticas y realiza las integrales de momento para los loop y árbol por separado. la eficiencia computacional del formalismo de LTD es la capacidad de reutilizar y simplificar los cálculos en comparación al enfoque

convencional, especialmente cuando hay múltiples diagramas de Feynman involucrados, como notamos en la tabla 3.5.

4. Conclusiones

En el Modelo Estándar las partículas libres son descritas clasificando sus propiedades intrínsecas, como la masa, el espín y la carga eléctrica. Este modelo es una teoría de campo cuántico donde cada partícula tiene asociada un campo que es función de las coordenadas del espacio-tiempo y que obedece ecuaciones de movimiento derivadas a partir del Lagrangiano usando el principio de mínima acción. Las ecuaciones de movimiento incluyen: la ecuación de Klein-Gordon para bosones de espín 0, la ecuación de Dirac para fermiones con espín $\frac{1}{2}$, las ecuaciones de Maxwell y Proca para partículas con espín 1 sin masas y masivas respectivamente. Los fermiones al ser estados anti-simétricos bajo el intercambio de partículas obedecen la estadística de Fermi-Dirac, mientras que los bosones son estados simétricos que obedecen la estadística de Bose-Einstein. Las interacciones entre los distintos campos que representan a las partículas no pueden ser arbitrarias, los términos de interacción que se pueden incluir en el Lagrangiano del SM están restringidos fuertemente por dos principios: el principio gauge y la renormalizabilidad de la teoría. Se debe como consecuencia garantizar que los términos de interacción no posean dimensiones de masa mayor a cuatro para que la teoría sea renormalizable, pero además se requiere que estos términos sean explícitamente invariantes de Lorentz y de las simetrías internas asociadas a las interacciones electro-magnética, débil y fuerte, a saber $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$ respectivamente.

El SM proporciona un marco teórico coherente para describir las propiedades y comportamientos de los observables físicos en el contexto de la QFT, entre los que se encuentra el propagador libre que representa la probabilidad de que una partícula se propague de un punto del espacio-tiempo a otro sin violar el principio de causalidad. En el cálculo analítico de los propagadores (fermiónico, bosónico vectorial y bosónico escalar) usando la prescripción de Feynman, el contorno de integración se define de tal forma que las soluciones de energía positiva o negativa representan una propagación hacia el futuro o invertida hacia atrás en el tiempo respectivamente. La solución de energía negativa es necesaria en una teoría cuántica relativista para incluir la existencia de las anti-partículas en el modelo, contrario a lo que ocurre en las teorías clásicas donde la información física relevante está incluida únicamente en la función de Green retardada. La prescripción de Feynman preserva la simetría de Lorentz, esta es

la clave para garantizar que los resultados obtenidos sean consistentes con los principios de la relatividad especial, sobretodo asegurando que no se viole el principio de causalidad en la amplitud obtenida para los propagadores, imponiendo que las partículas no puedan propagarse mas rápido que la velocidad de la luz en el vacío con una probabilidad distinta de cero, como ocurre con las expresiones obtenidas para los propagadores en la mecánica cuántica no relativista.

Si se incluyen correcciones cuánticas al propagador, en forma de loops virtuales, entonces aparecen divergencias infrarrojas y ultravioletas que usualmente se remueven utilizando un procedimiento de regularización dimensional y una posterior renormalización de las divergencias. Sin embargo, estos métodos son consistentes hasta cierto orden perturbativo que no supera los tres-loops. Para cálculos de altos ordenes, el cálculo usual de Feynman se hace altamente ineficiente implicando la evaluación de miles de integrales de Feynman con estructuras analíticas desconocidas. Para intentar solucionar este problema se recurre a métodos alternativos basados en los teoremas FTT y LTD, que permiten la simplificación de los cálculos, especialmente en el contexto de las amplitudes de dispersión, donde se explota al máximo los teoremas integrales del análisis complejo. La principal ventaja de utilizar dichos teoremas se encuentra en los cálculos al orden de un-loop, ya que la LTD permite reducir el orden de las amplitudes en un orden perturbativo, escribiendo así los diagramas de un-loop en términos de diagramas a nivel árbol que no contienen divergencias UV. Además el método esta pensado de tal forma que las integrales se resuelven directamente en cuatro dimensiones y luego se llevan a un espacio Euclidiano donde se evitan divergencias cinemáticas adicionales. Adicionalmente, tiene como ventaja la eficiencia computacional en el calculo de los observables. Si se compara con otros métodos numéricos para la evaluación de integrales de Feynman con multiples loops, como es el caso de **SecDec** (Sector Decomposition Method) y **LoopTools** (Passarino-Veltman Method) se observa, con ayuda del programa **lotty** que se realizan los cálculos en la parte real los tiempo de ejecución tienen diferencias significativas ya que la implementación en LTD es de 1 s para dos y tres loops en comparación con SecDec que para dos loops es de 45 s y para tres loops de 550 s, es donde ve el problema de realizar correcciones cuánticas a mas de 3 ordenes de los métodos convencionales como SecDec. Finalmente cuando se emplea la parte compleja se nota que el tiempo de ejecución es mayor para el caso de dos y tres loops significativamente, dándole éxito a la implementación de esta técnica.

Referencias

- [1] L. García-Tabarés, “El desarrollo de tecnologías de aceleradores de partículas en el ciemat y el cedex,” *Revista Digital del Cedex*, no. 178, pp. 47–47, 2015.
- [2] I. García García, “Future linear colliders detector r&d, jet reconstruction and top physics potential,” 2016.
- [3] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, “Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter,” tech. rep., Univ. Nacional, La Plata, 1972.
- [4] J. F. Ashmore, “A method of gauge-invariant regularization,” *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, vol. 4, pp. 289–290, 1972.
- [5] A. R. Fazio, P. Mastrolia, E. Mirabella, and W. J. Torres Bobadilla, “On the four-dimensional formulation of dimensionally regulated amplitudes,” *The European Physical Journal C*, vol. 74, no. 12, p. 3197, 2014.
- [6] I. Bierenbaum, S. Buchta, P. Draggiotis, I. Malamos, and G. Rodrigo, “Tree-loop duality relation beyond single poles,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, no. 3, pp. 1–24, 2013.
- [7] S. Buchta, “Theoretical foundations and applications of the loop-tree duality in quantum field theories,” *arXiv preprint arXiv:1509.07167*, 2015.
- [8] S. Buchta, G. Chachamis, P. Draggiotis, I. Malamos, and G. Rodrigo, “Towards a numerical implementation of the loop-tree duality method,” *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, vol. 258, pp. 33–36, 2015.
- [9] G. Rodrigo, S. Catani, T. Gleisberg, F. Krauss, and J.-C. Winter, “From multileg loops to trees (by-passing feynman’s tree theorem),” *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, vol. 183, pp. 262–267, 2008.
- [10] Z. Capatti, V. Hirschi, D. Kermanschah, and B. Ruijl, “Loop-tree duality for multiloop numerical integration,” *Physical Review Letters*, vol. 123, no. 15, p. 151602, 2019.

- [11] J. J. Aguilera-Verdugo, F. Driencourt-Mangin, J. Plenter, S. Ramírez-Uribe, G. Rodrigo, G. F. Sborlini, W. J. Torres Bobadilla, and S. Tracz, “Causality, unitarity thresholds, anomalous thresholds and infrared singularities from the loop-tree duality at higher orders,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2019, no. 12, pp. 1–12, 2019.
- [12] R. E. Cutkosky, “Singularities and discontinuities of feynman amplitudes,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 1, no. 5, pp. 429–433, 1960.
- [13] E. Tomboulis, “Causality and unitarity via the tree-loop duality relation,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2017, no. 5, pp. 1–23, 2017.
- [14] R. Runkel, Z. Ször, J. P. Vesga, and S. Weinzierl, “Integrands of loop amplitudes within loop-tree duality,” *Physical Review D*, vol. 101, no. 11, p. 116014, 2020.
- [15] R. J. Hernández-Pinto, G. F. Sborlini, and G. Rodrigo, “Towards gauge theories in four dimensions,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2016, no. 2, pp. 1–14, 2016.
- [16] G. F. Sborlini, “Loop-tree duality and quantum field theory in four dimensions,” *arXiv preprint arXiv:1601.04634*, 2016.
- [17] G. F. Sborlini, F. Driencourt-Mangin, R. J. Hernandez-Pinto, and G. Rodrigo, “Four-dimensional unsubtraction from the loop-tree duality,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2016, no. 8, pp. 1–42, 2016.
- [18] G. F. Sborlini, “Geometrical approach to causality in multiloop amplitudes,” *Physical Review D*, vol. 104, no. 3, p. 036014, 2021.
- [19] W. J. Torres Bobadilla, “Loop-tree duality from vertices and edges,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2021, no. 4, pp. 1–28, 2021.
- [20] W. J. Torres Bobadilla, “Lotty—the loop-tree duality automation,” *The European Physical Journal C*, vol. 81, no. 6, p. 514, 2021.
- [21] D. Aguilera, A. Maza, G. Liendo, and M. Niaz, “Modelos conceptuales de los estudiantes universitarios sobre la estructura atómica basados en los experimentos de thomson, rutherford y bohr/conceptual models of university students about atomic structure based on experiments of thomson, rutherford and bohr,” *Journal of Science Education*, vol. 1, no. 2, p. 112, 2000.

- [22] F. collaboration *et al.*, “Fcc-ee: the lepton collider: future circular collider conceptual design report volume 2,” *European Physical Journal Special Topics*, vol. 228, no. 2, pp. 261–623, 2019.
- [23] M. Moreno, “Aceleradores de partículas,” *Analogías y conexiones en la Física*, p. 461, 2020.
- [24] E. Reyes R and A. Fazio, “The lightest higgs boson mass of the mssm at three-loop accuracy,” *arXiv e-prints*, pp. arXiv–1901, 2019.
- [25] E. Reyes R and A. Fazio, “Higgs boson mass corrections at n3lo in the top-yukawa sector of the standard model,” *arXiv e-prints*, pp. arXiv–2301, 2022.
- [26] E. Reyes and R. Fazio, “High-precision calculations of the higgs boson mass,” *Particles*, vol. 5, no. 1, pp. 53–73, 2022.
- [27] A. Fazio and E. R. Rojas, “Vacuum stability and two loop threshold corrections to the higgs quartic coupling,” *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, vol. 267, pp. 53–59, 2015.
- [28] E. Reyes Rojas, “The higgs boson at lhc and the vacuum stability of the standard model,” *arXiv e-prints*, pp. arXiv–1511, 2015.
- [29] E. Rojas, “The higgs boson at lhc and the vacuum stability of the standard model,” *arXiv preprint arXiv:1511.03651*, 2015.
- [30] G. Salamanna, “Top quark production measurements using the atlas detector at the lhc,” tech. rep., ATL-COM-PHYS-2015-1567, 2016.
- [31] R. L. Workman and Others, “Review of Particle Physics,” *PTEP*, vol. 2022, p. 083C01, 2022.
- [32] W. Marciano and H. Pagels, “Quantum chromodynamics,” *Physics Reports*, vol. 36, no. 3, pp. 137–276, 1978.
- [33] S. Bilenky and J. Hošek, “Glashow-weinberg-salam theory of electroweak interactions and the neutral currents,” *Physics Reports*, vol. 90, no. 2, pp. 73–157, 1982.
- [34] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics: a modern development*. World Scientific Publishing Company, 2014.

- [35] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics Revised Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [36] P. Heckbert, “Fourier transforms and the fast fourier transform (fft) algorithm,” *Computer Graphics*, vol. 2, no. 1995, pp. 15–463, 1995.
- [37] M. Peskin, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [38] W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum electrodynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [39] M. Ferrero, *Fundamentos de física cuántica*. Editorial Complutense, 1996.
- [40] J. D. Bjorken and S. D. Drell, “Relativistic quantum fields,” (*No Title*), 1965.
- [41] J. García-Aguilar and J. Gómez-Izquierdo, “Cálculo de la integral escalar a un lazo $a(n\mathbb{Z})$ mediante el teorema del residuo,” *arXiv preprint arXiv:2011.01887*, 2020.
- [42] R. Feynman, “Quantum theory of gravitation,” 1963.
- [43] R. P. Feynman, “Closed loop and tree diagrams,” *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, p. 355, 1972.
- [44] N. S. Ramírez-Urbe, R. J. Hernández-Pinto, and G. Rodrigo, “Qed and qcd self-energy corrections through the loop-tree duality,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 912, p. 012013, IOP Publishing, 2017.
- [45] M. Veltman *et al.*, “Regularization and renormalization of gauge fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 44, no. 1, pp. 189–213, 1972.
- [46] S. Buchta, G. Chachamis, P. Draggiotis, I. Malamos, and G. Rodrigo, “On the singular behaviour of scattering amplitudes in quantum field theory,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2014, no. 11, pp. 1–13, 2014.
- [47] G. F. Sborlini, R. Hernandez-Pinto, and G. Rodrigo, “From dimensional regularization to nlo computations in four dimensions,” *arXiv preprint arXiv:1510.01079*, 2015.

- [48] T. Hahn, “Automatic loop calculations with feynarts, formcalc, and looptools,” *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, vol. 89, no. 1-3, pp. 231–236, 2000.
- [49] J. Carter and G. Heinrich, “Secdec: A general program for sector decomposition,” *Computer Physics Communications*, vol. 182, no. 7, pp. 1566–1581, 2011.
- [50] S. Ramírez-Uribe, R. J. Hernández-Pinto, G. Rodrigo, G. F. Sborlini, and W. J. Torres Bobadilla, “Universal opening of four-loop scattering amplitudes to trees,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2021, no. 4, pp. 1–22, 2021.
- [51] J. J. Aguilera-Verdugo, F. Driencourt-Mangin, R. J. Hernández-Pinto, J. Plenter, S. Ramírez-Uribe, A. E. Rentería-Olivo, G. Rodrigo, G. F. Sborlini, W. J. T. Bobadilla, and S. Tracz, “Open loop amplitudes and causality to all orders and powers from the loop-tree duality,” *Physical Review Letters*, vol. 124, no. 21, p. 211602, 2020.

Apéndice A

Convenciones.

A.1 Unidades y análisis dimensional

En la teoría cuántica de campos relativista, es necesario establecer los valores de las constantes propias en unidades naturales, como la velocidad de la luz en el vacío (c) y la constante reducida de Planck ($\hbar$) así:

$$c = 2.998 \times 10^8 \frac{\text{metros}}{\text{segundos}} = 1, \quad (\text{A.1})$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054572 \times 10^{-34} \text{joules} \cdot \text{segundos} = 1, \quad (\text{A.2})$$

de este modo:

$$[d^4x] = -4, \quad (\text{A.3})$$

las densidades lagrangianas tienen dimensión 4:

$$[\mathcal{L}] = 4, \quad (\text{A.4})$$

por tanto, la acción debe ser una cantidad adimensional:

$$[S] = \left[\int d^4x \mathcal{L} \right] = 0, \quad (\text{A.5})$$

también:

$$[\partial_\mu] = [p_\mu] = 1. \quad (\text{A.6})$$

De esta forma, el análisis dimensional para masa o energía si usamos $E = mc^2$ como consecuencia se tendría que las cantidades con dimensión de masa positiva (por ejemplo, el momento, p) se puede considerar como energías y las cantidades con dimensión de

masa negativa (por ejemplo, la posición, x) se considera como longitudes de esta forma:

$$[\text{Longitud}] = [\text{Tiempo}] = [\text{Energía}]^{-1} = [\text{Masa}]^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

Debemos utilizar una escala de energía apropiada, por lo que es preciso mencionar algunas relaciones de conversiones como:

$$\begin{aligned} 1eV &= 1.602 \times 10^{-19} J, \\ 1fm &= 5.07 GeV^{-1}, \\ 1m &= 5.07 \times 10^{26} GeV^{-1}, \\ 1s &= 1.52 \times 10^{24} GeV^{-1}, \\ 1Kg &= 5.61 \times 10^{26} GeV, \\ m_e &= 0.511 MeV, \\ m_p &= 938.3 MeV, \\ 1barn &= 100 fm^2. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2 tensor métrico

Aunque la esencia de la mayoría de los cálculos es independiente de los signos, al momento de realizar interpretaciones físicas es importante que el signo sea acorde, ya que esto nos permite dar una dirección correcta a la interpretación de los resultados, en este caso se utilizara la siguiente convención para la métrica de Minkowski así:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Es importante tener presente que los índices latinos son empleados para representaciones en el espacio Euclídeo, lo que es lo mismo, representa las tres componentes espaciales (x, y, z) , mientras que cuando se utilizan los índices griegos estos representan las cuatro componentes espacio-temporales del espacio de

Minkowski (t, x, y, z) . por otra parte se utilizara la notación para cuadvectores en letra cursiva y el vector se utilizara con la notación convencional así:

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\vec{x}), \quad (\text{A.10})$$

se puede notar en la expresión anterior que las componentes temporales idénticas, por lo que es propio definir el producto escalar en el espacio de Minkowski como:

$$p_\mu x^\nu = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}. \quad (\text{A.11})$$

Considerando el caso de una partícula masiva, el cuadri-momento al cuadro esta dado por:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \quad (\text{A.12})$$

A.3 Factores de normalización

Es de gran importancia conocer algunas relaciones y saber de donde surge el factor de 2π que utilizamos muy seguidamente, la relación es:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\pm 2\pi i p x}, \quad (\text{A.13})$$

esta identidad se mantiene con cualquiera de los signos; nuestra convención de signos para campos cuánticos se analiza a continuación. Para eliminar el 2π del exponente, así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\pm i p x} = 2\pi \delta(x). \quad (\text{A.14})$$

En esta tesis se realizan cálculos donde se debe ir del espacio de las coordenadas al espacio de los momentos lo que es permitido por las transformadas de Fourier en 4-dimensiones enunciarlas como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot x} f(p); \quad (\text{A.15})$$

$$(p) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x e^{i p \cdot x} f(x) \quad (\text{A.16})$$

dando como consecuencia la identidad:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p). \quad (\text{A.17})$$

Los operadores creación $a_p^\dagger$ y aniquilación a_p respectivamente deben satisfacer algunas relaciones de conmutación como:

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - p'). \quad (\text{A.18})$$

Aunque a las cantidades físicas no les importa nuestra convención de 2π , los factores de 2π tienen efectos físicos importantes. Nuestra convención de transformada de Fourier es consistente con

$$p_\mu \leftrightarrow i\partial_\mu, \quad (\text{A.19})$$

que tiene componentes espaciales $\vec{p} \leftrightarrow i\vec{\nabla}$, como en la mecánica cuántica. También utilizamos la función delta de Dirac $\delta(x)$ y la función escalón unitario de Heaviside $\theta(x)$ definidas por las expresiones:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \quad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x). \quad (\text{A.20})$$

En n dimensiones la función delta de Dirac es infinita en $x = 0$ y nula considerando x en otro valor, entonces:

$$\int d^n x \delta^{(n)}(x) = 1, \quad (\text{A.21})$$

de este modo, se debe cumplir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (\text{A.22})$$

A.4 Algebra de Dirac

Las matrices de Dirac satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Definiendo:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.23})$$

lo que lleva $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. Definiendo:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{A.24})$$

Algunas identidades útiles son:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4, \quad (\text{A.25})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4, \quad (\text{A.26})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}, \quad (\text{A.28})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \quad (\text{A.29})$$

Algunas identidades de traza útiles son:

$$\text{tr}[\gamma^\mu] = \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = \text{tr}[\gamma^5] = 0, \quad (\text{A.30})$$

además:

$$\text{tr}[1] = 4, \quad (\text{A.31})$$

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.32})$$

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \quad (\text{A.33})$$

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.34})$$

se deben tener presente las definiciones de las matrices de Pauli dadas por:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

el productos de estas matrices debe satisfacer la identidad:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k. \quad (\text{A.36})$$

Es conveniente definir las combinaciones lineales $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$; donde:

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

También podemos expresar las componentes de quiralidad de izquierda y derechas así:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi. \quad (\text{A.39})$$

A.4.1 suma de spin

Ahora vamos a mostrar que el valor de la suma de spin para partículas es equivalente

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \gamma^\mu p_\mu + m \quad (\text{A.40})$$

Partiendo de las definiciones:

$$u_1(p) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}; \quad u_2(p) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

Ahora presentamos los estados de helicidad o valores matriciales de spin así:

$$\chi_+ = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}; \quad \chi_- = \begin{bmatrix} -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

donde χ_+ representa el spin arriba $\uparrow$ y χ_- representa el spin abajo $\downarrow$, se calculan en la dirección de movimiento de un electrón o positrón con spin $\frac{1}{2}$. expresamos los espinores $u_1(p)$ y $u_2(p)$ en función de estos estados de helicidad.

$$u_1(p) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \chi_+ \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_+ \end{bmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

Como:

$$e^{i\phi}\chi_- = e^{i\phi} \begin{bmatrix} -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

$$u_2(p) = \sqrt{E_p + m} e^{i\phi} \begin{bmatrix} \chi_- \\ -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_- \end{bmatrix}. \quad (\text{A.45})$$

sabemos que: $\bar{u}_s(p) = u_s^\dagger(p)\gamma^0$, debemos calcular primero los transpuestos conjugados de los espinores:

$$u_1^\dagger(p) = \sqrt{E_p + m} \left[\chi_+^\dagger \quad \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_+^\dagger \right]. \quad (\text{A.46})$$

$$u_2^\dagger(p) = \sqrt{E_p + m} e^{-i\phi} \left[\chi_-^\dagger \quad -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_-^\dagger \right]. \quad (\text{A.47})$$

calculamos los dos términos de $u_s(p)u_s^\dagger(p)$; Para cuando $s = 1$ se obtiene:

$$u_1(p)u_1^\dagger(p) = \sqrt{E_p + m} \begin{bmatrix} \chi_+ \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_+ \end{bmatrix} \sqrt{E_p + m} \left[\chi_+^\dagger \quad \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_+^\dagger \right], \quad (\text{A.48})$$

$$u_1(p)u_1^\dagger(p) = (E_p + m) \begin{bmatrix} \chi_+\chi_+^\dagger & \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_+\chi_+^\dagger \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_+\chi_+^\dagger & \left(\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \right)^2 \chi_+\chi_+^\dagger \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Cuando $s = 2$ se tiene:

$$u_2(p)u_2^\dagger(p) = \sqrt{E_p + m} e^{i\phi} \begin{bmatrix} \chi_- \\ -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_- \end{bmatrix} \sqrt{E_p + m} e^{-i\phi} \left[\chi_-^\dagger \quad -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_-^\dagger \right], \quad (\text{A.50})$$

$$u_2(p)u_2^\dagger(p) = (E_p + m) \begin{bmatrix} \chi_-\chi_-^\dagger & -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_-\chi_-^\dagger \\ -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \chi_-\chi_-^\dagger & \left(\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \right)^2 \chi_-\chi_-^\dagger \end{bmatrix}. \quad (\text{A.51})$$

Sumando ambos terminos $u_1(p)u_1^\dagger(p) + u_2(p)u_2^\dagger(p)$ se puede notar:

$$u_1(p)u_1^\dagger(p) + u_2(p)u_2^\dagger(p) = (E_p + m) \begin{bmatrix} \chi_+ \chi_+^\dagger + \chi_- \chi_-^\dagger & \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\chi_+ \chi_+^\dagger - \chi_- \chi_-^\dagger) \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\chi_+ \chi_+^\dagger - \chi_- \chi_-^\dagger) & \left(\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \right)^2 (\chi_+ \chi_+^\dagger + \chi_- \chi_-^\dagger) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

La resolución de la identidad se puede expresar como:

$$\chi_+ \chi_+^\dagger + \chi_- \chi_-^\dagger = \mathbb{I} \quad (\text{A.53})$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad 2×2 , tambien podemos ver que $\chi_+ \chi_+^\dagger - \chi_- \chi_-^\dagger = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli y $\hat{n}$ son los vectores directores, reemplazando las expresiones anteriores nos resulta, entonces, que:

$$u_1(p)u_1^\dagger(p) + u_2(p)u_2^\dagger(p) = (E_p + m) \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & \left(\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \right)^2 \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.54})$$

podemos expresar

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = u_1(p)u_1^\dagger(p)\gamma^0 + u_2(p)u_2^\dagger(p)\gamma^0 = \left(u_1(p)u_1^\dagger(p) + u_2(p)u_2^\dagger(p) \right) \gamma^0 \quad (\text{A.55})$$

con $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$ nos resulta

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = (E_p + m) \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & \left(\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \right)^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.56})$$

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = (E_p + m) \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ \frac{|\vec{p}|}{E_p + m} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & -\left(\frac{|\vec{p}|}{E_p + m} \right)^2 \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.57})$$

sacando como factor común $\frac{1}{E_p+m}$ tenemos:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \begin{bmatrix} (E_p + m) \mathbb{I} & -|\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ |\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & -\frac{|\vec{p}|^2}{E_p+m} \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.58})$$

recordando la expresión para la energía relativista: $E_p^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$ despejando para $|\vec{p}|^2$ tenemos $|\vec{p}|^2 = E_p^2 - m^2 = (E_p - m)(E_p + m)$ en consecuencia:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \begin{bmatrix} (E_p + m) \mathbb{I} & -|\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ |\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & -(E_p - m) \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

por tanto se puede hacer una representación matricial:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \begin{bmatrix} m \mathbb{I} & 0 \\ 0 & m \mathbb{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_p \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -E_p \mathbb{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -|\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ |\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.60})$$

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = m \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} + E_p \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -|\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ |\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.61})$$

como $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \mathbb{I}_{4 \times 4}$ tenemos:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = m \mathbb{I} + E_p \gamma^0 + \begin{bmatrix} 0 & -|\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \\ |\vec{p}| (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.62})$$

como $(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})$ son vectores entonces vamos a mostrar cada una de sus componentes, así:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = m \mathbb{I} + E_p \gamma^0 + |\vec{p}| n_1 \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} + |\vec{p}| n_2 \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} + |\vec{p}| n_3 \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.63})$$

como: $|\vec{p}| n_i = p_i y E_p = p_0$ y las matrices gamma en la representación de Dirac son:

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.64})$$

reemplazando lo anterior tenemos:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = m\mathbb{I} + p_0\gamma^0 - p_1\gamma^1 - p_2\gamma^2 - p_3\gamma^3 \quad (\text{A.65})$$

como $p^i = -p_i$ con $i = 1, 2, 3$

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = m\mathbb{I} + p^0\gamma^0 + p^1\gamma^1 + p^2\gamma^2 + p^3\gamma^3, \quad (\text{A.66})$$

finalmente se obtiene:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = m + \gamma^\mu p_\mu. \quad (\text{A.67})$$

Y análogamente se puede mostrar que la suma de spin para antipartículas es:

$$\sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \gamma^\mu p_\mu - m. \quad (\text{A.68})$$