

MODELADO COMPUTACIONAL DE CAMPOS VECTORIALES EN EXCEL

Con **ScienSolar**
SIN PROGRAMACIÓN

Ariel Rey Becerra Becerra

MODELADO COMPUTACIONAL
DE CAMPOS VECTORIALES EN EXCEL

Modelado computacional de campos vectoriales en Excel / Ariel Rey Becerra
Becerra — Pamplona: Universidad de Pamplona. 2026.

368 p. 17 cm x 24 cm

ISBN (Digital): 978-628-7656-91-8

© Universidad de Pamplona

© Sello Editorial Unipamplona

Sede Principal Pamplona, Km 1 Vía Bucaramanga-

Ciudad Universitaria. Norte de Santander, Colombia.

www.unipamplona.edu.co

Teléfono: 6075685303

MODELADO COMPUTACIONAL DE CAMPOS VECTORIALES EN EXCEL

Ariel Rey Becerra Becerra

ISBN (Digital): 978-628-7656-91-8

DOI: <https://doi.org/10.24054/9th8e775>

Primera edición abril de 2026

Colección Tecnologías e Ingenierías

© Sello Editorial Unipamplona

Rector: Ivaldo Torres Chávez Ph.D

Vicerrector de Investigaciones: Aldo Pardo García Ph.D

Jefe Sello Editorial: Caterine Mojica Acevedo

Corrección de estilo: Andrea del Pilar Durán Jaimes

Diseño de portada: Verónica Restrepo Martínez

Todas las imágenes del presente libro han sido elaboradas por el autor desde cero sin ninguna ayuda de programas de Inteligencia Artificial, la gran mayoría de ellas fueron elaboradas en MS Excel con el paquete *ScienSolar* a partir de ecuaciones matemáticas.

El código de la mayoría de modelos matemáticos y físicos descritos en este libro en calidad de ejemplos, se encuentra disponible de forma gratuita en el repositorio de *ScienSolar*. El usuario que elabora un modelo en *ScienSolar* desde cero, puede exportar fácilmente el código de su proyecto.

www-SCIENSOLAR.COM

Hecho el depósito que establece la ley. Todos los derechos reservados. Prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio, sin permiso del editor.



MODELADO COMPUTACIONAL DE CAMPOS VECTORIALES EN EXCEL

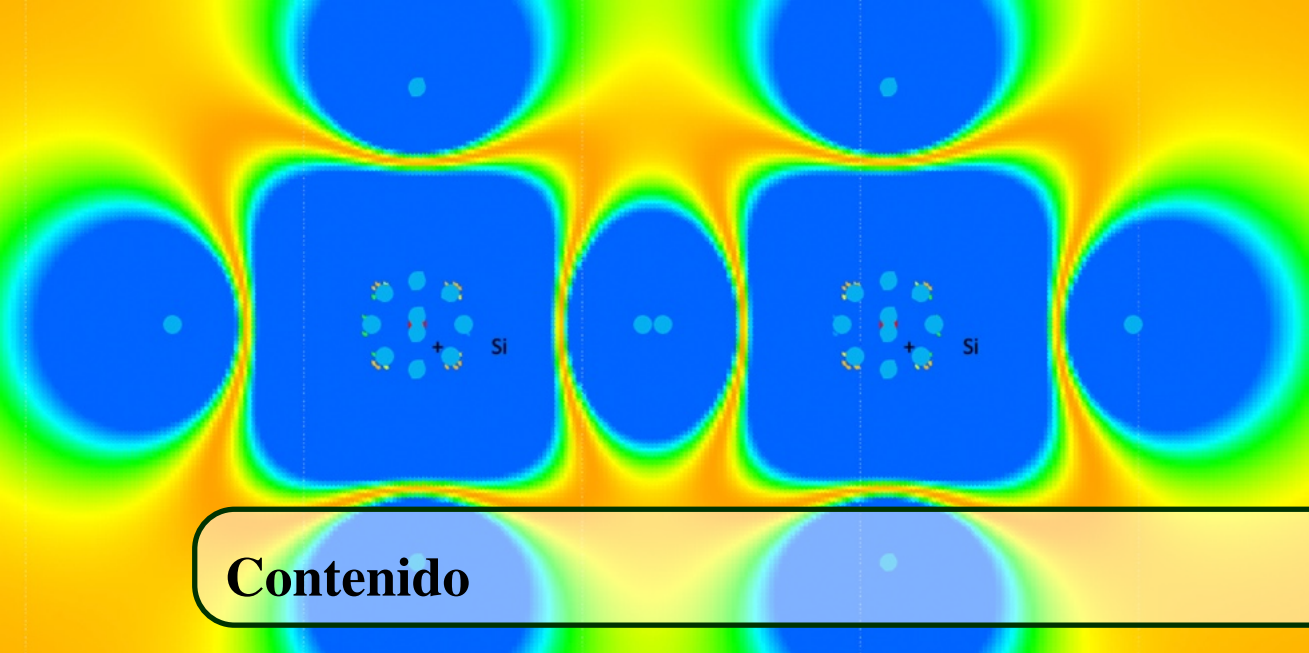
Ariel Rey Becerra Becerra, Ph.D. en Física Teórica



Formar en nuevas generaciones con
sello de excelencia comprometidos
con la transformación social de las
regiones y un país en paz



Vicerrectoría de
INVESTIGACIONES
UNIPAMPLONA



Contenido

Resumen	11
Prólogo	12

I

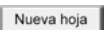
Fundamentos matemáticos

1	Sistemas de coordenadas	19
1.1	Sistema de coordenadas cartesiano	20
1.2	Sistema de coordenadas cilíndricas	27
1.3	Sistema de coordenadas esféricas	30
2	Rotación y traslación	35
2.1	Transformaciones de traslación	36
2.2	Transformaciones de rotación en 2D	37
2.3	Transformaciones de rotación en 3D	39
2.4	Rotación del sistema cartesiano	41
2.5	Rotación consecutiva A, B, C	42
2.6	Rotación de los ejes de coordenadas	44

3	Campos escalares y vectoriales	47
3.1	El concepto de campo	47
3.2	Campos escalares	47
3.3	Campos vectoriales	49
3.4	De cilíndricas a cartesianas	50
3.5	De esféricas a cartesianas y cilíndricas	53
3.6	Fórmulas de conversión para los versores	54

II

Paquete ScienSolar en MS Excel

4	Introducción	61
5	El paquete ScienSolar	65
5.1	Características del paquete	65
5.2	Metadata del paquete	65
5.3	Instalación	68
6	Tablero de control	73
6.1	Vista general del entorno de trabajo	73
6.2	Zona 1: Nuevo proyecto	74
6.3	Celda A2 = INICIO	75
6.4	Botón Restablecer 	75
6.5	Botón Nueva hoja 	75
6.6	Botón Nuevo vector 	75
6.7	Botón Vector 	76
6.8	Botón Código 	77
6.9	Cuadro combinado - lista de proyectos	79
6.10	Zona 2: Configuración de vectores	79
6.11	Celda C4. Nombre de un vector nuevo	80
6.12	Botones   celda B2	80
6.13	Botón de historia de un vector 	82
6.14	Botón  tabla de datos	82
6.15	Celda A6. Ocultar/mostrar un vector	83
6.16	Celda B6. Nombre del vector	83
6.17	Celda C6. Color del vector	83
6.18	Celda A7. Ocultar/mostrar configuración	83
6.19	Celda B7. Apariencia del vector	83

6.20	Celda C8. Transparencia de un vector	84
6.21	Celdas A9, B9 y C9. Disponibles al usuario	84
6.22	Posición de un vector en A10, B10, C10	85
6.23	Celdas A11, B11 y C11. Coordenadas variables	85
6.24	Coordenadas en A12, B12, C12	86
6.25	Celda C7. Modo campo. Escáner de campo 	89
6.26	Celda A8. Conteo de vectores	96
6.27	Celda B8. Línea y dimensiones de un vector	97
6.28	Celdas A13, A14, C14, Cabeza, cola y grosor	98
6.29	Celdas B13, B14: datos	98
6.30	Celda C13: Historia de un vector 	101
6.31	Zona 3: Datos y fórmulas adicionales	102
6.32	Zona 4: Visualización del modelo	103
6.33	Zona 5: Vistas del modelo	103
6.34	Botones  ,  ,  y  : Vistas del modelo	103
6.35	Botones  ,  y  : Rotación de los ejes	104
6.36	Botón 	105
6.37	Celda F3: Color de las etiquetas	105
6.38	Celdas F4, F5, F6: Color de los ejes	105
6.39	Celdas E3, E4: Posición del origen	106
6.40	Celda E5: Escala del modelo	106
6.41	Celda E6: Longitud de los ejes	107
6.42	Botón B/W: Color del fondo de la hoja	107
6.43	Zona 6. Ejecución de simulaciones	107
6.44	Botones para ocultar/mostrar columnas	108
6.45	Celda I3. Valor del paso	108
6.46	Celda I4. Número de pasos	109
6.47	Celda I5. Contador	109
6.48	Botón de reinicio del contador	109
6.49	Botón de simulación por paso	110
6.50	Botón Ejecutar	110
6.51	Contador arbitrario	110
6.52	Zona 7: Teoría del modelo	112
6.53	Instrucciones y teoría del modelo	112
6.54	Inclusión de fórmulas matemáticas	113
6.55	Importancia de esta zona en un modelo	118

6.56	Recomendaciones para el uso de la sección 7	118
7	Módulos	121
7.1	Módulo para dibujar trayectorias	121
7.2	Módulo de operadores diferenciales parciales	124
7.3	Procedimiento para hacer uso del módulo	126
7.4	Listado de formas de MS Excel	142

III

Metodologías y técnicas de modelado

8	Elaboración de modelos	155
8.1	Preparación de ecuaciones	156
8.2	Ecuaciones en los ejes	158
8.3	Parámetros	158
8.4	Establecer vectores para el modelo	159
8.5	Agregar vectores al modelo	160
8.6	Configuración de las celdas	161
8.7	Implementación de controles de formulario	164
8.8	Activación de la pestaña Programador	164
8.9	Cuadro combinado	165
8.10	Botón de comando 	166
8.11	Botones de opción (Option Buttons) ☐ SI ☒ NO	167
8.12	Control de giro (Spin Button) 	168
8.13	Cuadro de grupo (Group Box)	169
8.14	Casilla de verificación (Check Box) ☒ Casilla 71	169
8.15	Cuadro de lista (List Box)	169
8.16	Barra de desplazamiento	170
8.17	Compatibilidad Windows/Mac	170
8.18	Mejores prácticas para modelos científicos	171
8.19	Estética del modelo	171
8.20	Ejecutar el modelo	172
8.21	Extracción de datos durante una simulación	172
8.22	Crear contenido para el modelo	174
9	Generación de código	175
9.1	Ventajas del almacenamiento en código	175
9.2	Exportación del código a archivo de texto	176

9.3	Proceso de exportación paso a paso	177
9.4	Integración a la lista de proyectos	178
9.5	Copiar el código en el editor de Visual Basic	178
9.6	Agregar el nombre a la lista en CONFIG	178

IV

Modelos en ejemplos

10 Modelos matemáticos simples 185

10.1	Suma de vectores	186
10.2	Suma de coordenadas	189
10.3	Pirámide tridimensional	196
10.4	Producto vectorial de dos vectores	201
10.5	Vector unitario	203
10.6	Rotación alrededor de un vector unitario	205
10.7	Rotación compuesta	208
10.8	Rotación tangencial	213
10.9	Coordenadas cilíndricas en cartesianas	214
10.10	Coordenadas esféricas en cartesianas	219
10.11	Coordenadas cartesianas en cilíndricas	224
10.12	Coordenadas esféricas en cilíndricas	227
10.13	Coordenadas cartesianas en esféricas	229
10.14	Coordenadas cilíndricas en esféricas	232
10.15	Campo vectorial de simetría plana	234
10.16	Campo vectorial de simetría cilíndrica	236
10.17	Campo vectorial de simetría esférica	238

11 Modelos de campos 241

11.1	Fuerza de Coulomb	241
11.2	Sistema de cargas puntuales	250
11.3	Distribuciones de carga	262
11.4	Movimiento parabólico	271
11.5	Fuerza magnética entre corrientes	277
11.6	Corrientes en campos magnéticos	282
11.7	Campo magnético de una espira	288
11.8	Ley de Biot-Savart	295
11.9	Toroide	306

11.10	Fuerza de Lorentz	322
11.11	Propagación de una onda plana	342
11.12	Campo de radiación - vector de Poynting	343

V

ScienSolar y la Inteligencia Artificial (IA)

12	ScienSolar y la IA	355
12.1	El potencial de la IA en Excel	355
12.2	Asistencia en formulación matemática	355
12.3	Metodología de implementación con IA	356
13	Comunicación efectiva con la IA	359
13.1	Requerimientos a la IA	359
13.2	Requerimiento a la IA en el área de física	360
13.3	Ejemplos ampliados de requerimientos	361
13.4	Recomendaciones adicionales	363
	Bibliografía	365
	Índice alfabético	367

Resumen

Resumen

El libro *Modelado computacional de campos vectoriales en Excel con ScienSolar* (Ariel Rey Becerra Becerra, 2026) es una guía innovadora para modelar fenómenos físicos tridimensionales dentro de hojas de cálculo de Excel, aprovechando el complemento de simulación ScienSolar. Está dirigido a estudiantes e investigadores, permitiendo crear modelos sin necesidad de programación avanzada.

La obra aborda primero los fundamentos matemáticos de los campos escalares y vectoriales, explicando su representación en sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas mediante matrices de transformación. Luego, detalla el uso del paquete ScienSolar, que facilita la construcción de modelos modulares con controles, entradas de datos, visualización 3D y ejecución de simulaciones ajustables.

El libro incluye módulos para trayectorias vectoriales y operadores diferenciales, e ilustra los conceptos con imágenes creadas en Excel. Como recurso académico, integra teoría, práctica computacional y tecnología educativa, destacando por su enfoque activo y visualización intuitiva, útil tanto para la enseñanza como para la investigación.

Palabras clave: modelado en física, Excel científico, simulación numérica, educación STEM.

Abstract

The book *Computational Modeling of Vector Fields in Excel with ScienSolar* (Ariel Rey Becerra Becerra, 2026) is an innovative guide for modeling three-dimensional physical phenomena within Excel spreadsheets, utilizing the ScienSolar simulation add-in. It is aimed at students and researchers, enabling them to create models without the need for advanced programming.

The work first addresses the mathematical foundations of scalar and vector fields, explaining their representation in Cartesian, cylindrical, and spherical coordinate systems using transformation matrices. It then details the use of the ScienSolar package, which facilitates the construction of modular models with controls, data input fields, 3D visualization, and the execution of adjustable simulations.

The book includes modules for vector trajectories and differential operators, and illustrates concepts with images created in Excel. As an academic resource, it integrates theory, computational practice, and educational technology, standing out for its active learning approach and intuitive visualization, making it useful for both teaching and research.

Keywords: modeling in Physics, scientific Excel, numerical simulation, STEM education.

Prólogo

*“La física sin filosofía es estéril (no avanza).
La física sin matemática es inútil (no predice).”*

Ariel Rey Becerra Becerra

Esta dualidad esencial entre marco conceptual y herramienta cuantitativa guía el espíritu del presente libro. La gestión de datos derivados de mediciones o cálculos científicos ha sido una necesidad constante en múltiples disciplinas del conocimiento. En la búsqueda de soluciones eficaces para este desafío, han surgido diversas aplicaciones y lenguajes de programación que, si bien ofrecen capacidades avanzadas, exigen un nivel de destreza considerable por parte del usuario. Entre estas herramientas, las hojas de cálculo se han popularizado ampliamente, destacándose Microsoft Excel como la más extendida. Estas plataformas no solo evolucionan continuamente, sino que también se benefician de una comunidad en línea que contribuye con códigos y paquetes para abordar una variedad de problemas.

A medida que la física avanza, lenguajes como Python, MATLAB y R se han consolidado como instrumentos esenciales para científicos e ingenieros. Aunque estas herramientas poseen bibliotecas poderosas y entornos robustos de desarrollo, requieren un proceso de aprendizaje intensivo y un compromiso

de tiempo significativo. En contraste, Microsoft Excel, complementado con *ScienSolar*, ofrece un entorno accesible para análisis y modelado, con una curva de aprendizaje mucho más suave. Esta accesibilidad, junto con la familiaridad que muchas personas tienen con Excel, lo convierte en una alternativa atractiva para quienes desean modelar fenómenos físicos sin necesidad de dominar un lenguaje de programación formal.

La integración de diferentes programas se ha convertido en una vía estratégica para mejorar el estudio de fenómenos físicos complejos. Aunque Excel suele utilizarse como plataforma inicial de recolección de datos para su posterior análisis en otros programas, este libro plantea una pregunta esencial: ¿es Excel solo una herramienta auxiliar o puede convertirse en un entorno completo para el modelado físico?

Este texto busca responder dicha pregunta, demostrando que Excel es mucho más que una simple hoja de cálculo. A través de sus páginas, se exploran posibilidades innovadoras para el modelado de fenómenos físicos, abriendo nuevas perspectivas para estudiantes, profesores e investigadores que deseen comprender a fondo los principios físicos mediante recursos computacionales.

MS Excel cuenta con una potente plataforma de programación subyacente, basada en Visual Basic for Applications (VBA), que permite diseñar y ejecutar modelos dinámicos. Si bien Excel no posee funciones nativas para cálculos de integrales o derivadas, estas limitaciones pueden superarse mediante aproximaciones o funciones personalizadas que extienden sus capacidades estándar. El entorno de programación orientado a objetos de VBA facilita la creación de modelos complejos al permitir la implementación de ecuaciones físicas, parámetros y la generación de datos a partir de condiciones iniciales diversas.

La metodología propuesta en este libro permite modificar parámetros con facilidad, analizar el comportamiento del sistema y corregir errores de forma iterativa. Esta estrategia no sustituye la experimentación física, pero sí representa una alternativa complementaria que reduce costos y riesgos.

Aunque el potencial de modelado de Excel permite abordar incluso problemas de física relativista o cuántica, este libro se enfoca en establecer pautas técnicas y procedimientos claros para la elaboración de modelos aplicados a la física general. La construcción de modelos más sofisticados queda como tarea para el lector. Si bien existen otras plataformas más eficientes para ciertos propósitos, Excel sigue siendo una herramienta versátil y conveniente para el modelado científico.

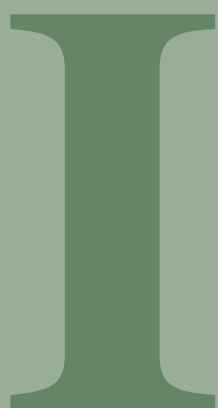
El libro ofrece una descripción detallada de la interfaz de *ScienSolar*, un paquete que permite construir modelos sin necesidad de programar en VBA, utilizando únicamente funciones nativas de Excel. El enfoque pedagógico evita los detalles

de programación básica, facilitando el aprendizaje para usuarios con conocimientos fundamentales de Excel. El objetivo principal es capacitar al lector en la construcción de modelos científicos mediante hojas de cálculo enriquecidas con el motor de *ScienSolar*.

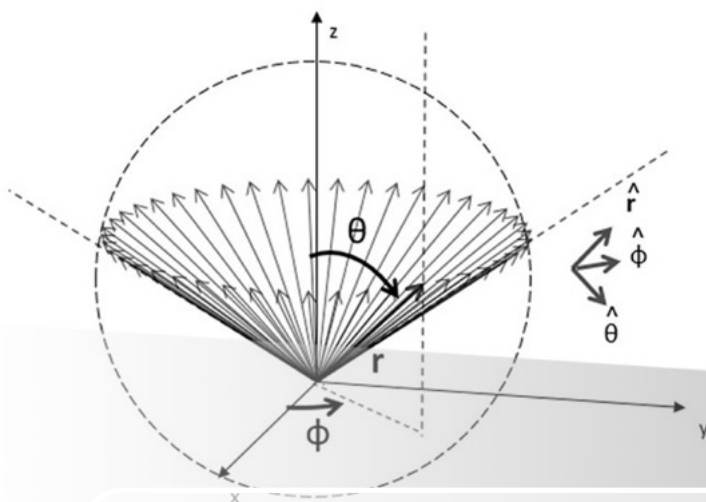
El conjunto de códigos incluido ha sido diseñado para permitir al usuario construir modelos matemáticos y físicos desde cero directamente en Excel. *ScienSolar* tolera errores comunes durante el aprendizaje, sin que estos afecten el código fuente. Este enfoque lo convierte en una herramienta ideal para profesionales, científicos, docentes y estudiantes de niveles universitario y escolar que deseen explorar modelos científicos con base en el conocimiento elemental de hojas de cálculo.

El paquete, disponible gratuitamente en www.sciensolar.com, incluye más de 30 modelos ilustrativos de física y matemáticas. A través de este libro, invitamos al lector a un recorrido de descubrimiento que transformará su visión sobre Excel y expandirá sus horizontes en el modelado científico, promoviendo la curiosidad y el ingenio como motores del aprendizaje.

Finalmente, el autor expresa su más sincero agradecimiento al profesor Francisco Cabrera, Ph.D., por sus valiosas contribuciones durante el desarrollo del modelo de *Movimiento de Partículas en Campos Magnéticos*. Su profundo conocimiento y rigor analítico fueron fundamentales para lograr este modelo con base en desarrollos matemáticos exactos, lo que le otorga mayor versatilidad frente a enfoques numéricos.



Fundamentos matemáticos



1. Sistemas de coordenadas

Para realizar simulaciones de física en MS Excel, es fundamental establecer un sistema de coordenadas que facilite la visualización y análisis de problemas físicos y matemáticos. En este capítulo, nos enfocaremos en la formulación de ecuaciones para simular un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas que pueda rotar 360 grados alrededor de cualquiera de los tres ejes. Dado que el objetivo de este libro es construir modelos tridimensionales y representarlos en una pantalla de computadora en dos dimensiones, trabajaremos para estructurar las ecuaciones de manera que sean fáciles de aplicar, expresando así las leyes físicas a través de ecuaciones matemáticas en función de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Además, exploraremos de manera general estos tipos de coordenadas, así como la representación de vectores en el espacio tridimensional y los campos escalares y vectoriales.

La plataforma *ScienSolar*, integrada en cualquier libro de Excel para modelado, tiene como elementos fundamentales el sistema de coordenadas cartesianas y los vectores. Para representar un vector $\mathbf{A}$ en este sistema, es necesario conocer explícitamente sus componentes A_x , A_y , A_z . Sin embargo, en muchos problemas de física, las magnitudes se presentan en coordenadas cilíndricas o esféricas, lo que exige la realización de conversiones entre estos sistemas y el sistema cartesiano. En el caso de los campos escalares, los valores en cualquier punto del

espacio se establecerán en esta herramienta utilizando las tres coordenadas, ya sean cartesianas, cilíndricas o esféricas.

Existen varios sistemas de coordenadas que se pueden clasificar como ortogonales, donde sus vectores unitarios o versores son perpendiculares entre sí, y no ortogonales, donde los versores no son ortogonales. En este capítulo, examinaremos en detalle los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico, todos los cuales se clasifican como ortogonales. La comprensión de estos sistemas es esencial para el modelado preciso de fenómenos físicos, ya que permite una representación adecuada de las fuerzas y trayectorias en el espacio tridimensional.

Al final de este capítulo, el lector no solo tendrá una comprensión sólida de cómo estructurar y aplicar estas coordenadas, sino que también estará preparado para implementar modelos que integren las leyes físicas de manera efectiva dentro de Excel. Esta base sentará las pautas para los modelos más complejos que exploraremos en los capítulos posteriores, donde la interacción entre los sistemas de coordenadas y las leyes de la física se convierte en el eje central del análisis y la simulación.

1.1 Sistema de coordenadas cartesiano

En general se define un sistema de coordenadas o parametrización del conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ como la identificación de cada punto en S por medio de un paquete único de números $(\zeta_1, \dots, \zeta_q) \in \mathbb{R}^q$, ($q \in \mathbb{N}$), de tal manera que cualquier transformación u operación que se haga sobre S se lleva a cabo en términos de las coordenadas $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$. El parámetro q se denomina *dimensión* de S .

Casos particulares son los sistemas de coordenadas rectangulares en $\mathbb{R}$, ($n \in \mathbb{N}$). Si designamos por $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base en $\mathbb{R}^n$, entonces cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de forma única como

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Cuando el conjunto de vectores $\mathbf{B}$ es ortonor-

mado, obtenemos lo que se conoce como el *sistema de coordenadas cartesiano*. En particular, en los casos de dos y tres dimensiones, es decir, para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se utiliza el sistema de coordenadas de mano derecha. Este sistema describe la disposición de sus ejes en

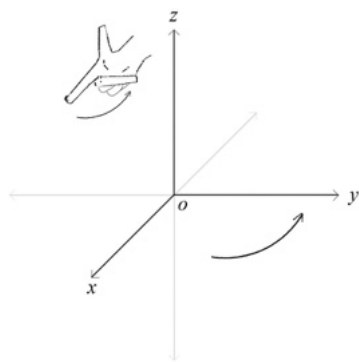


Figura 1.1.

Sistema de coordenadas cartesiano de mano derecha.

Nota. Elaboración propia.

Este sistema describe la disposición de sus ejes en

el espacio de manera análoga a la forma en que se disponen tres dedos de la mano derecha extendidos y perpendiculares entre sí: el dedo índice indica la dirección del eje x , el dedo corazón señala la dirección del eje y y el dedo pulgar apunta hacia el eje z . La representación gráfica de este sistema y su analogía con la mano derecha se ilustra en la figura 1.1.

Otra forma de definir el sistema cartesiano es mediante la consideración de tres familias de planos infinitos que son paralelos entre sí. Cada plano de cada familia es perpendicular a cualquier plano de las otras dos. Específicamente, la primera familia consiste en planos paralelos al plano xy , la segunda en planos paralelos al plano yz , y la tercera en planos paralelos al plano xz . Los ejes x , y y z se definen de la manera mencionada anteriormente, y el punto de intersección de estos tres ejes se denomina *origen*. Este conjunto de definiciones constituye el *sistema de coordenadas cartesianas*.

Un punto cualquiera en el espacio se puede representar mediante la intersección de estos tres planos, uno de cada familia, como se ilustra en la figura 1.2. Dado que estas superficies son infinitas, cualquier punto en el espacio puede ser representado de esta manera. Esta representación no solo es fundamental para el modelado en física, sino que también es esencial para comprender conceptos más complejos en el análisis matemático y en la simulación de fenómenos tridimensionales. A medida que avanzamos en la exploración de estos sistemas de coordenadas, sentaremos las bases para la aplicación práctica de las leyes físicas en contextos variados, desde la mecánica clásica hasta la física moderna.

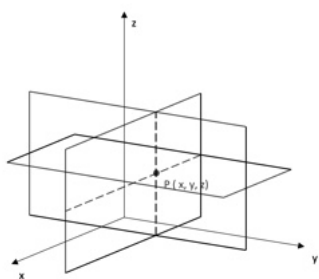


Figura 1.2.

Representación de un punto en coordenadas cartesianas como la intersección de tres planos perpendiculares entre sí.
Nota. Elaboración propia.

Para representar las direcciones de los ejes en un sistema de coordenadas cartesianas, se definen tres vectores unitarios, cada uno de los cuales apunta en la dirección positiva del eje correspondiente y tiene una magnitud igual a la unidad. Estos vectores se conocen como *versores* y, por convención, se denotan como $\hat{i}$ para el versor del eje x , $\hat{j}$ para el versor del eje y y $\hat{k}$ para el versor del eje z .

La característica distintiva de los versores es que su magnitud es igual a 1, lo que significa que representan únicamente la dirección sin contribuir con una escala adicional. En términos matemáticos, se puede expresar que:

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1, \quad (1.1)$$

y están orientados en el espacio de tal manera que sus direcciones coinciden

mutuamente con las direcciones de la regla de la mano derecha de acuerdo a la figura 1.1. Esto permite que cualquier vector en el espacio tridimensional se represente como una combinación lineal de estos versores. Por ejemplo, un vector $\mathbf{A}$ en $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k},$$

donde A_x , A_y y A_z son las componentes del vector en las direcciones de los ejes x , y y z , respectivamente. Esta representación no solo simplifica el trabajo con vectores en la física, sino que también proporciona una base sólida para realizar cálculos y transformaciones en el espacio tridimensional. A medida que avancemos en este capítulo, utilizaremos estos versores para explorar conceptos más complejos relacionados con la dinámica y la geometría en tres dimensiones.

Representación de un vector en coordenadas cartesianas

Un vector es un segmento que posee longitud y dirección determinada, y se denota comúnmente como $\vec{a}$. En un sistema de coordenadas cartesianas, un vector puede ser representado a través de sus coordenadas de dos maneras: como $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ o bien como $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$. Si el vector no se origina en el punto de origen, sus coordenadas se pueden expresar como $(a_x - a_{ox}, a_y - a_{oy}, a_z - a_{oz})$, donde (a_{ox}, a_{oy}, a_{oz}) representan las coordenadas del punto de origen del vector.

La figura 1.3 ilustra el vector $\mathbf{a}$ desde diferentes perspectivas, mostrando las proyecciones del vector sobre los planos coordenados, las cuales se cruzan perpendicularmente con los ejes.

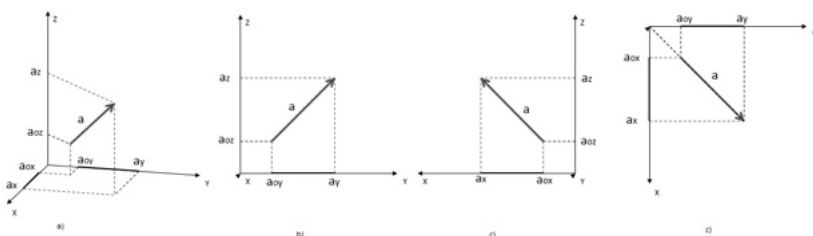
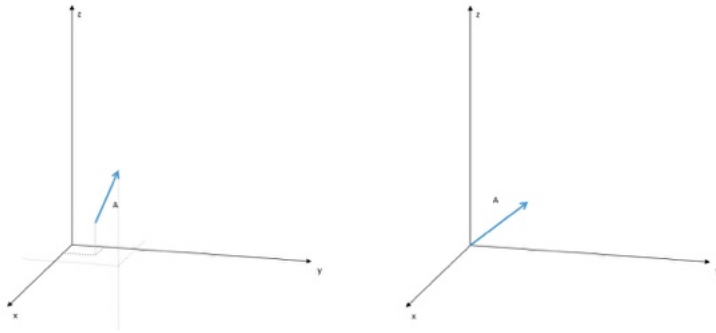


Figura 1.3.

Representación de un vector en el plano cartesiano. a) vector en el plano tridimensional, b) el mismo vector en el plano YZ, c) en el plano XZ, c) en el plano XY.

Nota. Elaboración propia.

El *módulo* o valor absoluto del vector, representado como $|\vec{a}|$ o $|\mathbf{a}|$, refleja su longitud y es siempre positivo. Dos vectores se consideran *iguales* si tienen la misma magnitud y coinciden en dirección, es decir, si están orientados en la misma dirección. Un vector cuyo origen coincide con el origen de coordenadas se denomina *radio vector*.

**Figura 1.4.**

Representación en cartesianas de un vector cuyo origen no coincide con el origen de coordenadas (a la izquierda) y un radio vector (derecha).

Nota. Elaboración propia.

En la parte izquierda de la figura 1.4, se muestra un vector que inicia fuera del origen de coordenadas, mientras que a la derecha se representa un radio vector, que tiene sus coordenadas iniciales en cero. En el vector de la izquierda, las componentes se expresan como $a_x - a_{ox}$, $a_y - a_{oy}$, $a_z - a_{oz}$, mientras que en el radio vector, simplemente se utilizan las componentes a_x , a_y y a_z .

El *vector nulo* es aquel cuyo extremo y origen coinciden, lo que implica que su módulo es cero y tiene dirección indeterminada.

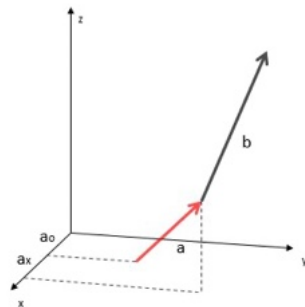
Cualquier vector en el sistema de coordenadas cartesianas puede ser trasladado de un lugar a otro sin alterar su esencia, siempre que no se rote en el proceso. Cuando se tienen dos o más vectores, es posible colocarlos en el origen de coordenadas o de manera consecutiva, como se ilustra en la figura 1.5.

Un vector $\vec{a}$ en el sistema de coordenadas cartesianas puede representarse como:

$$\vec{a} = (a_x - a_{ox})\hat{i} + (a_y - a_{oy})\hat{j} + (a_z - a_{oz})\hat{k},$$

lo que indica que, en general, cualquier vector puede descomponerse en la suma de tres vectores que están alineados con cada uno de los ejes.

La magnitud del vector $\vec{a}$ se calcula mediante

**Figura 1.5.**

Relación entre las coordenadas iniciales en x de dos vectores consecutivos. Como se puede observar $b_{0x} = a_{0x} + a_x$.

Nota. Elaboración propia.

la fórmula:

Fórmula en Excel 1.1

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(a_x - a_{ox})^2 + (a_y - a_{oy})^2 + (a_z - a_{oz})^2}.$$

Ejemplo del modelo *movimiento parabólico*:

■ G37 =RAIZ((G34-G12)^2+(G35-G13)^2+(G36-G14)^2)

Si consideramos otro vector $\vec{b} = (b_x - b_{ox})\hat{i} + (b_y - b_{oy})\hat{j} + (b_z - b_{oz})\hat{k}$, este se representará de la misma manera. Para representar ambos vectores en el sistema cartesiano, se pueden colocar en el origen o uno después del otro. En este último caso, si $\vec{b}$ se coloca después de $\vec{a}$, entonces las coordenadas iniciales de $\vec{b}$ se determinarán sumando las coordenadas iniciales de $\vec{a}$ a las coordenadas finales de $\vec{a}$:

Fórmula en Excel 1.2

$$b_{ox} = a_{ox} + a_x, \quad b_{oy} = a_{oy} + a_y, \quad b_{oz} = a_{oz} + a_z, \quad (1.2)$$

Ejemplo en el modelo *Suma de vectores*:

■ C28 =C21+C19

Esto se ilustra en la figura 1.5 para el caso de la coordenada x .

Los vectores que son paralelos a una misma recta se denominan *colineales*, mientras que aquellos que son paralelos a un mismo plano se llaman *coplanares*. Los vectores *opuestos* tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas.

Varios vectores se pueden sumar para formar un nuevo vector. La *combinación lineal* de varios vectores se refiere a su suma, la cual gráficamente corresponde al vector que cierra el polígono formado cuando los vectores se colocan uno tras otro. Al sumar dos vectores **a** y **b** (figura 1.5), el vector resultante se extiende desde la cola de **a** hasta la cabeza de **b**, y sus coordenadas son simplemente la suma de las coordenadas de ambos vectores en cada eje.

Algunos ejemplos de ecuaciones que se pueden expresar en coordenadas cartesianas se muestran en las fórmulas para Excel 1.3:

Fórmula en Excel 1.3

EJEMPLOS DE ECUACIONES EN COORDENADAS CARTESIANAS

1. Ecuación de la recta: La ecuación de una recta en el plano xy puede expresarse como:

$$y = mx + b,$$

donde m es la pendiente y b es la intersección con el eje y .

Para simular la ecuación de la recta en el plano YZ en *ScienSolar*, en una hoja en limpio se agrega un nuevo vector y se modifica el valor de las celdas de la siguiente manera:

- C7 o[0;2]x=[0;0]o2[0;2]y=[0;5]o3[0;5]z=[0;0]color=[0]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0s
- A10 =A11,
- B10 =B11,
- C10 =C11,
- G10 =2 {= m },
- G11 =1 {= b },
- C12 =G10*B11+G11 {= $z = m * y + b$ },
- { línea (line) = 4 , cabeza del vector (head) = 6 }

2. Ecuación de la circunferencia:

La ecuación de una circunferencia de radio R centrada en el punto (h, k) es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2.$$

El lector puede construir la simulación en *ScienSolar*, obteniendo la ecuación paramétrica, despejando por ejemplo la coordenada y en la ecuación dada.

3. Ecuación de la parábola:

La ecuación de una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba es:

$$y = ax^2,$$

donde a determina la *anchura* de la parábola.

4. Ecuación de la elipse:

La ecuación de una elipse centrada en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente.

5. Ecuación de la hipérbola:

La ecuación de una hipérbola centrada en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son las distancias desde el centro a los vértices y co-vértices, respectivamente.

6. Ecuación del plano:

La ecuación de un plano en el espacio tridimensional puede escribirse como:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde A , B , y C son los coeficientes que definen la inclinación del plano y D es una constante.

7. Ecuación de la esfera:

La ecuación de una esfera de radio R centrada en el origen es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Por ejemplo en el modelo *Coordenadas esféricas* se aprecia el valor del radio R :

- $\boxed{\text{G19}} = \text{RAIZ}(\text{E19}^2 + \text{E20}^2 + \text{E21}^2) \{ = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \}.$

8. Ecuación de la función cúbica:

Un ejemplo de una función cúbica es:

$$z = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

donde a , b , c , y d son constantes.

Para construir este modelo en *ScienSolar*, agregue a una nueva hoja un nuevo vector y modifique las celdas de la siguiente manera:

- $\boxed{\text{C7}}$ o[0;5]x=[0;5]o2[0;5]y=[0;0]o3[0;5]z=[0;0]color=[0]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0
- $\boxed{\text{A10}} = \text{A11}$, $\boxed{\text{B10}} = \text{B11}$, $\boxed{\text{C10}} = \text{C11}$,
- $\boxed{\text{G9}} = 0.1 \{ = a \}$,
- $\boxed{\text{G10}} = 0.1 \{ = b \}$,
- $\boxed{\text{G11}} = 1 \{ = c \}$,
- $\boxed{\text{G12}} = 1 \{ = d \}$,
- $\boxed{\text{C12}} = \text{G9} * \text{A11}^3 + \text{G10} * \text{A11}^2 + \text{G11} * \text{A11} + \text{G12} \{ = z = ax^3 + bx^2 + cx + d \}$,
- { línea (line) = 4 , cabeza del vector (head) = 6 }



Estos ejemplos ilustran cómo se pueden describir diversas figuras y relaciones

geométricas en coordenadas cartesianas, que son muy utilizadas en matemáticas y física.

1.2 Sistema de coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se definen de manera similar a las coordenadas cartesianas, utilizando un conjunto de tres familias de superficies ortogonales, cuyos versores son perpendiculares entre sí. La primera familia está compuesta por superficies cilíndricas infinitas, concéntricas con el eje z y de radio ρ ; la segunda consiste en semiplanos infinitos paralelos al eje z que forman un ángulo ϕ con respecto al eje x ; y la tercera comprende planos infinitos paralelos al plano xy , situados a una altura z respecto a este plano. Un punto en el espacio puede ser representado como la intersección de estas tres superficies. La figura 1.6 ilustra las coordenadas cilíndricas y sus versores, que apuntan en la dirección del incremento de cada coordenada. Para representar un punto $P(x, y, z)$ en

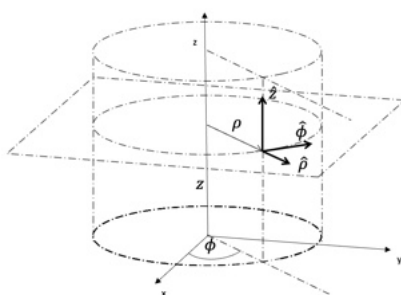


Figura 1.6.

Coordenadas cilíndricas. Un punto en el espacio se puede representar como la intersección de tres superficies ortogonales infinitas: una cilíndrica de radio ρ , un semiplano de ángulo ϕ y un plano de altura z .

Nota. Elaboración propia.

coordenadas cartesianas y su equivalente $P(\rho, \phi, z)$ en coordenadas cilíndricas, se utilizan las fórmulas de conversión mostradas en la fórmula de Excel 1.4.

Fórmula en Excel 1.4

De coordenadas cilíndricas a cartesianas>

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (1.3)$$

Por ejemplo, para simular la rotación de un vector alrededor del eje z , en una hoja nueva de *ScienSolar* agregamos un nuevo vector con los siguientes valores:

- | |
|-----|
| G10 |
|-----|

 = 5 $\{ = \rho \}$,
- | |
|-----|
| G11 |
|-----|

 = I5 $\{ = \phi \}$,
- | |
|-----|
| A12 |
|-----|

 = G10 * COS(RADIANS(G11)) $\{ = x = \rho \cos \phi \}$,
- | |
|-----|
| B12 |
|-----|

 = G10 * SIN(RADIANS(G11)) $\{ = y = \rho \sin \phi \}$,

De Coordenadas cartesianas a cilíndricas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho}, \quad (1.4)$$

El comportamiento de estas fórmulas se puede apreciar en el modelo *Coordenadas cilíndricas*.

Estas coordenadas pueden tomar los siguientes valores:

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Este sistema es especialmente útil en situaciones donde la simetría cilíndrica está presente, como en problemas de física relacionados con tubos, cilindros o flujos de fluidos. Las coordenadas cilíndricas permiten simplificar la formulación de ecuaciones y facilitar cálculos en tales contextos. A continuación se mencionan algunos ejemplos de aplicaciones de coordenadas cilíndricas en diversas áreas:

1. **Flujo de fluidos.** En dinámica de fluidos, las coordenadas cilíndricas son útiles para modelar el flujo alrededor de cilindros, como en el caso de tuberías o tubos de escape. Facilitan el análisis de la velocidad y la presión en flujos laminares y turbulentos.
2. **Problemas electromagnéticos.** En electrodinámica, las coordenadas cilíndricas se utilizan para describir campos eléctricos y magnéticos que tienen simetría cilíndrica. Por ejemplo, el campo eléctrico de un hilo conductor infinitamente largo se modela naturalmente en este sistema.
3. **Mecánica de materiales.** En el estudio de estructuras cilíndricas, como columnas y tuberías, las coordenadas cilíndricas permiten simplificar el análisis de tensiones y deformaciones, facilitando el diseño estructural.
4. **Ecuaciones de onda.** En problemas que involucran ondas que se propagan en un medio cilíndrico (como ondas acústicas en un tubo), las coordenadas cilíndricas permiten simplificar las ecuaciones de onda y estudiar cómo se comportan las ondas en diferentes situaciones.
5. **Termodinámica.** En sistemas que involucran gases en un cilindro (como en un motor de combustión), las coordenadas cilíndricas ayudan a describir el comportamiento del gas y las relaciones entre presión, volumen y temperatura.
6. **Óptica.** En la óptica, las coordenadas cilíndricas pueden ser útiles para analizar la propagación de luz en dispositivos como fibras ópticas, donde la geometría cilíndrica es predominante.

7. **Robótica y cinemática.** En el diseño de manipuladores robóticos o brazos robóticos que operan en entornos cilíndricos, las coordenadas cilíndricas permiten modelar los movimientos y posiciones de manera más intuitiva.

Estos ejemplos destacan cómo las coordenadas cilíndricas son herramientas valiosas en diversas disciplinas, especialmente cuando se trata de problemas con simetría alrededor de un eje central. Ejemplos concretos de ecuaciones en coordenadas se muestran en las fórmulas en Excel 1.5:

Fórmula en Excel 1.5

EJEMPLOS DE ECUACIONES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

(Aquí r es la coordenada cilíndrica, $r = \rho$, mencionada en la ecuación (1.4))

1. Ecuación de la superficie cilíndrica:

$$r = \text{constante}$$

Esta ecuación representa un cilindro de radio constante alrededor del eje z .

2. Ecuación del flujo en un tubo: Para el flujo laminar en un tubo de radio R :

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2),$$

donde ΔP es la diferencia de presión, μ es la viscosidad, y L es la longitud del tubo.

3. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas: La ecuación de Laplace para un potencial Φ en un medio cilíndrico es:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

4. Ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas: Para una onda que se propaga en un medio cilíndrico, la ecuación de onda puede expresarse como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde u es la función de onda y c es la velocidad de la onda.

5. Ecuación de Maxwell para campos eléctricos: En coordenadas cilíndricas, la forma de las ecuaciones de Maxwell puede cambiar. Por ejemplo, la ecuación de Gauss para el campo eléctrico se puede expresar como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

donde ρ es la densidad de carga, que se puede desarrollar en coordenadas cilíndricas.



Estos ejemplos muestran cómo las ecuaciones pueden tomar diferentes formas en el contexto de coordenadas cilíndricas, adaptándose a las simetrías del problema en cuestión.

1.3 Sistema de coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas se definen mediante tres familias de superficies ortogonales en el espacio tridimensional, las cuales están relacionadas con las coordenadas cartesianas. La primera familia está compuesta por superficies esféricas concéntricas, centradas en el origen y de radio r ; la segunda familia incluye semiplanos infinitos paralelos al eje z , formando un ángulo ϕ con respecto al eje x ; y la tercera consiste en superficies cónicas que tienen su vértice en el origen y un ángulo interno θ con respecto al eje z . Un punto en el espacio puede ser representado como la intersección de estas tres superficies. La figura 1.7 ilustra las coordenadas esféricas y sus versores, que apuntan en la dirección del incremento de cada coordenada.

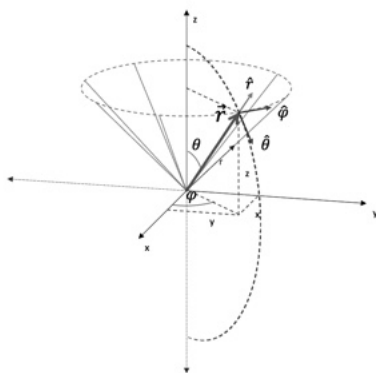


Figura 1.7.

Coordenadas esféricas. Un punto en el espacio se puede representar como la intersección de tres superficies ortogonales: una superficie esférica de radio r , un semiplano de ángulo ϕ con el eje x y una superficie cónica de ángulo interno θ con el eje z .

Nota. Elaboración propia.

Algunos ejemplos de aplicaciones de coordenadas esféricas en diversas áreas:

1. **Gravitación y campos de fuerza.** En la física, las coordenadas esféricas son útiles para describir campos gravitacionales o eléctricos que tienen simetría esférica. Por ejemplo, el campo gravitacional de una esfera masiva puede representarse fácilmente en coordenadas esféricas, facilitando el cálculo de la fuerza en diferentes puntos del espacio.

2. **Problemas de dinámica de fluidos.** En la dinámica de fluidos, cuando se estudian flujos alrededor de objetos esféricos (como gotas de agua o burbujas), las coordenadas esféricas permiten simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes al aprovechar la simetría del problema.
3. **Ondas y acústica.** En estudios de propagación de ondas sonoras o electromagnéticas que se emiten desde una fuente puntual, las coordenadas esféricas son útiles para modelar la distribución de la presión o la intensidad de la onda en el espacio.
4. **Astrofísica.** En la astrofísica, se utilizan coordenadas esféricas para modelar la distribución de estrellas, planetas y otros cuerpos celestes en el espacio. Esto es especialmente útil en la descripción de órbitas y trayectorias de objetos en sistemas planetarios.
5. **Cinemática y movimiento de cuerpos.** Para describir el movimiento de un objeto en una trayectoria esférica (como un satélite orbitando un planeta), las coordenadas esféricas proporcionan un marco natural para analizar las posiciones y velocidades en función del tiempo.
6. **Electrodinámica.** En problemas de potencial eléctrico y campos eléctricos que tienen simetría esférica, como el campo generado por una carga puntual, las coordenadas esféricas simplifican las ecuaciones y facilitan los cálculos de potencial y fuerza.
7. **Imágenes por resonancia magnética (IRM).** En técnicas de imagenología médica, como la IRM, las coordenadas esféricas pueden ser útiles para representar estructuras anatómicas que tienen formas irregulares o esféricas, ayudando en la visualización y el análisis de datos.

En las fórmulas para Excel 1.6 se relacionan algunos ejemplos de ecuaciones que se pueden expresar en coordenadas esféricas.

Fórmula en Excel 1.6

EJEMPLOS DE ECUACIONES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

1. Ecuación de la esfera:

$$r = R.$$

Esta ecuación representa una esfera de radio R centrada en el origen.

2. Ecuación de un plano: En coordenadas cartesianas:

$$z = mx + b.$$

En coordenadas esféricas, se convierte en:

$$r \cos \theta = m(r \sin \theta \cos \phi) + b.$$

3. Ecuación de un cono: La ecuación de un cono con ángulo θ respecto al eje z puede expresarse en coordenadas esféricas como:

$$\theta = \text{constante.}$$

4. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas: La ecuación de Laplace para un potencial Φ en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0.$$

5. Ecuación de ondas en coordenadas esféricas: Para una onda que se propaga en un medio esférico, la ecuación de onda se expresa como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

donde u es la función de onda y c es la velocidad de la onda.

6. Ecuaciones de Maxwell en coordenadas esféricas: Las ecuaciones de Maxwell se pueden expresar en coordenadas esféricas. Por ejemplo, la ley de Gauss para el campo eléctrico se expresa como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

donde se desarrolla en coordenadas esféricas. ■

Estos ejemplos muestran cómo las ecuaciones cambian al ser representadas en el contexto de coordenadas esféricas, adaptándose a la geometría del problema y muestran cómo las coordenadas esféricas son herramientas valiosas en diversas ramas de la ciencia y la ingeniería, especialmente cuando se trata de problemas con simetría radial. Para representar un punto $P(x, y, z)$ en coordenadas cartesianas y su equivalente $P(r, \phi, \theta)$ en coordenadas esféricas, se utilizan las fórmulas de conversión que se muestran en las fórmulas para Excel 1.7:

Fórmula en Excel 1.7

De coordenadas esféricas a cartesianas>

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.5)$$

De coordenadas cartesianas a esféricas>

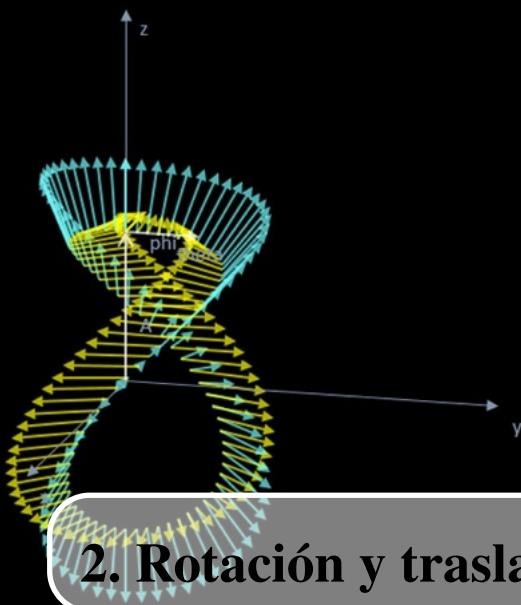
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \quad (1.6)$$

Para ver el comportamiento de estas ecuaciones, se puede consultar el modelo *Coordenadas esféricas* en *ScienSolar*. ■

Las coordenadas pueden tomar los siguientes valores:

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Es importante observar que el rango de valores que pueden tomar las coordenadas (ya sean cartesianas, cilíndricas o esféricas) está diseñado para cubrir todo el espacio tridimensional. En el caso de las coordenadas esféricas, el radio r puede variar desde 0 hasta $+\infty$, lo que permite alcanzar cualquier punto en el espacio. El ángulo ϕ permite recorrer todo el círculo en el plano xy , abarcando así todos los puntos en esa dirección. Por último, el ángulo θ , que se extiende hasta 180 grados, es suficiente para cubrir todos los puntos en la dirección vertical, garantizando que se pueden representar todas las posiciones en el espacio esférico.



2. Rotación y traslación

Cualquier objeto en dos o tres dimensiones puede ser sometido a ciertas transformaciones espaciales. En el caso de Excel, un sistema de coordenadas dibujado en la hoja se puede trasladar o rotar si a los objetos que representan los ejes se les aplican las transformaciones de traslación o rotación, respectivamente. A continuación, exploraremos estos grupos matemáticos con más detalle.

La traslación implica mover un objeto de un lugar a otro sin cambiar su forma, tamaño o orientación. En un sistema de coordenadas, la traslación se puede describir mediante un vector de desplazamiento. Si un punto $P(x, y)$ se traslada a $P'(x', y')$, la relación se expresa como:

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y,$$

donde t_x y t_y son los desplazamientos en las direcciones x e y , respectivamente. Para un sistema tridimensional, se añade el componente z :

$$z' = z + t_z.$$

Esta transformación es esencial para mover el sistema de coordenadas dentro de la hoja de cálculo, permitiendo ajustar la posición de los ejes y objetos en función de las necesidades del modelo.

La rotación implica girar un objeto alrededor de un punto (o eje) sin cambiar su forma o tamaño. En un sistema de coordenadas en dos dimensiones, la rotación de un punto $P(x, y)$ alrededor del origen se describe por la siguiente fórmula:

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo de rotación. En tres dimensiones, la rotación puede ser más compleja, ya que puede ocurrir alrededor de cualquiera de los tres ejes (x , y o z). Por ejemplo, la rotación alrededor del eje z se expresa como:

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

$$z' = z.$$

Para las rotaciones alrededor de los ejes x e y , las fórmulas se ajustan para incluir los efectos de rotación en las otras coordenadas.

Aplicaciones en Excel

En Excel, estas transformaciones se pueden implementar mediante fórmulas que modifiquen las posiciones de los puntos que representan los ejes y otros objetos. Por ejemplo:

Traslación. Se pueden aplicar fórmulas simples para ajustar las coordenadas de los ejes y mover el sistema a la posición deseada.

Rotación. Se pueden aplicar fórmulas de rotación para cambiar la orientación de los ejes, lo que permite visualizar la misma situación desde diferentes ángulos.

Estas transformaciones son fundamentales para el modelado físico y matemático en Excel, facilitando la visualización y manipulación de los datos en diferentes contextos. Veamos estas transformaciones con más detalle.

2.1 Transformaciones de traslación

Empezaremos por analizar la traslación en dos dimensiones. Dado que en una hoja de Excel se tienen dos dimensiones, que al compararla con el sistema tridimensional corresponden de forma más intuitiva a las coordenadas yz , trabajaremos nuestro sistema bidimensional con estas dos coordenadas (ver figura 2.1).

Se denomina *traslación* en $\mathbb{R}^2$ a la transformación de la forma $T\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ para todos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, donde T es la matriz de transformación y $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ es un vector dado.

La *traslación* traslada todo el objeto en otro vector dado, y se puede escribir a través de las coordenadas y y z de la siguiente manera:

$$T\mathbf{r} = T \cdot (y, z) = (y, z) + (y_0, z_0) = (y + y_0, z + z_0). \quad (2.1)$$

Si T_1 es la traslación en el vector $\mathbf{r}_1$ y T_2 es la traslación en el vector $\mathbf{r}_2$, entonces el producto $T_1 T_2$ se define como:

$$T_2 \cdot T_1 \mathbf{r} = T_2 \cdot (T_1 \mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2,$$

y en el plano yz toma la forma:

$$T_2 \cdot T_1 \mathbf{r} = (y + y_1 + y_2, z + z_1 + z_2).$$

Como se observa, $T_2 \cdot T_1$ es la traslación en $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$. Las transformaciones de traslación son conmutativas y asociativas, lo que significa que podemos aplicar cualquier cantidad de transformaciones de traslación a un objeto en cualquier orden y obtendremos el mismo resultado.

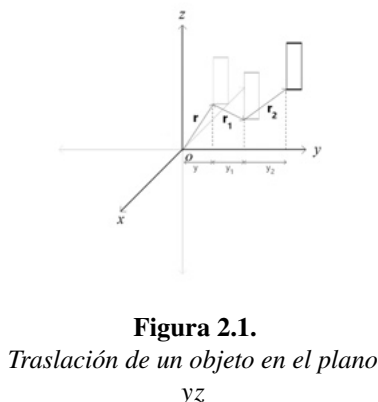


Figura 2.1.

Traslación de un objeto en el plano yz

Nota. Elaboración propia.

En el caso tridimensional

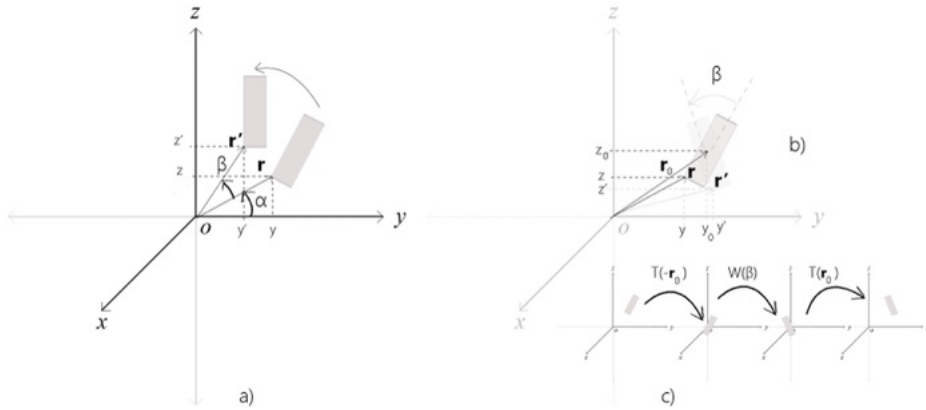
La situación con las transformaciones de traslación se extiende a una dimensión más:

$$\begin{aligned} T_2 \cdot T_1 \mathbf{r} &= T_2 \cdot (T_1 \mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \\ &= (x + x_1 + x_2, y + y_1 + y_2, z + z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Esto demuestra que las propiedades de conmutatividad y asociatividad también se mantienen en tres dimensiones, permitiendo la flexibilidad en la aplicación de múltiples traslaciones en el espacio tridimensional sin afectar el resultado final.

2.2 Transformaciones de rotación en 2D

Las transformaciones de rotación son un poco más complejas matemáticamente que las transformaciones de traslación. Básicamente rotar un objeto en un ángulo β en el plano yz alrededor del eje x , significa que el objeto se encontrará en otra posición tal que cada par de coordenadas (y, z) con radio vector $\mathbf{r}$ de cada punto del objeto se transformará en el par (y', z') con radio $\mathbf{r}'$, en donde $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'| = r$ (ver figura 2.2, a).)

**Figura 2.2.**

a) Rotación de un objeto en el plano yz alrededor del eje x y del origen O ; b) rotación de un objeto alrededor de un punto situado en r_0 (no necesariamente situado dentro del cuerpo del objeto.); c) secuencia del proceso de rotación alrededor de un eje que pasa fuera del origen (ecuación 2.5).

Nota. Elaboración propia.

Observando en la figura 2.2 parte a), a partir de los triángulos rectángulos Ory y $Or'y'$ se pueden deducir las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{cases} y = r \cos \alpha & y' = r \cos(\alpha + \beta) \\ z = r \sin \alpha & z' = r \sin(\alpha + \beta). \end{cases}$$

De estas fórmulas, utilizando igualdades trigonométricas y las relaciones $\cos \alpha = y/r$, $\sin \alpha = z/r$, se deduce:

$$\begin{cases} y' = r \cos(\alpha + \beta) = r(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = y \cos \beta - z \sin \beta \\ z' = r \sin(\alpha + \beta) = r(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = y \sin \beta + z \cos \beta, \end{cases} \quad (2.2)$$

que en forma matricial se escribe como:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

en donde la matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \equiv W(\beta) \quad (2.4)$$

es la matriz de la transformación de rotación del punto (y, z) en un ángulo β alrededor del eje x . Entonces la ecuación (2.3) se puede escribir en forma

compacta como $\mathbf{r}' = W(\beta)\mathbf{r}$. En el caso de dos dimensiones la transformación $W(\beta)$ es lineal, ortogonal y conmutativa para $0 \leq \beta < 2\pi$; esto quiere decir que, por ejemplo, rotar el punto en diferentes ángulos α, β, γ consecutivamente se puede hacer en diferente orden y el resultado es el mismo:

$$\mathbf{r}' = W(\alpha)W(\beta)W(\gamma)\mathbf{r} = W(\beta)W(\alpha)W(\gamma)\mathbf{r} = W(\gamma)W(\beta)W(\alpha)\mathbf{r} = W'\mathbf{r},$$

W' es una matriz que se obtiene de multiplicar las tres matrices de transformación.

Para obtener una rotación alrededor de algún eje que no pase por el origen O , lo mejor es trasladar el origen de coordenadas (aunque sea temporalmente) al punto por el que se quiere pasar el eje de rotación y seguir utilizando la ecuación 2.3¹. Otra manera de hacerlo es trasladar el objeto al origen de coordenadas, luego rotarlo y finalmente volver a trasladarlo al punto original, por ejemplo, si el punto de rotación deseado se encuentra a un radio $\mathbf{r}_0$ del origen y se quiere rotar el cuerpo un ángulo β , la transformación compuesta tiene la forma:

$$\mathbf{r}' = T(\mathbf{r}_0)W(\beta)T(-\mathbf{r}_0)\mathbf{r} \quad (2.5)$$

o, en forma matricial (ver figura 2.2 b),

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Las transformaciones compuestas como la de la ecuación 2.5 en general no son conmutativas, es decir, al cambiar el orden de su aplicación sobre el vector $\mathbf{r}$ cambiará su resultado. En la figura 2.2 c) se muestra el orden consecutivo de aplicación de una rotación al rededor de un eje fuera del origen: de izquierda a derecha se muestra primero la traslación al origen, luego la rotación y por último la traslación a su punto inicial (ecuación 2.6).

2.3 Transformaciones de rotación en 3D

Las transformaciones de rotación en tres dimensiones son más complejas que en dos dimensiones. Supongamos que queremos rotar en un ángulo θ un vector $\mathbf{r}$ que apunta al punto P alrededor de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$, como se muestra en la figura 2.3. Designamos como $\mathbf{r}_P$ el vector que sale del origen y llega al punto P ; $\mathbf{r}_u$ es el vector desde el origen hasta el vector unitario, y $\mathbf{r}_{P'}$ es el vector $\mathbf{r}_P$ después de rotarlo un ángulo θ ; $\mathbf{r}_M$ es el mismo vector rotado 90 grados,

¹En Excel la hoja de cálculo tiene un sistema de coordenadas absoluto y con valores positivos solamente, cuyo origen está en la esquina superior izquierda y a partir de allí se cuentan las coordenadas en el plano de la hoja, por lo tanto para dibujar un sistema de coordenadas en otro punto se deben aplicar las ecuaciones de traslación y en general de rotación, lo que equivale a trasladar y rotar el sistema de coordenadas.

asegurando que $\mathbf{r}_u$ sea perpendicular a $\mathbf{r}_{uP}$. Si designamos como $W_u(\theta)$ la matriz de la transformación de rotación alrededor del vector $\hat{\mathbf{u}}$, entonces:

$$W_u(\theta)\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r}_u + \mathbf{r}_{uP'}.$$

De acuerdo al dibujo, se pueden definir:

$$\mathbf{r}_u = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_P) \cdot \hat{\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{r}_{uP'} = \mathbf{r}_{uP} \cos \theta + \mathbf{r}_{uM} \sin \theta,$$

por lo tanto:

$$W_u(\theta)\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{uP} \cos \theta + \mathbf{r}_{uM} \sin \theta + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_P) \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

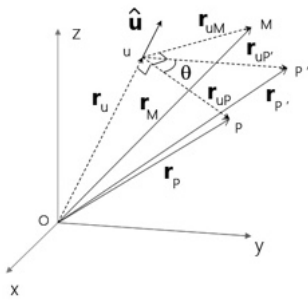


Figura 2.3.

Rotación de un vector $\mathbf{r}_P$ alrededor de $\hat{\mathbf{u}}$ en un ángulo θ .

Nota. Elaboración propia.

Además, se tiene que:

$$\mathbf{r}_{uP} = (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \times \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_P - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_P) \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

De aquí podemos expresar $\mathbf{r}_{uP}$ en términos de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{r}_P$:

$$(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_P) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_P - (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \times \hat{\mathbf{u}}.$$

Además,

$$\mathbf{r}_{uM} = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P.$$

Como se puede observar en la figura 2.3 (y de hecho, corroborar por el producto cruz) este es un vector perpendicular tanto a $\hat{\mathbf{u}}$ como a $\mathbf{r}_P$. Sustituyendo estas expresiones en $W_u(\theta)\mathbf{r}_P$ se obtiene:

$$\begin{aligned} W_u(\theta)\mathbf{r}_P &= ((\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \times \hat{\mathbf{u}}) \cos \theta + (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \sin \theta + \mathbf{r}_P - (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \times \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{r}_P + (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \times \hat{\mathbf{u}}(\cos \theta - 1) + (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \sin \theta. \end{aligned}$$

Reorganizando el segundo término, llegamos a la expresión final:

$$W_u(\theta)\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P + \hat{\mathbf{u}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P)(1 - \cos \theta) + (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \sin \theta, \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{r}_P$ es cualquier punto en el espacio tridimensional. Esta ecuación es la fórmula universal para realizar diferentes rotaciones en nuestro sistema de coordenadas cartesianas, y se integrará más adelante en nuestro panel de control en Excel. La transformación de rotación se puede interpretar como la suma del vector original $\mathbf{r}_P$ y el vector $\mathbf{r}_{PP'}$ desde el punto P al punto P' :

$$W_u(\theta)\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_{PP'}. \quad (2.8)$$

Comparando esto con la fórmula anterior, obtenemos la fórmula para programación 2.3.1:

$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$, $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}$. Para visualizar mejor la forma matricial de la rotación alrededor del eje z , evaluamos con cero las coordenadas faltantes:

$$W_z(C)\mathbf{r}_P = \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

De manera análoga, se obtiene de la ecuación (2.7) la matriz de rotación de un vector alrededor del eje y ($\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{j}}$) en un ángulo $\theta = B$:

$$W_y(B)\mathbf{r}_P = \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

y la rotación de cualquier vector $\mathbf{r}_P$ en un ángulo $\theta = A$ alrededor del eje x ($\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}}$):

$$W_x(A)\mathbf{r}_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

2.5 Rotación consecutiva A, B, C

Para rotar un radio vector $\mathbf{r}_P$ en el sistema cartesiano primero un ángulo C alrededor del eje z , luego un ángulo B alrededor del eje y y, finalmente, un ángulo A alrededor del eje x , se debe realizar la operación:

$$\begin{aligned} W_x(A)W_y(B)W_z(C)\mathbf{r}_P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= W_x(A)W_y(B)\mathbf{r}_{P_C} = W_x(A)\mathbf{r}_{P_{BC}} = \mathbf{r}_{P_{ABC}} \equiv \mathbf{r}_{P'}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Esta operación debe desarrollarse de manera consecutiva de derecha a izquierda. Aquí, P_C es la posición del vector después de rotarlo un ángulo C , P_{BC} luego de rotarlo un ángulo B , y P_{ABC} al rotarlo finalmente un ángulo A . Es importante destacar que las transformaciones de rotación en tres dimensiones no son conmutativas, es decir, en general:

$$W_x(A)W_y(B)W_z(C)\mathbf{r}_P \neq W_y(B)W_x(A)W_z(C)\mathbf{r}_P \neq W_x(A)W_z(C)W_y(B)\mathbf{r}_P,$$

y las demás posibles conmutaciones.

Procedamos ahora a preparar la fórmula (2.13) para introducirla en el modelado. Lo único que necesitamos hacer es realizar las operaciones matriciales para obtener las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{P'}$. Desarrollando de izquierda a derecha se obtiene:

$$\begin{aligned}
 W_x(A)W_y(B)W_z(C)\mathbf{r}_P &\equiv W(ABC)\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{P'} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \cos C - y \sin C \\ x \sin C + y \cos C \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos B(x \cos C - y \sin C) + z \sin B \\ x \sin C + y \cos C \\ -\sin B(x \cos C - y \sin C) + z \cos B \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos B(x \cos C - y \sin C) + z \sin B \\ \cos A(x \sin C + y \cos C) - \sin A(-\sin B(x \cos C - y \sin C) + z \cos B) \\ \sin A(x \sin C + y \cos C) + \cos A(-\sin B(x \cos C - y \sin C) + z \cos B) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

El resultado en (2.14) proporciona las expresiones para las componentes del vector final (x', y', z') en función de las coordenadas iniciales (x, y, z) . En resumen:

Fórmula para programación 2.5.1

$$x' = \cos B(x \cos C - y \sin C) + z \sin B, \tag{2.15}$$

$$y' = \cos A(x \sin C + y \cos C) - \sin A(-\sin B(x \cos C - y \sin C) + z \cos B), \tag{2.16}$$

$$z' = \sin A(x \sin C + y \cos C) + \cos A(-\sin B(x \cos C - y \sin C) + z \cos B). \tag{2.17}$$

Como ejemplo de aplicación de estas ecuaciones en el código de VBA, acudimos al procedimiento *Segment VectorOutput-06* de *ScienSolar*:

```

L_width = Cos(A) * (Lx * Sin(C) + Ly * Cos(C)) - Sin(A) * (-Sin(B) *
(Lx * Cos(C) - Ly * Sin(C)) + Lz * Cos(B)),
L_height = Sin(A) * (Lx * Sin(C) + Ly * Cos(C)) + Cos(A) * (-Sin(B) *
(Lx * Cos(C) - Ly * Sin(C)) + Lz * Cos(B)),
Lo_width = Cos(A) * (Lox * Sin(C) + Loy * Cos(C)) - Sin(A) * (-Sin(B) *
(Lox * Cos(C) - Loy * Sin(C)) + Loz * Cos(B)),
Lo_height = Sin(A) * (Lox * Sin(C) + Loy * Cos(C)) + Cos(A) * (-Sin(B) *
(Lox * Cos(C) - Loy * Sin(C)) + Loz * Cos(B)).

```

Cabe resaltar que en este procedimiento no se utiliza la fórmula para la coordenada x' debido a que la pantalla del ordenador es de dos dimensiones, en este caso corresponde al plano $y'z'$.

Estas fórmulas representan las coordenadas de un vector (x, y, z) rotado los ángulos C alrededor de z , B alrededor de y y A alrededor de x .

2.6 Rotación de los ejes de coordenadas

Como caso particular de las fórmulas (2.15), (2.16), (2.17), se deducen las fórmulas para la rotación de los ejes. Denotemos por L la longitud de los ejes (la longitud real del objeto que representa al eje en la pantalla del computador). A continuación, se presentan las fórmulas para la rotación de cada uno de los ejes.

Rotación del eje de coordenadas x

Para el eje x , las coordenadas iniciales son $x = L$, $y = 0$, $z = 0$. Las coordenadas de L después de la rotación $W(ABC)$ se obtienen de la siguiente manera:

Fórmula para programación 2.6.1

$$x' = L \cos B \cos C, \quad (2.18)$$

$$y' = L(\cos A \sin C + \sin A \sin B \cos C), \quad (2.19)$$

$$z' = L(\sin A \sin C - \cos A \sin B \cos C). \quad (2.20)$$

Eje x con longitud L rotado ángulos A , B y C alrededor de las posiciones originales de x , y y z , respectivamente. En *ScienSolar* se utilizan las fórmulas para las coordenadas y y z (la pantalla de ordenador es bidimensional) en el segmento del procedimiento *Segment XYZ-04*:

$$\begin{aligned} x_width &= L * (\cos(A) * \sin(C) + \sin(A) * \cos(C) * \sin(B)) \\ x_height &= L * (\sin(A) * \sin(C) - \cos(A) * \cos(C) * \sin(B)) \end{aligned}$$

Rotación del eje de coordenadas y

Para el eje y , las coordenadas iniciales son $x = 0$, $y = L$, $z = 0$. Las coordenadas de L después de la rotación $W(ABC)$ son:

Fórmula para programación 2.6.2

$$x' = -L \cos B \sin C, \quad (2.21)$$

$$y' = L(\cos A \cos C - \sin A \sin B \sin C), \quad (2.22)$$

$$z' = L(\sin A \cos C + \cos A \sin B \sin C). \quad (2.23)$$

Eje y con longitud L rotado ángulos A , B y C alrededor de las posiciones originales de x , y y z , respectivamente. En *ScienSolar* se utilizan las fórmulas para las coordenadas y y z (la pantalla de ordenador es bidimensional) en el segmento del procedimiento *Segment XYZ-04*:

$$\begin{aligned} y_width &= L * (\cos(A) * \cos(C) + \sin(A) * \sin(C) * \sin(B)) \\ y_height &= L * (\sin(A) * \cos(C) + \cos(A) * \sin(C) * \sin(B)) \end{aligned}$$

Rotación del eje de coordenadas z

Para el eje z , las coordenadas iniciales son $x = 0$, $y = 0$, $z = L$. Las coordenadas de L después de la rotación $W(ABC)$ adquieren la forma:

Fórmula para programación 2.6.3

$$x' = L \sin B, \quad (2.24)$$

$$y' = -L \sin A \cos B, \quad (2.25)$$

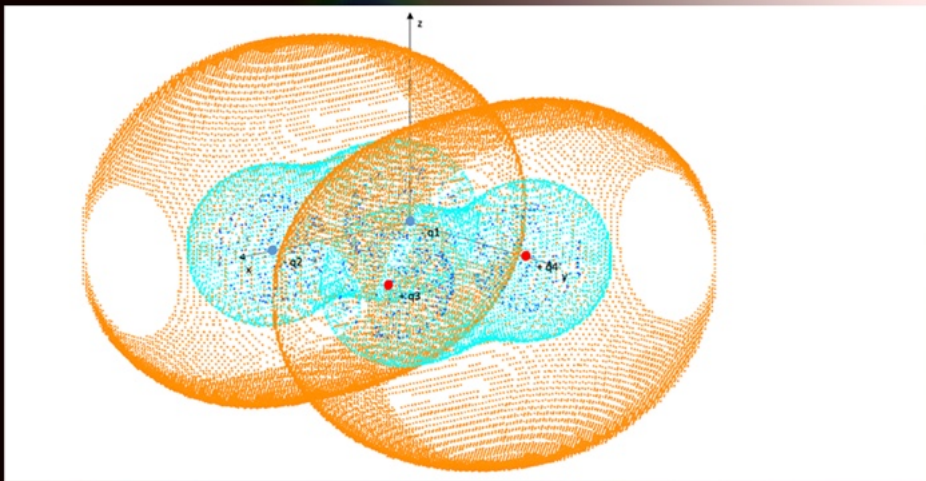
$$z' = L \cos A \cos B. \quad (2.26)$$

Eje z con longitud L rotado ángulos A , B y C alrededor de las posiciones originales de x , y y z , respectivamente. En *ScienSolar* se utilizan las fórmulas para las coordenadas y y z (la pantalla de ordenador es bidimensional) en el segmento del procedimiento *Segment XYZ-04*:

$$z_width = -L * \sin(A) * \cos(B)$$

$$z_height = L * \cos(A) * \cos(B)$$

ScienSolar utiliza estas ecuaciones conjuntamente para rotar todo el sistema de coordenadas hasta ciertos ángulos proporcionados por el usuario. Para ver en detalle cómo se implementó esto en el código VBA, se puede consultar el libro de códigos de *ScienSolar* titulado *ScienSolar - Código de procedimientos en VBA para modelar problemas en Física, Matemáticas e Ingeniería*, por Ariel Becerra.



3. Campos escalares y vectoriales

3.1 El concepto de campo

En esta sección se abordarán las definiciones de campos escalares y vectoriales. El concepto de campo puede considerarse desde dos enfoques: El físico, que representa fuerzas, energías o influencias en el espacio, y el matemático, que se refiere a funciones que asignan valores a puntos en un dominio. A pesar de su relevancia, el concepto físico de campo sigue siendo un tema de debate no resuelto, ya que se fundamenta en dos teorías fundamentales intrínsecamente incompatibles: Una basada en la mecánica cuántica, que aborda el comportamiento de los campos a escala microscópica, y otra que se basa en la relatividad, aplicable al ámbito macroscópico. Hasta la fecha, no se ha logrado una unificación conceptual satisfactoria, lo que implica que el campo, como entidad física, sigue siendo un concepto en evolución. Sin embargo, las teorías matemáticas que abordan el campo han mantenido su validez y utilidad en el análisis de propiedades macroscópicas. A continuación, se definirá el concepto matemático de campo.

3.2 Campos escalares

Una magnitud escalar U , que asigna un valor definido en cada punto del espacio, se denomina **campo escalar** o función escalar. Matemáticamente se puede expresar en coordenadas cartesianas como $U(x, y, z)$, en coordenadas cilíndricas como

$M(\rho, \phi, z)$ y en coordenadas esféricas como $H(r, \phi, \theta)$. Alternativamente, el campo escalar puede ser representado en función del radio vector $U(\vec{r})$, que define la distancia desde el origen hasta el punto de interés. Ejemplos de campos escalares incluyen la temperatura en un medio $T(x, y, z)$ y la energía potencial de un objeto en el campo gravitacional terrestre $U(x, y, z)$. Así, un campo escalar puede concebirse como una colección continua de puntos en el espacio, cada uno asociado a un valor específico dado por una función.

Es fundamental que un campo escalar cumpla con las propiedades de una función, es decir, que sea continuo, diferenciable y que su valor sea unívoco en cada punto del dominio. Por ejemplo, en el caso de la temperatura, no debería existir un punto en el espacio con un valor indefinido (satisfaciendo así la continuidad) y no debería haber puntos infinitesimalmente cercanos que presenten valores de temperatura significativamente diferentes (lo que asegura la suavidad). Además, cada punto debe tener un único valor de temperatura, sin embargo, diferentes puntos del espacio pueden tener valores iguales del campo. A partir de la distribución de estos valores, podemos clasificar los campos escalares en tres tipos principales.

Campos escalares planos

Los campos escalares planos presentan una distribución de valores tal que los puntos con el mismo valor forman superficies planas. Un ejemplo es el campo de alturas desde el plano xy en la dirección del eje z , donde la altura depende únicamente de la coordenada z . Las expresiones de estas funciones escalares en los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico pueden ser representadas como:

$$h = h(z) = h'(\rho, \phi, z) = h''(r, \phi, \theta). \quad (3.1)$$

Aquí, se emplea el símbolo prima para denotar funciones diferentes en términos generales.

Campos escalares cilíndricos

Cuando los valores del campo están organizados de tal manera que conforman superficies cilíndricas, se dice que el campo tiene simetría cilíndrica. Un ejemplo es la temperatura del aire en las inmediaciones de una barra caliente y muy larga con temperatura uniforme, donde la función escalar se representa de manera más efectiva en coordenadas cilíndricas, ya que su valor depende únicamente de la distancia radial desde el eje del cilindro. En este caso, las funciones escalares en los sistemas de coordenadas cilíndricas, cartesianas y esféricas se expresan generalmente como:

$$T = T(\rho) = T'(x, y, z) = T''(r, \phi, \theta). \quad (3.2)$$

Campos escalares esféricos

Cuando los valores del campo están distribuidos de tal manera que forman superficies esféricas, se considera que el campo tiene simetría esférica. Un ejemplo de ello es el potencial V creado por una carga puntual. En este contexto, la función escalar se representa de manera óptima en coordenadas esféricas, ya que su valor depende únicamente de la distancia radial desde la carga hasta el punto en el campo. En coordenadas esféricas, cartesianas y cilíndricas, se pueden distinguir tres funciones diferentes para el campo escalar:

$$V = V(r) = V'(x, y, z) = V''(\rho, \phi, z). \quad (3.3)$$

3.3 Campos vectoriales

Una magnitud vectorial $\vec{A}$, que define un vector en cada punto del espacio, se denomina **campo vectorial** o función vectorial. En coordenadas cartesianas se denota como $\vec{A}(x, y, z)$; en coordenadas cilíndricas como $\vec{A}(\rho, \phi, z)$ y en coordenadas esféricas como $\vec{A}(r, \phi, \theta)$.

El campo vectorial también puede expresarse en función del radio vector $\vec{A}(\vec{r})$, que describe la distancia desde el origen hasta el punto de interés. Ejemplos de campos vectoriales incluyen la aceleración debida a la gravedad $\vec{g}$, el campo de velocidades de las moléculas de aire $\vec{v}$ y el campo magnético de un imán $\vec{B}$. Al igual que en el caso de los campos escalares, un campo vectorial debe cumplir con los criterios de continuidad, diferenciabilidad y unicidad. Según la distribución de los vectores y su magnitud, los campos vectoriales se pueden clasificar en tres tipos.

Campos vectoriales de simetría plana

Los campos vectoriales de simetría plana presentan vectores cuya magnitud es constante en un plano dado, siendo paralelos entre sí. Un ejemplo de este tipo de campo es el campo de velocidades de las partículas en un líquido ideal en movimiento laminar. En este caso, las velocidades dependen únicamente de la altura z en coordenadas cartesianas.

En términos generales, este tipo de campo se representa de manera más eficiente en coordenadas cartesianas, ya que la función vectorial puede depender de menos

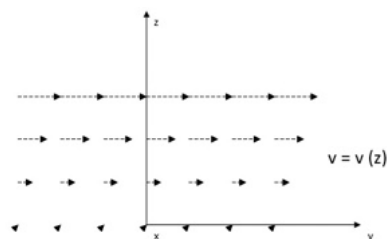


Figura 3.1.

Representación esquemática de un campo vectorial de simetría plana en una región del espacio, campo de velocidades $\vec{v}$ que dependen solamente de z .

Nota. Elaboración propia.

variables que en otros sistemas de coordenadas:

$$\vec{v} = \vec{v}(z) = \vec{v}'(\rho, \phi, z) = \vec{v}''(r, \phi, \theta). \quad (3.4)$$

Campos vectoriales cilíndricos

Cuando las magnitudes de los vectores se organizan de tal forma que conforman superficies cilíndricas con direcciones radiales respecto al eje del cilindro, se dice que el campo posee simetría cilíndrica. Un ejemplo es el campo eléctrico generado por un alambre delgado e infinito con carga uniformemente distribuida. En este caso, la función vectorial se expresa de manera más eficaz en coordenadas cilíndricas, minimizando el número de variables en comparación con otros sistemas:

$$\vec{E} = \vec{E}(\rho) = \vec{E}'(x, y, z) = \vec{E}''(r, \phi, \theta). \quad (3.5)$$

Es importante destacar que, aunque el análisis del campo puede realizarse desde diferentes sistemas de coordenadas, los vectores mantienen su dirección, magnitud y posición; sin embargo, su representación matemática varía entre sistemas, lo que puede afectar la complejidad del análisis.

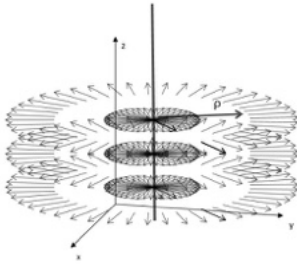
Campos vectoriales esféricos

Un campo vectorial exhibe simetría esférica cuando los vectores con la misma magnitud están distribuidos de manera que forman superficies esféricas, con direcciones que convergen hacia un centro común. Ejemplos de esto incluyen el campo gravitacional de atracción de la Tierra (de acuerdo con la ley de gravitación de Newton) cuando se observa desde grandes distancias, o el campo eléctrico $\vec{E}$ generado por una carga puntual. En estos casos, la función vectorial se representa de manera más conveniente en coordenadas esféricas, ya que su valor depende únicamente de la distancia radial desde el punto donde se localiza la carga. Las expresiones para la función vectorial en coordenadas esféricas, cartesianas y cilíndricas son generalmente:

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \vec{E}'(x, y, z) = \vec{E}''(\rho, \phi, z). \quad (3.6)$$

3.4 Conversión de coordenadas cilíndricas a cartesianas y esféricas

Consideremos el campo eléctrico de una varilla infinitamente larga y recta, cargada uniformemente, que presenta un campo dependiente del radio de la forma $\vec{E} = \frac{C\hat{\rho}}{\rho}$, donde C es una constante relacionada con el sistema de unidades y la carga, y ρ es la distancia desde la varilla al punto donde se calcula el campo. Este es un campo de simetría cilíndrica, y la ecuación más simple para describirlo es $\vec{E} = \vec{E}(C\hat{\rho}/\rho)$ (ver figura 3.2).

**Figura 3.2.**

Campo vectorial de simetría cilíndrica.

Nota. Elaboración propia.

En ocasiones, es necesario expresar campos que están en coordenadas cilíndricas en términos de coordenadas cartesianas. Utilizaremos las ecuaciones (3.5) y (1.3) para llevar a cabo esta conversión:

$$\vec{E} = \frac{C}{\rho} \hat{\rho} = \vec{E}'(x, y, z). \quad (3.7)$$

Primero, necesitamos una expresión para $\rho(x, y, z)$, que se encuentra en la ecuación (1.4):

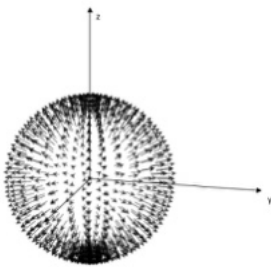
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.8) en (3.7), obtenemos la expresión del campo en coordenadas cartesianas:

$$\vec{E} = \frac{C}{\rho} \hat{\rho} = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\rho}. \quad (3.9)$$

Para expresar este campo en coordenadas esféricas (ver figura 3.3), utilizamos las fórmulas de conversión a cartesianas (10.6), donde $x = r \sin \theta \cos \phi$ y $y = r \sin \theta \sin \phi$. Así, tenemos:

$$\vec{E} = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\rho} = \frac{C}{\sqrt{(r \sin \theta \cos \phi)^2 + (r \sin \theta \sin \phi)^2}} \hat{\rho} = \frac{C}{r \sin \theta} \hat{\rho}. \quad (3.10)$$

**Figura 3.3.**

Campo vectorial de simetría esférica.

Nota. Elaboración propia.

Por tanto, el campo eléctrico en los tres sistemas de coordenadas es:

$$\vec{E} = \frac{C}{\rho} \hat{\rho} = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\rho} = \frac{C}{r \sin \theta} \hat{\rho}. \quad (3.11)$$

De la ecuación (3.11), podemos extraer varias conclusiones. Primero, la dirección del campo es idéntica en los tres sistemas de coordenadas. Segundo, se deduce que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$, lo que implica que las magnitudes son equivalentes en los tres sistemas. En consecuencia, llegamos a una conclusión universal: El resultado del campo no depende del sistema de coordenadas utilizado para representarlo.

Esto es natural, ya que el campo es un fenómeno físico independiente de la forma

en que lo observemos; los sistemas de coordenadas son meras herramientas para describir el campo.

La figura 3.4 ilustra la relación entre los tres sistemas de coordenadas. El radio del cilindro ρ es la proyección del radio de la esfera r sobre el plano xy , y puede representarse como $\sqrt{x^2 + y^2}$. Cuando el punto donde se calcula el campo se encuentra sobre el plano xy , se obtiene $r \sin \theta = r \sin 90^\circ = r = \rho$. En este contexto, no se observa dependencia de las ecuaciones respecto a las magnitudes ϕ ni z . Esto se confirma por la simetría cilíndrica: Al variar ϕ manteniendo las demás coordenadas constantes, la magnitud del resultado permanece inalterada; lo mismo ocurre al elevar los puntos mientras se mantienen constantes las otras coordenadas. Si variamos simultáneamente ϕ y z con valores arbitrarios (manteniendo ρ constante), podemos describir todos los puntos del espacio que conforman una superficie cilíndrica con magnitudes constantes de ρ .

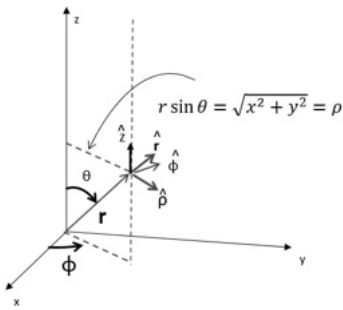


Figura 3.4.

Relación entre los tres tipos de coordenadas para el caso del campo eléctrico de una varilla infinita cargada.

Nota. Elaboración propia.

Si deseamos profundizar en el resultado de (3.11), podemos expresar el campo en función de los versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ convirtiendo el vector unitario $\hat{\rho}$ en términos de los versores del sistema cartesiano. Al colocar $\hat{\rho}$ en el centro de una circunferencia de radio uno en el plano xy , obtenemos:

$$\hat{\rho} = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi. \quad (3.12)$$

Para expresar el campo en términos de los versores del sistema esférico, si observamos la figura 3.4 desde el eje x , notamos que los versores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\rho}$ están en el mismo plano, y el ángulo entre $\hat{\rho}$ y $\hat{r}$ es $90^\circ - \theta$. Dado que $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son perpendiculares, podemos deducir que:

$$\hat{\rho} = \hat{r} \cos(90^\circ - \theta) + \hat{\theta} \sin(90^\circ - \theta) = \hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta. \quad (3.13)$$

Finalmente, podemos escribir estas ecuaciones de la forma en que se muestra en las fórmulas de Excel 3.1.

Fórmula en Excel 3.1

$$\vec{E} = \frac{C}{\rho} \hat{\rho} = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi) = \frac{C}{r \sin \theta} (\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta). \quad (3.14)$$

Fórmulas de conversión del campo en coordenadas cilíndricas a cartesianas y esféricas. El comportamiento de estas ecuaciones se puede analizar en el modelo de *ScienSolar Coordenadas cilíndricas*. ■

Podemos verificar que si tomamos $\theta = 90^\circ$ y $r = \rho$, las ecuaciones coinciden.

3.5 Conversión de coordenadas esféricas a cartesianas y cilíndricas

Consideremos el campo eléctrico generado por una carga puntual ubicada en el origen de coordenadas, el cual se expresa en términos del vector de posición como $\vec{E} = \frac{C\hat{r}}{r^2}$, donde C es una constante que depende del sistema de unidades y de la magnitud de la carga, y r es la distancia desde el origen hasta el punto de evaluación del campo. Procederemos a expresar este campo en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

Dado que el campo presenta simetría esférica, la ecuación se define en coordenadas esféricas como $\vec{E} = \frac{C\hat{r}}{r^2}$. La figura 3.3 ilustra la configuración del campo, donde la carga se sitúa en el origen. Utilizaremos las ecuaciones (3.6) y (10.6) para reformular la expresión en coordenadas cartesianas, siguiendo un procedimiento similar al del ejemplo anterior:

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \frac{C}{r^2}\hat{r} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{r}, \quad (3.15)$$

y en coordenadas cilíndricas, utilizando la ecuación (1.3), obtenemos:

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \frac{C}{r^2}\hat{r} = \frac{C}{(\rho \cos \phi)^2 + (\rho \sin \phi)^2 + z^2}\hat{r} = \frac{C}{\rho^2 + z^2}\hat{r}, \quad (3.16)$$

lo que se puede resumir como:

$$\vec{E} = \frac{C}{r^2}\hat{r} = \frac{C}{\rho^2 + z^2}\hat{r} = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{r}. \quad (3.17)$$

De la ecuación (3.17), es evidente que cuando el punto de evaluación del campo se encuentra en el plano xy (es decir, $z = 0$), las tres formulaciones son equivalentes. Para expresar estas fórmulas en función de los correspondientes versores, observamos en la figura 3.4 que los versores $\hat{\rho}$, $\hat{z}$ y $\hat{r}$ son coplanares y perpendiculares a $\hat{\phi}$. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\hat{r} = \hat{z} \cos \theta + \hat{\rho} \sin \theta. \quad (3.18)$$

Por otro lado, dado que $\hat{\rho}$ no depende de z , utilizando el razonamiento del ejemplo anterior, podemos expresar $\hat{\rho}$ como $\hat{\rho} = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi$. Así, sustituimos en la expresión de $\hat{r}$:

$$\hat{r} = \hat{z} \cos \theta + (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi) \sin \theta. \quad (3.19)$$

Sabiendo que $\hat{z} = \hat{k}$, llegamos a la representación del versor $\hat{r}$ en términos de los versores cartesianas:

$$\hat{r} = \hat{i} \cos \phi \sin \theta + \hat{j} \sin \phi \sin \theta + \hat{k} \cos \theta. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.17) se convierte en la expresión descrita en la fórmula para Excel 3.2.

Fórmula en Excel 3.2

$$\vec{E} = \frac{C}{r^2} \hat{r} = \frac{C}{\rho^2 + z^2} (\hat{z} \cos \theta + \hat{\rho} \sin \theta) = \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2} (\hat{i} \cos \phi \sin \theta + \hat{j} \sin \phi \sin \theta + \hat{k} \cos \theta). \quad (3.21)$$

Fórmulas de conversión de coordenadas esféricas a cartesianas y cilíndricas. ■

3.6 Fórmulas de conversión para los versores

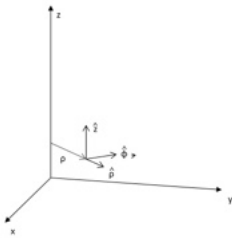


Figura 3.5.

Versores de las coordenadas cilíndricas vistos desde las coordenadas cartesianas, con $\rho = 2$, $\phi = 45^\circ$, $z = 1$.

Nota. Elaboración propia.

A partir del análisis de los ejemplos anteriores, se pueden derivar ecuaciones para la conversión de versores entre diferentes sistemas de coordenadas.

Coordenadas cilíndricas a cartesianas

La obtención del versor $\hat{\rho}$ fue discutida en el primer ejemplo (ver ecuación (3.12)). En cuanto al versor $\hat{\phi}$, este en coordenadas cartesianas está desfasado 90° respecto a $\hat{\rho}$. Por lo tanto, podemos utilizar la misma ecuación, ajustando el ángulo a $90^\circ + \phi$. La tercera ecuación es trivial:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi, \\ \hat{\phi} &= -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi, \\ \hat{z} &= \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En la figura 3.5 se ilustran los versores de las coordenadas cilíndricas expresados en el sistema cartesiano, mostrando también el vector ρ en función de las nuevas coordenadas. Se evidencia la ortogonalidad de estos vectores base.

Coordenadas cilíndricas a esféricas

En la conversión de coordenadas cilíndricas a esféricas, el comportamiento de los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{z}$ en el sistema esférico es análogo al caso anterior, mientras que el

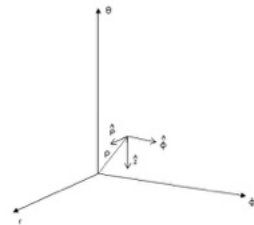


Figura 3.6.

Versores de cilíndricas desde esféricas.

Nota. Elaboración propia.

versor $\hat{\phi}$ se mantiene igual en ambos sistemas. Por lo tanto, las conversiones se expresan como:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta, \\ \hat{\phi} &= \hat{\phi}, \\ \hat{z} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta.\end{aligned}\tag{3.23}$$

La figura 3.6 muestra los versores de las coordenadas cilíndricas en términos de las coordenadas esféricas para valores específicos de ρ , ϕ y z . Este caso es poco común en la práctica, ya que las coordenadas cartesianas suelen ser más representativas, y la percepción del mundo en otros sistemas de referencia es menos intuitiva.

Coordenadas esféricas a cartesianas

La primera ecuación se deriva de (3.20). La segunda ecuación coincide con el resultado obtenido para las coordenadas cilíndricas. La tercera ecuación se obtiene mediante un desfase de 90° en relación con la primera, es decir, el versor $\hat{\theta}$ se obtiene al adelantar $\theta = 90^\circ$ con respecto a $\hat{r}$. Las conversiones son entonces:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{i} \cos \phi \sin \theta + \hat{j} \sin \phi \sin \theta + \hat{k} \cos \theta, \\ \hat{\phi} &= -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi, \\ \hat{\theta} &= \hat{i} \cos \phi \cos \theta + \hat{j} \sin \phi \cos \theta - \hat{k} \sin \theta.\end{aligned}\tag{3.24}$$

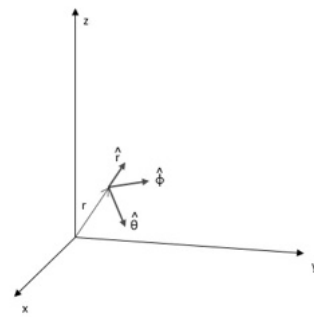


Figura 3.7.
Versores de esféricas desde cartesianas.
Nota. Elaboración propia.

La figura 3.7 ilustra los versores de las coordenadas esféricas vistos desde el sistema cartesiano, así como el vector r de las coordenadas cartesianas expresado en términos de las esféricas, con $r = 2$, $\phi = 45^\circ$, $\theta = 45^\circ$

Coordenadas esféricas a cilíndricas

La primera ecuación se deriva de (3.18). En la segunda ecuación, el versor es idéntico en ambos sistemas. La tercera ecuación se obtiene mediante un desfase en relación con la primera, como se analizó previamente.

Al analizar los versores de un sistema de coordenadas como vectores en otro, y descomponiéndolos en sus respectivos ejes, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \hat{\rho} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta, \\
\hat{\phi} &= \hat{\phi}, \\
\hat{\theta} &= \hat{\rho} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En la figura 3.8 se observa el vector r de las coordenadas esféricas en el sistema cilíndrico junto con sus respectivos versores. Aunque este análisis tiene un interés limitado en la práctica, es útil para tener a mano las fórmulas de conversión en casos especiales.

Coordenadas cartesianas a cilíndricas

La segunda ecuación se obtiene al ubicar el vector $\hat{j}$ en el plano de coordenadas $\hat{\phi}\hat{\rho}$ y descomponiéndolo en esas coordenadas.

La primera ecuación se obtiene de manera similar a la segunda, pero con un desfase de 90° , y la tercera se deriva por definición:

$$\begin{aligned}
\hat{i} &= \hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi, \\
\hat{j} &= \hat{\rho} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi, \\
\hat{k} &= \hat{z}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

La figura 3.9 ilustra las direcciones de los versores de las coordenadas cartesianas expresadas en el sistema cilíndrico para ciertos valores de r , así como también la dirección de r en este nuevo sistema. Aunque las ecuaciones (3.26) son de uso común en la práctica, representar gráficamente los vectores unitarios cartesianas en coordenadas cilíndricas es poco frecuente e intuitivo, sin embargo, el paquete *ScienSolar* facilita esta tarea.

Coordenadas cartesianas a esféricas

Las primeras dos ecuaciones se obtienen de (3.26) sustituyendo $\hat{\rho}$ de la ecuación (3.23). La tercera se deriva al ubicar $\hat{k}$ en el plano $\hat{\theta}\hat{r}$ y descomponer:

$$\begin{aligned}
\hat{i} &= \hat{r} \cos \phi \sin \theta - \hat{\phi} \sin \phi + \hat{\theta} \cos \phi \cos \theta, \\
\hat{j} &= \hat{r} \sin \phi \sin \theta + \hat{\phi} \cos \phi + \hat{\theta} \sin \phi \cos \theta, \\
\hat{k} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

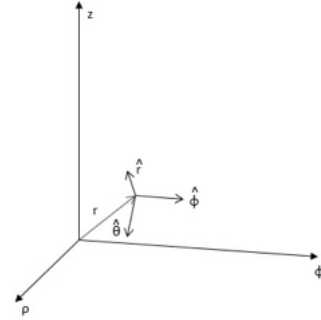
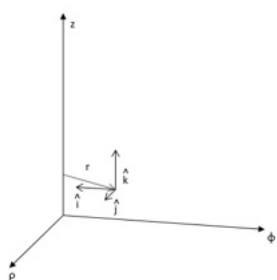


Figura 3.8.

Versores de las coordenadas esféricas vistos desde las cilíndricas, con $r = 2$, $\phi = 90^\circ$, $\theta = 45^\circ$.

Nota. Elaboración propia.

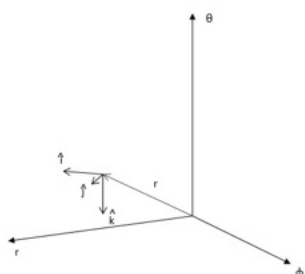
**Figura 3.9.**

Vectores de las coordenadas cartesianas desde cilíndricas, con $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Nota. Elaboración propia.

La figura 3.10 muestra las direcciones de los versores de las coordenadas cartesianas en el sistema esférico para valores específicos de r , así como la dirección de r en este nuevo sistema. Aunque las ecuaciones de esta transformación se utilizan con frecuencia, la representación de los versores en coordenadas esféricas es menos común, siendo el sistema cartesiano el más representativo del entorno que nos rodea. Sin embargo, el análisis de otras simetrías como cilíndrica y esférica, resulta provechoso al observarlas desde el sistema cartesiano.

Las ecuaciones (3.22) - (3.27) pueden ser fácilmente verificadas al sustituir ángulos específicos y comprobar la coincidencia de sus versores. Por ejemplo, en la ecuación (3.26), al sustituir $\phi = 0^\circ$, se obtiene que $\hat{i} = \hat{\rho}$ y $\hat{j} = \hat{\phi}$, confirmando su validez.

**Figura 3.10.**

Vectores de las coordenadas cartesianas vistos desde las esféricas, con $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$.

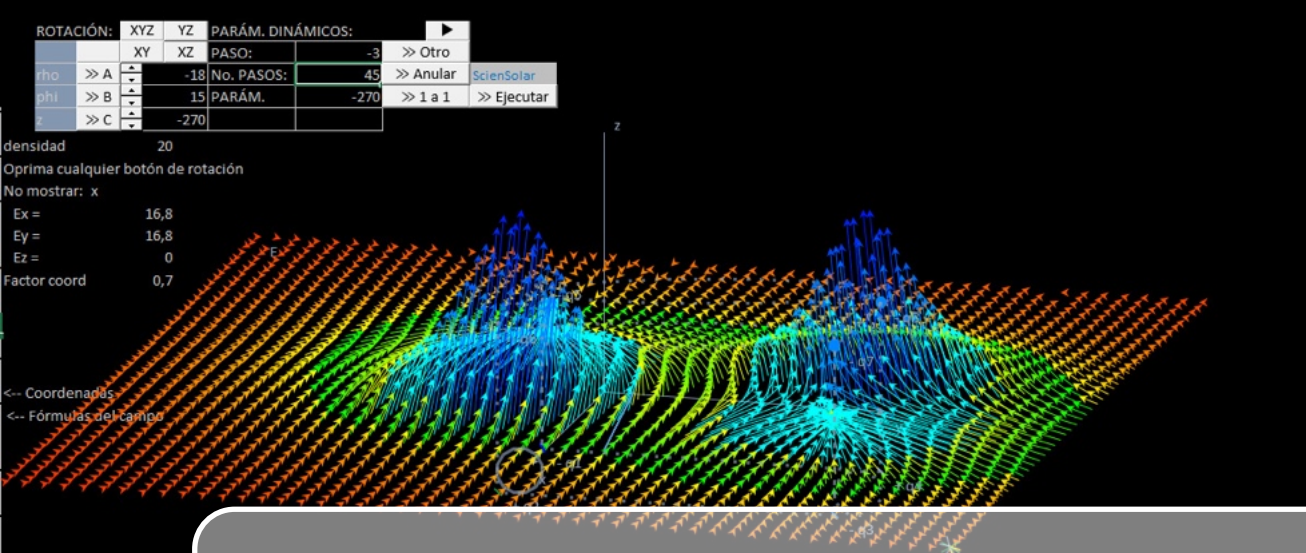
Nota. Elaboración propia.

Tipos de coordenadas modelados en ScienSolar

En el paquete *ScienSolar*, se encuentran modelos matemáticos en la lista de proyectos que ilustran el comportamiento de los diferentes tipos de coordenadas, tal como se ha explicado. En secciones posteriores de este libro, se abordará en detalle la construcción de estos modelos en una hoja de cálculo.

II

Paquete ScienSolar en MS Excel



4. Introducción

El paquete **ScienSolar** ha sido diseñado para ofrecer a profesionales de las áreas de ciencias, ingeniería y educación una herramienta accesible y poderosa para la creación de modelos matemáticos y físicos, sin la necesidad de recurrir a lenguajes de programación específicos. A pesar de estar desarrollado sobre la plataforma de Visual Basic, **ScienSolar** permite su uso a través de la interfaz intuitiva de Microsoft Excel, lo que facilita su implementación sin requerir conocimientos previos de programación. Con esta herramienta, los usuarios pueden construir modelos complejos utilizando únicamente una hoja de cálculo y el conjunto de funciones que Excel proporciona, lo que lo convierte en una solución altamente flexible y versátil para abordar problemas en diversas áreas de la física y las matemáticas.

El paquete incluye no solo el código fuente, sino también una serie de ejemplos de modelos matemáticos. Estos modelos están centrados principalmente en sistemas de coordenadas y rotaciones, así como en fenómenos físicos asociados a campos eléctricos y magnéticos. Estos ejemplos preconfigurados están listos para ser utilizados y modificados, ofreciendo un punto de partida ideal para que los usuarios desarrollen sus propios modelos o simulen nuevos escenarios.

Gracias a la potencia de Excel y a la variedad de funciones que este software ofrece, la capacidad para crear modelos de distintos tipos de problemas se expande

casi ilimitadamente. A esto se suma la facilidad con la que los usuarios pueden interactuar con las hojas de cálculo. Microsoft Excel, al ser ampliamente utilizado, cuenta con una enorme cantidad de recursos de apoyo disponibles en línea, lo que simplifica el proceso de aprendizaje y resolución de dudas.

ScienSolar aprovecha al máximo las herramientas visuales de Excel como la manipulación de objetos, colores y grosores de línea, para hacer los modelos no solo funcionales, sino también visualmente atractivos. De manera intuitiva, **ScienSolar** permite al usuario reproducir un sistema de coordenadas en la hoja de cálculo, ubicar los vectores necesarios para el modelo en cuestión, y manipularlos, todo mediante ecuaciones y fórmulas que se ingresan en celdas específicas.

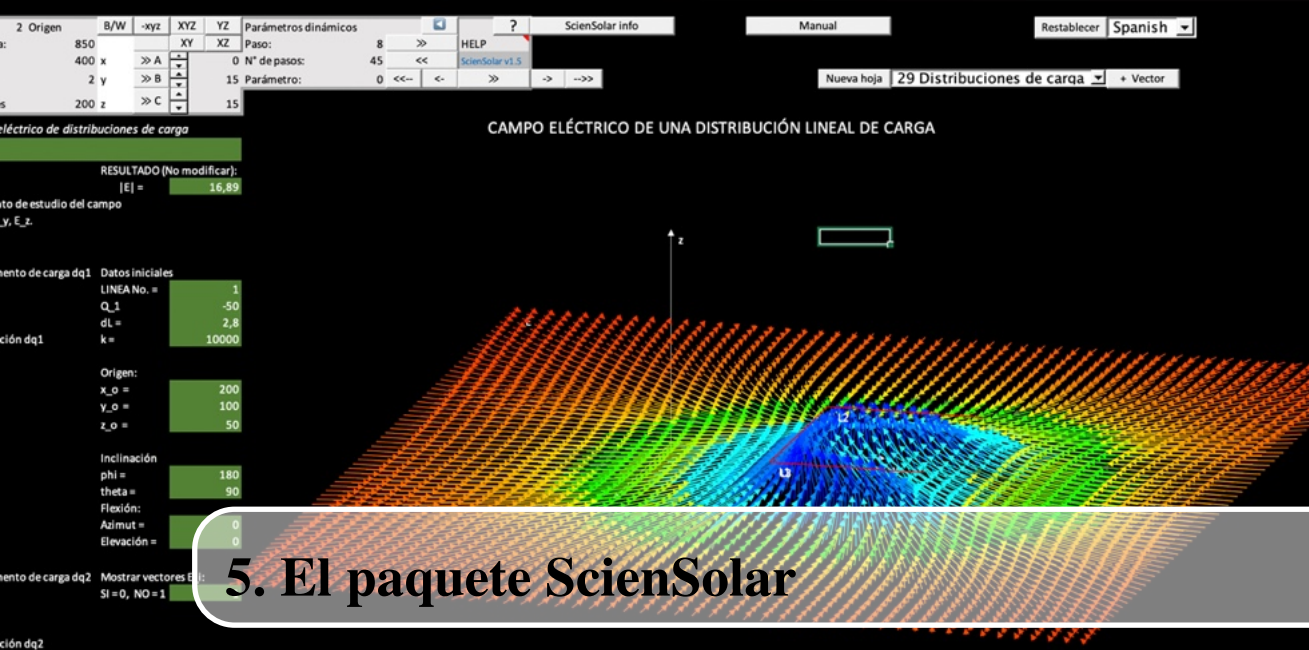
Para construir cualquier modelo en Microsoft Excel utilizando **ScienSolar**, es esencial contar con los siguientes componentes:

- **Ecuaciones matemáticas.** El primer paso es analizar el modelo matemáticamente, identificar las ecuaciones que lo describen y expresarlas en función de las coordenadas (x, y, z) .
- **Parámetros y variables.** Para maximizar la utilidad del modelo, es necesario identificar los parámetros que podrán ser modificados durante una simulación, permitiendo estudiar cómo varía el comportamiento del modelo ante diferentes ajustes. En ecuaciones dinámicas, el parámetro principal suele ser el tiempo. **ScienSolar** proporciona una celda en Excel dedicada a estos parámetros, cuya variabilidad está limitada solo por el rango que el usuario defina. Además, las coordenadas (x, y, z) suelen funcionar como variables, aunque **ScienSolar** también es compatible con otros sistemas de coordenadas.
- **Simetría.** Aunque no es estrictamente necesario, identificar la simetría del problema puede optimizar la construcción del modelo, simplificando los cálculos y mejorando los resultados. Para problemas con simetría esférica o cilíndrica, el paquete incluye modelos predefinidos que aceleran el proceso de desarrollo.

Con estos tres elementos en mente, el usuario podrá comenzar a desarrollar modelos de manera efectiva en MS Excel utilizando **ScienSolar**. Aunque las funciones estándar de Excel suelen ser suficientes para muchos problemas, el entorno de Microsoft Office también permite la creación de funciones personalizadas cuando sea necesario. Además, dado que el código de **ScienSolar** es abierto, los usuarios tienen la posibilidad de desarrollar nuevas funciones en Visual Basic y utilizarlas directamente en la hoja de cálculo.

Este libro proporciona una guía detallada para el uso efectivo de **ScienSolar**. Como se habrá deducido, **ScienSolar** es un complemento para Excel y no se

ejecuta de manera independiente, por lo que su utilización requiere tener instalado el software de Microsoft Office.



5. El paquete ScienSolar

5.1 Características del paquete

El paquete de códigos *ScienSolar* es un conjunto de funciones y procedimientos escritos en el lenguaje *Visual Basic for Applications* (VBA), que se integran a un archivo ordinario de Excel mediante el copiado y pegado en el editor de VBA que ofrece la aplicación. Este paquete es de código abierto, lo que significa que no forma parte de MS Excel, sino que fue desarrollado de manera independiente para ser integrado en este programa, con el fin de ofrecer funcionalidades de modelado matemático y físico.

5.2 Metadata del paquete

- **Título del paquete.** El software se ha titulado *ScienSolar*.
- **Descripción.** El paquete crea una interfaz 3D en la hoja de cálculo, junto con las herramientas y funcionalidades necesarias para crear modelos de problemas de física en Excel, sin necesidad de recurrir a código de programación.
- **Programa destino.** Todas las versiones de MS Excel. Se ha verificado su funcionalidad en los sistemas operativos de Windows y Mac.
- **Principales características.** Fácil de incrustar en cualquier libro de Excel, permite crear simulaciones 3D sin necesidad de escribir código, y facilita la

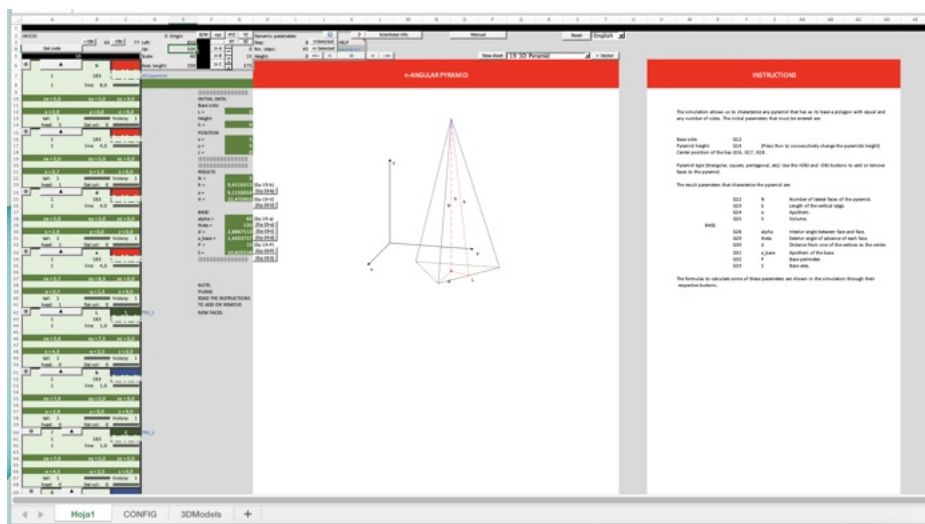


Figura 5.1.

Vista general del tablero de control del paquete ScienSolar. En la parte superior se ubica el panel de control, a la izquierda la zona de configuración de los vectores, en el centro el sistema de coordenadas y a la derecha la zona para el marco teórico.

Nota. Elaboración propia.

creación de código independiente para cada nuevo proyecto. Los cálculos en los modelos son numéricos. Funciona exclusivamente dentro de un libro de MS Excel.

- **Enlace de descarga.**
<https://sciensolar.com/en/download-sciensolar/>.
- **Tipo de licencia para uso.** Código abierto bajo la licencia GNU General Public License v. 3.0.
- **Lenguaje.** Visual Basic for Applications (VBA).
- **Distribución.** El código se distribuye en archivos de texto (**.txt**) o en archivos tipo **.bas** para ser importados desde el editor de VBA en Excel. En las versiones 1.6 y anteriores, los archivos **MODULE_1.txt** y **MODULE_2.txt** contienen el código principal del programa, mientras que los demás llevan el código de ejemplos de modelos físicos y matemáticos. En las versiones *ScienSolar* 1.7 y posteriores, los archivos **MAIN1**, **MAIN2**, **MAIN3** Y **MAIN4** (ya sea **.txt** o **.bas**) albergan el código principal del programa, y los demás archivos contienen los códigos de los modelos en diferentes idiomas: la terminación **_EN** corresponde al idioma inglés, **_ES** al español, **_RU** al ruso, **_ZH** al chino, **_IT** al italiano y **_FR** al francés.
- **Instalación si el paquete viene con archivos .txt.** Para instalaciones desde cero, con los paquetes que vienen en formato **.txt** se copia todo el contenido

de cada archivo a un nuevo módulo estándar en el Editor de Visual Basic de un libro de Excel. Si el nombre del archivo empieza con **frm** entonces se debe crear un formulario y pegar dentro del formulario el código. Para los archivos que empiezan con **cls** se debe crear un módulo de clase.

- **Instalación si el paquete contiene archivos .cls, .frm y .bas.** Esta instalación (versión 1.7 y posterior) es más sencilla y segura: en un libro nuevo, desde el editor de VBA, en el explorador de proyectos se hace click derecho y se selecciona **Importar archivo...**, en la ventana emergente se busca la carpeta en donde están los archivos ScienSolar en formatos **.cls**, **.frm** y **.bas**, y se selecciona uno por uno cada archivo, hasta completar la instalación (figuras 5.5 y 5.6). Luego, en la hoja de cálculo, mediante la pestaña de desarrollador, se agrega un botón y se asigna la macro `NewSheet()`. Finalmente, se presiona el botón para obtener la interface de *ScienSolar*. Más abajo se explicará con detalle este procedimiento.

A continuación, se desglosa el contenido de los archivos de la versión 1.7:

1. **MAIN1.** Contiene los procedimientos principales para generar el tablero de control de *ScienSolar*.
2. **MAIN2.** Contiene procedimientos auxiliares que apoyan al procedimiento principal, necesarios para el funcionamiento correcto de *ScienSolar*.
3. **MAIN3.** Código de funciones adicionales en la versión 1.7; código para el módulo de operadores diferenciales (Proyecto 2) y código para el módulo generador de trayectorias de recorrido de los vectores (proyecto 15).
4. **MAIN4.** Módulo de VBA destinado al texto de la interface (botones, información, mensajes, celdas, etc) en los diferentes idiomas. Este código se ejecuta solamente en la primera instalación, o después de eliminar la hoja CONFIG.
5. **frmSSInputBox.** Código dentro del primer formulario para generar las ventanas de ingreso de información por parte del usuario.
6. **frmSSMsgBox.** Código dentro del segundo formulario para generar las ventanas emergentes con información para el usuario.
7. **clsGlobalState.** Código dentro de un módulo tipo clase, permite generar valores globales que pueden ser utilizados por las diferentes macros.
8. **Projects_EN1, Projects_EN2 ...** Albergan los modelos físicos y matemáticos de ejemplo en el idioma inglés.
9. **Projects_ES1, Projects_ES2 ...** Albergan los modelos físicos y matemáticos de ejemplo en el idioma español.
10. **Projects_RU1, Projects_RU2 ...** Albergan los modelos físicos y matemáticos de ejemplo en el idioma ruso.
11. **Projects_IT1, Projects_IT2 ...** Albergan los modelos físicos y matemáticos de ejemplo en el idioma italiano.

12. **Projects_FR1, Projects_FR2 ...** Albergan los modelos físicos y matemáticos de ejemplo en el idioma francés.
13. **3DModels.xlsx:** Hoja de cálculo auxiliar que contiene objetos necesarios para algunos modelos de ejemplo. En esta hoja se guardan objetos importados o fórmulas para nuevos modelos.

Nota: Algunos modelos avanzados pueden tener módulos adicionales para complementar ciertas funciones que no se tienen en el paquete estándar. En la versión **1.7 Pro** se tienen además los módulos:

14. **MAIN_PRO.** Módulo que contiene macros adicionales que mejoran la funcionalidad del modelo básico de campos eléctricos de los elementos de la tabla periódica. Este código agrega nuevos botones al escáner de campo con funciones como: generar el campo escalar del potencial de los átomos, extraer electrones de los átomos, reemplazar cargas puntuales por nubes electrónicas de puntos finitos, entre otros.
15. **frmPTable.** Este formulario adicional genera una tabla periódica interactiva en forma de ventana emergente, complementando la lista de elementos convencional.
16. **clsPTable** Código para un módulo tipo clase, necesario para hacer funcionar la tabla periódica interactiva.

A continuación, se describen con detalle los pasos para instalar *ScienSolar* 1.7 de manera correcta en un archivo nuevo de Excel.

5.3 Instalación

La instalación del paquete es muy sencilla y no requiere ejecutar ningún instalador.

Si ya tiene *ScienSolar* funcionando en una hoja de cálculo de Excel, puede omitir esta sección. De lo contrario, siga los pasos a continuación para configurar el paquete en su archivo de Excel. Una vez instalado *ScienSolar*, el archivo se guardará habilitado para macros. Además, podrá guardar copias del archivo, lo que facilita la organización del trabajo por áreas o materias. Cada archivo puede albergar múltiples proyectos o modelos, y es posible trabajar simultáneamente en hojas de cálculo diferentes.

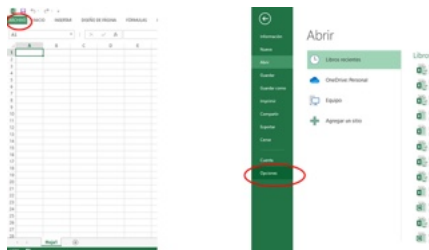


Figura 5.2.

Menú de opciones en Windows.

Nota. Elaboración propia.

Paso 1

Descargue los 13 archivos (versión 1.7 estándar) o 16 archivos (versión Pro) anteriormente descritos desde la página web www.sciensolar.com.

Paso 2

Abra la aplicación Microsoft Excel y cree un nuevo libro.

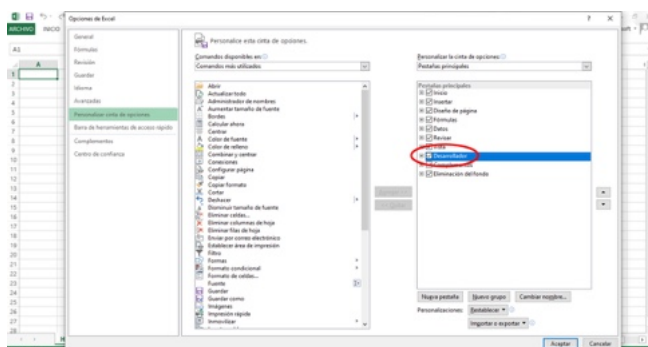


Figura 5.3.

Activando la casilla Desarrollador.

Nota. Elaboración propia.

Paso 3

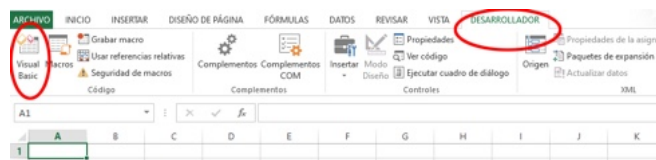
Habilite la pestaña *Desarrollador*. En Windows, en el menú de Excel, haga clic en *Archivo*, luego seleccione *Opciones* (figura 5.2). En la ventana que aparece, diríjase a *Personalizar cinta de opciones* y, en la parte derecha, marque la casilla *Desarrollador*. Finalmente, haga clic en *Aceptar* (figura 5.3). En Mac, seleccione *Excel > Preferencias > Cinta y barra de herramientas*, luego, en *Personalizar la cinta de opciones*, active *Programador en Pestañas principales*.

Paso 4

Vaya a la pestaña *Desarrollador* en el menú de Excel (aparecerá después de realizar el paso 3) y haga clic en el botón *Visual Basic*, que generalmente se encuentra en la parte izquierda del menú. Esto abrirá el editor de Visual Basic (figura 5.4). También puede acceder al editor presionando **Alt + F11** en Windows o **Fn + Option + F11** en Mac.

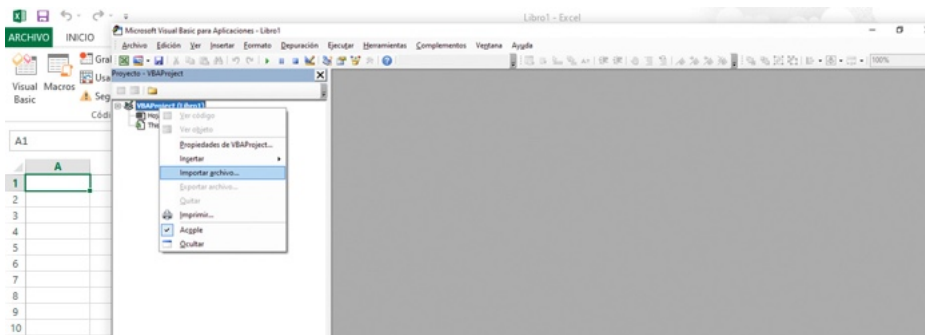
Paso 5

En el editor de Visual Basic, en el explorador de proyectos (ubicado a la izquierda; si no está visible, puede habilitarlo desde el menú *Ver* seleccionando *Explorador de proyectos*), haga clic derecho sobre *VBAProjects*, luego seleccione *Importar archivo ...* (figura 5.5). Explore la carpeta donde tiene descargados los archivos **.cls**, **.frm** y **.bas**, abra uno por uno hasta completarlos todos. Los archivos con extensión **.frx** se instalan automáticamente. En la figura 5.6 se muestra la ventana

**Figura 5.4.**

Acceso al editor de Visual Basic.

Nota. Elaboración propia.

**Figura 5.5.**

Importando un nuevo archivo en el editor de Visual Basic.

Nota. Elaboración propia.

emergente con la lista completa. Debe asegurarse de instalar sólo una vez cada archivo. En el caso de instalar accidentalmente un mismo archivo dos veces, bórralo en el editor VBA en el menú de click derecho, si no lo hace, esto generará error al compilar.

Paso 6

Vaya a la hoja de Excel y, en la pestaña *Desarrollador*, en el grupo de controles, haga clic en *Insertar* (figura 5.7a). Luego, bajo *Controles de formulario*, seleccione *Botón (control de formulario)* y dibuje un pequeño botón en la hoja. Aparecerá una ventana emergente para asignar una macro al botón. En esta ventana, seleccione la macro *NewSheet* y haga clic en *Aceptar* (figura 5.7b). Después, haga clic en cualquier celda para deseleccionar el botón.

Paso 7

Haga clic en el botón recién creado. Esto agregará una nueva hoja llamada *CONFIG*, que contendrá las etiquetas predeterminadas del tablero de control y la lista de proyectos, junto con una nueva hoja para comenzar a trabajar, tal como se muestra en la figura 5.8. Desde el cuadro combinado de la hoja, puede seleccionar cualquier proyecto y cargarlo presionando el botón **+ Vector**. En la figura 5.1 se muestra el proyecto 19 como ejemplo.

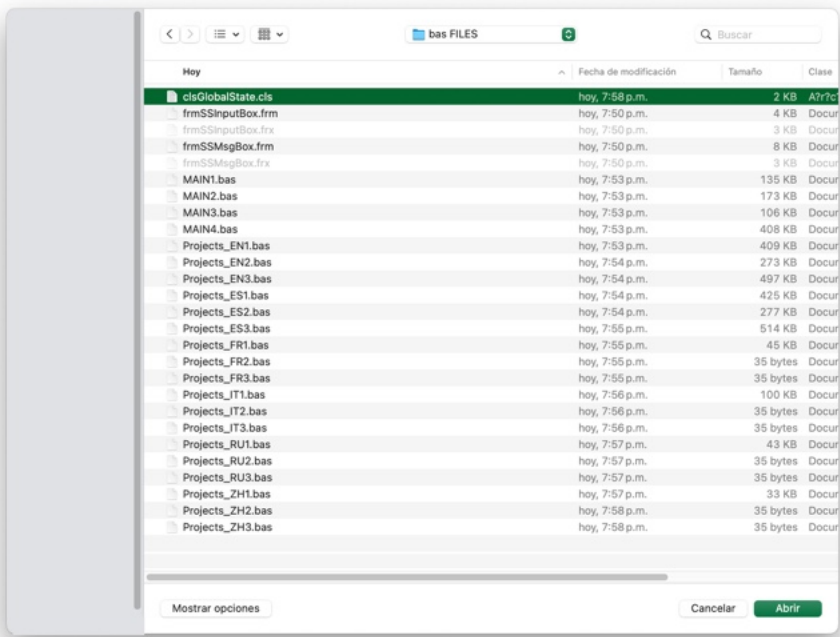


Figura 5.6.

Abriendo cada archivo para introducirlo en el editor de VBA. Repita este procedimiento para todos los archivos. Tenga cuidado de no repetir la acción para un mismo archivo.
Nota. Elaboración propia.

La hoja *CONFIG* no debe ser eliminada ni renombrada. Sin embargo, en ella puede modificar el texto predeterminado del tablero de control mediante sus celdas correspondientes. Es importante que no cambie las etiquetas *INICIO*, *LISTA* ni *LENGUAJE* (se encuentran en rojo), ya que *ScienSolar* las utiliza para ubicar el tablero de control y la lista de proyectos. El resto de las etiquetas y los nombres de los proyectos pueden modificarse a voluntad. Los números de los proyectos deben estar en orden ascendente y coincidir con los números de sus respectivos códigos (véase la figura 6.5 en el capítulo 6).

Paso 8

Abra el libro de Excel **3DModels.xlsx** que se descargó junto con los demás archivos, luego sobre el nombre de la hoja (parte inferior izquierda) haga click derecho y seleccione **Mover o copiar**, seleccione el libro en donde instaló el código y dele **Aceptar** para mover la hoja al nuevo libro (ambos libros deben estar abiertos).

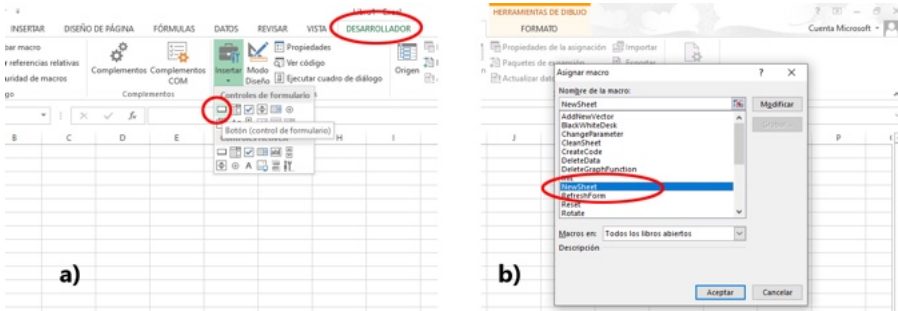


Figura 5.7.

a) Agregando el botón de inicio de ScienSolar; b) Asignando la macro *NewSheet* al botón.

Nota. Elaboración propia.

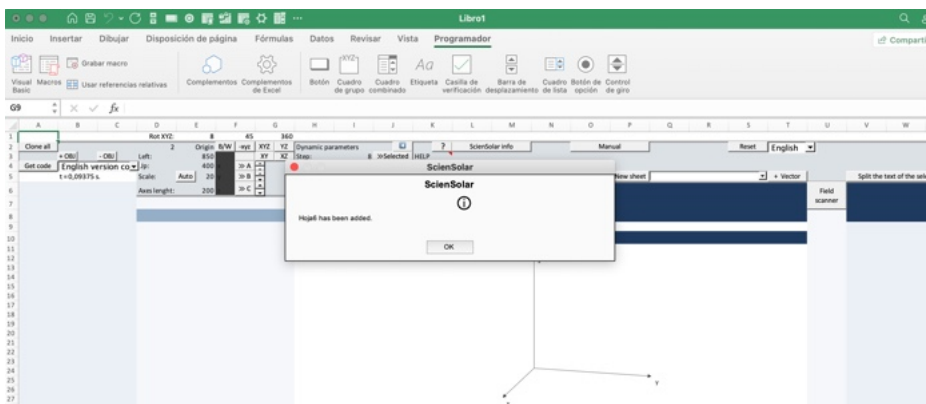


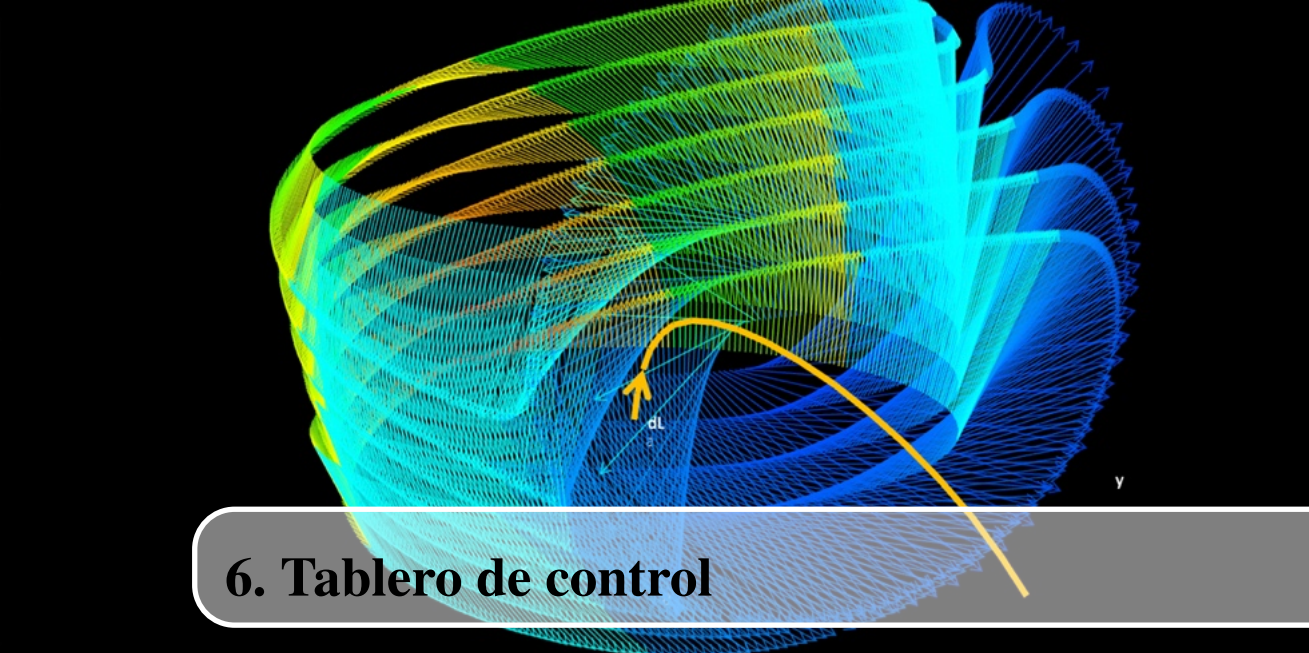
Figura 5.8.

Creando una nueva hoja para un nuevo proyecto después de hacer clic en el botón con la macro *NewSheet*.

Nota. Elaboración propia.

Paso 9

Cuando guarde el archivo, asegúrese de hacerlo como un **libro de Excel habilitado para macros**. De lo contrario, no se guardarán los cambios y el archivo no tendrá las funcionalidades necesarias para el modelado. Puede guardar varias copias del archivo para organizar los proyectos por materias. En cada hoja se puede almacenar un proyecto y en cada libro pueden guardarse múltiples proyectos.



6. Tablero de control

6.1 Vista general del entorno de trabajo

Al abrir un archivo de Excel con el código de *ScienSolar*, el usuario accederá al tablero de control y al entorno de trabajo. Cada nueva hoja que se cree a través de *ScienSolar* tendrá su propio entorno independiente, por lo que los cambios realizados en una hoja no afectarán a otras. Es decir, todos los botones y celdas de cada hoja se limitan a operar dentro del contexto de esa hoja específica. El usuario puede abrir tantas hojas como desee, cada una con su propio tablero de control.

Además, cada hoja permite utilizar herramientas convencionales de Excel como la visualización de la cuadrícula y las barras de fórmulas. También es posible renombrar las hojas o copiarlas, incluso con proyectos en curso, para iniciar un nuevo proyecto basado en otro.

Para guardar un libro de Excel con el paquete *ScienSolar*, es necesario hacerlo en el formato habilitado para macros. De lo contrario, Excel no guardará las macros ni el paquete *ScienSolar*.

El tablero de control está compuesto por todos los botones y celdas necesarias para el funcionamiento del paquete en el proceso de modelado. El área del tablero de control se divide en siete zonas funcionales, como se muestra en la figura 6.1.

Estas zonas son:

- **Zona 1.** Control de nuevos proyectos o vectores.
- **Zona 2.** Configuración de los vectores, que aparece cuando el usuario los agrega a la hoja.
- **Zona 3.** Datos y fórmulas complementarias que el usuario pueda necesitar.
- **Zona 4.** Sistema de coordenadas cartesianas y visualización del modelo.
- **Zona 5.** Control del sistema de coordenadas, vistas y dimensiones.
- **Zona 6.** Control de simulaciones del modelo.
- **Zona 7.** Instrucciones o teoría del modelo.

El área restante (a la derecha de la *Zona 7*) está libre para otros usos o para la obtención de datos durante las simulaciones. En las áreas no delimitadas del tablero de control se encuentran algunos botones complementarios, como el botón de ayuda y los botones de información del paquete, así como un vínculo al manual del usuario. El botón de ayuda proporciona información sobre la celda activa en el momento en que se oprime. Para ocultar la información de ayuda, basta con hacer clic en cualquier botón de la *Zona 5*.

A continuación, describimos cada una de estas zonas en detalle.

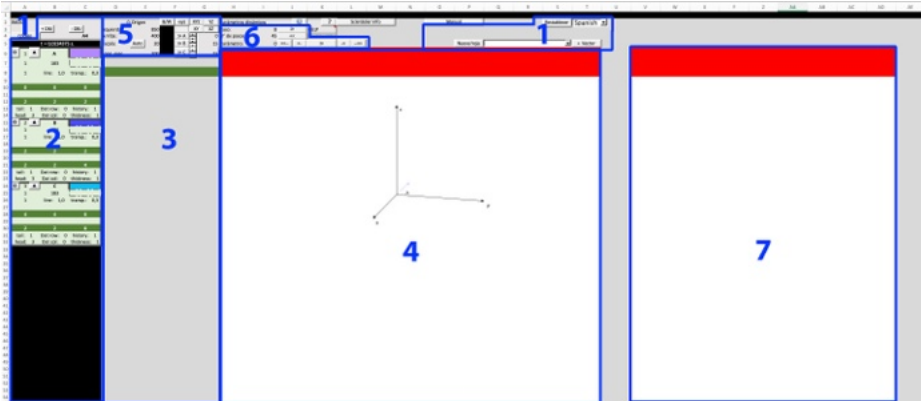


Figura 6.1.

División en secciones del tablero de control de acuerdo a su funcionalidad: 1. Nuevo proyecto; 2. Configuración de vectores; 3. Zona de datos complementarios; 4. Visualización del modelo; 5. Vistas del modelo; 6. Ejecución de simulaciones; 7. Zona de texto.

Nota. Elaboración propia.

6.2 Zona 1: Nuevo proyecto

Esta sección del tablero de control está dedicada al inicio del trabajo del usuario. Desde aquí se pueden cargar proyectos existentes desde la lista de *ScienSolar* o

iniciar un nuevo proyecto.

En la figura 6.3 (más adelante) se muestran las celdas y botones correspondientes a esta zona, que se divide en dos secciones. La primera fila de la hoja de cálculo no tiene ninguna función específica, por lo que el usuario puede utilizarla para sus propios fines, si lo desea. A continuación, detallamos las funciones de cada celda en esta zona. El signo igual se usará para indicar el valor de la celda, que puede ser una fórmula, texto o un número.

6.3 Celda A2 = INICIO

La celda **A2** = INICIO debe conservar este texto en mayúsculas de manera obligatoria. Este valor sirve como referencia para que el código identifique el inicio del tablero de control. Es importante que esta celda mantenga siempre su valor *INICIO*.

6.4 Botón Restablecer

El botón  borra todo el contenido de la hoja y la devuelve a su forma inicial. Esta acción también ajusta el panel de control al idioma seleccionado en el cuadro combinado a su derecha (si el idioma está configurado en la hoja CONFIG). Al presionar este botón, aparecerá una ventana emergente de alerta pidiendo confirmación antes de ejecutar la acción, que es irreversible. Se recomienda usar este botón solo si está seguro de querer eliminar todo el trabajo realizado en la hoja y comenzar un nuevo proyecto.

Este botón solo afecta la hoja actual y no modifica ningún proyecto de la lista. Si desea modificar un proyecto ya existente en la lista, diríjase a la sección 6.8. Además, en la sección 6.8 se explica cómo duplicar un proyecto en un nuevo idioma.

6.5 Botón Nueva hoja

El botón  agrega una nueva hoja de cálculo al libro, con su propio tablero de control. Cada hoja tiene su propio tablero de control independiente, sin afectar a otras hojas. Esta opción es útil cuando se desea abrir un nuevo proyecto o modelo sin que esto interfiera con el trabajo en curso. La nueva hoja generada se muestra en la figura 6.2.

6.6 Botón Nuevo vector

El botón  permite agregar un nuevo vector al sistema de coordenadas. Junto a él, el botón  se utiliza para eliminar el vector agregado previamente.

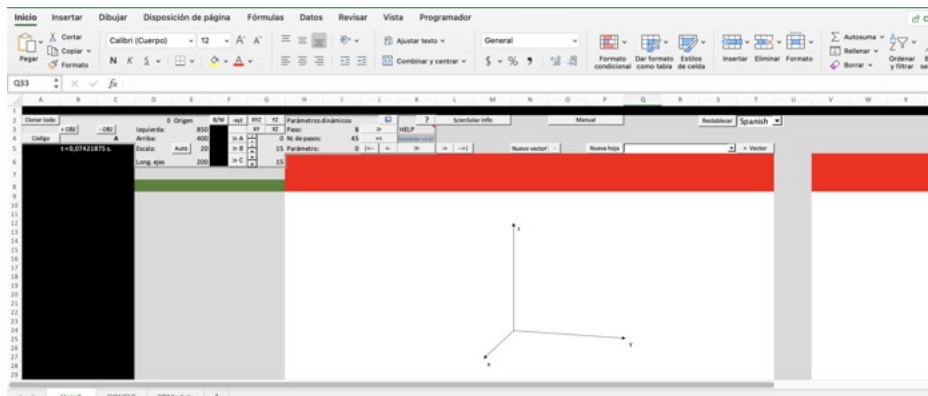


Figura 6.2.

Vista general del entorno de trabajo de la plataforma de simulaciones ScienSolar obtenida al presionar el botón **Restablecer** o el botón

Nueva hoja

Nota. Elaboración propia.

Cuando la hoja está en blanco, se pueden agregar y eliminar vectores de manera libre, siempre que quede al menos un vector en la hoja. Sin embargo, si hay un proyecto cargado desde la lista, se podrán agregar o quitar vectores, pero no se podrán eliminar aquellos vectores que formen parte del proyecto en curso. Los vectores que pertenecen al proyecto no pueden eliminarse para evitar la alteración de la configuración original del proyecto.

6.7 Botón Vector **+ Vector**

El botón **+ Vector** agrega un nuevo vector al sistema de coordenadas si no se ha seleccionado ningún proyecto en el cuadro combinado. Si se ha seleccionado un proyecto, agregará ese proyecto al tablero de control.

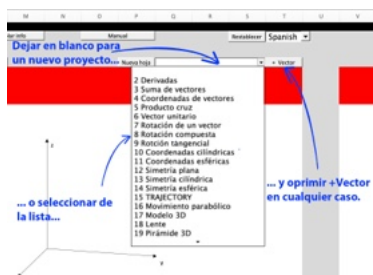


Figura 6.3.

Zona 1 del tablero de control.

Nota. Elaboración propia.

Al presionar este botón con el cuadro combinado vacío, se agregan a la Zona 2 un conjunto de celdas distribuidas en 9 filas, que corresponden a la configuración del nuevo vector. Una vez presionado cualquier botón de la Zona 5, el vector se visualizará en el sistema de coordenadas.

Si el proyecto está seleccionado en la lista, se agregan a la Zona 2 todas las celdas necesarias para configurar los vectores del proyecto. Cada conjunto de celdas para cada vector ocupará 9

filas en la *Zona 2*, y el número del vector aparecerá en la primera fila y columna de cada conjunto, lo que facilita su identificación. Los botones de la *Zona 5* permiten ver los vectores desde diferentes ángulos. En la descripción de la *Zona 2* se detalla cómo se configura cada vector.

6.8 Botón Código

El botón **Código** se encuentra en la esquina superior izquierda del tablero de control. Este botón se utiliza cuando se ha diseñado un nuevo proyecto o actualizado uno existente y se desea guardarlo en la lista de *ScienSolar*. Los nuevos modelos necesitan que su código sea agregado al editor de Visual Basic. Para que un proyecto nuevo se pueda agregar a la lista, deben seguirse tres pasos:

1. Generar un archivo de texto con el código del proyecto presionando el botón **Código**.
2. Abrir este archivo y copiar el código al editor de VBA.
3. En el tablero de control de *ScienSolar*, oprimir el botón **Restablecer** para actualizar la lista en la hoja CONFIG.

A continuación, se describen estos pasos.

Paso 1: Generar el código

Es importante tener en cuenta que el código generado solo almacenará las configuraciones de los vectores, las fórmulas y el texto que se encuentren en las zonas 2, 3, 4, 7 y algunas celdas del tablero de control (figura 6.1). Las celdas fuera de estas zonas no se incluirán en el código, por lo que se recomienda construir los modelos exclusivamente en estas áreas. Los colores y el formato de las celdas no se guardarán en el código, excepto el color de los vectores.

Para generar el código de un nuevo proyecto, asegúrese de que el cuadro combinado no tenga ningún proyecto seleccionado y presione el botón **Código**. Si el proyecto se ha creado desde cero, aparecerá una ventana pidiendo el nombre del autor y luego el nombre del proyecto, con un sufijo correspondiente al idioma (por ejemplo, 38_campo_magnetico_ES). Se recomienda conservar el sufijo del idioma para que coincida con el generado en el código interno. Evite usar caracteres especiales como tildes.

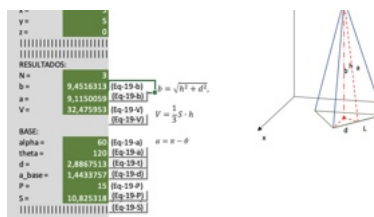


Figura 6.4.

Uso del prefijo "(Eq-" para la introducción de botones que muestran las ecuaciones.

Nota. Elaboración propia.

El nombre del archivo de texto generado no está relacionado con el código, pero es recomendable usar un nombre coherente

con el proyecto y el idioma para facilitar la identificación en la carpeta. *Nota: Si el nombre del archivo ya existe, se sobrescribirá sin previo aviso.*

Generación de botón para ecuaciones. En el proceso de generación del código, *ScienSolar* escaneará todas las celdas de las zonas mencionadas y, donde encuentre el prefijo (**Eq-**, se ubicará un botón asociado al nombre completo de la ecuación correspondiente, que estará almacenada en la hoja *3DModels* y aparecerá en la hoja actual al oprimir el botón (ver figura 6.4), por ejemplo, si J24 = (Eq-24-CampoMagnetico), al generar el código y cargarlo en el proyecto, se generará un botón en J24 que traerá la ecuación completa con su nombre. El nombre de la ecuación en la hoja *3DModels* deberá ser (*Eq-24-CampoMagnetico*), incluyendo los paréntesis.

Generación de traducciones. Para generar una traducción de un modelo existente, cargue el modelo, modifique el texto de las celdas que desee traducir y luego seleccione el nuevo idioma en el cuadro combinado antes de presionar el botón Código. Esto generará una versión del proyecto con el sufijo correspondiente al nuevo idioma.

Actualización de un proyecto. Para generar el código de una actualización, seleccione el proyecto correspondiente luego presione el botón Código.

Paso 2. Agregar el proyecto a la lista de *ScienSolar*

Para que el proyecto quede guardado en *ScienSolar* y aparezca en la lista de proyectos, es necesario seguir dos pasos: Primero, copiar el código al editor VBA, y luego agregar el nombre del proyecto a la lista en la hoja *CONFIG* del libro de Excel. El segundo paso se realiza automáticamente al presionar el botón Restablecer.

Primero, abra el archivo de texto generado en el *Paso 1*, que contiene el código fuente del proyecto. Seleccione todo el código utilizando el clic derecho del ratón y eligiendo *Seleccionar todo* (o Comando + A en Mac), y luego cópielo. Después, abra el libro de Excel y acceda al editor de VBA. En el explorador de proyectos, agregue un nuevo módulo y pegue el código allí, tal como se muestra en la figura 5.6. También es posible pegar el código en módulos existentes, siempre y cuando no estén saturados.

A continuación, diríjase a la hoja *CONFIG* y, en la lista de proyectos, agregue el nombre del nuevo proyecto después del último en la lista. En la columna contigua, añada el número correspondiente que aparece en la primera línea del código, justo después de Sub *Project_* (consulte el archivo de texto que acaba de pegar en el editor). Este número debe coincidir con el número del proyecto en el código para que el proyecto sea encontrado correctamente. El nombre del proyecto puede ser cualquier texto, pero asegúrese de que el número coincida.

Si los números no coinciden, se debe dar prioridad al número consecutivo y modificar el número en el encabezado de los códigos en las diferentes versiones de los idiomas, tal como se muestra en la parte derecha de la figura 6.5.

Nota: Si el número del proyecto en el encabezado no está siendo utilizado por otro proyecto (es decir, no está asignado a ningún proyecto en la lista), al presionar el botón **Restablecer**, *ScienSolar* se encargará automáticamente de colocar el nuevo proyecto en la lista de manera correcta.

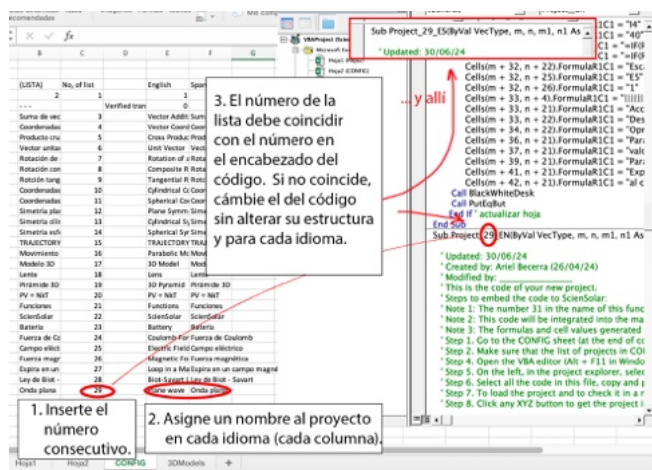


Figura 6.5.

Ingresando en la página CONFIG el nombre del nuevo proyecto (elegido por el usuario) y su número correspondiente de acuerdo al que aparece en el código fuente del proyecto.

Nota. Elaboración propia.

6.9 Cuadro combinado - lista de proyectos

El cuadro combinado se muestra en la figura 6.3 y contiene la lista de proyectos integrados al paquete *ScienSolar*. El botón **+ Vector** ejecuta el código dependiendo de lo que esté seleccionado en la lista; si en ella no está seleccionado ningún proyecto entonces el botón generará un **nuevo vector** con la configuración preestablecida. Si por el contrario, se ha seleccionado un proyecto, *ScienSolar* buscará el procedimiento de este proyecto y cargará a la hoja todos sus vectores, fórmulas y valores en las correspondientes celdas. En la figura 6.3 se muestra el ejemplo de cargar un proyecto de la lista.

6.10 Zona 2: Configuración de vectores

En la figura 6.6 se muestran las celdas y botones correspondientes a esta zona. La celda **A5** se utiliza para contar el número de vectores que fueron agregados a la

hoja en el caso de proyectos de la lista. La celda **B5** muestra el tiempo que dura una acción antes de aparecer sus resultados en la hoja, útil por ejemplo durante la ejecución de una simulación o renderización. De aquí en adelante se explicará el rol que jugará cada celda para el primer vector, lo cual es válido para cualquier otro vector que se agregue a la hoja, cuyas direcciones de las celdas se diferencian en que al número de fila se le va sumando 9 con respecto a la del vector anterior, mientras que las columnas permanecen constantes.

6.11 Celda C4. Nombre de un vector nuevo

La celda **C4** está destinada para darle el nombre a un nuevo vector antes de oprimir el botón **+ Vector**. Al usar esta celda, la configuración del nuevo vector saldrá a la hoja ya con el nuevo nombre, el cual se podrá cambiar posteriormente en la celda de configuración del respectivo vector. Si no se especifica ningún nombre, *ScienSolar* le asignará un nombre consecutivo automático.

6.12 Botones **+OBJ**, **-OBJ**, celda B2

El botón **+OBJ** se utiliza en un modelo ya elaborado para duplicar un paquete de celdas que deben ubicarse entre las columnas A y E inclusive y ponerlas al final después de la última fila no vacía. Este proceso se hará mediante la función de MS Excel de copiado y pegado de celdas, por lo que conservará todas sus propiedades, las fórmulas con direcciones relativas y absolutas serán copiadas de la misma forma que MS Excel lo hace convencionalmente. El rango de filas a copiar se establece en las celdas **B3** = número de fila inicial y **C3** = número de fila final. Este rango puede ser ingresado de forma predeterminada por el usuario al elaborar el modelo, como también en modelos existentes y debe obligatoriamente comprender un número entero de paquetes de celdas *ScienSolar*, es decir, un número múltiplo de 9 (esto es, fila final - fila inicial = 8) y el número de la fila inicial no debe ser menor que 15. Esta operación se puede repetir varias veces sin necesidad de oprimir el botón repetidamente, para ello en la celda **B2** se introduce el número de repeticiones que se desea antes de oprimir **+OBJ**.

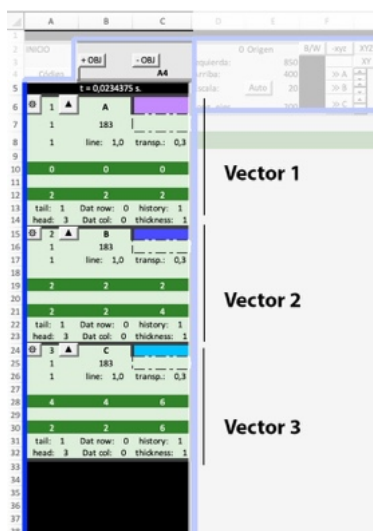
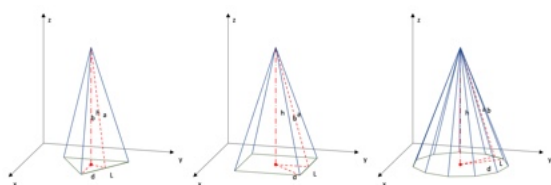


Figura 6.6.

Zona 2 del tablero de control con tres vectores en la hoja.

Nota. Elaboración propia.

**Figura 6.7.**

Reproducción de las caras de una pirámide mediante los botones OBJ.

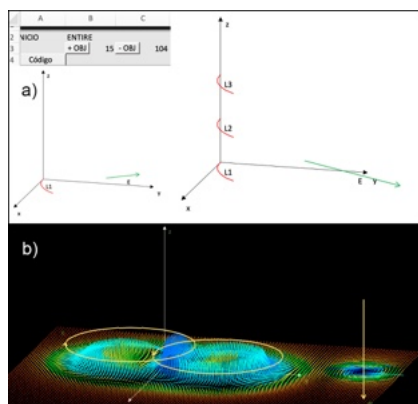
Nota. Elaboración propia.

El botón **-OBJ** tiene la función inversa de **+OBJ**, es decir, elimina de forma correspondiente el mismo número de celdas.

El proyecto *Pirámide 3D* sirve como ejemplo de utilización de las funciones de estos botones, en el cual se pueden agregar o quitar caras a una pirámide tridimensional. En la figura 6.7 se puede observar este ejemplo, cuyo prototipo

de la cara a reproducir se encuentra en el rango de las celdas 60 a la 77.

Otra función interesante de estos botones es con la palabra **ENTIRE** introducida en la celda **B2** = **ENTIRE** antes de oprimir cualquiera de ellos. Con esta función se pueden clonar objetos más complejos que abarcan toda una serie de paquetes de celdas, por ejemplo, en los proyectos *Distribuciones de carga* y *Ley de Biot - Savart* se utiliza esta función para reproducir cuerpos cargados o corrientes eléctricas enteras. En este caso se llevará a cabo una operación equivalente a cortar y pegar, pero sin eliminar el objeto original, esto con el propósito de conservar los vínculos entre las celdas que crean el nuevo objeto y que no queden vinculadas con el objeto original. En esto radica la diferencia con el procedimiento anterior, en donde se conservaba el vínculo con ciertas celdas.

**Figura 6.8.**

*Utilización de **B2** = **ENTIRE** y los botones OBJ para reproducir objetos complejos.*

Nota. Elaboración propia.

Por ejemplo, en la figura 6.8, parte a, se utiliza la celda **B2** = **ENTIRE** y **+OBJ** para reproducir dos veces la línea cargada del proyecto original *Distribuciones de carga*, en donde la línea comprende desde la fila inicial **B3**=15 hasta la fila final **B3**=104. En la parte izquierda se observa el proyecto original y en la parte derecha las dos líneas reproducidas, en donde posterior a la reproducción se han cambiado los nombres y posiciones de las nuevas líneas: número de la segunda línea **G106**=2, posición **G114**=30; número de la tercera línea

$G196=3$, posición $G204=60$. En la parte b de la figura se puede observar un proyecto más elaborado del modelo *Ley de Biot - Savart* con dos corrientes circulares y una corriente rectilínea distribuidas en el espacio tridimensional, con su campo magnético en una región del plano xy .

6.13 Botón de historia de un vector

Para un vector en particular, al oprimir el botón  no se borrará la historia de este vector y se mostrarán en el sistema de coordenadas todos sus pasos. Esto es especialmente visible cuando se utilizan los botones de rotación o cuando se está ejecutando una simulación en la que el vector en cuestión esté cambiando su posición continuamente. Un ejemplo de esta función se puede ver en la figura 6.19. Cuando esta opción está habilitada, la celda que contiene el botón está sombreada. Para deshabilitar esta opción, simplemente se vuelve a oprimir el mismo botón.

6.14 Botón ocultar/mostrar configuración de un vector o eliminar tabla de datos

Primera función de

El botón  asociado a cada grupo de celdas permite ocultar dicho grupo, mientras que el botón  facilita su despliegue. En la Figura 6.6 se ilustran los grupos de celdas de configuración correspondientes a los vectores 1 a 3. Cabe destacar que el primer botón  posee una funcionalidad adicional: Permite ocultar o desplegar todos los grupos de manera simultánea. Esta acción se ejecuta siempre que en la celda $A5$ se especifique el número de grupos que se desea desplegar u ocultar.

Al descargar un proyecto de la lista, el programa automáticamente asigna en la celda $A5$ el número de vectores asociados a dicho proyecto. Este valor puede modificarse manualmente según sea necesario o eliminarse por completo. Por otro lado, en la celda $A7$ se presenta un valor binario (1 o 0) que indica si el menú se encuentra en estado desplegado o plegado, respectivamente.

Es importante señalar que si este valor no coincide entre diferentes conjuntos de celdas, la acción de plegar o desplegar todos los grupos mediante el primer botón  se realizará de manera no coordinada entre los distintos paquetes de celdas.

Segunda función de

Cuando se generan datos a partir de la ejecución de una simulación (ver sección 6.29) en celdas específicas de la hoja, la tabla de datos puede eliminarse mediante el botón  del vector correspondiente.

6.15 Celda A6. Ocultar/mostrar un vector

Esta celda contiene un número consecutivo único para cada vector. Al escribir el número cero en esta celda se oculta el vector y si éste ya estaba presente en la hoja, no desaparecerá y habrá que eliminarlo manualmente. Con esta función activada (valor cero), el código demorará menos tiempo en ejecutarse, pues no ubicará el vector en la hoja (aunque sí tendrá en cuenta sus ecuaciones y parámetros), lo cual reduce hasta en un 50 % el tiempo de ejecución de las simulaciones. Cabe resaltar que el número que deben llevar los vectores debe ser único (excepto el cero que lo pueden tener varios vectores a la vez), de lo contrario *ScienSolar* puede no funcionar correctamente a la hora de leer los datos.

6.16 Celda B6. Nombre del vector

El nombre del vector se cambia directamente en la celda B6 para el primer vector, celda B15 para el segundo vector y así sucesivamente (Figura 6.6).

6.17 Celda C6. Color del vector

El color del vector se cambia directamente en la celda destinada para ello (celda C6 de la figura 6.6 para el primer vector y su correspondiente para los demás). Seleccione esta celda y en el menú de Excel, en la pestaña INICIO, cambie el color de relleno de la celda.

6.18 Celda A7. Ocultar/mostrar configuración

La celda A7 que se muestra en la figura 6.6 está destinada a establecer si el menú de configuración del vector está desplegado u oculto. El número 1 indica que el menú está visible, mientras que el número 0 corresponde al menú oculto. Este número se cambia automáticamente cuando se oprime el botón ▲. Para el segundo vector se utiliza el botón de la celda A16, para el tercero el botón de la celda A25 y así sucesivamente.

6.19 Celda B7. Apariencia del vector

Se puede cambiar **el objeto** que representa a un vector (la flecha) y sus propiedades, aunque esto no es recomendable.

El número del objeto estándar para una flecha es el 183 (celda B7 de la figura 6.6). Excel cuenta con 186 formas diferentes, cada una de las cuales tiene su código y su nombre, en la sección 7.1 se pueden consultar los diferentes códigos y sus respectivas imágenes; en *ScienSolar* se ha reservado el objeto 146 (o también el objeto 9) para representar un punto y se dedicaron los números negativos

para mantener invariantes las dimensiones del objeto mientras hay rotación o simulación.

En la figura 6.9 se muestran tres formas diferentes para representar un vector, la forma en a) obedece correctamente a las transformaciones espaciales de rotación y las dimensiones de un vector, mientras que las formas b) y c) no se someten a estas transformaciones.

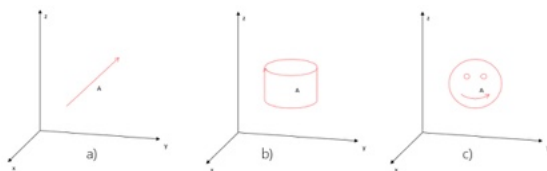


Figura 6.9.

Diferentes formas para representar un vector en ScienSolar. a) resultado del valor de la celda B7 = 183; b) B7 = 86; c) B7 = 17.

Nota. Elaboración propia.

6.20 Celda C8. Transparencia de un vector

La celda **C8** se utiliza para graduar la transparencia de los vectores. Los valores de esta celda oscilan entre 0 y 1, siendo el valor cero correspondiente al vector sin transparencia y el valor 1 al 100 % de transparencia; los valores intermedios le darán una transparencia gradual. La celda **C8** también es funcional para modificar la transparencia por medio de una ecuación, por ejemplo, en la figura 6.10 se ha modificado la transparencia de acuerdo al ángulo θ en el proyecto SIMETRÍA ESFÉRICA con la fórmula:

$$\text{C8} = \frac{(180 - \text{GRADOS}(\text{ACOS}(\text{C11}/\text{RAIZ}(\text{A11}^2 + \text{B11}^2 + \text{C11}^2))))}{180}.$$

6.21 Celdas A9, B9 y C9. Disponibles al usuario

Las celdas **A9**, **B9**, **C9** para el primer vector y las similares para los demás no tienen ninguna función específica para vectores nuevos, por lo que pueden ser utilizadas por el usuario para ingresar fórmulas o valores adicionales en la construcción de modelos.

Cuando el usuario ingresa fórmulas o valores nuevos en estas celdas y oprime el botón **Código**, el programa detectará que la celda no está vacía y guardará los valores en el código o las fórmulas si es el caso. En el caso de los modelos ya construidos, como los que se encuentran en la lista de proyectos, algunas de estas celdas pueden estar ya ocupadas.

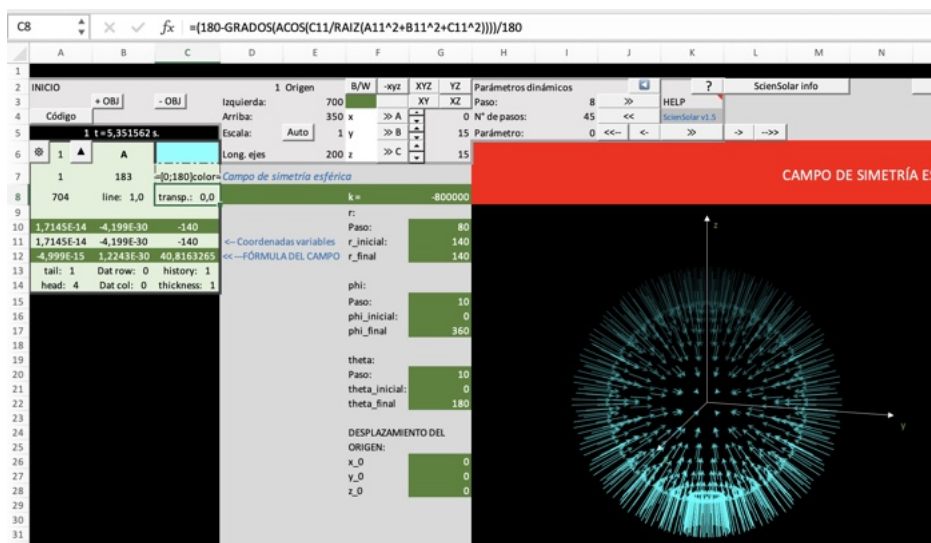


Figura 6.10.

Transparencia en función del ángulo. En este caso $C8 = (180-GRADOS(ACOS(C11/RAIZ(A11^2+B11^2+C11^2))))/180$.

Nota. Elaboración propia.

6.22 Celdas A10, B10 y C10. Posición inicial de un vector

Un vector se localiza en el sistema de coordenadas de acuerdo a su posición inicial y sus coordenadas. La posición inicial está expresada por los valores (x_0, y_0, z_0) y las coordenadas por los valores (x, y, z) . La celda $A10$ está destinada para el valor de x_0 , la celda $B10$ para el valor de y_0 y la celda $C10$ para z_0 . Estos valores pueden ser números o fórmulas de Excel. Cuando se ingresa un nuevo vector, el programa le asigna automáticamente un valor predeterminado, pero el usuario puede borrar estas fórmulas y poner el valor de las coordenadas iniciales de acuerdo a sus necesidades. En el modo campo, es decir, cuando $C7$ no está vacía, las celdas $A10$, $B10$ y $C10$ deben estar vinculadas correspondientemente con $A11$, $B11$ y $C11$ mediante las fórmulas: $A10 = A11$, $B10 = B11$, $C10 = C11$. En la figura 6.11 se puede observar una misma función como un vector en un punto del espacio y en modo campo con diferentes configuraciones.

6.23 Celdas A11, B11 y C11. Coordenadas variables

Las celdas $A11$, $B11$ y $C11$ para el primer vector, y sus análogas para los demás, son utilizadas por el programa para generar coordenadas variables y funcionan exclusivamente cuando la celda $C7$ está configurada para el modo

campo. Por el contrario, cuando **C7** está vacía, estas celdas no tienen ninguna función, pero no es recomendable usarlas para otros fines. En la sección 6.25 se explica con detalle el uso de las mismas celdas para el modo campo de un vector, y en la figura 6.11 se ilustra también el uso de estas celdas para visualizar un vector en modo *único vector* (figura de la izquierda), y en *modo campo* cuando **C7** tiene valores, a través de las celdas de coordenadas variables.

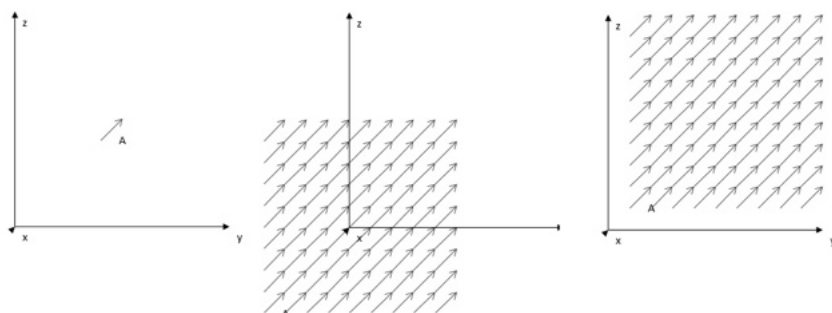


Figura 6.11.

Posición inicial de un vector (izquierda) y posiciones de los vectores en modo campo (centro) y modo campo desde el origen (derecha).

Nota. Elaboración propia.

6.24 Celdas A12, B12 y C12. Coordenadas de un vector

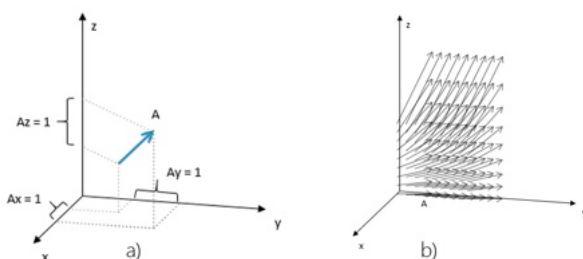


Figura 6.12.

a) Las coordenadas de un vector en ScienSolar no dependen de su posición; b) coordenadas variables (campo vectorial).

Nota. Elaboración propia.

En las celdas **A12**, **B12** y **C12** se introducen los valores de las coordenadas del vector (x, y, z) , las cuales se calculan no desde el origen de coordenadas sino desde la cola hasta la cabeza del vector. En la figura 6.12 parte a) se muestran los

valores que se ingresan a las celdas para un vector $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$, donde $\boxed{\text{A12}} = 1$, $\boxed{\text{B12}} = 1$ y $\boxed{\text{C12}} = 1$.

Cuando el modo campo está activado – es decir, cuando en $\boxed{\text{C7}}$ se introducen las letras o, c, s – se puede cambiar consecutivamente el valor de las celdas de las coordenadas de acuerdo a una ecuación. En la sección 6.25 se explica esta función con detalle. Como ejemplo adicional en la figura 6.12 parte b) se observa el campo vectorial de una función $f(x, y, z) = (e^{0,25x}, 5, e^{0,25z})$, en cuyo caso luego se introducen los valores como se indica en la fórmula en Excel 6.1.

Fórmula en Excel 6.1

- $\boxed{\text{A12}} = \text{EXP}(\text{A10}*0,25) \{= e^{0,25x}\},$
- $\boxed{\text{B12}} = 5,$
- $\boxed{\text{C12}} = \text{EXP}(\text{C10}*0,25) \{= e^{0,25z}\},$
- $\boxed{\text{C7}}$ o[0,5]x=[0;0]o2[0,7]y=[0;5]o3[0,7]z=[0;5]color=[0]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0s,
- Oprimir $\boxed{\text{XYZ}}.$

Ejemplo 6.24.1 Construir en la hoja de cálculo el campo vectorial $\vec{E} = k \frac{1}{r^2} \hat{r}$, y con un valor de $k = 300$ hallar el campo en el punto $x = 4, y = 4, z = 4$.

SOLUCIÓN

El campo vectorial $\vec{E} = k \frac{1}{r^2} \hat{r}$ presenta simetría esférica y depende de r como $\sim \frac{1}{r^2}$, donde r es el radio vector expresable en coordenadas cartesianas como $\vec{r} = (x, y, z)$ y su magnitud es $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

El primer paso consiste en preparar las ecuaciones para introducirlas en *ScienSolar*, lo que implica obtener las componentes del campo E_x, E_y, E_z en coordenadas cartesianas. Utilizando $\hat{r} = \vec{r}/r$ la ecuación del campo se puede reescribir como:

$$\vec{E} = k \frac{1}{r^2} \hat{r} = k \frac{1}{r^3} \vec{r} = k \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z), \quad (6.1)$$

de donde se extraen las componentes:

$$\begin{aligned} E_x &= k \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_y &= k \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_z &= k \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Estas ecuaciones se introducen en las celdas correspondientes al campo vectorial,

como se muestra en la fórmula en Excel 6.2.

Fórmula en Excel 6.2

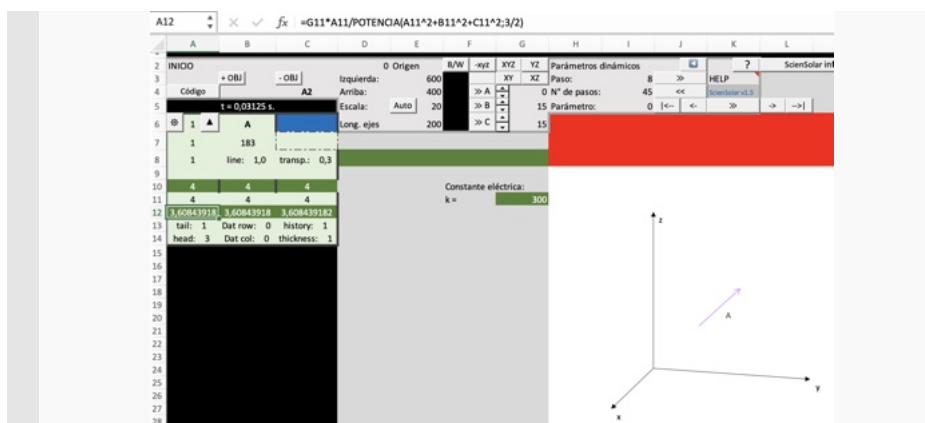
- $A12 = G11 * A11 / ((A11^2 + B11^2 + C11^2)^{(3/2)}) \{ E_x = k \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \},$
- $B12 = G11 * B11 / ((A11^2 + B11^2 + C11^2)^{(3/2)}) \{ E_y = k \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \},$
- $C12 = G11 * C11 / ((A11^2 + B11^2 + C11^2)^{(3/2)}) \{ E_z = k \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \}.$

En una hoja de trabajo nueva del software *ScienSolar*, el usuario debe presionar el botón etiquetado como **Nuevo vector** con el propósito de agregar un nuevo vector al espacio de trabajo. Las expresiones matemáticas que definen las componentes del campo vectorial deben escribirse de manera correspondiente en las celdas designadas para tal fin: en la celda **A12** se ingresa la componente correspondiente a E_x , en la celda **B12** se ingresa la componente correspondiente a E_y , y en la celda **C12** se ingresa la componente correspondiente a E_z , tal como se ilustra en la figura 6.13. Para el tratamiento de las coordenadas espaciales, se emplean las celdas **A11** (para la coordenada x), **B11** (para la coordenada y) y **C11** (para la coordenada z). Por otra parte, el valor de la constante k puede ser escrito, a modo de ejemplo, en la celda **G11**.

Con el fin de calcular el valor del campo vectorial en el punto $P(4, 4, 4)$, es necesario introducir dichas coordenadas numéricas en las celdas **A11**, **B11** y **C11**, respectivamente, teniendo en cuenta que no debe incluirse el signo igual (=), dado que se trata únicamente de valores numéricos. Posteriormente, el usuario debe vincular estas celdas con las celdas superiores correspondientes, siguiendo el procedimiento que se muestra en la fórmula de Excel adjunta como referencia.

Fórmula en Excel 6.3

- $G11 = 300,$
- $A11 = 4, A10 = A11,$
- $B11 = 4, B10 = B11,$
- $C11 = 4, C10 = C11.$

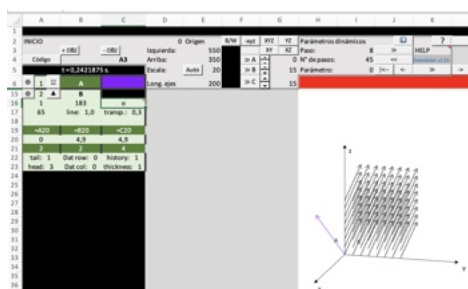
**Figura 6.13**

Construyendo una función vectorial en un módulo de ScienSolar.

Nota. Elaboración propia.

Luego, presione **XYZ** para ver los resultados como se muestra en la figura 6.13. El lector puede modificar estos valores para observar el comportamiento del campo en diferentes puntos del espacio y con distintos valores de la constante k , tanto positivos como negativos. En electrostática, por ejemplo, los valores de k podrían corresponder a la constante eléctrica multiplicada por la carga, la cual puede ser positiva o negativa.

6.25 Celda C7. Modo campo. Escáner de campo

**Figura 6.14.**

Representación de un vector como un campo.

Nota. Elaboración propia.

Durante la visualización de un proyecto, en el sistema de coordenadas, cada vector puede representarse como un campo. Para este propósito, se ha dedicado la celda que se encuentra justo debajo de la celda del color (en el caso de la figura 6.14, esta celda corresponde a **C16**). Si esta celda está vacía, entonces solo aparecerá un vector en el sistema de coordenadas. En las versiones 1.6 y posteriores de ScienSolar, se implementó el escáner de campo por medio del botón **Escáner de campo** ubicado en la celda **U6**, y para activar sus con-

troles, basta con seleccionar una celda idónea, como **C7**, **C16**, **C25**, etc., y presionar el botón **Escáner de campo**. Los parámetros de visualización aparecerán en la zona **V9** - **AD25**. Estos controles automatizan un poco el procedimiento, que se explica a continuación para el caso de no utilizar el escáner de campo.

Si en la celda se escribe $C7=o$ (la letra **o** en minúscula, sin el signo igual), al oprimir por ejemplo XYZ el campo se visualizará en coordenadas cartesianas. Cuando $C7=c$, el campo se visualizará en coordenadas cilíndricas, y al establecer $C7=s$, se mostrará en coordenadas esféricas. A continuación, también se generará una cadena de valores en la celda, como $C7=o[2]x=[0;0]o2[0,2]y=[-10;10]o3[0,2]z=[-10;10]color=[8]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0,002s$. Esta cadena define la configuración del campo y puede personalizarse modificando los valores entre corchetes de la siguiente manera:

- **$o[2]x=[0;0]$** . Indica la frecuencia y el rango de distribución de los vectores a lo largo de la primera coordenada (coordenada x). En este caso, solo se mostrarán vectores en el plano yz puesto que x recorre de 0 a 0. La letra o al principio señala que las coordenadas son cartesianas; para las coordenadas cilíndricas se usa c y para las esféricas s .
- **$o2[0,2]y=[-10;10]$** . Representa la frecuencia y el rango para la segunda coordenada (coordenada y). En este ejemplo, se ubicarán vectores en el sistema de coordenadas desde $y = -10$ hasta $y = 10$, cada 0.2 unidades de y .
- **$o3[0,2]z=[-10;10]$** . Se refiere a la tercera coordenada, cuyos valores entre corchetes pueden ser personalizados.
- **$color=[8]$** . Este parámetro determina el ancho del espectro de color de los vectores. En este caso, los valores con magnitudes cercanas a cero son rojizos, mientras que aquellos con magnitudes cercanas a 8 o mayores son de color azul o violeta. Si el campo vectorial es constante, todos los vectores mostrarán un único color. Para un campo específico, si este número es mayor, el color general tenderá hacia el rojo; si es menor, hacia el azul.
- **$origin[cart.]=[0;0;0]$** . Indica el desplazamiento del origen de coordenadas respecto a las coordenadas cartesianas originales. Es importante destacar que este desplazamiento está relacionado con la visualización del campo, no con el campo matemático en sí; el origen del campo matemático permanece intacto, mientras que se ajusta el punto desde el cual se inician los vectores.
- **$tfactor=0,0021875s$** . Este parámetro es informativo y señala el tiempo aproximado que tarda el computador en colocar un solo vector en la hoja de cálculo. Este valor es utilizado por el paquete *ScienSolar* para advertir sobre el tiempo de renderización.

El código también insertará las fórmulas en las celdas $A10=A11$, $B10=B11$ y $C10=C11$ para distribuir los vectores en el espacio según la ecuación proporcionada, utiliza la función vectorial dada y el tipo de coordenadas para calcular los valores de cada punto y los ubica en las celdas $A11$, $B11$ y $C11$.

Campo constante

Para obtener un campo vectorial constante, basta con asignar valores constantes a las coordenadas del vector, por ejemplo, se puede establecer $A_{12}=2$, $B_{12}=2$ y $C_{12}=4$, y en la celda $C7$ introducir el valor **o** (para visualizar el campo en coordenadas cartesianas). Luego, haga clic en **XYZ** para ver los resultados. Si lo desea, puede modificar los parámetros de la celda $C7$ según sus necesidades. En la figura 6.14 se observa la apariencia de este campo.

Campo variable

Para **convertir un vector variable a campo**, se debe contar con una función que describa el cambio del vector en función de sus coordenadas. Es decir, se necesita una función vectorial de la forma $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$.

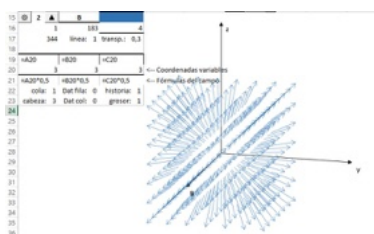


Figura 6.15.

Representación de un vector como campo variable.

Nota. Elaboración propia.

En la figura 6.15 se muestra como ejemplo el modelo de un campo vectorial del vector **B**, donde sus componentes están definidas por las ecuaciones $B_x = x/2$, $B_y = y/2$ y $B_z = z/2$. En este caso, las celdas $A_{19} = A_{20}$, $B_{19} = B_{20}$, $C_{19} = C_{20}$, y $A_{21} = A_{20} \cdot 0,5$, $B_{21} = B_{20} \cdot 0,5$, $C_{21} = C_{20} \cdot 0,5$. Los valores de las celdas en la fila 20 son variables y el código los ajusta automáticamente en cada paso. Para visualizar el campo, introduzca $C_{16} = 0$ y presione **XYZ**.

Se recomienda al lector modificar las fórmulas del campo vectorial en cada coordenada, por ejemplo, puede probar con las ecuaciones $B_x = 2x$, $B_y = 3y$ y $B_z = x/2$, o experimentar con otras ecuaciones diferentes.

Es importante destacar que las celdas correspondientes a las coordenadas del vector (Fila 21 de la figura 6.15) contienen los valores a partir del origen del vector y no desde el origen de coordenadas. Esto significa que sus coordenadas absolutas no cambian si se traslada el vector a otro punto en el espacio. Otros ejemplos de campos vectoriales y escalares se pueden consultar en la sección 7.2.

En la figura 6.16 se muestran diversas vistas del campo eléctrico generado por un mismo dipolo. En la parte *a)* de la figura se visualiza un único vector en el espacio, con los valores vacíos en la celda C_{43} . Al establecer las coordenadas del vector **E** en las celdas correspondientes de la fila 47, es posible observar los vectores de campo generados por cada una de las cargas, así como el vector resultante en ese punto. Además, se pueden ajustar diversas configuraciones de cada vector, como el color, el tipo de flecha, etc.

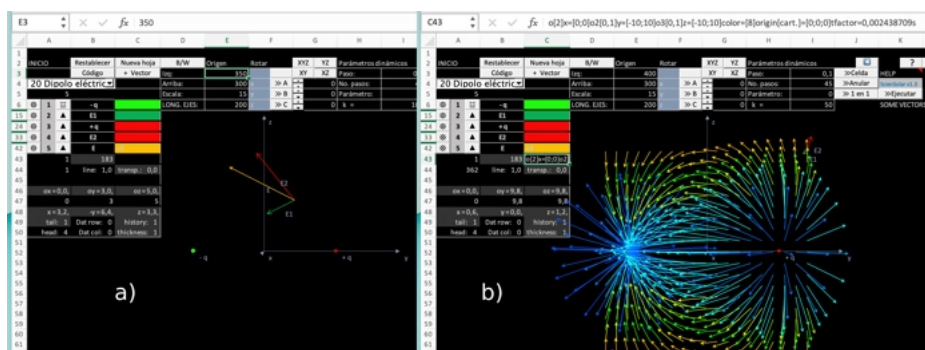


Figura 6.16.

Diferentes formas de visualizar un campo vectorial en el espacio. a) como un único vector en un punto determinado; b) vectores distribuidos en el espacio con color de acuerdo a su magnitud.

Nota. Elaboración propia.

En la parte *b)* de la figura se muestra el campo eléctrico en una región del espacio, al ingresar el valor $C43 = 0$. Después de oprimir YZ , la configuración resultante se visualiza en la parte superior de la figura.

Ejemplo 6.25.1 Se considera el campo vectorial definido mediante la expresión $\vec{E} = k \frac{1}{r^2} \hat{r}$, el cual será visualizado y analizado en tres sistemas de coordenadas fundamentales: coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas. Dicho campo es de particular relevancia en la física matemática y en la teoría de campos, ya que constituye un modelo paradigmático de una distribución vectorial con simetría radial pura.

SOLUCIÓN

El campo $\vec{E}$ descrito anteriormente representa una distribución vectorial caracterizada por una simetría radial completa, es decir, sus líneas de campo son rectas que emanan radialmente desde el origen de coordenadas (o convergen hacia él, dependiendo del signo de la constante k). Esta configuración es análoga a la que se presenta en el caso de una carga puntual estática en el contexto del electromagnetismo clásico, donde dicha carga genera un campo eléctrico cuya magnitud disminuye con el cuadrado de la distancia al punto donde se localiza la carga. En concreto, la magnitud del campo vectorial es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia radial r al origen, mientras que su dirección es puramente radial, es decir, paralela al vector unitario $\hat{r}$ en cada punto del espacio. Visualizar esta configuración del campo en diferentes sistemas de coordenadas no constituye un mero ejercicio matemático, sino que permite comprender con mayor profundidad cómo se representa y transforma un mismo campo físico según el sistema de referencia elegido. En coordenadas cartesianas, el campo adquiere componentes

que dependen de las tres coordenadas espaciales de manera no trivial, puesto que $\hat{r}$ se expresa como una combinación de los vectores unitarios cartesianos. En coordenadas cilíndricas, la simetría del campo se manifiesta parcialmente, aunque la dependencia azimutal desaparece. Finalmente, en coordenadas esféricas, la expresión del campo resulta ser la más sencilla y natural, ya que $\vec{E}$ posee únicamente componente radial no nula, evidenciando de forma inmediata la simetría del problema. Este análisis comparativo facilita la comprensión de la invariancia del campo físico frente a cambios de coordenadas, así como la utilidad práctica de seleccionar el sistema más adecuado para cada situación.

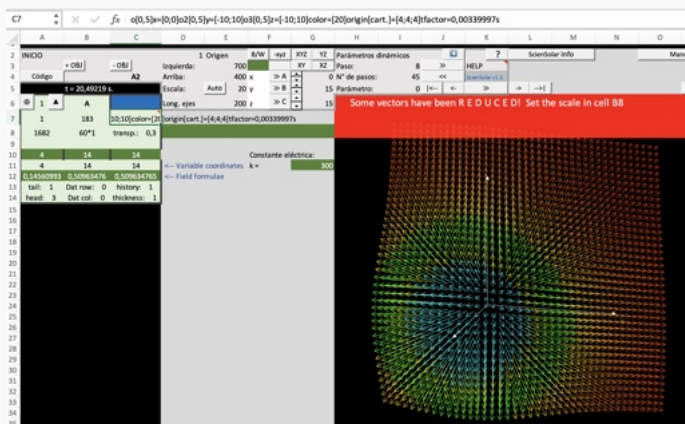


Figura 6.17

Imagen del campo en coordenadas cartesianas.

Nota. Elaboración propia.

Afortunadamente, *ScienSolar* proporciona una herramienta intuitiva que permite explorar este campo en distintos sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas. La clave de esta funcionalidad está en la celda **C7**, la cual actúa como entrada para configurar el tipo de coordenadas y los parámetros espaciales correspondientes.

Para iniciar la visualización en coordenadas cartesianas, se recomienda primero establecer un fondo oscuro presionando dos veces el botón **B/W**, lo cual mejora el contraste del campo representado. Luego, se ingresa la letra o (minúscula, sin el signo igual) en la celda **C7** y se presiona el botón **XYZ**, para generar la simulación. El campo se mostrará como en la figura 6.17, donde cada vector apunta radialmente desde el origen y su longitud decrece con la distancia.

Una vez generada esta visualización, *ScienSolar* crea automáticamente una cadena de parámetros en **C7**, representando las configuraciones del sistema de coordenadas utilizado, como rangos en cada eje, color, escala y ubicación del origen. Estos parámetros pueden editarse directamente para modificar el comportamiento y extensión del campo visualizado. En este caso, la fórmula exacta empleada en **C7** se muestra en el Ejercicio 6.4 (Ejemplo a)) y genera el campo mostrado en la

parte superior de la figura 6.18.

Para cambiar a coordenadas cilíndricas, basta con ingresar la letra c en **C7** y presionar nuevamente **XYZ**. Las figuras resultantes corresponden a las partes b) y c) de la figura 6.18. Es interesante observar que en la parte b), el origen del sistema cilíndrico ha sido desplazado hacia la derecha con respecto al origen cartesiano, mientras que en la parte c), ambos sistemas comparten el mismo origen, lo cual proporciona un mejor ajuste entre el campo y el sistema de referencia.

Fórmula en Excel 6.4 1

Diferentes configuraciones de la celda **C7** para el campo $\vec{E} = k \frac{1}{r^2} \hat{r}$ (ver figura 6.18.)

Ejemplo a)

C7 =o[0,5]x=[0;0]o2[0,5]y=[-20;20]o3[0,5]z=[-10;10]color=[20]origin[cart.]=[0;3;0]...

Ejemplo b)

C7 =c[2]rho=[3;10]c2[10]phi=[0;360]c3[2]z=[0;0]color=[10]origin[cart.]=[4;4;4]t...

Ejemplo c)

C7 =c[2]rho=[3;10]c2[10]phi=[0;360]c3[2]z=[0;0]color=[10]origin[cart.]=[0;0;0]t...

Ejemplo d)

C7 =s[0,5]r=[5;5]s2[8]phi=[0;360]s3[8]theta=[0;180]color=[9]origin[cart.]=[0;0;0]t...

Ejemplo e)

C7 =s[0,5]r=[5;5]s2[8]phi=[0;360]s3[8]theta=[0;180]color=[9]origin[cart.]=[0;4;0]t...

Para visualizar el campo en coordenadas esféricas, se debe ingresar la letra s en **C7** y pulsar **XYZ**. Las partes d) y e) de la figura 6.18 muestran la distribución del campo bajo este sistema. Tal como en el caso cilíndrico, parte de la utilidad de esta comparación radica en observar cómo cambia la percepción del mismo fenómeno físico al modificar el origen y el sistema de coordenadas.

Cada letra (o, c, s) introducida en **C7** representa un sistema de coordenadas: o para cartesianas, c para cilíndricas y s para esféricas. Los valores que acompañan a estas letras (como o2, c2, s2, etc.) permiten definir los rangos para cada coordenada particular. Además, se puede ajustar la ubicación del origen mediante el parámetro **origin[cart.]** y controlar aspectos visuales como el color o la densidad del campo con parámetros como **color=[]**.

A partir de las imágenes mostradas, se puede concluir que el sistema de coordenadas esféricas (figura 6.18, parte d)) ofrece la representación más natural para este tipo de campo, lo cual es coherente con su simetría esférica. En estas coordenadas, los vectores se distribuyen uniformemente a lo largo de la dirección radial y

tienen igual magnitud a igual distancia del origen. Este tipo de análisis visual es especialmente útil para entender, cómo elegir un sistema de referencia que simplifique el estudio de un fenómeno físico determinado.

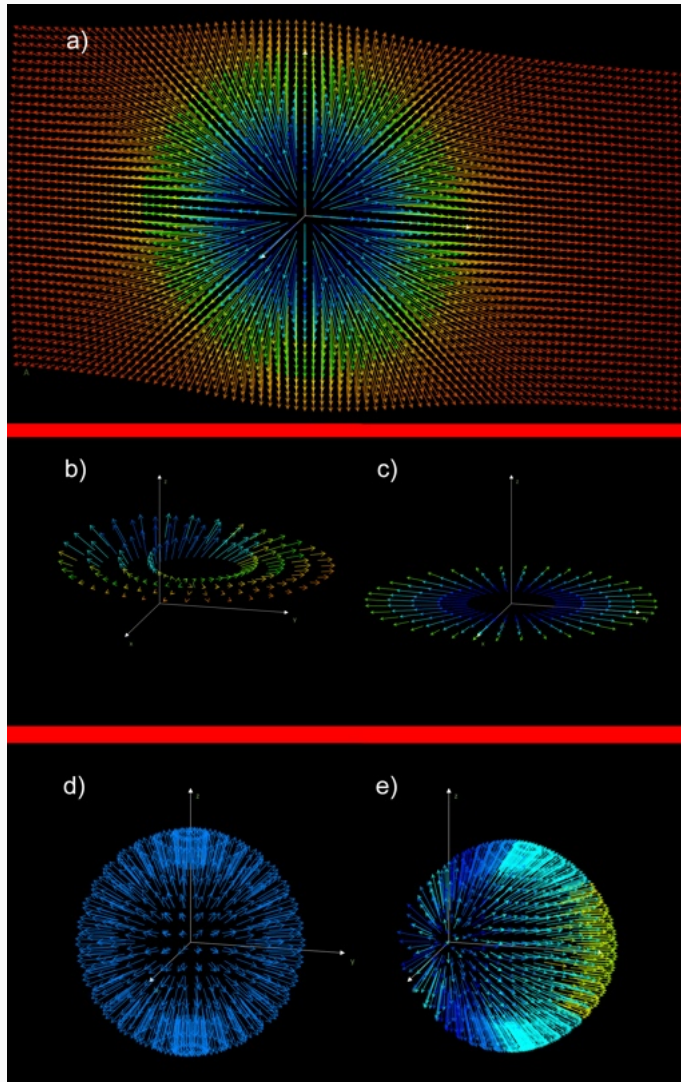


Figura 6.18

Campo vectorial $\vec{E} = k \frac{1}{r^2} \hat{r}$ visto en una región del espacio en coordenadas cartesianas (arriba), cilíndricas (en medio) y esféricas (abajo).

Nota. Elaboración propia.

6.26 Celda A8. Conteo de vectores

La celda **A8** realiza el conteo del número de vectores clonados. Esta celda está vinculada con las celdas **C7** y con la celda de historia **C13**. Cuando la celda **C7** no está vacía (es decir, contiene los valores **o**, **c** o **s**), se activa el modo campo, tal como se describe en la sección 6.25. En este modo, el programa comienza a colocar los vectores en el sistema de coordenadas, y el total de vectores colocados se registra en la celda **A8**.

Si la celda de historia **C13** tiene un valor mayor a uno y se ejecuta una simulación o rotación, se dibujará una trayectoria vectorial. Cuando el valor de **C13** vuelva a ser 1, los vectores de la trayectoria desaparecerán gradualmente al ejecutar la simulación o rotación. La velocidad de desaparición de estos vectores depende del valor en la celda **A8**.

En la figura 6.19 se ilustra cómo se utiliza el valor de esta celda para borrar una cantidad específica de vectores clonados, lo que puede ser útil para construir gráficos personalizados. Este proceso solo es aplicable a los vectores clonados o a un campo en el espacio. Si se desea eliminar todos los vectores rápidamente mientras se trabaja en el modo campo, basta con introducir en la celda **A8** un número igual o mayor al total de vectores presentes en el sistema de coordenadas.

Como ilustración, en la figura 6.17 del ejemplo 6.25.1 se puede observar cuántos vectores fueron necesarios para crear la imagen del campo. En la celda **A8** se ve la cantidad de 1682 vectores.

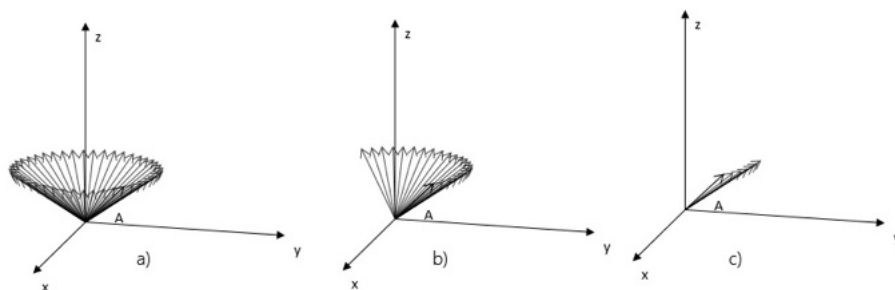


Figura 6.19.

*Uso de la celda **A8** para eliminar cierta cantidad de vectores después de usar la opción de historia. a) Historia con 45 vectores clonados al rotar el sistema; b) **A8** = 15; c) **A8** = 40 y al presionar **XYZ**.*

Nota. Elaboración propia.

6.27 Celda B8. Línea y dimensiones de un vector

La celda **B8** determina el tipo de línea que representa el vector. Los valores admitidos en esta celda deben ser números enteros positivos entre 1 y 12.

Cuando el valor de la celda correspondiente a la línea adopta el formato $N * \tau$ (por ejemplo, $25 * 1$), el tamaño de los vectores se reduce¹. En el modo campo, el tamaño de todos los vectores se ajustará a un rango específico. Así, es posible regular el tamaño de los vectores variando los valores antes del asterisco, siempre que sean positivos. Los números después del asterisco sirven para suavizar la apariencia del campo; un valor mayor produce una mayor suavidad, mientras que el número 1 representa una apariencia sin suavizar.

En la figura 6.20, se presentan tres ejemplos de configuración de la celda correspondiente a la línea del vector, con los valores $15 * 1$, $60 * 1$ y $60 * 25$. La primera imagen muestra la reducción de las dimensiones de los vectores, la segunda presenta una representación más pronunciada y la tercera, evidencia un comportamiento suavizado en general. Estos valores pueden ajustarse según las necesidades particulares de cada modelo. Es importante señalar que estos valores no afectan el color de los vectores, el cual depende de su magnitud.

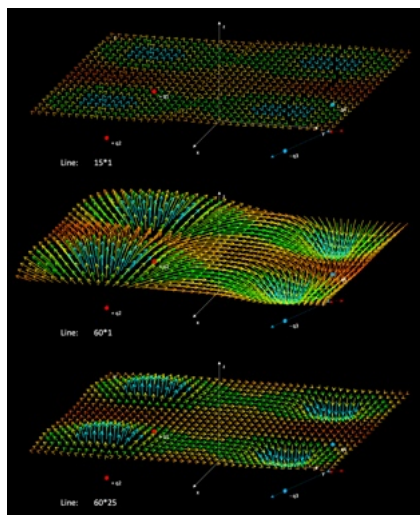


Figura 6.20.

*Ejemplo de uso de la celda **línea** para un campo eléctrico de cuatro cargas puntuales. Arriba, **B8** = $15 * 1$; en el centro, **B8** = $60 * 1$; abajo, **B8** = $60 * 200$.*

Nota. Elaboración propia.

¹Cuando el modo de visualización entra en el modo campo (por ejemplo con el valor de la celda **C7** =s), la celda **B8** se configura automáticamente con el valor **B8** = $N * \tau = 60 * 1$. El tamaño aparente de las componentes de los vectores se regula mediante la siguiente función:

$$L_x = \frac{L_{ox}}{L} \left(1 - e^{-\left| \frac{L_{ox}}{\tau} \right|} \right) N,$$

donde L_x es la componente del vector ya transformada, L es el módulo del vector, y L_{ox} es la componente original. Lo mismo para las otras dos componentes L_y y L_z . El usuario puede personalizar la visualización del campo ajustando los valores de N y τ en la celda **B8**, siempre sin borrar el asterisco (*). Es importante destacar que esta regulación es puramente visual y no afecta los valores reales de los vectores ni su color.

Si el objetivo es observar el tamaño real a escala, se debe introducir un valor menor que 15 en la celda **B8**. En este caso la línea de los vectores será como la indicada en la figura 6.21.

En un proyecto específico, al activar el modo campo para una función vectorial, esta celda se configura por defecto con el valor **60*1**. Sin embargo, el usuario puede modificarlo según sus requerimientos. Al salir del modo campo, la configuración permanece vigente; por lo tanto, el usuario debe ingresar manualmente valores entre 1 y 12 de acuerdo con el tipo de línea deseado.

6.28 Celdas A13, A14, C14: Cabeza, cola y grosor de un vector

Al igual que en la sección 6.27, donde se describió cómo cambiar la línea del vector, en esta sección se explican las configuraciones correspondientes a la cabeza, la cola y el grosor del vector. Estas configuraciones se realizan en las celdas **A13**, **A14** y **C14**, respectivamente.

Cabeza y cola. Los valores admitidos para la cabeza y la cola están en el rango de 1 a 6. Las distintas opciones de apariencia para cada uno se ilustran en la figura 6.21.

Grosor. En la celda **C14**, el valor 1 corresponde a la línea más delgada, mientras que el valor 8 representa la línea más gruesa.

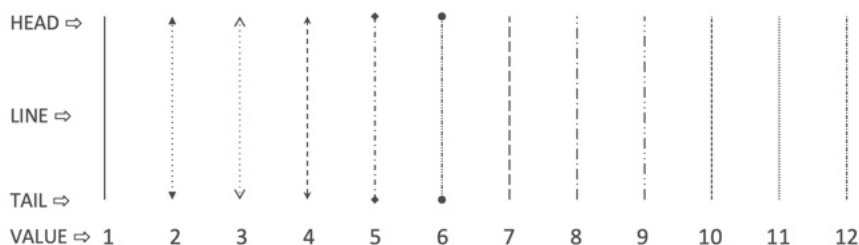


Figura 6.21.

*Vista de los diferentes tipos de línea, cabeza y cola de los vectores en ScienSolar, utilizando las formas de MS Excel. Las celdas con estas propiedades en ScienSolar aparecen en inglés: **head** (cabeza), **line** (línea), **tail** (cola).*

Nota. Elaboración propia.

6.29 Celdas B13, B14: Generación de datos y botón

ScienSolar permite la extracción de datos durante la ejecución de una simulación. Los datos que se pueden obtener incluyen las coordenadas de los vectores, así como las ecuaciones o valores adicionales que el usuario haya ingresado en las celdas **D14** y **E14** para el primer vector, y en **D23** y **E23** para el segundo, y así sucesivamente.

Los datos generados durante la simulación se almacenan en una tabla, cuya ubicación está indicada por el usuario a través del número de fila en *Dat-row* y el número de columna en *Dat-col*, que corresponden a las celdas **B13** y **B14**, respectivamente (ver figura 6.22).

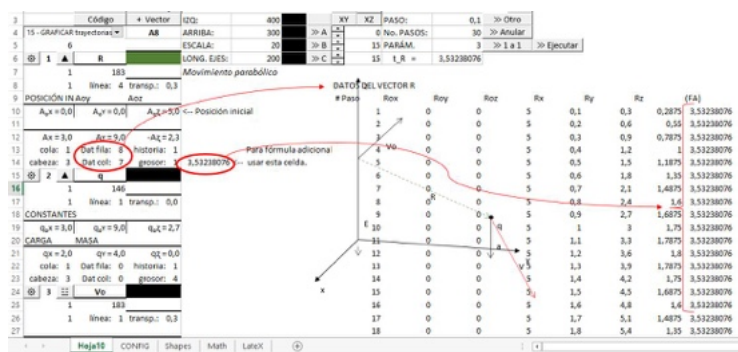


Figura 6.22.

Salida de datos durante la simulación del movimiento parabólico. Los datos corresponden al vector de posición $\vec{R}$ y se almacenan en una tabla cuyo borde superior izquierdo comienza en la celda de fila 8 y columna 7. Los valores adicionales introducidos por el usuario se generan en la columna de la derecha de la tabla.

Nota. Elaboración propia.

Una vez que se ha indicado la ubicación de las celdas destino, el programa comenzará a generar los datos de la simulación desde el momento en que se ejecute y hasta que ésta finalice. Se recomienda elegir celdas destino que no entren en conflicto con otros datos y que estén libres. En el ejemplo mostrado en la figura 6.22, los datos de la simulación se generan a partir de la fila 8 y la columna 7. Estos datos pueden ser seleccionados y utilizados con las herramientas de gráficos de Excel para crear representaciones visuales.

En este caso, se ha elegido el vector de posición $\vec{R}$, del cual se extraerán sus coordenadas durante la simulación, pero este proceso puede repetirse para otros vectores, e incluso de manera simultánea para varios vectores. Si se ejecuta nuevamente la simulación, los nuevos datos se agregarán al final de la tabla. Para borrar los datos, basta con seleccionar las celdas de la tabla y eliminarlas de la forma habitual en Excel.

Para finalizar la recolección de datos, se debe introducir el valor **0** en las celdas correspondientes a *Dat-row* y *Dat-col* del vector respectivo.

Es importante recordar que el número de fila y columna deben corresponder a la misma hoja en la que se está ejecutando la simulación; no se pueden especificar direcciones en otras hojas o libros, ya que el código no podrá interpretarlas

correctamente.

La funcionalidad de generación de datos también está disponible en el modo campo, lo que permite obtener los valores de cada punto de una función vectorial o escalar en el espacio de la simulación.

Cuando se genera una tabla de datos, esta puede eliminarse mediante el botón  del vector correspondiente. Esta función solo está activa si las celdas *Dat-row* y *Dat-col* tienen valores diferentes de cero.

Ejemplo 6.29.1 Generación de una tabla de datos de las posiciones iniciales (x_0, y_0, z_0) y las coordenadas (x, y, z) de todos los vectores del modelo **Simetría esférica** de la lista de proyectos de *ScienSolar*. Además, generar los ángulos ϕ y θ de inclinación de estos vectores en cada punto. La tabla debe generarse a partir de la fila 34 y la columna 8 de la hoja de cálculo.

SOLUCIÓN

En una nueva hoja de *ScienSolar*, descargue el proyecto **Simetría esférica** y luego ingrese los números de fila y columna en las celdas $B13 = 34$ y $B14 = 8$. Con estos valores, se generará la tabla con las posiciones (x_0, y_0, z_0) en las celdas $A10$, $B10$, $C10$, y las coordenadas (x, y, z) en las celdas $A12$, $B12$, $C12$.

Para generar los datos de los ángulos ϕ y θ , utilizaremos las celdas $D14$ y $E14$. Las fórmulas de conversión de coordenadas cartesianas a esféricas son las siguientes y deben introducirse en las celdas correspondientes:

Fórmula en Excel 6.5

- $B13 = 34,$
- $B14 = 8,$
- $D14 = \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{GRADOS}(\text{ATAN2}(A12;B12)),$
- $E14 = \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \text{GRADOS}(\text{ACOS}(C12/\text{RAIZ}(A12^2+B12^2+C12^2))).$

Una vez que se ingresen las fórmulas y se oprima cualquier botón de actualización , se generará la tabla en la ubicación indicada, junto con la simulación.

Observación: Si se vuelve a presionar el botón de actualización, los nuevos datos se agregarán al final de la tabla existente. Si se desea crear una nueva tabla en la misma ubicación, se deben eliminar los datos previos mediante el botón .

En la figura 6.23 se muestra la tabla generada debajo de la simulación. En este caso, la tabla contiene aproximadamente 700 filas, que corresponden al número de vectores que representan el campo en la hoja. Cada fila incluye las posiciones de los vectores, sus coordenadas y los ángulos ϕ y θ .

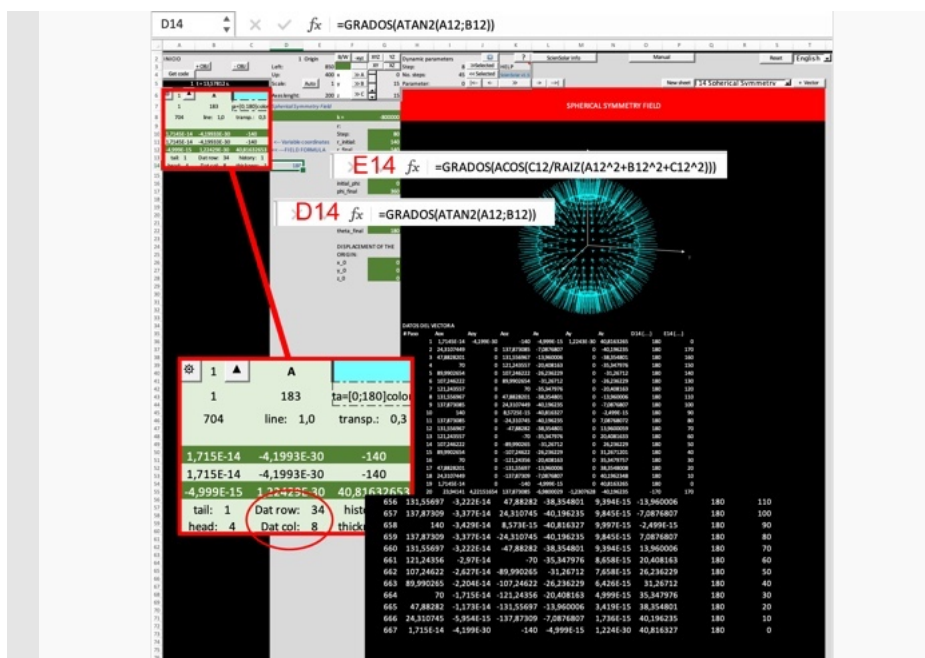


Figura 6.23

Salida de datos para el modelo *Simetría esférica*.

Nota. Elaboración propia.

En conclusión, podemos afirmar que la cantidad de datos o filas de la tabla depende de la resolución de la simulación y del rango que recorre cada variable. Esta tabla puede ser seleccionada y luego utilizada con las herramientas de gráficos de MS Excel para visualizar el comportamiento de las variables de forma más amigable.

6.30 Celda C13: Historia de un vector

En el contexto de *ScienSolar*, se denomina **historia** a la secuencia de posiciones que un vector va dejando durante su trayecto en la pantalla, ya sea como resultado de una rotación del sistema de coordenadas o de la ejecución de una simulación. Este efecto se activa cuando el valor de la celda **C13** es superior a 1, o bien al presionar el botón . Es importante destacar que este efecto es estrictamente visual: al mover un vector, la nueva posición aparece sin que la anterior desaparezca, lo cual se observa claramente en la figura 6.19. Para comprender cómo se logra este comportamiento, consideremos brevemente el funcionamiento del código en la hoja de cálculo: cada vez que se modifica un parámetro, el código elimina todos los objetos existentes y los reconstruye con los nuevos valores. Este proceso, que ocurre en fracciones de segundo, da la ilusión de que los objetos se están moviendo. Cuando la opción de historia está activada para un vector, *ScienSolar* preserva el vector en su posición anterior y coloca

emplear de manera personalizada en diversos proyectos.

La primera fila de esta zona está destinada (aunque no exclusivamente) al nombre del proyecto, mientras que las celdas restantes permiten al usuario ingresar valores de parámetros, variables, ecuaciones, entre otros, que pueden o no estar directamente relacionados con el proyecto en curso. Estos valores son complementarios a los definidos en las tres primeras columnas, que se refieren a las configuraciones de los vectores. Por defecto, algunas celdas de esta zona contienen fórmulas e información auxiliar que se cargan al introducir un nuevo vector; estas celdas pueden eliminarse sin que ello afecte la funcionalidad general. En esta zona también es posible introducir ecuaciones al modelo a través del editor de ecuaciones, como se detalla en la sección 6.8.

6.32 Zona 4: Visualización del modelo

La zona 4, que se muestra en la figura 6.1, corresponde al área de la hoja de cálculo en la que se encuentra el sistema de coordenadas. Aunque en la figura se indica que su límite está en la parte inferior y derecha, en realidad el límite de esta zona está determinado por la ubicación del origen de coordenadas, cuyos parámetros y controles se definen en la zona 5. En esta zona se visualizarán todos los objetos que se configuren en el sistema de coordenadas. Para limpiar completamente los objetos de esta zona y de la hoja de cálculo en general, se debe utilizar el botón **Restablecer**. Además, en esta zona también es posible introducir ecuaciones al modelo mediante el editor de ecuaciones, como se describe en la sección 6.2, numeral 6.8.

6.33 Zona 5: Vistas del modelo

Esta zona está destinada a controlar las vistas del sistema de coordenadas tridimensional, así como de los objetos representados en él tales como vectores, puntos, trayectorias y otros elementos gráficos.

En la figura 6.25 se muestra una vista general de esta zona. A continuación, se describen sus funciones principales.

	D	E	F	G
1				
2	2 Origen		B/W	-xyz XYZ YZ
3	Izquierda:	850		XY XZ
4	Arriba:	400 x	>> A	0
5	Escala:	20 y	>> B	15
6	Long. ejes	200 z	>> C	15

Figura 6.25.
Zona 5 del tablero de control.
Nota. Elaboración propia.

6.34 Botones **XYZ**, **YZ**, **XY** y **XZ**: Vistas del modelo

Los botones **XYZ**, **YZ**, **XY** y **XZ** permiten configurar las vistas del sistema de coordenadas en las cuatro variantes estándar, como se muestra en la figura 6.26.

Estas vistas afectan tanto al sistema de coordenadas como a todos los vectores presentes en él. Para personalizar estas vistas, se utilizan los botones de control , que ajustan los ángulos en incrementos de un grado. Cada vez que se presionan estos botones, la visualización se actualiza en tiempo real. El botón  muestra u oculta los ejes negativos del sistema de coordenadas cartesianas.

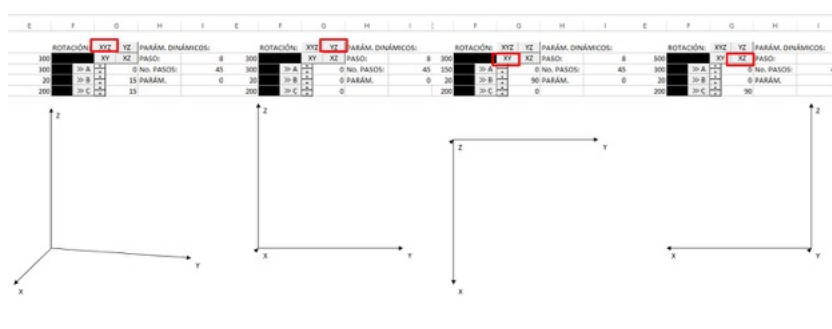


Figura 6.26.

Resultados obtenidos al seleccionar distintas vistas del sistema de coordenadas: Vistas general, frontal, desde arriba y desde la derecha, respectivamente.

Nota. Elaboración propia.

6.35 Botones , , : Rotación de los ejes

Los botones ,  y  controlan la rotación del sistema de coordenadas y sus objetos asociados alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente. Cada uno de estos botones inicia una rotación del sistema de coordenadas desde la vista actual, aumentando en grados la magnitud establecida en la celda **I3**, hasta completar el número de pasos especificado en la celda **I4**.

- El botón  rota el sistema alrededor del eje x .
- El botón  rota el sistema alrededor del eje y .
- El botón  rota el sistema alrededor del eje z .

Los resultados de estas rotaciones pueden visualizarse en la figura 6.28.

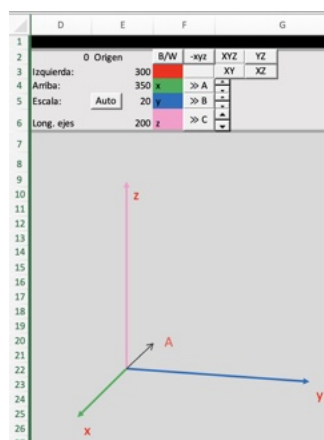


Figura 6.27.

Color de las etiquetas (celda F3) y color de los ejes (celdas F4, F5, F6).

Nota. Elaboración propia.

6.36 Botón de vista personalizada junto con las celdas G4, G5, G6

Este botón, ubicado en la celda F3 de la figura 6.25, no tiene etiqueta visible. Se utiliza para configurar vistas personalizadas del sistema de coordenadas, ajustando los ángulos de los ejes x , y y z mediante los valores especificados en las celdas ,  y , respectivamente.

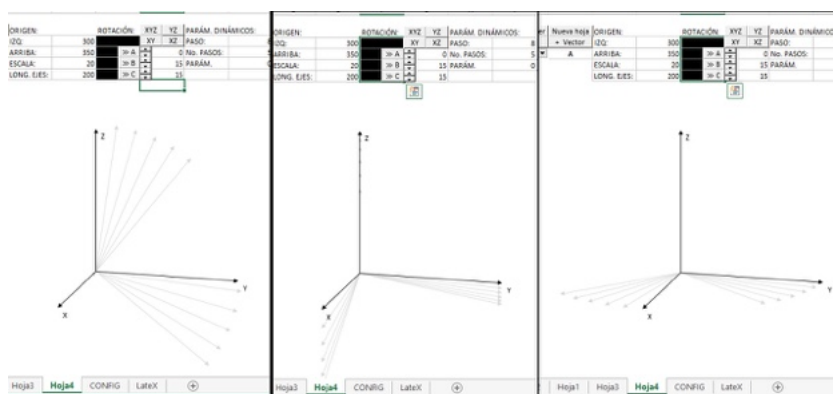


Figura 6.28.

Resultados de las rotaciones dinámicas de los ejes. En negro se muestra la posición inicial de los ejes y en gris las trayectorias recorridas por los ejes durante la rotación.

Nota. Elaboración propia.

6.37 Celda F3: Color de las etiquetas de los vectores y ejes

El color del texto de las etiquetas de los vectores y de los ejes de coordenadas está determinado por el valor de la celda , como se ilustra en la figura 6.27. No es posible personalizar los colores de las etiquetas de los vectores o de los ejes de forma independiente; para cambiar el color de un vector específico, consulte la sección 6.10, numeral 6.17.

6.38 Celdas F4, F5, F6: Color y etiquetas de los ejes

El color de los ejes x , y y z se puede personalizar mediante las celdas ,  y , respectivamente, como se muestra en la figura 6.27. Además, se puede personalizar el nombre de los ejes escribiendo una letra en estas celdas. Si se deja una celda vacía, la etiqueta correspondiente no se mostrará en la pantalla. Si se desea ocultar el sistema de coordenadas, se recomienda establecer el color de los ejes al mismo color que el fondo. En estas celdas también se pueden escribir fórmulas de Excel que puedan condicionar el texto de las etiquetas de acuerdo a los valores de otras celdas.

Al utilizar el botón **B/W** los colores de estas celdas se cambiarán automáticamente para darles el tono de contraste con el fondo. Esta operación es irreversible.

6.39 Celdas E3, E4: Posición del origen de coordenadas

La posición del origen del sistema de coordenadas cartesiano se puede trasladar a cualquier punto de la hoja de cálculo utilizando las celdas **E3** (para la posición horizontal) y **E4** (para la posición vertical). Los valores en estas celdas están expresados en términos de puntos de MS Excel, donde **E3** = 0 y **E4** = 0 corresponden a la esquina superior izquierda de la hoja. Los valores negativos trasladarán el origen hasta el extremo de la hoja, desajustando la ubicación relativa de los ejes.

6.40 Celda E5: Escala del modelo

Los valores de los vectores y ejes están expresados en unidades de puntos de Excel, por lo que es posible que sea necesario ajustar la escala del modelo para visualización detallada o general. La celda **E5** permite modificar la escala de los objetos (vectores) en múltiplos de su valor original. Si **E5** = 1, los objetos tienen su tamaño original en puntos de Excel, donde 1 punto equivale a 1/72 de pulgada (cuando la escala de la hoja es del 100 %). Un vector de 72 puntos, por ejemplo, mide 1 pulgada en la pantalla, como se muestra en la figura 6.29. La función **Auto** ajusta automáticamente la escala según las coordenadas y dimensiones actuales de los vectores en el sistema de coordenadas.

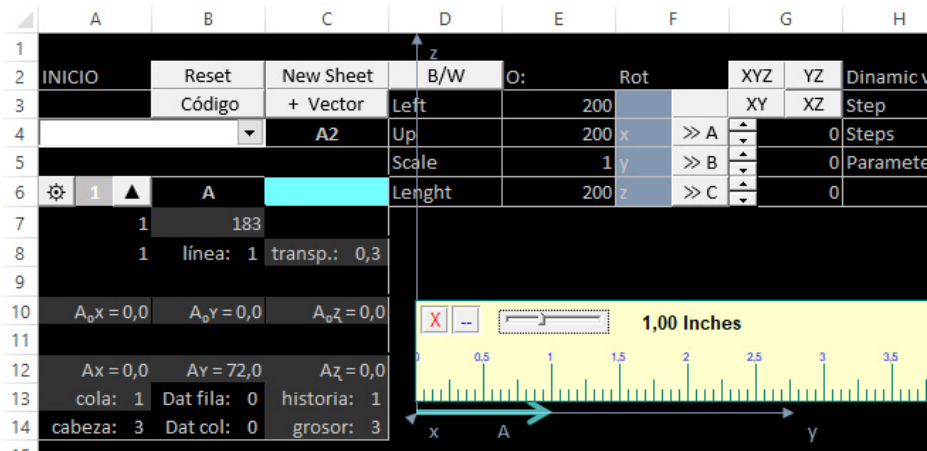


Figura 6.29.
Comparación de un vector de 72 puntos con una pulgada cuando la hoja de cálculo tiene una escala del 100 %.
Nota. Elaboración propia.

Una escala de $E5 = 20$ amplifica los objetos 20 veces en comparación con su tamaño original. Los ejes de coordenadas no se someten a escalado; su longitud se controla mediante la celda $E6$.

6.41 Celda E6: Longitud de los ejes

La celda $E6$ permite ajustar la longitud de los ejes en términos de puntos de Excel, donde 1 punto equivale a $1/72$ de pulgada. Esta longitud se aplica de manera uniforme a los tres ejes de coordenadas, por ejemplo, una longitud de 200 puntos equivale a aproximadamente 2.77 pulgadas cuando la escala de la hoja de cálculo está al 100 %.

6.42 Botón B/W: Color del fondo de la hoja

El botón B/W (Black/White) invierte los colores de fondo, ejes y etiquetas, pero no afecta a los colores de los vectores. Esta función resulta útil cuando se desea un fondo blanco en imágenes de documentos científicos. Dependiendo del contexto (trabajo con vectores individuales o campos vectoriales), se recomienda utilizar un fondo blanco o negro. El color de fondo puede personalizarse adicionalmente con las herramientas estándar de Excel.

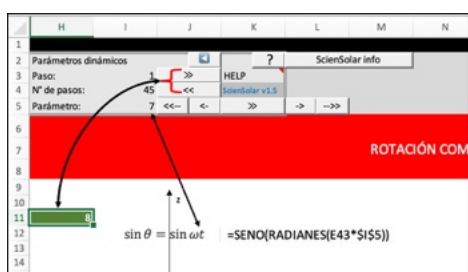


Figura 6.30.

Zona 6 del tablero destinada al control de simulaciones.

Nota. Elaboración propia.

según las indicaciones de la sección 6.37.

La acción ejecutada por este botón tiene efecto únicamente a partir de la columna D de la hoja de cálculo. En la figura 6.31 se muestra el mismo modelo con diferentes vistas, obtenidas al alternar el botón B/W . Como se puede observar, al seleccionar un fondo negro, los ejes, las etiquetas y el texto cambian automáticamente a color blanco, mientras que al seleccionar un fondo blanco, estos elementos adoptan el color negro. Posteriormente, el usuario puede continuar personalizando la apariencia de los ejes y las etiquetas

6.43 Zona 6. Ejecución de simulaciones

La zona 6 contiene los botones y celdas necesarias para configurar y controlar las variables que cambian durante una simulación. El control del proceso de simulación se obtiene mediante los botones presentados en la figura 6.30. Los botones $>>$ y $<<$, destacados con un corchete rojo, incrementan

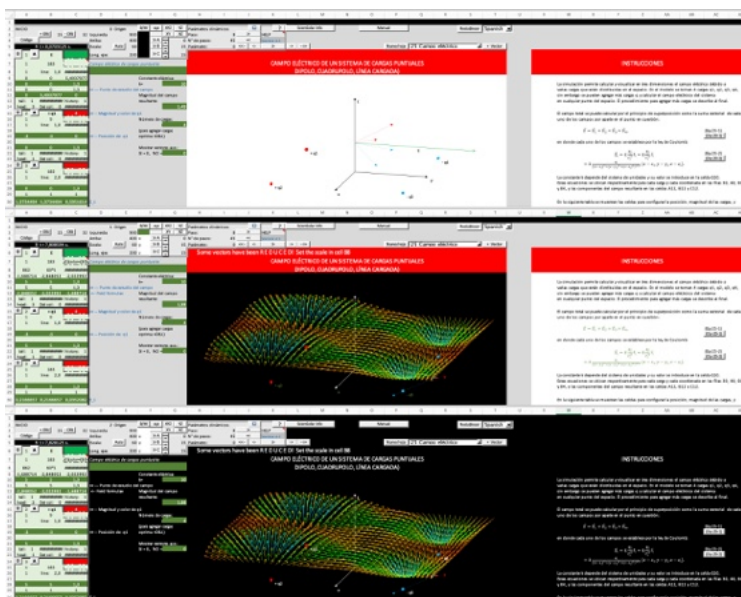


Figura 6.31.

Tres vistas del mismo modelo con fondo negro y blanco alternado, utilizando el botón **B/W**. El contraste de color entre el fondo y el texto se mantiene constante.

Nota. Elaboración propia.

o reducen el valor de la celda seleccionada en el valor especificado en **I3**. Además, los botones de la fila 5 (**|<--**, **<--**, **>>**, **-->**, **-->|**) permiten controlar el marcador de la celda **I5** para llevarlo a cero, retroceder un paso, ejecutar todos los pasos, avanzar un paso o ir al final de la simulación.

6.44 Botones para ocultar/mostrar columnas

El botón **[icon]**, ubicado en **J2** (ver figura 6.30), permite ocultar las columnas **A** a **D** de la hoja de cálculo, con el objetivo de mantener una hoja más limpia durante la simulación. El botón **[icon]** restaura la visibilidad de las columnas ocultas.

6.45 Celda I3. Valor del paso

En la celda **I3**, el usuario define el valor de cada paso que recorrerá un parámetro durante la simulación. Este valor puede ser positivo, negativo, entero o decimal. Al presionar el botón **>>**, el valor de la celda seleccionada (o de la celda **I5**, según corresponda) se incrementará en la cantidad indicada en **I3**, durante el número de veces indicado en **I4**. Por su parte, el botón **<<** reducirá el valor de la celda seleccionada. Este parámetro también se

aplica a la rotación de los ejes, en este caso con unidades en grados.

6.46 Celda I4. Número de pasos

La celda **I4** determina cuántas veces el valor de la celda seleccionada (o de **I5**, según el caso) se incrementará por el valor indicado en **I3**. Al presionar el botón **>>** (en **K5**) o el botón **->**, el parámetro que cambiará será el de la celda **I5**. Sin embargo, si se presiona el botón **>>** en **J4**, el valor de la celda seleccionada en ese momento será el que cambiará. En la figura 6.30 se muestran ejemplos de la aplicación de estos botones, en los que el parámetro evaluado es el tiempo. También se muestra cómo escribir una ecuación que involucre el tiempo, representado en la celda **I5**. Esta celda también se usa para controlar el número de pasos de la rotación de los ejes de coordenadas; por ejemplo, con **I3** = 8 y **I4** = 45, un eje rotará 360°.

6.47 Celda I5. Contador

La celda **I5** actúa como el contador de la simulación, variando durante su ejecución. Los parámetros de la ecuación vinculados a esta celda, como el tiempo, se ajustarán según los valores en las celdas **I3** (valor del paso) y **I4** (número de pasos), por ejemplo, si el parámetro es el tiempo t , con unidades en segundos, y la simulación dura 20 segundos, t se vinculará a **I5**, con **I3** = 1 (segundo) y **I4** = 20. Al presionar el botón **>>**, las ecuaciones vinculadas a t cambiarán de acuerdo con los valores introducidos.

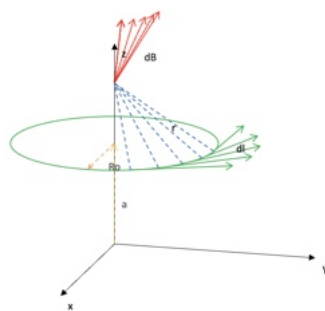


Figura 6.32.

*Resultado de presionar el botón **->** cuatro veces consecutivas con el botón **⊗** activado.*

Nota. Elaboración propia.

6.48 Botón de reinicio del contador

El botón **|<--** reinicia el contador de la simulación, es decir, establece **I5** = 0. Esta función es útil para iniciar una nueva simulación o reiniciar la simulación actual desde el principio. La celda **I5** puede estar vinculada a cualquier parámetro del modelo que se necesite evaluar de manera consecutiva.

6.49 Botón de simulación por paso

El botón  ejecuta la simulación un solo paso a la vez. Cada vez que se presiona, el valor del contador () aumenta en la magnitud definida en . En la figura 6.32 se muestra el resultado de presionar  cuatro veces consecutivas en el proyecto *campo magnético del elemento de una espira con corriente*, donde se observa cómo cambia el campo magnético de los elementos de corriente a medida que el ángulo se ajusta según el valor de .

6.50 Botón Ejecutar

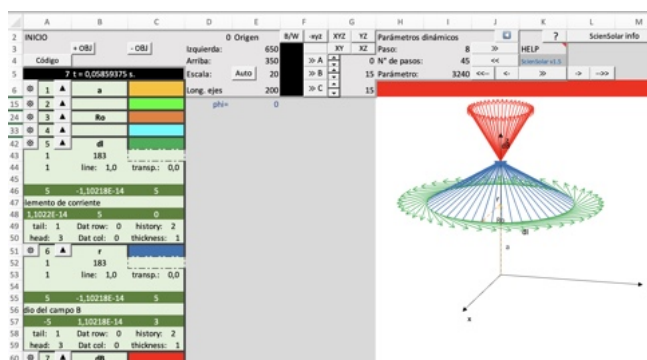


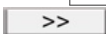
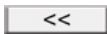
Figura 6.33.

Resultado de ejecutar la simulación con el botón , donde el parámetro de la celda  recorre el número de pasos indicado en  con el valor de cada paso especificado en .

Nota. Elaboración propia.

El botón  ejecuta la simulación cambiando consecutivamente el valor del contador  en incrementos de la magnitud especificada en  hasta completar el número de pasos indicado en . En la figura 6.33 se muestra el resultado de ejecutar una simulación del campo magnético de los elementos de corriente de una espira. En este caso, los elementos de corriente se dibujan desde el ángulo 0° hasta el ángulo 365° , en 45 intervalos de 8° cada uno. Además, al activar el botón , se puede visualizar el recorrido de los vectores.

6.51 Contador arbitrario

Durante una simulación, no solo se puede variar el valor del contador , sino también el valor de cualquier celda seleccionada. Los botones  y  en **J3** y **J4** permiten cambiar el valor de la celda seleccionada en los pasos indicados. Esto es útil cuando se desea observar cómo cambia un parámetro diferente al principal (vinculado al contador). Para ello, basta con seleccionar

la celda del parámetro que se desea modificar y presionar uno de los botones

>> o **<<**.

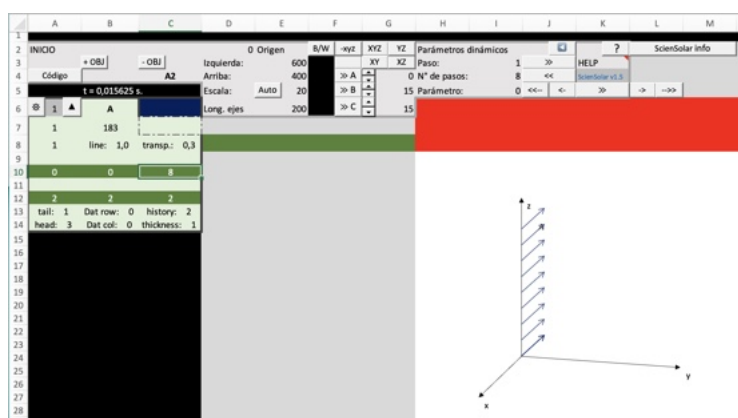


Figura 6.34.

*Interfaz para ejecutar simulaciones con parámetros dinámicos. Utilización del botón **<<** para cambiar el parámetro de la celda seleccionada, que en este caso corresponde a la coordenada z del vector (celda **C10**).*

Nota. Elaboración propia.

Asegúrese de no seleccionar una celda que contenga fórmulas o texto, ya que el código podría sobrescribir estos valores o generar un error.

En la figura 6.34 se ilustra el comportamiento de la celda seleccionada cuando el usuario presiona el botón **>>**. En particular, se observa cómo dicha celda modifica su valor de manera sistemática a lo largo de la simulación. En el caso concreto que se muestra, la celda seleccionada corresponde a la coordenada z del vector A. Durante cada paso de la simulación, el valor de dicha coordenada z se incrementa en una unidad, partiendo desde 1 hasta alcanzar el valor final de 8. Para facilitar la visualización y el seguimiento de este proceso incremental, se ha activado previamente el botón , lo que permite registrar y mostrar la evolución temporal de los valores.

Adicionalmente, el botón **>>** posee una funcionalidad oculta que se activa cuando se establece el valor **I3** = 0.25 en la hoja de cálculo. Esta funcionalidad extendida permite modificar no únicamente la celda seleccionada, sino también las dos celdas que la preceden inmediatamente. Por ejemplo, si se asigna el valor 0.25 como paso de avance y se selecciona la celda correspondiente a la coordenada z, entonces al presionar **>>** se modificarán de manera simultánea las coordenadas x y y del vector, junto con la coordenada z. Este comportamiento simultáneo se encuentra representado en la figura 6.35, donde puede apreciarse claramente el efecto conjunto sobre las tres componentes del vector.

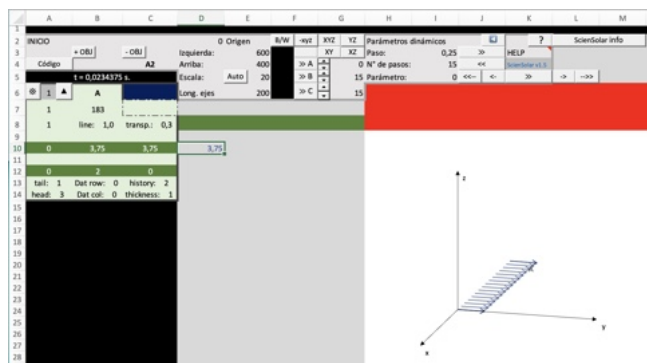


Figura 6.35.

Utilización de un paso de 0.25 para cambiar simultáneamente las coordenadas y y z del vector en la simulación.

Nota. Elaboración propia.

6.52 Zona 7: Instrucciones, teoría y fórmulas del modelo

La **Zona 7** está diseñada para que el usuario pueda incluir la documentación relacionada con el modelo que está creando o simulando en la hoja de cálculo. En esta sección, se ofrece un espacio donde se puede escribir de manera ordenada tanto la *teoría* que respalda el modelo como las *instrucciones* necesarias para su uso. Además, es posible incluir *fórmulas matemáticas* que sean parte del modelo, facilitando así la visualización y comprensión del mismo. Esta sección actúa como un área de anotaciones y explicaciones, complementando el trabajo interactivo realizado en las demás zonas del tablero de control.

6.53 Instrucciones y teoría del modelo

El usuario puede escribir aquí un texto explicativo detallado sobre el *modelo* que está desarrollando. Esta área es ideal para documentar los *objetivos*, *supuestos* y *explicaciones* que puedan ser necesarias para comprender el comportamiento del sistema que se está modelando o simulando.

Es recomendable que el usuario divida el texto en párrafos claros y concisos, para que las explicaciones sean fáciles de seguir, por ejemplo, puede incluir una *introducción* al problema que está resolviendo, una descripción de las *variables* involucradas, las *relaciones matemáticas* que rigen el sistema, y una *conclusión* sobre lo que se espera obtener al realizar la simulación.

La información que se incluya en esta sección es esencial para proporcionar el contexto completo del modelo y servir como guía para quienes deseen entender la teoría detrás de la simulación. Esta documentación es útil no solo para el propio usuario, sino también para otros usuarios que deseen reproducir o entender el

modelo más adelante.

El título del modelo se puede insertar en la celda **N7** y el título del texto o teoría en la celda **Z7**. El texto se recomienda incluir a partir de la celda **W11** y el usuario, al elaborar el modelo, debe cortar la línea de forma manual, es decir, el texto empieza en la celda **W11** y al llenar hasta la celda **AC**, el usuario debe terminar con el primer renglón y continuar en la celda **W12** para el segundo renglón, etc., de tal manera que todo el texto quede en la columna **J**. Sin embargo, se pueden utilizar otras celdas como inicio para dejar sangría u otro formato del texto. Se debe dejar espacio para las fórmulas desde un principio.

6.54 Inclusión de fórmulas matemáticas

Además del texto descriptivo, la **Zona 7** permite insertar *fórmulas matemáticas* de manera directa desde el editor de ecuaciones. Esto es útil cuando el modelo depende de ecuaciones matemáticas complejas, y es necesario expresar las relaciones entre las variables de forma formal.

Las fórmulas deben ser escritas en la columna **AC** de la hoja de cálculo. Para cada fórmula, se deberá seguir el formato específico, usando el prefijo "(Eq-" al inicio del nombre de la fórmula. De esta manera, las fórmulas se identifican de forma clara y sistemática.

- **Formato para escribir una fórmula.** El nombre de la fórmula debe comenzar con "(Eq-", seguido de un nombre descriptivo que identifique de manera única la fórmula, por ejemplo:

(Eq-MovimientoRectilineo)

- **Ubicación de las fórmulas.** Las fórmulas deben estar ubicadas en la hoja denominada "**3DModels**", que es la hoja que contiene las representaciones gráficas del modelo.
- **Generación del botón de las fórmulas.** El botón para llamar la ecuación se genera solamente después de haber exportado el modelo a través del botón y de haberlo introducido al editor de Visual Basic.

Una vez ingresada la fórmula, se podrá visualizar en la hoja del modelo. Estas fórmulas, junto con las instrucciones y la teoría, ofrecen un marco completo que explica el funcionamiento del modelo y cómo las matemáticas intervienen en la simulación. En la figura 6.36 se muestra cómo se introduce una fórmula en la columna **AC** y cómo es nombrada y guardada en la hoja **3DModels**. La figura 6.37 muestra el resultado tras cargar el modelo nuevamente. Las fórmulas solo aparecen al presionar el botón correspondiente y desaparecen al simular, para ahorrar recursos computacionales.

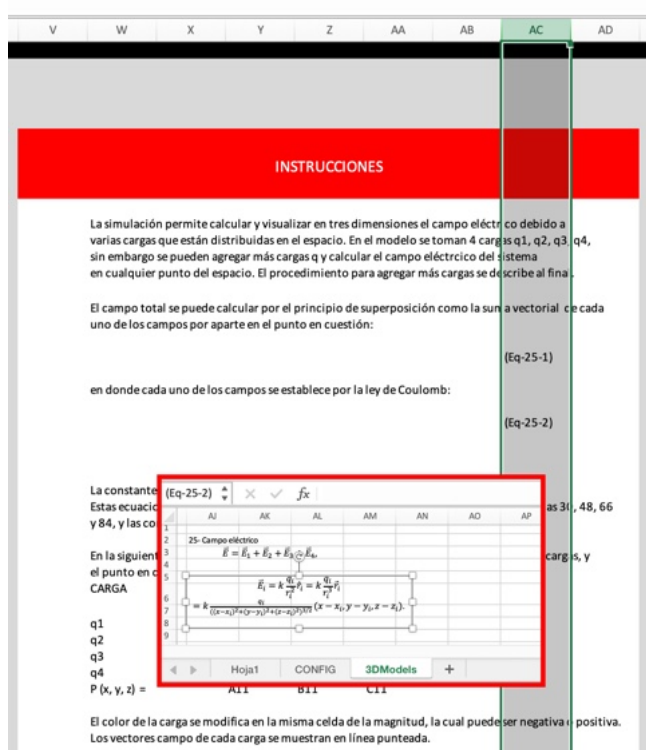


Figura 6.36.

Introducción del nombre de la fórmula en la hoja del modelo antes de ser exportado. Recuadro: Fórmula en el editor de ecuaciones y su nombre ubicada en la hoja 3DModels.

Nota. Elaboración propia.

En la esquina superior izquierda del recuadro correspondiente a la figura, se puede observar claramente el nombre asignado a la fórmula. Dicho nombre coincide exactamente con el que fue ingresado previamente en la hoja del modelo, lo que permite identificar de manera inequívoca la fórmula a la que se hace referencia. Si se desea modificar el nombre de una fórmula existente, el usuario debe, en primer lugar, seleccionar dicha fórmula dentro de la hoja de trabajo. A continuación, debe editar el nombre directamente en el campo de texto que se encuentra ubicado en la esquina superior izquierda de la hoja. Una vez realizado el cambio, es necesario presionar la tecla **Intro** en el teclado para confirmar y aplicar la modificación. En caso de que el nombre no se actualice correctamente después de este procedimiento, se recomienda intentar con un nombre diferente, ya que es posible que el nombre elegido originalmente no sea admitido o que exista algún conflicto con la denominación. En la fórmula de Excel 6.6 se muestra cómo el texto de la figura 6.37 se distribuye en las celdas de la región 7.

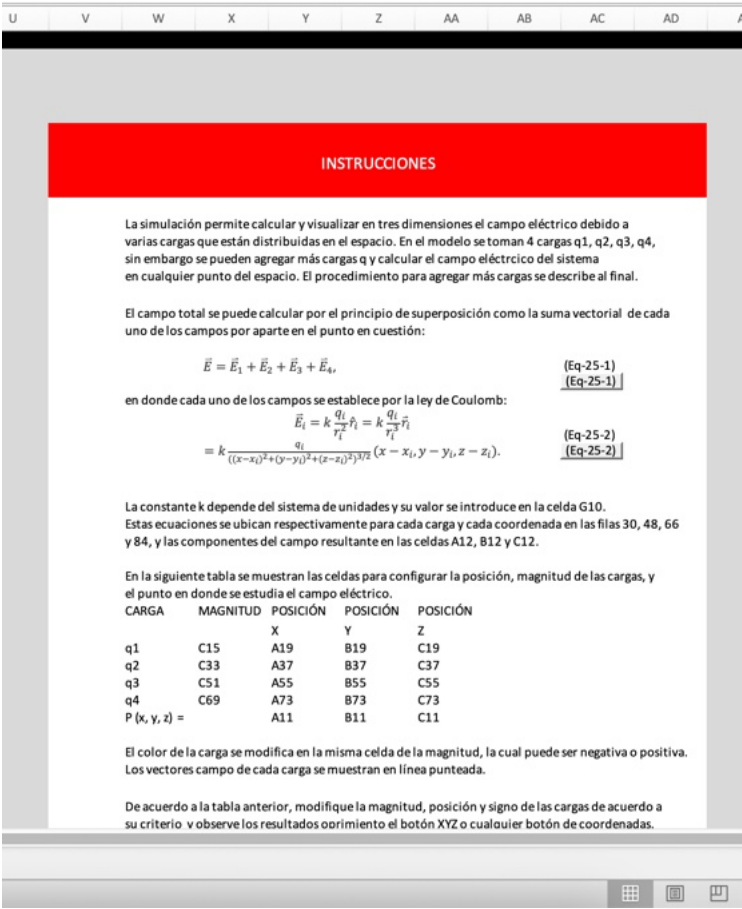


Figura 6.37.

Una vez exportado el modelo y luego de volver a cargarlo a la hoja, aparecerán los botones que permiten visualizar las fórmulas.

Nota. Elaboración propia.

Fórmula en Excel 6.6

Fragmento de la distribución del texto en las celdas de la zona 7. **Nota importante:** Los signos de puntuación al final de cada celda se omiten debido a que el texto va a continuar en la siguiente celda.

- W10 La simulación permite calcular y visualizar en tres dimensiones el campo eléctrico debido a
- W11 varias cargas que están distribuidas en el espacio. En el modelo se toman 4 cargas q1; q2; q3; q4;
- W12 sin embargo, se pueden agregar más cargas q y calcular el campo eléctrico del sistema
- W13 en cualquier punto del espacio. El procedimiento para agregar más cargas se

describe al final.

- W15 El campo total se puede calcular por el principio de superposición como la suma vectorial de cada
- W16 uno de los campos por aparte en el punto en cuestión:
- W20 en donde cada uno de los campos se establece por la ley de Coulomb:
- W26 La constante k depende del sistema de unidades y su valor se introduce en la celda G10.
- W27 Estas ecuaciones se ubican respectivamente para cada carga y cada coordenada en las filas 30; 48; 66
- W28 y 84; y las componentes del campo resultante en las celdas A12; B12 y C12.
- W30 En la siguiente tabla se muestran las celdas para configurar la posición; magnitud de las cargas; y
- W31 el punto en donde se estudia el campo eléctrico.
- W32 CARGA
- X32 MAGNITUD
- Y32 POSICIÓN
- Z32 POSICIÓN
- AA32 POSICIÓN
- Y33 X
- Z33 Y
- AA33 Z
- W34 q_1
- X34 C15
- Y34 A19
- Z34 B19
- AA34 C19
- W35 q_2
- X35 C33
- Y35 A37
- Z35 B37
- AA35 C37
- W36 q_3
- X36 C51
- Y36 A55
- Z36 B55
- AA36 C55
- W37 q_4
- X37 C69
- Y37 A73
- Z37 B73
- AA37 C73

- W38 $P(x; y; z) =$
- Y38 A11
- Z38 B11
- AA38 C11
- W40 El color de la carga se modifica en la misma celda de la magnitud; la cual puede ser negativa o positiva.
- W41 Los vectores campo de cada carga se muestran en línea punteada.
- W43 De acuerdo a la tabla anterior; modifique la magnitud; posición y signo de las cargas de acuerdo a
- W44 su criterio y observe los resultados oprimiendo el botón XYZ o cualquier botón de coordenadas.
- W45 Identifique puntos de simetría (x;y;z) en el espacio e introduzca sus coordenadas en A11; B11; C11.
- W47 El modelo está diseñado para agregar más cargas en el espacio. Para agregar una carga adicional
- W48 haga lo siguiente:
- W49 1. Oprima el botón +OBJ.
- W50 2. Ingrese A91 =3; B91=3; C91=6 para posición de la nueva carga. Oprima XYZ para ver el
- X51 resultado.
- W52 Oprima >C para ver el resultado de forma clara.
- W53 Para agregar más cargas el procedimiento es similar.
- W54 La magnitud del campo resultante se muestra en la celda G14.
- W56 Ejemplo:
- W57 Dadas cuatro cargas $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 3C$ ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado 8.
- X58 Hallar las componentes del campo resultante en un punto;
- X59 a) en el centro del cuadrado;
- X60 b) a una altura del centro del cuadrado $z=5$;
- X61 c) sobre el eje y a $y=10$.
- W62 Solución:
- W63 a) X63 Magnitud Z63 Posición
- W64 $q_1 = C15 =$ X64 3 Z64 (A19=0; B19=0; C19=0)
- W65 $q_2 = C33 =$ X65 3 Z65 (A37=8; B37=0; C37=0)
- W66 $q_3 = C51 =$ X66 3 Z66 (A55=8; B55=8; C55=0)
- W67 $q_4 = C69 =$ X67 3 Z67 (A73=0; B73=8; C73=0)
- W68 $P(x; y; z) =$ Z68 (A11=4; B11=4; C11=0)
- W69 $k = G10 =$ X69 8;9
- W70 Oprima XYZ
- W71 Observación: introducimos un sistema de unidades en el que $k=8;9$.
- W72 RESULTADO:
- W73 $|E| = G14 =$ X73 0 Y73 (por simetría).

W75	b)
W76	$P(x; y; z) = Z76$ (A11=4; B11=4; C11=5)
W77	RESULTADO:
W78	$ E = G14 = X78$ 1;39
W79	$E_x = A12 = X79$ 0
W80	$E_y = B12 = X80$ 0
W81	$E_z = C12 = X81$ 1;39
W82	Oprima XYZ o YZ
W84	c)
W85	$P(x; y; z) = Z85$ (A11=0; B11=10; C11=0)
W86	RESULTADO:
W87	$ E = G14 = X87$ 8;07
W88	$E_x = A12 = X88$ -0;5
W89	$E_y = B12 = X89$ 8;05
W90	$E_z = C12 = X90$ 0
W91	Oprima XY

6.55 Importancia de esta zona en un modelo

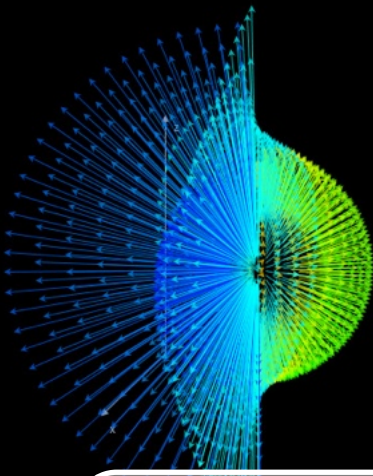
1. **Documentación clara y estructurada.** Al mantener las instrucciones, la teoría y las fórmulas matemáticas en una sección específica, se facilita la organización de la información, lo que mejora la comprensión del modelo.
2. **Fácil acceso a las fórmulas.** El uso del prefijo "(Eq-" en los nombres de las fórmulas permite una rápida identificación y acceso a las ecuaciones clave que definen el comportamiento del modelo.
3. **Mejora de la reproducibilidad.** El documento puede servir como una referencia completa para que otros usuarios puedan entender y reproducir el modelo, asegurando que se mantengan consistentes tanto los procedimientos como los parámetros de simulación.

6.56 Recomendaciones para el uso de la sección 7

- Asegúrese de que las fórmulas que escriba en la columna **AC** tengan el mismo nombre en ambas la sección de texto y la hoja **3DModels**, para evitar confusiones o errores de referencia.
- Sea claro y específico al describir las ecuaciones matemáticas. Cada fórmula debe estar acompañada de una breve explicación de su propósito dentro del modelo.
- Si la simulación involucra múltiples ecuaciones, asegúrese de organizar las fórmulas de manera lógica, agrupando aquellas que estén relacionadas con

un mismo aspecto del modelo.

- Utilice diferentes columnas en esta zona para distribuir datos en forma de columna.
- Trate de acompañar la teoría con algún ejemplo de utilización del modelo, indicando las celdas en donde los parámetros pueden ser cambiados.



7. Módulos

Los módulos son paquetes de código adicionales que realizan funciones específicas y, aunque complementarios, son independientes del paquete principal de *ScienSolar*. Estos módulos tienen un carácter universal y pueden integrarse en diferentes modelos, como los paquetes **TRAJECTORY** y **OPERADORES DIFERENCIALES**, ampliando así su funcionalidad. Generalmente, los módulos universales se desarrollan utilizando programación VBA y se añaden a la lista de proyectos, mientras que los proyectos de modelos físicos y matemáticos se desarrollan principalmente desde el tablero de *ScienSolar* en Excel, sin necesidad de programación. En este capítulo se describen los módulos universales de *ScienSolar* desarrollados hasta el momento de la escritura del presente libro.

7.1 Módulo para dibujar trayectorias

ScienSolar permite trazar trayectorias de vectores específicos en forma de curvas y convertirlas en imágenes dentro de Excel, de modo que puedan ser utilizadas como nuevos objetos a los que se les pueden cambiar sus propiedades. Sin embargo, una vez generada, la imagen no estará sujeta a las ecuaciones de movimiento que la originaron, ni a las rotaciones del sistema de coordenadas, por lo que no se ajustará a ellas posteriormente. Si se cambia la vista del modelo, será necesario volver a dibujar la trayectoria con los nuevos valores de la simulación para obtener

una forma diferente.

Para **dibujar una trayectoria** y convertirla en una imagen, primero se debe descargar el módulo 15 - TRAJECTORY de la lista de proyectos. Este módulo puede integrarse a un proyecto ya existente.

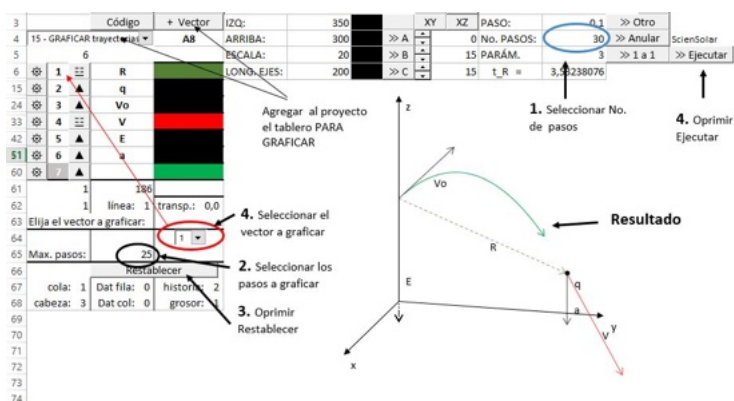


Figura 7.1.

Ejemplo de graficado utilizando la herramienta para representar el recorrido del vector posición en el movimiento parabólico. Se muestran los pasos explicados en el texto.

Nota. Elaboración propia.

Como ejemplo, elaboraremos una trayectoria para el caso del movimiento parabólico utilizando el vector posición para trazar su trayectoria. En la figura 7.1 se muestra el proceso y el resultado de graficar el recorrido del vector posición **R** en el intervalo de tiempo especificado en la configuración. El procedimiento es el siguiente: Primero se selecciona el proyecto MOVIMIENTO PARABÓLICO y se presiona el botón **+ Vector** para cargarlo a la hoja. Luego, se selecciona el proyecto 15 - GRAFICAR TRAYECTORIAS y se presiona el botón **+ Vector**; a continuación, se debe ingresar el número de pasos en los que se trazará la trayectoria en la celda correspondiente de la configuración de trayectoria. Este número debe ser menor que el número total de pasos de la simulación (si es mayor, el programa continuará dibujando cada vez que se ejecute la simulación hasta completar el número de pasos especificados). Finalmente, se presiona el botón **Reset graph**, se selecciona el vector cuya trayectoria se desea graficar y se presiona **>>** para ver los resultados.

Para graficar varias trayectorias en un mismo proyecto, en lugar de cargar múltiples módulos de trayectorias (lo cual no está permitido), se debe dibujar una trayectoria después de la otra sin presionar el botón **Reset graph**, por ejemplo, si se desean graficar las trayectorias de dos vectores, se selecciona el primer vector, se ejecuta la simulación, y luego, sin presionar **Reset graph**, se selecciona el segundo vector

para ejecutar nuevamente la simulación. En la figura 7.2 se pueden observar ejemplos de trayectorias tridimensionales generadas a partir de varios modelos de la lista de proyectos. En el modelo COORDENADAS ESFÉRICAS, se trazaron varias trayectorias cambiando el color de cada una y el parámetro de avance del vector. En este caso, antes de presionar **>>**, se introdujeron para la primera trayectoria los valores **B74=15** y **I4=15** para el número de pasos, **E13=I5**, **E14=I5*2** y después de completarla, para la segunda trayectoria se cambió el color en **C69** y los valores **E13=I5*2** y **E14=I5*2**. En la gráfica c) de la misma figura, se utilizó la función *contador arbitrario* (Sección 6.43 - 6.51), cambiando consecutivamente la celda seleccionada para mover el vector en diferentes direcciones. En los otros modelos de la figura, simplemente se presionó el botón **Reset graph**, se seleccionó el vector correspondiente en el módulo de trayectorias y se ejecutó la simulación.

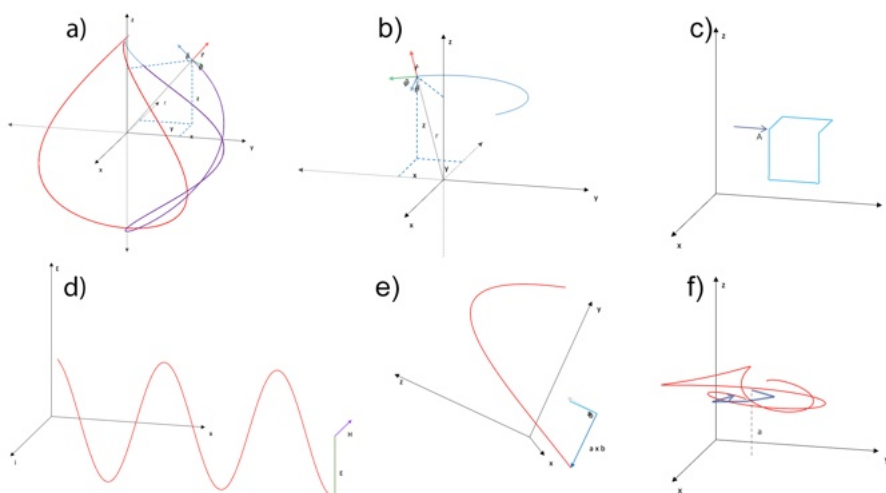


Figura 7.2.

Uso del módulo TRAJECTORY en diferentes modelos. Las gráficas a) y b) corresponden al modelo de coordenadas esféricas; c) muestra el recorrido de un vector utilizando la función contador arbitrario; d) recorrido del campo eléctrico en el proyecto de onda plana; e) modelo ScienSolar; f) modelo de rotación compuesta.

Nota. Elaboración propia.

Si se desea conservar la gráfica para futuras simulaciones, es posible seleccionarla, copiarla y pegarla en otra hoja de cálculo.

Al presionar nuevamente el botón **Reset graph**, la trayectoria se borrará y si la simulación continúa sin restablecer, la gráfica permanecerá en el sistema de

coordenadas.

Algunos parámetros de apariencia de la gráfica como el color, grosor o relleno, pueden ser modificados desde *ScienSolar* siempre y cuando no se haya completado el número de pasos a graficar. Si esto ya ha ocurrido, las modificaciones deberán realizarse a través del menú de Excel, seleccionando la gráfica manualmente.

En resumen, el proyecto 15 - GRAFICAR TRAYECTORIAS es un módulo que se utiliza en conjunto con otros proyectos o vectores y no puede emplearse si no existe al menos un vector en el sistema de coordenadas. Además, solo puede graficar la trayectoria de un vector a la vez, lo que implica que si se desean graficar trayectorias para más de un vector, esto debe hacerse de forma consecutiva y no simultánea.

7.2 Módulo para cálculo de operadores diferenciales (OD)

El paquete *ScienSolar* incluye un módulo adicional para el cálculo numérico de operadores diferenciales aplicados a funciones vectoriales y escalares. Las definiciones de funciones escalares y vectoriales, también denominadas campos escalares y vectoriales, pueden consultarse en el capítulo 3. Este módulo no funciona de manera aislada; es necesario que previamente se haya definido una función vectorial, escalar o al menos un vector constante en la hoja de trabajo. En el caso de trabajar con funciones escalares, estas se definen directamente en el módulo de operadores diferenciales, en la celda **E19** de la figura 7.3. En esta misma celda se debe ingresar el número del vector cuando se analizan funciones vectoriales.

El módulo permite calcular numéricamente (tanto en un solo punto como simultáneamente en múltiples puntos del espacio tridimensional) las siguientes operaciones:

- Derivada parcial con respecto al tiempo de una función escalar, es decir, $\partial U(x, y, z, t)/\partial t$. No calcula la derivada total cuando las coordenadas también dependen del tiempo.
- Derivada parcial con respecto al tiempo de una función vectorial, esto es $\partial \vec{A}(x, y, z, t)/\partial t$. Tampoco calcula la derivada total en el caso de que las coordenadas dependan del tiempo.
- Gradiente de una función escalar, $\text{grad } U(x, y, z)$.
- Divergencia de una función vectorial, $\text{div } \vec{A}(x, y, z)$.
- Rotacional de una función vectorial, $\text{rot } \vec{A}(x, y, z)$.
- Laplaciano de una función escalar $\Delta U(x, y, z)$.
- Laplaciano de una función vectorial $\Delta \vec{A}(x, y, z)$.
- Producto escalar de un vector por el gradiente, aplicado a otro vector

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}.$$

- Producto escalar de dos vectores, $(\vec{A} \cdot \vec{B})$.
- Producto vectorial de dos vectores, $[\vec{A} \times \vec{B}]$.

Las últimas dos operaciones no corresponden estrictamente a operadores diferenciales, pero en muchos problemas aparecen también el producto escalar y el producto vectorial, por lo que se decidieron incluir aquí como complemento. Este módulo también permite calcular operaciones combinadas de las anteriores. Algunas de estas operaciones son las siguientes:

- Derivada parcial con respecto al tiempo de hasta la quinta potencia de una función escalar, es decir, $\partial/\partial t(\partial/\partial t(\dots \partial/\partial t U(x, y, z, t)))$, dependiendo de las capacidades del ordenador.
- Derivada parcial con respecto al tiempo de hasta la quinta potencia de una función vectorial, es decir, $\partial/\partial t(\partial/\partial t(\dots \partial/\partial t \vec{A}(x, y, z, t)))$, también dependiendo de las capacidades del ordenador.
- $\text{div}[\vec{A} \times \vec{B}]$.
- $\text{rot}[\vec{A} \times \vec{B}]$.
- $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.
- $\vec{A} \times \text{rot} \vec{B}$.
- $\text{rot}(\text{rot}[\vec{A} \times \vec{B}])$.

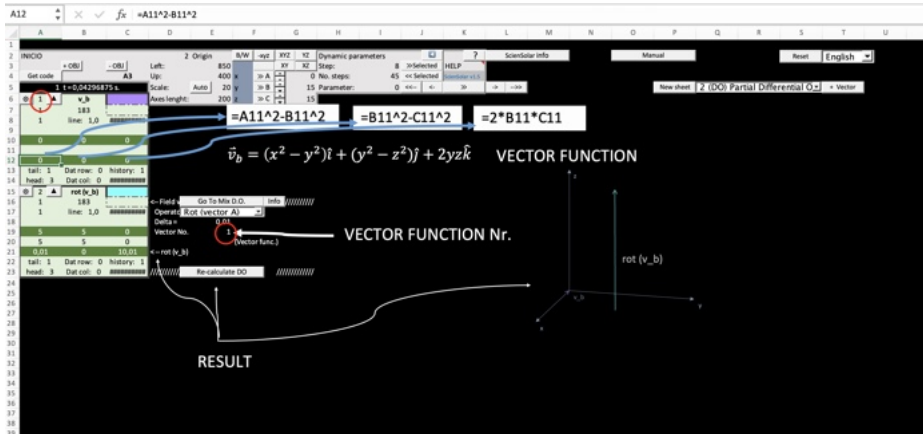


Figura 7.3.

Módulo para el cálculo numérico de operadores diferenciales.

Nota. Elaboración propia.

Gracias a las características de *ScienSolar*, también es posible realizar operaciones más sofisticadas, combinando sumas, restas y ampliando aún más las posibilidades de resolución de problemas mediante el uso de las diversas identidades matemáticas conocidas para operadores diferenciales. Además, el sistema permite cargar el módulo múltiples veces en un mismo proyecto y en una misma hoja de cálculo,

lo que da la posibilidad de realizar diferentes operaciones y combinaciones de las mismas.

El funcionamiento del módulo se basa en la definición de derivada, es decir, el código realiza la operación

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (7.1)$$

la cual se ajusta a cada caso según el tipo de operador, la coordenada, la forma matemática de la función y el punto del espacio donde se calcula el operador. Además, el usuario puede modificar el valor de Δx o Δt en el módulo correspondiente, como se indica en la celda **E18** de la figura 7.3. En general, se recomienda dejar el valor predeterminado de Δx para la mayoría de los problemas, y solo cambiarlo si es necesario para casos específicos.

7.3 Procedimiento para hacer uso del módulo

El procedimiento para utilizar el módulo desde el inicio es el siguiente:

1. Cargar a una nueva hoja de cálculo el módulo para operadores diferenciales (filas 6 a la 14 en la figura 7.4).
2. Agregar un vector (filas 15 a la 23 en la figura 7.4).
3. Definir una función vectorial $\vec{A}(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$, donde f , g y h son funciones cualesquiera de las coordenadas x , y , z . Para ello, se debe escribir en el módulo de vector la función $f(x, y, z)$ en la celda **A21**, correspondiente a A_x (ver figura 7.4), la función $g(x, y, z)$ en la celda **B21**, correspondiente a A_y , y finalmente la función $h(x, y, z)$ en la celda **C21**, correspondiente a A_z . Como variables (x, y, z) se utilizan las celdas **A20**, **B20** y **C20**, por ejemplo, la función vectorial $\vec{A} = (3x^2 + 2y, x + z, 0)$ debería tener los siguientes valores en las respectivas celdas: **A21** = $3*A20^2 + 2*B20$, **C21** = $A20 + C20$, **B21** = 0, incluyendo el signo igual.
4. En la lista del módulo de operadores, seleccionar el tipo de operador.
5. Si el operador es para una función vectorial, en la celda **E10** se debe indicar el número del vector en el cual se define esta función, por ejemplo, si en la figura 7.4 la función vectorial se representa por el vector $\vec{A}$, entonces **E10** = 2. En el caso de que el operador requiera dos vectores, como en $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$, se debe escribir el número del segundo vector (en este caso el de $\vec{B}$) en la celda **E10** y el número del primer vector (en este caso el de $\vec{A}$) en la celda **F10**.
6. Si el operador es para una función escalar, escribir la función escalar en la celda correspondiente a $U(x, y, z, t)$, celda **E10** de la figura 7.4, por ejemplo,

la función escalar $U(x, y, z) = 2x^2 + 3y$ debería tener el valor en la celda: $E10 = 2*A11^2 + 3*B11$, usando las celdas $A11$, $B11$ y $C11$ para las variables.

- Para funciones que dependen del tiempo, se utiliza la celda $I5$ como variable de tiempo, de manera similar a como se hace con las coordenadas.
- Escribir en las celdas $A11$, $B11$ y $C11$ las coordenadas del punto en el que se desea calcular el valor del operador aplicado a la función.
- Oprimir el botón **Calculate** para calcular el valor numérico del operador en el punto seleccionado. Los resultados para una función vectorial se mostrarán en las celdas $A12$, $B12$, $C12$, y para un resultado escalar en la celda $E11$. Si se desea obtener los resultados en diferentes puntos de una región del espacio, se puede escribir en la celda $C7$ la letra s para coordenadas esféricas, c para coordenadas cilíndricas o o para coordenadas cartesianas.
- Cada vez que se realice una modificación en la función o el operador, es necesario oprimir el botón **Calculate** nuevamente.

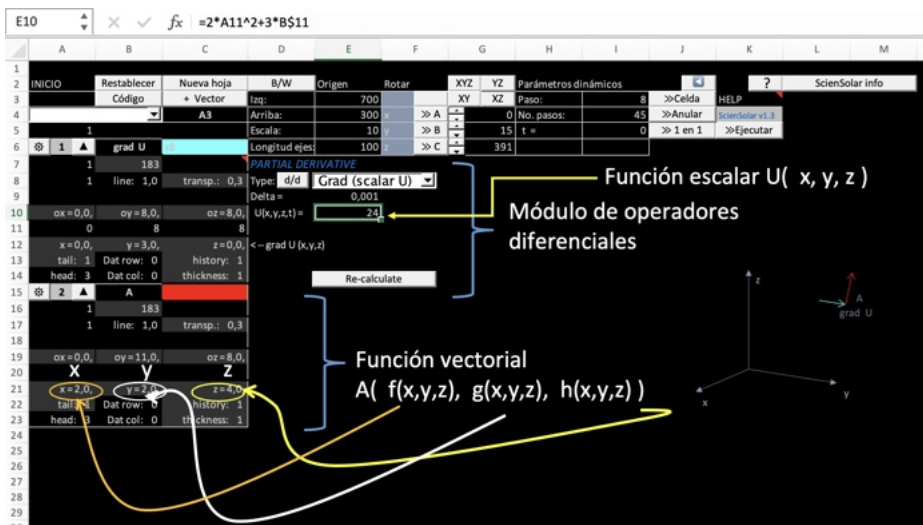


Figura 7.4.

Módulo para el cálculo numérico de operadores diferenciales y módulo para definir una función vectorial.

Nota. Elaboración propia.

A continuación se harán algunos ejemplos de cómo construir campos vectoriales, escalares y campos como resultado de operadores diferenciales.

Ejemplo 7.3.1 Analizar el campo escalar $V = k \frac{1}{r}$.

SOLUCIÓN

Un campo escalar se representa en el espacio tridimensional como una distribución de valores numéricos, donde cada punto tiene un valor asociado. A diferencia de los vectores, los escalares carecen de dirección y no se descomponen en componentes vectoriales. Para representar un campo escalar en *ScienSolar*, el valor de la celda **B7** debe ser 146, mientras que en las celdas de coordenadas se asignan los valores de la función en puntos específicos. Así, para representar $V = k \frac{1}{r} = k \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ en el espacio tridimensional, se deben establecer los valores de las celdas como se muestra en la fórmula de Excel 7.1.

La visualización del campo escalar en una región del espacio puede hacerse usando puntos cuyo color indique la magnitud de la función. Por ejemplo, al visualizar la función en coordenadas esféricas, se debe fijar **C7**=s y luego, al presionar un botón de visualización, ajustar los parámetros en la cadena de valores de la celda para modificar la representación del campo, tal como se indica en la fórmula de Excel 7.1. Esto genera una representación gráfica del campo escalar. El parámetro de color (*color*=**[10]**) varía entre rojo (valores cercanos a cero) y azul (valores cercanos a 10). El resultado se muestra en la figura 7.5.

Fórmula en Excel 7.1

Para representar la función escalar en *ScienSolar*, se deben asignar los siguientes valores a las celdas:

- **B7** = 146 { configuración para escalares },
- **G10** = 150 { $= k$ },
- **A12** = $G10/RAIZ(A11^2 + B11^2 + C11^2)$ { $= k \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ },
- **B12** = $G10/RAIZ(A11^2 + B11^2 + C11^2)$ { $= k \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ },
- **C12** = $G10/RAIZ(A11^2 + B11^2 + C11^2)$ { $= k \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ }.

Para calcular el valor de la función en un punto específico, se procede de la siguiente manera:

- **C7** vacía, **A11** = 3, **B11** = 4, **C11** = 2.

Para calcular la función en una región del espacio en coordenadas esféricas, se utiliza la siguiente cadena de parámetros:

- **C7** = s[50]r=[20;180]s2[10]phi=[0;360]s3[10]theta=[0;180]color=[10]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0,005400429s

Dado que la estructura de *ScienSolar* está basada en módulos que representan vectores, para un campo escalar se debe escribir la misma función en las celdas correspondientes a las tres coordenadas. Además, en la celda **B7**, se debe asignar el valor 146. ■

El resultado de la función se podrá observar en cualquiera de las celdas **A12**, **B12**, o **C12**.

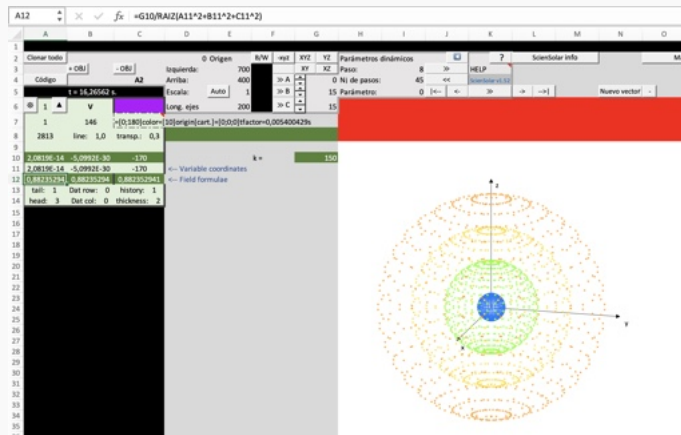


Figura 7.5

Campo escalar $V = k \frac{1}{r}$ visualizado en una región del espacio en coordenadas esféricas para tres radios diferentes. La gama de colores puede ajustarse modificando el parámetro $\text{color}=[1]$.

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 7.3.2 Analizar $\vec{E} = -\nabla V$.

SOLUCIÓN

Una vez definida y analizada la función escalar $V = k \frac{1}{r}$ en el ejemplo 7.3.1 y el campo vectorial en el ejemplo 6.25.1, procederemos a analizar el comportamiento de la ecuación $\vec{E} = -\nabla V$. Para ello, utilizaremos el módulo de operadores diferenciales disponible en la lista de proyectos de *ScienSolar*.

Antes de continuar con la simulación, recordemos que el gradiente de una función escalar $V(x, y, z)$ es un vector definido como

$$\nabla V \equiv \hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (7.2)$$

donde la dirección del gradiente coincide con la dirección de mayor crecimiento de la función escalar V .

En una nueva hoja de *ScienSolar*, seleccione el proyecto de operadores diferenciales (derivadas parciales) y cárguelo a la hoja. En el cuadro combinado que aparece, seleccione *Grad (scalar U)* y, en la celda **E10**, ingrese la función escalar $V = k \frac{1}{r} = k \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, incluyendo el signo igual y el signo menos como se muestra en la fórmula de Excel 7.2. Se observará una imagen del campo, como la que se muestra en la figura 7.6. El resultado debe coincidir con el obtenido en

el ejemplo 6.25.1, es decir, el gradiente del campo escalar $-\nabla V = -\nabla(k\frac{1}{r})$ es igual al campo vectorial $\vec{E}$ obtenido en el ejemplo 6.25.1. En electrostática, la función escalar $V(x, y, z)$ corresponde al potencial de una carga puntual positiva, y el campo vectorial $\vec{E}(x, y, z)$ es el campo eléctrico generado por esta carga. El vector gradiente del potencial tiene una dirección opuesta a la del campo eléctrico, lo que explica la presencia del signo negativo en la ecuación.

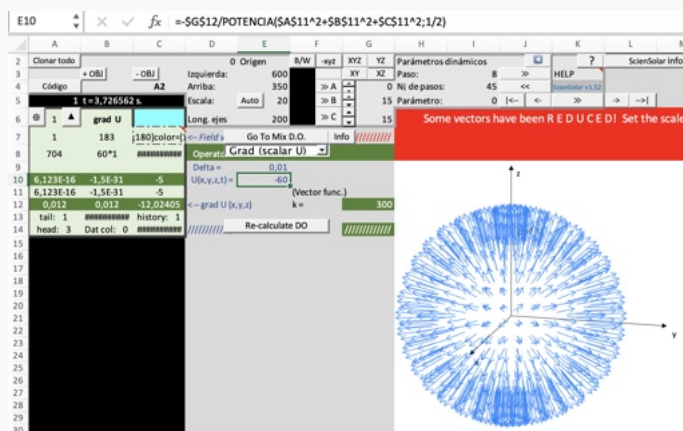


Figura 7.6

Campo vectorial $-\nabla V$ visto en una región del espacio en coordenadas esféricas (compárese con el ejemplo 6.25.1 para el campo $\vec{E}$, especialmente con la Figura 6.18).

Nota. Elaboración propia.

Fórmula en Excel 7.2

Construcción del modelo para la función ∇V .

- Descargar a una nueva hoja el proyecto Nueva hoja 2 (DO) Operadores diferenci + Vector.
- En el proyecto descargado, seleccione Grad (scalar U).
- G12 = 300 { = k },
- E10 = $-G12 / POTENCIA(A11^2 + B11^2 + C11^2; 1/2)$
 $\{ = V = -k \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \}.$
- C7 = s { s - coordenadas esféricas, c - cilíndricas, o - cartesianas; vacío corresponde a visualizar solo un punto }.
- Oprimir Calculate DO.

El lector podrá experimentar con diferentes funciones escalares y vectoriales, por ejemplo, repetir el ejercicio para una carga puntual negativa. También puede intentar visualizar estos campos en diferentes coordenadas y compararlos con los resultados obtenidos.

Es importante mencionar que las coordenadas del vector ∇V se muestran en

las celdas $\boxed{A12} = (\nabla V)_x$, $\boxed{B12} = (\nabla V)_y$, y $\boxed{C12} = (\nabla V)_z$, mientras que el punto de observación se determina con las celdas $\boxed{A11} = x$, $\boxed{B11} = y$, $\boxed{C11} = z$. Para observar el comportamiento de la función en un punto particular como el punto $P(2,1,3)$, se debe borrar el contenido de la celda $\boxed{C7}$ e introducir los valores en las celdas $\boxed{A11} = 2$, $\boxed{B11} = 1$, y $\boxed{C11} = 3$. Finalmente, se oprime $\boxed{\text{Re-Calculate}}$ para ver los resultados. Es relevante aclarar que *ScienSolar* en Excel trabaja exclusivamente en coordenadas cartesianas; si se elige otro tipo de coordenadas (por ejemplo, esféricas), el código realiza la conversión correspondiente a coordenadas cartesianas para visualizar el vector.

Ejemplo 7.3.3 Analizar $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$.

SOLUCIÓN

A continuación, analizamos la operación $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$, la cual está disponible en el módulo de operadores diferenciales. Solo será necesario agregar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a la hoja de cálculo. Para entender el significado de esta operación, es necesario calcular primero el producto punto entre $\vec{A}$ y el operador gradiente, y luego aplicar el operador escalar resultante al vector $\vec{B}$:

$$\begin{aligned}
 (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} &= \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B_x, B_y, B_z) \\
 &= \hat{i} \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \hat{j} \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \hat{k} \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right), \tag{7.3}
 \end{aligned}$$

por lo que el resultado final es un vector.

El paquete *ScienSolar* realiza el cálculo numérico y entrega el vector final a partir de los dos vectores iniciales. En una nueva hoja, agregue dos vectores con $\boxed{\text{Nuevo vector}}$, denominados A y B . Luego, cargue el módulo de operadores diferenciales. En el cuadro combinado, seleccione $(A \text{ grad}) B$. En $\boxed{E28}$ coloque 2 (número del vector B) y en $\boxed{F28}$ coloque 1 (número del vector A). Oprima $\boxed{\text{Calculate}}$. Si los vectores son constantes, el resultado será nulo. Para obtener resultados más interesantes, consideremos que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean funciones vectoriales, es decir, $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ y $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$. Por ejemplo, tomemos

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(x, y, z) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
 \vec{A}(x, y, z) &= (x^2, y, z), \tag{7.4}
 \end{aligned}$$

e ingrese estas funciones a la hoja de cálculo como se muestra en la fórmula de Excel 7.3 y cuyo resultado se ilustra en la figura 7.7. El lector puede cambiar el punto donde se calcula la operación, con diferentes valores.

Fórmula en Excel 7.3

Configuración del modelo $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ en *ScienSolar* a partir de una nueva hoja:

- Oprimir para agregar $\vec{A}$.
- Oprimir para agregar $\vec{B}$.
- Descargar el módulo 2: + .
- = $A_{11}^2 \{ = A_x = x^2 \}$,
- = $B_{11} \{ = A_y = y \}$,
- = $C_{11} \{ = A_z = z \}$,
- = $A_{20}/\text{RAIZ}(A_{20}^2 + B_{20}^2 + C_{20}^2) \{ = B_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \}$,
- = $B_{20}/\text{RAIZ}(A_{20}^2 + B_{20}^2 + C_{20}^2) \{ = B_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \}$,
- = $C_{20}/\text{RAIZ}(A_{20}^2 + B_{20}^2 + C_{20}^2) \{ = B_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \}$,
- = 2,
- = 1,
- = 5 {coordenada x para el cálculo de la operación},
- = 5 {coordenada y para el cálculo de la operación},
- = 0 {coordenada z para el cálculo de la operación},
- Oprimir .

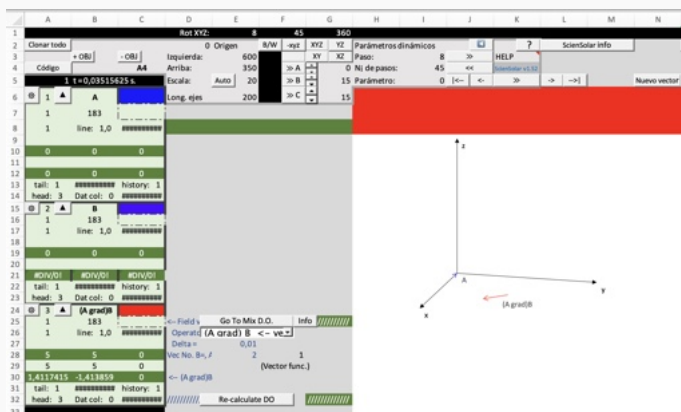


Figura 7.7

Resultado de la aplicación del operador $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ en el punto $(5, 5, 0)$, donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están dados por las funciones (7.4).

Nota. Elaboración propia.

Para visualizar el campo en una región del espacio, configure la celda como se muestra en la fórmula de Excel 7.4, obteniendo una imagen como la de

la figura 7.8. Luego de oprimir el botón **Re-Calculate**, aparecerán en la celda **C25** una cadena de valores que se puede personalizar de acuerdo con las necesidades, y también cambiar el tipo de coordenadas en que se distribuirán los vectores para visualizar el campo. La configuración de esta celda se explica bien en la sección 6.25, por ejemplo, cambiando el origen $\text{origin}[\text{cart.}]=[\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{0}]$ se puede mover la esfera obtenida en cualquier dirección de las coordenadas.

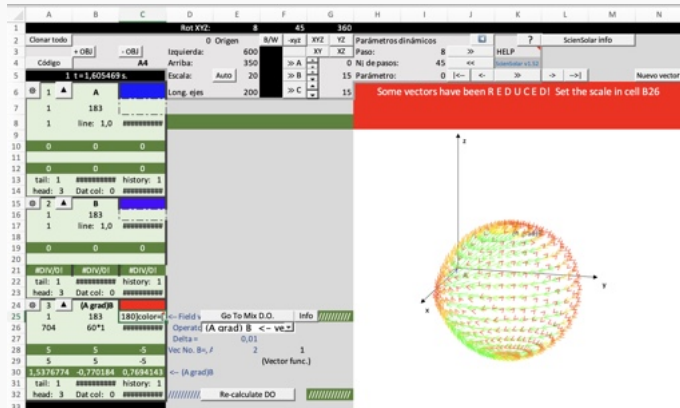


Figura 7.8

Vista de $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ en coordenadas esféricas.

Nota. Elaboración propia.

Cada vez que se realice un cambio en las funciones vectoriales o su orden, se debe oprimir el botón **Re-Calculate** para refrescar los resultados. *ScienSolar* calcula la operación $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ y escribe la nueva fórmula de cálculo en las celdas **A30**, **B30**, y **C30**; esta nueva fórmula ya no depende de las celdas que definen los vectores **A** y **B**, por lo que cualquier cambio en esos vectores no se reflejará en el resultado final a menos que se oprima el botón **Re-Calculate**.

A partir de este ejercicio, es fácil obtener el resultado de la operación invirtiendo el orden de los vectores, es decir, $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$. Esto se logra intercambiando los valores de las celdas **E28** = 1 y **F28** = 2, y luego oprimiendo el botón **Re-Calculate**. El resultado se puede observar en la figura 7.9.

Además, es muy sencillo visualizar los campos vectoriales $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por separado. Para ver el campo $\vec{A}$ en coordenadas esféricas, debe borrarse el contenido de la celda **C25** e introducir, sin el signo igual, la letra s minúscula en la celda **C7**. Igualmente, para observar el campo vectorial $\vec{B}$ en coordenadas esféricas, las celdas **C7** y **C25** deben estar vacías y la celda **C16** debe contener la letra s. Si se desea ver en coordenadas cilíndricas, se debe usar la letra c y en cartesianas, la letra o.

Fórmula en Excel 7.4

Vista del modelo $(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ en coordenadas esféricas:

- E28 = 2,
- F28 = 1,
- C25 = s {s - coordenadas esféricas, c - cilíndricas, o - cartesianas; vacío corresponde a visualizar solo un punto}.
- Oprimir .

Configuración de $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$:

- E28 = 1,
- F28 = 2,
- B26 = 1 {(=1) para tamaño original y (60*1) para tamaño reducido de los vectores},
- Oprimir .

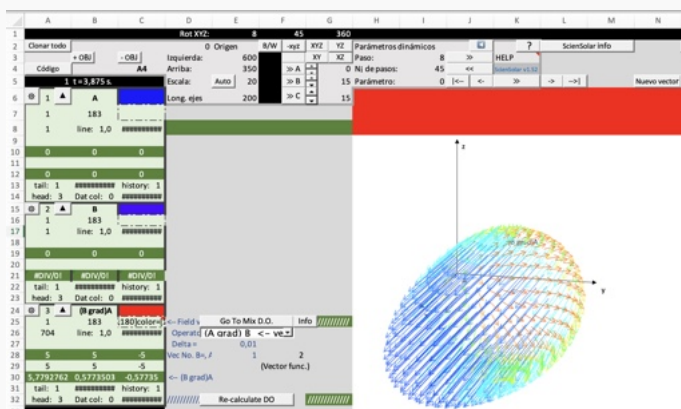


Figura 7.9

Configuración de $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$.

Nota. Elaboración propia.

A partir de este ejemplo, el lector podrá introducir sus propias funciones vectoriales $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Es importante recordar que cada vez que se realicen cambios en estas funciones, debe oprimirse el botón para que los cambios se reflejen, ya que el programa recalcula el resultado basado en las nuevas funciones.

Ejemplo 7.3.4 Verificar la identidad $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{A}$.

SOLUCIÓN

El módulo de operadores diferenciales puede cargarse simultáneamente varias veces a un mismo proyecto, permitiendo con esto analizar problemas más complejos.

Una manera de poner a prueba la veracidad con la que trabaja el código del paquete *ScienSolar* es verificar identidades como la que se plantea en este ejemplo. Verifiquemos que $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$, y para ello calcularemos primero la parte izquierda; y seguido la parte derecha para luego comparar los resultados.

Cálculo de $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$

Primero se calcula el producto punto $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ definiendo, a manera de ejemplo, las funciones vectoriales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{A}(x, y, z) &= (x^2, y, z), \\ \vec{B}(x, y, z) &= (x^3, 2x + y, z), \\ \vec{C}(x, y, z) &= (x, y^2, z).\end{aligned}\tag{7.5}$$

Luego, se cargan a una nueva hoja estos campos vectoriales tal como se hizo en el ejemplo anterior. Se agregan dos vectores con los nombres A y B respectivamente y se ingresan las funciones vectoriales. Luego se carga el módulo de operadores diferenciales y se selecciona de la lista el producto punto de dos vectores (A B), se escribe el número de los vectores en las celdas =2 y =1 y se oprime . El resultado es un escalar que se refleja en la celda . Para aplicar luego el operador gradiente a este resultado se carga un nuevo módulo de operadores diferenciales, se oprime el botón (ubicado en la celda) y se selecciona *Grad scalar U*. Este operador se aplica al producto punto, el cual es un escalar y por esta razón se usó el botón . Debido a que el producto punto lo tenemos en el modulo vectorial 3, entonces introducimos =3. El procedimiento completo para este modelo se indica en la fórmula de Excel 7.5, mostrando consecutivamente los pasos a seguir de forma estricta.

Finalmente se calcula $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$ para la parte izquierda de la identidad, para lo cual se agrega primero el vector $\vec{C}$ con el botón , se introducen sus componentes de acuerdo a la ecuación dada y luego se agrega un módulo de operadores diferenciales con el objetivo de calcular el producto punto. En este nuevo módulo se selecciona (A B), en donde el primer vector corresponde a $\vec{C}$ y el segundo vector corresponde a $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$. Entonces =4, =5. Oprimir del último módulo. El resultado $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$ es un escalar cuyo valor se verá reflejado en y corresponde al punto espacial indicado en las celdas , , .

Para obtener el valor de $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$ en un punto específico, por ejemplo P(5,5,0), se introduce =5, =5, =0 y el resultado es el que se muestra en , es decir $[\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})]_{(5,5,0)} = 16237,875$.

Fórmula en Excel 7.5Configuración de $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{A}$.

1. Oprimir dos veces para agregar $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
2. = A11^2, = B11, = C11 { $(A_x, A_y, A_z) = (x^2, y, z)$ }.
3. = A20^3, = 2*A20 + B20, = C20
 $\{ (B_x, B_y, B_z) = (x^3, 2x + y, z) \}$.
4. Seleccionar y descargar 2 (DO) + Vector .
5. Seleccionar .
6. = 2, = 1 { $\vec{A}$ en 1 y $\vec{B}$ en 2 }.
7. Oprimir { $= (\vec{A} \cdot \vec{B})$ }.
8. Seleccionar y descargar 2 (DO) + Vector .
9. Oprimir { necesario para una función escalar U }.
10. Seleccionar .
11. = 3 { la función escalar $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ está en 3 }.
12. Oprimir { $= \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$ }.
13. Oprimir para agregar $\vec{C}$.
14. = A47 { $C_x = x$ }, = B47^2 { $C_y = y^2$ }, = C47 { $C_z = z$ }.
15. Seleccionar y descargar 2 (DO) + Vector .
16. Seleccionar .
17. = 4, = 5 { $\vec{C}$ en 5 y $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$ en 4 }.
18. Oprimir { $\text{E56} = \vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$ }.
19. Seleccionar y descargar 2 (DO) + Vector .
20. Seleccionar .
21. = 2, = 5 { $\vec{B}$ en 2 y $\vec{C}$ en 5 }.
22. Oprimir { $= (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B}$ }.
23. Seleccionar y descargar 2 (DO) + Vector .
24. Seleccionar .
25. = 1, = 7 { $\vec{A}$ en 1 y $(\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B}$ en 7 }.
26. Oprimir { $\text{E74} = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B}$ }.
27. Seleccionar y descargar 2 (DO) + Vector .
28. Seleccionar .
29. = 1, = 5 { $\vec{A}$ en 1 y $(\vec{C}$ en 5 }.
30. Oprimir { $= (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{A}$ }.
31. Seleccionar y descargar 2 (DO) + Vector .
32. Seleccionar .
33. = 9, = 2 { $\vec{B}$ en 2 y $(\vec{C} \cdot \nabla)\vec{A}$ en 9 }.
34. Oprimir { $\text{E92} = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{A}$ }.
35. = = A56, = = B56, = = C56 { unificar los puntos en los que se calculan los operadores }.
36. = E56 { resultado del término a la izquierda del signo igual }.
37. = E74 + E92 { resultado del término a la derecha del signo igual }.
38. = 5, = 5, = 0 { ejemplo de un punto para el cálculo }.

Cálculo de $\vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$

Procederemos ahora a calcular la parte derecha de la igualdad y haremos esto en la misma hoja de cálculo, pues en esta ya se tienen definidos los campos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

Para calcular $\vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B}$ primero se hace la operación $(\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B}$, para ello se carga un nuevo módulo de operadores diferenciales y en él se selecciona (A grad) B en donde el primer vector corresponde a $\vec{C}$ y el segundo a $\vec{B}$, entonces $\boxed{\text{F64}} = 5$ y $\boxed{\text{E64}} = 2$. Oprimir . Para $\vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B}$ se carga un nuevo módulo de operadores diferenciales y se selecciona (A B), en donde el primer vector es $\vec{A}$ y el segundo es $(\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B}$, por lo tanto $\boxed{\text{F73}} = 1$ y $\boxed{\text{E73}} = 7$. Oprimir . Para calcular $\vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$ primero se hace la operación $(\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$, para lo cual se carga un nuevo módulo de operadores diferenciales y en él se selecciona (A grad) B en donde el primer vector corresponde a $\vec{C}$ y el segundo a $\vec{A}$, entonces $\boxed{\text{F82}} = 5$ y $\boxed{\text{E82}} = 1$. Oprimir . Para $\vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$ se carga de nuevo un módulo de operadores diferenciales y se selecciona (A B) en donde el primer vector es $\vec{B}$ y el segundo es $(\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$, por consiguiente $\boxed{\text{F91}} = 2$ y $\boxed{\text{E91}} = 9$. Oprimir para actualizar resultados.

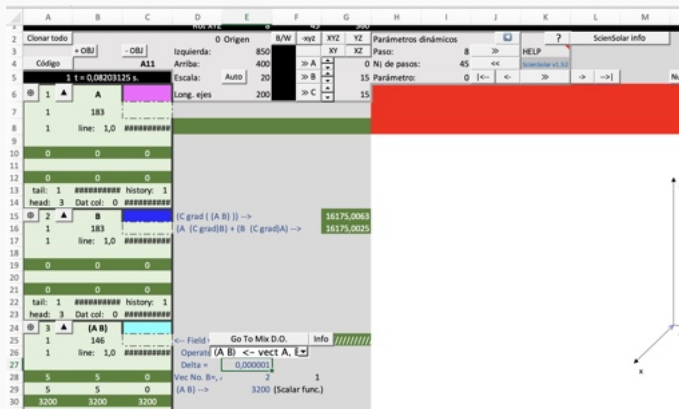


Figura 7.10

Verificación de la identidad

$\vec{C} \cdot \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$ cuyos términos de la izquierda y de la derecha fueron obtenidos de manera independiente y se observan en las celdas $\boxed{\text{G16}}$ y $\boxed{\text{G17}}$. Los cálculos obtenidos corresponden al punto espacial $P(5,5,0)$.

Nota. Elaboración propia.

Para calcular el valor de $\vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A}$ en el mismo punto que en el caso anterior, $P(5,5,0)$, se unifican los valores del punto de observación, es decir $\boxed{\text{A92}} = \boxed{\text{A56}}$, $\boxed{\text{A74}} = \boxed{\text{A56}}$, $\boxed{\text{B92}} = \boxed{\text{A56}}$, $\boxed{\text{B74}} = \boxed{\text{B56}}$, $\boxed{\text{C92}} = \boxed{\text{A56}}$, $\boxed{\text{C74}} = \boxed{\text{C56}}$. Se obtendrán los valores para cada término en las celdas $\boxed{\text{E74}}$ y $\boxed{\text{E92}}$ respectivamente; como estos valores son escalares, se puede calcular su

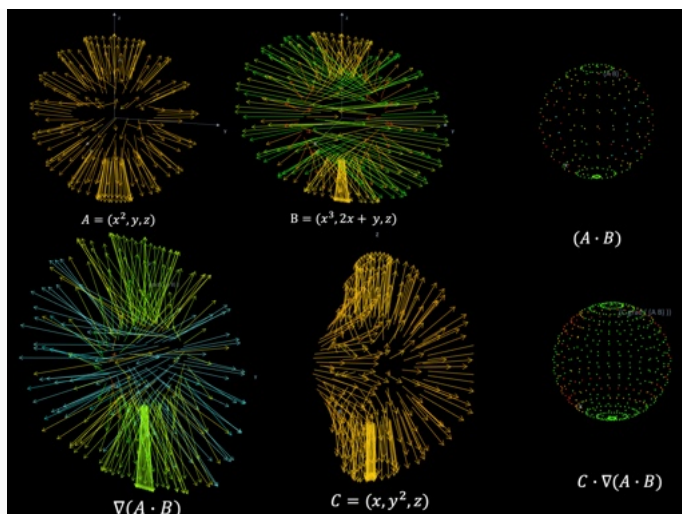
suma en una celda independiente, por ejemplo en la celda $G16 = E74 + E92$, lo cual da como resultado 16.175,00, lo mismo para $G15 = E56 = 16.175,00$ como se muestra en la figura 7.10. Al comparar este resultado con el obtenido anteriormente para el término de la izquierda, vemos que coinciden con gran precisión. El nivel de precisión depende de la exactitud con la que se haya definido el parámetro Delta, celda $E27$, $E36$, etc., con el cual se calcula la derivada (y que está presente en la ecuación (7.1) como Δx .)

Se pueden analizar espacialmente los diferentes campos que componen la identidad, considerando tanto su naturaleza vectorial como escalar, según corresponda en cada caso. En las ilustraciones que se presentan a continuación, es posible observar los distintos campos vectoriales y escalares que integran dicha identidad, los cuales han sido representados desde el sistema de coordenadas esféricas. Para llevar a cabo este análisis de manera independiente para cada campo, se emplean, según el caso, las celdas $C7$, $C16$, $C25$, $C34$, $C43$, $C52$, $C61$, $C70$, $C79$ y $C88$, dependiendo específicamente del campo que se desee visualizar. El procedimiento consiste en introducir la letra *s* minúscula en la celda correspondiente al campo de interés, mientras que las demás celdas deben dejarse vacías para evitar interferencias en la visualización. En la fórmula de Excel 7.6 se muestran algunas configuraciones particularmente útiles para el primer campo vectorial; dichas configuraciones pueden ser replicadas de manera análoga para el resto de los campos, adaptándolas según las necesidades de cada caso.

Fórmula en Excel 7.6

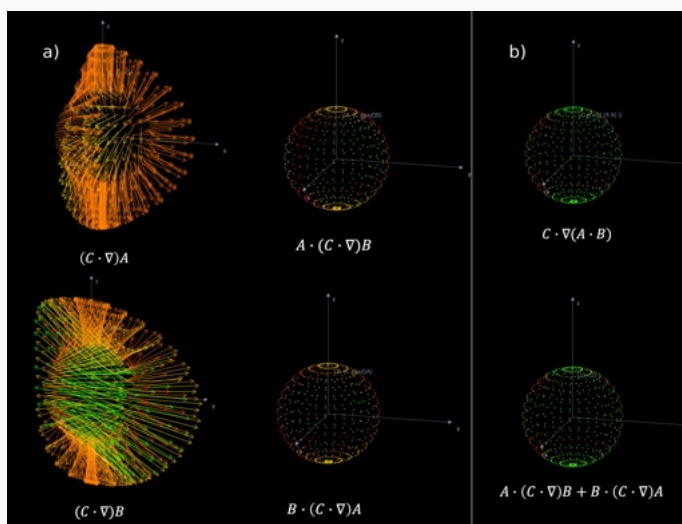
Algunas configuraciones útiles para visualizar los campos

- $C7$ vacía, $A11 = 50$, $B11 = 50$, $C11 = 0$, calcular el campo vectorial en $\vec{A}(50, 50, 0)$.
- $C7 = s, o, c$, sin el signo igual, para visualizar en coordenadas esféricas, cartesianas o cilíndricas. Dejar vacía la celda para deshabilitar esta opción.
- $C7 = s[0,5]r=[5;5]s2[10]phi=[0;360]s3[10]theta=[0;180]col...$ En la sección 6.25 se explica con detalle la configuración de esta cadena de valores.
- B/W para cambiar el color del fondo de la hoja.
- $C8 = 1$, para no mostrar el campo, $C8 = 0$ para mostrarlo.
- $Auto$, escalar automáticamente el sistema de coordenadas.
- $B8 = 60*1$ (sin el signo igual) para suavizar el campo.
- $B8 = 1$ al 14 (sin el signo igual), muestra el tamaño original de los vectores.
- $B13 = 30$, $B14 = 10$. Sacar una tabla de datos del campo a partir de la fila 30 y columna 10 de la hoja. Los valores 0 deshabilitan esta opción.

**Figura 7.11**

Campos escalares y vectoriales que intervienen en $\vec{C} \cdot \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})$ para un mismo radio y analizados por aparte. Los campos escalares se muestran a la derecha, los demás son campos vectoriales.

Nota. Elaboración propia.

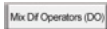
**Figura 7.12**

a) Campos escalares y vectoriales que intervienen en $\vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{A}$ para un mismo radio y analizados por aparte; b) comprobación gráfica de la identidad.

Nota. Elaboración propia.

Observación: Dependiendo de la complejidad de las funciones vectoriales $\vec{A}$, $\vec{B}$

y $\vec{C}$, MS Excel puede presentar problemas para hacer estos cálculos y puede arrojar error después de oprimir . En este caso, simplifique las funciones vectoriales (para $\vec{A}$ en , , ; para $\vec{B}$ en , , ; para $\vec{C}$ en , , ) y vuelva a oprimir todos los botones  consecutivamente de arriba hacia abajo.

El botón  es utilizado para indicar en donde se encuentra una función escalar. Por lo general, al utilizar operadores como d/dt (Scalar), Div (vector), Laplacian (Scalar U) y $(A \cdot B)$, en donde la función objetivo es un escalar, si esta función ya se encuentra calculada en otro módulo vectorial, se utiliza el botón  para indicar dicho módulo, de lo contrario no se usa este botón y se introduce en la respectiva celda la nueva función escalar.

Ejemplo 7.3.5 Ejemplo 5. Analizar $\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}$.

SOLUCIÓN

La derivada con respecto al tiempo se puede calcular también con el módulo de operadores diferenciales. Para hacer un paralelo con un fenómeno ya conocido, utilizaremos el proyecto *Movimiento parabólico* para calcular la velocidad y la aceleración como derivadas de primer y segundo orden del vector posición, respectivamente, y luego comparar estos resultados con las magnitudes calculadas anteriormente mediante las fórmulas del movimiento parabólico.

Cargue el proyecto *Movimiento parabólico* en una nueva hoja de *ScienSolar*. En este proyecto encontrará todos los vectores involucrados en la simulación, donde se puede observar que el vector número 4 corresponde al vector velocidad de la partícula y el vector número 6 a la aceleración. En el caso del vector velocidad, en las celdas ,  y  se encuentran las componentes correspondientes a este vector, las cuales se calculan con las fórmulas $V_{ox} + a_{ox}t$, $V_{oy} + a_{oy}t$, $V_{oz} + a_{oz}t$, es decir, expresadas a través de la aceleración. A su vez, la aceleración está expresada en las celdas  = $a_x = qE_x/m$,  = $a_y = qE_y/m$,  = $a_z = qE_z/m$, donde q es la carga, E_x , E_y , E_z son las componentes del campo eléctrico, y m es la masa de la partícula.

Ahora, calcularemos la velocidad y la aceleración a través de las derivadas de la posición y compararemos los resultados obtenidos con los previamente calculados mediante las fórmulas del movimiento parabólico.

Agregue dos módulos de operadores diferenciales (02 Operadores diferenciales) a la hoja que contiene el proyecto *Movimiento parabólico*. Recuerde que, antes de oprimir el botón , debe seleccionar el proyecto *02 Operadores diferenciales*. El primer módulo lo dedicaremos a calcular la velocidad, y el segundo a calcular la aceleración.

En el primer módulo, seleccione de la lista d/dt (*Vector A*) y en la celda  = 1,

que corresponde al primer vector (el vector posición). Luego, oprima . De esta forma, hemos calculado el vector velocidad. Ahora, en el segundo módulo, seleccione de la lista d/dt (*Vector A*) y en la celda **E73** =7, que corresponde al vector velocidad. Esto nos permitirá calcular el vector aceleración. Las celdas **A64**, **B64**, **C64**, **A73**, **B73** y **C73** contienen las posiciones en el espacio de estos dos nuevos vectores, las cuales no modificaremos para poder analizarlos en puntos diferentes.

Al oprimir consecutivamente el botón , se puede observar que los vectores V y $d/dt(r)$ se comportan de manera similar en el espacio. Por lo tanto, se asume que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. De manera análoga, sucede lo mismo con los vectores a y $d/dt(d/dt(r))$, lo que implica que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Los resultados obtenidos se ilustran en la figura 7.13.

Este mismo procedimiento puede utilizarse para calcular derivadas de mayor orden respecto al tiempo para campos vectoriales. *ScienSolar* puede calcular sin problemas derivadas hasta la cuarta o quinta potencia, dependiendo de la complejidad matemática de la función vectorial que se esté analizando. En los casos de derivadas de mayor orden o cuando la función vectorial es muy compleja, MS Excel generará un *Error* después de oprimir el botón . En ese caso, será necesario simplificar la función o dividirla en partes si es posible.

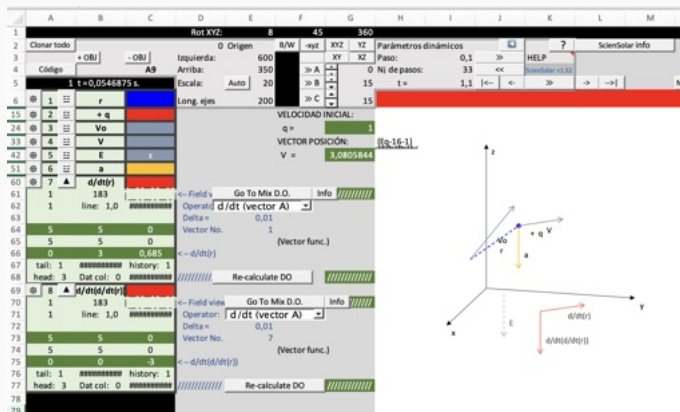


Figura 7.13

Vectores velocidad y aceleración calculados a partir de la derivada con respecto al tiempo del vector posición (en color rojo), comparados con los mismos vectores del proyecto Movimiento parabólico (en color negro y amarillo).

Nota. Elaboración propia.

Es importante resaltar que para la variable de tiempo se utiliza la celda **I5**, y esto es obligatorio cuando se utiliza el módulo de operadores diferenciales con respecto al tiempo, por ejemplo, en el caso del movimiento parabólico, el vector posición $\vec{r}$ depende del tiempo. En la expresión de x , **A12** = G16*I5 + 1/2*A57*POTENCIA(I5;2), lo cual se traduce en lenguaje matemático como

$x = V_{ox}t + \frac{1}{2}a_xt^2$. En esta fórmula, el tiempo está expresado como el valor de la celda **I5**. Cabe mencionar que la celda **I5** en *ScienSolar* es multifuncional y se utiliza para representar otras variables, sobre todo aquellas que requieren ser analizadas mediante un contador. Este contador (celda **I5**) cambia con un paso expresado en **I3**, el número de veces que se indique en **I4**, tras oprimir el botón **>>**.

7.4 Listado de formas de MS Excel

En esta sección se presentan las tablas con los códigos de las diferentes formas que MS Excel ofrece y que se utilizan dentro de la plataforma *ScienSolar* para representar vectores. Como se sabe, la representación gráfica de vectores es crucial en simulaciones y visualizaciones científicas, ya que permite al usuario interpretar fácilmente el comportamiento de magnitudes vectoriales en el espacio. La plataforma *ScienSolar* emplea una variedad de formas geométricas para tal fin, las cuales pueden ser modificadas según las necesidades del proyecto en curso.

Por defecto, un vector en esta plataforma se representa mediante la forma `MSOSHAPELINEINVERSE`, cuyo código es el 183. Este tipo de forma es la estándar en los modelos de *ScienSolar*, ya que está optimizada para cumplir con las operaciones matemáticas y las transformaciones geométricas (como la rotación de ejes) que la plataforma maneja. Sin embargo, la flexibilidad de la plataforma permite que esta forma pueda ser sustituida por otras dentro de las opciones disponibles. Para cambiar la forma del vector, basta con introducir el código correspondiente en la celda asociada al vector que se está editando, específicamente en la celda B7 para el primer módulo vectorial.

A pesar de esta flexibilidad, es importante señalar que únicamente la forma `MSOSHAPELINEINVERSE` (código 183) y la forma correspondiente al punto (código 146) son sometidas a las ecuaciones matemáticas y a las transformaciones de rotación de los ejes dentro de la plataforma. El resto de las formas, aunque pueden ser visualmente atractivas y útiles en ciertos contextos, no están preparadas para interactuar de forma dinámica con las transformaciones matemáticas en tiempo real. El código de la plataforma fue diseñado bajo la suposición de que estos dos objetos, la línea inversa y el punto, son los que deben ajustarse a las operaciones de rotación y las manipulaciones algebraicas.

Por ejemplo, si se está trabajando con un modelo que requiere la visualización de varios vectores en una representación gráfica y se desea cambiar la apariencia de un vector para resaltar su dirección o magnitud sin modificar su naturaleza matemática, es completamente válido elegir una de las formas alternativas, sin embargo, si el objetivo es realizar cálculos o transformaciones geométricas precisas con ese vector, lo recomendable es mantener la forma estándar (`MSOSHAPELINEINVERSE`).

A continuación se presentan en la tabla 7.1 los códigos de las diferentes formas disponibles en MS Excel para representar los vectores en *ScienSolar*. Los usuarios pueden consultar estas tablas para seleccionar la forma adecuada según las necesidades de su proyecto, y realizar los ajustes pertinentes en las celdas correspondientes de su hoja de trabajo. Esta tabla fue elaborada con base en la información obtenida de la página de soporte de Microsoft, <http://suport.microsoft.com>.

Tabla 7.1

Códigos de formas en MS Excel para representación en ScienSolar.

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShape10pointStar	149	
msoShape12pointStar	150	
msoShape16pointStar	94	
msoShape24pointStar	95	
msoShape32pointStar	96	
msoShape4pointStar	91	
msoShape5pointStar	92	
msoShape6pointStar	147	
msoShape7pointStar	148	
msoShape8pointStar	93	
msoShapeActionButtonBackorPrevious	129	
msoShapeActionButtonBeginning	131	
msoShapeActionButtonCustom	125	
msoShapeActionButtonDocument	134	
msoShapeActionButtonEnd	132	
msoShapeActionButtonForwardorNext	130	

Continúa en la siguiente página

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeActionButtonHelp	127	
msoShapeActionButtonHome	126	
msoShapeActionButtonInformation	128	
msoShapeActionButtonMovie	136	
msoShapeActionButtonReturn	133	
msoShapeActionButtonSound	135	
msoShapeArc	25	
msoShapeBalloon	137	
msoShapeBentArrow	41	
msoShapeBentUpArrow	44	
msoShapeBevel	15	
msoShapeBlockArc	20	
msoShapeCan	13	
msoShapeChartPlus	182	
msoShapeChartStar	181	
msoShapeChartX	180	
msoShapeChevron	52	
msoShapeChord	161	
msoShapeCircularArrow	60	
msoShapeCloud	179	
msoShapeCloudCallout	108	

Continúa en la siguiente página

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeCorner	162	
msoShapeCornerTabs	169	
msoShapeCross	11	
msoShapeCube	14	
msoShapeCurvedDownArrow	48	
msoShapeCurvedDownRibbon	100	
msoShapeCurvedLeftArrow	46	
msoShapeCurvedRightArrow	45	
msoShapeCurvedUpArrow	47	
msoShapeCurvedUpRibbon	99	
msoShapeDecagon	144	
msoShapeDiagonalStripe	141	
msoShapeDiamond	4	
msoShapeDodecagon	146	
msoShapeDonut	18	
msoShapeDoubleBrace	27	
msoShapeDoubleBracket	26	
msoShapeDoubleWave	104	
msoShapeDownArrow	36	
msoShapeDownArrowCallout	56	
msoShapeDownRibbon	98	

Continúa en la siguiente página

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeExplosion1	89	
msoShapeExplosion2	90	
msoShapeFlowchartAlternateProcess	62	
msoShapeFlowchartCard	75	
msoShapeFlowchartCollate	79	
msoShapeFlowchartConnector	73	
msoShapeFlowchartData	64	
msoShapeFlowchartDecision	63	
msoShapeFlowchartDelay	84	
msoShapeFlowchartDirectAccessStorage	87	
msoShapeFlowchartDisplay	88	
msoShapeFlowchartDocument	67	
msoShapeFlowchartExtract	81	
msoShapeFlowchartInternalStorage	66	
msoShapeFlowchartMagneticDisk	86	
msoShapeFlowchartManualInput	71	
msoShapeFlowchartManualOperation	72	
msoShapeFlowchartMerge	82	
msoShapeFlowchartMultidocument	68	
msoShapeFlowchartOfflineStorage	139	
msoShapeFlowchartOffpageConnector	74	

Continúa en la siguiente página

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeFlowchartOr	78	
msoShapeFlowchartPredefinedProcess	65	
msoShapeFlowchartPreparation	70	
msoShapeFlowchartProcess	61	
msoShapeFlowchartPunchedTape	76	
msoShapeFlowchartSequentialAccessStorage	85	
msoShapeFlowchartSort	80	
msoShapeFlowchartStoredData	83	
msoShapeFlowchartSummingJunction	77	
msoShapeFlowchartTerminator	69	
msoShapeFoldedCorner	16	
msoShapeFrame	158	
msoShapeFunnel	174	
msoShapeGear6	172	
msoShapeGear9	173	
msoShapeHalfFrame	159	
msoShapeHeart	21	
msoShapeHeptagon	145	
msoShapeHexagon	10	
msoShapeHorizontalScroll	102	
msoShapeIsoscelesTriangle	7	

Continúa en la siguiente página

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeLeftArrow	34	
msoShapeLeftArrowCallout	54	
msoShapeLeftBrace	31	
msoShapeLeftBracket	29	
msoShapeLeftCircularArrow	176	
msoShapeLeftRightArrow	37	
msoShapeLeftRightArrowCallout	57	
msoShapeLeftRightCircularArrow	177	
msoShapeLeftRightRibbon	140	
msoShapeLeftRightUpArrow	40	
msoShapeLeftUpArrow	43	
msoShapeLightningBolt	22	
msoShapeLineCallout1	109	
msoShapeLineCallout1AccentBar	113	
msoShapeLineCallout1BorderandAccentBar	121	
msoShapeLineCallout1NoBorder	117	
msoShapeLineCallout2	110	
msoShapeLineCallout2AccentBar	114	
msoShapeLineCallout2BorderandAccentBar	122	
msoShapeLineCallout2NoBorder	118	
msoShapeLineCallout3	111	

Continúa en la siguiente página

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeLineCallout3AccentBar	115	
msoShapeLineCallout3BorderandAccentBar	123	
msoShapeLineCallout3NoBorder	119	
msoShapeLineCallout4	112	
msoShapeLineCallout4AccentBar	116	
msoShapeLineCallout4BorderandAccentBar	124	
msoShapeLineCallout4NoBorder	120	
msoShapeLineInverse	183	
msoShapeMathDivide	166	
msoShapeMathEqual	167	
msoShapeMathMinus	164	
msoShapeMathMultiply	165	
msoShapeMathNotEqual	168	
msoShapeMathPlus	163	
msoShapeMixed	2	
msoShapeMoon	24	
msoShapeNonIsoscelesTrapezoid	143	
msoShapeNoSymbol	19	
msoShapeNotchedRightArrow	50	
msoShapeOctagon	6	
msoShapeOval	9	

Continúa en la siguiente página

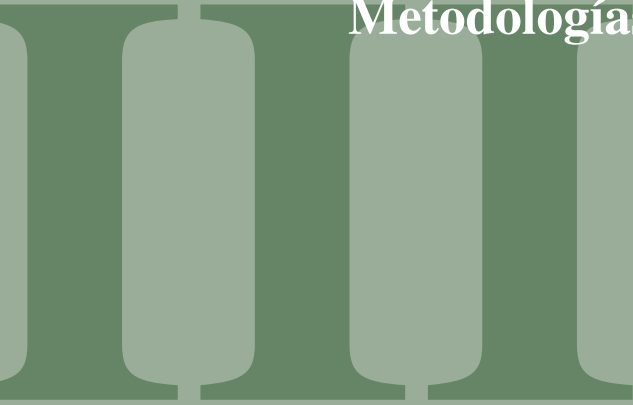
Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeOvalCallout	107	
msoShapeParallelogram	2	
msoShapePentagon	51	
msoShapePie	142	
msoShapePieWedge	175	
msoShapePlaque	28	
msoShapePlaqueTabs	171	
msoShapeQuadArrow	39	
msoShapeQuadArrowCallout	59	
msoShapeRectangle	1	
msoShapeRectangularCallout	105	
msoShapeRegularPentagon	12	
msoShapeRightArrow	33	
msoShapeRightArrowCallout	53	
msoShapeRightBrace	32	
msoShapeRightBracket	30	
msoShapeRightTriangle	8	
msoShapeRound1Rectangle	151	
msoShapeRound2DiagRectangle	157	
msoShapeRound2SameRectangle	152	
msoShapeRoundedRectangle	5	

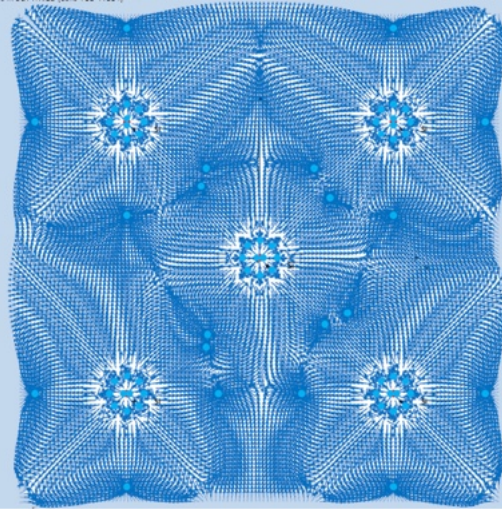
Continúa en la siguiente página

Nombre en Excel	Código	Figura
msoShapeRoundedRectangularCallout	106	
msoShapeSmileyFace	17	
msoShapeSnip1Rectangle	155	
msoShapeSnip2DiagRectangle	157	
msoShapeSnip2SameRectangle	156	
msoShapeSnipRoundRectangle	154	
msoShapeSquareTabs	170	
msoShapeStripedRightArrow	49	
msoShapeSun	23	
msoShapeSwooshArrow	178	
msoShapeTear	160	
msoShapeTrapezoid	3	
msoShapeUpArrow	35	
msoShapeUpArrowCallout	55	
msoShapeUpDownArrow	38	
msoShapeUpDownArrowCallout	58	
msoShapeUpRibbon	97	
msoShapeUTurnArrow	42	
msoShapeVerticalScroll	101	
msoShapeWave	103	

Nota. Elaboración propia con base en Microsoft.

Metodologías y técnicas de modelado





3D Si Electric Field Structure

8. Elaboración de modelos

En esta sección se establecerán algunas pautas para la elaboración de modelos de problemas de diversa complejidad. *ScienSolar* está basado en la representación del espacio tridimensional y se adapta eficazmente a problemas físicos que involucran magnitudes en este espacio como los vectores. Además, incluye funciones de Excel, celdas con sus propiedades y otros objetos útiles para realizar operaciones de diversa índole entre magnitudes físicas mediante ecuaciones matemáticas.

La combinación Excel + *ScienSolar* amplía considerablemente las posibilidades de modelado de problemas. A continuación, se detallan algunas de las características que ofrece el paquete *ScienSolar* para el modelado de problemas:

- Representación de vectores en el espacio tridimensional dentro de una hoja de cálculo.
- Realización de operaciones matemáticas entre las componentes de los vectores directamente en la hoja de cálculo.
- Posibilidad de agregar cualquier número de vectores a una hoja y realizar operaciones entre ellos.
- Visualización inmediata de todos los vectores en el sistema cartesiano desde cualquier vista en el espacio tridimensional integrado en *ScienSolar*.
- Modificación sucesiva de las coordenadas de los vectores en una ecuación matemática para observar su comportamiento al avanzar en el espacio, y trazar esta secuencia en el sistema tridimensional.
- Establecimiento del comportamiento de las ecuaciones y los vectores que las

representan mediante el cambio secuencial de parámetros, como el tiempo, reflejando este cambio en los resultados matemáticos y gráficos.

- Posibilidad ilimitada de agregar ecuaciones, constantes, variables, parámetros, condiciones iniciales y condiciones de ejecución a una hoja, organizadas en diferentes celdas, para ser utilizadas en un modelo específico.
- Contador personalizable con parámetros como el valor de paso y el rango de ejecución. Este contador puede ser utilizado simultáneamente en varias ecuaciones.
- Reorganización de la distribución de las ecuaciones en una hoja mediante las funciones de cortar y pegar de Excel, sin afectar el funcionamiento del modelo.
- Personalización de la apariencia de cada uno de los vectores.
- Ejecución de diferentes proyectos en hojas independientes.
- Extracción de datos a tablas y uso de la herramienta de gráficos de Excel para visualizar su comportamiento.
- Representación de trayectorias de los vectores durante su desplazamiento en el espacio de coordenadas tridimensionales.
- Exportación del código de un nuevo modelo para guardarlo en *ScienSolar* y luego descargarlo con solo oprimir un botón.
- Facilidad de compartir el modelo con colegas o compañeros, ya que el modelo se guarda en un archivo Excel habilitado para macros, accesible para cualquier usuario con el paquete de Office instalado.

Para elaborar un modelo exitoso en *ScienSolar*, es recomendable seguir los siguientes pasos:

1. Establecer los objetos matemáticos que intervendrán en el modelo. Estos pueden ser:
 - Ecuaciones matemáticas.
 - Variables.
 - Constantes.
 - Parámetros.
 - Rangos de aplicación.
2. Si las ecuaciones son vectoriales, descomponerlas en sus tres componentes. Si no son vectoriales pero contienen magnitudes con naturaleza vectorial, construir a partir de ellas sus formas vectoriales, asignando valores nulos a las componentes que no existan en el modelo.
3. Realizar en papel un ejemplo del modelo con valores específicos para evaluar su comportamiento.
4. Establecer la cantidad de vectores necesarios para el modelo.
5. Agregar los vectores necesarios a la hoja de cálculo.
6. Editar los vectores, introducir las ecuaciones y demás objetos matemáticos.
7. Probar y ejecutar el modelo.
8. Guardar el modelo.

8.1 Paso 1. Preparación de ecuaciones matemáticas

Cada fenómeno físico que se desea modelar en una computadora debe contar con un conjunto de ecuaciones matemáticas que lo respalden y describan su comportamiento. Las ecuaciones que se preparan para el modelo en *ScienSolar* generalmente se expresan

en función de las coordenadas espaciales. Es fundamental identificar cuáles son las magnitudes que tomarán el rol de variables, constantes o parámetros. En el caso de campos vectoriales o escalares, generalmente las coordenadas ocupan el rol de variables, mientras que las magnitudes físicas que dependen de estas coordenadas toman el rol de funciones, por ejemplo, la temperatura es una función escalar que depende de las tres coordenadas espaciales, $T(x, y, z)$; en el caso del campo gravitatorio, la aceleración de la gravedad es una función vectorial dependiente de las tres coordenadas, $\mathbf{g}(x, y, z)$. Los parámetros son magnitudes que están presentes en la ecuación pero cuya variabilidad está bajo el control del observador. El tiempo es un ejemplo típico de parámetro, ya que el usuario puede establecer el instante en que evaluará una función determinada. Las constantes, por otro lado, son valores predefinidos que generalmente no cambian en un fenómeno específico. Un ejemplo clásico de constante es la masa de partículas elementales, que es invariante bajo ciertas condiciones, o el calor específico del agua bajo condiciones normales.

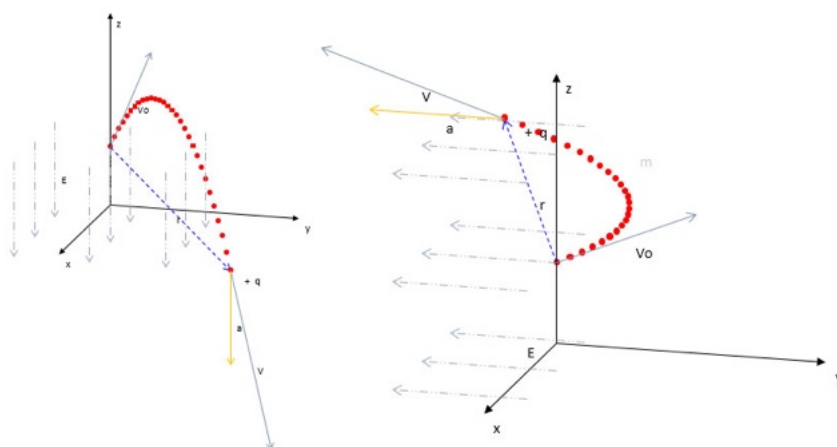


Figura 8.1.

Movimiento tridimensional de una carga en un campo constante.

Nota. Elaboración propia.

Como ejemplo, se presenta el modelo del movimiento parabólico de una partícula cargada en un campo eléctrico constante externo (ver figura 11.12). En dicho campo las partículas cargadas que ingresan con una velocidad inicial determinada describen trayectorias parabólicas, de manera análoga al comportamiento de los cuerpos con masa en un campo gravitatorio. Los movimientos en cada una de las coordenadas son independientes. Es decir, si en una coordenada existe una componente de la aceleración del campo, el movimiento será parabólico en esa coordenada, mientras que si en otra no existe tal componente, el movimiento será rectilíneo con velocidad constante, o nulo si no hay componente de velocidad inicial en esa coordenada. Así, si los vectores de velocidad inicial y aceleración tienen componentes en las tres coordenadas, el movimiento parabólico podrá observarse en cada una de las dimensiones de forma separada. La

ecuación tridimensional para el movimiento parabólico es la siguiente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 \quad (8.1)$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición de la partícula en cualquier momento de tiempo, $\mathbf{r}_0$ es la posición inicial, $\mathbf{v}_0$ es el vector de velocidad inicial, t es el tiempo y $\mathbf{a}$ es el vector aceleración.

8.2 Paso 2. Descomposición de las ecuaciones en los tres ejes

Al descomponer la ecuación (11.10) en cada uno de sus ejes, obtenemos las ecuaciones del movimiento parabólico para cada dimensión:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z &= z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2, \end{aligned} \quad (8.2)$$

donde la aceleración está determinada por el campo. Para el caso del campo eléctrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, y para una carga q con masa m , se obtiene de la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = q\mathbf{E}$, y las aceleraciones en cada uno de los ejes se expresan como:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{qE_x}{m} \\ a_y &= \frac{qE_y}{m} \\ a_z &= \frac{qE_z}{m}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Las componentes de la velocidad dependiente del tiempo se calculan mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \\ v_z &= v_{0z} + a_z t \end{aligned} \quad (8.4)$$

8.3 Paso 3. Otras ecuaciones y parámetros

El fenómeno físico en estudio puede involucrar otras ecuaciones secundarias que, por ejemplo, establezcan condiciones iniciales o de frontera. En el caso del movimiento parabólico, la partícula puede ser lanzada desde cualquier punto en el espacio. Estableceremos el tiempo en el que alcanzará uno de los tres planos y, cuando esto ocurra, detendremos el movimiento. Para lograr esto, debemos calcular el tiempo que tardará en llegar a cada uno de los planos. El tiempo mínimo entre estos tres determinará cuál plano será alcanzado primero por la partícula. Si, por ejemplo, la partícula se lanza desde un ángulo determinado con el plano horizontal, podemos hallar el tiempo en el que caerá

sobre dicho plano. Si el plano horizontal es el plano xy , este tiempo puede calcularse a partir de la tercera ecuación en (11.11) cuando $z = 0$. Esto nos da una ecuación cuadrática en t , la cual resolveremos y llamaremos t_{Rz} . Los otros dos casos, cuando el horizonte es el plano xz o yz , se tratan de manera similar, obteniendo ecuaciones cuadráticas con $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, y los tiempos correspondientes serán t_{Ry} y t_{Rx} . Los movimientos en estos planos se muestran en la figura 11.12. Los tiempos de alcance para cada uno de los tres planos son los siguientes:

$$\begin{aligned} t_{Rx} &= \frac{-v_{0x} \pm \sqrt{v_{0x}^2 - 2a_x x_0}}{a_x} \\ t_{Ry} &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2a_y y_0}}{a_y} \\ t_{Rz} &= \frac{-v_{0z} \pm \sqrt{v_{0z}^2 - 2a_z z_0}}{a_z}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Como se observa, cada una de estas soluciones tiene dos raíces, que se diferencian por el signo en el numerador de la raíz cuadrada. Se debe elegir el signo que corresponda al resultado con sentido físico, acorde a las condiciones del problema.

8.4 Paso 4. Establecer el número de vectores para el modelo

Uno de los elementos fundamentales en el modelado en *ScienSolar* es el vector. Para construir un modelo es necesario determinar cuántos vectores intervienen en las ecuaciones matemáticas y si se requieren vectores adicionales para representar gráficamente el modelo. En algunos casos, se necesitan vectores auxiliares que no forman parte directa del modelo físico, pero que son necesarios para su representación visual, por ejemplo, al modelar cuatro cargas puntuales en los vértices de un cubo, se necesita representar el cubo en el espacio, lo cual requiere vectores auxiliares para dibujar las aristas.

En el ejemplo concreto del movimiento parabólico, los vectores necesarios son cinco: El vector de posición, el vector de velocidad inicial, el vector de velocidad, el campo eléctrico y el vector de aceleración. Sin embargo, para mejorar la visualización, es necesario agregar un sexto *vector* para representar la carga en el espacio tridimensional¹. El tiempo no es un objeto que se visualice en el modelo, por lo que no se necesita un *vector* adicional para él. En su lugar, se asignarán celdas para ubicar las fórmulas correspondientes a las ecuaciones (11.13).

En resumen, los vectores (paquetes de celdas) que se agregarán a *ScienSolar* son:

Vector $\mathbf{r}$ - Representa el vector de posición.

Vector para representar a $\mathbf{q}$ - La carga en el espacio tridimensional.

¹Cabe resaltar que en la estructura de *ScienSolar* llamamos frecuentemente *vector* al paquete de celdas (9 filas dentro de las 3 primeras columnas) por medio de las cuales se puede traer un vector a la hoja de cálculo, sin embargo, este paquete de celdas también se utiliza para representar escalares y otros objetos, y en este ejemplo concreto esto hace referencia a la carga.

Vector V_0 - Representa la velocidad inicial.

Vector V - Representa la velocidad dependiente del tiempo.

Vector E - Representa el campo eléctrico.

Vector a - Representa la aceleración del campo.

Los vectores pueden agregarse o eliminarse en cualquier momento durante el proceso de construcción del modelo, no obstante, un inicio bien estructurado facilita enormemente el desarrollo posterior del modelo.

8.5 Paso 5. Agregar vectores al modelo

Una vez establecido el número de vectores procedemos a introducirlos en la hoja de cálculo para luego, en el siguiente paso, editarlos.

En la interfaz de *ScienSolar*, en una hoja nueva, presione el botón **Nuevo vector** para agregar un nuevo vector a la hoja de cálculo. Repita este procedimiento para los cinco vectores restantes, indicando el nombre del vector en la ventana emergente. Los vectores agregados se muestran en la figura 8.2

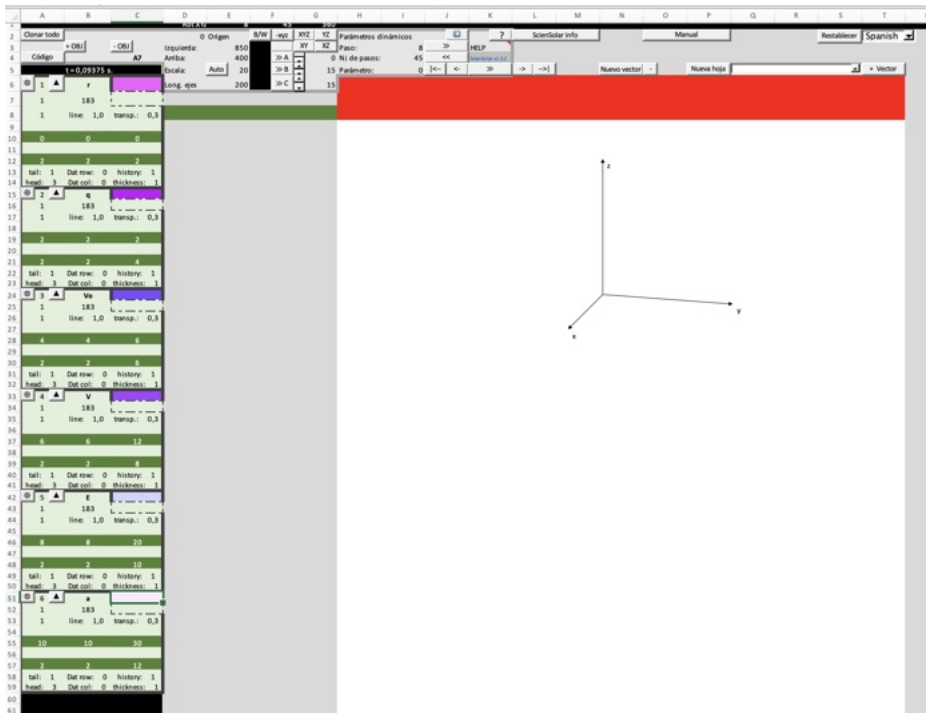


Figura 8.2.

Agregando vectores en ScienSolar para el modelado del movimiento parabólico.

Nota. Elaboración propia.

8.6 Paso 6. Edición y configuración de las celdas

Los vectores que se agregan en *ScienSolar* tienen una configuración de color, forma, tamaño, coordenadas, y demás parámetros con valores predeterminados, así que ahora se cambiarán algunos de ellos para adaptarlos al modelo actual.

Antes de comenzar a introducir las ecuaciones, estableceremos la función que detiene el movimiento de la partícula cuando ésta llega al plano inmediatamente opuesto, es decir, cuando alcanza un tiempo calculado por la ecuación (11.13) a llegar al *piso*. El programa analizará en cada instante cuánto tiempo le falta a la partícula para llegar a cada uno de los tres planos del sistema de coordenadas; además, cada uno de los tres tiempos puede ser diferente, por lo que se utilizará la función de Excel MIN() para determinar cuál de estos tiempos es mínimo y precisamente este tiempo será el determinante para que la partícula llegue al plano más cercano. Sin embargo, al introducir estas ecuaciones en Excel se encontrarán algunas dificultades que deberán ser resueltas con antelación. Como primer paso, si la aceleración en una determinada dimensión es cero, la ecuación correspondiente (11.13) arrojará un error, por lo que tenemos que establecer la condición de que si $a_x = 0$ entonces el tiempo será muy grande pero distinto de infinito, por ejemplo $t_{Rx} = 10000$. La misma condición para t_{Ry} y t_{Rz} . Vincularemos estas condiciones con el parámetro dinámico que define el número de pasos, cuya fórmula quedará reflejada en la celda I4. Por otra parte, se debe elegir uno de los dos signos que preceden a la raíz en la ecuación; la conveniencia de uno u otro signo depende de los valores de las variables y de los parámetros de la ecuación, por lo que tenemos que elegir casi al azar; elegiremos el signo menos para estas ecuaciones. En cualquier caso, estas ecuaciones siempre se pueden escribir en sus respectivas celdas.

El usuario ingresará los datos iniciales para la simulación en las celdas como se indica en la fórmula de Excel 8.1:

Fórmula en Excel 8.1

- G12 =4 {= x_o },
- G13 =0 {= y_o },
- G14 =3 {= z_o },
- G16 =0 {= V_{ox} },
- G17 =3 {= V_{oy} },
- G18 =4 {= V_{oz} },
- G20 =0 {= E_x },
- G21 =0 {= E_y },
- G22 =-3 {= E_z },
- F23 = CARGA DE LA PARTÍCULA:
- G24 =1 {= q },
- F25 = MASA DE LA PARTÍCULA:
- G26 =1 {= m },
- F27 = TRAYECTORIA:

- G28 =1 {= S = 2, NO = 1},
- F31 = RESULTADOS:
- F33 = VECTOR POSICIÓN:
- G34 =A12+G12 {= x},
- G35 =B12+G13 {= y},
- G36 =C12+G14 {= z},
- G37 =RAIZ((G34-G12)^2+(G35-G13)^2+(G36-G14)^2) {= r},
- F38 = VECTOR VELOCIDAD:
- G39 =A39 {= V_x},
- G40 =B39 {= V_y},
- G41 =C39 {= V_z},
- G42 =RAIZ(G39^2+G40^2+G41^2) {= V},
- F43 = ACELERAC. DEL CAMPO:
- G44 =A57 {= a_x},
- G45 =B57 {= a_y},
- G46 =C57 {= a_z},
- G47 =RAIZ(G44^2+G45^2+G46^2) {= a},
- F48 = TIEMPO ALCANCE MAX.:
- G49 =MIN(ABS(A56);ABS(B56);ABS(C56)) {= t_R},
- I4 =SI(I5<G49;REDONDEAR(G49/I3;0);0) { condiciona el número de pasos para que la partícula se detenga al llegar al piso },

La celda I4 =SI(I5<I6;REDONDEAR(I6/I3;0);0) contiene la fórmula que condiciona el número de pasos que la partícula debe dar para detenerse al llegar al piso. Si $t < t_R$ entonces el número de pasos es igual a t_R / paso , en caso contrario el número de pasos es cero. La celda G49 =MIN(ABS(A56);ABS(B56);ABS(C56)) halla el mínimo de los tres tiempos para llegar a cada "piso".

La fórmula de Excel 8.2 muestra los valores que deben tener las celdas del vector **r**.

Fórmula en Excel 8.2 1

- A10 =G12 {= x₀}, B10 =G13 {= y₀}, C10 =G14 {= z₀},
- A12 =G16*I5+1/2*A57*POWER(I5;2) {= x = V_{0x}t + $\frac{1}{2}$ a_xt²},
- B12 =G17*I5+1/2*B57*POWER(I5;2) {= y = V_{0y}t + $\frac{1}{2}$ a_yt²},
- C12 =G18*I5+1/2*C57*POWER(I5;2) {= z = V_{0z}t + $\frac{1}{2}$ a_zt²},
- G12 =4 {= x₀}, G13 =0 {= y₀}, G14 =3 {= z₀},
- { , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 6 }

La fórmula de Excel 8.3 muestra los valores que deben tener las celdas de la carga **q**.

Fórmula en Excel 8.3 2

- B15 =SI(G24<0;" - q ";" + q") {carga},
- A19 =A12+G12 {= $x + x_0$ },
- B19 =B12+G13 {= $y + y_0$ },
- C19 =C12+G14 {= $z + z_0$ },
- C22 =G28 {= *trayectoria*}, C23 =G28 {= *grosor*},
- {Otros, Objeto = 146 (punto), transparencia = 0 }.

La fórmula de Excel 8.4 muestra los valores que deben tener las celdas del vector de velocidad inicial $\mathbf{V}_0$.

Fórmula en Excel 8.4 3

- A28 =G12 {= x_0 }, B28 =G13 {= y_0 }, C28 =G14 {= z_0 },
- A30 =G16 {= V_{0x} }, B30 =G17 {= V_{0y} }, C30 =G18 {= V_{0z} }.

La fórmula de Excel 8.5 muestra los valores que deben tener las celdas del vector velocidad $\mathbf{V}$.

Fórmula en Excel 8.5 4

- A37 =A19 {= $x + x_0$ }, B37 =B19 {= $y + y_0$ }, C37 =C19 {= $z + z_0$ },
- A39 =G16+A57*I5 {= $V_{0x} + a_x t$ },
- B39 =G17+B57*I5 {= $V_{0y} + a_y t$ },
- C39 =G18+C57*I5 {= $V_{0z} + a_z t$ }.

La fórmula de Excel 8.8 muestra los valores que deben tener las celdas del vector campo eléctrico $\mathbf{E}$.

Fórmula en Excel 8.6 5

- A46 =A47 {= E_{x0} }, B46 =B47 {= E_{y0} }, C46 =C47 {= E_{z0} },
- A48 =G20 {= E_x }, B48 =G21 {= E_y }, C48 =G22 {= E_z },
- {Otros, línea = 4, transparencia = 0,4 }.

En la fórmula de Excel 8.7 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector aceleración $\mathbf{a}$ según las ecuaciones (11.12). Aquí aprovecharemos las celdas vacías A56, B56, C56 para introducir también las ecuaciones para los tiempos de

alcance t_{Rx} , t_{Ry} , t_{Rz} (ver ecuación (11.13), cuyos resultados se utilizan en las celdas I4 y IG49 para detener la partícula al llegar al suelo. Las fórmulas para los tiempos están sujetas a la condición de que si la aceleración es cero entonces el tiempo toma un valor muy grande pero distinto de infinito (en este caso 10000).

Fórmula en Excel 8.7 6

- A55 =A19 {= $x + x_0$ }, B55 =B19 {= $y + y_0$ }, C55 =C19 {= $z + z_0$ },
- A56 =IF(A57=0;10000;(-G16-SQRT(ABS(POWER(G16;2)-2*A57*G12)))/A57)

$$\{= t_{Rx} = \frac{-v_{0x} - \sqrt{v_{0x}^2 - 2a_x x_0}}{a_x},$$
- B56 =IF(B57=0;10000;(-G17-SQRT(ABS(POWER(G17;2)-2*B57*G13)))/B57)

$$\{= t_{Ry} = \frac{-v_{0y} - \sqrt{v_{0y}^2 - 2a_y y_0}}{a_y},$$
- C56 =IF(C57=0;10000;(-G18-SQRT(ABS(POWER(G18;2)-2*C57*G14)))/C57)

$$\{= t_{Rz} = \frac{-v_{0z} - \sqrt{v_{0z}^2 - 2a_z z_0}}{a_z},$$
- A57 =G24*A48/G26 {= $a_x = qE_x/m$ },
- B57 =G24*B48/G26 {= $a_y = qE_y/m$ },
- C57 =G24*C48/G26 {= $a_z = qE_z/m$ },
- {Otros , transparencia = 0 }.

En la figura 8.3 se ilustra parte del modelo con la configuración de las celdas.

8.7 Implementación de controles de formulario

La integración de controles de formulario a través de la pestaña Programador (Desarrollador) en Excel representa una herramienta poderosa para crear interfaces interactivas en modelos físicos desarrollados con el paquete *ScienSolar*. Estos controles permiten a los usuarios manipular parámetros, seleccionar escenarios y controlar la ejecución de simulaciones de manera intuitiva, transformando hojas de cálculo estáticas en herramientas dinámicas de análisis.

8.8 Activación de la pestaña Programador/Desarrollador

Diferencias entre Windows y Mac:

- **Excel para Windows:**
 1. Haga clic en *Archivo* → *Opciones* → *Personalizar cinta*.
 2. En la columna derecha, marque la casilla *Programador*.
 3. Haga clic en *Aceptar*.
- **Excel para Mac:**
 1. Haga clic en *Excel* → *Preferencias* → *Vista*.
 2. Marque la casilla *Mostrar pestaña Programador en la cinta*.
 3. La pestaña se denominará *Desarrollador*.

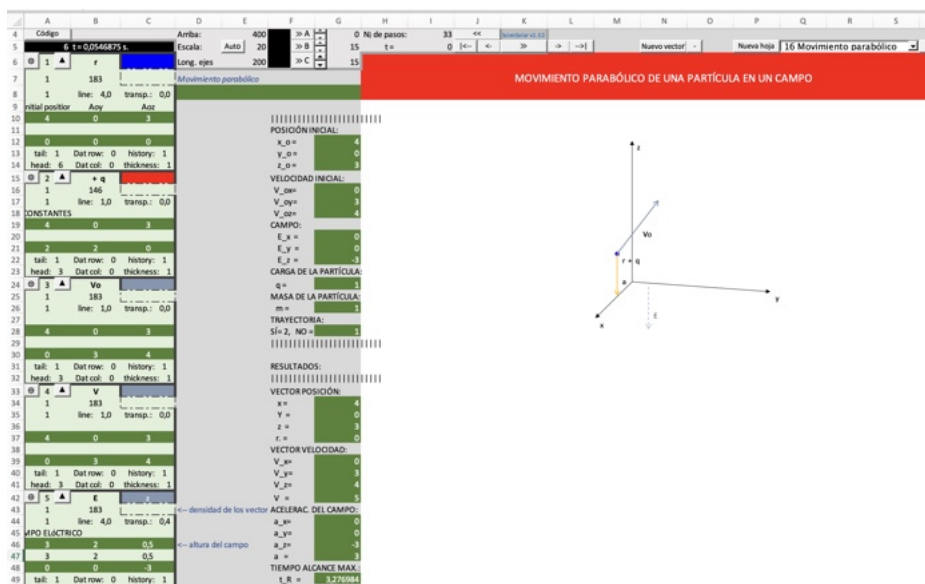


Figura 8.3.

Configuración de las celdas para el modelo del movimiento parabólico.

Nota. Elaboración propia.

8.9 Cuadro combinado (ComboBox) Grad (scalar U)

El cuadro combinado permite seleccionar un elemento de una lista desplegable, ideal para elegir entre diferentes configuraciones físicas o parámetros predefinidos.

Ejemplo 8.9.1 Agregar un cuadro combinado al modelo 25 *Campo eléctrico* de la lista de modelos de *ScienSolar* con el propósito de elegir el sistema de coordenadas en el que se visualizará el campo eléctrico.

SOLUCIÓN

Identificación de las celdas:

- **Ubicación del control:** Celda H8.
- **Rango de entradas:** G31:G34 (contiene los valores disponibles).
- **Celda vinculada:** G30 (almacena el índice de la selección).

PROCEDIMIENTO:

En una nueva hoja de *ScienSolar*, descargue el modelo 25 *Campo Eléctrico*.

Introduzca en G31:G34 los valores de la lista y en C7 la fórmula para activar el sistema de coordenadas seleccionado:

Fórmula en Excel 8.8 Cuadro combinado

- G31 = Ninguno.
- G32 = Cartesianas.
- G33 = Cilíndricas.
- G34 = Esféricas.
- C7 = SI(G30=2;"o";SI(G30=3;"c";SI(G30=4;"s";"")))).

Pasos detallados:

1. Active la pestaña *Programador* (Windows) o *Desarrollador* (Mac).
2. Haga clic en *Insertar* y seleccione *Cuadro combinado* del grupo *Controles de formulario*.
3. Dibuje el control en la celda H8.
4. Haga clic derecho sobre el control y seleccione *Formato de control*.
5. En la pestaña *Control*:
 - **Rango de entrada:** Seleccione G31:G34.
 - **Vínculo con la celda:** Ingrese G30.
 - **Desplegable líneas:** Establezca el número de elementos a mostrar (por ejemplo: 4).

La celda G30 mostrará 1, 2, 3 o 4 según la selección. Para visualizar los resultados, presione el botón XYZ.

Diferencias Windows/Mac: En Mac, el cuadro de diálogo de formato puede presentar opciones ligeramente diferentes, pero la funcionalidad básica es idéntica.

8.10 Botón de comando

Los botones de comando ejecutan macros específicas, permitiendo automatizar procesos complejos en el modelo físico.

Ejemplo 8.10.1 Agregar al modelo 25 *Campo eléctrico* de la lista de modelos de *ScienSolar* un botón para actualizar los cambios después de agregar el cuadro combinado del ejemplo anterior.

SOLUCIÓN

Identificación de las celdas:

- **Ubicación:** Celda K8.
- **Macro asignada:** Rotate.
- **Función:** Actualizar el sistema de coordenadas del modelo (la misma función que el botón ubicado en F3).

PROCEDIMIENTO:

1. En la pestaña Programador, haga clic en *Insertar* → *Botón* (controles de formulario).
2. Dibuje el botón en la celda **K8**.
3. Aparecerá un cuadro de diálogo para asignar una macro.
4. Seleccione *Rotate* de la lista o cree una nueva.
5. Haga clic derecho sobre el botón y seleccione *Modificar texto* para cambiar la etiqueta (ej: Actualizar cambios).

Diferencias Windows/Mac: Excel para Mac tiene algunas limitaciones en la funcionalidad VBA avanzada, pero las macros básicas funcionan de manera similar.

8.11 Botones de opción (Option Buttons) ☐ SI ☒ NO

Los botones de opción permiten seleccionar una única opción de un conjunto, ideal para modos de operación o configuraciones mutuamente excluyentes.

Ejemplo 8.11.1 Agregar al modelo 25 *Campo eléctrico* dos botones de opción para elegir si generar una tabla de datos cuando se ejecute la simulación.

SOLUCIÓN

Identificación de las celdas:

- **Botones en:** Celdas **R8** y **S8**.
- **Celda vinculada:** **T8**.
- **Botón adicional:** Celda **T8** con macro ShowHideVecConf.
- **Fórmulas condicionales:**
 - **B13** : =SI(T8=1;50;0).
 - **B14** : =SI(T8=1;10;0).

PROCEDIMIENTO:

1. Inserte el primer botón de opción en **R8**.
2. Con clic derecho, cambie la etiqueta del botón e introduzca el texto *Sí* (primera opción).
3. Haga clic derecho → *Formato de control* → *Vinculación con celda*: **T8**.
4. Repita para el segundo botón en **S8**, vinculado a la misma celda **T8**.
5. Con clic derecho, cambie la etiqueta del segundo botón e introduzca el texto *No* (segunda opción).
6. Inserte además un botón de comando en **T8** y asígnele la macro ShowHideVecConf. Cambie la etiqueta de este botón con el texto *Borrar Datos*.
7. Configure las fórmulas en **B13** y **B14** como se indica anteriormente.

Explicación en el modelo. Las celdas **B13** y **B14** activan por defecto la salida de datos en una tabla cuando su valor es diferente de cero. Los datos se mostrarán a partir de la fila indicada en **B13** y de la columna cuyo número se indica en

B14. La configuración realizada, al seleccionar el botón de opción *Sí*, asigna valores diferentes de cero a estas celdas, por lo que los datos se mostrarán en la tabla al ejecutar la simulación. La macro *ShowHideVecConf* contiene el código necesario para que, al presionar el botón *Borrar Datos*, se elimine la tabla.

8.12 Control de giro (Spin Button)

Los controles de giro permiten ajustar valores numéricos mediante incrementos o decrementos pequeños, ideales para el ajuste fino de parámetros físicos.

Ejemplo 8.12.1 Agregar al modelo 25 *Campo eléctrico* dos controles de giro que tengan como finalidad regular los tamaños de los vectores en el sistema de coordenadas.

SOLUCIÓN

Identificación de las celdas:

- **Control 1:** Celda **F8**, vinculado con **F8**.
- **Control 2:** Celda **G8**, vinculado con **G8**.
- **Celdas que regulan el tamaño de los vectores:** **B8**, **B26**, **B44**, **B62** y **B80**.

PROCEDIMIENTO:

En *ScienSolar*, la celda responsable de regular el tamaño de los vectores es la celda etiquetada como *Line*. Para que esta celda pueda cumplir con su función debe tener el formato $A*B$ (ver sección 6.27), donde A y B son números que regulan su tamaño y se seleccionan mediante un proceso de prueba y error. Estos dos números los vamos a vincular con **F8** y **G8**, y lo haremos en la celda *Line* para el vector campo eléctrico, es decir, en **B8**.

Pasos detallados:

1. En el modelo 25, inserte un control de giro en **F8**.
2. Formato de control:
 - **Valor actual:** 60 (o valor inicial deseado).
 - **Valor mínimo:** 1 (depende del parámetro).
 - **Valor máximo:** 1000.
 - **Incremento:** 1 (o 0.1 para ajustes finos).
 - **Vinculación con celda:** **F8**.
3. Repita para el control en **G8**, pero con el valor actual igual a 1.
4. **B8** = **F8** & "*" & **G8** para el vector E .
5. **B26** = **\$B\$8** para el vector E_1 .
6. **B44** = **\$B\$8** para el vector E_2 .
7. **B62** = **\$B\$8** para el vector E_3 .

8. = \$B\$8 para el vector E_4 (suponiendo que hay 4 cargas en el modelo).
9. Pruebe los resultados.

Diferencias Windows/Mac: Los controles de giro en Mac pueden tener limitaciones en el rango de valores en versiones antiguas de Excel.

8.13 Cuadro de grupo (Group Box)

El cuadro de grupo organiza controles relacionados visualmente, mejorando la usabilidad del modelo.

Ejemplo de implementación:

- **Ubicación:** Alrededor de los botones de opción en : .
- **Función:** Agrupar controles de configuración del modelo.

Pasos:

1. Inserte el cuadro de grupo primero.
2. Ajuste su tamaño para contener los controles deseados.
3. Cambie el texto de la etiqueta (doble clic sobre el texto).
4. Coloque los botones de opción dentro del grupo.

Importante: Los botones de opción dentro de un mismo grupo son mutuamente excluyentes automáticamente.

8.14 Casilla de verificación (Check Box) ☒ Casilla 71

Las casillas de verificación permiten activar o desactivar características del modelo.

Ejemplo de Implementación:

- **Ubicación:** Celda .
- **Celda vinculada:** .
- **Etiqueta:** "Mostrar líneas de campo".

Pasos:

1. Inserte la casilla de verificación en .
2. Vincule con la celda .
3. La celda mostrará VERDADERO o FALSO.

Uso en fórmulas:

=SI(V8=VERDADERO;1;0) .

8.15 Cuadro de lista (List Box)

Similar al cuadro combinado, pero muestra múltiples elementos simultáneamente.

Ejemplo de implementación:

- **Ubicación:** Celda : .
- **Rango de entrada:** : .
- **Selección múltiple:** Simple (una selección a la vez).

Aplicación: Seleccionar múltiples componentes de un sistema físico para análisis simultáneo.

8.16 Barra de desplazamiento (Scroll Bar)

Permite ajustar valores en un rango continuo, ideal para parámetros que varían suavemente.

Ejemplo de implementación:

- **Ubicación:** Celda : .
- **Rango:** 0 a 1000.
- **Incremento:** 10.
- **Vinculación:** .

Aplicación: Controlar la escala de visualización o el tiempo de simulación.

8.17 Consideraciones de compatibilidad Windows/Mac

Tabla 8.1

Comparativa de funcionalidades de controles en Windows vs Mac

Control	Excel Windows	Excel Mac
Cuadro combinado	Funcionalidad completa	Compatible, diálogos ligeramente diferentes
Botones	Macros VBA completas	Limitaciones en APIs específicas
Controles de giro	Rango completo (-30000 a 30000)	Rango posiblemente limitado
Grupos	Agrupamiento automático	Funcionalidad equivalente
Barras desplazamiento	Configuración granular	Incrementos predefinidos
Rendimiento	Óptimo con modelos grandes	Puede ralentizarse con muchos controles

Recomendaciones para multi-plataforma:

- Utilice rangos de valores conservadores para controles numéricos.
- Evite macros que dependan de APIs específicas de Windows.
- Pruebe la interfaz en ambas plataformas.

8.18 Mejores prácticas para modelos científicos

1. **Organización lógica:** Agrupe controles usando cuadros de grupo.
2. **Etiquetado claro:** Use nombres descriptivos que reflejen la función física.
3. **Validación de entradas:** Implemente verificaciones para valores físicamente posibles.
4. **Documentación:** Incluya instrucciones sobre el uso de cada control (ver sección 6.52).

La implementación adecuada de estos controles transforma el modelo *ScienSolar* de una hoja de cálculo estática a un laboratorio virtual interactivo, facilitando el análisis paramétrico y la exploración de diferentes escenarios físicos de manera intuitiva y eficiente.

Nota importante: Una vez culminado el diseño del modelo, este se puede exportar con ayuda del botón **Código** y luego importarlo según los procedimientos establecidos en la sección 6.8. Los controles de formulario se ubicarán en la celda más próxima a la posición en la que fueron editados, y su tamaño también se regulará en unidades del tamaño de las celdas (hasta media celda). Los controles de formulario sólo se pueden exportar a partir de la versión 1.6 de *ScienSolar*. En la figura 8.4 se puede apreciar el modelo 25 *Campo eléctrico* con algunos controles estudiados en los ejemplos anteriores.

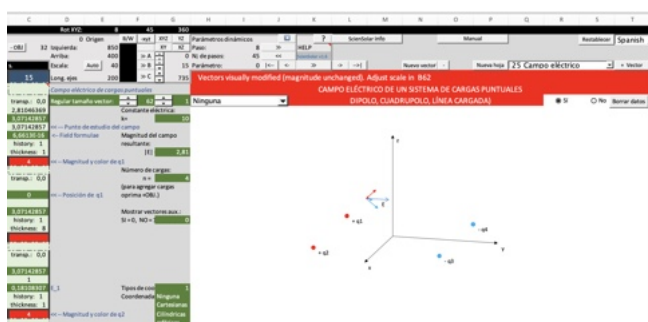


Figura 8.4.

Vista de algunos controles configurados de acuerdo a los ejemplos descritos anteriormente.

Nota. Elaboración propia.

8.19 Estética del modelo

Una vez que el modelo está completamente desarrollado, es posible mejorar su apariencia reorganizando tanto la distribución de las configuraciones de los vectores como las celdas que contienen datos y fórmulas. En este sentido, Excel ofrece la funcionalidad de **cortar y pegar** (distinto a la operación de copiar y pegar), lo que permite mover celdas sin alterar la integridad de la estructura del modelo. Mediante este proceso, es posible redistribuir las celdas y reorganizar la disposición del modelo, lo cual puede realizarse en cualquier etapa de su construcción, incluida su actualización.

En lo que respecta a las configuraciones de los vectores, que se encuentran en las columnas

A, B y C, es fundamental mantener la integridad de cada conjunto de datos. Para ello, se debe seleccionar siempre un bloque de 9 filas y 3 columnas por cada vector, asegurándose de moverlo dentro de las primeras tres columnas sin dejar espacios entre los bloques. Tras la reorganización, es necesario ajustar el número de orden de cada vector, manteniendo una secuencia ascendente en la numeración.

Finalmente, para recuperar los colores de fondo de las celdas, se debe presionar el botón  repetidamente hasta restaurar el formato deseado.

8.20 Paso 7. Probar y ejecutar el modelo

A continuación, se procederá a ensayar el funcionamiento del modelo. Al ingresar los valores iniciales y presionar cualquier botón de rotación, como por ejemplo el botón , se podrá observar la posición del punto en el sistema de coordenadas cartesiano. Utilizando los botones ,  y , se visualizarán las diferentes vistas del modelo. Además, mediante los botones ,  y , se puede simular la rotación de los ejes cartesianos alrededor de sus tres ejes principales.

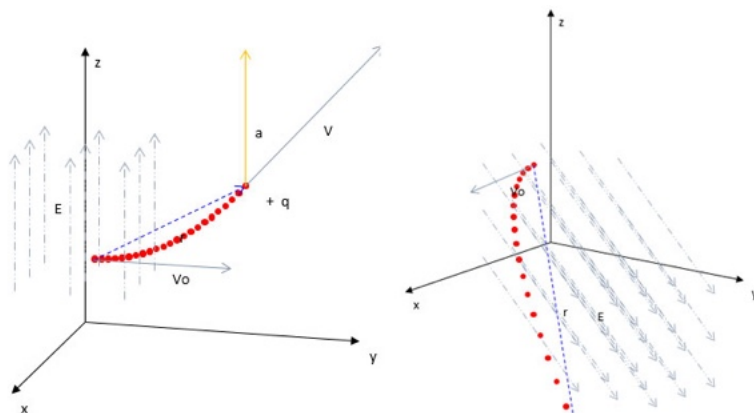
El botón  permite observar la evolución de la partícula en el espacio, mientras que el botón  para la celda seleccionada permite simular el cambio de otro parámetro distinto al tiempo como, por ejemplo, la carga. Para esto, se debe seleccionar la celda  y presionar el botón , lo que permitirá visualizar cómo varía el vector aceleración al incrementar la carga. Para reiniciar la simulación desde el principio, se debe presionar el botón . Es posible modificar las coordenadas del campo de manera arbitraria, incluyendo el cambio de signo, con el fin de estudiar el movimiento de la partícula en un campo orientado arbitrariamente en el espacio.

Para fijar la trayectoria en la pantalla, se utiliza la celda . Si su valor es igual a 2, se dibujará una trayectoria durante la simulación. Si su valor es igual a 1, la trayectoria se borrará gradualmente a medida que avance la simulación. La activación o eliminación de las trayectorias se realiza mediante el botón  correspondiente al vector en cuestión.

En la parte derecha de la figura 8.5, se muestra como ejemplo el comportamiento de una partícula en un campo con los siguientes parámetros: $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $z_0 = 8$, $v_{x0} = 10$, $v_{y0} = 1$, $v_{z0} = 0$, $E_x = 0$, $E_y = 10$, $E_z = -10$, $q = 1$, $m = 1$, trayectoria = 2, paso = 0.1, escala = 10, y longitud de los ejes = 200. Las unidades de las magnitudes son condicionales. En el caso de que la partícula se detenga antes de que se desee finalizar la simulación, se puede continuar avanzando paso a paso mediante el botón . Finalmente, si se desea modificar el número de pasos de la simulación, se puede borrar la fórmula en la celda  y escribir directamente el número de pasos deseado.

8.21 Extracción de datos durante una simulación

Durante una simulación en la que las coordenadas cambian de forma consecutiva, es posible extraer los datos correspondientes a las coordenadas del vector para el cual se haya activado esta función. Para activar la extracción de datos, basta con especificar en las celdas *Dat row* y *Dat col* (celdas  y , respectivamente, en la figura 6.6) los números de fila y columna donde comenzará la tabla con los datos. A continuación, se

**Figura 8.5.**

Trayectorias de partículas positivas en campos con diferentes configuraciones.

Nota. Elaboración propia.

ilustrará este proceso utilizando el modelo de movimiento parabólico como ejemplo.

Si se desea extraer los datos relativos a las coordenadas del vector posición en cada instante de tiempo, es necesario definir en qué fila y columna comenzará la tabla de datos. Supongamos que se quiere que la tabla comience en la fila 30 y la columna 10; entonces, se deben ingresar los valores $B13 = 30$ y $B14 = 10$. Esto hará que las coordenadas iniciales y finales del vector posición sean registradas en la tabla.

Dado que el tiempo también debe ser registrado, *ScienSolar* tiene predefinidas dos celdas adicionales por cada vector para almacenar valores adicionales, por lo que se utilizará una de estas celdas para el tiempo. Las celdas disponibles para este fin son $D14$ y $E14$. En este caso, se asignará el valor de tiempo a la celda $D14$, es decir, $D14 = I5$.

Una vez configurada la salida de datos, se debe presionar el botón $>>$ para iniciar la simulación, utilizando un paso $I3 = 0.1$ y un número de pasos $I4 = 22$. Al ejecutar la simulación, los datos aparecerán en forma de tabla a partir de la fila 30 y la columna 10. A partir de estos datos, se seleccionará la columna correspondiente a la coordenada z y al tiempo. Luego, con las herramientas de gráfico de Excel, se podrá generar una gráfica de z vs. t , tal como se muestra en la figura 8.6. Para obtener la huella de la partícula durante su movimiento, como se observa en la figura, se debe presionar el primer botón $\odot$ (ubicado en $A6$) y ejecutar la simulación. Para borrar la tabla de datos generada, se debe presionar el botón $\blacktriangle$ en la celda $A6$.

Si se desean extraer datos de otras magnitudes, como la velocidad, el procedimiento es similar al utilizado para el vector posición. En este caso, se deben ingresar las coordenadas iniciales de la tabla en las celdas $B40$ y $B41$, y activar la celda $D41$ para el tiempo, por ejemplo, $B40 = 27$, $B41 = 16$ y $D41 = I5$. Esto generará una tabla adicional con las coordenadas del vector velocidad.

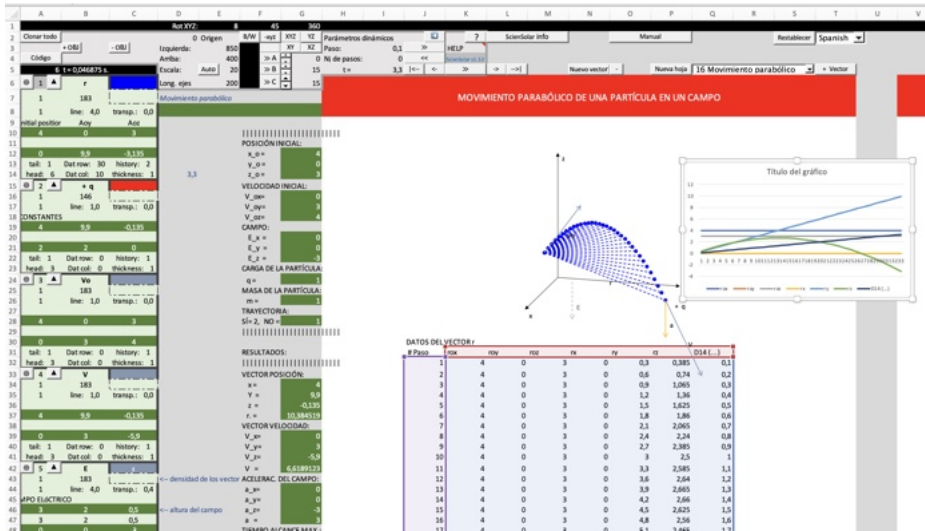


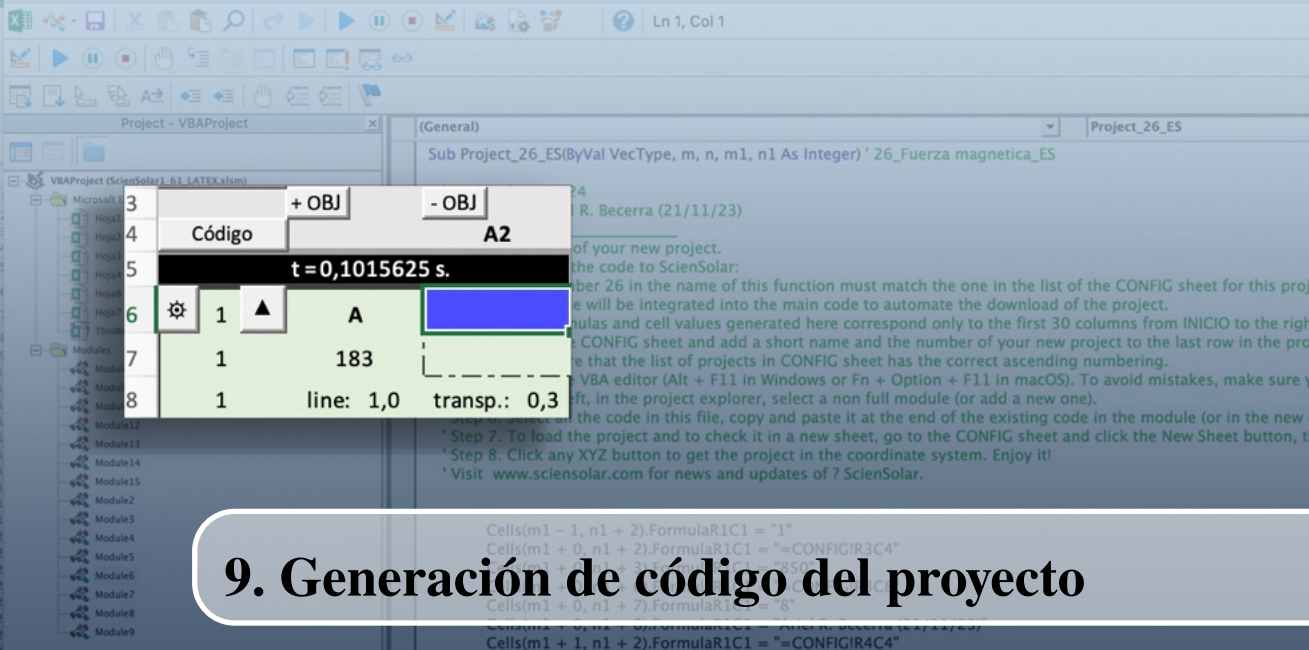
Figura 8.6.

Salida de datos de la simulación del movimiento parabólico. Se utilizó la herramienta de gráficos de Excel para dibujar las gráficas coordenadas vs tiempo. Los valores del tiempo son los de la columna de la derecha de la tabla de datos.

Nota. Elaboración propia.

8.22 Crear contenido para el modelo

En cada modelo es posible crear contenido adicional como instrucciones, teoría con ecuaciones, y fórmulas matemáticas en las celdas, utilizando el editor de ecuaciones. El procedimiento detallado para agregar contenido se explica en la sección 6.52.



9. Generación de código del proyecto

La gestión eficiente de proyectos científicos dentro del entorno de *ScienSolar* representa un aspecto fundamental para garantizar la portabilidad, reproducibilidad y organización del trabajo de modelado físico. Si bien un proyecto nuevo puede almacenarse simplemente guardando el archivo de Excel en el que ha sido creado, y es posible construir múltiples modelos en diferentes hojas de cálculo dentro de un mismo libro de trabajo, *ScienSolar* ofrece una metodología más sofisticada y práctica para la preservación de proyectos: La integración directa dentro del código fuente de la aplicación.

9.1 Ventajas del almacenamiento en código

El almacenamiento de proyectos directamente en el código de *ScienSolar* presenta numerosas ventajas significativas frente al enfoque tradicional de archivos Excel independientes:

- **Portabilidad mejorada.** Los proyectos quedan integrados permanentemente en la aplicación, permitiendo su descarga directa desde la lista de proyectos oficial sin dependencia de archivos externos.
- **Organización centralizada.** Todos los modelos quedan catalogados y accesibles desde una interfaz unificada, facilitando la gestión de múltiples proyectos de investigación.
- **Preservación a largo plazo.** Elimina el riesgo de pérdida de archivos individuales y asegura la disponibilidad permanente de los modelos desarrollados.
- **Distribución simplificada.** Permite compartir proyectos complejos sin necesidad

de transferir archivos voluminosos, ya que los usuarios solo necesitan acceder a la aplicación *ScienSolar* actualizada.

- **Control de versiones.** Facilita el mantenimiento de diferentes versiones de un mismo proyecto con identificadores únicos.

El proceso para guardar un proyecto en el código de *ScienSolar* sigue una secuencia estructurada de tres pasos fundamentales:

1. Exportar el código utilizando el botón .
2. Copiar el código generado en el editor de VBA de *ScienSolar*.
3. Registrar el número consecutivo del proyecto en la lista de la hoja *CONFIG*.

9.2 Exportación del código a archivo de texto

Al presionar el botón , se inicia un proceso automatizado que genera un código comprensivo conteniendo toda la información relevante de fórmulas y valores almacenados en las celdas ubicadas dentro de las zonas designadas para el modelado científico. Específicamente, el sistema exporta datos de las zonas 2, 3, 5 y 6, según la estructura definida en la figura 6.1.

Alcance de la exportación

Es crucial comprender que el proceso de exportación **no incluye** datos o fórmulas localizadas fuera de estas zonas específicas. Si durante el desarrollo del proyecto se han ingresado valores o fórmulas en celdas externas a estas áreas designadas, será necesario reubicarlas mediante operaciones de cortar y pegar hacia cualquier celda disponible dentro de los límites de las zonas mencionadas.

Las zonas 2 y 3 presentan una extensión vertical que alcanza hasta el límite máximo permitido por Excel, sin embargo, el algoritmo de exportación inteligentemente procesa datos solamente hasta el último vector identificado en la estructura del modelo. Esta optimización evita la inclusión de celdas vacías o no relevantes, optimizando el tamaño del código generado.

Una limitación importante a considerar es que los datos exportados **no incluyen** información de formato (colores, bordes, fuentes) ni elementos gráficos elaborados (gráficos, diagramas o elementos de visualización avanzada). La exportación se concentra exclusivamente en el contenido matemático y paramétrico esencial para la reconstrucción funcional del modelo.

Preparación para la exportación

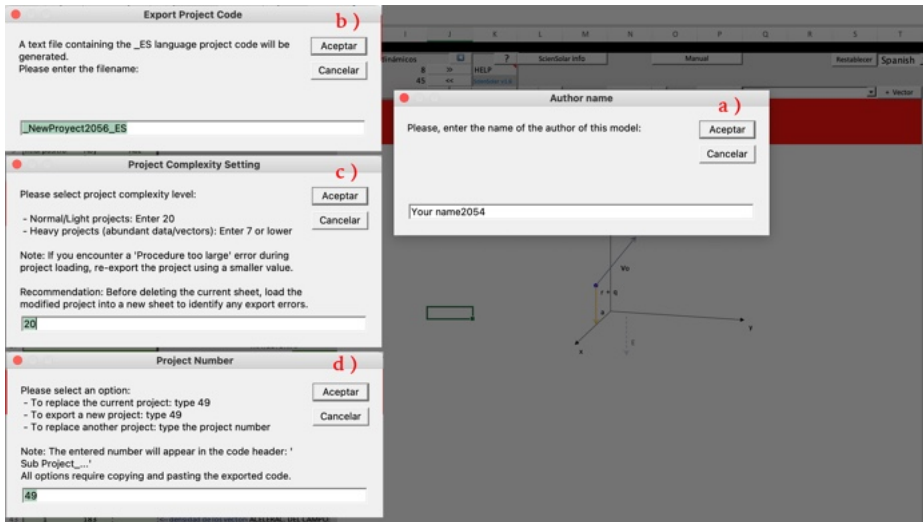
Para generar exitosamente el código de un nuevo proyecto, es imperativo asegurar que el cuadro combinado  no tenga ningún proyecto preexistente seleccionado, es decir, debe permanecer en estado blanco o vacío. Esta condición garantiza que el sistema interprete correctamente que se trata de una exportación de nuevo desarrollo y no de una modificación de proyecto existente.

9.3 Proceso de exportación paso a paso

Al activar el botón , el sistema presenta una secuencia de cuatro ventanas emergentes consecutivas que guían al usuario a través del proceso de configuración y guardado:

- a) **Registro de autoría.** Si el proyecto ha sido elaborado desde cero en una hoja nueva, aparecerá inicialmente una ventana solicitando el nombre del autor o los autores responsables del desarrollo. *ScienSolar* almacena esta información de manera permanente dentro del código del proyecto, proporcionando atribución y trazabilidad académica. Es importante destacar que si el proyecto ya existe y está siendo modificado, esta ventana no aparecerá, asumiendo que la información de autoría ya fue registrada previamente.
- b) **Denominación del archivo.** La segunda ventana solicita el nombre del archivo de texto donde se almacenará el código generado. El sistema acepta cualquier denominación siempre y cuando cumpla con restricciones básicas de nomenclatura: evitar caracteres especiales como símbolos matemáticos, signos de puntuación avanzados, tildes o diacríticos. Se recomienda utilizar nombres descriptivos que reflejen la naturaleza del proyecto científico. Además es recomendable que el nombre esté precedido por el número del proyecto y un guion de piso y luego las iniciales del lenguaje en que está elaborado: 26_Nombre del proyecto_ES.
- c) **Optimización de tamaño.** La tercera ventana implementa un mecanismo inteligente de evaluación de complejidad del proyecto. El sistema analiza automáticamente si el proyecto presenta dimensiones considerables o carga computacional significativa, asignando un valor numérico inversamente proporcional a su complejidad. Este parámetro tiene como objetivo principal permitir la exportación del proyecto en múltiples archivos segmentados cuando la envergadura del modelo así lo requiere, evitando limitaciones técnicas de MS Excel durante futuras cargas.
 - Para proyectos de tamaño normal (hasta aproximadamente 20 vectores y volumen moderado de datos) se recomienda introducir el valor 20.
 - Para proyectos considerablemente extensos o pesados (con abundante información paramétrica o numerosos vectores) se sugiere valores de 7 o inferiores.
 - Proyectos de complejidad intermedia deben utilizar valores numéricos intermedios según su escala.
 - En caso de incertidumbre, puede utilizarse el valor por defecto proporcionado por el sistema. Si posteriormente se experimentan dificultades durante la carga del código a la hoja de cálculo, deberá repetirse el proceso de exportación con valores numéricos menores.
- d) **Identificación del proyecto.** La cuarta y última ventana emerge solicitando el número identificador único del proyecto. Esta numeración debe ser asignada de acuerdo con las opciones y recomendaciones que aparecen contextualmente en la interfaz, garantizando la consistencia dentro del ecosistema de proyectos de *ScienSolar*.

Nota: estas ventanas emergentes simultáneas antes de guardar el proyecto, aparecen a partir de la versión 1.6 de *ScienSolar*.

**Figura 9.1.**

Ventana emergente para introducir el nombre del archivo en el que se guardará el código del nuevo proyecto.

Nota. Elaboración propia.

9.4 Integración del nuevo proyecto a la lista de *ScienSolar*

Una vez generado el código del nuevo proyecto, este puede ser integrado a la lista de proyectos de *ScienSolar*. Este proceso se lleva a cabo en dos etapas: copiando el código al editor de VBA y añadiendo el nombre del proyecto a la lista.

9.5 Copiar el código en el editor de Visual Basic

Acceda a la carpeta en la que se encuentra el archivo de Excel que contiene el paquete *ScienSolar* y localice el archivo de texto con el código del nuevo proyecto que ha sido generado. Ábralo, seleccione todo el contenido y cópielo. A continuación, abra Excel y acceda al editor de VBA (para ello, presione **Alt + F11** en Windows o **Fn + Option + F11** en macOS). En el explorador de proyectos, agregue un módulo (haga clic derecho sobre *VBAProject*, seleccione *Insertar* y luego *Módulo*), y pegue el código completo en dicho módulo, tal como se ilustra en la figura 9.2.

9.6 Agregar el nombre a la lista en CONFIG

El último paso para integrar un nuevo proyecto a *ScienSolar* consiste en añadirlo a la lista de proyectos en la hoja de cálculo CONFIG. Para realizar este procedimiento, diríjase al libro de Excel y abra la hoja CONFIG. En la segunda columna de esta hoja, a partir de la fila 34 aproximadamente, encontrará la misma lista de proyectos que aparece en el cuadro combinado del tablero de control de *ScienSolar*. Después de la última fila de esta lista, en la tercera columna, escriba el número que desee asignar a su nuevo proyecto y, en la columna adyacente (cuarta columna), ingrese el nombre del proyecto en inglés y en

la siguiente columna en español. El número debe cumplir con dos condiciones: Primero, debe coincidir con el número que aparece en el encabezado del código que ha introducido previamente en el editor de VBA (figura 9.2); y segundo, debe ser consecutivo al número del último proyecto listado (figura 9.3).

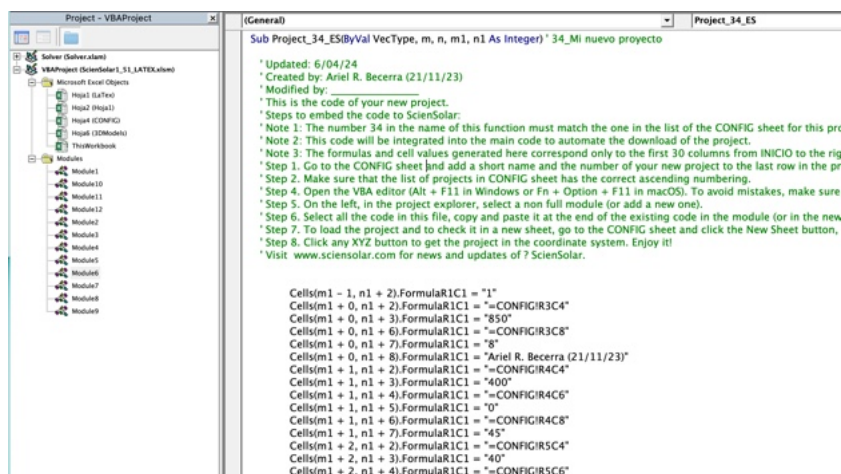


Figura 9.2.

Para pegar el código en el editor agregue un módulo nuevo, copie el código del archivo de texto y péguelo en el nuevo módulo.

Nota. Elaboración propia.

En la figura 9.3 se observa el ejemplo de la adición del proyecto número 34 a la lista en la hoja CONFIG.

Si el número que aparece en el encabezado no coincide con el número consecutivo de la lista, este puede modificarse manualmente (en el encabezado del código en el editor VBA), o bien puede generarse un nuevo código del proyecto y reemplazarlo. Para ello, es fundamental que antes de presionar el botón **Código**, asegúrese de que en la lista del cuadro combinado no esté seleccionado ningún proyecto. En la imagen se muestra el botón **Código** y el cuadro combinado con la opción **Nueva hoja** seleccionada. Cabe destacar que cuando se presiona el botón **Código** con un proyecto ya seleccionado, el número generado en el código corresponderá al proyecto previamente seleccionado. En cambio, para generar el código de un proyecto nuevo, no debe haber ningún proyecto seleccionado en la lista, lo que generará automáticamente el siguiente número consecutivo, correspondiente al último proyecto de la lista en la hoja CONFIG. Este procedimiento de actualización de la lista se hace automáticamente a partir de la versión 1.52 de *ScienSolar*.

Actualización de la lista a través del botón Refresh

Si en la configuración de Excel se habilita la opción **Confiar en el acceso al modelo de objetos del proyecto VBA** (Opciones → Centro de confianza → Configuración de macros) el botón **Refresh** en la hoja CONFIG puede utilizarse para refrescar la lista de proyectos que existan en el editor VBA. Para ello debe borrarse todo el contenido de las celdas A34 - G90 (o hasta donde alcance la lista), seleccionar cada idioma y oprimir **Refresh**. Si quedan celdas en blanco en los nombres de los proyectos, puede editarlos, así como modificar sus nombres.

41	to refresh	Rotación tan	9	Tangential R	Rotación tangencial	
42	with the	Coordenadas	10	Cylindrical Cc	Coordenadas cilíndricas	
43	Reset	Coordenadas	11	Spherical Co	Coordenadas esféricas	
44	button.	Simetría plai	12	Plane Symm	Simetría plana	
45	Spanis ▾	Simetría cilíri	13	Cylindrical Sy	Simetría cilíndrica	
46		Simetría esfé	14	Spherical Syr	Simetría esférica	
47	REFRESH	TRAJECTORY	15	TRAJECTORY	TRAJECTORY	
48		Movimiento	16	Parabolic Mc	Movimiento parabólico	
49	Obs.	Modelo 3D	17	3D Model	Modelo 3D	
50		Lente	18	Lens	Lente	
51		Pirámide 3D	19	3D Pyramid	Pirámide 3D	
52		PV = NkT	20	PV = NkT	PV = NkT	
53		Funciones	21	Functions	Funciones	
54		ScienSolar	22	ScienSolar	ScienSolar	
55		Batería	23	Battery	Batería	
56		Fuerza de Co	24	Coulomb For	Fuerza de Coulomb	
57		Campo eléct	25	Electric Field	Campo eléctrico	
58		Fuerza magr	26	Magnetic Fo	Fuerza magnética	
59		Espira en un	27	Loop in a Ma	Espira en un campo magnético	
60		Ley de Biot -	28	Biot-Savart L	Ley de Biot - Savart	
61		Distribucione	29	Charge distri	Distribuciones de carga	
62		Campo E de	30	Electric Field	Campo E de partículas	
63		Onda plana	31	Plane wave	Onda plana	
64		Toroide_ES	32	Toroid_EN	Toroide_ES Updated:	
65		Ejemplos de	33	Example of E	Ejemplos de O. D._ES	
66		Nuevo proye	34	New project	Nuevo proyecto	
67						
68						
69						

◀ ▶

Hoja116 Movimiento parabólicoCONFIGHoja2Hoja3

Figura 9.3.
Lista de proyectos en la hoja CONFIG. Se muestra parte de la lista en la que se agrega un nuevo proyecto.
Nota. Elaboración propia.

A diferencia de los números de los proyectos, los nombres no están vinculados directamente al código, por lo que pueden ser editados en cualquier momento a discreción del usuario. En principio, la lista de proyectos se puede reorganizar, pero se debe proceder con cautela, realizando los cambios simultáneamente tanto en la hoja CONFIG como en los módulos del editor de VBA. Se recomienda hacer una copia del libro de Excel antes de realizar estos cambios.

Una vez copiado el código y añadido el proyecto a la lista, el proyecto aparecerá en la lista de proyectos de la hoja principal de *ScienSolar*, ya sea al agregar una nueva hoja o al presionar el botón Restablecer como se muestra en la figura 9.4.

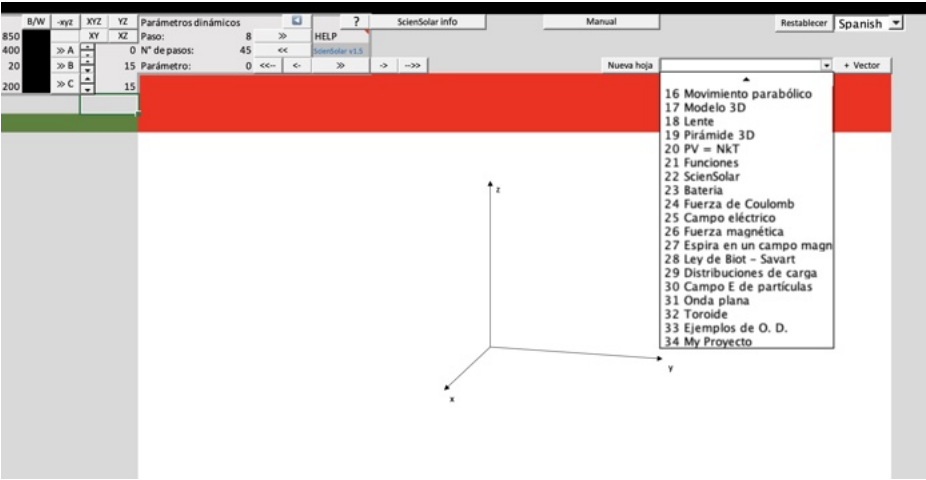
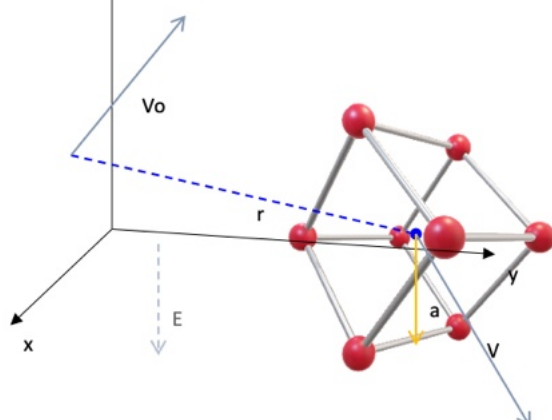
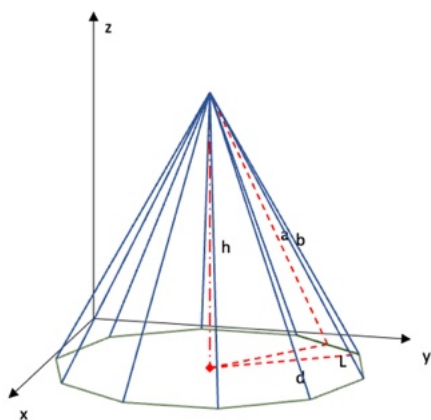


Figura 9.4.
Lista de proyectos en una nueva hoja de ScienSolar.
Nota. Elaboración propia.

IV

Modelos en ejemplos

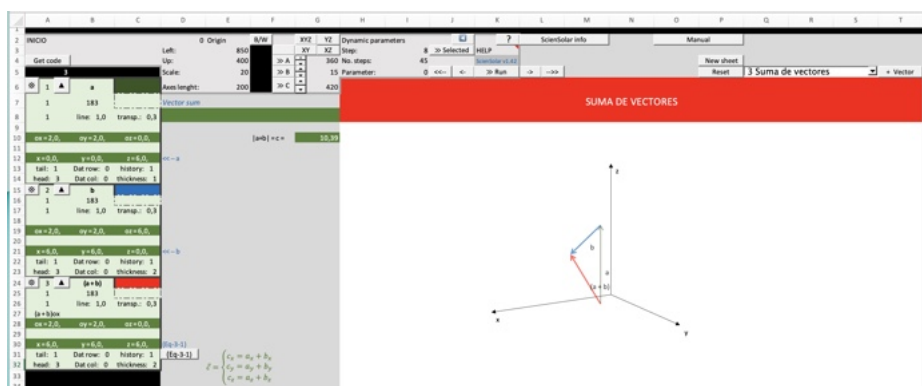


10. Modelos matemáticos simples

Este capítulo presenta diversos ejemplos de modelado de problemas matemáticos sencillos utilizando el paquete *ScienSolar*. Todos los modelos incluidos han sido desarrollados completamente dentro del entorno de MS Excel, sin necesidad de recurrir a programación en VBA. De este modo, se busca demostrar que es posible realizar simulaciones y resolver problemas matemáticos complejos mediante el uso exclusivo de las herramientas disponibles en *ScienSolar* y Excel, sin necesidad de conocimientos avanzados de programación.

En el capítulo 6 se proporcionaron las instrucciones detalladas sobre el uso de los botones y funciones disponibles en el tablero de control de *ScienSolar*, las cuales permiten realizar el modelado de problemas de manera eficiente y efectiva. Estas funciones están diseñadas para ser accesibles a usuarios con diferentes niveles de experiencia, lo que hace que el proceso de modelado sea tanto sencillo como intuitivo. El objetivo de este capítulo es ilustrar, mediante ejemplos prácticos, cómo aprovechar al máximo las capacidades de *ScienSolar* para crear modelos matemáticos, sin la necesidad de involucrar código VBA.

Los ejemplos presentados a lo largo del capítulo abarcan una variedad de problemas matemáticos que ilustran tanto la versatilidad como la potencia del paquete en la resolución de situaciones que requieren modelado y simulación.

**Figura 10.1.**

Suma de vectores. Vista de la interfaz con el proyecto cargado en la hoja.

Nota. Elaboración propia.

10.1 Suma de vectores

En este modelo se puede realizar la suma o resta de cualquier cantidad de vectores expresados en tres dimensiones y mostrar el resultado utilizando el método de la regla cabeza-cola o colocando todos los vectores en el origen del sistema de coordenadas.

Fundamento matemático

La suma de dos vectores arbitrarios $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, distribuidos en el espacio tridimensional, se puede representar mediante un vector resultante $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, cuyas componentes se obtienen sumando las correspondientes coordenadas de cada uno de los vectores. Es decir:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \quad (10.1)$$

Este proceso se puede extender a la suma de más de dos vectores simplemente sumando las componentes correspondientes.

Construcción del modelo

El modelo para la suma de vectores es bastante sencillo de armar y solo requiere unos pocos minutos para configurarlo y comenzar a visualizar los resultados. No obstante, para cargar el modelo previamente armado, basta con seleccionarlo de la lista de proyectos y presionar el botón **+ Vector**. A continuación, describiremos los pasos para construir este modelo desde cero.

Primero, presione el botón **Nueva hoja** para crear una hoja en blanco, que aparecerá con el fondo negro predeterminado, el cual puede cambiar utilizando el botón **B/W** sin afectar el funcionamiento del paquete *ScienSolar*. A continuación, haga clic tres veces en el botón **+ Vector** para agregar dos vectores a sumar y un tercer vector que representará el

resultado de la suma. Asigne una etiqueta a cada uno de los vectores, como se muestra en la figura 10.1, utilizando las celdas **B6**, **B15**, y **B24**.

En las celdas correspondientes a las coordenadas iniciales del primer vector (fila 10 en la figura), ingrese los valores para las coordenadas x_0 , y_0 y z_0 en los que inicia el vector $\vec{a}$. Por ejemplo, en **A10** = 2, **B10** = 2, **C10** = 0, y en las celdas correspondientes a las coordenadas finales relativas, **A12** = 0, **B12** = 0, **C12** = 6, lo que indica que el vector $\vec{a}$ tiene una componente $z = 6$ y no tiene componentes en los ejes x ni y .

Para el vector $\vec{b}$, que debe comenzar justo después del vector $\vec{a}$, las coordenadas iniciales deben ser la suma de las coordenadas finales del vector $\vec{a}$ y sus coordenadas iniciales. Por lo tanto, en las celdas correspondientes al primer componente de las coordenadas iniciales de $\vec{b}$, escriba la fórmula **A19** = A12 + A10, **B19** = B12 + B10, **C19** = C12 + C10. En las celdas correspondientes a las coordenadas finales, puede ingresar cualquier valor, por ejemplo, **A21** = 6, **B21** = 6, **C21** = 0.

Si desea que el vector resultante de la suma $\vec{a} + \vec{b}$ comience en el mismo punto que el vector $\vec{a}$, simplemente copie las coordenadas iniciales de $\vec{a}$ en las celdas correspondientes al inicio del vector resultante, es decir, en **A28** = A10, **B28** = B10, **C28** = C10. Para obtener las coordenadas del vector resultante, sume las coordenadas finales de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en las celdas correspondientes, como se muestra en las fórmulas **A30** = A21 + A12, **B30** = B21 + B12, **C30** = C21 + C12. Una vez realizados estos pasos, presione cualquiera de los botones de rotación o vista del sistema de coordenadas para observar los resultados.

Ahora puede cambiar libremente los valores de las celdas que no contienen fórmulas, es decir, las celdas ubicadas en las filas 10, 12 y 21 de la figura. Se invita al lector a experimentar con diferentes valores para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y observar cómo cambia el resultado de la suma, incluyendo la posibilidad de usar valores negativos. Para ubicar todos los vectores en el origen, basta con escribir 0 en todas las coordenadas iniciales de los tres vectores (filas 10, 19 y 28), sin modificar las fórmulas correspondientes.

Este procedimiento puede ser repetido para agregar más vectores a la suma o incluso para realizar la resta de vectores. A continuación, se muestran las fórmulas correspondientes a las celdas de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$:

Fórmula en Excel 10.1 2 **A19** = A12 + A10 { = $x_1 + x_{1_0}$ }, **B19** = B12 + B10 { = $y_1 + y_{1_0}$ }, **C19** = C12 + C10 { = $z_1 + z_{1_0}$ }. ■

Fórmula en Excel 10.2 3 **A28** = A10 { = x_{1_0} }, **B28** = B10 { = y_{1_0} }, **C28** = C10 { = z_{1_0} }, **A30** = A21 + A12 { = $x_2 + x_1$ }, **B30** = B21 + B12 { = $y_2 + y_1$ }, **C30** = C21 + C12 { = $z_2 + z_1$ }. ■

Si ha creado un nuevo proyecto que involucra más vectores, puede integrarlo a la lista de proyectos como se describe a continuación.

El botón **Código** genera el código correspondiente al proyecto, el cual se graba en un archivo de texto ubicado en la misma carpeta que el archivo de Excel. Al presionar este botón, se abrirá una ventana emergente solicitando el nombre del archivo para guardarlo.

Para integrar este código a *ScienSolar*, abra el archivo de texto, copie todo el código y pégalo en un módulo existente del editor de VBA o cree uno nuevo (para más detalles sobre cómo hacerlo, consulte la sección 6.8). Luego, en la hoja de Excel, en la hoja CONFIG, agregue el nombre del proyecto (puede elegir cualquier nombre) y el número del proyecto, que debe coincidir con el número del encabezado en el código. Después de agregar el nuevo proyecto, este aparecerá en la lista desplegable una vez se haya presionado el botón **Restablecer** en la hoja de Excel o el botón **Nueva hoja**. Para cargar el proyecto, simplemente selecciónelo de la lista y presione el botón **+ Vector**.

Ejecución de la simulación

Ingrese los valores de las coordenadas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en las celdas **A12**, **B12**, **C12**, y **A21**, **B21**, **C21** respectivamente. Observe las coordenadas del vector resultante en las celdas **A30**, **B30**, **C30**. Para ver los resultados, presione el botón **XYZ**. Utilice el botón **>> C** para rotar el sistema de coordenadas y los botones **YZ**, **XZ** y **XY** para observar los vectores desde diferentes planos. Analice cómo varían las coordenadas tanto del vector resultante como de los vectores sumados. Si ha descargado el modelo ya existente en la lista, presione el botón en la celda **D31** para visualizar las ecuaciones involucradas en la suma.

Ejemplo 10.1.1 Dado el vector $\vec{a} = (0, 0, 4)$ y $\vec{b} = (4, 3, 6)$, hallar el vector resultante $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

SOLUCIÓN

Ingrese en **A12** = 0, **B12** = 0, **C12** = 4 y en **A21** = 4, **B21** = 3, **C21** = 6. Luego, presione el botón **XYZ**. Los resultados de las componentes del vector $\vec{c}$ aparecerán en las celdas **A30** = 4, **B30** = 3, **C30** = 10. Experimente con otros valores de las coordenadas de los vectores, incluyendo valores negativos, decimales y múltiplos de un parámetro (en este caso, el parámetro puede escribirse en una celda de la columna G).

Ejemplo 10.1.2 En el ejemplo anterior, mejorar el modelo para agregar varios vectores.

SOLUCIÓN

En este modelo también es posible agregar cualquier número de vectores y modificar el vector resultante para que contenga la suma total vectorial. Para agregar un nuevo vector, deje vacía la lista de proyectos y presione el botón **Nuevo vector**. Luego, agregue el nuevo vector a la suma de vectores utilizando sus coordenadas. Por ejemplo, puede escribir las fórmulas **A30** = A21 + A12 + A39, **B30** = B21 + B12 + B39, y **C30** = C21 + C12 + C39.

Si desea que el nuevo vector comience en la cabeza del vector $\vec{b}$, introduzca las coordenadas iniciales de este nuevo vector con las fórmulas $\boxed{A37} = A19 + A21$, $\boxed{B37} = B19 + B21$, y $\boxed{C37} = C19 + C21$. Para ver los resultados, presione el botón $\boxed{XYZ}$. Luego, utilice los botones de rotación y vistas del sistema de coordenadas para observar cómo se comportan las coordenadas del vector resultante y de los sumandos.

Para valores concretos, si $\vec{a} = (0, 0, 6)$, $\vec{b} = (6, 6, 0)$, y $\vec{c} = (2, 2, 6)$, entonces la suma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (8, 8, 12)$.

10.2 Suma de coordenadas

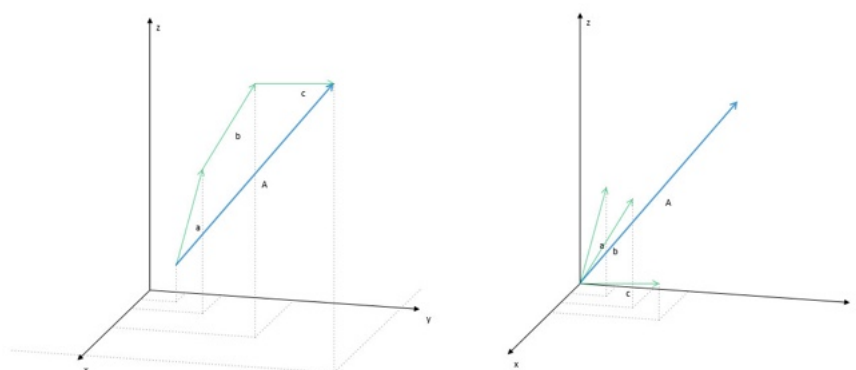


Figura 10.2.

Suma de vectores

Nota. Elaboración propia.

El propósito de este modelo es facilitar la visualización de la suma de vectores mediante la adición de sus coordenadas, permitiendo observar cómo se comportan sus proyecciones sobre los ejes x , y y z del espacio tridimensional. Este modelo proporciona la opción de alternar entre dos representaciones gráficas: El modo **cabeza-cola** de los vectores, en el que los vectores se conectan por sus extremos, y el modo en el que todos los vectores se posicionan desde el origen de coordenadas. Un ejemplo de estas representaciones se muestra en la figura 10.2. Además, el modelo permite agregar un número indefinido de vectores adicionales mediante el uso del botón $\boxed{+OBJ}$.

En el diseño actual, se han incorporado tres vectores: los dos vectores sumandos $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, así como el vector resultante $\vec{A}$. Adicionalmente, se incluyen 12 vectores auxiliares, los cuales representan las proyecciones de los vectores sumandos sobre los respectivos ejes del sistema de coordenadas, sumando un total de 15 vectores en la visualización. Inicialmente, todos los vectores son agregados al modelo, y posteriormente se introducen las fórmulas matemáticas correspondientes, conforme se explica a continuación.

El usuario tiene la capacidad de modificar de forma arbitraria las coordenadas de los tres vectores sumandos y observar el impacto de dichos cambios sobre el vector resultante y

sus proyecciones. Además, se ofrece la opción de alternar entre las dos representaciones de la suma de vectores con tan solo modificar un parámetro. Este modelo constituye una herramienta útil que puede ampliarse fácilmente para incluir más vectores y desarrollar modelos más complejos.

Fundamento matemático

La suma de tres vectores arbitrarios $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ y $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, distribuidos en el espacio tridimensional, puede expresarse mediante un vector resultante $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, cuyas componentes se obtienen sumando las correspondientes coordenadas de cada uno de los vectores involucrados en la operación:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (a_x + b_x + c_x, a_y + b_y + c_y, a_z + b_z + c_z) \quad (10.2)$$

Este proceso ilustra de manera clara y sencilla cómo las componentes de los vectores se combinan para generar un nuevo vector en el espacio tridimensional, proporcionando una visualización intuitiva de la suma vectorial.

Construcción del modelo

Agregar los 15 vectores. Los valores iniciales se ingresan por cuenta del usuario en las celdas como se muestra en la fórmula de Excel 10.3.

Fórmula en Excel 10.3

- D10 = "&B6&" { Etiqueta de A },
- E10 = RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2) { = |A| = },
- D12 = «<- Resultante "&B6 { Coordenadas del vector resultante },
- G14 = 0 { = A_{ox} origen en x },
- G15 = 0 { = A_{oy} origen en y },
- G16 = 0 { = A_{oz} origen en z },
- G18 = 0 { = Modo: 0 = vectores en el origen, 1 = vectores en cabeza-cola },
- G24 = 1 { 0 = mostrar, 1 = ocultar Valores },
- G26 = 0 { = x : 0 = mostrar, 1 = ocultar coordenada },
- G27 = 0 { = y : 0 = mostrar, 1 = ocultar coordenada },
- G28 = 0 { = z : 0 = mostrar, 1 = ocultar coordenada },
- G29 = 0 { = *Proyeccin* : 0 = mostrar, 1 = ocultar proyección sobre XY }.

En la fórmula de Excel 10.4 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector A.

Fórmula en Excel 10.4

- A9 = SUMAR.SI.CONJUNTO(C:C;D:D;"Vec_*")
- B9 = SUMAR.SI.CONJUNTO(A:A;D:D;"Vec_*")
- C9 = SUMAR.SI.CONJUNTO(B:B;D:D;"Vec_*")

{ Las anteriores fórmulas posibilitan la suma automática cuando se agregan o eliminan vectores },

- $A10 = G14$ $B10 = G15$ $C10 = G16$
{ origen del vector suma },
- $A12 = B9$ { Suma en x }, $B12 = C9$ { Suma en y }, $C12 = A9$ { Suma en z }.



En la fórmula de Excel 10.5 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente z del vector **A**.

Fórmula en Excel 10.5 2

- $A15 = A6 + 1$ { Automatización del número del vector },
- $B15 = SI(\$G\$24=0; B6 \& "_z = " \& -C21; "")$ { Mostrar/ocultar etiqueta },
- $C17 = \$G\28 { =0/1 Mostrar/ocultar componente },
- $A19 = A10 + A12$,
- $B19 = B10 + B12$,
- $C19 = C10 + C12$,
- $C21 = -C12$,
- { Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.



En la fórmula de Excel 10.6 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente y del vector **A**.

Fórmula en Excel 10.6 3

- $A24 = A15 + 1$ { Automatización del número del vector },
- $B24 = SI(\$G\$24=0; B6 \& "_y = " \& -B30; "")$ { Mostrar/ocultar etiqueta },
- $C26 = \$G\27 { =0/1 Mostrar/ocultar componente },
- $A28 = A21 + A19$ $B28 = B21 + B19$, $C28 = C21 + C19$
- $B30 = -B12$,
- { Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.



En la fórmula de Excel 10.7 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente x del vector **A**.

Fórmula en Excel 10.7 4

- $A33 = A24 + 1$ { Automatización del número del vector },
- $B33 = SI(\$G\$24=0; B6 \& "_x = " \& -A39;)$ { Mostrar/ocultar etiqueta },

- $C35 = \$G\$26 \{ =0/1 \text{ Mostrar/ocultar componente} \},$
- $A37 = A19 + A21, \quad B37 = B19 + B21, \quad C37 = C19 + C21,$
- $A39 = -A12,$
- $\{ \text{Otros, línea} = 4, \text{ transparencia} = 0, \text{ cabeza del vector} = 1 \}.$

En la fórmula de Excel 10.8 se muestran los valores que deben tener las celdas de la proyección del vector **A** sobre el plano *XY*.

Fórmula en Excel 10.8 5

- $A42 = A33 + 1 \{ \text{Automatización del número del vector} \},$
- $C44 = \$G\$29 \{ =0/1 \text{ Mostrar/ocultar proyección} \},$
- $A46 = A10 + A12,$
- $B46 = B10 + B12,$
- $A48 = -A12,$
- $B48 = -B12,$
- $\{ \text{Otros, línea} = 4, \text{ transparencia} = 0, \text{ cabeza del vector} = 1 \}.$

En la fórmula de Excel 10.9 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **a**.

Fórmula en Excel 10.9 6

- $A51 = A42 + 1 \{ \text{Automatización del número del vector} \},$
- $B51 = \text{CARACTER}(96 + D51) \{ \text{Muestra la letra del vector} \},$
- $A55 = \$A\$10, \quad B55 = \$B\$10, \quad C55 = \$C\$10,$
 $\{ \text{Posición inicial del primer vector} \}.$

En la fórmula de Excel 10.10 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente *z* del primer vector **a**.

Fórmula en Excel 10.10 7

- $A60 = A51 + 1 \{ \text{Automatización del número del vector} \},$
- $B60 = \text{SI}(\$G\$24=0; B51 \& "_z" = "&-C66; \} \{ \text{Mostrar/ocultar etiqueta} \},$
- $C62 = \$G\$28 \{ =0/1 \text{ Mostrar/ocultar componente en } z \text{ del primer vector} \},$
- $A64 = A55 + A57, \quad B64 = B55 + B57, \quad C64 = C55 + C57,$
- $C66 = -C57.$
- $\{ \text{Otros, línea} = 4, \text{ transparencia} = 0, \text{ cabeza del vector} = 1 \}.$

En la fórmula de Excel 10.11 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente y del primer vector **a**.

Fórmula en Excel 10.11 8

- **A69** =A60+1 { Automatización del número del vector},
- **B69** =SI(\$G\$24=0;B51&"_y = "&-B75;) {Mostrar/ocultar etiqueta},
- **C71** =\$G\$27 { =0/1 Mostrar/ocultar componente en y del primer vector},
- **A73** =A66+A64, **B73** =B66+B64, **C73** =C66+C64,
- **B75** =-B57,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.12 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente x del primer vector **a**.

Fórmula en Excel 10.12 9

- **A78** =A69+1 { Automatización del número del vector},
- **B78** =SI(\$G\$24=0;B51&"_x = "&-A84;){Mostrar/ocultar etiqueta},
- **C80** =\$G\$26 { =0/1 Mostrar/ocultar componente en x del primer vector},
- **A82** =A64+A66, **B82** =B64+B66, **C82** =C64+C66,
- **A84** =-A57,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.13 se muestran los valores que deben tener las celdas de las componentes de la proyección del vector **a**.

Fórmula en Excel 10.13 10

- **A87** =A78+1 { Automatización del número del vector},
- **C89** =\$G\$29 { =0/1 Mostrar/ocultar proyección del vector},
- **A91** =A55+A57, **B91** =B55+B57,
- **A93** =-A57, **B93** =-B57,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

Elaboración del vector a clonar

En la fórmula de Excel 10.14 se especifican los valores correspondientes a las celdas del vector **b**. La correcta configuración de este vector es fundamental para obtener resultados

precisos al clonar vectores e integrarlos en la suma. La clonación se realiza a partir del vector **b** y sus componentes, por lo que se debe prestar especial atención a las fórmulas absolutas y relativas.

Por ejemplo, en la celda **A100**, la fórmula `=SI($G$18=0;$A$10;A55+A57)` contiene una referencia absoluta en `$G$18`, ya que esta celda tiene un valor utilizado por todos los vectores, por lo que su dirección no debe modificarse al clonar el vector **b**. En cambio, las referencias `A55+A57` corresponden a la posición específica de cada vector (después del anterior), y deben actualizarse de manera relativa con cada clonación, es decir, no deben llevar el símbolo de dólar (\$).

Por ejemplo, al presionar **+OBJ**, la fórmula que se encuentra en la celda **A100** (`=SI($G$18=0;$A$10;A55+A57)`) se copiará a la nueva celda **A145**, pero la fórmula resultante será **A145** (`=SI($G$18=0;$A$10;A100+A102)`), en la cual las referencias absolutas permanecen constantes, mientras que las relativas se ajustan de acuerdo con la nueva ubicación. De manera similar, al presionar **+OBJ** nuevamente, la fórmula de la celda **A96** (`=A87+1`) se copiará a la celda **A141**, y las referencias relativas se actualizarán automáticamente a **A141** (`=A132+1`).

Este procedimiento permite a *ScienSolar* añadir más vectores a la suma con un solo clic e integrarlos de manera eficiente. Cada nuevo vector matemático añadido en *ScienSolar* está compuesto por cinco vectores: Uno que corresponde al vector original, tres para sus proyecciones sobre los ejes, y uno adicional para la proyección sobre el plano *XY*. Por lo tanto, las celdas que se clonarán abarcarán las filas 96 a 140, inclusive. Es necesario registrar esta información en la interfaz de *ScienSolar*, como sigue: **B3** = 96, **C3** = 140.

Fórmula en Excel 10.14 11

- **A96** =A87+1 { Automatización del número del vector},
- **B96** =CARACTER(96+D96),
- **A100** =SI(\$G\$18=0;\$A\$10;A55+A57),
- **B100** =SI(\$G\$18=0;\$B\$10;B55+B57),
- **C100** =SI(\$G\$18=0;\$C\$10;C55+C57)
- { Cambiar las coordenadas iniciales dependiendo del valor en **G18** },
- **A102** =1+D96, **B102** =2+D96
- { Fórmulas para dar coordenada dinámica a nuevos vectores },
- {Otros }.

En la fórmula de Excel 10.15 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente *z* del segundo vector **b**.

Fórmula en Excel 10.15 12

- =A96+1 { Automatización del número del vector },
- =SI(\$G\$24=0;B96&"_z ="&-C111;) {Mostrar/ocultar etiqueta},
- =\$G\$28 { =0/1 Mostrar/ocultar componente z del vector },
- =A100+A102,

 =B100+B102,

 =C100+C102,
- =-C102,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.16 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente y del segundo vector **b**.

Fórmula en Excel 10.16 13

- =A105+1 { Automatización del número del vector },
- =SI(\$G\$24=0;B96&"_y ="&-B120;) {Mostrar/ocultar etiqueta},
- =\$G\$27 { =0/1 Mostrar/ocultar componente y del vector },
- =A111+A109,

 =B111+B109,

 =C111+C109,
- =-B102,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.17 se muestran los valores que deben tener las celdas de la componente x del segundo vector **b**.

Fórmula en Excel 10.17 14

- =A114+1 { Automatización del número del vector },
- =SI(\$G\$24=0;B96&"_x ="&-A129;) {Mostrar/ocultar etiqueta},
- =\$G\$26 { =0/1 Mostrar/ocultar componente x del vector },
- =A109+A111,

 =B109+B111,

 =C109+C111,
- =-A102,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.18 se muestran los valores que deben tener las celdas de la proyección del segundo vector **b** sobre el plano XY.

Fórmula en Excel 10.18 15

- =A123+1 { Automatización del número del vector },
- =\$G\$29 { =0/1 Mostrar/ocultar proyección del vector },
- =A100+A102,

 =B100+B102,

- $A138 = -A102$, $B138 = -B102$,
- {Otros, línea = 4, transparencia = 0, cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.19 se detalla cómo se debe especificar el rango de filas a clonar cada vez que se añade un vector a la suma mediante el botón **+OBJ**. Para eliminar un vector, *ScienSolar* simplemente elimina el conjunto de filas correspondiente, comenzando desde la última fila añadida hacia arriba, a través del botón **-OBJ**.

Fórmula en Excel 10.19

- $B3 = 96$,
- $C3 = 140$.

Ejecución de la simulación

Para ejecutar la simulación, se debe modificar las coordenadas de cada uno de los vectores. Por ejemplo, para el primer vector, se ingresan las coordenadas $A57 = 1$, $B57 = 1$, $C57 = 0$; para el segundo vector, se pueden ingresar $A102 = -2$, $B102 = -2$, $C102 = -2$, y así sucesivamente, si se agregan más vectores a la suma. Para agregar o eliminar vectores, se utilizan los botones **+OBJ** y **-OBJ**, respectivamente. Posteriormente, oprima el botón **XYZ** para visualizar los resultados.

Si se desea rotar el sistema de coordenadas alrededor del eje z , se debe presionar el botón **>>C**. Además, para representar los vectores en forma de polígono, se debe colocar en la celda $G18 = 1$, mientras que para visualizar todos los vectores desde el origen, se debe colocar $G18 = 0$. Las coordenadas del vector resultante se muestran en las celdas $A12$, $B12$ y $C12$, mientras que su magnitud se visualiza en $E10$.

Otras configuraciones adicionales del modelo pueden visualizarse mediante las fórmulas de Excel 10.3.

10.3 Pirámide tridimensional

El objetivo de este modelo es enseñar a diseñar diversas figuras geométricas en tres dimensiones utilizando MS Excel, con el apoyo del paquete *ScienSolar*, el cual se puede descargar desde la página web www.S cienSolar.com. Este modelo viene preconfigurado y ya instalado en *ScienSolar*, por lo que, si el usuario ya posee el archivo con el paquete *ScienSolar*, no será necesario reconstruirlo desde cero. Este mismo principio aplica para los demás modelos explicados a lo largo de este libro.

Se construirá inicialmente una pirámide con tres caras, todas de igual tamaño, y con una altura h , con la opción de agregar o quitar caras. El usuario podrá modificar tanto la altura de la pirámide como las dimensiones de los lados de la base, así como su posición respecto al sistema de coordenadas. Para facilitar el análisis, se utilizarán parámetros dinámicos que permitirán simular el cambio consecutivo de la altura.

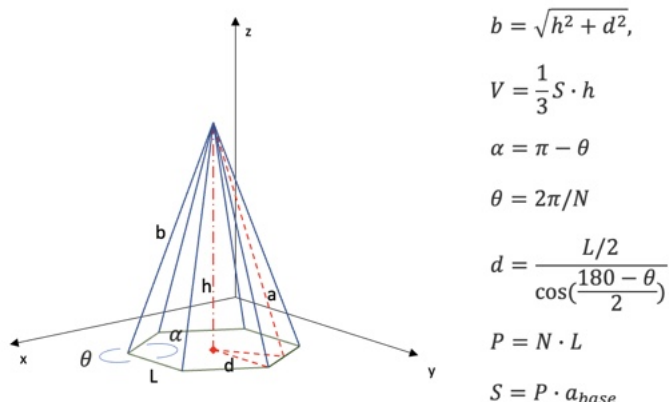


Figura 10.3.
Pirámide en tres dimensiones.
 Nota. Elaboración propia.

Fundamento matemático y construcción del modelo

Las fórmulas que definen la pirámide y sus parámetros se ilustran en la figura 10.3, y pueden ser consultadas en cualquier texto de geometría. La configuración se describe a continuación.

Fórmula en Excel 10.20

Configuración inicial del modelo.

- G12 =5 { = L - arista de la base },
- G14 =I5/(-I3*10)+9 { = h - altura de la pirámide },
- G16 =5 { = x }, G17 =5 { = y }, G18 =0 { = z. Posición de la pirámide },
- G22 =CONTAR.SI(D:D;"TRG_*") { = N. Permite contar el número de caras },
- G23 =RAIZ(G14^2+G30^2) { = b - arista vertical },
- G24 =RAIZ(A39^2+B39^2+C39^2) { = a - apotema },
- G25 =ABS(G33*G14/3) { = V - volumen },
- G28 =180-G29 { = α - ángulo interior entre cara y cara },
- G29 =360/G22 { = θ - ángulo exterior entre cara y cara },
- G30 =G12/(2*COS(RADIANES((180-G29)/2))) { = d - distancia vértice - centro de la base },
- G31 =RAIZ(A21^2+B21^2) { = a_{base} - apotema de la base },
- G32 =G22*G12 { = P - perímetro de la base },
- G33 =G32*G31/2 { = S - área de la base },
- D42 ="TRG_"&C42 { fórmula para etiquetar cada arista }.

Si observamos la figura 10.3, para cada cara adicional será necesario añadir dos aristas: una correspondiente a la base y otra vertical. Además, se deben incluir vectores para la altura, las dos apotemas y la distancia desde el vértice hasta el centro de la base. En total, se requerirán 10 vectores, los cuales deben ser incorporados y entrelazados mediante sus coordenadas iniciales y finales, con el fin de proporcionar una estructura compacta a la pirámide. Esto garantiza que, al modificar el parámetro de la altura, todas las aristas permanezcan interrelacionadas con dicho parámetro. De igual manera, si se agregan más caras, estas seguirán estando vinculadas correctamente. Para añadir estos vectores, se puede utilizar el botón **Nuevo vector**. En principio, la pirámide más simple sería un triángulo, para lo cual se necesitarían 8 vectores y no 10, por lo que se configurará el modelo con 8 vectores y al final, para obtener una pirámide volumétrica, simplemente añadiremos una nueva cara con el botón **+OBJ**. A continuación se expresan los ocho vectores y sus configuraciones.

En la fórmula de Excel 10.21 se muestran los valores que deben tener las celdas de la línea que representa la altura **h**.

Fórmula en Excel 10.21 1

- $A10 = G16$, $B10 = G17$, $C10 = G18 + G14$,
- $C12 = -G14$ { Altura de la pirámide (la línea punteada empieza desde arriba) },
- { Otros , línea = 8 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 5 }.

En la fórmula de Excel 10.22 se muestran los valores correspondientes a la apotema de la base, la cual está ligada con la línea **d** tiene el mismo origen que ésta y termina en la mitad de la arista **L**.

Fórmula en Excel 10.22 2

- $A19 = A28$, $B19 = B28$, $C19 = C28$,
- $A21 = A30 - A48/2$, $B21 = B30 - B48/2$, $C21 = C30$,
- { Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.23 se muestran los valores que deben tener las celdas de la línea **d**, relacionada con **h** y **b** como si fuese la resta entre estos dos vectores.

Fórmula en Excel 10.23 3

- $A28 = A10 + A12$, $B28 = B10 + B12$, $C28 = C10 + C12$,
- $A30 = -A12 - A57$, $B30 = -B12 - B57$, $C30 = -C12 - C57$,
- { Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.24 se muestran los valores que deben tener las celdas para representar la apotema **a**, la cual continúa después de la apotema de la base y se une con la altura como si fuese una resta de estos dos vectores.

Fórmula en Excel 10.24 4

- $A37 = A19 + A21$, $B37 = B19 + B21$, $C37 = C19 + C21$,
- $A39 = A12 - A21$, $B39 = B12 - B21$, $C39 = C10 - G18$,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.25 se muestran los valores que deben tener las celdas que representan la primera arista de la base **L**, la cual está relacionada con **d** y con **h** como si fuese la resta de estos dos vectores (en lo que se refiere a las componentes *x* y *y*).

Fórmula en Excel 10.25 5

- $C42 = (A42 - 1) / 2 - 1$,
- $A46 = A10 + A12 - G30 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}((180 - G29) / 2))$,
- $B46 = B10 + B12 + G30 * \text{COS}(\text{RADIANTES}((180 - G29) / 2))$,
- $C46 = C10 + C12$,
- $A48 = \$G\$12 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * C42))$
{= $L \sin \theta * n$, en donde *n* - número de la arista},
- $B48 = \$G\$12 * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * C42))$
{= $L \cos \theta * n$, en donde *n* - número de la arista},
- {Otros , transparencia = 0 , cabeza del vector = 0 }.

En la fórmula de Excel 10.26 se muestran los valores que deben tener las celdas de la primera arista vertical **b**.

Fórmula en Excel 10.26 6

- $A51 = A42 + 1$,
- $A55 = A46 + A48$, $B55 = B46 + B48$, $C55 = C46 + C48$,
- $A57 = \$G\$30 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * (C42 + 1) + (180 - \$G\$29) / 2))$
{= $d \sin(\theta * (n + 1) + (180 - \theta) / 2)$, *n* - número de la arista},
- $B57 = \$G\$30 * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * (C42 + 1) + (180 - \$G\$29) / 2))$
{= $d \cos(\theta * (n + 1) + (180 - \theta) / 2)$, *n* - número de la arista},
- $C57 = \$G\14 {= *h*},
- {Otros , transparencia = 0 , cabeza del vector = 0 }.

En la fórmula de Excel 10.27 se muestran los valores que deben tener las celdas la

segunda arista de la base **L**. A partir de aquí se clonarán las caras de la pirámide. Esta configuración es similar a la de la primera arista, excepto por la posición inicial.

Fórmula en Excel 10.27 7

- $A60 = A51 + 1,$
- $C60 = (A60 - 1) / 2 - 1,$
- $A64 = A48 + A46, B64 = B48 + B46, C64 = C48 + C46,$
- $A66 = \$G\$12 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * C60))$
 $\{ = L \sin \theta * n, \text{ en donde } n - \text{número de la arista} \},$
- $B66 = \$G\$12 * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * C60))$
 $\{ = L \cos \theta * n, \text{ en donde } n - \text{número de la arista} \},$
- $\{ \text{Otros, cabeza del vector} = 0 \}.$

En la fórmula de Excel 10.28 se muestran los valores que deben tener las celdas de la segunda arista vertical **b**.

Fórmula en Excel 10.28 8

- $A69 = A60 + 1,$
- $A73 = A64 + A66, B73 = B64 + B66, C73 = C64 + C66,$
- $A75 = \$G\$30 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * (C60 + 1) + (180 - \$G\$29) / 2))$
 $\{ = d \sin(\theta * (n + 1) + (180 - \theta) / 2), n - \text{número de la arista} \},$
- $B75 = \$G\$30 * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$29 * (C60 + 1) + (180 - \$G\$29) / 2))$
 $\{ = d \cos(\theta * (n + 1) + (180 - \theta) / 2), n - \text{número de la arista} \},$
- $C75 = \$G\$14 \{ = h \},$
- $\{ \text{Otros, transparencia} = 0, \text{ cabeza del vector} = 0 \}.$

En la fórmula de Excel 10.29 se especifica cómo definir el rango de filas a clonar cada vez que se agrega una cara mediante el botón **+OBJ**. Para eliminar una cara, *ScienSolar* simplemente suprime el conjunto de filas correspondiente, comenzando desde la última fila añadida y avanzando hacia arriba, utilizando el botón **-OBJ**.

Fórmula en Excel 10.29 ,

- $B3 = 60,$
- $C3 = 77.$

Con esta configuración se obtiene un triángulo en el espacio tridimensional. Para generar una pirámide con 3 caras, basta con presionar una vez el botón **+OBJ**. Para obtener una pirámide como la representada en la figura 10.3, se debe presionar el botón **+OBJ** cinco

Fórmulas matemáticas

Se denomina producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (se escribe $\vec{a} \times \vec{b}$) al vector $\vec{c}$, cuya magnitud es igual a $ab \sin \alpha$, que representa el área del paralelogramo construido sobre estos vectores. La dirección del vector $\vec{c}$ es perpendicular a ambos vectores y se rige por la regla de la mano derecha (ver figura 1.1). Si se conocen las longitudes de los vectores y el ángulo α entre ellos, se puede calcular el vector $\vec{c}$ mediante esta fórmula.

Por otro lado, si los vectores están expresados en la forma $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, el vector $\vec{c}$ se calcula en coordenadas cartesianas utilizando la siguiente fórmula:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (10.3)$$

Construcción del modelo

Los parámetros que ingresa el usuario son las coordenadas iniciales del primer vector y las coordenadas finales de los dos vectores. Estos parámetros se ingresan en las celdas de Excel:

- | |
|-----|
| A10 |
|-----|

B10

C10

 Coordenadas iniciales x_0, y_0, z_0 del primer vector.
- | |
|-----|
| A12 |
|-----|

B12

C12

 Coordenadas x, y, z del primer vector.
- | |
|-----|
| A21 |
|-----|

B21

C21

 Coordenadas x, y, z del segundo vector.

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no tienen fórmulas especiales, por lo que sus parámetros son los que arroja *ScienSolar* de manera predeterminada. Para el caso del vector resultante del producto vectorial, en la fórmula de Excel 10.30 se muestran los valores de las celdas para este vector $\vec{c}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.30 3

A28

 =A21+A19 {= $b_x + b_{x0}$ },

B28

 =B21+B19 {= $b_y + b_{y0}$ },

C28

 =C21+C19 {= $b_z + b_{z0}$ },

A30

 =B12*C21-C12*B21 {= $(a_y b_z - a_z b_y)$ },

B30

 =-A12*C21+C12*A21 {= $a_z b_x - a_x b_z$ },

C30

 =A12*B21-B12*A21 {= $a_x b_y - a_y b_x$ }, { , transparencia = 0 }.

Ejecución de la simulación

La simulación consiste en experimentar con diferentes valores para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y observar cómo se comporta el vector resultante en el espacio tridimensional. El usuario puede asignar valores a los vectores de manera que sean paralelos o perpendiculares, y estudiar el comportamiento del vector resultante.

Además, el usuario tiene la posibilidad de modificar las coordenadas de ambos vectores y visualizar el resultado al presionar cualquier botón de rotación.

Ejemplo 10.4.1 Dados los vectores $\vec{a} = (2, 0, 0)$ y $\vec{b} = (0, 0, 3)$, se pide hallar $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

SOLUCIÓN

Ingresa en $\boxed{A12}=2$, $\boxed{B12}=0$, $\boxed{C12}=0$, y en $\boxed{A21}=0$, $\boxed{B21}=0$, $\boxed{C21}=3$. Luego, presione $\boxed{XYZ}$. Observará las componentes del vector $\vec{c}$ en las celdas $\boxed{A30}=0$, $\boxed{B30}=-6$, $\boxed{C30}=0$. Experimente con otros valores para las coordenadas de los vectores, incluyendo valores negativos, decimales y múltiplos de un parámetro (en este último caso, el parámetro puede escribirse en una celda de la columna G). Presione $\boxed{XYZ}$ para ver los resultados. Use el botón $\boxed{>>C}$ para rotar el sistema de coordenadas, y utilice $\boxed{YZ}$, $\boxed{XZ}$ y $\boxed{XY}$ para ver los vectores desde diferentes planos. Observe cómo se comportan las coordenadas tanto del vector resultante como de los vectores multiplicadores.

Ejemplo 10.4.2 Dados los versores $\hat{i} = (1, 0, 0)$ y $\hat{j} = (0, 1, 0)$, se pide hallar $\hat{i} \times \hat{j}$.

SOLUCIÓN

Ingresa en $\boxed{A12}=1$, $\boxed{B12}=0$, $\boxed{C12}=0$, y en $\boxed{A21}=0$, $\boxed{B21}=1$, $\boxed{C21}=0$. Luego, presione $\boxed{XYZ}$. Observará las componentes del versor $\hat{k}$ en las celdas $\boxed{A30}=0$, $\boxed{B30}=0$, $\boxed{C30}=1$. Para ubicar los versores en el origen de coordenadas, coloque $\boxed{A10}=0$, $\boxed{B10}=0$, $\boxed{C10}=0$. Ingresa en $\boxed{E5}=40$ para aumentar la escala de los versores. Luego, presione $\boxed{>>C}$.

Ejemplo 10.4.3 Dados los versores $-\hat{i} = (-1, 0, 0)$ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$, se pide hallar $-\hat{i} \times \hat{k}$.

SOLUCIÓN

Ingresa en $\boxed{A12}=-1$, $\boxed{B12}=0$, $\boxed{C12}=0$, y en $\boxed{A21}=0$, $\boxed{B21}=0$, $\boxed{C21}=1$. Luego, presione $\boxed{XYZ}$. Observará las componentes del versor $\hat{j}$ en las celdas $\boxed{A30}=0$, $\boxed{B30}=1$, $\boxed{C30}=0$. Para ubicar los versores en el origen de coordenadas, coloque $\boxed{A10}=0$, $\boxed{B10}=0$, $\boxed{C10}=0$. Ingresa en $\boxed{E5}=40$ para aumentar la escala de los versores. Luego, presione $\boxed{>>C}$.

10.5 Vector unitario de un vector en el espacio tridimensional

El objetivo de este modelo es calcular y representar en el espacio el vector unitario $\hat{u}$ asociado a cualquier vector $\vec{a}$.

Para este modelo, es necesario agregar al sistema de coordenadas dos vectores: el vector $\vec{a}$ con sus respectivas coordenadas, que podrán ser cualquier valor, permitiendo que el vector tenga cualquier orientación en el espacio, y el vector unitario $\hat{u}$, que representará la dirección de $\vec{a}$ y tendrá una magnitud igual a 1.

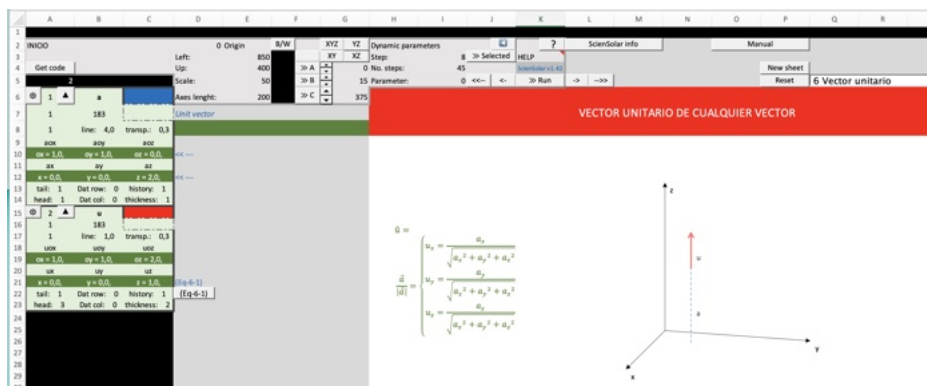


Figura 10.5.

Vector unitario de un eje orientado arbitrariamente en el espacio tridimensional.

Nota. Elaboración propia.

Primero, agregue un vector para representar $\vec{a}$. Este vector no requiere configuraciones especiales, por lo que los parámetros como longitud, coordenadas y apariencia pueden ser ajustados por el usuario según sus necesidades. Posteriormente, agregue otro vector para el vector unitario $\hat{u}$. En la fórmula de Excel 10.31 se detallan los valores de las celdas para el vector $\hat{u}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.31 2

- A19 =A12+A10 {= $u_{ox} = a_x + a_{ox}$ },
- B19 =B12+B10 {= $u_{oy} = a_y + a_{oy}$ },
- C19 =C12+C10 {= $u_{oz} = a_z + a_{oz}$ },
- A21 =A12/RAIZ(A12² + B12² + C12²) {= $u_x = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ },
- B21 =B12/RAIZ(A12² + B12² + C12²) {= $u_y = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ },
- C21 =C12/RAIZ(A12² + B12² + C12²) {= $u_z = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ }.

Como podemos observar, las coordenadas del vector unitario $\hat{u}$ son simplemente las mismas coordenadas del vector $\vec{a}$, pero divididas por su magnitud. Esto se expresa mediante la fórmula:

$$\hat{u} = \frac{\vec{a}}{a},$$

donde a es la magnitud de $\vec{a}$. En el modelo de ScienSolar, el botón ubicado en D22 permite visualizar directamente en el modelo las ecuaciones correspondientes para las componentes del vector unitario.

10.6 Rotación alrededor de un vector unitario

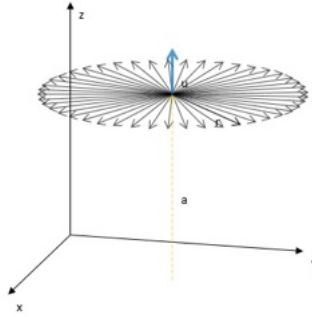


Figura 10.6.

Rotación alrededor de un vector unitario

Nota. Elaboración propia.

El objetivo de este modelo es simular la rotación de un vector alrededor de un eje, o más precisamente, alrededor de un vector unitario que represente dicho eje. La rotación se llevará a cabo de manera que el vector rotado permanezca siempre perpendicular al eje y siga una trayectoria radial, como se ilustra en la figura 10.6. El usuario podrá modificar la orientación del eje de rotación en el espacio tridimensional mediante un vector $\vec{a}$ que sea paralelo a dicho eje.

Fundamentos matemáticos

La ecuación que utilizaremos será la ecuación (2.7):

$$W_u(\theta)\mathbf{r}_P = \mathbf{r} = \mathbf{r}_P + \hat{\mathbf{u}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P)(1 - \cos \theta) + (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}_P) \sin \theta,$$

en donde $\mathbf{r}_P$ en este caso el vector que queremos rotar. Al llevar a cabo las operaciones del producto cruz entre sus componentes, obtenemos las componentes del vector ya rotado $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} x &= x_P + (1 - \cos \theta)(u_y u_x y_P - u_y u_y x_P + u_z u_x z_P - u_z u_z x_P) \\ &\quad + \sin \theta(u_y z_P - u_z y_P), \\ y &= y_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_x y_P + u_x u_y x_P + u_z u_y z_P - u_z u_z y_P) \\ &\quad + \sin \theta(-u_x z_P + u_z x_P), \\ z &= z_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_x z_P + u_x u_z x_P - u_y u_y z_P + u_y u_z y_P) \\ &\quad + \sin \theta(u_x y_P + u_y x_P). \end{aligned} \tag{10.4}$$

Construcción del modelo

Para construir el modelo, necesitamos un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ en la dirección del eje de rotación, así como las coordenadas del vector que queremos rotar, $\mathbf{r}_P$. Este último es un vector auxiliar con coordenadas iniciales $\mathbf{r}_P$, al cual se le aplicará la transformación de rotación en un ángulo determinado θ , resultando en un nuevo vector $\mathbf{r}$. Este vector auxiliar será introducido en el modelo y se mantendrá oculto durante la simulación. Además,

para representar el eje de rotación, se introducirá el vector **a**. Por lo tanto, necesitaremos cuatro vectores en total.

Partiremos del modelo de 10.5, y le agregaremos dos vectores adicionales: el vector $\mathbf{r}_P$, que representa el vector a rotar, y el vector $\mathbf{r}$, que será el resultado de la rotación de $\mathbf{r}_P$ en un ángulo θ . Además, θ será un parámetro variable que cambiará con el tiempo para permitir la visualización de la simulación a través de distintos ángulos de rotación.

El vector **a** tiene coordenadas arbitrarias y determina tanto la posición como la orientación del eje de rotación en el espacio.

Los parámetros que ingresa el usuario incluyen el ángulo de rotación (θ), que puede ajustarse de forma consecutiva, las coordenadas iniciales y finales del vector **a**, que representa el eje de rotación, y las coordenadas del vector $\mathbf{r}_P$. Además, se introducirá en las celdas correspondientes las expresiones matemáticas para el seno y el coseno de θ , que permitirán realizar los cálculos de la rotación. Estos parámetros se encuentran organizados en las celdas del modelo como se muestra en la configuración a continuación.

Fórmula en Excel 10.32 1

- I5 = θ . Ángulo de rotación del vector, que se configura en el contador para cambiarlo consecutivamente en los pasos indicados en la celda I3.
- A10 B10 C10 { Coordenadas iniciales del vector **a**. },
- A12 B12 C12 { Coordenadas del vector **a**. },
- A30 B30 C30 { Coordenadas x_P, y_P, z_P del vector $\mathbf{r}_P$. },
- H6 =SENO(RADIANTES(I5)).
- I6 =1-COS(RADIANTES(I5)). { funciones que aparecen en la ecuación }.

En la fórmula de Excel 10.33, se muestran los valores de las celdas correspondientes para el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ y sus equivalentes en notación matemática. Estas celdas permiten calcular la dirección del eje de rotación y aplicar las transformaciones necesarias para simular la rotación del vector $\mathbf{r}_P$ alrededor del eje representado por $\hat{\mathbf{u}}$.

Fórmula en Excel 10.33 2

- A19 =A12+A10 { $= a_x + a_{ox}$ },
- B19 =B12+B10 { $= a_y + a_{oy}$ },
- C19 =C12+C10 { $= a_z + a_{oz}$ },
- A21 = $A12/RAIZ(A12^2 + B12^2 + C12^2)$ { $= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ },
- B21 = $B12/RAIZ(A12^2 + B12^2 + C12^2)$ { $= \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ },
- C21 = $C12/RAIZ(A12^2 + B12^2 + C12^2)$ { $= \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ }.

En la fórmula de Excel 10.34 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{r}_P$ y sus equivalentes en notación matemática. Las coordenadas finales la determina el usuario y las iniciales se muestran en la fórmula, indicando que el vector inicia donde termina el vector $\mathbf{a}$ (esta posición inicial también puede ser cambiada por el usuario).

Fórmula en Excel 10.34 3

- $\boxed{\text{A28}} = \text{A10} + \text{A12} \{= a_{ox} + a_x\},$
- $\boxed{\text{B28}} = \text{B10} + \text{B12} \{= a_{oy} + a_y\},$
- $\boxed{\text{C28}} = \text{C10} + \text{C12} \{= a_{oz} + a_z\},$
- { Otros , transparencia = 1 , cabeza del vector = 0 }.

En la fórmula de Excel 10.35, se muestran los valores de las celdas correspondientes para el vector $\mathbf{r}$ y su equivalencia en notación matemática. Esta fórmula permite calcular el vector resultante después de la rotación de $\mathbf{r}_P$ alrededor del eje definido por el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$, utilizando el ángulo de rotación θ y las transformaciones descritas previamente.

Fórmula en Excel 10.35 4

- $\boxed{\text{A37}} = \text{A28} \{= a_{ox} + a_x\},$
- $\boxed{\text{B37}} = \text{B28} \{= a_{oy} + a_y\},$
- $\boxed{\text{C37}} = \text{C28} \{= a_{oz} + a_z\},$
- $\boxed{\text{A39}} = \text{A30} + \text{I6} * (\text{B21} * \text{A21} * \text{B30} - \text{B21} * \text{B21} * \text{A30} + \text{C21} * \text{A21} * \text{C30} - \text{C21} * \text{C21} * \text{A30}) + \text{H6} * (\text{B21} * \text{C30} - \text{C21} * \text{B30})$
 $\{= x_P + (1 - \cos \theta)(u_y u_{yx} P - u_y u_{yx} P + u_z u_{xz} P - u_z u_{xz} P) + \sin \theta(u_{yz} P - u_{yz} P)\},$
- $\boxed{\text{B39}} = \text{B30} + \text{I6} * (-\text{A21} * \text{A21} * \text{B30} + \text{A21} * \text{B21} * \text{A30} + \text{C21} * \text{B21} * \text{C30} - \text{C21} * \text{C21} * \text{B30}) + \text{H6} * (-\text{A21} * \text{C30} + \text{C21} * \text{A30})$
 $\{= y_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_{xy} P + u_x u_{yx} P + u_z u_{yz} P - u_z u_{yz} P) + \sin \theta(-u_{xz} P + u_{xz} P)\},$
- $\boxed{\text{C39}} = \text{C30} + \text{I6} * (-\text{A21} * \text{A21} * \text{C30} + \text{A21} * \text{C21} * \text{A30} - \text{B21} * \text{B21} * \text{C30} + \text{B21} * \text{C21} * \text{B30}) + \text{H6} * (\text{A21} * \text{B30} - \text{B21} * \text{A30})$
 $\{= z_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_{xz} P + u_x u_{xz} P - u_y u_{yz} P + u_y u_{yz} P) + \sin \theta(u_{xy} P + u_{xy} P)\}.$

Ejemplo 10.6.1 Simular una partícula puntual rotando alrededor del eje y y con un radio $r = 5$ y origen en $y_0 = 4$.

SOLUCIÓN

Para realizar esta simulación, partimos del modelo actual y modificamos la orientación del eje de rotación y el radio. Primero, ubique el origen del sistema de coordenadas en $\boxed{\text{A10}} = 0$, $\boxed{\text{B10}} = 0$, y $\boxed{\text{C10}} = 0$. Luego, el centro de rotación

debe ubicarse en $A12=0$, $B12=4$, $C12=0$ y el radio de rotación se define en $G11=5$, $G12=0$, $G13=0$. Al oprimir el botón $\gg$, observará la rotación de la partícula alrededor del eje y.

Para agregar la partícula, oprima el botón **Nuevo vector**. En la ventana emergente, ingrese el nombre "Q" para el nuevo vector, luego en $B43=146$ para convertir el vector en un punto. Cambie el color del vector a rojo brillante y ajuste el tamaño de la partícula en $C50=8$. Finalmente, para ocultar el radio, ajuste $C35=1$. Al oprimir $\gg$, podrá observar la partícula rotando alrededor del eje y (**Figura 1**).

Pruebe hacerla rotar desde diferentes planos. Para visualizar la trayectoria de la partícula, oprima $\otimes$ ubicado en $A33$ y oprima $\gg$. Para borrar la trayectoria vuelva a oprimir $\otimes$.

En el modelo de *ScienSolar* se puede oprimir el botón ubicado en D40 para ver las ecuaciones de las componentes del vector $\vec{r}$.

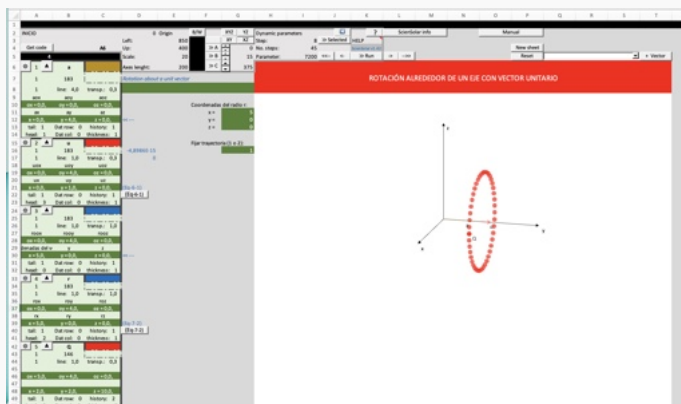


Figura 10.7

Simulación de una partícula rotando alrededor del eje y.

Nota. Elaboración propia.

10.7 Rotación compuesta

A partir de la rotación alrededor de un vector unitario, es posible construir el modelo de **rotación compuesta**, donde varios vectores rotan a diferentes frecuencias y están localizados uno tras otro. En el archivo de *ScienSolar*, este ejemplo se presenta como un modelo nuevo denominado *Rotación compuesta*. Sin embargo, en este caso lo abordamos como una aplicación de las ecuaciones descritas previamente, sin repetir la teoría matemática detallada.

Construcción del modelo

Para crear este modelo a partir del que ya hemos construido, debemos agregar más vectores y adaptar las ecuaciones. Para facilitar este proceso, utilizaremos algunas propiedades de Excel. A continuación, se describen los pasos necesarios:

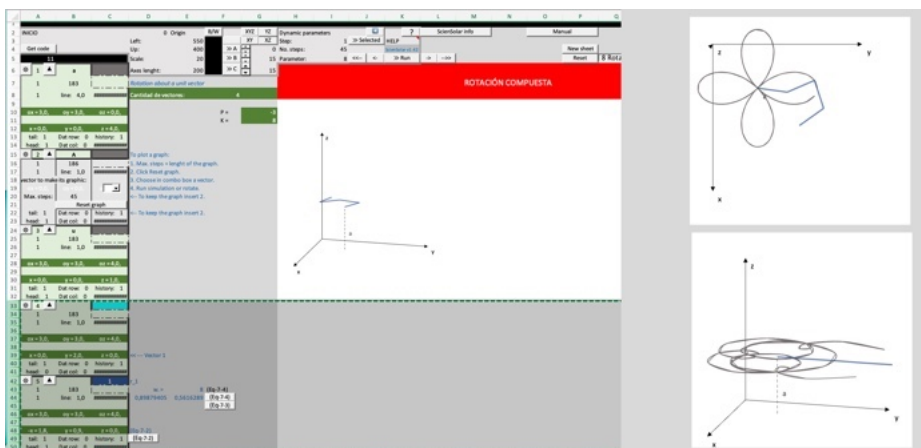


Figura 10.8.

Rotación compuesta de varios vectores.

Nota. Elaboración propia.

1. **Traer el modelo a la hoja de cálculo.** Cargar a la hoja el modelo de **rotación alrededor de un vector unitario** (10.6).
2. **Uso del módulo de trayectorias.** Para realizar un análisis más detallado del modelo, agregaremos el módulo para elaborar trayectorias. Primero, seleccionaremos y cortaremos las celdas de A15-D41, luego las pegamos a partir de la celda A24. A continuación, en la hoja seleccionamos de la lista de proyectos el módulo **Nueva hoja 15 TRAJECTORY** y lo agregamos al sistema de coordenadas, asegurándonos de que quede ubicado justo después del primer vector. Actualizamos la numeración de los vectores: $A24 = A15 + 1$, $A33 = 24 + 1$, $A42 = A33 + 1$, $C42 = 1$. Modificamos el color $C15$ color negro y $C33$ amarillo.
3. **Agregar vectores y adaptar las ecuaciones.** Vamos a agregar dos nuevos vectores al modelo. Dado que a estos nuevos vectores les aplicaremos las ecuaciones descritas en la sección anterior (10.4), podemos reutilizar el vector unitario que ya existe en el modelo. Para ello, modificaremos algunas direcciones de las fórmulas en la hoja de cálculo, específicamente aquellas que se refieren a las coordenadas del vector unitario, convirtiéndolas en fórmulas absolutas mediante el símbolo $\$$. Esto nos permitirá copiar las fórmulas sin que se modifiquen las celdas objetivo correspondientes al vector unitario.

En las fórmulas de Excel siguientes se ilustra cómo podemos crear un modelo de rotación compuesta en el que varios vectores giran alrededor de un eje, y cada uno con su propia frecuencia de rotación. Utilizando el vector unitario y las fórmulas descritas anteriormente, podemos construir un modelo que simula rotaciones complejas de múltiples vectores. Las trayectorias generadas nos permiten analizar y visualizar el movimiento de manera clara y detallada. En conclusión, tendremos en el modelo 6 vectores y el módulo TRAJECTORY configurados como se muestra a continuación.

Fórmula en Excel 10.36

Configuraciones generales:

- G10 =2 { = P - primer parámetro },
- G11 =8 { = K - segundo parámetro },
- G13 =CONTAR.SI(D:D;"r_*") { = Cantidad de vectores },
- D39 ="Vector " &C42 { fórmula para indicar celdas de ingreso de coordenadas },
- D42 ="r_"&C42 { r_n },
- E43 =\$G\$11*POTENCIA(\$G\$10;C42-1) { = $w = KP^{n-1}$ - frecuencia de rotación del primer vector, n - número del vector },
- D44 =SENO(RADIANES(E43*\$I\$5)) { = $\sin wt$ },
- E44 =1-COS(RADIANES(E43*\$I\$5)) { = $1 - \cos wt$ },
- D57 =" Vector " &C60 { fórmula para indicar celdas de ingreso de coordenadas },
- D60 ="r_"&C60 { r_n },
- E61 =\$G\$11*POTENCIA(\$G\$10;C60-1) { = $w = KP^{n-1}$ - frecuencia de rotación del segundo vector },
- D62 =SENO(RADIANES(E61*\$I\$5)) { = $\sin wt$ },
- E62 =1-COS(RADIANES(E61*\$I\$5)) { = $1 - \cos wt$ }.

En la fórmula de Excel 10.37 se establecen los parámetros del eje de rotación **a**.

Fórmula en Excel 10.37

1

Posición e inclinación del sistema

- A10 =3, B10 =3, C10 =0,
- A12 =0, B12 =0, C12 =4,
- {Otros , línea = 4 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.38 se muestran los parámetros del vector unitario **u**.

Fórmula en Excel 10.38

3

- A24 =A15+1, A28 =A12+A10, B28 =B12+B10, C28 =C12+C10,
- A30 =A12/RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2) { = $\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ },
- B30 =B12/RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2) { = $\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ },
- C30 =C12/RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2) { = $\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ }.
- {Otros , transparencia = 1 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.39 se observa la configuración para el primer radio a rotar (oculto).

Fórmula en Excel 10.39 4

- $A33 = (A24+1)*\$A\$6,$
- $A37 = A10+A12 \{ = a_{ox} + a_x \},$
- $B37 = B10+B12 \{ = a_{oy} + a_y \},$
- $C37 = C10+C12 \{ = a_{oz} + a_z \},$
- $A39 = 0, B39 = 2, C39 = 0 \{ \text{coordenadas del radio, introducidas por el usuario} \}.$
- $\{ \text{Otros, transparencia} = 1, \text{cabeza del vector} = 0 \}.$

En la fórmula de Excel 10.40 se muestran los valores que deben tener las celdas del primer radio **r_1** después de rotarlo de acuerdo a las ecuaciones dadas y con las modificaciones de las direcciones absolutas (con el símbolo \$), las cuales son las mismas para todos los vectores y las relativas (sin el símbolo \$) las cuales cambian para cada vector.

Fórmula en Excel 10.40 5

- $A42 = A24+2, A46 = A37, B46 = B37, C46 = C37,$
- $A48 = A39+E44*(\$B\$30*\$A\$30*B39-\$B\$30*\$B\$30*A39+\$C\$30*\$A\$30*C39-\$C\$30*\$C\$30*A39)+D44*(\$B\$30*C39-\$C\$30*B39)$
 $\{ = x_P + (1 - \cos \theta)(u_y u_{xP} - u_y u_{yP} + u_z u_{xP} - u_z u_{zP}) + \sin \theta(u_y z_P - u_z y_P) \},$
- $B48 = B39+E44*(-\$A\$30*\$A\$30*B39+\$A\$30*\$B\$30*A39+\$C\$30*\$B\$30*C39-\$C\$30*\$C\$30*B39)+D44*(-\$A\$30*C39+\$C\$30*A39)$
 $\{ = y_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_{xP} + u_x u_{yP} + u_z u_{yP} - u_z u_{zP}) + \sin \theta(-u_x z_P + u_z x_P) \},$
- $C48 = C39+E44*(-\$A\$30*\$A\$30*C39+\$A\$30*\$C\$30*A39-\$B\$30*\$B\$30*C39+\$B\$30*\$C\$30*B39)+D44*(\$A\$30*B39-\$B\$30*A39)$
 $\{ = z_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_{xP} + u_x u_{zP} - u_y u_{yP} + u_y u_{zP}) + \sin \theta(u_x y_P + u_y x_P) \}.$
- $\{ \text{Otros, cabeza del vector} = 1 \}.$

En la fórmula de Excel 10.41 se observa la configuración para el segundo radio a rotar (oculto). A partir de este vector se clonarán los demás vectores que se agreguen al modelo por medio del botón **+OBJ**.

Fórmula en Excel 10.41 6

- $A51 = (A42+1)*\$A\$6, A55 = A37+A39, B55 = B37+B39, C55 = C37+C39,$
- $A57 = 0, B57 = 2, C57 = 0 \{ \text{coordenadas del radio, introducidas por el usuario} \}.$
- $\{ \text{Otros, transparencia} = 1, \text{cabeza del vector} = 0 \}.$

En la fórmula de Excel 10.42 se muestran los valores que deben tener las celdas del segundo radio **r_2** después de rotarlo de acuerdo a las ecuaciones dadas y con las modificaciones de las direcciones absolutas (con el símbolo \$), las cuales son las mismas para todos los vectores y las relativas (sin el símbolo \$) las cuales cambian para cada vector.

Fórmula en Excel 10.42

- **A60** =A42+2, **C60** =C42+1, **B61** =B43,
- **A64** =A46+A48, **B64** =B46+B48, **C64** =C46+C48,
- **A66** =A57+E62*(\$B\$30*\$A\$30*B57-\$B\$30*\$B\$30*A57+\$C\$30*\$A\$30*C57-\$C\$30*\$C\$30*A57)+D62*(\$B\$30*C57-\$C\$30*B57)
 $\{ = x_P + (1 - \cos \theta)(u_y u_x y_P - u_y u_y x_P + u_z u_x z_P - u_z u_z x_P) + \sin \theta(u_y z_P - u_z y_P) \},$
- **B66** =B57+E62*(-\$A\$30*\$A\$30*B57+\$A\$30*\$B\$30*A57+\$C\$30*\$B\$30*C57-\$C\$30*\$C\$30*B57)+D62*(-\$A\$30*C57+\$C\$30*A57)
 $\{ = y_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_x y_P + u_x u_y x_P + u_z u_y z_P - u_z u_z y_P) + \sin \theta(-u_x z_P + u_z x_P) \},$
- **C66** =C57+E62*(-\$A\$30*\$A\$30*C57+\$A\$30*\$C\$30*A57-\$B\$30*\$B\$30*C57+\$B\$30*\$C\$30*B57)+D62*(\$A\$30*B57-\$B\$30*A57)
 $\{ = z_P + (1 - \cos \theta)(-u_x u_x z_P + u_x u_z x_P - u_y u_y z_P + u_y u_z y_P) + \sin \theta(u_x y_P + u_y x_P) \}.$
- {Otros , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 10.42 se muestra la forma en que se deben indicar las filas a clonar para agregar nuevos vectores al sistema de rotación por medio del botón **+OBJ** o eliminarlos con el botón **-OBJ**.

Fórmula en Excel 10.43

- **B3** =51 { primera fila },
- **C3** =68 { última fila }.

Como se observa, se modificaron las fórmulas en las celdas **E43**, **D44** y **E44**. En esencia, se reemplazó la expresión $\theta = \omega t$, donde $\omega = K P^{n-1}$ y n representa el número del vector. Es importante destacar que la elección de esta expresión para ω fue realizada de manera arbitraria, y el lector puede asignar diferentes funciones para modelar el comportamiento de la frecuencia de rotación ω de cada vector. Las celdas **G10** y **G11** se destinan a la introducción de los parámetros K y P , respectivamente, mientras que la celda **I5** es la encargada de controlar el tiempo.

Una vez realizadas estas modificaciones, podemos asegurar que al presionar el botón **+OBJ**, se copiarán las filas completas desde la 51 hasta la 68 y se pegarán al final del modelo, añadiendo así nuevos vectores.

Por ejemplo, al introducir **G10**=1 y **G11**=8 y presionar el botón **>>**, observará que todos los vectores giran alrededor del eje como si fueran un único vector. Posteriormente, al

cambiar $G10$ a -1 y $G11$ a 8 y presionar nuevamente $>>$, verá un comportamiento similar al de un resorte que se estira y se contrae.

Si establece $G10 = -3$ y $G11 = 8$, los objetos presentarán un movimiento más aleatorio. Con estos valores, puede introducir $B20 = 45$, presionar el botón en $B22$ (Reset Graph) y seleccionar el vector 7 desde la lista para dibujar la trayectoria de este vector. Al presionar $>>$, se trazará la trayectoria del vector más extremo. Para eliminar la gráfica, basta con presionar nuevamente el botón Reset graph y luego $>>$. Al presionar dos veces el botón $+OBJ$ y repetir el mismo procedimiento, podrá trazar la trayectoria del vector 11. En la figura 10.8, en la parte izquierda, se observa la interfaz del modelo, mientras que a la derecha se muestran las imágenes generadas por la herramienta TRAJECTORY para los vectores 7 (arriba) y 11 (abajo).

Es posible añadir más vectores al modelo presionando el botón $+OBJ$ y eliminarlos mediante el botón $-OBJ$.

10.8 Rotación tangencial alrededor de un vector unitario

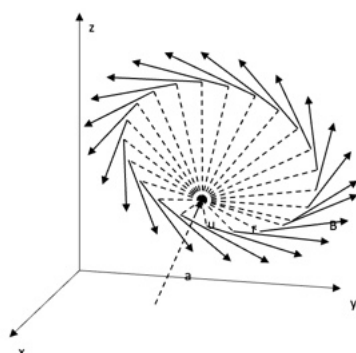


Figura 10.9.

Rotación tangencial alrededor de un vector unitario

Nota. Elaboración propia.

El objetivo de este modelo es simular la rotación tangencial de un vector alrededor de un eje y un radio dados.

La construcción de este modelo sigue el mismo enfoque del modelo 10.6, con la diferencia de que, en este caso, se añade un vector adicional $\mathbf{B}$, tangente a la trayectoria de rotación. Para que esta relación sea válida, se debe cumplir: $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}$, donde $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector unitario que define la dirección del eje de rotación y $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto de la trayectoria.

Una vez que hemos estudiado los modelos 10.6 y 10.4, la construcción de este modelo se vuelve sencilla. Solo es necesario añadir al modelo 10.6 el vector $\mathbf{B}$ (como el vector

número 5), cuyas componentes se obtienen mediante el producto vectorial entre el vector $\mathbf{r}$ y el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$.

Fórmula en Excel 10.44 5

A46 =A39+A37 {= $x + x_0$ }, B46 =B39+B37 {= $y + y_0$ }, C46 =C39+C37 {= $z + z_0$ },
 A48 =B21*C39-C21*B39 {= $u_y z - u_z y$ }, B48 = -A21*C39+C21*A39 {= $-u_x z + u_z x$ },
 C48 =A21*B39-B21*A39 {= $u_x y - u_y x$ }, { , transparencia = 0 , cabeza del vector = 2 }. ■

Ejecución de la simulación

En las celdas A10, B10, C10 se ingresan los valores correspondientes al origen del vector $\mathbf{a}$, mientras que en las celdas A12, B12, C12 se definen su tamaño y orientación, lo cual establece el origen del vector de rotación. En las celdas A30, B30, C30 se especifica la magnitud del vector $\mathbf{r}$ y su orientación con respecto al vector unitario. Al presionar cualquier botón de rotación, como por ejemplo el botón XYZ, se podrá observar la posición del vector. Utilizando los botones YZ, XY y XZ, se puede explorar el modelo desde diferentes perspectivas.

Además, con los botones >>A, >>B y >>C, es posible simular la rotación de los ejes cartesianos alrededor de los tres ejes principales.

Al oprimir el botón >>, se visualizará la rotación del vector alrededor del vector unitario, mientras el ángulo θ cambia dinámicamente. El salto de este ángulo se puede ajustar modificando el valor en la celda I3. De igual forma, al seleccionar un parámetro diferente a θ , y luego presionar el botón >> para la celda seleccionada, este parámetro cambiará de acuerdo con los valores indicados en la celda I3, permitiendo la simulación de diferentes variaciones en el modelo.

10.9 Coordenadas cilíndricas en cartesianas

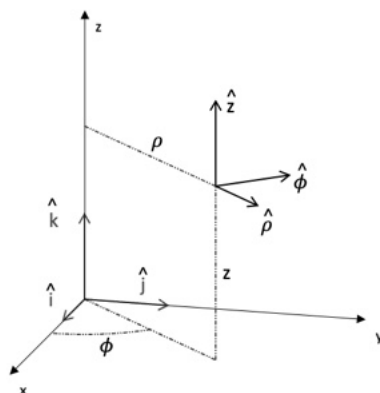
El objetivo de este modelo es representar la conversión entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas, así como los vectores base o versores asociados a dicho sistema de coordenadas.

Las diferentes representaciones de coordenadas se emplean con el fin de simplificar problemas matemáticos y físicos que presentan simetría en alguna de sus dimensiones. Por ejemplo, el campo eléctrico generado por una carga puntual posee simetría esférica, lo que hace que su estudio y representación resulten más convenientes en coordenadas esféricas. En contraste, el campo eléctrico de una línea infinita y cargada exhibe simetría cilíndrica, siendo las coordenadas cilíndricas las más adecuadas para su análisis.

Ecuaciones matemáticas

El sistema de coordenadas cilíndricas es un sistema ortogonal que utiliza tres vectores unitarios, denotados como $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$, los cuales sirven como vectores base del sistema. Estas coordenadas pueden expresarse en términos de las coordenadas cartesianas mediante las siguientes relaciones:

$$\hat{\rho} = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi, \quad \hat{\phi} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi, \quad \hat{z} = \hat{k}.$$

**Figura 10.10.**

Vectores de las coordenadas cilíndricas en coordenadas cartesianas.

Nota. Elaboración propia.

Estas fórmulas se deducen fácilmente observando la figura 10.10, donde podemos trasladar cada uno de los vectores base del sistema cilíndrico al origen de coordenadas cartesianas y descomponerlos en sus componentes x y y .

Para convertir un punto dado en el sistema de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas, es necesario proyectar dicho punto sobre los ejes de coordenadas a través del plano XY , y establecer la relación entre las distancias que representa el punto en ambas representaciones, cilíndricas y cartesianas. Esta relación se puede obtener mediante los catetos de los triángulos rectángulos formados en el plano XY .

A partir de la figura, del triángulo rectángulo formado por el radio ρ , las coordenadas x , y y el ángulo ϕ , se obtiene la siguiente conversión a coordenadas cartesianas:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z.$$

Para realizar la conversión inversa, es decir, de coordenadas cartesianas a cilíndricas, nuevamente utilizamos el triángulo rectángulo de la figura, lo que nos lleva a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Las expresiones para el ángulo ϕ son equivalentes, aunque es importante utilizarlas de forma adecuada según el cuadrante en el que se encuentre el punto, con el fin de evitar resultados incorrectos debido a posibles ambigüedades en el uso de coordenadas

negativas. En el modelo se podrá observar cómo se aplican estas ecuaciones para obtener resultados precisos.

Construcción del modelo

Para representar las coordenadas cilíndricas en el espacio cartesiano, necesitaremos tres vectores: Uno para cada uno de los versores del sistema cilíndrico ($\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$), así como un vector adicional que permitirá trasladar el origen del sistema cilíndrico a cualquier punto del espacio cartesiano. Este último vector, denominado ρ , representará la distancia desde el eje z hasta el punto en el cual se ubicará el sistema de versores ($\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$).

Los demás vectores presentes en el modelo son auxiliares y se utilizan para proyectar el punto sobre las coordenadas cartesianas. Estos vectores no requieren un análisis exhaustivo en este momento.

El usuario podrá ingresar los valores de las coordenadas cilíndricas o cartesianas, y observar la posición del punto correspondiente en el espacio cartesiano. Los valores iniciales se ingresarán en las siguientes celdas:

En la fórmula de Excel 10.45 se detallan las celdas de configuración complementaria, donde el usuario podrá introducir los parámetros iniciales. Para pasar de un modo al otro (cartesianas a cilíndricas o viceversa) el usuario deberá limpiar las celdas del modo opuesto.

Fórmula en Excel 10.45

- E12 =2 {= ρ - ingresado por el usuario, modo de cilíndricas a cartesianas },
- E13 =I5 {= ϕ - ingresado por el usuario, modo de cilíndricas a cartesianas },
- E14 =2 {= z - ingresado por el usuario, modo de cilíndricas a cartesianas },
- E19 =2 {= x - ingresado por el usuario, modo de cartesianas a cilíndricas },
- E20 =I5 {= y - ingresado por el usuario, modo de cartesianas a cilíndricas },
- E21 =2 {= z - ingresado por el usuario, modo de cartesianas a cilíndricas },
- G12 =D35*A12 {= $x = \rho \cos \phi$ - resultado },
- G13 =D35*B12 {= $y = \rho \sin \phi$ - resultado },
- G14 =E14 {= z - resultado },
- G19 =SI(E19="";E12;RAIZ(E19^2+E20^2)) {= ρ - resultado },
- G20 =SI(E19="";E13;GRADOS(SI(Y(E19>0;E20<0);2*PI()+ASENO(E20/G19);SI(Y(E19<=0;E20>=0);ACOS(E19/G19);SI(Y(E19<0;E20<0);ATAN(E20/E19)+PI();SI(E19=0;2*PI()-ACOS(E19/G19);ATAN(E20/E19))))))
{= $\phi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ - resultado },
- G21 =SI(E19="";E14;E21) {= z - resultado },
- G26 =0 {= $\rho = 0, r = 1$ - mostrar uno de los vectores },
- G30 =0 {= $A_o x$ - desplazamiento del origen },
- D35 =SI(E12="";G19;SI(E19="";E12)) { escoge ρ de acuerdo al modo },
- G35 =1 {= ρ - fijar la trayectoria },
- D36 =SI(E12="";G20;SI(E19="";E13)) { escoge ϕ de acuerdo al modo },

- | |
|-----|
| G36 |
|-----|

 =1 { $= \phi$ - fijar la trayectoria },
- | |
|-----|
| D37 |
|-----|

 =SI(E12="";G21;SI(E19="";G14)) { escoge z de acuerdo al modo },
- | |
|-----|
| G37 |
|-----|

 =1 { $= z$ - fijar la trayectoria },
- | |
|-----|
| G41 |
|-----|

 =0 { $= SI = 0, NO = 1$ - mostrar las proyecciones }.

Configuraciones para los 9 vectores (el número 7 corresponde al módulo TRAJECTORY):

Fórmula en Excel 10.46 1

Configuración de las celdas que corresponden al versor $\hat{\rho}$:

- | |
|-----|
| A10 |
|-----|

 =A39+A37 { $= A_x + A_{x0}$ },
- | |
|-----|
| B10 |
|-----|

 =B39+B37 { $= A_y + A_{y0}$ },
- | |
|-----|
| C10 |
|-----|

 =C39+C37 { $= A_z + A_{z0}$ },
- | |
|-----|
| E10 |
|-----|

 =I5 { $= \phi$ },
- | |
|-----|
| A12 |
|-----|

 =COS(RADIANS(E10)) { $= \cos \phi$ },
- | |
|-----|
| B12 |
|-----|

 =SIN(RADIANS(E10)) { $= \sin \phi$ },
- | |
|-----|
| C13 |
|-----|

 =G35 { fijar trayectoria }.

Fórmula en Excel 10.47 2

Configuración de las celdas que corresponden al versor $\hat{\phi}$:

- | |
|-----|
| A19 |
|-----|

 =A10 { $= A_x + A_{x0}$ },
- | |
|-----|
| B19 |
|-----|

 =B10 { $= A_y + A_{y0}$ },
- | |
|-----|
| C19 |
|-----|

 =C10 { $= A_z + A_{z0}$ },
- | |
|-----|
| A21 |
|-----|

 =-SIN(RADIANS(E10)) { $= -\sin \phi$ },
- | |
|-----|
| B21 |
|-----|

 =COS(RADIANS(E 10)) { $= \cos \phi$ },
- | |
|-----|
| C22 |
|-----|

 =G36 { fijar trayectoria }.

Fórmula en Excel 10.48 3

Configuración de las celdas que corresponden al versor $\hat{z}$:

- | |
|-----|
| A28 |
|-----|

 =A10 { $= A_x + A_{x0}$ },
- | |
|-----|
| B28 |
|-----|

 =B10 { $= A_y + A_{y0}$ },
- | |
|-----|
| C28 |
|-----|

 =C10 { $= A_z + A_{z0}$ },
- | |
|-----|
| A30 |
|-----|

 = 0,

B30

 = 0,

C30

 = 1,
- | |
|-----|
| C31 |
|-----|

 =G37 { fijar trayectoria }.

Fórmula en Excel 10.49 4

Configuración de las celdas que corresponden a ρ :

- B33 =SI(G26=0;" ";"r"), A37 =G30, B37 =G31, C37 =SI(G26=0;D37;0),
- A39 =SI(E12="" ;E19;SI(E19="" ;G12)),
- B39 =SI(E12="" ;E20;SI(E19="" ;G13)),
- C39 =SI(G26=0;0;D37),
- {Otros , cabeza del vector = 2 }.

**Fórmula en Excel 10.50** 5

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección de ρ sobre el plano XY.

- C44 =G41, A46 =A37, B46 =B37,
- A48 =A39, B48 =B39, C48 =C39, {Otros , línea = 4 , cabeza del vector = 1 }.

**Fórmula en Excel 10.51** 6

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección z:

- C53 =G41, A55 =A48+A46, B55 =B48+B46, C57 =C10,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

**Fórmula en Excel 10.52** 8

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección x:

- C71 =G41, B73 =B48 , A75 =A48 ,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

**Fórmula en Excel 10.53** 9

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección y:

- C80 =G41, A82 =A48, B84 =B48,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

**Fórmula en Excel 10.54** 10

Configuración de las celdas que corresponden a la coordenada z:

- $C89 = G41$, $C93 = C28$,
- {Otros, transparencia = 0, cabeza del vector = 1 }.

Ejecución de la simulación

Ingresando los valores iniciales y presionando cualquiera de los botones de rotación, como el botón $\overline{XYZ}$, podremos observar la posición del punto en el sistema de coordenadas cartesianas. Al utilizar los botones $\overline{YZ}$, $\overline{XY}$ y $\overline{XZ}$, se pueden explorar las distintas vistas del modelo. Asimismo, los botones $\overline{>>A}$, $\overline{>>B}$ y $\overline{>>C}$ permiten simular la rotación alrededor de los tres ejes principales.

Con el botón $\overline{>>}$, se visualizará la rotación del punto en el sistema de coordenadas cilíndricas alrededor del eje de rotación, representado en coordenadas cartesianas. Esta rotación se produce a medida que cambia el ángulo ϕ , cuyo incremento puede ajustarse mediante el valor en la celda $\overline{I3}$. Además, si se desea simular la variación de un parámetro diferente a ϕ , basta con seleccionar la celda correspondiente al parámetro y presionar nuevamente el botón $\overline{>>}$. Este parámetro variará de acuerdo con los pasos definidos en la celda $\overline{I3}$, permitiendo realizar simulaciones adicionales.

10.10 Coordenadas esféricas en cartesianas

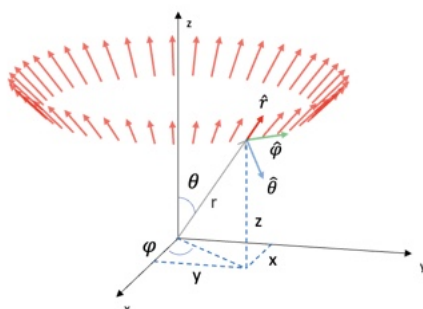


Figura 10.11.

Versores de las coordenadas esféricas en coordenadas cartesianas.

Nota. Elaboración propia.

El objetivo de este modelo es representar las coordenadas esféricas en las cartesianas.

Ecuaciones matemáticas

Las fórmulas matemáticas para representar los vectores base de este sistema son las ecuaciones (3.24):

$$\hat{r} = \hat{i} \cos \phi \sin \theta + \hat{j} \sin \phi \sin \theta + \hat{k} \cos \theta,$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi,$$

$$\hat{\theta} = \hat{i} \cos \phi \cos \theta + \hat{j} \sin \phi \cos \theta - \hat{k} \sin \theta.$$

De acuerdo a la sección 1.3, para convertir un vector de coordenadas esféricas a cartesianas se utilizan las fórmulas

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (10.6)$$

y de coordenadas cartesianas a esféricas las fórmulas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \quad (10.7)$$

Construcción del modelo

Se requerirán tres vectores para representar cada uno de los versores esféricos ($\hat{r}$, $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$), cuatro vectores adicionales para las proyecciones del punto en el sistema de coordenadas, y un último vector radial. Denominaremos a este último vector r , el cual corresponderá a la distancia desde el origen del sistema de coordenadas cartesianas hasta el punto donde se ubicarán los versores esféricos.

El usuario ingresará los valores de las coordenadas esféricas (r , θ , ϕ) y podrá visualizar su representación en coordenadas cartesianas (x , y , z). Los valores iniciales se registrarán en las celdas que contienen las fórmulas de Excel 10.55, mientras que en las fórmulas 10.56 a 10.63 se establecen las configuraciones para los ocho vectores que componen el modelo.

Fórmula en Excel 10.55

Valores de las celdas de configuración y parámetros ingresados por el usuario.

- E12 =4 {= r - radio ingresado por el usuario en modo esféricas a cartesianas },
- E13 =I5 {= ϕ - ángulo ingresado por el usuario en modo esféricas a cartesianas },
- E14 =2 {= θ - radio ingresado por el usuario en modo esféricas a cartesianas },
- G12 =D35*A12 {= $x = r \cos \phi \sin \theta$ - resultado esféricas a cartesianas },
- G13 =D35*B12 {= $y = r \sin \phi \sin \theta$ - resultado esféricas a cartesianas },
- G14 =SI(E12="";E21;E12*COS(RADIANES(E14)))
{= $z = r \cos \theta$ - resultado esféricas a cartesianas },
- E19 ="" {= x - coordenada ingresada por el usuario en modo cartesianas a esféricas },
- E20 ="" {= y - coordenada ingresada por el usuario en modo cartesianas a esféricas },
- E21 ="" {= z - coordenada ingresada por el usuario en modo cartesianas a esféricas },
- G19 =SI(E19="";E12;RAIZ(E19^2+E20^2+E21^2)) {= $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ },
- G20 =SI(E19="";E13;GRADOS(SI(Y(E19>0;E20<0);2*PI()+ASENO(E20/G19); SI(Y(E19<=0;E20>=0);ACOS(E19/G19);SI(Y(E19<0;E20<0);ATAN(E20/E19)+PI(); SI(E19=0;2*PI()-ACOS(E19/G19);ATAN(E20/E19))))))
{= $\phi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ - resultado dependiente del cuadrante },
- G21 =SI(E19="";E14;GRADOS(ACOS(E21/G19)))
{= $\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ - resultado },

- $G30 = 0, G31 = 0, G32 = 0, \{ - \text{desplazamiento del origen} \},$
- $D35 = SI(E12="";G19;SI(E19="";E12)) \{ = r \text{ de acuerdo al modo} \},$
- $D36 = SI(E12="";G20;SI(E19="";E13)) \{ = \phi \text{ de acuerdo al modo} \},$
- $D37 = SI(E12="";G21;SI(E19="";E14)) \{ = \theta \text{ de acuerdo al modo} \},$
- $G35 = 1 \{ \text{fijar trayectoria de } \hat{r} \},$
- $G36 = 1 \{ \text{fijar trayectoria de } \hat{\phi} \},$
- $G37 = 1 \{ \text{fijar trayectoria de } \hat{\theta} \}.$

Fórmula en Excel 10.56

1

Configuración de las celdas que corresponden al vector $\hat{r}$.

- $A10 = A39 + A37 \{ = r_x + r_{ox} \},$
- $B10 = B39 + B37 \{ = r_y + r_{oy} \},$
- $C10 = C39 + C37 \{ = r_z + r_{oz} \},$
- $A12 = COS(RADIANTES(D36))*SENO(RADIANTES(D37)) \{ = \hat{r}_x = \cos \phi \sin \theta \},$
- $B12 = SENO(RADIANTES(D36))*SENO(RADIANTES(D37)) \{ = \hat{r}_y = \sin \phi \sin \theta \},$
- $C12 = COS(RADIANTES(D37)) \{ = \hat{r}_z = \cos \theta \},$
- $C13 = G35 \{ \text{fijar trayectoria} \}.$
- $\{ \text{Otros , cabeza del vector} = 2 \}.$

Fórmula en Excel 10.57

2

Configuración de las celdas que corresponden al vector $\hat{\phi}$.

- $A19 = A10, B19 = B10, C19 = C10,$
- $A21 = -SENO(RADIANTES(D36)) \{ = \hat{\phi}_x = \sin \phi \},$
- $B21 = COS(RADIANTES(D36)) \{ = \hat{\phi}_y = \cos \phi \},$
- $B21 = 0,$
- $C22 = G36 \{ \text{fijar trayectoria} \}.$
- $\{ \text{Otros , cabeza del vector} = 2 \}.$

Fórmula en Excel 10.58

3

Configuración de las celdas que corresponden al vector $\hat{z}$.

- $A28 = A10, B28 = B10, C28 = C10,$
- $A30 = COS(RADIANTES(D36))*COS(RADIANTES(D37)) \{ = \hat{z}_x = \cos \phi \cos \theta \},$
- $B30 = SENO(RADIANTES(D36))*COS(RADIANTES(D37)) \{ = \hat{z}_y = \sin \phi \cos \theta \},$
- $C30 = -SENO(RADIANTES(D37)) \{ = \hat{z}_z = \sin \theta \},$

- $C31 = G37$ { fijar trayectoria }.
- {Otros , cabeza del vector = 2 }.

Fórmula en Excel 10.59 4

Configuración de las celdas que corresponden al vector r :

- $A37 = G30$, $B37 = G31$, $C37 = G32$,
- $A39 = \$D\$35 * A12$ { $x = r \cos \phi \sin \theta$ },
- $B39 = \$D\$35 * B12$ { $y = r \sin \phi \sin \theta$ },
- $C39 = \$D\$35 * C12$ { $z = r \cos \theta$ }.

Fórmula en Excel 10.60 5

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección de r hacia el eje z .

- $C44 = G41$, $A46 = A37$, $B46 = B37$, $C46 = C39$, $A48 = A39$, $B48 = B39$,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

Fórmula en Excel 10.61 6

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección z .

- $C53 = G41$, $A55 = A48 + A46$, $B55 = B48 + B46$, $C57 = C10$,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

Fórmula en Excel 10.62 7

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección x .

- $C62 = G41$, $B64 = B48$, $A66 = A48$,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

Fórmula en Excel 10.63 8

Configuración de las celdas que corresponden a la proyección y .

- $C71 = G41$, $A73 = A48$, $B75 = B48$,
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

Ejecución de la simulación

Al ingresar los valores iniciales y seleccionar cualquier botón de rotación (por ejemplo, el botón **XYZ**), es posible visualizar la posición del punto en coordenadas cartesianas. Mediante los botones **YZ**, **XY** y **XZ**, se accede a las proyecciones ortogonales en los planos correspondientes. Los botones **>>A**, **>>B** y **>>C** permiten simular la rotación de los ejes cartesianos (X, Y, Z) alrededor de cada eje principal.

El botón **>>** inicia la animación de la rotación del punto en el sistema de coordenadas esféricas, donde el ángulo ϕ varía de forma continua. El incremento angular de ϕ puede ajustarse en la celda **I3**. Para simular la variación de otro parámetro como el ángulo θ , se debe seleccionar la celda **E14** = I5, por ejemplo con **E13** = 30, y posteriormente activar el botón **>>**. La simulación puede reiniciarse en cualquier momento mediante el botón **<-**.

Ejemplo 10.10.1 Dado el punto $P(-1; 3; 3)$ en coordenadas cartesianas, hallar su equivalente en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN

Para solucionar configuramos las celdas que se indican en las fórmulas de Excel 10.64. Allí mismo se muestran las celdas que dan los resultados. En la figura 10.12, Ejemplo 1 se visualizan los resultados.

Fórmula en Excel 10.64

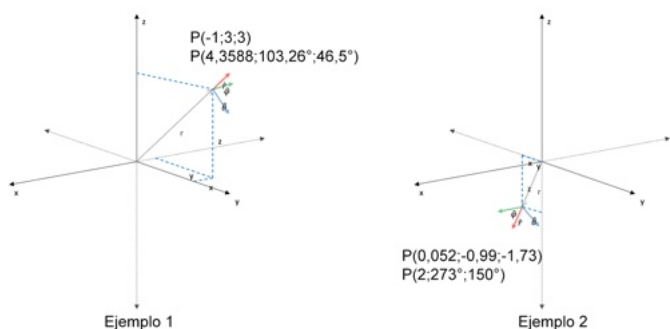
Valores de las celdas de configuración y parámetros ingresados por el usuario.

- **E12** = "" { Esta celda debe estar vacía al convertir cartesianas a esféricas },
- **E13** = "" { Esta celda debe estar vacía al convertir cartesianas a esféricas },
- **E14** = "" { Esta celda debe estar vacía al convertir cartesianas a esféricas },
- **E19** = $x = -1$ { Se ingresa aquí la coordenada x },
- **E20** = $y = 3$ { Se ingresa aquí la coordenada y },
- **E21** = $z = 3$ { Se ingresa aquí la coordenada z },
- **G19** = $r = 4,3588$ { resultado para la primera coordenada esférica },
- **G20** = $\phi = 103,26^\circ$ { resultado para la segunda coordenada esférica },
- **G21** = $\theta = 46,5^\circ$ { resultado para la tercera coordenada esférica }.
- Oprimir **XYZ** para ver resultado en el sistema de coordenadas.

Ejemplo 10.10.2 Dado el punto $P(2; 273^\circ; 150^\circ)$ en coordenadas esféricas, hallar su equivalente en coordenadas cartesianas.

SOLUCIÓN

Para solucionar configuramos las celdas que se indican en las fórmulas de Excel 10.65. Allí mismo se muestran las celdas que dan los resultados. En la figura 10.12, Ejemplo 2 se visualizan los resultados.

**Figura 10.12**

Ejemplos de conversión entre coordenadas esféricas y cartesianas.

Nota. Elaboración propia.

Fórmula en Excel 10.65

Valores de las celdas de configuración y parámetros ingresados por el usuario.

- E19 = "" { Esta celda debe estar vacía al convertir esféricas a cartesianas },
- E20 = "" { Esta celda debe estar vacía al convertir esféricas a cartesianas },
- E21 = "" { Esta celda debe estar vacía al convertir esféricas a cartesianas },
- E12 = $r = 2$ { Se ingresa aquí la coordenada r },
- E13 = $\phi = 273^\circ$ { Se ingresa aquí la coordenada ϕ },
- E14 = $\theta = 150^\circ$ { Se ingresa aquí la coordenada θ },
- G12 = $x = 0,052$ { resultado para la primera coordenada cartesiana },
- G13 = $y = -0,99$ { resultado para la segunda coordenada cartesiana },
- G14 = $z = -1,73$ { resultado para la tercera coordenada cartesiana }.
- Oprimir **>>C** para ver resultado en el sistema de coordenadas.

10.11 Coordenadas cartesianas en cilíndricas

Resulta interesante analizar cómo se representarían los vectores unitarios cartesianos en un sistema de coordenadas cilíndricas ortogonales. A continuación, construiremos dicho modelo.

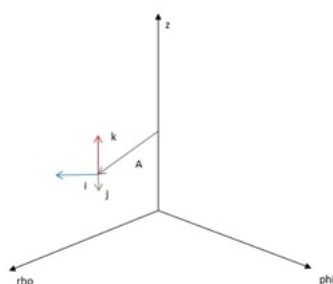
Ecuaciones matemáticas

Las fórmulas matemáticas para este caso son las ecuaciones (3.26):

$$\hat{i} = \hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi,$$

$$\hat{j} = \hat{\rho} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi,$$

$$\hat{k} = \hat{z}.$$

**Figura 10.13.**

Versores de las coordenadas cartesianas en coordenadas cilíndricas.

Nota. Elaboración propia.

Construcción del modelo

Se requerirán tres vectores para representar cada uno de los versores cartesianos ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$) y un vector adicional para desplazar el origen del sistema cartesiano a cualquier punto del espacio, en coordenadas cilíndricas. Denominaremos a este último vector **A**, el cual corresponderá a la distancia desde el eje z del sistema cilíndrico hasta el punto donde se ubicarán los versores cartesianos.

El usuario introducirá los valores de las coordenadas cartesianas (x, y, z) y podrá visualizar su representación en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z). Los datos iniciales se registrarán en las siguientes celdas:

- **I5** = θ . Ángulo de rotación.
- **E10** Coordenada x del vector **A**.
- **E11** Coordenada y del vector **A**.
- **E12** Coordenada z del vector **A**.
- **E14** Posición $A_{\rho 0}$ del eje de rotación.
- **E15** Posición $A_{\phi 0}$ del eje de rotación.

En la fórmula de Excel 10.66 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{i}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.66 **1**

- **A10** =A39+A37 {= $A_{\rho} + A_{\rho 0}$ }, **B10** =B39+B37 {= $A_{\phi} + A_{\phi 0}$ },
- **C10** =C39+C37 {= A_z },
- **A12** =COS(RADIANS(E19)) {= $\cos \phi$ },
- **B12** =-SIN(RADIANS(E19)) {= $-\sin \phi$ }.

En la fórmula de Excel 10.67 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{j}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.67 2

- $\boxed{\text{E18}} = \text{SQRT}(\text{E10}^2 + \text{E11}^2) \{ = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \},$
- $\boxed{\text{A19}} = \text{A10} \{ = A_\rho + A_{\rho 0} \}, \boxed{\text{B19}} = \text{B10} \{ = A_\phi + A_{\phi 0} \}, \boxed{\text{C19}} = \text{C10} \{ = A_z \},$
- $\boxed{\text{E19}} = \text{ASIN}(\text{E11}/\text{E18}) * 180/\text{PI}() \{ = \arcsin(y/\rho) \},$
- $\boxed{\text{E20}} = \text{E12} \{ = z \},$
- $\boxed{\text{A21}} = \text{SIN}(\text{RAD IANS}(\text{E19})) \{ = \sin \phi \},$
- $\boxed{\text{B21}} = \text{COS}(\text{ RADIANS}(\text{E19})) \{ = \cos \phi \}.$

En la fórmula de Excel 10.68 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{k}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.68 3

- $\boxed{\text{A28}} = \text{A10} \{ = A_\rho + A_{\rho 0} \}, \boxed{\text{B28}} = \text{B10} \{ = A_\phi + A_{\phi 0} \}, \boxed{\text{C28}} = \text{C10} \{ = A_z \},$

En la fórmula de Excel 10.69 se muestran los valores de las celdas para el vector 4 y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.69 4

- $\boxed{\text{A37}} = \text{E14} \{ = A_{\rho 0} \}, \boxed{\text{B37}} = \text{RADIANS}(\text{E15}) \{ = A_{\phi 0} \}, \boxed{\text{C37}} = \text{E20} \{ = z \},$
- $\boxed{\text{A39}} = \text{E18} \{ = \rho = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \}, \boxed{\text{B39}} = \text{RADIANS}(\text{E19}) \{ = \phi \},$

Ejecución de la simulación

Para definir los valores iniciales del vector **A**, el usuario deberá:

1. Ingresar los datos en las celdas $\boxed{\text{E10}}$, $\boxed{\text{E11}}$ y $\boxed{\text{E12}}$.
2. Seleccionar un botón de rotación (por ejemplo, $\boxed{\text{XYZ}}$) para visualizar la posición del punto en coordenadas cilíndricas.

Adicionalmente:

1. Los botones $\boxed{\text{YZ}}$, $\boxed{\text{XY}}$ y $\boxed{\text{XZ}}$ permiten alternar entre los planos de proyección correspondientes.
2. Los botones $\boxed{\text{>>A}}$, $\boxed{\text{>>B}}$ y $\boxed{\text{>>C}}$ simulan la rotación del sistema de coordenadas cilíndricas en torno a los tres ejes principales.

10.12 Coordenadas esféricas en cilíndricas

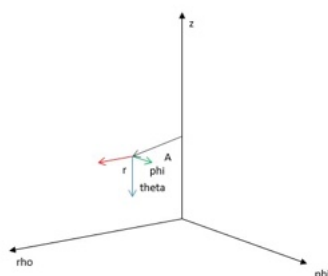


Figura 10.14.

Vectores de las coordenadas esféricas en coordenadas cilíndricas.

Nota. Elaboración propia.

El objetivo de este modelo es representar las coordenadas esféricas en las cilíndricas.

Ecuaciones matemáticas

Las fórmulas matemáticas para este caso son las ecuaciones (3.25):

$$\hat{r} = \hat{\rho} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta,$$

$$\hat{\phi} = \hat{\phi},$$

$$\hat{\theta} = \hat{\rho} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta.$$

Construcción del modelo

Se requerirán tres vectores para representar cada uno de los versores esféricos ($\hat{r}$, $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$) y un vector adicional para trasladar el origen del sistema esférico a cualquier punto del espacio en coordenadas cilíndricas. Denominaremos a este último vector **A**, el cual corresponderá a la distancia desde el eje z del sistema cilíndrico hasta el punto donde se ubicarán los versores esféricos.

El usuario ingresará los valores de las coordenadas esféricas (r , ϕ , θ) y podrá visualizar su representación en coordenadas cilíndricas (ρ , ϕ , z). Los valores iniciales se registrarán en las siguientes celdas:

- I5 - Ángulo θ .
- E9 - Valor de r .
- E10 - Valor de ϕ .
- E13 - Posición A_ρ del origen.
- E14 - Posición A_ϕ del origen.
- E15 - Posición A_z del origen.

En la fórmula de Excel 10.70 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{r}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.70

1

- $A10 = A39 + A37 \{= A_\rho + A_{\rho 0}\}$, $B10 = B39 + B37 \{= A_\phi + A_{\phi 0}\}$,
- $C10 = C39 + C37 \{= A_z\}$, $E11 = I5 \{= \theta\}$,
- $A12 = \text{SIN}(\text{RADIANS}(E11)) \{= \sin \theta\}$,
- $C12 = \text{COS}(\text{RADIANS}(E11)) \{= \cos \theta\}$,

En la fórmula de Excel 10.71 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{\phi}$ y sus equivalentes en notación matemática. Este versor coincide con el de las cilíndricas.

Fórmula en Excel 10.71

2

- $E17 = E9 * \text{SIN}(\text{RADIANS}(E11)) * \text{COS}(\text{RADIANS}(E10))$,
- $E18 = E9 * \text{SIN}(\text{RADIANS}(E11)) * \text{SIN}(\text{RADIANS}(E10))$,
- $A19 = A10 \{= A_\rho + A_{\rho 0}\}$,
- $B19 = B10 \{= A_\phi + A_{\phi 0}\}$,
- $C19 = C10 \{= A_z\}$,
- $E19 = E9 * \text{COS}(\text{RADIANS}(E11)) \{= r \cos \theta\}$,
- $B21 = \text{RADIANS}(E10) \{= \phi\}$,
- $E21 = \text{SQRT}(E17^2 + E18^2) \{= \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\}$,
- $E22 = \text{IF}(E21=0;0;\text{ASIN}(E18/E21)*180/\text{PI}()) \{= \phi = \arcsin(y/\rho)\}$,
- $E23 = E19 \{= z = A_z\}$,

En la fórmula de Excel 10.72 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{\theta}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.72

3

- $A28 = A10 \{= A_\rho + A_{\rho 0}\}$, $B28 = B10 \{= A_\phi + A_{\phi 0}\}$,
- $C28 = C10 \{= A_z\}$,
- $A30 = \text{COS}(\text{RADIANS}(E11)) \{= \cos \theta\}$,
- $C30 = -\text{SIN}(\text{RADIANS}(E11)) \{= -\sin \theta\}$,

En la fórmula de Excel 10.73 se presentan los valores de las celdas correspondientes al vector $\mathbf{A}$ y sus equivalentes en notación matemática. Para transformar este vector de coordenadas esféricas a cilíndricas, se sigue un proceso en dos etapas: primero, se convierten las coordenadas esféricas a cartesianas, y luego se transforman estas últimas a coordenadas cilíndricas. No obstante, también es posible realizar esta conversión

directamente de coordenadas esféricas a cilíndricas utilizando la primera ecuación de (3.25), sustituyendo los valores de ρ y z en lugar de los versores, obteniendo así el mismo resultado.

Fórmula en Excel 10.73 4

- =E13 {= A_ρ }, =RADIANS(E14) {= A_ϕ },
- =E15 {= A_z }, =E21 {= $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ },
- =RADIANS(E22) {= ϕ },
- =E23 {= z },

Ejecución de la simulación

Para ejecutar la simulación, ingrese los valores iniciales y seleccione un botón de rotación para visualizar la posición del punto en coordenadas cilíndricas. Cabe destacar que los nombres de estos botones son condicionales; por defecto, están etiquetados según las coordenadas cartesianas, pero en este modelo en particular, las coordenadas corresponden a las cilíndricas.

Los botones , y permiten alternar entre las diferentes vistas del sistema. Por otro lado, los botones >>A"/>, >>B"/>, y >>C"/> simulan la rotación de los ejes cartesianos alrededor de los tres ejes principales.

Al utilizar el botón >>"/>, se puede observar el comportamiento de las coordenadas esféricas en el sistema cilíndrico a medida que varía el ángulo θ , cuyo incremento puede ajustarse en la celda . Estas trayectorias pueden resultar poco familiares, ya que este tipo de conversiones no se emplean con frecuencia. Sin embargo, este modelo resulta útil para comprender mejor la relación entre los diferentes sistemas de coordenadas.

Adicionalmente, con el botón >>"/>, es posible simular variaciones en otros parámetros distintos a θ , como ϕ , seleccionando la celda y luego presionando >>"/>. Para reiniciar la simulación desde el inicio, utilice el botón .

10.13 Coordenadas cartesianas en esféricas

El objetivo de este modelo es representar las coordenadas cartesianas en esféricas.

Ecuaciones matemáticas

Las fórmulas matemáticas para este caso son las ecuaciones (3.27):

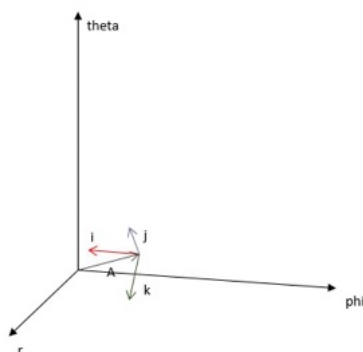
$$\hat{i} = \hat{r} \cos \phi \sin \theta - \hat{\phi} \sin \phi + \hat{\theta} \cos \phi \cos \theta,$$

$$\hat{j} = \hat{r} \sin \phi \sin \theta + \hat{\phi} \cos \phi + \hat{\theta} \sin \phi \cos \theta,$$

$$\hat{k} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta.$$

Construcción del modelo

Se requerirán tres vectores para representar cada uno de los versores cartesianos ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$) y un vector adicional para trasladar el origen del sistema cartesiano a cualquier punto

**Figura 10.15.**

Vectores de las coordenadas cartesianas en esféricas.

Nota. Elaboración propia.

del espacio en coordenadas esféricas. Denominaremos a este último vector $\mathbf{A}$, el cual corresponderá a la distancia desde el centro del sistema de coordenadas esféricas hasta el punto donde se ubicarán los versores cartesianos.

El usuario ingresará los valores de las coordenadas cartesianas (x, y, z) y podrá visualizar su representación en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Los valores iniciales se registrarán en las siguientes celdas:

- Valor de x en cartesianas.
- Valor de y en cartesianas.
- Valor de z en cartesianas.
- Posición A_{r0} del origen.
- Posición $A_{\phi 0}$ del origen.
- Posición $A_{\theta 0}$ del origen.

En la fórmula de Excel 10.74 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{i}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.74

1

- =A39+A37 $\{= A_r + A_{r0}\}$,

 =B39+B37 $\{= A_{\phi} + A_{\phi 0}\}$,
- =C39+C37 $\{= A_{\theta} + A_{\theta 0}\}$,
- =COS(RADIANS(E18))*SIN (RADIANS(E19)) $\{= \cos \phi \sin \theta\}$,
- =-SIN(RADIANS(E18)) $\{= -\sin \phi\}$,
- =COS(RADIANS(E18)) *COS(RADIANS(E19)) $\{= \cos \phi \cos \theta\}$.

En la fórmula de Excel 10.75 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{j}$, las

fórmulas de conversión a esféricas, y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.75 2

- E17 =SQRT(E9^2+E10^2+E11^2) $\{= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\}$,
- E18 =IF(E9=0;ATAN(E10/0.0000001)*180/PI();ATAN(E10/E9)*180/PI())
 $\{= \arctan(y/x)\}$,
- A19 =A10 $\{= A_r + A_{r0}\}$, B19 =B10 $\{= A_\phi + A_{\phi0}\}$, C19 =C10 $\{= A_\theta + A_{\theta0}\}$,
- E19 = IF(E11=0;ATAN(SQRT(E9^2+E10^2)/0.0000001)*180/PI();
ATAN(SQRT(E9^2+E10^2)/E11) *180/PI()) $\{= \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)\}$,
- A21 =SIN(RADIANS(E18))*SIN(RADIANS(E19)) $\{= \sin \phi \sin \theta\}$,
- B21 =COS(RADIANS(E 18)) $\{= \cos \phi\}$,
- C21 =SIN(RADIANS(E18))*COS(RADIANS(E19))
 $\{= -\sin \phi \cos \theta\}$.

En la fórmula de Excel 10.76 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{k}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.76 3

- A28 =A10 $\{= A_r + A_{r0}\}$, B28 =B10 $\{= A_\phi + A_{\phi0}\}$, C28 =C10 $\{= A_\theta + A_{\theta0}\}$,
- A30 =COS(RADIANS(E19)) $\{= \cos \theta\}$, C30 =-SIN(RADIANS(E19)) $\{= -\sin \theta\}$.

En la fórmula de Excel 10.77 se muestran los valores de las celdas para el vector **A** sus equivalentes en lenguaje matemático.

Fórmula en Excel 10.77 4

- A37 =E13 $\{= A_{r0}\}$,
- B37 =RADIANS(E14) $\{= A_{\phi0}\}$,
- C37 =RADIANS(E15) $\{= A_{\theta0}\}$,
- A39 =E17 $\{= A_r = r\}$,
- B39 =RADIANS(E18) $\{= A_\phi = \phi\}$,
- C39 =RADIANS(E19) $\{= A_\theta = \theta\}$,

Ejecución de la simulación

Para ejecutar la simulación, ingrese los valores iniciales y seleccione un botón de rotación para visualizar la posición del punto en coordenadas esféricas. Es importante destacar que los nombres de estos botones son condicionales; por defecto, están etiquetados según las coordenadas cartesianas, pero en este modelo en particular, las coordenadas

corresponden a las esféricas.

Los botones **YZ**, **XY** y **XZ** permiten alternar entre las diferentes vistas del sistema. Asimismo, los botones **>>A**, **>>B** y **>>C** simulan la rotación de los ejes esféricos alrededor de los tres ejes principales.

Al utilizar el botón **>>**, es posible simular cambios en las coordenadas cartesianas. Por ejemplo, seleccionando la celda **E10** y luego presionando **>>**, se puede observar cómo se desplaza el punto en coordenadas esféricas al variar el valor de y . Cabe mencionar que y varía de acuerdo con el incremento definido en la celda **I3**; para este caso se recomienda un valor pequeño, preferiblemente entre 0 y 1. Para reiniciar la simulación desde el inicio, utilice el botón **<<**.

10.14 Coordenadas cilíndricas en esféricas

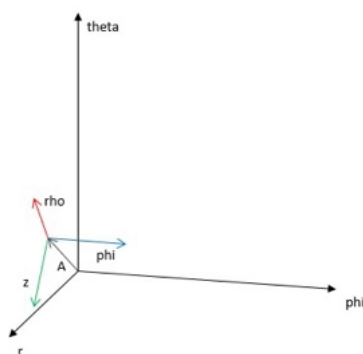


Figura 10.16.

Vectores de las coordenadas cilíndricas en esféricas.

Nota. Elaboración propia.

El objetivo de este modelo es representar las coordenadas cilíndricas en esféricas.

Ecuaciones matemáticas

Las fórmulas matemáticas para este caso son las ecuaciones (3.23):

$$\hat{\rho} = \hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta,$$

$$\hat{\phi} = \hat{\phi},$$

$$\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta.$$

Construcción del modelo

Necesitaremos tres vectores para representar cada uno de los versores de las cilíndricas y además un vector para poder trasladar el origen de las cilíndricas a cualquier punto del espacio en las esféricas. Llamaremos a este último vector **A** y será igual a la distancia desde el centro de coordenadas esféricas hasta el punto en donde colocaremos los versores $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$.

El usuario ingresará los valores de las coordenadas cilíndricas y podrá observar el punto de ubicación en coordenadas esféricas. Los valores iniciales se ingresarán en las celdas:

- | |
|----|
| E9 |
|----|

 Valor de ρ en cilíndricas.
- | |
|-----|
| E10 |
|-----|

 Valor de ϕ en cilíndricas.
- | |
|-----|
| E11 |
|-----|

 Valor de z en cilíndricas.
- | |
|-----|
| E13 |
|-----|

 Posición A_{r0} del origen.
- | |
|-----|
| E14 |
|-----|

 Posición $A_{\phi 0}$ del origen.
- | |
|-----|
| E15 |
|-----|

 Posición $A_{\theta 0}$ del origen.

En la fórmula de Excel 10.78 se presentan los valores de las celdas correspondientes al versor $\hat{\rho}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.78 1

- | |
|-----|
| A10 |
|-----|

 =A39+A37 $\{= A_r + A_{r0}\}$,

B10

 =B39+B37 $\{= A_{\phi} + A_{\phi 0}\}$,
- | |
|-----|
| C10 |
|-----|

 =C39+C37 $\{= A_{\theta} + A_{\theta 0}\}$,

E10

 =I5 $\{= \phi\}$,
- | |
|-----|
| A12 |
|-----|

 =SIN(RADIANS(E23)) $\{= \sin \theta\}$,
- | |
|-----|
| C12 |
|-----|

 =COS(RADIANS(E23)) $\{= \cos \theta\}$.

En la fórmula de Excel 10.79 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{\phi}$, las conversiones a coordenadas cartesianas y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.79 2

- | |
|-----|
| E17 |
|-----|

 =E9*COS(RADIANS(E10)) $\{= \rho \cos \phi\}$,

E18

 =E9*SIN(RADIANS(E10)) $\{= \rho \sin \phi\}$,
- | |
|-----|
| A19 |
|-----|

 =A10 $\{= A_r + A_{r0}\}$,

B19

 =B10 $\{= A_{\phi} + A_{\phi 0}\}$,

C19

 =C10 $\{= A_{\theta} + A_{\theta 0}\}$,
- | |
|-----|
| E19 |
|-----|

 =E11 $\{= z\}$,
- | |
|-----|
| E21 |
|-----|

 =SQRT(E17^2+E18^2+E19^2) $\{= r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\}$,
- | |
|-----|
| E22 |
|-----|

 =IF(E10>90;ACOT(E17/E18)*180/PI();ATAN(E18/E17)*180/PI()) $\{= \phi = \arctan(y/x)\}$,
- | |
|-----|
| E23 |
|-----|

 =IF(E19=0;ATAN(SQRT(E17^2+E18^2)/0.00001)*180/PI();
ATAN(SQRT(E17^2+E18^2)/E19)*180/PI()) $\{= \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\}$.

En la fórmula de Excel 10.80 se muestran los valores de las celdas para el versor $\hat{z}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.80 3

- | |
|-----|
| A28 |
|-----|

 =A10 $\{= A_r + A_{r0}\}$,

B28

 =B10 $\{= A_{\phi} + A_{\phi 0}\}$,

- | |
|-----|
| C28 |
|-----|

 =C10 {= $A_\theta + A_{\theta 0}$ },
- | |
|-----|
| A30 |
|-----|

 =COS(RADIANS(E23)) {= $\cos \theta$ },
- | |
|-----|
| C30 |
|-----|

 =-SIN(RADIANS(E23)) {= $-\sin \theta$ }.



En la fórmula de Excel 10.81 se muestran los valores de las celdas para el vector 4 y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 10.81

4

- | |
|-----|
| A37 |
|-----|

 =E13 {= A_{r0} },

B37

 =RADIANS(E14) {= $A_{\phi 0}$ },
- | |
|-----|
| C37 |
|-----|

 =RADIANS(E15) {= $A_{\theta 0}$ },
- | |
|-----|
| A39 |
|-----|

 =E21 {= $A_r = r$ },
- | |
|-----|
| B39 |
|-----|

 =RADIANS(E22) {= $A_\phi = \phi$ },
- | |
|-----|
| C39 |
|-----|

 =RADIANS(E23) {= $A_\theta = \theta$ }.



Ejecución de la simulación

Para ejecutar la simulación, ingrese los valores iniciales y seleccione un botón de rotación, como

XYZ

 para visualizar la posición del punto en coordenadas esféricas. Es importante destacar que los nombres de estos botones son condicionales; por defecto, están etiquetados según las coordenadas cartesianas, pero en este modelo en particular, las coordenadas corresponden a las esféricas.

Los botones

YZ

,

XY

 y

XZ

 permiten alternar entre las diferentes vistas del sistema. Asimismo, los botones

>>A

,

>>B

 y

>>C

 simulan la rotación de los ejes esféricos alrededor de los tres ejes principales.

Al utilizar el botón

>>

, se puede observar el comportamiento del punto correspondiente a las coordenadas cilíndricas representado en el sistema esférico al variar el ángulo ϕ .

Adicionalmente, con el botón

>>

, es posible simular cambios en las coordenadas cartesianas. Por ejemplo, seleccionando la celda

E10

 y luego presionando

>>

, se puede visualizar cómo se desplaza el punto en coordenadas esféricas al variar el ángulo ϕ . Cabe mencionar que ϕ varía de acuerdo con el incremento definido en la celda

I3

; para este caso, se recomienda un valor moderado como 8 grados, con una cantidad de pasos de 45 para completar un ciclo de 360 grados. Para reiniciar la simulación desde el inicio, utilice el botón

<<

.

10.15 Campo vectorial de simetría plana

El objetivo de este modelo es aprender a configurar un vector para representar un campo vectorial con simetría plana.

En este caso, no se requerirán ecuaciones matemáticas complejas, y únicamente se

añadirá un vector al sistema de coordenadas.

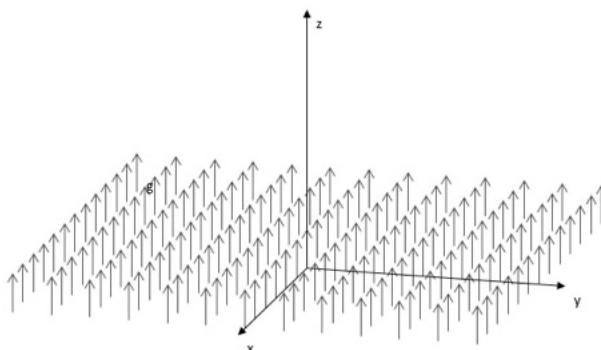


Figura 10.17.

Campo vectorial de simetría plana.

Nota. Elaboración propia.

Construcción del modelo

En general, cuando el usuario asigna un valor de s, o, c a la celda **C7** de cualquier vector, el código comienza a funcionar de manera diferente durante la simulación. Dependiendo de este valor, se generarán una serie de variantes para las coordenadas en las celdas **A11**, **B11** y **C11**. Sin embargo, estas no corresponden directamente a las coordenadas de los vectores que se visualizarán en pantalla, las cuales se encuentran en **A12**, **B12** y **C12**. En estas últimas celdas, deben escribirse las ecuaciones que describen cómo el campo depende de las coordenadas variables. Por ejemplo, si el campo es $E = E(x) = 1/x$, entonces **A12** = 1/A11.

El usuario ingresará las coordenadas del vector que definen el campo vectorial y configurará el campo como se muestra en las celdas de las fórmulas de Excel 10.82.

Fórmula en Excel 10.82

Configuración de las celdas de los parámetros iniciales:.

- **G12** =40 {= Δx - incremento en la coordenada x },
- **G13** =-100 {= $x_{inicial}$ },
- **G14** =100 {= x_{final} },
- **G17** =40 {= Δy - incremento en la coordenada y },
- **G18** =-100 {= $y_{inicial}$ },
- **G19** =100 {= y_{final} },
- **G22** =60 {= Δz - incremento en la coordenada z },
- **G23** =-100 {= $z_{inicial}$ },
- **G24** =100 {= z_{final} }.

Para representar el campo agregue un nuevo vector con la siguiente configuración:

Fórmula en Excel 10.83 1

Configuración de las celdas que corresponden al campo vectorial de simetría plana:

- $C7 = o[10]x=[0;0]o2[10]y=[-200;200]o3[10]z=[-200;200]color=[400]origin[cart.]$
 $= [100;100;80]tfactor=0,0s$ { Configuración inicial de la celda },
- $C7 = "o["\&G12\&"]x=["\&G13\&";"\&G14\&"]$
 $o2["\&G17\&"]y=["\&G18\&";"\&G19\&"]$
 $o3["\&G22\&"]z=["\&G23\&";"\&G24\&"]$
 $color=[50]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;0s$ { configuración adaptada al modelo actual },
- $A10 = A11$, $B10 = B11$, $C10 = C11$,
- $A12 = 0$, $B12 = 0$, $C12 = 1000/ABS(C11)$ { $\vec{g}(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{1000}{|z|}\right)$ - fórmula del campo que tiene componentes solamente en z }.

Ejecución de la simulación

Para ejecutar la simulación, ingrese las componentes del campo en las celdas $A12$, $B12$ y $C12$, y seleccione un botón de rotación, como XYZ , para visualizar el campo en el sistema cartesiano. Los botones YZ , XY y XZ permiten alternar entre las diferentes vistas del sistema. Asimismo, los botones A , B y C simulan la rotación de los ejes cartesianos alrededor de los tres ejes principales. Cambie los valores de las celdas G^* para ver el campo en diferentes regiones del espacio.

10.16 Campo vectorial de simetría cilíndrica

El objetivo de este modelo es aprender a configurar un vector para representar un campo vectorial con simetría cilíndrica.

Ecuaciones matemáticas

Dado que se busca representar un campo de simetría cilíndrica en coordenadas cartesianas, es necesario convertir las coordenadas cilíndricas a cartesianas. Para ello, se utilizan las ecuaciones (1.3):

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z,$$

y, además,

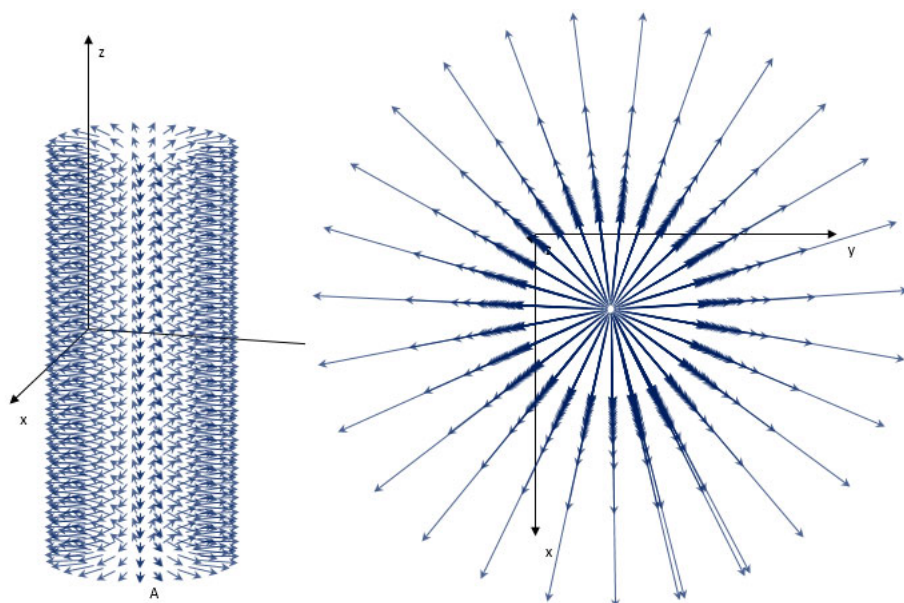
$$x_0 = \rho \cos \phi, \quad y_0 = \rho \sin \phi, \quad z_0 = z.$$

Si el campo tiene una dependencia en las coordenadas cilíndricas de la forma

$$\mathbf{E}(\rho) = \frac{k}{\rho} \hat{\rho} = \frac{k}{\rho} (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi) = k \left(\frac{\cos \phi}{\rho}, \frac{\sin \phi}{\rho}, 0 \right) = \mathbf{E}(x, y, z),$$

entonces,

$$E_x = \frac{k \cos \phi}{\rho}, \quad E_y = \frac{k \sin \phi}{\rho}, \quad E_z = 0.$$

**Figura 10.18.***Campo vectorial de simetría cilíndrica.*

Nota. Elaboración propia.

Construcción del modelo

Como se dijo anteriormente, cuando el usuario asigna un valor de s, o, c a la celda **C7** de cualquier vector, el código comienza a funcionar en modo campo. Dependiendo de este valor, se generarán una serie de variantes para las coordenadas en las celdas **A11**, **B11** y **C11**. Sin embargo, estas no corresponden directamente a las coordenadas de los vectores que se visualizarán en pantalla, las cuales se encuentran en **A12**, **B12** y **C12**. En estas últimas celdas, deben escribirse las ecuaciones que describen cómo el campo depende de las coordenadas variables. Por ejemplo, si el campo es $E = E(x) = 1/x$, entonces **A12** = 1/A11.

El usuario ingresará las coordenadas del vector que definen el campo vectorial y configurará el campo como muestran las fórmulas de Excel 10.84:

Fórmula en Excel 10.84

Configuración de las celdas de los parámetros iniciales de las coordenadas cilíndricas:

- **G8** =5000 {= k - constante de la fórmula del campo},
- **G10** =80 {= $\Delta\rho$ - incremento en la coordenada ρ },
- **G11** =300 {= $\rho_{inicial}$ }, **G12** =300 {= ρ_{final} },
- **G15** =5 {= $\Delta\phi$ - incremento en la coordenada ϕ },
- **G16** =0 {= $\phi_{inicial}$ }, **G17** =360 {= ϕ_{final} },

- $G20 = 20$ {= Δz - incremento en la coordenada z }.
- $G21 = 0$ {= $z_{inicial}$ }, $G22 = 50$ {= z_{final} }.

En la fórmula de Excel 10.85 se muestran los valores que deben tener las celdas del campo vectorial **A** con simetría cilíndrica, después de agregar un nuevo vector en *ScienSolar*. Al igual que en el modelo anterior, la celda **C7** se modificó para hacer el modelo más amigable con el usuario.

Fórmula en Excel 10.85 1

Configuración de las celdas que corresponden al campo **A**:

- **C7** = "c["&G10&"]rho=["&G11&";"&G12&"]
c2["&G15&"]phi=["&G16&";"&G17&"]
c3["&G20&"]z=["&G21&";"&G22&"]color=[150]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;0s",
- **A10** =A11, **B10** =B11, **C10** =C11,
- **A12** =(G8*A11)/(A11^2+B11^2) {= $A_x = \frac{x}{x^2+y^2}$ },
- **B12** =(G8*B11)/(A11^2+B11^2) {= $A_y = \frac{y}{x^2+y^2}$ },
- **C12** =0 {= A_z },
- {Otros, cabeza del vector = 4 }.

Ejecución de la simulación

Ingresando los valores iniciales y oprimiendo cualquier botón de rotación, por ejemplo el botón **XYZ** podremos observar el campo en el sistema cartesiano. Con los botones **YZ**, **XY** y **XZ** observaremos las diferentes vistas. Con los botones **>>A**, **>>B** y **>>C** se puede simular la rotación de los ejes cartesianos alrededor de los tres ejes. Para optimizar el rendimiento, configure adecuadamente los parámetros que aparecen en las celdas **G***.

10.17 Campo vectorial de simetría esférica

El objetivo de este modelo es aprender a configurar un vector para representar un campo vectorial de simetría esférica.

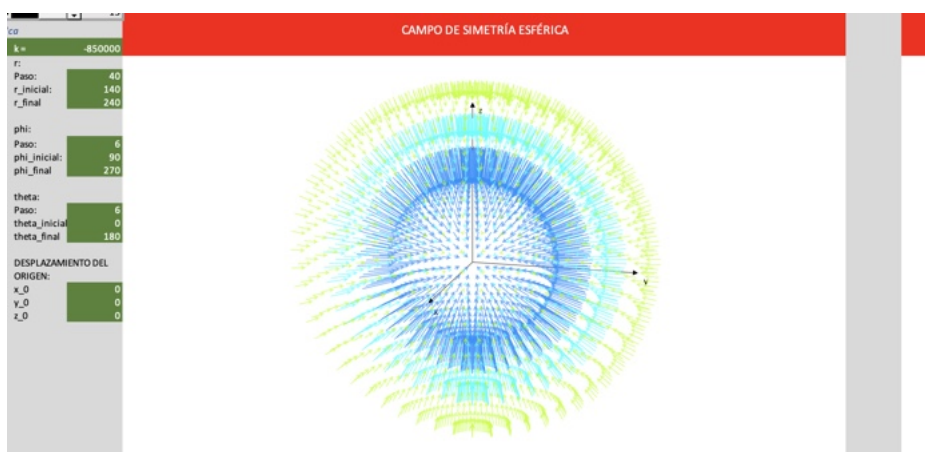
Ecuaciones matemáticas

Como vamos a representar un campo de simetría esférica en cartesianas, debemos convertir las coordenadas esféricas en cartesianas, para ello utilizaremos las ecuaciones (10.6),

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

y, para el caso de las coordenadas iniciales,

$$x_0 = r \cos \phi \sin \theta, \quad y_0 = r \sin \phi \sin \theta, \quad z_0 = r \cos \theta.$$

**Figura 10.19.**

Campo vectorial de simetría esférica en una región del espacio, campo eléctrico de una carga puntual negativa $\vec{E} = (k/r^2)\hat{r}$.

Nota. Elaboración propia.

Si el campo tiene una dependencia en coordenadas esféricas

$$\mathbf{E}(r) = \frac{k}{r^2} \hat{r} = \frac{k}{r^2} (\hat{i} \cos \phi \sin \theta + \hat{j} \sin \phi \sin \theta + \hat{k} \cos \theta) = \mathbf{E}(x, y, z),$$

entonces,

$$E_x = k \frac{\cos \phi \sin \theta}{r^2}, \quad E_y = k \frac{\sin \phi \sin \theta}{r^2}, \quad E_z = k \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Construcción del modelo

Al igual que el comentario hecho en los dos modelos anteriores, cuando el usuario asigna un valor de s, o, c a la celda [C7] de cualquier vector, el código comienza a funcionar en modo campo. Dependiendo de este valor, se generarán una serie de variantes para las coordenadas en las celdas [A11], [B11] y [C11]. Sin embargo, estas no corresponden directamente a las coordenadas de los vectores que se visualizarán en pantalla, las cuales se encuentran en [A12], [B12] y [C12]. En estas últimas celdas, deben escribirse las ecuaciones que describen cómo el campo depende de las coordenadas variables. Por ejemplo, si el campo es $E = E(x) = 1/x$, entonces [A12] = 1/A11.

El usuario ingresará las coordenadas del vector que determinarán el campo vectorial y la configuración del campo en las siguientes celdas:

Fórmula en Excel 10.86

Configuración de las celdas para el modelo de simetría esférica:

- G8 = -850000 { = k - constante del campo },
- G10 = 40 { = Δr - incremento en la coordenada r },

- $G11 = 140 \{ = r_{inicial} \}$, $G12 = 240 \{ = r_{final} \}$,
- $G15 = 6 \{ = \Delta\phi - \text{incremento en la coordenada } \phi \}$,
- $G16 = 90 \{ = \phi_{inicial} \}$, $G17 = 90 \{ = \phi_{final} \}$,
- $G20 = 6 \{ = \Delta\theta - \text{incremento en la coordenada } \theta \}$,
- $G21 = 0 \{ = \theta_{inicial} \}$, $G22 = 180 \{ = \theta_{final} \}$,
- $G26 = 0 \{ - \text{desplazamiento en } x \text{ del origen de las coordenadas esféricas} \}$,
- $G27 = 0 \{ - \text{desplazamiento en } y \text{ del origen de las coordenadas esféricas} \}$,
- $G28 = 0 \{ - \text{desplazamiento en } z \text{ del origen de las coordenadas esféricas} \}$.

Agregue un nuevo vector a la hoja. En la fórmula de Excel 10.87 se presentan los valores que deben asignarse a las celdas correspondientes al campo vectorial **A** de simetría esférica. En las celdas $A12$, $B12$ y $C12$ se muestran las componentes del campo en sus respectivas coordenadas. El usuario puede ingresar en estas celdas otras fórmulas que representen configuraciones de simetría esférica.

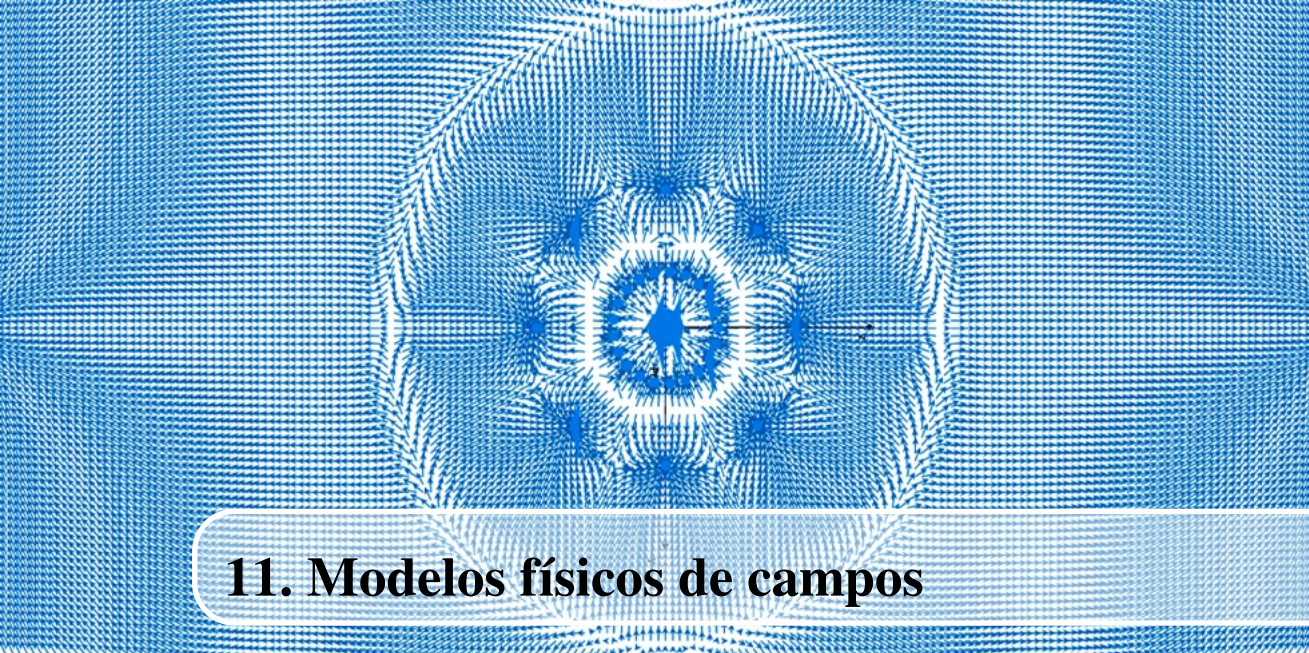
Fórmula en Excel 10.87 1

Configuración de las celdas relacionadas con el campo vectorial **A**:

- $C7 = "s["\&G10\&"]r=["\&G11\&";"\&G12\&"]$
 $s2["\&G15\&"]\phi=["\&G16\&";"\&G17\&"]$
 $s3["\&G20\&"]\theta=["\&G21\&";"\&G22\&"]$
 $color=[40]\text{origin[cart.]}=["\&G26\&";"\&G27\&";"\&G28\&"]\text{tfactor}=0;004835407s"$
- $A10 = A11$, $B10 = B11$, $C10 = C11$,
- $A12 = A11 * G8 / \text{POTENCIA}(A11^2 + B11^2 + C11^2; 3/2) \{ = A_x = k \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \}$,
- $B12 = B11 * G8 / \text{POTENCIA}(A11^2 + B11^2 + C11^2; 3/2) \{ = A_y = k \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \}$,
- $C12 = C11 * G8 / \text{POTENCIA}(A11^2 + B11^2 + C11^2; 3/2) \{ = A_z = k \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \}$,
- {Otros, cabeza del vector = 4 }.

Ejecución de la simulación

Ingresando los valores iniciales y oprimiendo cualquier botón de rotación, por ejemplo el botón XYZ podremos observar el campo en el sistema cartesiano. Con los botones YZ , XY y XZ observaremos las diferentes vistas. Con los botones $>>A$, $>>B$ y $>>C$ se puede simular la rotación de los ejes cartesianos alrededor de los tres ejes. El usuario puede ingresar sus propias ecuaciones y modificar las vistas de acuerdo a sus requerimientos.



11. Modelos físicos de campos

En este capítulo se presentan ejemplos de modelado de problemas físicos elementales, centrados principalmente en campos eléctricos y magnéticos clásicos. Todos los modelos expuestos en este apartado han sido desarrollados íntegramente utilizando el paquete *ScienSolar* y la hoja de cálculo de MS Excel, sin recurrir a programación en código VBA. En el capítulo 6 se proporcionaron las instrucciones detalladas sobre el uso de los botones y funciones del tablero de control, con el fin de realizar modelados exitosos sin necesidad de emplear programación adicional.

11.1 Fuerza eléctrica de varias cargas sobre una en particular

Uno de los pilares fundamentales de la electrostática es la ley de Coulomb, que describe la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo. Este modelo tiene como objetivo analizar la fuerza eléctrica resultante sobre una carga particular debido a la presencia de varias cargas, utilizando la ley de Coulomb como base teórica.

Ecuaciones matemáticas

La ley de Coulomb establece que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Matemáticamente, se expresa como:

$$\vec{F} = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \hat{r} = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^3} \vec{r} = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^3} (x, y, z), \quad (11.1)$$

donde: - F es la fuerza eléctrica entre las cargas. - k_e es la constante de Coulomb ($8,9875 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$). - q_1 y q_2 son las magnitudes de las cargas. - r es la distancia entre las cargas.

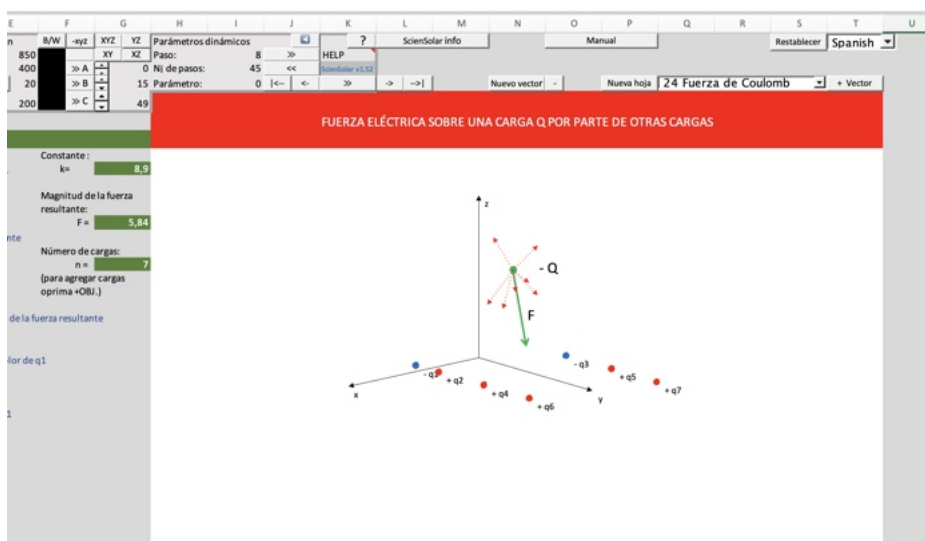


Figura 11.1.

Fuerza eléctrica F que ejercen varias cargas puntuales q_i sobre una carga en particular Q .

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 11.1.1 Fuerza eléctrica debida a una carga puntual sobre otra

Consideremos dos cargas puntuales, q_1 y q_2 , separadas por una distancia r . Hallar la fuerza eléctrica que q_1 ejerce sobre q_2 si $q_1 = 1 \mu\text{C}$, $q_2 = 2 \mu\text{C}$, y $r = 1 \text{ m}$.

SOLUCIÓN

La fuerza eléctrica está dada por la ley de Coulomb (11.1). Reemplazando valores se obtiene:

$$F = 8,9875 \times 10^9 \frac{|1 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}|}{1^2} = 17,975 \times 10^{-3} \text{ N}.$$

Fuerza eléctrica debida a varias cargas puntuales. Cuando una carga está sujeta a la influencia de varias cargas, la fuerza resultante sobre ella se calcula utilizando el principio de superposición. Este principio establece que la fuerza total es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas por cada carga. Matemáticamente, la fuerza resultante $\mathbf{F}_{\text{total}}$ sobre una carga q debido a n cargas q_i se expresa como:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n k_e \frac{qq_i}{r_i^3} \vec{r}_i,$$

donde $\vec{r}_i$ es el vector en la dirección de la carga q_i a la carga q si este par de cargas tienen signo opuesto y en dirección contraria si tienen el mismo signo.

Las componentes de la fuerza resultante se expresan de la siguiente forma:

$$F_x = \sum_{i=1}^n k_e \frac{qq_i}{r_i^3} x_i, \quad F_y = \sum_{i=1}^n k_e \frac{qq_i}{r_i^3} y_i, \quad F_z = \sum_{i=1}^n k_e \frac{qq_i}{r_i^3} z_i. \quad (11.2)$$

La ley de Coulomb y el principio de superposición tienen numerosas aplicaciones en física e ingeniería. Por ejemplo, en el diseño de dispositivos electrónicos, es crucial calcular las fuerzas eléctricas entre los componentes para asegurar su correcto funcionamiento. Además, en física de partículas, estas leyes son fundamentales para entender las interacciones entre partículas cargadas.

Construcción del modelo

Para construir el modelo de la fuerza resultante sobre una carga puntual q debido a la presencia de otras cargas, se requerirán cuatro vectores:

1. Un vector para representar el escalar de la carga puntual q .
2. Un segundo vector para representar cada carga q_i .
3. Un tercer vector para describir la fuerza $\mathbf{F}_i$ entre la carga q y cada carga q_i .
4. Un cuarto vector para calcular la fuerza total $\mathbf{F}_{\text{total}}$ resultante sobre la carga q .

Los paquetes que representan las cargas q_i y las fuerzas $\mathbf{F}_i$ se configurarán de manera que puedan clonarse al agregar más cargas al espacio tridimensional. Esto se realizará mediante el botón **+OBJ**, lo que permitirá que el modelo admita la inclusión de un número arbitrario de cargas. La fuerza resultante sobre la carga q se calculará de forma inmediata y automática después de agregar cada carga adicional.

En la fórmula de Excel 11.7, se establece la configuración de las celdas para ingresar la constante eléctrica k_e , definir el número de cargas presentes en el sistema y calcular la magnitud de la fuerza resultante. Esta configuración permite una implementación eficiente y flexible del modelo, facilitando el análisis de sistemas con múltiples cargas.

Fórmula en Excel 11.1

Valores de las celdas que corresponden a la configuración general:

- B3 =24 { primera fila },
- C3 =41 { ultima fila que corresponde al paquete a clonar },
- G10 =8;9 { = k },
- G14 =REDONDEAR(RAIZ(A21^2+B21^2+C21^2);2) { = $F = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ },

- $G17 = \text{CONTAR.SI}(D:D; "F_*") \{ = n - \text{número de cargas } q_i \},$
- $C24 = 4 \{ \text{Magnitud y color de } q_i \}$
- $D24 = "<- \text{Magnitud y color de } q" \&A15/2,$
- $D28 = "<- \text{Posición de } q" \&A15/2 \{ \text{fórmula en Excel para indicar al usuario el ingreso de las coordenadas de posición en donde se encuentra la carga } q_i \},$
- $D39 = "F_ " \&A15/2 \{ \text{etiqueta de la fuerza } F_i \}.$

En la fórmula de Excel 11.2, se presentan los valores que deben asignarse a las celdas que representan la carga principal $-Q$, sobre la cual actúan las fuerzas resultantes. Además, se especifican las propiedades asociadas a esta carga como su forma, color, nivel de transparencia y otras características visuales o funcionales que permiten su identificación y manipulación dentro del modelo. Estas propiedades son esenciales para garantizar una representación clara y efectiva de la carga en el espacio tridimensional, así como para facilitar la interpretación de los resultados durante la simulación.

Fórmula en Excel 11.2 1

Configuración de las celdas correspondientes a Q :

- $B6 = \text{SI}(C6 < 0; " - Q"; " + Q") \{ \text{etiqueta el nombre y signo de la carga } \},$
- $C6 = -4 \{ \text{valor de la carga y signo ingresados por el usuario } \},$
- $B9 = C6,$
- $A10 = 0, B10 = 0, C10 = 4 \{ \text{posición } P(x_o, y_o, z_o) \text{ de la carga principal } \},$
- $\{ \text{Otros Objeto} = 9, \text{transparencia} = 0, \text{cabeza del vector} = 6 \}.$

En la fórmula de Excel 11.3 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector F .

Fórmula en Excel 11.3 2

Configuración de las celdas correspondientes a F :

- $A18 = \text{SUMAR.SI.CONJUNTO}(C:C; D:D; "F_*") \{ = \sum F_{x_i} \},$
- $B18 = \text{SUMAR.SI.CONJUNTO}(A:A; D:D; "F_*") \{ = \sum F_{y_i} \},$
- $C18 = \text{SUMAR.SI.CONJUNTO}(B:B; D:D; "F_*") \{ = \sum F_{z_i} \},$
- $A19 = A10, B19 = B10, C19 = C10 \{ \text{posición de la carga y punto de aplicación de la fuerza } \},$
- $A21 = B18 \{ = F_x \}, B21 = C18 \{ = F_y \}, C21 = A18 \{ = F_z \}.$

En la fórmula de Excel 11.4, se muestran los valores que deben asignarse a las celdas que configuran las cargas q_i . Las direcciones de Excel que incluyen el símbolo \$ corresponden a valores o parámetros fijos, los cuales no cambian para las cargas. Por otro lado, las direcciones de celdas que no incluyen este símbolo son dinámicas y varían según la

carga específica que se esté considerando. Esta variabilidad se gestiona automáticamente al utilizar el botón **+OBJ**, el cual permite agregar nuevas cargas al modelo y ajustar las referencias de manera correspondiente.

Fórmula en Excel 11.4 3

Configuración de las celdas correspondientes a la carga q_i :

- **A24** =A15+\$A\$6,
- **B24** =SI(C24<0; " - q"&A15/2; " + q"&A15/2),
- **A27** =" q"&A15/2&" = ",
- **C24** =-4 { = q_i - valor y signo de la carga, ingresados por el usuario },
- **B27** =C24 { = q_i }, **A28** =-4 { = x_i },
- **B28** =-4+A24 { = y_i }, **C28** =0 { = z_i } { coordenadas del punto en donde está la carga = q_i },
- { Otros Objeto = 9 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 6 }.

En la fórmula de Excel 11.5, se presentan los valores que deben asignarse a las celdas correspondientes al vector fuerza $\vec{F}_i$, que representa la fuerza entre la carga principal y cada carga q_i . Las referencias de Excel que incluyen el símbolo \$ corresponden a valores o parámetros fijos, los cuales permanecen constantes para todas las fuerzas. Por otro lado, las direcciones de celdas que no incluyen este símbolo son dinámicas y varían en función de cada fuerza específica. Esta variabilidad se gestiona automáticamente al utilizar el botón **+OBJ**, el cual permite agregar nuevas cargas y, en consecuencia, calcular las fuerzas correspondientes de manera dinámica.

Fórmula en Excel 11.5 4

Configuración de las celdas que corresponden a F_i :

- **A33** =A24+\$A\$6,
- **A37** =\$A\$10 { = x_o }, **B37** =\$B\$10 { = y_o }, **C37** =\$C\$10 { = z_o },
- **A39** =1/(POTENCIA((\$A\$10-A28)^2+(\$B\$10-B28)^2+(\$C\$10-C28)^2;3/2))
(\$A\$10-A28)\$G\$10*C24*\$B\$9
{ = $F_{x_i} = k_e \frac{qq_i}{((x_o-x_i)^2+(y_o-y_i)^2+(z_o-z_i)^2)^{3/2}} (x_o - x_i)$ },
- **B39** =1/(POTENCIA((\$A\$10-A28)^2+(\$B\$10-B28)^2+(\$C\$10-C28)^2;3/2))
(\$B\$10-B28)\$G\$10*C24*\$B\$9
{ = $F_{y_i} = k_e \frac{qq_i}{((x_o-x_i)^2+(y_o-y_i)^2+(z_o-z_i)^2)^{3/2}} (y_o - y_i)$ },
- **C39** =1/(POTENCIA((\$A\$10-A28)^2+(\$B\$10-B28)^2+(\$C\$10-C28)^2;3/2))
(\$C\$10-C28)\$G\$10*C24*\$B\$9
{ = $F_{z_i} = k_e \frac{qq_i}{((x_o-x_i)^2+(y_o-y_i)^2+(z_o-z_i)^2)^{3/2}} (z_o - z_i)$ },
- { Otros , línea = 2 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 2 }.

Ejecución de la simulación

Con el botón **+OBJ** agregue más cargas al sistema. Por medio del botón **-OBJ** elimine cargas. En las filas 28, 46, 64 y demás (dependiendo del número de cargas) introduzca las posiciones de las diferentes cargas. En las celdas **C6**, **C24**, **C42** y así sucesivamente, ingrese la magnitud y signo de cada carga. En **G10** ingrese el valor de la constante k , **G10** = 8,9E9.

Ejemplo 11.1.2 Considerar el ejemplo 11.1.1, donde $q_1 = 1 \mu\text{C}$, $q_2 = 2 \mu\text{C}$, y $r = 1 \text{ m}$ y calcular la fuerza resultante que la carga q_2 ejerce sobre la carga $q_1 \equiv Q$.

SOLUCIÓN

Para lograr este objetivo, introduciremos los siguientes valores en las celdas correspondientes:

Fórmula en Excel 11.6

- **C6** = 1×10^{-6} (es decir, 0,000001).
- **G10** = $8,9875 \times 10^9$ (es decir, 8987500000).
- **A10** = 0, **B10** = 0, **C10** = 0 { posición de la carga principal Q en el origen }.
- **C24** = 2×10^{-6} (es decir, 0,000002).
- **A28** = 0, **B28** = 1, **C28** = 0 { posición de la segunda carga q_2 }.
- **E5** = 100 { escala del sistema de coordenadas }.
- **B17** = $100 \times 0,01$ { sin introducir el signo igual. Este valor permite visualizar el vector en el sistema de coordenadas a una escala mayor que su tamaño real, ya que su magnitud original es muy pequeña }.

Una vez introducidos todos estos valores, se puede observar el resultado de la magnitud de la fuerza en la celda **G14**, la cual muestra un valor de 0,017975. Este resultado coincide con el valor previamente calculado utilizando la fórmula de la Ley de Coulomb, confirmando la precisión del modelo implementado.

Ejemplo 11.1.3 Una carga puntual de $q_1 = +1 \mu\text{C}$ se encuentra ubicada sobre el eje y en la posición $P(0, -2, 0)$, mientras que una segunda carga puntual de $q_2 = +3 \mu\text{C}$ está situada sobre el mismo eje en $P(0, 2, 0)$. Se desea construir la gráfica que describe el comportamiento de la magnitud de la fuerza eléctrica ejercida sobre una tercera carga $Q = +4 \mu\text{C}$, la cual se mueve con movimiento rectilíneo uniforme paralelamente al eje y , desde el punto $P(0, -4, 0,5)$ hasta el punto $P(0, 6, 0,5)$.

SOLUCIÓN

Para resolver el problema, es necesario recolectar datos de la fuerza eléctrica en diferentes posiciones de la carga Q a lo largo de su trayectoria rectilínea. Para

ello, se registrará la magnitud de la fuerza en cada punto y se construirá la gráfica correspondiente.

Inicialmente, se añade una nueva carga utilizando el botón , lo que permite configurar un sistema de tres cargas. La carga principal se considerará como la carga en movimiento. Los datos se registrarán utilizando las celdas $B13 = 30$ y $B14 = 10$, y la magnitud de la fuerza se copiará en la celda $E4 = G14$. La configuración de las cargas y el cálculo de la fuerza se realizarán según la fórmula de Excel 11.7.

Fórmula en Excel 11.7

- $I3 = 0.05$ {= *Paso*},
- $I4 = 200$ {= No. de pasos},
- $G10 = 8900000000$ {= *k*},
- $E14 = G14$ {= *F*},
- $G14 = \text{RAIZ}(A21^2 + B21^2 + C21^2)$ {= *F*},
- $G17 = \text{CONTAR.SI}(D:D; "F_*")$ {= *n* = 2},
- $C6 = 0.000004$ {= *Q*},
- $A10 = 0$, $B10 = -4 + I5$, $C10 = 0.5$ {= Posición de la carga principal},
- $B13 = 30$ {= número de fila para la tabla de datos},
- $B14 = 10$ {= número de columna para la tabla de datos},
- $C24 = 0.000001$ {= *q*₁},
- $A28 = 0$, $B28 = -2$, $C28 = 0$ {= Posición de la carga *q*₁},
- $C42 = 0.000003$ {= *q*₃},
- $A46 = 0$, $B46 = 2$, $C46 = 0$ {= Posición de la carga *q*₂}.

Una vez configurado el modelo, se procede a oprimir el botón  y posteriormente, el botón . Al hacerlo, se iniciará la simulación y la tabla de datos comenzará a llenarse automáticamente a partir de la fila 30 y la columna 10 de la hoja de cálculo.

Para construir la gráfica correspondiente, se utilizarán los datos generados y la herramienta estándar de Excel para la creación de gráficos. Primero, seleccione el rango de datos desde la celda $L32$ hasta $L433$ y desde $R32$ hasta $R433$. Luego, diríjase a la pestaña *Insertar* y elija la opción de gráfica de dispersión. Esto generará un gráfico similar al que se muestra en la figura 11.2.

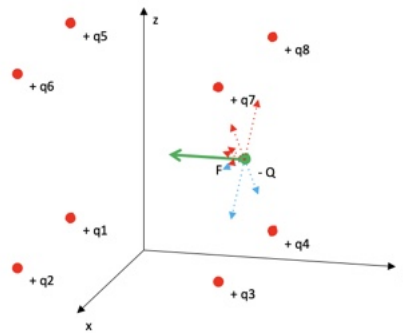
Para registrar la trayectoria de la carga (representada por la línea verde en la figura 11.2), oprima el botón . A continuación, seleccione , luego  ubicados en la celda $A6$ y, finalmente, oprima . Este procedimiento permitirá visualizar la trayectoria de la carga en movimiento durante la simulación y recolectar nuevos datos.

componentes de la fuerza son $\vec{F} = 0\hat{i} - 2,81\hat{j} - 2,81\hat{k}$. Estas componentes se registran en las celdas [A21], [B21] y [C21]. La magnitud de la fuerza resultante es $|F| = 3,98 \text{ N}$, la cual se encuentra en la celda [G14].

3. **Tercer caso.** Cuando Q se ubica en el centro del cubo, es decir, en las coordenadas [A10] = 0, [B10] = 0 y [C10] = 4, se observa que las componentes de la fuerza son $\vec{F} = (0, 0, 0)$. La magnitud de la fuerza resultante es $|F| = 0 \text{ N}$. Este resultado se debe a la simetría del sistema: Todas las cargas son iguales y están distribuidas a la misma distancia de la carga principal, lo que provoca que las componentes de las fuerzas se anulen mutuamente.

Fórmula en Excel 11.8

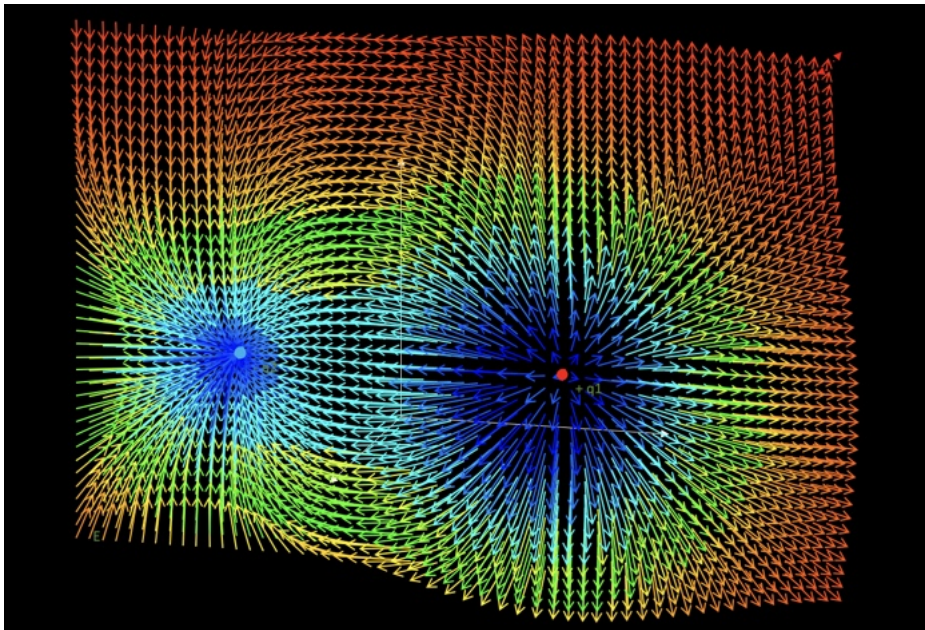
- [G10] =8900000000 {= k },
- [G14] =RAIZ(A21^2+B21^2+C21^2) {= F },
- [G17] =CONTAR.SI(D:D;"F_*") {= n },
- [C6] =0,0001 {= Q - carga principal},
- [B9] =C6,
- [A10] =0, [B10] =4, [C10] =4 { - Coordenadas de la carga Q },
- [C24] =0,0001 {= q_1 },
- [A28] =-4, [B28] =-4, [C28] =0 { - Coordenadas de la carga q_1 },
- [C42] =0,0001 {= q_2 },
- [A46] =4, [B46] =-4, [C46] =0 { - Coordenadas de la carga q_2 },
- [C60] =0,0001 {= q_3 },
- [A64] =4, [B64] =4, [C64] =0 { - Coordenadas de la carga q_3 },
- [C78] =0,0001 {= q_4 },
- [A82] =-4, [B82] =4, [C82] =0 { - Coordenadas de la carga q_4 },
- [C96] =0,0001 {= q_5 },
- [A100] , [B100] =-4, [C100] =8 { - Coordenadas de la carga q_5 },
- [C114] =0,0001 {= q_6 },
- [A118] =4, [B118] =-4, [C118] =8 { - Coordenadas de la carga q_6 },
- [C132] =0,0001 {= q_7 },
- [A136] , [B136] =4, [C136] =8 { - Coordenadas de la carga q_7 },
- [C150] =0,0001 {= q_8 },
- [A154] , [B154] =4, [C154] =8 { - Coordenadas de la carga q_8 }.

**Figura 11.3**

Gráfica del comportamiento de la fuerza a lo largo del recorrido de una carga Q en el campo de otras dos cargas q_1 y q_2 .

Nota. Elaboración propia.

11.2 Campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales

**Figura 11.4.**

Campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales.

Nota. Elaboración propia.

El objetivo de este modelo es estudiar el campo eléctrico en un punto del espacio generado por un conjunto de cargas puntuales distribuidas de manera arbitraria en un espacio

tridimensional. El modelo permite añadir o eliminar cargas en el sistema de coordenadas y configurar cada una de forma independiente. Además, calcula el campo eléctrico en un punto específico del espacio y representa la configuración del campo en una región espacial determinada.

Ecuaciones matemáticas

El campo eléctrico generado por una carga puntual se determina mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (11.3)$$

donde k es la constante de Coulomb, q es la magnitud de la carga, r es la distancia entre la carga y el punto de interés, y $\hat{r}$ es el vector unitario en la dirección de la carga al punto.

Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio generado por un sistema de n cargas, se aplica el principio de superposición. Así, el campo eléctrico total en un punto es la suma vectorial de los campos eléctricos generados por cada una de las cargas individualmente:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad (11.4)$$

donde $\mathbf{E}_i$ es el campo eléctrico generado por la i -ésima carga.

Teniendo en cuenta que las distancias r_i desde cada carga hasta el punto de interés están dadas por:

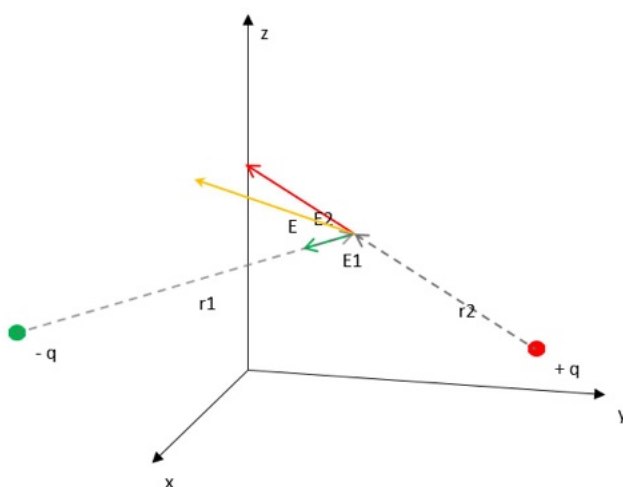
$$r_i = \sqrt{(x_i - x_{0i})^2 + (y_i - y_{0i})^2 + (z_i - z_{0i})^2}, \quad (11.5)$$

y que el vector unitario $\hat{r}$ se expresa como $\hat{r} = \mathbf{r}/r = (x, y, z)/r$, las componentes del campo eléctrico en coordenadas cartesianas se pueden escribir como:

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = \left(\sum_{i=1}^n E_{ix}, \sum_{i=1}^n E_{iy}, \sum_{i=1}^n E_{iz} \right), \quad (11.6)$$

donde, para la carga que se encuentra en (x_i, y_i, z_i) , las componentes del campo eléctrico en el punto (x, y, z) son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= k \frac{q_i(x - x_i, y - y_i, z - z_i)}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{3/2}}, \\
 E_{1x} &= k \frac{q_i(x - x_i)}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{3/2}}, \\
 E_{1y} &= k \frac{q_i(y - y_i)}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{3/2}}, \\
 E_{1z} &= k \frac{q_i(z - z_i)}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{11.7}$$

**Figura 11.5.**

Campo eléctrico de un dipolo eléctrico en un punto del espacio como la suma vectorial de los campos generados por cada una de las cargas por separado.

Nota. Elaboración propia.

Construcción del modelo

Se construirá un modelo para calcular el campo eléctrico generado por una carga puntual, con la posibilidad de añadir más cargas mediante el botón **+OBJ**. Para ello, se requieren tres vectores de *ScienSolar*: Uno para representar la carga como un escalar, otro para representar el campo eléctrico generado por la carga y un último vector para representar el campo eléctrico total cuando se consideran múltiples cargas. En una nueva hoja de *ScienSolar*, se añaden estos tres vectores y se configuran de acuerdo con la fórmula de Excel 11.9 con valores iniciales de las cargas ajustados a la escala del sistema de coordenadas.

Fórmula en Excel 11.9

- B3 =15, C3 =32 { primera y última fila que contienen el paquete de celdas que agrega nuevas cargas al sistema mediante el botón  },
- E5 =40 { escala del sistema de coordenadas },
- G10 =8900000000 { = k - constante eléctrica },
- G14 =RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2) { = $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ },
- D15 ="<- Magnitud y color de q"&A15/2 { - valor inicial de la carga },
- G17 =CONTAR.SI(D:D;"E_*") { = n - número de cargas en el sistema },
- D19 ="<- Posición de q"&A15/2 { = 0 },
- D30 ="E_"&A15/2 { = E_i - etiqueta del campo }.

En la fórmula de Excel 11.18 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo eléctrico resultante **E**.

Fórmula en Excel 11.10

1

Configuración de las celdas para el campo vectorial **E**:

- A9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(C:C;D:D;"E_*") { = $E_z = \sum_{i=1}^n E_{iz}$ },
- B9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(A:A;D:D;"E_*") { = $E_x = \sum_{i=1}^n E_{ix}$ },
- C9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(B:B;D:D;"E_*") { = $E_y = \sum_{i=1}^n E_{iy}$ },
- A10 =A11, B10 =B11, C10 =C11,
- A11 =0 { coordenada en x del punto de interés },
- B11 =0 { coordenada en y del punto de interés },
- C11 =3 { coordenada en z del punto de interés },
- A12 =B9 { = E_x },
- B12 =C9 { = E_y },
- C12 =A9 { = E_z },
- {Otros , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.11 se muestran los valores que deben tener las celdas que configuran la carga q_i . Las direcciones con el símbolo \$ se refieren a valores que no cambian para todas las cargas, mientras que las que no contienen \$ serán diferentes y se actualizarán para cada carga.

Fórmula en Excel 11.11

2

Configuración de las celdas correspondientes a q_i :

- A15 =A6+1 { - etiqueta del vector en aumento },
- B15 =SI(C15<0; " - "; " + ")&"q"&A15/2 { = q_i - etiqueta },
- C15 =0;000000004 { = q_i - magnitud y signo de la carga },

- A19 = -3, B19 = -3, C19 = A15/2-1 { - posición de la i -ésima carga },
- {Otros Objeto = 9 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.12 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo eléctrico de cada carga, E_i . Las direcciones con el símbolo \$ se refieren a valores que no cambian para todos los campos, mientras que las que no contienen \$ serán diferentes y se actualizarán para cada campo.

Fórmula en Excel 11.12 3

Configuración de las celdas que corresponden a E_i :

- A24 = A15+1 { - etiqueta del vector en aumento },
- C26 = \$G\$22 { - configuración para mostrar/ocultar los vectores E_i },
- A28 = \$A\$11 { = x },
- B28 = \$B\$11 { = y },
- C28 = \$C\$11 { = z },
- A30 = $1/(\text{POTENCIA}(\text{POTENCIA}(\$A\$11-A19;2)+\text{POTENCIA}(\$B\$11-B19;2)+\text{POTENCIA}(\$C\$11-C19;2);3/2))*(\$A\$11-A19)*\$G\$10*C15$
 $\{ = E_{ix} = k \frac{q_i (x-x_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}} \},$
- B30 = $1/(\text{POTENCIA}(\text{POTENCIA}(\$A\$11-A19;2)+\text{POTENCIA}(\$B\$11-B19;2)+\text{POTENCIA}(\$C\$11-C19;2);3/2))*(\$B\$11-B19)*\$G\$10*C15$
 $\{ = E_{iy} = k \frac{q_i (y-y_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}} \},$
- C30 = $1/(\text{POTENCIA}(\text{POTENCIA}(\$A\$11-A19;2)+\text{POTENCIA}(\$B\$11-B19;2)+\text{POTENCIA}(\$C\$11-C19;2);3/2))*(\$C\$11-C19)*\$G\$10*C15$
 $\{ = E_{iz} = k \frac{q_i (z-z_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{3/2}} \},$
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 2 }.

Ejemplo 11.2.1 Un dipolo eléctrico está compuesto por dos cargas de 4 nC de diferente signo, separadas una distancia de 6 metros. La carga positiva se ubica en el punto (0, 3, 1), mientras que la carga negativa se encuentra en (0, -3, 1).

1. Hallar la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto (0, 1, 3).
2. Obtener una configuración general del campo en una región del espacio alrededor de las cargas.
3. Evaluar el comportamiento del campo a lo largo de la línea que une las cargas.

SOLUCIÓN

Con el botón **+OBJ**, agregue o con **-OBJ** elimine cargas hasta tener dos cargas en el modelo. Luego, configure las celdas para las posiciones y valores de las cargas como se muestra en la fórmula de Excel 11.18. El resultado se muestra en la figura

11.5.

Fórmula en Excel 11.13

1

Configuración de las celdas para el campo **E** de un dipolo eléctrico:

1. **A11** = 0 {= x }, **B11** = 1 {= y }, **C11** = 3 {= z },
2. **C15** = 0.000000004 {= q_1 },
3. **A19** = 0 {= x_{q_1} }, **B19** = 3 {= y_{q_1} }, **C19** = 1 {= z_{q_1} },
4. **C33** = -0.000000004 {= q_2 },
5. **A37** = 0 {= x_{q_2} }, **B37** = -3 {= y_{q_2} }, **C37** = 1 {= z_{q_2} }.

1. Las componentes del campo eléctrico en el punto (0, 1, 3) son (0, -4,73, 2,75), las cuales se muestran en las celdas **A12**, **B12** y **C12**. La magnitud del campo se muestra en **G14** = 5.28 N.
2. Para obtener la configuración del campo en una región del espacio en coordenadas cartesianas, simplemente ingrese la letra o (sin signo igual) en **C7** y oprima **XYZ**. Al oprimir el botón **B/W** se obtendrá una imagen como la de la figura 11.4.
3. Para evaluar el comportamiento del campo a lo largo de la línea que une las cargas, ingrese el paso de la simulación **I3** =0,5, las coordenadas del punto inicial como **A11** =0, **B11** =-4, **C11** =1; luego deje seleccionada la celda **B11** para simular el avance del punto oprimiendo el botón **>>** ubicado en J3 y regrese con el botón **<<** ubicado en J4. Para registrar el movimiento a lo largo de la trayectoria, oprima el botón **⚙** antes de iniciar la simulación.

Ejemplo 11.2.2 Diseñar un modelo simple tridimensional del átomo de Silicio y calcular su campo eléctrico en diferentes puntos del espacio.

SOLUCIÓN

El cálculo del radio de las capas electrónicas del átomo de silicio (Si) se basa en su configuración electrónica, que es:

$$\text{Si: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2.$$

Esto significa que el silicio tiene los siguientes electrones distribuidos en sus capas:

- 2 electrones en la capa $1s$,
- 2 electrones en la capa $2s$,
- 6 electrones en la capa $2p$,
- 2 electrones en la capa $3s$,
- 2 electrones en la capa $3p$.

Cálculo del radio para cada capa:

1. Modelo de Bohr (para capas más internas). La fórmula para el radio en el modelo de Bohr es:

$$r_n = \frac{n^2 \cdot a_0}{Z_{\text{ef}}},$$

donde: - r_n es el radio de la capa con número cuántico principal n , - a_0 es el radio de Bohr ($\sim 0,529 \text{ \AA}$), - Z_{ef} es la carga nuclear efectiva.

2. Cálculo del radio efectivo con apantallamiento. Para calcular Z_{ef} , podemos usar la regla de Slater para estimar el apantallamiento:

- Para la capa $1s^2$, $Z_{\text{ef}} \approx 14$,
- Para la capa $2s^2 2p^6$, $Z_{\text{ef}} \approx 12$,
- Para la capa $3s^2 3p^2$, $Z_{\text{ef}} \approx 5$.

Cálculo de los radios de las capas:

1. Para la capa $1s$ ($n = 1$):

$$r_1 = \frac{1^2 \cdot 0,529 \text{ \AA}}{14} \approx 0,038 \text{ \AA}.$$

2. Para la capa $2s$ y $2p$ ($n = 2$): Usando $Z_{\text{ef}} \approx 12$:

$$r_2 = \frac{2^2 \cdot 0,529 \text{ \AA}}{12} \approx 0,088 \text{ \AA}.$$

3. Para la capa $3s$ y $3p$ ($n = 3$): Usando $Z_{\text{ef}} \approx 10$:

$$r_3 = \frac{3^2 \cdot 0,529 \text{ \AA}}{5} \approx 0,95 \text{ \AA}.$$

Resumen de los radios aproximados de las capas electrónicas:

1. Capa $1s$: $r_1 \approx 0,038 \text{ \AA}$,
2. Capa $2s, 2p$: $r_2 \approx 0,088 \text{ \AA}$,
3. Capa $3s, 3p$: $r_3 \approx 0,95 \text{ \AA}$.

Es decir, distribuiremos los 14 electrones en los tres radios mencionados, de acuerdo con la configuración electrónica descrita previamente. En el centro, se colocará una carga positiva de la misma magnitud para garantizar la neutralidad del átomo. Para llevar a cabo la distribución de los electrones, se emplearán coordenadas esféricas, las cuales se convertirán a coordenadas cartesianas mediante la siguiente transformación (ecuación 10.6):

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (11.8)$$

donde r representa los radios de las capas electrónicas, y los ángulos ϕ y θ se utilizarán para posicionar los electrones en cada capa, de modo que queden distribuidos de manera aproximadamente uniforme, según los requerimientos del usuario. Para automatizar este proceso, se emplearán fórmulas en Excel que permitirán distribuir los electrones en el espacio de manera eficiente.

El diseño del ejemplo permitirá que, al ingresar la cantidad de electrones y el radio correspondiente a cada capa electrónica, cada electrón se posicione automáticamente, garantizando una distribución adecuada en las diferentes capas. Además, se podrán agregar o eliminar electrones en cualquier momento mediante los botones **+OBJ** y **-OBJ**.

En las fórmulas de Excel 11.14 y 11.15 se especifican las celdas que configuran, junto con otros parámetros del modelo, los ángulos dentro de los cuales se distribuirán los electrones en cada capa. Por otro lado, en la fórmula 11.16 se indican los radios de cada capa, basados en el modelo de Bohr y las reglas de Slater.

Fórmula en Excel 11.14

Configuración de las celdas para el ejemplo del modelo del átomo de silicio:

- **E5** =3500000000000 { - escala que debe tener el sistema de coordenadas para una óptima visualización },
- **B2** =13 { Agregar 13 electrones al sistema para un total de 14 (Silicio) },
- **B3** =33 { - fila inicial }, **C3** =50 { = 33 - fila final del paquete a clonar para reproducir electrones },
- **G10** =8900000000 { = k = },
- **G14** =RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2) { = $|E|$ = },
- **G16** =G17-1 { = *electrones* : },
- **G17** =CONTAR.SI(D:D;"E_*") { = $e + p$ = },
- **G22** =1 { mostrar/ocultar vectores campo auxiliares $\vec{E}_i$ },
- **G25** =-G17*C33 { = $+p$ - carga del núcleo },

Fórmula en Excel 11.15

Configuración de los ángulos de distribución de los electrones del átomo de Silicio:

- **E18** =90 { = ϕ_{ini} - ángulo azimutal inicial para distribuir los electrones },
- **E19** =90 { = ϕ_{fin} - ángulo azimutal final para distribuir los electrones },
- **E20** =0 { = θ_{ini} - ángulo polar inicial para distribuir los electrones },
- **E21** =360 { = θ_{fin} - ángulo polar inicial para distribuir los electrones }.

Fórmula en Excel 11.16

Configuración de los radios de las capas electrónicas del átomo de silicio:

- E28 =SUMA(E29:E35) {= N - cantidad total de electrones en el átomo},
- E29 =2 {= n_1 - cantidad de electrones en la primera capa},
- G29 =0;00000000000038 {= r_1 - radio de la primera capa},
- D30 ="E_"&A15/2 {= 293969762082, 432},
- E30 =8 {= n_2 - cantidad de electrones en la segunda capa},
- G30 =0;00000000000088 {= r_2 - radio de la segunda capa},
- E31 =4 {= n_3 - cantidad de electrones en la última capa externa},
- G31 =0;00000000000095 {= r_3 - radio de la última capa}.

En la fórmula de Excel 11.17 se observan las celdas que contienen algunas fórmulas de Excel que se configuran para que distribuyan automáticamente los electrones en cada una de las capas, de acuerdo a la distribución electrónica dada en E29, E30 y E31. Esto se realiza con la función SI.CONJUNTO.

Fórmula en Excel 11.17

- D37 ="<- Posición " {= (x, y, z) posición de la primera carga},
- E37 =A33/2-1 { - número de la carga electrónica},
- D38 =SI.CONJUNTO(E37<=\$E\$29;\$F\$29;E37<=\$E\$30+\$E\$29;\$F\$30;
E37<=\$E\$31+\$E\$30+\$E\$29;\$F\$31;
E37<=\$E\$32+\$E\$31+\$E\$30+\$E\$29;\$F\$32;
E37<=\$E\$33+\$E\$32+\$E\$31+\$E\$30+\$E\$29;\$F\$33;
E37<=\$E\$34+\$E\$33+\$E\$32+\$E\$31+\$E\$30+\$E\$29;\$F\$34;
E37<=\$E\$35+\$E\$34+\$E\$33+\$E\$32+\$E\$31+\$E\$30+\$E\$29;\$F\$35)
{ esta fórmula de Excel identifica el radio que le corresponde a cada electrón, de acuerdo a la configuración electrónica},
- E38 =BUSCARV(D38;\$F\$29:\$G\$34;2) {= r_i - busca el valor de radio de la correspondiente capa},
- E39 =\$E\$18+(\$E\$19-\$E\$18)/E41*E42 {= ϕ_i - asigna un ángulo ϕ a la i -ésima carga dentro de la capa},
- E40 =\$E\$20+(\$E\$21-\$E\$20)/E41*E42 {= θ_i - asigna un ángulo θ a la i -ésima carga dentro de la capa},
- D41 ="Total en "&D38,
- E41 =CONTAR.SI(D:D;D38) { - número total de cargas en la capa},
- E42 =CONTAR.SI(\$D\$15:D40;D38) {= n_i - i -ésima carga en la capa},
- D48 ="E_"&A33/2 { etiqueta del campo de cada carga}.

Inicialmente, se agregará una carga al modelo **Campo eléctrico de cargas puntuales**, de modo que en la hoja de cálculo de *ScienSolar* aparezcan cinco

vectores en total: uno correspondiente al campo eléctrico total, dos para el núcleo atómico y su campo eléctrico, y dos para la carga y el campo de un electrón. Este último se configurará de manera que pueda clonarse para agregar más electrones al átomo. La carga del núcleo se igualará automáticamente a la carga total de los electrones, lo cual se implementa en la celda **G25**. No obstante, el usuario tiene la opción de eliminar esta fórmula y asignar manualmente un valor constante para la carga positiva del núcleo.

Una vez agregados los vectores, se configurarán las celdas según se detalla en la fórmula de Excel 11.18. Las celdas no mostradas en esta fórmula conservan la configuración establecida durante la construcción del modelo **Campo eléctrico de cargas puntuales**, tal como se mencionó previamente.

Es importante destacar que, aunque todas las magnitudes involucradas están en una escala atómica, los cálculos del campo eléctrico se realizan utilizando fórmulas de la electrodinámica clásica, lo que proporciona resultados altamente aproximados.

Fórmula en Excel 11.18 **1**

Configuración de las celdas para el campo **E**:

- **B8** =60*1 { - sin el signo =, estos parámetros hacen visibles los vectores a la escala pequeña},
- **A11** =0;000000000002 {= x }, **B11** =5;85000000000001E-11 {= y }, **C11** =5;85000000000001E-11 {= z - coordenadas del punto de interés},
- **B15** =SI(C15<0; " - "; " + ")&"p" { etiqueta del núcleo},
- **C15** =G25 {= Q - carga del núcleo},
- **B16** =9 { este número se introduce para indicar que este elemento (carga) corresponde a un escalar},
- **A21** =\$A\$11 {= x }, **B21** =\$B\$11 {= y }, **C21** =\$C\$11 {= z },
- **C23** =2*G17 { el tamaño del núcleo aumenta de acuerdo al número de electrones que lo rodean},
- **B33** =SI(C33<0; " - "; " + ")&"q"&E37 { etiqueta de cada electrón},
- **C33** =-1;6E-19 {= q_i - carga del electrón},
- **A37** =E38*COS(RADIANTES(E39))*SENO(RADIANTES(E40)) {= x_{q_i} },
- **B37** =E38*SENO(RADIANTES(E39))*SENO(RADIANTES(E40)) {= y_{q_i} },
- **C37** =E38*COS(RADIANTES(E40)) {= z_{q_i} },
- **A39** =\$A\$11 {= x }, **B39** =\$B\$11 {= y }, **C39** =\$C\$11 {= z }.

Una vez configurado el modelo, se procederá a agregar 13 electrones presionando una sola vez el botón **+OBJ** (teniendo en cuenta que la celda **B2** contiene el valor 13). Utilizando un rango azimutal de 90° a 90° y un rango polar de 0° a 360° , se obtendrá una distribución de electrones similar a la mostrada en la figura 11.6.

Cálculo del campo eléctrico en un punto del espacio

Dado que este es un problema clásico, el campo eléctrico puede calcularse a una distancia considerable del átomo para obtener resultados aproximadamente coherentes. Calculemos el campo eléctrico del átomo de silicio a una distancia equivalente a 10 veces su diámetro, es decir, a una distancia $d = 10 \times 2 \times 9,52 \times 10^{-11} \text{ m} = 19,4 \times 10^{-10} \text{ m}$. Para simplificar los cálculos, situaremos esta distancia a lo largo del eje y . Por lo tanto, en el modelo se ingresan los valores $A11 = 0$, $C11 = 19,4\text{E}-10$ y $E11 = 0$. El resultado del campo eléctrico se obtiene en la celda $G14 = 375566924 \text{ N/C}$. Si se desea visualizar el vector $\mathbf{E}$ en el sistema de coordenadas, es necesario reducir la escala, por ejemplo, asignando $E5 = 1\text{E}+11 = 100000000000$.

Cálculo del campo en el mismo punto para el átomo de silicio sin dos electrones de valencia.

Para realizar este cálculo, se elimina la fórmula de la celda $G25$ y se ingresa manualmente el valor de la carga del núcleo, $G25 = 2,4\text{E}-18$, que corresponde a $0,0000000000000000024 \text{ C}$. Luego, se borra el contenido de la celda $B2$ y se presiona dos veces el botón OBJ para eliminar dos electrones. El resultado para el campo eléctrico en este caso es $G14 = 1,14\text{E}+9 = 1137754834 \text{ N/C}$.

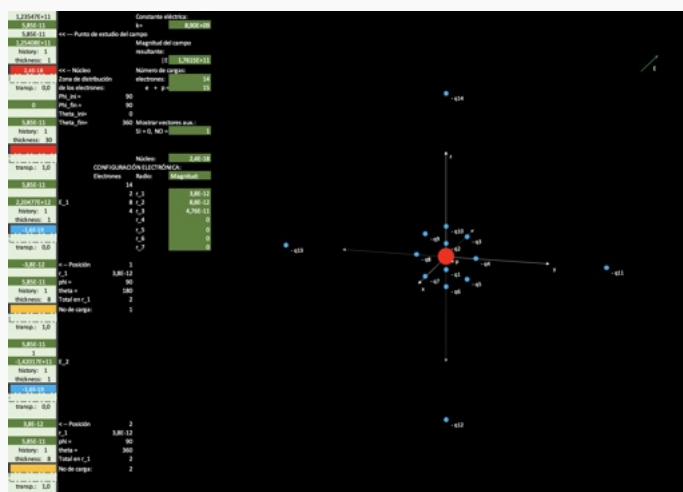


Figura 11.6

Distribución de los electrones en sus capas electrónicas para el átomo de silicio.

Nota. Elaboración propia.

Observación del campo eléctrico en una región dentro del átomo.

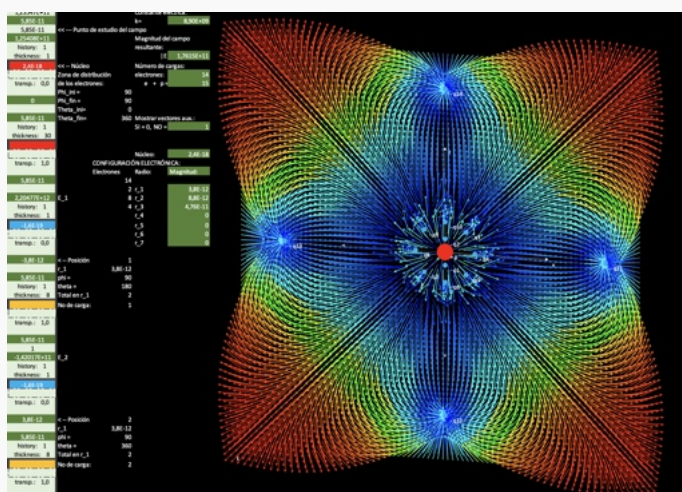
Si consideramos el átomo como un sistema completamente clásico, es posible analizar el comportamiento del campo eléctrico resultante al tratar tanto los electrones como el núcleo como partículas puntuales. Para ello, se agregan los dos electrones que se eliminaron en el ejemplo anterior, obteniendo un total de 14

electrones más el núcleo. A continuación, se utiliza la celda C7 para observar el campo eléctrico en una región específica del espacio. Con el fin de obtener resultados rápidos y eficientes, esta celda se configura para visualizar el campo en coordenadas cartesianas, específicamente en el plano yz , con un rango de coordenadas del orden de las dimensiones atómicas.

En resumen, en la celda **C7** se introduce, sin espacios, la siguiente cadena de valores:

```
C7="o[0,000145]x=[0;0]o2[0,00000000000015]y=[-0,0000000000  
06;0,000000000006]o3[0,00000000000015]z=[-0,000000000006;0,000000  
00006]color=[9000000000000]origin[cart.]=[0,0000000000002;0;0]t  
factor=0.009593228s".
```

Tras presionar el botón **XYZ**, se obtendrá una imagen similar a la mostrada en la figura 11.7, siempre que se utilice una escala de $E5 = 6500000000000$.

**Figura 11.7**

Campo eléctrico en el átomo de silicio, considerando los electrones como cargas puntuales clásicas (en mecánica cuántica, en general, esta consideración no es válida para un átomo).

Nota. Elaboración propia.

Como ejercicio para el lector, se propone la construcción de dos modelos a partir del modelo **Campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales**:

1. **Cálculo del campo eléctrico de un cuadrupolo.** Este modelo consiste en un conjunto de cuatro cargas puntuales distribuidas en los vértices de un cuadrado. El lector deberá calcular el campo eléctrico resultante en un punto del espacio debido a esta configuración.
2. **Cálculo del campo eléctrico de un octopolo.** Este modelo implica un conjunto de ocho cargas puntuales distribuidas en los vértices de un cubo. El lector deberá

determinar el campo eléctrico generado por esta disposición en un punto específico del espacio. En la figura 11.8 se observa el campo eléctrico de un octopolo.

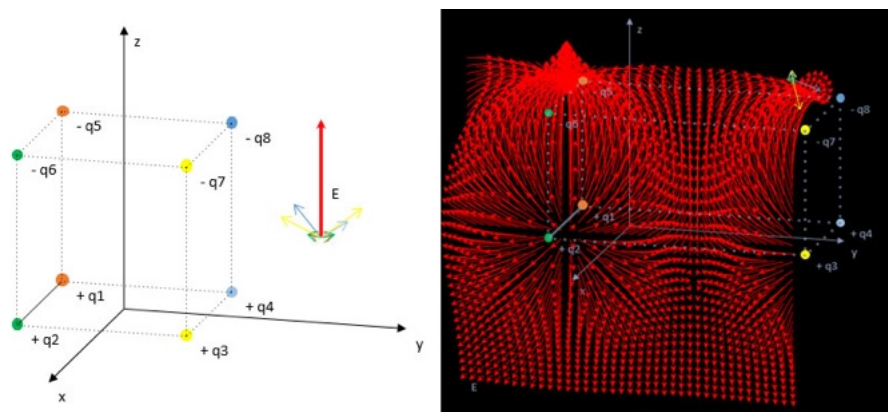


Figura 11.8.

Campo eléctrico de un octopolo.

Nota. Elaboración propia.

11.3 Campo eléctrico de distribuciones lineales continuas de carga

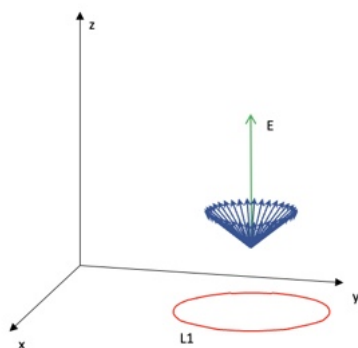


Figura 11.9.

Campo eléctrico de un línea circular cargada Q .

Nota. Elaboración propia.

Objetivo del modelo

El objetivo de este modelo es estudiar y calcular el campo eléctrico generado por distribuciones continuas lineales de carga. Este modelo es una extensión del sistema **Campo eléctrico de un sistema de cargas puntuales**, ya que utiliza las mismas ecuaciones fundamentales, pero introduce mejoras en la forma en que se distribuyen las cargas para formar una línea, la cual puede ser recta o curva. Además, el modelo se

adapta para calcular el campo eléctrico resultante de varias líneas o distribuciones de carga que coexisten en el espacio.

Descripción del modelo

El modelo se basa en la discretización de la distribución lineal de carga en un conjunto de cargas puntuales, cada una con una carga $\Delta q = \lambda \Delta l$, donde λ es la densidad de carga lineal (carga por unidad de longitud) y Δl es la longitud de un segmento infinitesimal de la línea. El campo eléctrico $\Delta \mathbf{E}$ generado por cada segmento en un punto P del espacio se calcula mediante la ley de Coulomb:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, r es la distancia entre el segmento de carga Δq y el punto P , y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario que apunta desde Δq hacia P . Sustituyendo $\Delta q = \lambda \Delta l$, se obtiene:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \Delta l}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

El campo eléctrico total $\mathbf{E}$ en el punto P debido a la distribución lineal de carga se obtiene sumando las contribuciones de todos los segmentos:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda \Delta l_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (11.9)$$

Cuando $\Delta l \rightarrow 0$ la suma pasa a ser una integral:

$$\mathbf{E} = \int_L d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

sin embargo, en el modelo utilizaremos la fórmula discreta 11.9 y las ecuaciones 11.7 para introducirlas en las celdas destinadas a los campos de cada elemento de carga.

Construcción del modelo

El modelo mejora la forma en que se distribuyen las cargas para formar una línea, permitiendo que esta sea recta o curva. Para ello, se define la geometría de la línea mediante ecuaciones paramétricas o coordenadas específicas, lo que permite calcular las posiciones de los segmentos Δl_i y sus respectivas contribuciones al campo eléctrico, las cuales serán como si fuesen cargas puntuales para facilitar su construcción. Además, el modelo se adapta para manejar múltiples líneas o distribuciones de carga en el espacio,

lo que permite estudiar configuraciones más complejas como sistemas de cables, anillos o espirales cargados.

En la fórmula de Excel 11.19 se muestran la configuración de las celdas con los datos que ingresa el usuario.

Fórmula en Excel 11.19

Celdas de configuración inicial:

- B2 =34 { - número de elementos Δl a agregar/quitar },
- B3 =33 { - fila inicial del paquete a clonar },
- C3 =50 { fila final del paquete a clonar },
- E5 =100 { - escala del sistema },
- F10 =SI(O(G41="";G41>3;G41=0);" |E|=";"") { Etiqueta del vector $\mathbf{E}$ },
- G10 =RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2 { $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ },
- G16 =1 { - número de línea },
- F17 ="Q_"&G16,
- G17 =0,000002 { $= Q_{\text{línea}}$ - carga de la línea completa },
- G18 =0,1 { $= \Delta l$ - longitud de cada elemento de la línea },
- G19 =8900000000 { $= k$ - constante eléctrica },
- G22 =1 { $= x_o$ }, G23 =1 { $= y_o$ }, G24 =0 { $= z_o$ - posición inicial de la línea },
- G27 =-5 { $= \phi$ - ángulo azimut de inclinación de la línea },
- G28 =90 { $= \theta$ - ángulo polar de inclinación de la línea },
- D30 ="E_"&\$G\$16&"_"&A15/2 { etiqueta del campo E_i },
- G30 =10 { $= \Delta \phi$ - incremento azimutal de la línea },
- G31 =0 { $= \Delta \theta$ - incremento polar de la línea },
- G34 =0 { - mostrar/ocultar vectores $\vec{E}_i$: SI = 0, NO = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.20 se muestran la configuración para la visualización del modelo en modo campo, es decir, observar la configuración del campo eléctrico en cierta región del espacio en diferentes coordenadas G41 =0 para ver el campo en un punto, G41 =1 para ver el campo en coordenadas cartesianas, G41 =2 para ver el campo en coordenadas cilíndricas y G41 =3 para ver el campo en coordenadas esféricas.

Fórmula en Excel 11.20

Celdas de configuración de las vistas del campo:

- G41 =0 {elegir el sistema de coordenadas },
- F42 =SI(G41=1;" 1- Cart.->"|"") { - fórmulas auxiliares de Excel },
- G42 =SI(G41=1;"o[0,4]x=[-2;2]o2[0,1]y=[-2;2]o3[0,1]z=[0,5;0,5]color=[8]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003125s";""),

- F43 =SI(G41=2;" 2- Cyl ->";SI(G41=3;"";SI(G41=1;"";"")),
- G43 =SI(G41=2;"c[0,1]rho=[90;90]c2[10]phi=[0;360]c3[0,1]z=[-2;2]color=[8]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003232398s";""),
- F44 =SI(G41=3;" 3- Sph ->";""),
- G44 =SI(G41=3;"s[0,1]r=[1,50;1,50]s2[10]phi=[0;360]s3[10]theta=[0;180]color=[8]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003232398s";""),
- D48 ="E_"&\$G\$16&"_"&A33/2 { etiqueta del campo $\vec{E}_i$ },
- G48 =CONTAR.SI(D:D;"E_"&G16&"_*") { = n - número de elementos Δl_i },
- G49 =G18*G48 { = $L = n\Delta l$ - longitud total de la línea }.

En la fórmula de Excel 11.21 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo resultante **E**.

Fórmula en Excel 11.21 1

Configuración de las celdas para el campo **E**:

- C7 =SI(G41=1;G42;SI(G41=2;G43;SI(G41=3;G44;""))),
- B8 =120*1 { - (sin el signo =) configuración para observar el vector en el sistema de coordenadas, debido a la escala. },
- A9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(C:C;D:D;"E_*") { = $E_z = \sum_{i=1}^N \Delta E_{iz}$ },
- B9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(A:A;D:D;"E_*") { = $E_x = \sum_{i=1}^N \Delta E_{ix}$ },
- C9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(B:B;D:D;"E_*") { = $E_y = \sum_{i=1}^N \Delta E_{iy}$ },
- A10 =A11, B10 =B11, C10 =C11,
- A11 =1, B11 =1,57, C11 =0,5 { - punto de interés para calcular el campo },
- A12 =B9 { = E_x }, B12 =C9 { = E_y }, C12 =A9 { = E_z }.
- {Otros , línea = 120 , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.22 se muestran los valores que deben tener las celdas del primer elemento Δl_1 .

Fórmula en Excel 11.22 2

Configuración de las celdas correspondientes a Δl_1 :

- A15 =A6+1 { - número del vector en *ScienSolar* },
- B15 ="L"&G16 { - fórmula para automatizar la etiqueta de la línea },
- B16 =183 { - tipo de forma en Excel },
- B17 =1 { línea continua },
- A19 =G22, B19 =G23, C19 =G24,
- A21 =\$G\$18*COS(RADIANTES(\$G\$27+\$G\$30*C15))*SENO(RADIANTES(\$G\$28+\$G\$31*C15)) { = $\Delta l_{x1} = \Delta l \cos(\phi + \Delta\phi) \sin(\theta + \Delta\theta)$ },
- B21 =\$G\$18*SENO(RADIANTES(\$G\$27+\$G\$30*C15))*SENO(RADIANTES

(\$G\$28+\$G\$31*C15)) {= $\Delta l_{y1} = \Delta l \sin(\phi + \Delta\phi) \sin(\theta + \Delta\theta)$ },

- C21 = \$G\$18*COS(RADIANES(\$G\$28+\$G\$31*C15)) {= $\Delta l_{z1} = \Delta l \cos(\theta + \Delta\theta)$ },
- {Otros , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.23 se muestran los valores que deben tener las celdas correspondientes al vector campo eléctrico del primer elemento $\vec{E}_1$.

Fórmula en Excel 11.23 3

Configuración de las celdas que corresponden a $\vec{E}_1$:

- A24 = A15+1 { - generación del número del vector},
- B25 = 183 { tipo de forma que adquiere el vector (183 - flecha)},
- B26 = 60*1 { - (sin el signo =) configuración para adaptar el tamaño del vector a la escala actual },
- C26 = \$G\$34 { - mostrar/ocultar el vector},
- A28 = \$A\$11, B28 = \$B\$11, C28 = \$C\$11,
- A30 = 1/(POTENCIA(POTENCIA(\$A\$11-A19;2)+POTENCIA(\$B\$11-B19;2)+POTENCIA(\$C\$11-C19;2);3/2))*(\$A\$11-A19)*\$G\$19*\$G\$17/\$G\$48

$$\{= E_{1x} = k \frac{Q/n(x-x_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}\},$$
- B30 = 1/(POTENCIA(POTENCIA(\$A\$11-A19;2)+POTENCIA(\$B\$11-B19;2)+POTENCIA(\$C\$11-C19;2);3/2))*(\$B\$11-B19)*\$G\$19*\$G\$17/\$G\$48

$$\{= E_{1y} = k \frac{Q/n(y-y_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}\},$$
- C30 = 1/(POTENCIA(POTENCIA(\$A\$11-A19;2)+POTENCIA(\$B\$11-B19;2)+POTENCIA(\$C\$11-C19;2);3/2))*(\$C\$11-C19)*\$G\$19*\$G\$17/\$G\$48

$$\{= E_{1z} = k \frac{Q/n(z-z_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}\}.$$

En la fórmula de Excel 11.24 se muestran los valores que deben tener las celdas correspondientes a los elementos Δl_i . Las direcciones de Excel que contienen el signo \$ son referencias absolutas y, por lo tanto, no cambiarán al multiplicar Δl_i . Por otro lado, las celdas que no incluyen este símbolo son referencias relativas y serán dinámicas, ajustándose automáticamente para cada Δl_i .

Por otra parte, las fórmulas en la fila 39 se encargan de *moldear* la línea de acuerdo con los ángulos dados y sus incrementos. Estas fórmulas pueden ser personalizadas por el usuario sin afectar negativamente los resultados al calcular el campo eléctrico. Como se puede observar, para cada i -ésimo elemento, el ángulo aumenta en un múltiplo i del valor del incremento, lo que permite una distribución uniforme y controlada de los elementos a lo largo de la línea.

Fórmula en Excel 11.24 4

Configuración de las celdas que corresponden a Δl_i :

- $A33 = A24 + 1$ { - generación del número del vector },
- $C33 = C15 + 1$ { - número del elemento },
- $B34 = 183$ { - tipo de forma },
- $B35 = 1$ { - tipo de línea },
- $A37 = A19 + A21$, $B37 = B19 + B21$, $C37 = C19 + C21$,
- $A39 = \$G\$18 * \cos(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C33)) * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C33))$ { $= \Delta l_{x_i} = \Delta l \cos(\phi + \Delta\phi \times i) \sin(\theta + \Delta\theta \times i)$ },
- $B39 = \$G\$18 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C33)) * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C33))$ { $= \Delta l_{y_i} = \Delta l \sin(\phi + \Delta\phi \times i) \sin(\theta + \Delta\theta \times i)$ },
- $C39 = \$G\$18 * \cos(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C33))$ { $= \Delta l_{z_i} = \Delta l \cos(\theta + \Delta\theta \times i)$ },
- { Otros , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.25 se muestran los valores que deben tener las celdas correspondientes a los vectores $\vec{E}_i$. Las direcciones de Excel que contienen el signo \$ son referencias absolutas y, por lo tanto, no cambiarán al clonar los $\vec{E}_i$. Por otro lado, las celdas que no incluyen este símbolo son referencias relativas y serán dinámicas, ajustándose automáticamente para cada $\vec{E}_i$.

Para el cálculo del campo eléctrico se utiliza la carga $Q/n = q_i$, donde Q es la carga total de la distribución lineal y n el número de elementos en que se divide la línea. Cada elemento Δl_i posee una carga q_i , lo que garantiza una distribución uniforme de la carga total.

Fórmula en Excel 11.25 5

Configuración de las celdas que corresponden a $\vec{E}_i$:

- $A42 = A33 + 1$ { - incremento del número del vector ScejnSolar },
- $B43 = 183$ { - tipo de forma },
- $B44 = 60 * 1$ { - configuración para adaptar el tamaño del vector a la escala actual },
- $C44 = \$G\34 { - mostrar/ocultar el vector },
- $A46 = \$A\28 , $B46 = \$B\28 , $C46 = \$C\28 ,
- $A48 = 1 / (\text{POTENCIA}(\text{POTENCIA}(\$A\$11 - A37; 2) + \text{POTENCIA}(\$B\$11 - B37; 2) + \text{POTENCIA}(\$C\$11 - C37; 2); 3/2)) * (\$A\$11 - A37) * \$G\$19 * \$G\$17 / \$G\$48$
 $\{ = E_{ix} = k \frac{Q/n(x-x_i)}{((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2)^{3/2}} \}$,
- $B48 = 1 / (\text{POTENCIA}(\text{POTENCIA}(\$A\$11 - A37; 2) + \text{POTENCIA}(\$B\$11 - B37; 2) + \text{POTENCIA}(\$C\$11 - C37; 2); 3/2)) * (\$B\$11 - B37) * \$G\$19 * \$G\$17 / \$G\$48$
 $\{ = E_{iy} = k \frac{Q/n(y-y_i)}{((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2)^{3/2}} \}$,
- $C48 = 1 / (\text{POTENCIA}(\text{POTENCIA}(\$A\$11 - A37; 2) + \text{POTENCIA}(\$B\$11 - B37; 2) + \text{POTENCIA}(\$C\$11 - C37; 2); 3/2)) * (\$C\$11 - C37) * \$G\$19 * \$G\$17 / \$G\$48$
 $\{ = E_{iz} = k \frac{Q/n(z-z_i)}{((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2)^{3/2}} \}$.

Ejecución de la simulación

Como ya se han configurado las celdas $B2 = 34$, $B3 = 33$ y $C3 = 50$, es posible agregar varios elementos hasta completar una línea cargada. Cuando $B3 = 33$, al presionar el botón **+OBJ** se agregarán 33 elementos adicionales a la línea existente, mientras que al presionar **-OBJ** se eliminarán estos elementos. Si se desea agregar elementos de uno en uno, se debe asignar $B3 = 1$ o dejar la celda vacía.

Además, es posible agregar líneas adicionales cargadas al modelo de manera sencilla. Para ello, se introduce la palabra *ENTIRE* en la celda $B2$, se asigna $B3 = 15$ (que corresponde a la primera fila de la línea a clonar) y en $C3$ se ingresa la última fila no vacía de la columna A de Excel. Esta fila depende del número de elementos que contenga la línea. Luego, al presionar **+OBJ**, *ScienSolar* agregará una nueva línea clonada de la anterior. Una vez creada la nueva línea, es posible modificar su número de elementos, posición, ángulos de flexión y otros parámetros según sea necesario.

El campo eléctrico resultante de las dos líneas se calculará automáticamente en el punto deseado, sin requerir configuraciones adicionales más allá de las formas y cargas de las líneas. Este proceso puede repetirse para agregar tantas líneas con carga eléctrica como se desee, permitiendo la construcción de configuraciones complejas y el análisis de sus campos eléctricos correspondientes.

Ejemplo 11.3.1 Una línea circular de radio 2 m está cargada con una carga $Q = 2\mu\text{C}$ y centrada en el origen de coordenadas. Hallar la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos $P_1(0, 0, 50\text{cm})$, $P_2(1\text{m}, 2\text{m}, 1\text{m})$. Obtener una configuración del campo dentro de la circunferencia en el plano XY .

SOLUCIÓN

Para construir la circunferencia con ayuda de la celda $B2$ y el botón **+OBJ**, se agregan elementos del alambre hasta completar 36, es decir, hasta que la celda $G48 = 36$. Para que la línea quede en el plano XY , se colocan $G28 = 90$ y $G27 = -5$. Luego, se incrementa $\Delta\phi$ de 10 en 10 grados para completar la circunferencia con 36 elementos, asignando $G30 = 10$.

Dado que la circunferencia tiene un radio de 2 m y debe estar centrada en el origen de coordenadas, se configuran las celdas $G22 = 0$, $G23 = -2$ (el signo menos corre la circunferencia a la izquierda) y $G24 = 0$. A continuación, se establece la longitud de cada Δl utilizando la fórmula $L = 2\pi r = \Delta l \cdot n$, de donde se obtiene $\Delta l = 2\pi r/n$. Esta fórmula se ingresa en $G18 = \text{ABS}(2*\text{PI}()*G23/G48)$. La carga se ingresa en $G17 = 2\text{E}-6$.

Para calcular el campo eléctrico en el punto $P_1(0, 0, 50\text{cm})$, se configuran las celdas $A11 = 0$, $B11 = 0$ y $C11 = 0,5$. El resultado se obtiene en la celda $G10 = 1012,17 \text{ N/C}$. El campo eléctrico apunta hacia arriba, como se muestra en la parte de arriba, izquierda, de la figura 11.10.

Para el segundo punto $P_2(1\text{ m}, 2\text{ m}, 1\text{ m})$, se configuran las celdas $\boxed{\text{A11}} = 1$, $\boxed{\text{B11}} = 2$ y $\boxed{\text{C11}} = 1$. Las componentes del campo se observan en $\boxed{\text{A12}} = 739,9$ N/C para E_x , $\boxed{\text{B12}} = 1478,1$ N/C para E_y , $\boxed{\text{C12}} = 2633,9$ N/C para E_z , y su magnitud en $\boxed{\text{G10}} = 3109,68$ N/C. La figura 11.10 (arriba, derecha) muestra el campo para este caso, con los vectores $\vec{E}_i$ de cada uno de los elementos activando la opción $\boxed{\text{G34}} = 0$.

Para obtener una imagen de la configuración del campo cerca del anillo y en su interior (figura 11.10, abajo), se introduce $\boxed{\text{G41}} = 2$ y se modifican los parámetros de visualización de la siguiente manera:

$\boxed{\text{G43}} = \dots \text{c}[\mathbf{0}, 45] \text{rho} = [\mathbf{0}; 3] \text{c2}[\mathbf{10}] \text{phi} = [\mathbf{0}; 360] \text{c3}[\mathbf{0}, 1] \text{z} = [\mathbf{0}; 0] \dots$

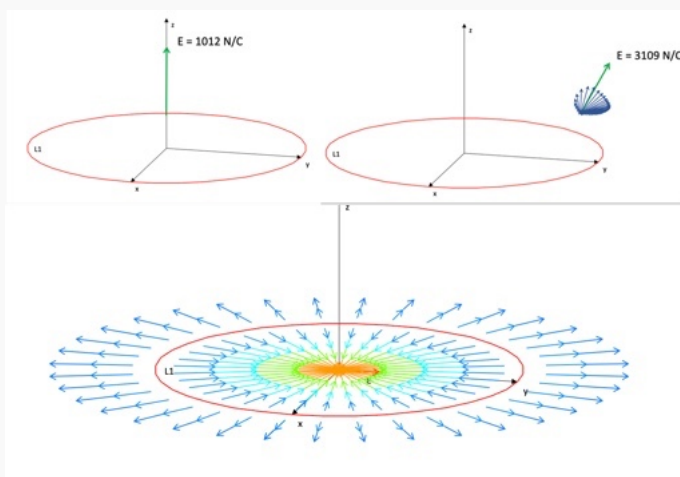


Figura 11.10

Campo eléctrico de una distribución lineal circular de carga. Arriba: dos puntos específicos del ejemplo. Abajo: vista en modo campo.

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 11.3.2 Analizar el ejemplo 11.3.1, pero agregando una línea recta cargada con una carga negativa $Q_2 = -2\text{ }\mu\text{C}$. Esta línea consta de los mismos 36 elementos y está ubicada paralela al eje z , pasando por el punto $(0\text{ m}, 3\text{ m}, 0\text{ m})$ y es simétrica respecto al eje y .

SOLUCIÓN

Para resolver el problema, partiremos del ejemplo anterior y duplicaremos la línea circular para luego transformar su duplicado en una línea recta. Introducimos en la celda $\boxed{\text{B2}}$ la palabra ENTIRE en mayúsculas y sin el signo = (también se puede presionar el botón contiguo a la izquierda de la celda). En la celda $\boxed{\text{B3}}$

se introduce el valor 15, que corresponde a la primera fila que compone la línea circular, la cual es diferente a la fila del paquete que duplica los elementos de la línea. La última fila de la línea (si se observa la hoja de cálculo para la línea circular, corresponde a la fila 662) se introduce en $C3 = 662$. Luego, se presiona el botón **+OBJ**, y como consecuencia, *ScienSolar* reproducirá el mismo número de filas después de la fila 662, lo que equivale a una nueva línea. Esta nueva línea se modificará de acuerdo con los requerimientos del ejercicio.

A continuación, en $G664$ se introduce el número de la nueva línea: $G664 = 2$. En $G665$ se ingresa el valor de la carga: $G665 = -0,000002$. En $G666$ se define la longitud de cada segmento: $G666 = 0,35$. Para enderezar la línea y hacerla recta paralela al eje z , se configuran las celdas $G675 = 0$, $G676 = 0$ y $G678 = 0$. Se puede presionar el botón **XYZ** para visualizar los avances. Finalmente, para ubicar la línea en $(0 \text{ m}, 3 \text{ m}, 0 \text{ m})$ y centrarla, se calcula la magnitud que debe desplazarse hacia abajo: $z = -L/2 = -12,5663/2 = -6,28315$. Por lo tanto, se configuran las celdas $G670 = 0$, $G671 = 3$ y $G672 = -6,28$.

Para el punto $P_1(0, 0, 50 \text{ cm})$, se obtiene una magnitud del campo de $G10 = 1265,78 \text{ N/C}$ para el conjunto de las dos líneas. Para el punto $P_2(1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 1 \text{ m})$, el valor es $G10 = 3882,57 \text{ N/C}$.

Finalmente, para obtener una configuración espacial del campo, se utilizan coordenadas cartesianas. Para ello, en la celda $B8$ se coloca 40×1 , y se modifican los parámetros en $G42$ como sigue:

`= ...o[0,4]x=[0;0]o2[0,4]y=[-3;6]o3[0,4]z=[-8;8]color=[4500]...`

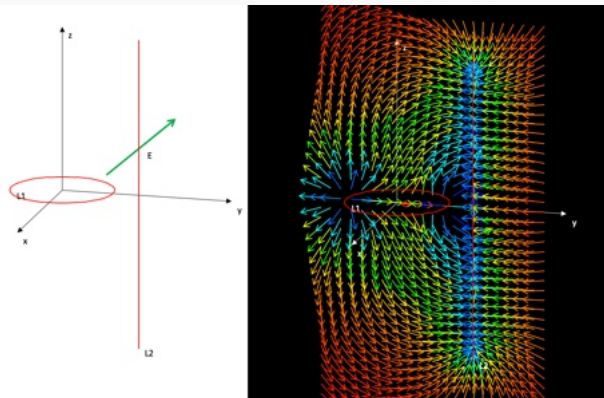


Figura 11.11

Estudio del campo eléctrico de dos distribuciones lineales de carga. Izquierda: En un punto específico. Derecha: el campo en una región del espacio.

Nota. Elaboración propia.

En la figura 11.11 se pueden apreciar los resultados del campo eléctrico generado por dos líneas cargadas con la misma magnitud de carga pero con signos opuestos. El usuario puede experimentar modificando los valores de las cargas, así como sus posiciones, para observar cómo estos cambios afectan la configuración y la magnitud del campo eléctrico resultante. Esta flexibilidad permite explorar diversas configuraciones y analizar sus efectos en el campo eléctrico, lo que resulta útil para comprender fenómenos electrostáticos más complejos. Entre los ejemplos que se pueden modelar rápidamente a partir de los ya expuestos se encuentran:

1. Campo eléctrico de un semicírculo.
2. Campo eléctrico de un semicírculo y una línea recta.
3. Campo eléctrico de una línea en forma de espiral (para este caso, a partir del problema del círculo, se modifican las celdas $G29 = 20$ y $G31 = -0,2$).
4. Campo eléctrico de dos líneas cruzadas.
5. Campo eléctrico de dos líneas paralelas.

11.4 Movimiento parabólico tridimensional, movimiento de una carga en un campo eléctrico constante

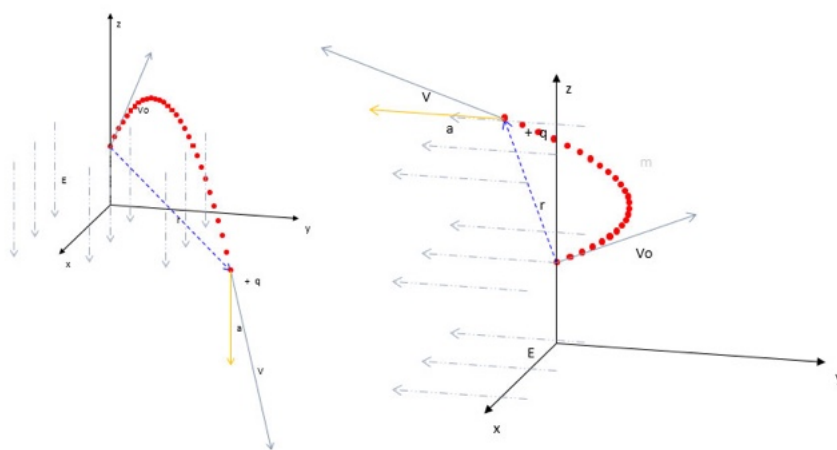


Figura 11.12.

Movimiento tridimensional de una carga en un campo constante.

Nota. Elaboración propia.

El objetivo de este modelo es estudiar el movimiento tridimensional de una carga en un campo constante. El modelo está diseñado para analizar el movimiento de una carga en un campo eléctrico; sin embargo, puede adaptarse fácilmente para estudiar el movimiento de una masa en un campo gravitatorio.

Ecuaciones matemáticas

En un campo eléctrico constante externo, las partículas cargadas que ingresan con una velocidad inicial determinada describen trayectorias parabólicas, de manera análoga

a los cuerpos con masa en un campo gravitatorio. Los movimientos en cada una de las coordenadas son independientes. Es decir, si en una coordenada está presente la componente de la aceleración del campo, el movimiento en dicha coordenada será parabólico; mientras que, si en otra coordenada no está presente dicha componente, el movimiento podrá ser con velocidad constante o nulo, dependiendo de si existe o no una componente de la velocidad inicial en esa dirección. Del mismo modo, si los vectores de velocidad inicial y aceleración tienen componentes en las tres coordenadas, el movimiento parabólico podrá observarse en cada una de las dimensiones por separado. La ecuación tridimensional para el movimiento parabólico es la siguiente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2. \quad (11.10)$$

Al descomponerla en cada uno de sus ejes, se obtienen las ecuaciones del movimiento parabólico para cada dimensión:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \\ z &= z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2, \end{aligned} \quad (11.11)$$

donde la aceleración está determinada por el campo. Para el caso de un campo eléctrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, y una carga q con masa m , a partir de la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = q\mathbf{E}$, las aceleraciones en cada uno de los ejes se expresan como:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{qE_x}{m}, \\ a_y &= \frac{qE_y}{m}, \\ a_z &= \frac{qE_z}{m}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Si la partícula se lanza, por ejemplo, desde un ángulo determinado con respecto al plano horizontal, es posible calcular el tiempo en el que la partícula alcanzará dicho plano. Si el plano horizontal es el plano xy , este tiempo puede determinarse a partir de la tercera ecuación en (11.11) cuando $z = 0$. En este caso, se obtiene una ecuación cuadrática en términos de t , cuya solución proporcionará el tiempo, denominado t_{Rz} . De manera similar, para los casos en los que el horizonte está definido por los planos xz o yz , se obtendrán dos ecuaciones cuadráticas adicionales con $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente. Los tiempos correspondientes se denominarán t_{Ry} y t_{Rx} . En resumen, los tiempos de alcance para cada uno de los tres casos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 t_{Rx} &= \frac{-v_{0x} \pm \sqrt{v_{0x}^2 - 2a_x x_0}}{a_x}, \\
 t_{Ry} &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2a_y y_0}}{a_y}, \\
 t_{Rz} &= \frac{-v_{0z} \pm \sqrt{v_{0z}^2 - 2a_z z_0}}{a_z}.
 \end{aligned} \tag{11.13}$$

Como puede observarse, estas soluciones presentan dos raíces cada una, diferenciadas por el signo que precede a la raíz en la ecuación. En cada caso, se seleccionará la raíz que proporcione un resultado con sentido físico, acorde con las condiciones específicas del problema.

Construcción del modelo

Antes de iniciar la construcción del modelo, es necesario establecer algunas condiciones adicionales para optimizar su funcionamiento en la pantalla. Se limitará el movimiento de la partícula a un espacio definido, con el fin de evitar que esta se desplace demasiado lejos de la pantalla. Para ello, se utilizarán las ecuaciones (11.13) para detener la partícula cuando alcance el *piso* en cada caso, es decir, cuando llegue a alguno de los planos bidimensionales, cuyos tiempos de alcance están expresados por dichas ecuaciones. El programa analizará en cada instante cuánto tiempo falta para que la partícula alcance el plano. Dado que cada uno de los tres tiempos puede ser diferente, se empleará la función de Excel MIN() para determinar cuál de estos tiempos es el mínimo. Precisamente, este tiempo será el determinante para que la partícula alcance el plano más cercano.

Sin embargo, al ingresar estas ecuaciones en Excel, surgirán algunas dificultades que deben resolverse de manera anticipada. En primer lugar, cuando las aceleraciones son iguales a cero, las ecuaciones (11.13) generarán un error. Por lo tanto, es necesario establecer la siguiente condición: Cuando $a_x = 0$, el tiempo será muy grande, por lo que se asignará un valor numérico elevado, por ejemplo, $t_{Rx} = 10000$. Esta misma condición se aplicará para t_{Ry} y t_{Rz} . Esta condición estará vinculada con el parámetro dinámico que define el número de pasos. Dicha fórmula se reflejará en la celda I4.

Por otro lado, es necesario seleccionar uno de los dos signos que preceden a la raíz en la ecuación. La elección del signo adecuado depende de los valores de las variables y los parámetros de la ecuación, por lo que, en este caso, se optará por el signo negativo. En cualquier caso, estas ecuaciones podrán modificarse posteriormente, ya que se encuentran en una de las celdas.

Para la elaboración del modelo, será necesario agregar los siguientes vectores: posición $\mathbf{r}$, velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, velocidad $\mathbf{v}$, campo eléctrico $\mathbf{E}$ y aceleración $\mathbf{a}$. Además, se incluirá un vector adicional para representar un escalar, como la carga, ya que esta necesita ubicarse en el espacio tridimensional mediante tres coordenadas. En total, se agregarán seis vectores.

El usuario ingresará los datos iniciales para la simulación en las siguientes celdas:

Fórmula en Excel 11.26

Configuración de las celdas del movimiento parabólico:

- I3 =0;1 { Intervalo de avance del tiempo },
- I4 =SI(I5<G49;REDONDEAR.MAS(G49/I3;0);0) { = No. de pasos: fórmula que condiciona el número de pasos para que la partícula se detenga al llegar al piso. Si $t < t_R$ entonces el número de pasos es igual a $t_R/paso$, de lo contrario el número de pasos es cero. },
- E5 =20 { Escala del sistema de coordenadas },
- G12 =4 { $= x_o$ }, G13 =0 { $= y_o$ }, G14 =3 { $= z_o$, posición inicial },
- G16 =0 { $= V_{ox}$ }, G17 =3 { $= V_{oy}$ }, G18 =4 { $= V_{oz}$, velocidad inicial },
- G20 =0 { $= E_x$ }, G21 =0 { $= E_y$ }, G22 =-3 { $= E_z$, campo eléctrico },
- G24 =1 { $= q$ }, G26 =1 { $= m$, carga y masa de la partícula },
- G28 =1 { $= S = 2, NO = 1$ - fijar trayectoria },
- G34 =A12+G12 { $= x$ },
- G35 =B12+G13 { $= y$ },
- G36 =C12+G14 { $= z$ },
- G37 =RAIZ((G34-G12)^2+(G35-G13)^2+(G36-G14)^2) { $= r$ },
- G39 =A39 { $= v_x$ },
- G40 =B39 { $= v_y$ },
- G41 =C39 { $= v_z$ },
- G42 =RAIZ(G39^2+G40^2+G41^2) { $= V$, módulo del vector velocidad },
- G44 =A57 { $= a_x$ },
- G45 =B57 { $= a_y$ },
- G46 =C57 { $= a_z$ },
- G47 =RAIZ(G44^2+G45^2+G46^2) { $= a$, módulo del vector aceleración },
- G49 =MIN(ABS(A56);ABS(B56);ABS(C56)) { $= t_R$ = - halla el mínimo de los tres tiempos para los alcances hasta cada "piso" }.

En la fórmula de Excel 11.27 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **r**.

Fórmula en Excel 11.27

Configuración de las celdas que corresponden a **r**.:

- A10 =G12 { $= x_o$ }, B10 =G13 { $= y_o$ }, C10 =G14 { $= z_o$ },
- A12 =G16*I5+1/2*A57*POTENCIA(I5;2) { $= x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ },
- B12 =G17*I5+1/2*B57*POTENCIA(I5;2) { $= y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ },
- C12 =G18*I5+1/2*C57*POTENCIA(I5;2) { $= z = v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2$ },
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 6 }.

En la fórmula de Excel 11.28 se muestran los valores que deben tener las celdas para representar la carga q .

Fórmula en Excel 11.28 2

Configuración de las celdas que corresponden a q :

- B15 =SI(G24<0;" - q ";" + q") { signo de la carga en la etiqueta},
- A19 =A12+G12 {= $x + x_o$ }, B19 =B12+G13 {= $y + y_o$ }, C19 =C12+G14 {= $z + z_o$ },
- C22 =G28, C23 =G28 { fijar trayectoria }.
- {Otros Objeto = 146 (punto) , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.29 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector velocidad inicial $\mathbf{V}_o$.

Fórmula en Excel 11.29 3

Configuración de las celdas de $\mathbf{V}_o$:

- A28 =G12 {= x_o }, B28 =G13 {= y_o }, C28 =G14 {= z_o },
- A30 =G16 {= v_{ox} }, B30 =G17 {= v_{oy} }, C30 =G18 {= v_{oz} }.

En la fórmula de Excel 11.30 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector velocidad $\mathbf{V}$.

Fórmula en Excel 11.30 4

Configuración de las celdas que de $\mathbf{V}$:

- A37 =A19 {= $x + x_o$ }, B37 =B19 {= $y + y_o$ }, C37 =C19 {= $z + z_o$ },
- A39 =G16+A57*I5 {= $v_{0x} + a_x t$ }, B39 =G17+B57*I5 {= $v_{0y} + a_y t$ },
- C39 =G18+C57*I5 {= $v_{0z} + a_z t$ },
- {Otros , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.31 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo eléctrico $\mathbf{E}$.

Fórmula en Excel 11.31 5

Configuración de las celdas que corresponden a $\mathbf{E}$:

- A46 =A47 {= E_{xo} }, B46 =B47 {= E_{yo} }, C46 =C47 {= E_{zo} },

- A48 =G20 {= E_x }, B48 =G21 {= E_y }, C48 =G22 {= E_z },
- {Otros, línea = 4, transparencia = 0,4 }.

En la fórmula de Excel 11.32 se presentan los valores de las celdas correspondientes al vector aceleración **a**, junto con sus equivalentes en notación matemática. Se decidió de manera arbitraria que en esta sección se introducirían las ecuaciones para los tiempos de alcance t_{Rx} , t_{Ry} y t_{Rz} . Estas fórmulas podrían haberse ubicado en cualquier celda libre, ya que sus resultados se utilizan en las celdas I4 e G49 para detener la partícula cuando esta alcance el **piso**. Las fórmulas para los tiempos están sujetas a la condición de que, si la aceleración es cero, el tiempo tomará un valor muy grande, pero finito (en este caso, 10000), en lugar de infinito.

Fórmula en Excel 11.32 6

Configuración de las celdas que corresponden al vector **a**:

- A55 =A19 {= $x + x_o$ }, B55 =B19 {= $y + y_o$ }, C55 =C19 {= $z + z_o$ },
- A56 =SI(A57=0;10000;(-G16-RAIZ(ABS(POTENCIA(G16;2)-2*A57*G12)))/A57)

$$\{ = t_{Rx} = \frac{-v_{0x} - \sqrt{v_{0x}^2 - 2a_x x_0}}{a_x} \},$$
- B56 =SI(B57=0;10000;(-G17-RAIZ(ABS(POTENCIA(G17;2)-2*B57*G13)))/B57)

$$\{ = t_{Ry} = \frac{-v_{0y} - \sqrt{v_{0y}^2 - 2a_y y_0}}{a_y} \},$$
- C56 =SI(C57=0;10000;(-G18-RAIZ(ABS(POTENCIA(G18;2)-2*C57*G14)))/C57)

$$\{ = t_{Rz} = \frac{-v_{0z} - \sqrt{v_{0z}^2 - 2a_z z_0}}{a_z} \},$$
- A57 =G24*A48/G26 {= $a_x = qE_x/m$ },
- B57 =G24*B48/G26 {= $a_y = qE_y/m$ },
- C57 =G24*C48/G26 {= $a_z = qE_z/m$ }.

Ejecución de la simulación

Al ingresar los valores iniciales y presionar cualquier botón de rotación, como el botón XYZ, se podrá observar la posición del punto en coordenadas cartesianas. Con los botones YZ, XY y XZ, se obtendrán las diferentes vistas del sistema. Los botones >>A, >>B y >>C permiten simular la rotación de los ejes cartesianos alrededor de los tres ejes principales.

Con el botón >>, se podrá observar el avance de la partícula en el espacio. Además, al seleccionar otro parámetro diferente al tiempo como la carga en la celda G24, y luego presionar >>, se simulará cómo cambia el vector aceleración con el incremento de la carga. Para reiniciar la simulación desde el principio, se debe presionar el botón <--. Las coordenadas del campo pueden modificarse de manera arbitraria, incluyendo sus signos, lo que permite estudiar el movimiento bajo un campo orientado de forma arbitraria en el espacio.

Para fijar la trayectoria en la pantalla, se utiliza la celda **G28**. Un valor de 2 en esta celda indica que se dibujará una trayectoria durante la simulación, mientras que un valor de 1 significa que los puntos se borrarán gradualmente, sin que el proceso de borrado sea inmediato. Si se desea borrar las trayectorias de manera forzada e inmediata, se debe oprimir un botón .

En la figura 11.13, en la parte derecha, se muestra un ejemplo del comportamiento de una partícula en un campo con los siguientes parámetros: $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $z_0 = 8$, $v_{x0} = 10$, $v_{y0} = 1$, $v_{z0} = 0$, $E_x = 0$, $E_y = 10$, $E_z = -10$, $q = 1$, $m = 1$, trayectoria = 2, paso = 0.1, escala = 10, y longitud de los ejes = 200. Las unidades de las magnitudes son condicionales. En caso de que la partícula se detenga antes de finalizar la simulación, se puede continuar con el botón . En última instancia, también es posible borrar la fórmula de la celda **I4** y escribir allí el número de pasos deseados para la simulación. Esto no eliminará la fórmula preestablecida del proyecto guardado, ya que se recuperará al cargar nuevamente el proyecto en una nueva hoja.

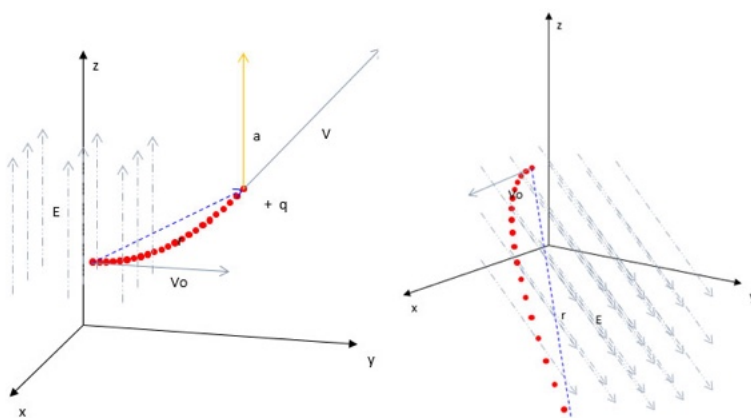


Figura 11.13.

Trayectorias de partículas positivas en campos con diferentes configuraciones.

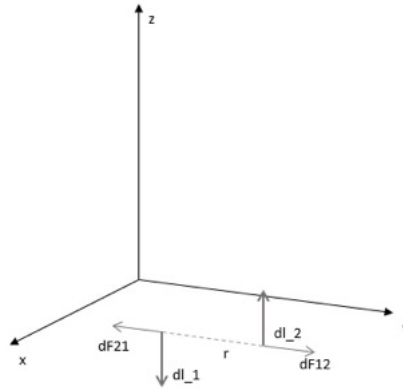
Nota. Elaboración propia.

11.5 Fuerza magnética entre dos elementos de corriente

El objetivo de este modelo es analizar la ley de Ampere en el contexto de la interacción entre corrientes eléctricas.

Ecuaciones matemáticas

Las cargas eléctricas en movimiento generan un campo magnético a su alrededor. Por otro lado, una carga en movimiento en un campo magnético externo experimenta una fuerza. A partir de estas dos afirmaciones, podemos concluir que dos alambres que conducen corriente pueden experimentar una fuerza de interacción mutua. A principios del siglo XIX, el físico francés André-Marie Ampere estudió en profundidad esta interacción entre corrientes. Para el caso de dos elementos infinitesimales de corriente, esta ley se expresa

**Figura 11.14.**

Fuerza magnética entre dos elementos de corriente.

Nota. Elaboración propia.

mediante la siguiente ecuación:

$$d\mathbf{F}_{12} = K \frac{I_1 I_2 d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3}, \quad (11.14)$$

donde $I_1 d\mathbf{l}_1$ y $I_2 d\mathbf{l}_2$ son los vectores denominados *elementos infinitesimales de corriente* correspondientes a las corrientes I_1 e I_2 , y K es una constante que depende del sistema de unidades utilizado. En la ecuación 11.14, $d\mathbf{F}_{12}$ representa la fuerza que ejerce el elemento de corriente $I_1 d\mathbf{l}_1$ sobre $I_2 d\mathbf{l}_2$, y r_{12} es la distancia entre ambos elementos de corriente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se cumple que $|d\mathbf{F}_{12}| = |d\mathbf{F}_{21}|$, donde la fuerza $d\mathbf{F}_{21}$, ejercida por el elemento $I_2 d\mathbf{l}_2$ sobre $I_1 d\mathbf{l}_1$, se expresa de la siguiente forma:

$$d\mathbf{F}_{21} = K \frac{I_1 I_2 d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3}. \quad (11.15)$$

Es importante destacar que la tercera ley de Newton se cumple estrictamente en corrientes reales, las cuales son siempre cerradas. Sin embargo, en el caso de elementos de corriente abiertos, puede existir un par de fuerzas que no cumpla esta ley, lo cual no debe inducir a confusión, ya que se cumplirá cuando las corrientes se cierren.

En la ecuación (11.14), designamos el vector $\mathbf{A} = [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]$ y en la ecuación (11.15) el vector $\mathbf{B} = [d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}]$. Usando la fórmula del producto vectorial entre dos vectores (10.3), obtenemos las siguientes expresiones para los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (dl_{1y}z - dl_{1z}y)\hat{i} + (dl_{1z}x - dl_{1x}z)\hat{j} + (dl_{1x}y - dl_{1y}x)\hat{k} \\ \mathbf{B} &= (dl_{2y}z - dl_{2z}y)\hat{i} + (dl_{2z}x - dl_{2x}z)\hat{j} + (dl_{2x}y - dl_{2y}x)\hat{k}, \end{aligned} \quad (11.16)$$

donde utilizamos el mismo vector r para ambas ecuaciones, solo que se invierte el signo

en uno de ellos. Así, se obtiene:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{12} &= \frac{KI_1I_2}{r^3} d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{A} \\ &= \frac{KI_1I_2}{r^3} (dl_{2y}A_z - dl_{2z}A_y)\hat{i} + (dl_{2z}A_x - dl_{2x}A_z)\hat{j} + (dl_{2x}A_y - dl_{2y}A_x)\hat{k}, \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{21} &= \frac{KI_1I_2}{r^3} d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B} \\ &= \frac{KI_1I_2}{r^3} (dl_{1y}B_z - dl_{1z}B_y)\hat{i} + (dl_{1z}B_x - dl_{1x}B_z)\hat{j} + (dl_{1x}B_y - dl_{1y}B_x)\hat{k}. \end{aligned} \quad (11.18)$$

En el caso de que los elementos de corriente no sean infinitesimales, las ecuaciones (11.14) y (11.15) siguen siendo válidas, siempre que los segmentos de alambre con corriente sean rectilíneos.

Construcción del modelo

En la ecuación (11.14) intervienen cuatro vectores, mientras que en (11.15) se encuentran otros cuatro, lo que da un total de ocho vectores. Sin embargo, los vectores r_{12} y r_{21} son idénticos, salvo por su dirección. Por lo tanto, en la simulación es posible utilizar un solo vector para ambas ecuaciones, lo que reduce la cantidad de vectores necesarios a siete. Estos vectores se incorporarán a la hoja de cálculo correspondiente.

Se procederá a incluir estos vectores en el sistema de coordenadas de *ScienSolar*. El usuario deberá ingresar los valores iniciales en las celdas indicadas en la fórmula de Excel 11.33.

Fórmula en Excel 11.33

1

- I_6 = 2. Constante K en unidades condicionales.
- E_{10} = 2. Corriente del primer alambre.
- E_{11} = 2. Corriente del segundo alambre.
- A_{10} = Posición inicial en x de primera corriente.
- B_{10} = Posición inicial en y de primera corriente.
- C_{10} = Posición inicial en z de primera corriente.
- A_{12} = Coordenada x del primer alambre.
- B_{12} = Coordenada y del primer alambre.
- C_{12} = Coordenada z del primer alambre.
- A_{21} = Coordenada x del vector r .
- B_{21} = Coordenada y del vector r .
- C_{21} = Coordenada z del vector r .
- A_{30} = Coordenada x del segundo alambre.
- B_{30} = Coordenada y del segundo alambre.

- $C30$ = Coordenada z del segundo alambre.

En la fórmula de Excel 11.34 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.34 2

$B18$ = $I6 * E10 * E11 / \text{POWER}(\text{SQRT}(A21^2 + B21^2 + C21^2); 3)$ { = $K I_1 I_2 / r^3$ }, $A19$ = $A10$ { = x_0 }, $B19$ = $B10$ { = y_0 }, $C19$ = $C10$ { = z_0 }, { , línea = 4 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.35 se muestran los valores de las celdas para el vector $d\mathbf{l}_2$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.35 3

$A28$ = $A21 + A19$ { = $x_0 + x$ }, $B28$ = $B21 + B19$ { = $y_0 + y$ }, $C28$ = $C21 + C19$ { = $z_0 + z$ }, { , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.36 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{A}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.36 4

$A37$ = $A10$ { = x_0 }, $B37$ = $B10$ { = y_0 }, $C37$ = $C10$ { = z_0 }, $A39$ = $B12 * C21 - C12 * B21$ { = $dl_{1y}z - dl_{1z}y$ }, $B39$ = $-A12 * C21 + C12 * A21$ { = $dl_{1z}x - dl_{1x}z$ }, $C39$ = $A12 * B21 - B12 * A21$ { = $(dl_{1xy} - dl_{1yx})$ }, { , transparencia = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.37 se muestran los valores de las celdas para el vector $d\mathbf{F}_{12}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.37 5

$A46$ = $A28$ { = $x_0 + x$ }, $B46$ = $B28$ { = $y_0 + y$ }, $C46$ = $C28$ { = $z_0 + z$ }, $A48$ = $(B30 * C39 - C30 * B39) * B18$ { = $\frac{K I_1 I_2}{r^3} (dl_{2y} A_z - dl_{2z} A_y)$ }, $B48$ = $(-A30 * C39 + C30 * A39) * B18$ { = $\frac{K I_1 I_2}{r^3} (dl_{2z} A_x - dl_{2x} A_z)$ }, $C48$ = $(A30 * B39 - B30 * A39) * B18$ { = $\frac{K I_1 I_2}{r^3} (dl_{2x} A_y - dl_{2y} A_x)$ }, { , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.38 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{B}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.38 6

$A55$ = $A28$ { = $x_0 + x$ }, $B55$ = $B28$ { = $y_0 + y$ }, $C55$ = $C28$ { = $z_0 + z$ }, $A57$ = $B30 * (-C21) - C30 * (-B21)$ { = $dl_{2y}z - dl_{2z}y$ }, $B57$ = $-A30 * (-C21) + C30 * (-A21)$ { = $dl_{2z}x - dl_{2x}z$ }, $C57$ = $A30 * (-B21) - B30 * (-A21)$ { = $dl_{2xy} - dl_{2yx}$ }, { , transparencia = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.39 se muestran los valores de las celdas para el vector $d\mathbf{F}_{21}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.39

7

$\boxed{A64} = A10 \{= x_0\}$, $\boxed{B64} = B10 \{= y_0\}$, $\boxed{C64} = C10 \{= z_0\}$,
 $\boxed{A66} = (B12 * C57 - C12 * B57) * B18 \{= \frac{K I_1 I_2}{r^3} (dl_{1y} B_z - dl_{1z} B_y)\}$, $\boxed{B66} = (-A12 * C57 + C12 * A57) * B18 \{= \frac{K I_1 I_2}{r^3} (dl_{1z} B_x - dl_{1x} B_z)\}$, $\boxed{C66} = (A12 * B57 - B12 * A57) * B18 \{= \frac{K I_1 I_2}{r^3} (dl_{1x} B_y - dl_{1y} B_x)\}$, { , transparencia = 0 }.

Ejecución de la simulación

En este apartado, estudiaremos el comportamiento de las fuerzas de Ampere para diferentes configuraciones de corrientes: Paralelas, antiparalelas, perpendiculares y para cualquier ángulo. El objetivo es graficar la fuerza en función del radio de interacción.

Para el caso de las corrientes paralelas, con valores $I_1 = 2$, $I_2 = 2$ y $r = 3$, los valores de las coordenadas del elemento de corriente $d\mathbf{l}_1$ son: $\boxed{A12} = 0$, $\boxed{B12} = 0$, $\boxed{C12} = 1$, y los valores para las coordenadas de $d\mathbf{l}_2$ son: $\boxed{A30} = 0$, $\boxed{B30} = 0$, $\boxed{C30} = 1$. El resultado obtenido para esta configuración se presenta en la figura 11.15, a).

En el caso de las corrientes antiparalelas, los valores para las coordenadas de $d\mathbf{l}_1$ son: $\boxed{A12} = 0$, $\boxed{B12} = 0$, $\boxed{C12} = -1$, y los valores para $d\mathbf{l}_2$ son: $\boxed{A30} = 0$, $\boxed{B30} = 0$, $\boxed{C30} = 1$. El resultado correspondiente se presenta en la figura (11.15), b).

Para las corrientes perpendiculares, los valores para las coordenadas de $d\mathbf{l}_1$ son: $\boxed{A12} = 1$, $\boxed{B12} = 0$, $\boxed{C12} = 0$, y los valores de $d\mathbf{l}_2$ son: $\boxed{A30} = 0$, $\boxed{B30} = 0$, $\boxed{C30} = 1$. Como se observa en la figura 11.15, c), la fuerza es igual a cero en esta configuración.

Un caso adicional de corrientes perpendiculares es mostrado en la figura 11.15, d), donde las coordenadas de $d\mathbf{l}_1$ son: $\boxed{A12} = 1$, $\boxed{B12} = 0$, $\boxed{C12} = 0$, y las de $d\mathbf{l}_2$ son: $\boxed{A30} = 0$, $\boxed{B30} = 0$, $\boxed{C30} = 1$. En este caso, se observa que la tercera ley de Newton parece no cumplirse, pues $|d\mathbf{F}_{12}| \neq |d\mathbf{F}_{21}|$. Sin embargo, esta aparente contradicción desaparece cuando se consideran corrientes cerradas en un sistema real.

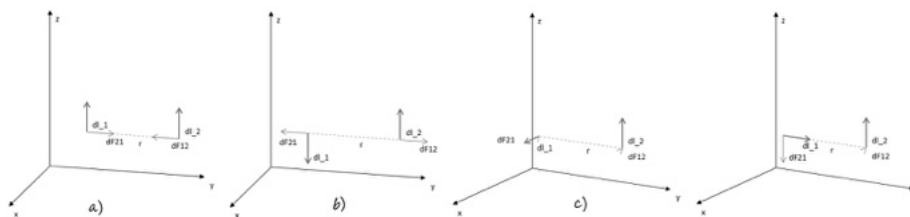


Figura 11.15.

Fuerza magnética entre dos elementos de corriente para diferentes orientaciones de las corrientes.

Nota. Elaboración propia.

Para recolectar los datos durante la simulación, configuraremos la forma más sencilla de

obtener los datos correspondientes a la dependencia $d\mathbf{F} = d\mathbf{F}(r)$, por ejemplo, colocando el radio a lo largo del eje y . Así, en las celdas se establecerán los siguientes valores: $A12 = 0$, $B12 = 0$, $C12 = -1$, y $A30 = 0$, $B30 = 0$, $C30 = 1$, mientras que para el radio, se tiene $A21 = 0$, $B21 = 1$, $C21 = 0$.

Luego, para recolectar los datos del vector $\mathbf{r}$ desde la fila 10 y columna 10, se deben ingresar los valores $B22 = 10$ y $B23 = 10$. Para recolectar datos de uno de los vectores $d\mathbf{F}$ desde la fila 10 y columna 30, se debe ingresar $B49 = 10$ y $B50 = 30$. El paso de variación Δr será de 0.2, y el número total de pasos se establecerá en 45 ($14 = 45$).

A continuación, se selecciona la celda $B21$, que será la que se variará durante la simulación, y, sin seleccionar ninguna otra celda, se presiona el botón $\gg$ ubicado en J3. Esto iniciará la simulación y los datos correspondientes se registrarán en las filas 10 y columnas 10 y 30, respectivamente. Una vez finalizada la simulación, se seleccionan las columnas de interés y, utilizando la herramienta de gráficos de Excel, se genera el gráfico deseado. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 11.16.

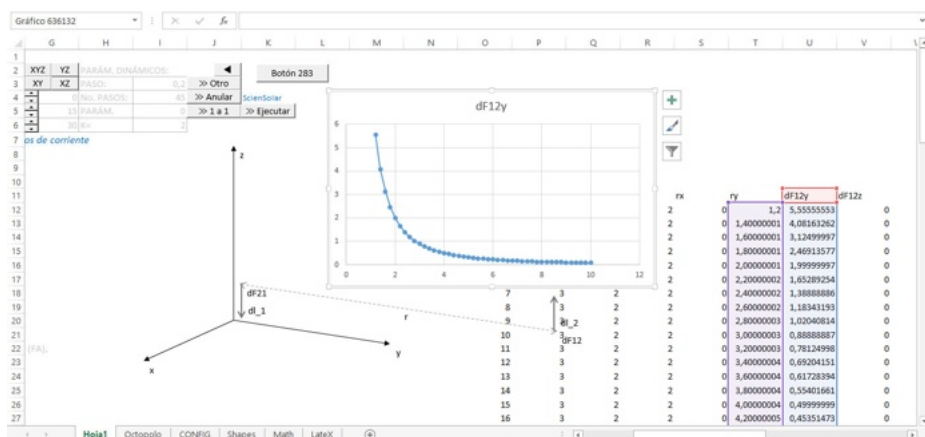


Figura 11.16.

Toma de datos en ScienSolar y gráfica en Excel.

Nota. Elaboración propia.

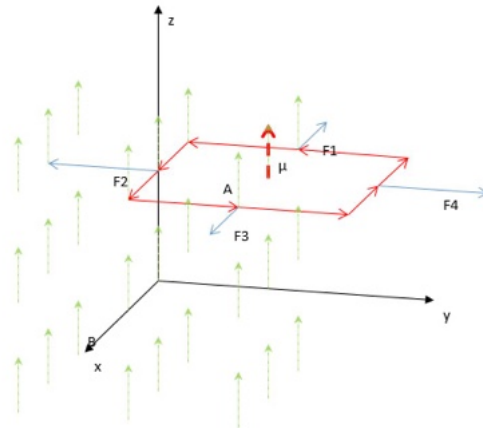
11.6 Espira con corriente en un campo magnético externo

El objetivo de este modelo es analizar las fuerzas magnéticas que experimenta una espira rectangular con corriente en un campo magnético constante externo.

Ecuaciones matemáticas

La ecuación (11.14) puede escribirse de la siguiente forma:

$$d\mathbf{F} = K \frac{I_1 I_2 d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3} = I d\mathbf{l} \times d\mathbf{B}. \quad (11.19)$$

**Figura 11.17.**

Fuerza magnética sobre una espira con corriente.

Nota. Elaboración propia.

Esta es la fuerza que experimenta un elemento de corriente $I d\mathbf{l}$ debido a un campo magnético externo $d\mathbf{B}$, que es generado por otro elemento de corriente $I_1 d\mathbf{l}_1$, donde $d\mathbf{B} = K \frac{I_1 [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}]}{r^3}$. Si se tiene un campo magnético constante y uniforme $\mathbf{B}$, y cuatro alambres rectos de longitud L que conforman una espira rectangular indeformable con corriente, como se muestra en la figura 11.17, entonces cada uno de ellos experimentará una fuerza dada por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{F}_1 = I\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}_2 = I\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}_3 = I\mathbf{L}_3 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}_4 = I\mathbf{L}_4 \times \mathbf{B}, \quad (11.20)$$

donde los vectores $\mathbf{L}$ tienen magnitud igual a la corriente por la longitud del alambre, y la dirección de estos vectores es la misma que la de la corriente. Dependiendo de la posición de la espira con respecto al campo magnético, ésta podrá experimentar un movimiento de rotación debido al torque de las fuerzas y a su distancia hasta el centro de la espira. Para caracterizar este movimiento, se introduce el vector *momento magnético* de la espira, $\mu = IS\hat{n}$, que tiene como magnitud la corriente por el área que encierra la espira, IS , y como dirección la del vector unitario $\hat{n}$, que es perpendicular al área y se ajusta junto con la dirección de la corriente a la regla de la mano derecha.

Acudiendo a la fórmula del producto vectorial de dos vectores, las ecuaciones (11.20) se escriben explícitamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= I[(L_{1y}B_z - L_{1z}B_y)\hat{i} + (L_{1z}B_x - L_{1x}B_z)\hat{j} + (L_{1x}B_y - L_{1y}B_x)\hat{k}], \\ \mathbf{F}_2 &= I[(L_{2y}B_z - L_{2z}B_y)\hat{i} + (L_{2z}B_x - L_{2x}B_z)\hat{j} + (L_{2x}B_y - L_{2y}B_x)\hat{k}], \\ \mathbf{F}_3 &= I[(L_{3y}B_z - L_{3z}B_y)\hat{i} + (L_{3z}B_x - L_{3x}B_z)\hat{j} + (L_{3x}B_y - L_{3y}B_x)\hat{k}], \\ \mathbf{F}_4 &= I[(L_{4y}B_z - L_{4z}B_y)\hat{i} + (L_{4z}B_x - L_{4x}B_z)\hat{j} + (L_{4x}B_y - L_{4y}B_x)\hat{k}]. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Construcción del modelo

Para hacer el modelo simétrico, se utilizarán dos vectores de *ScienSolar* para cada alambre lateral, es decir 8 vectores para la espira. Además para poder manipular la espira en el espacio, se atará a un sistema esférico de tal manera que su centro se pueda ubicar a través de un radio y dos ángulos, entonces de acuerdo al modelo 10.10 se necesitarán 4 vectores más. Por otra parte, queremos que la espira tenga un momento magnético en el centro, lo que le sumará un vector. Además se requiere que el momento magnético pueda rotar 360° alrededor de uno de los ejes coplanares con la espira, para ello necesitaremos un vector auxiliar adicional. Por último tendremos cuatro vectores para las cuatro fuerzas y un vector para el campo magnético. En total son 19 vectores. Agregamos este número de vectores al sistema de coordenadas y procedemos a modificar sus parámetros de acuerdo a las condiciones iniciales y las ecuaciones arriba descritas.

El usuario deberá ingresar los siguientes parámetros iniciales:

- $I3 = 8$. Paso de la simulación, velocidad de rotación de la espira.
- $I4 = 45$. Número de pasos.
- $I5 = \alpha = 0$. Ángulo del momento magnético con el eje z .
- $E9 = -2$. Intensidad y dirección de la corriente.
- $E11 = 2$. Radio de posición de la espira.
- $E12 = 90$. Ángulo ϕ inicial de la espira.
- $E13 = 90$. Ángulo θ inicial de la espira.
- $E16 = 2$. Densidad del campo.
- $E17 = 0$. Componente B_x del campo.
- $E18 = 0$. Componente B_y del campo.
- $E19 = 1$. Componente B_z del campo.
- $E23 = 2$. Longitud del lado de la espira.

En la fórmula de Excel 11.40 se muestran los valores de las celdas para la posición inicial del vector **A**, que apunta al centro de la espira y hace las veces de radio en el sistema de coordenadas esféricas. Con ayuda de este vector se establece la posición inicial de la espira.

Fórmula en Excel 11.40 1

$A11 = \text{SIN}(\text{RADIANS}(I5)) \{= \sin \alpha\}$, $B11 = 1 - \text{COS}(\text{RADIANS}(I5)) \{= 1 - \cos \alpha\}$,
 $A12 = E11 * A21 \{= r \cos \theta \sin \phi\}$, $B12 = E11 * B21 \{= r \sin \theta \sin \phi\}$, $C12 = E11 * C21 \{= r \cos \theta\}$, $\{$, línea = 4, transparencia = 0, cabeza del vector = 1 $\}$. ■

En la fórmula de Excel 11.41 se muestran los valores de las celdas para el vector **f** de las coordenadas esféricas y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.41 2

$A19 = A12 + A10 \{= A_x + A_{x0}\}$, $B19 = B12 + B10 \{= A_y + A_{y0}\}$, $C19 = C12 + C10$

{= $A_z + A_{z0}$ }, **A21** =COS(RADIANS(E12))*SIN (RADIANS(E13)) {= $\cos \theta \sin \phi$ }, **B21** =SIN(RADIANS(E12))*SIN(RADIANS(E13)) {= $\sin \theta \sin \phi$ }, **C21** =COS(RADIANS(E13)) {= $\cos \theta$ }, { , cabeza del vector = 2 }.

En la fórmula de Excel 11.42 se muestran los valores de las celdas para el vector $\hat{\phi}$ de las coordenadas esféricas y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.42 3

E26 =ROUND(SQRT(A147^2+B147^2+C147^2);2) {= F_1 },
E27 =ROUND(SQRT(A165^2+B165^2+C165^2);2) {= F_2 }, **A28** =A19 {= $A_x + A_{x0}$ },
B28 =B19 {= $A_y + A_{y0}$ }, **C28** =C19 {= $A_z + A_{z0}$ }, **E28** =ROUND(SQRT(A156^2+B156^2+C156^2);2) {= F_3 }, **E29** =ROUND(SQRT(A174^2+B174^2+C174^2);2) {= F_4 },
A30 =-SIN(RADIANS(E12)) {= $-\sin \phi$ }, **B30** =COS(RADIANS(E12)) {= $\cos \phi$ }, { , cabeza del vector = 2 }.

En la fórmula de Excel 11.43 se muestran los valores de las celdas para el vector $\hat{\theta}$ de las coordenadas esféricas representado en cartesianas, y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.43 4

A37 =A19 {= $A_x + A_{x0}$ }, **B37** =B19 {= $A_y + A_{y0}$ }, **C37** =C19 {= $A_z + A_{z0}$ }, **A39** =COS(RADIANS(E12))*COS(RADIANS(E13)) {= $\cos \phi \cos \theta$ },
B39 =SIN(RADIANS(E12))*COS(RADIANS(E13)) {= $\sin \phi \cos \theta$ }, **C39** =-SIN(RADIANS(E13)) {= $-\sin \theta$ }, { , cabeza del vector = 2 }.

En la fórmula de Excel 11.44 se muestran los valores de las celdas para el vector μ que se calcula de acuerdo a las fórmulas (10.4), que permiten rotar a este vector.

Fórmula en Excel 11.44 5

A46 =A37 {= $A_x + A_{x0}$ }, **B46** =B37 {= $A_y + A_{y0}$ }, **C46** =C37 {= $A_z + A_{z0}$ },
A48 =SIGN(E9)*(A39+B11*(B30*A30*B39-B30*B30*A39+C30*A30*C39-C30*C30*A39)+A11*(B30*C39-C30*B39)) {= μ_x },
B48 =SIGN(E9)*(B39+B11*(-A30*A30*B39+A30*B30*A39+C30*B30*C39-C30*C30*B39)+A11*(-A30*C39+C30*A39)) {= μ_y },
C48 =SIGN(E9)*(C39+B11*(-A30*A30*C39+A30*C30*A39-B30*B30*C39+B30*C30*B39)+A11*(A30*B39-B30*A39)) {= μ_z }, { , línea = 4 , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.45 se muestran los valores de las celdas para L_1 y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.45 6

A55 =A46 {= $A_x + A_{x0}$ }, **B55** =B46 {= $A_y + A_{y0}$ }, **C55** =C46 {= $A_z + A_{z0}$ },
A57 =A30*E23 {= $L\hat{\phi}_x$ }, **B57** =B30*E23 {= $L\hat{\phi}_y$ }, **C57** =C30*E23 {= $L\hat{\phi}_z$ }, { ,

transparencia = 0 }.

En las fórmulas de Excel 11.46 - 11.53 se dibuja la espira a través de vectores utilizando el producto cruz.

Fórmula en Excel 11.46 7

A64 =A57+A55, B64 =B57+B55, C64 =C57+ C55, A66 =B48*C57-C48*B57,
B66 =-A48*C57+C48 *A57, C66 =A48*B57-B48*A57, { , transparencia = 0 , cola = 0 }.

Fórmula en Excel 11.47 8

B71 =B62, C71 =C62, A73 =A66+ A64, B73 =B66+B64, C73 =C66+C64,
A75 =B48*C66-C48*B66, B75 =-A48*C66+C48*A66, C75 =A48*B66-B48*A66,
A76 =A67, A77 =A68, C77 =C68, { , transparencia = 0 , cola = 0 }.

Fórmula en Excel 11.48 9

B80 =B71, C80 =C71, A82 =A75+ A73, B82 =B75+B73, C82 =C75+C73,
A84 =A75, B84 =B75, C84 =C75, A85 =A76, A86 =A77, C86 =C77, { ,
transparencia = 0 , cola = 0 }.

Fórmula en Excel 11.49 10

B89 =B80, C89 =C80, A91 =A84+ A82, B91 =B84+B82, C91 =C84+C82,
A93 =-A66, B93 =B66, C93 =-C66, A94 =A85, A95 =A86, C95 =C86, { ,
transparencia = 0 , cola = 0 }.

Fórmula en Excel 11.50 11

B98 =B89, C98 =C89, A100 =A93+A91, B100 =B93+B91, C100 =C93+C91,
A102 =A93, B102 =B93, C102 =C93, A103 =A94, A104 =A95, C104
=C95, { , transparencia = 0 , cola = 0 }.

Fórmula en Excel 11.51 12

B107 =B98, C107 =C98, A109 =A102+A100, B109 =B102+B100, C109
=C102+ C100, A111 =-A84, B111 =-B84, C111 =-C84, A112 =A103, A113
=A104, C113 =C104, { , transparencia = 0 , cola = 0 }.

Fórmula en Excel 11.52 13

B116 =B107, C116 =C107, A118 =A111+ A109, B118 =B111+B109, C118

=C111+C109, A120 =A111, B120 =B111, C120 =C111, A121 =A112, A122
=A113, C122 =C113, { , transparencia = 0 , cola = 0 }.

Fórmula en Excel 11.53

14

B125 =B116, C125 =C116, A127 =A120+ A118, B127 =B120+B118, C127
=C120+C118, A129 =A66, B129 =B66, C129 =C66, A130 =A121, A131
=A122, C131 =C122, { , transparencia = 0 , cola = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.54 se muestran los valores de las celdas para el vector campo magnético $\mathbf{B}$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.54

15

C133 =E16 {= 2}, A136 =A137*2 {= B_{0x} }, B136 =B137*2 {= B_{0y} }, C136
=C137*2 {= B_{0z} }, A138 =E17 {= B_x }, B138 =E18 {= B_y }, C138 =E19 {= B_z },
{ , línea = 6 , transparencia = 0,2 , cabeza del vector = 4 }.

En la fórmula de Excel 11.55 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{F}_1$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.55

16

A145 =A64 {= F_{1x0} }, B145 =B64 {= F_{1y0} }, C145 =C64 {= F_{1z0} },
A147 =ABS(E9)*(B66*C138-C66*B138) {= $F_{1x} = I(L_{1y}B_z - L_{1z}B_y)$ },
B147 =ABS(E9)*(-A66*C138+C66*A138) {= $F_{1y} = I(L_{1z}B_x - L_{1x}B_z)$ },
C147 =ABS(E9)*(A66*B138-B66*A138) {= $F_{1z} = I(L_{1x}B_y - L_{1y}B_x)$ }.

En la fórmula de Excel 11.56 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{F}_2$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.56

17

A154 =A100 {= F_{2x0} }, B154 =B100 {= F_{2y0} }, C154 =C100 {= F_{2z0} },
A156 =ABS(E9)*(B102*C138-C102*B138) {= $F_{2x} = I(L_{2y}B_z - L_{2z}B_y)$ },
B156 =ABS(E9)*(-A102*C138+C102*A138) {= $F_{2y} = I(L_{2z}B_x - L_{2x}B_z)$ },
C156 =ABS(E9)*(A102*B138-B102*A138) {= $F_{2z} = I(L_{2x}B_y - L_{2y}B_x)$ }.

En la fórmula de Excel 11.57 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{F}_3$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.57

18

A163 =A82 {= F_{3x0} }, B163 =B82 {= F_{3y0} }, C163 =C82 {= F_{3z0} },
A165 =ABS(E9)*(B84*C138-C84*B138) {= $F_{3x} = I(L_{3y}B_z - L_{3z}B_y)$ },

B165	=ABS(E9)*(-A84*C138+C84*A138) {= $F_{3y} = I(L_{3z}B_x - L_{3x}B_z)$ },
C165	=ABS(E9)*(A84*B138-B184*A138) {= $F_{3z} = I(L_{3x}B_y - L_{3y}B_x)$ }. ■

En la fórmula de Excel 11.58 se muestran los valores de las celdas para el vector $\mathbf{F}_4$ y sus equivalentes en notación matemática.

Fórmula en Excel 11.58

19

A172	=A118 {= F_{3x0} },	B172	=B118 {= F_{3y0} },	C172	=C118 {= F_{3z0} },
A174	=ABS(E9)*(B120*C138-C120*B138) {= $F_{4x} = I(L_{4y}B_z - L_{4z}B_y)$ },				
B174	=ABS(E9)*(-A120*C138+C120*A138) {= $F_{4y} = I(L_{4z}B_x - L_{4x}B_z)$ },				
C174	=ABS(E9)*(A120*B138-B120*A138) {= $F_{4z} = I(L_{4x}B_y - L_{4y}B_x)$ }. ■				

Ejecución de la simulación

Para ejecutar la simulación, modifique los valores de los parámetros como las coordenadas del campo, el ángulo del momento magnético de la espira con respecto al campo, el área de la espira y la corriente. Observe el comportamiento de las fuerzas sobre las cuatro partes de la espira al presionar cualquiera de los botones de rotación. Utilice el botón  para visualizar la rotación de la espira alrededor de uno de sus ejes.

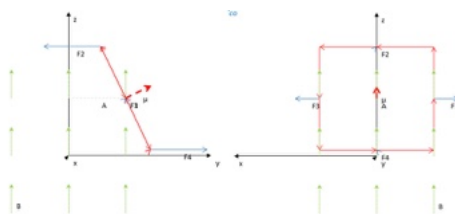


Figura 11.18.

Fuerza magnética sobre una espira con corriente. Momento magnético de la espira.

Nota. Elaboración propia.

11.7 Campo magnético de un elemento de corriente

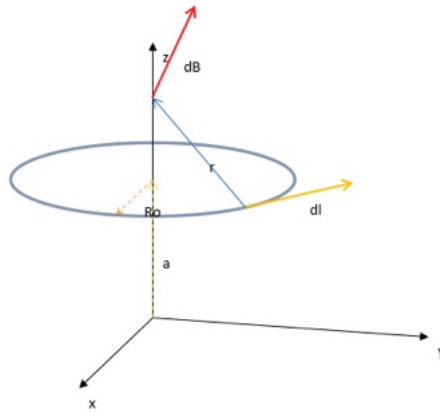
El objetivo de este modelo es comprender la ley de Biot-Savart y cómo calcular el campo magnético generado por un elemento pequeño de corriente.

Ecuaciones matemáticas

En la ecuación (11.19) se estableció que el campo magnético producido por un elemento de corriente se expresa como:

$$d\mathbf{B} = K \frac{I[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (11.22)$$

donde $I d\mathbf{l}$ es el elemento infinitesimal de corriente, $\mathbf{r}$ es el vector que va desde ese

**Figura 11.19.**

Campo magnético de un elemento de corriente de una espira circular.

Nota. Elaboración propia.

elemento hasta el punto donde se desea calcular el campo magnético $d\mathbf{B}$, y K es una constante que depende del sistema de unidades utilizado. La ecuación (11.22) se conoce como la *Ley de Biot-Savart* y es aplicable a cualquier elemento de corriente. Para alambres de tamaño finito que transportan corriente, estos se dividen en segmentos infinitesimales, a cada uno de los cuales se aplica la ley de Biot-Savart. El campo magnético total del alambre se obtiene mediante el principio de superposición de campos.

En coordenadas cartesianas, el vector $d\mathbf{B}$ de la ecuación (11.22) tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{KI}{r^3}(dl_y z - dl_z y), \\ dB_y &= \frac{KI}{r^3}(dl_z x - dl_x z), \\ dB_z &= \frac{KI}{r^3}(dl_x y - dl_y x). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Construcción del modelo

Dado que se desea construir un modelo de una espira circular con un elemento de corriente $I d\mathbf{l}$, que es un vector tangente a la espira en cada punto, el modelo 10.8 puede servir como punto de partida. Es decir, se tomará este modelo como base para construir el de la espira. En la ecuación (11.22) aparecen tres vectores, pero se requerirán cuatro vectores adicionales como auxiliares para llevar a cabo la rotación del elemento $I d\mathbf{l}$ a lo largo de la espira. Además, se cargará el módulo necesario para dibujar trayectorias.

Para permitir la ubicación y rotación del eje de la espira en diferentes posiciones, se utilizará el sistema de coordenadas esféricas. Sin embargo, las ecuaciones principales

que involucran a los vectores en estudio estarán expresadas en coordenadas cartesianas, y así se tratarán en la simulación. El modelo permitirá experimentar cómo se comporta el campo magnético en un entorno cercano al elemento a medida que este avanza en el espacio. Para ello, se implementarán siete configuraciones diferentes de vistas del campo, las cuales podrán seleccionarse en la celda **G34**. A partir de esta celda, también se podrá configurar el espectro de color del campo mediante un número que el usuario podrá modificar. El elemento de la espira podrá moverse a lo largo de la misma con la ayuda del botón **>>**.

En la fórmula de Excel 11.59 se pueden apreciar las celdas correspondientes a la configuración del elemento de corriente de la espira:

Fórmula en Excel 11.59

Configuración de las celdas del elemento de corriente de una espira:

- **G12** =RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2) { = $|dB|$ = },
- **F14** =SI(B13>0;"<- use these cells.";""),
- **G17** =10000 { = I - valor de la corriente en amperios },
- **G18** =0;02 { = R_o - radio de la espira en metros },
- **G19** =0;0000001 { = K - constante magnética },
- **G22** =0, **G23** =0, **G24** =0 { = z },
- **G26** =0;02 { - posición del vector a que sostiene la espira },
- **G27** =0 { = ϕ - inclinación azimutal del eje de la espira },
- **G28** =0 { = θ - inclinación polar del eje de la espira },
- **G34** =0 { - elección de la vista del campo, valores 0 - 7 },
- **F37** ="o[0;001665]x=[0;0]o2[0;008]y=[-0;04;0;04]o3[0;008]z=[-0;03;0;04] color=["&G37&"]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003778176s" { - configuración 1, vista en coord. cartesianas },
- **G37** =0,3 { - espectro de color para la vista 1 },
- **F38** ="s[0;007]r=[0;0;025]s2[180]phi=["&E64&";"&E64+360&"]s3[30]theta=[0;180] color=["&G38&"]origin[cart.]=["&A64&";"&B64&";"&C64&"]tfactor=0;003895721s" { - configuración 2, vista en coord. esféricas },
- **G38** =0,5 { - espectro de color para la vista 2 },
- **F39** ="s[0;00167]r=[0;025;0;025]s2[10]phi=[0;360]s3[10]theta=[90;180] color=["&G39&"]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003895721s" { - configuración 3, vista en coord. esféricas },
- **G39** =0,07 { - espectro de color para la vista 3 },
- **F40** ="o[0;002]x=[-0;04;0;04]o2[0;002]y=[-0;02;0;04]o3[0;008]z=[0;0] color=["&G40&"]origin[cart.]=["&A46&";"&B46&";"&C46&"]tfactor=0;003778176s" { - configuración 4, vista en coord. cartesianas },
- **G40** =0,1 { - espectro de color para la vista 4 },
- **F41** ="o[0;001665]x=[0;0]o2[0;008]y=[-0;02;0;04]o3[0;008]z=[-0;03;0;04] color=["&G41&"]origin[cart.]=["&A64&";"&B64&";"&C64&"]tfactor=0;003778176s" { - configuración 5, vista en coord. cartesianas },
- **G41** =1 { - espectro de color para la vista 5 },

- F42 ="c[0;006]rho=[0;01;0;03]c2[10]phi=[0;360]c3[0;00666]z=[0;01;0;01] color=["&G42&"]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003801384s"
{ - configuración 6, vista en coord. cilíndricas },
- G42 =0,9 { - espectro de color para la vista 6 },
- F43 ="c[0;006]rho=[0;02;0;02]c2[10]phi=[0;360]c3[0;00666]z=[0;01;0;01] color=["&G43&"]origin[cart.]=["&G22&";"&G23&";"&G24&"]tfactor=0;003801384s"
{ - configuración 7, vista en coord. cilíndricas },
- G43 =0,1 { - espectro de color para la vista 7 },
- D64 =RAIZ(A64^2+B64^2+C64^2) { = r - radio necesario para la vista 7 },
- E64 =GRADOS(ATAN2(A64;B64)) { = ϕ - ángulo necesario para la vista 7 }.

En la fórmula de Excel 11.60 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo magnético $\mathbf{dB}$ del elemento $\mathbf{Idl}$.

Fórmula en Excel 11.60 1

Configuración de las celdas que corresponden a $\mathbf{dB}$:

- C7 =SI(G34=0;"";BUSCARV(G34;D36;G50;3)),
- B8 =SI(G34=0;1;"60*1"),
- A10 =A11, B10 =B11, C10 =C11,
- A11 =0;02 { = x }, B11 =0;04 { = y }, C11 =0;035 { = z - punto de interés para hallar $d\vec{B}$ },
- A12 =(B66*C75-C66*B75)*B20,
- B12 =(-A66*C75+C66*A75)*B20,
- C12 =(A66*B75-B66*A75)*B20,
- {Otros , transparencia = 0 }.

En la fórmula de Excel 11.61 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector $\mathbf{a}$ que tiene el rol de eje de la espira.

Fórmula en Excel 11.61 2

Configuración de las celdas que corresponden al vector $\mathbf{a}$:

- A19 =G22, B19 =G23, C19 =G24,
- B20 =G17*G19/POTENCIA(A75^2+B75^2+C75^2;3/2) { = $\frac{Ki}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ },
- A21 =G26*COS(RADIANTES(G27))*SENO(RADIANTES(G28)) { = $a \cos \phi \sin \theta$ },
- B21 =G26*SENO(RADIANTES(G27))*SENO(RADIANTES(G28)) { = $a \sin \phi \sin \theta$ },
- C21 =G26*COS(RADIANTES(G28)) { = $a \cos \theta$ },
- {Otros , línea = 4 }.

En lugar del vector **3** descargaremos al modelo el módulo **15 - TRAJECTORY** para poder dibujar la espira.

En la fórmula de Excel 11.62 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector unitario $\hat{u}$, necesario para hacer rotar el elemento de la espira a su alrededor.

Fórmula en Excel 11.62 4

Configuración de las celdas que corresponden a $\hat{u}$:

- A37 =A21+A19 $\{= x_0 + a_x\}$,
- B37 =B21+B19 $\{= y_0 + a_y\}$,
- C37 =C21+C19 $\{= z_0 + a_z\}$,
- A39 =A21/RAIZ(A21^2+B21^2+C21^2) $\{= a_x/a\}$,
- B39 =B21/RAIZ(A21^2+B21^2+C21^2) $\{= a_y/a\}$,
- C39 =C21/RAIZ(A21^2+B21^2+C21^2) $\{= a_z/a\}$,
- {Otros , transparencia = 1 }.



En la fórmula de Excel 11.63 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector radio de la espira **Ro**.

Fórmula en Excel 11.63 5

Configuración de las celdas de **Ro**:

- A46 =A19+A21, B46 =B19+B21, C46 =C19+C21,
- A48 =G18*COS(RADIANTES(G27))*COS(RADIANTES(G28))
 $\{= R_{ox} = R_o \cos \phi \cos \theta\}$,
- B48 =G18*SENO(RADIANTES(G27))*COS(RADIANTES(G28))
 $\{= R_{oy} = R_o \sin \phi \cos \theta\}$,
- C48 =-G18*SENO(RADIANTES(G28))
 $\{= R_{oz} = R_o \sin \theta\}$.



En la fórmula de Excel 11.64 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector $\vec{R}$ que está rotando con respecto a $\vec{R}_o$ alrededor del vector unitario $\hat{u}$ de acuerdo a las ecuaciones 10.4. En la figura 11.19 el vector $\vec{R}$ está oculto y va desde el eje z , perpendicular a z hasta el punto donde inicia $d\vec{l}$.

Fórmula en Excel 11.64 6

Configuración de las celdas de **R**:

- A54 =SENO(RADIANTES(I5)),
- B54 =1-COS(RADIANTES(I5)),
- A55 =A46, B55 =B46, C55 =C46,

- $A57 = A48 + B54 * (B39 * A39 * B48 - B39 * A48 + C39 * A39 * C48 - C39 * C39 * A48) + A54 * (B39 * C48 - C39 * B48)$
 $\{R_x = R_{ox} + (1 - \cos \theta)(u_y u_x R_{oy} - u_y u_y R_{ox} + u_z u_x R_{oz} - u_z u_z R_{ox}) + \sin \theta(u_y R_{oz} - u_z R_{oy})\},$
- $B57 = B48 + B54 * (-A39 * A39 * B48 + A39 * B39 * A48 + C39 * B39 * C48 - C39 * C39 * B48) + A54 * (-A39 * C48 + C39 * A48)$
 $\{R_y = R_{oy} + (1 - \cos \theta)(-u_x u_x R_{oy} + u_x u_y R_{ox} + u_z u_y R_{oz} - u_z u_z R_{oy}) + \sin \theta(u_z R_{ox} - u_x R_{oz})\},$
- $C57 = C48 + B54 * (-A39 * A39 * C48 + A39 * C39 * A48 - B39 * B39 * C48 + B39 * C39 * B48) + A54 * (A39 * B48 - B39 * A48)$
 $\{R_z = R_{oz} + (1 - \cos \theta)(-u_x u_x R_{oz} + u_x u_z R_{ox} - u_y u_y R_{oz} + u_y u_z R_{oy}) + \sin \theta(u_x R_{oy} + u_y R_{ox})\}.$

En la fórmula de Excel 11.65 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector elemento de corriente $d\vec{l} = \hat{u} \times \vec{R}$.

Fórmula en Excel 11.65 7

Configuración de las celdas de $d\vec{l}$:

- $A64 = A57 + A55, B64 = B57 + B55, C64 = C57 + C55,$
- $A66 = B39 * C57 - C39 * B57 \{= dl_x\},$
- $B66 = -A39 * C57 + C39 * A57 \{= dl_y\},$
- $C66 = A39 * B57 - B39 * A57 \{= dl_z\}.$

En la fórmula de Excel 11.66 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector $\vec{r}$ que corresponde al radio presente en la ley de Biot - Savart.

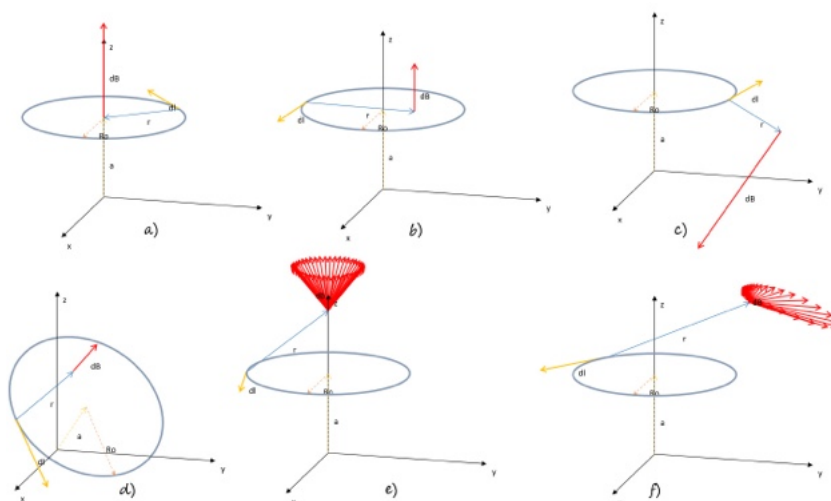
Fórmula en Excel 11.66 8

Configuración de las celdas que corresponden a $\vec{r}$:

- $A73 = A64, B73 = B64, C73 = C64,$
- $A75 = A11 - A21 - A57 \{= r_x\},$
- $B75 = B11 - B21 - B57 \{= r_y\},$
- $C75 = C11 - C21 - C57 \{= r_z\}.$

Ejecutar la simulación

Dado que la espira no es un objeto estándar de Excel, es necesario dibujarla antes de simular (aunque no es obligatorio si no se desea visualizarla). Para dibujarla, diríjase al vector 3 (módulo de trayectorias), presione **Reset graph**, seleccione el vector 6 en la lista desplegable y ejecute la simulación con **>>**. La espira se dibujará estática en la vista actual. Para visualizarla desde otra perspectiva, deberá volver a dibujarla: presione **Reset graph**, seleccione nuevamente el vector 6 y ejecute la simulación.

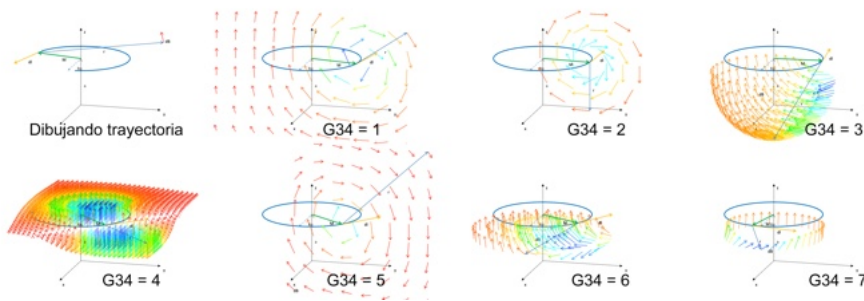
**Figura 11.20.**

Campo magnético de un elemento de corriente, calculado en diferentes puntos del espacio: a) en el centro de la espira; b) en un punto dentro de la espira; c) en un punto fuera de la espira; d) con inclinación de la espira; e) y f) utilizando la opción de historial.

Nota. Elaboración propia.

Seleccione los parámetros iniciales de acuerdo con lo mostrado al inicio de la construcción del modelo. En las celdas **A11**, **B11** y **C11**, ingrese las coordenadas del punto en el que desea observar el comportamiento de $d\mathbf{B}$. Por ejemplo, con los parámetros iniciales de este modelo puede elegir el punto **A11** = 0, **B11** = 0 y **C11** = 0,02 para ubicarse en el centro de la espira; **A11** = 0, **B11** = 0,01 y **C11** = 0,02 para un punto dentro de la espira; o **A11** = 0, **B11** = 0,08 y **C11** = 0,03 para un punto fuera de la espira. Para cada punto, presione el botón **>>** para visualizar todos los vectores del campo magnético correspondientes a los elementos de corriente durante una vuelta completa de la espira. En la figura 11.20 se muestran algunas instantáneas de estos tres puntos. Repita el procedimiento para otros puntos del espacio.

Además, puede experimentar inclinando la espira modificando los valores de las celdas **G26**, **G27** y **G28**. En este caso, deberá volver a dibujar la espira en la nueva posición. Utilizando el botón  en **A6**, se podrán obtener imágenes de todos los vectores del campo magnético correspondientes al elemento de corriente en todas las posiciones a lo largo de la espira, como se muestra en las figuras 11.20, e) y f). En la figura 11.21 se aprecian las diferentes vistas del campo (el campo magnético visto desde diferentes coordenadas y configuraciones de las vistas) por medio de la celda **G34**.

**Figura 11.21.**

Campo magnético de un elemento de corriente con diferentes vistas utilizando la celda G34 del modelo.

Nota. Elaboración propia.

11.8 Ley de Biot-Savart para corrientes eléctricas

La ley de Biot-Savart describe el campo magnético generado por una corriente eléctrica. Para una corriente compuesta por varios elementos de corriente discretos, la ley establece que la contribución al campo magnético en un punto arbitrario de espacio por cada elemento de corriente, se puede calcular mediante una expresión integral. Esta ley es fundamental para el estudio del campo magnético producido por corrientes y es utilizada en la descripción de fenómenos electromagnéticos.

Ecuaciones matemáticas

La ley de Biot-Savart para un solo elemento de corriente infinitesimal $I d\mathbf{l}$, en un punto de observación $\mathbf{r}$, viene dada por la siguiente ecuación vectorial:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (11.24)$$

donde:

- μ_0 es la permeabilidad del vacío,
- I es la corriente en el elemento de corriente $d\mathbf{l}$,
- $d\mathbf{l}$ es el vector que representa el elemento infinitesimal de corriente,
- $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario que apunta desde el elemento de corriente hacia el punto de observación,
- r es la distancia entre el elemento de corriente y el punto de observación.

El campo magnético total en un punto debido a una corriente compuesta de varios elementos de corriente discretos es la suma vectorial de las contribuciones individuales de cada elemento de corriente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{I_i d\mathbf{l}_i \times \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2}, \quad (11.25)$$

donde la sumatoria recorre todos los elementos discretos de corriente en la configuración dada.

Componentes del campo magnético

Para calcular las componentes del campo magnético en un punto arbitrario $\mathbf{r}$, primero necesitamos descomponer el vector $d\mathbf{l}$ y el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ en sus componentes cartesianas. Supongamos que el punto de observación tiene coordenadas (x, y, z) , y que el elemento de corriente está ubicado en las coordenadas (x_i, y_i, z_i) .

El vector desplazamiento $\mathbf{r}_i$ desde el elemento de corriente hasta el punto de observación es:

$$\mathbf{r}_i = (x - x_i)\hat{i} + (y - y_i)\hat{j} + (z - z_i)\hat{k}. \quad (11.26)$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_i$ es entonces:

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} = \frac{(x - x_i)\hat{i} + (y - y_i)\hat{j} + (z - z_i)\hat{k}}{r_i}, \quad (11.27)$$

donde $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ es la distancia entre el punto de observación y el elemento de corriente. Ahora, supongamos que el elemento de corriente $d\mathbf{l}$ tiene componentes (dx, dy, dz) en las direcciones x, y y z . La contribución al campo magnético $d\mathbf{B}$ se puede calcular usando el producto cruzado entre $d\mathbf{l}$ y $\hat{\mathbf{r}}_i$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \times \left(\frac{(x - x_i)\hat{i} + (y - y_i)\hat{j} + (z - z_i)\hat{k}}{r_i} \right)}{r_i^2}. \quad (11.28)$$

El producto cruz produce las siguientes componentes para el campo magnético $d\mathbf{B}$ en las direcciones x, y y z :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_i^3} [(dy(z - z_i) - dz(y - y_i))], \quad (11.29)$$

$$dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_i^3} [(dz(x - x_i) - dx(z - z_i))], \quad (11.30)$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_i^3} [(dx(y - y_i) - dy(x - x_i))]. \quad (11.31)$$

Podemos llamar $\frac{\mu_0}{4\pi} \equiv K$. La contribución total al campo magnético en un punto arbitrario es la suma de todas las contribuciones de los elementos discretos de corriente:

$$\mathbf{B} = \sum_i d\mathbf{B}_i = \left(\sum_i dB_{x_i} \right) \hat{i} + \left(\sum_i dB_{y_i} \right) \hat{j} + \left(\sum_i dB_{z_i} \right) \hat{k}. \quad (11.32)$$

Esta expresión nos da las componentes del campo magnético total en el punto de observación debido a la corriente compuesta por varios elementos discretos de corriente.

Construcción del modelo

Construiremos un modelo para calcular el campo magnético generado por una corriente de cualquier configuración. Esto significa que el modelo permitirá configurar la corriente (o el alambre que transporta la corriente) en cualquier forma en el espacio tridimensional y calcular el campo magnético en cualquier punto del espacio a una distancia determinada de la corriente. Además, el modelo incluirá la posibilidad de establecer el número de elementos $d\mathbf{l}$ en los que se divide el alambre con corriente. Finalmente, el usuario podrá agregar varias corrientes al sistema para calcular el campo magnético resultante en conjunto. Para lograr esto, se utilizarán las ecuaciones descritas anteriormente.

Con el objetivo de simplificar la utilización del modelo, se procederá inicialmente a modelar un prototipo del elemento $d\mathbf{l}$, el cual se replicará tantas veces como sea necesario para formar una corriente de estructura más compleja. La distribución de los elementos $d\mathbf{l}$ se llevará a cabo mediante ecuaciones paramétricas previamente definidas. Para la implementación en *ScienSolar*, se requerirán ocho vectores: Tres vectores para el primer elemento $d\mathbf{l}$, su campo $d\mathbf{B}$ y su radio $\mathbf{r}$; tres vectores adicionales para el segundo elemento, que incluirán su campo y su radio, con la capacidad de clonarse, y finalmente, dos vectores: Uno para representar el campo resultante $\mathbf{B}$ y otro para posicionar el alambre en cualquier punto del espacio.

En la fórmula de Excel 11.67 se muestran las celdas con la configuración inicial.

Fórmula en Excel 11.67

- B3 =51 { fila inicial para clonar los $d\mathbf{l}$ },
- C3 =77 { fila final para clonar los $d\mathbf{l}$ },
- E5 =1000 { escala del sistema },
- F10 =SI(C7="";" |B| (T) =" ";"),
- G10 =SI(C7="";RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2);"") { = $|B|(T)$ - magnitud del campo magnético },
- G17 =80000 { = $I(A)$ - corriente del alambre },
- G18 =0,03 { = $dL(m)$ - longitud en metros de cada elemento },
- G19 =0,0000001 { = $K(Tm/A) = \frac{\mu_0}{4\pi}$ },
- G22 =0,06 { = $x_o(m)$ }, G23 =0,06 { = $y_o(m)$ }, G24 =0 { = $z_o(m)$ - origen del alambre },
- G25 =0 { = $r_o(m)$ - radio para inclinar el alambre },
- G27 =0 { = ϕ - ángulo azimutal de inclinación },
- G28 =0 { = θ - ángulo polar de inclinación },
- G30 =0 { = $\Delta\phi$ },
- G31 =0 { = $\Delta\theta$ },
- G36 =0 { - mostrar/ocultar radios auxiliares },
- G37 =0 { - mostrar/ocultar campos $d\mathbf{B}$ auxiliares },
- G41 =CONTAR.SI(D:D;"B"&G43&"_*") { = n - cantidad de elementos $d\mathbf{l}$ },
- G42 =G41*G18 { = L - longitud del alambre },

- G43 =1 { - número del alambre},
- D48 ="B"&G\$43&"_"&C24 { - etiqueta del vector dB}.

En la fórmula de Excel 11.68 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo magnético resultante **B**.

Fórmula en Excel 11.68 1

Configuración de las celdas que corresponden a **B**:

- A9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(C:C;D:D;"B*") {= $\sum_i dB_{zi}$ },
- B9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(A:A;D:D;"B*") {= $\sum_i dB_{xi}$ },
- C9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(B:B;D:D;"B*") {= $\sum_i dB_{yi}$ },
- A10 =A11, B10 =B11, C10 =C11,
- A11 =0,1 {= x }, B11 =0,1 {= y }, C11 =0,1 {= z },
- A12 =B9 {= $\sum_i dB_{xi}$ },
- B12 =C9 {= $\sum_i dB_{yi}$ }, C12 =A9 {= $\sum_i dB_{zi}$ },
- {Otros , cabeza del vector = 2 }.

En la fórmula de Excel 11.69 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **a**, encargado de posicionar el alambre.

Fórmula en Excel 11.69 2

Configuración de las celdas que corresponden a **a**:

- A15 =A6+1,
- A18 =A11-A19, B18 =B11-B19, C18 =C11-C19,
- A19 =G22, B19 =G23, C19 =G24,
- A21 =G25*COS(RADIANTES(G27))*SENO(RADIANTES(G28)) {= $r_o \cos \phi \sin \theta$ },
- B21 =G25*SENO(RADIANTES(G27))*SENO(RADIANTES(G28)) {= $r_o \sin \phi \sin \theta$ },
- C21 =G25*COS(RADIANTES(G28)) {= $r_o \cos \theta$ },
- {Otros , línea = 4 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.70 se muestran los valores que deben tener las celdas del elemento del alambre **dl**. las fórmulas de la fila 30 se usan para *moldear* la corriente en el espacio. El lector puede usar sus propias ecuaciones de distribución de los elementos del alambre.

Fórmula en Excel 11.70 3

Configuración de las celdas que corresponden a **dl**:

- A24 =A15+1,
- A28 =A19+A21, B28 =B19+B21, C28 =C19+C21,
- A30 =\$G\$18*COS(RADIANTES(\$G\$27+\$G\$30*C24))*SENO(RADIANTES(\$G\$28+\$G\$31*C24)) {= $dl \cos(\phi + \Delta\phi \times i) \sin(\theta + \Delta\theta \times i)$ },
- B30 =\$G\$18*SENO(RADIANTES(\$G\$27+\$G\$30*C24))*SENO(RADIANTES(\$G\$28+\$G\$31*C24)) {= $dl \sin(\phi + \Delta\phi \times i) \sin(\theta + \Delta\theta \times i)$ },
- C30 =\$G\$18*COS(RADIANTES(\$G\$28+\$G\$31*C24)) {= $dl \cos(\theta + \Delta\theta \times i)$ },
- A31 =SI(G17<0;3;1) { - fórmula de Excel para invertir la dirección de la corriente},
- A32 =SI(G17>0;3;1) { - fórmula de Excel para invertir la dirección de la corriente}.

En la fórmula de Excel 11.71 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **r**, que es el radio desde el punto donde se encuentra el primer **dl** hasta el punto de observación del campo **B**.

Fórmula en Excel 11.71 4

Configuración de las celdas que corresponden a **r**:

- A33 =A24+1,
- C35 =\$G\$36,
- B36 =\$G\$19*\$G\$17/(POTENCIA(A39^2+B39^2+C39^2;3/2)),
- A37 =A28, B37 =B28, C37 =C28,
- A39 =\$A\$18-\$A\$21, B39 =\$B\$18-\$B\$21, C39 =\$C\$18-\$C\$21,
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.72 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo magnético **dB** del primer elemento del alambre.

Fórmula en Excel 11.72 5

Configuración de las celdas que corresponden a **dB** del primer **dl**:

- A42 =A33+1,
- C44 =\$G\$37,
- A46 =A39+A37, B46 =B39+B37, C46 =C39+C37,
- A48 =(B30*C39-C30*B39)*B36 {= dB_{1x} },
- B48 =(-A30*C39+C30*A39)*B36 {= dB_{1y} },
- C48 =(A30*B39-B30*A39)*B36 {= dB_{1z} },
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 2 }.

En la fórmula de Excel 11.73 se muestran los valores que deben tener las celdas del *i*-ésimo **dl**.

Fórmula en Excel 11.73 6

Configuración de las celdas correspondientes a los parámetros iniciales::

- $A51 = A42 + 1,$
- $C51 = C24 + 1, B53 = B26, C53 = C26,$
- $A55 = A28 + A30, B55 = B28 + B30, C55 = C28 + C30,$
- $A57 = \$G\$18 * \cos(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C51)) * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C51)) \{= dl \cos(\phi + \Delta\phi \times i) \sin(\theta + \Delta\theta \times i)\},$
- $B57 = \$G\$18 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C51)) * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C51)) \{= dl \sin(\phi + \Delta\phi \times i) \sin(\theta + \Delta\theta \times i)\},$
- $C57 = \$G\$18 * \cos(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C51)) \{= dl \cos(\theta + \Delta\theta \times i)\},$
- $C59 = C32,$
- {Otros , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.74 se muestran los valores que deben tener las celdas del i -ésimo r.

Fórmula en Excel 11.74 7

Configuración de las celdas correspondientes a los parámetros iniciales:

- $A60 = A51 + 1,$
- $B62 = B35,$
- $C62 = \$G\$36,$
- $B63 = \$G\$19 * \$G\$17 / (\text{POTENCIA}(A66^2 + B66^2 + C66^2; 3/2)),$
- $A64 = A55, B64 = B55, C64 = C55,$
- $A66 = A39 - A30, B66 = B39 - B30, C66 = C39 - C30,$
- $A67 = A40, C67 = C40, A68 = A41,$
- $C68 = C41,$
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.76 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo magnético $d\mathbf{B}$ del i -ésimo elemento del alambre.

Fórmula en Excel 11.75 8

Configuración de las celdas que corresponden a $d\mathbf{B}$:

- $A69 = A60 + 1, B71 = B44, C71 = \$G\$37,$
- $A73 = A66 + A64, B73 = B66 + B64, C73 = C66 + C64,$
- $A75 = (B57 * C66 - C57 * B66) * B63 \{= dB_{ix}\},$
- $B75 = (-A57 * C66 + C57 * A66) * B63 \{= dB_{iy}\},$

- $C75 = (A57 * B66 - B57 * A66) * B63 \{ = dB_{iz} \},$
- $A76 = A49, C76 = C49, A77 = A50, C77 = C50,$
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 2 }.



Una vez configurados los dos primeros elementos $d\mathbf{l}$, el segundo de los cuales se puede clonar a través del botón **+OBJ**, es posible configurar en el espacio una gran cantidad de alambres con diferentes propiedades y corrientes.

Ejemplo 11.8.1 Un alambre circular de radio 25 cm conduce una corriente de 80 A. Determinar mediante la ley de Biot-Savart, el campo magnético en el centro del círculo, utilizando las expresiones matemáticas correspondientes y resolviendo la integral. Posteriormente, se construirá el alambre circular en el modelo computacional y se contrastarán los resultados obtenidos analíticamente con los resultados numéricos. En el modelo computacional se calculará el campo magnético de la corriente circular en otros puntos del espacio que no tengan simetría.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la ley de Biot-Savart, el campo magnético total en el centro de una espira circular es la suma vectorial de las contribuciones de cada elemento infinitesimal $d\mathbf{l}$ del alambre. Cuando la longitud de cada elemento tiende a cero y el número de elementos tiende a infinito, manteniendo la geometría de la circunferencia, la suma se convierte en una integral:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (11.33)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, I es la corriente, $d\mathbf{l}$ es el elemento diferencial de longitud del alambre, $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario que apunta desde el elemento $d\mathbf{l}$ hacia el punto de interés (en este caso, el centro de la espira), y r es la distancia entre $d\mathbf{l}$ y el centro.

Debido a la simetría del problema, todos los vectores $\mathbf{r}$ tienen la misma magnitud y son perpendiculares a los elementos $d\mathbf{l}$. Por lo tanto, la magnitud del producto cruz $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}$ es $dl \sin 90^\circ = dl$. Además, el campo magnético resultante $\mathbf{B}$ apunta en dirección perpendicular al plano de la espira, siguiendo la regla de la mano derecha. Si la corriente circula en sentido antihorario (vista desde arriba), el campo magnético tendrá dirección hacia arriba.

Fórmula en Excel 11.76

8

- G13 =0,25 { = R - radio de la circunferencia del alambre },
- G17 =80 { = $I(A)$ - corriente },
- G18 =2*PI()*G13/G41 { = $dl = \frac{2\pi r}{n}$ - longitud de un elemento },
- G19 =0,0000001 { = $K = 10^{-7}$ - constante de la ley de Biot - Savart },
- G22 =-0,02 { = x_o - corrimiento en x para centrar la espira },
- G23 =-G13 { = $y_o = -R$ - corrimiento en y para centrar la espira },
- G24 =0 { la línea no se levanta en z },
- G27 =-G30 { = ϕ }, G28 =90 { = θ },
- G30 =10 { = $\Delta\phi$ - avance de la línea para formar una circunferencia },
- G31 =0 { la línea no se dobla hacia arriba }.
- B8 600*0,005 { configuración para ver los vectores a esa escala pequeña. }
- +OBJ { oprimir este botón hasta agregar 36 elementos en total. Utilizar la celda B2 para ingresar el número de elementos a agregar a la vez }.

A continuación, se procederá a calcular este campo magnético utilizando el modelo computacional en *ScienSolar*. Para ello, se configurarán las celdas como se muestra en la fórmula de Excel 11.76.

Al introducir las coordenadas del punto de interés en las celdas correspondientes, es decir, A11 =0, B11 =0, C11 =0, se obtiene inmediatamente el resultado del campo magnético en las celdas A12 = $B_x = 0$, B12 = $B_y = 0$ y C12 = $B_z = 0.0001998 \text{ T} \approx 0,0002 \text{ T} = 0,2 \text{ mT}$. Este valor coincide con el resultado obtenido mediante el cálculo analítico realizado previamente (los valores cercanos a cero que se puedan observar en las celdas de resultados, pueden deberse a que la espira no se ubicó exactamente en el origen de coordenadas). El vector del campo magnético se visualiza en la parte izquierda de la figura 11.22.

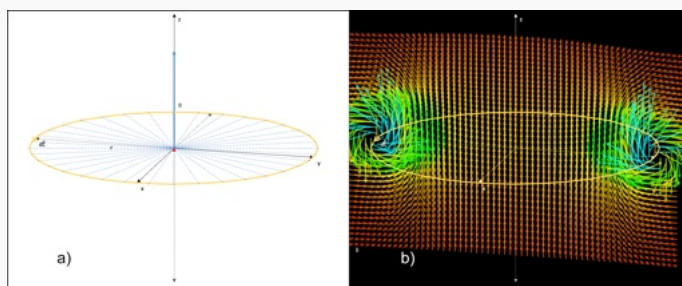


Figura 11.22

Campo magnético en el centro de una espira circular con corriente. a) vector $\mathbf{B}$ en el centro de la espira, b) campo vectorial en una región en el plano YZ.

Nota. Elaboración propia.

Para obtener una representación espacial del campo magnético en una región específica, como la de la parte derecha de la figura 11.22, se debe introducir la siguiente cadena de valores en la celda celda[C7]:

o[0,01]x=[0;0]o2[0,01]y=[-0,3;0,3]o3[0,01]z=[-0,2;0,2]

color=[0,001]origin[cart.]=[0;0,0]tfactor=0,0s,

y luego se oprime **[XYZ]**. Excel se demorará unos cuantos segundos en obtener la imagen, dependiendo de los recursos del computador.

Calculemos el campo magnético en otros puntos del espacio. Para ello sólo necesitaremos cambiar las coordenadas del punto en las celdas **A11**, **B11**, **C11** y observar las componentes del campo resultante en las celdas **A12**, **B12** y **C12**. A continuación se observan algunos ejemplos (las distancias están dadas en metros y el campo en Tesla):

1. **A11** =0,1, **B11** =0,2, **C11** =0,2, resultado:
A12 = $B_x = 1,9 \times 10^{-5}$, **B12** = $B_y = 5 \times 10^{-5}$, y **C12** = $B_z = 5 \times 10^{-5}$.
2. **A11** =0,1, **B11** =0,3, **C11** =-0,1, resultado:
A12 = $B_x = -1,9 \times 10^{-5}$, **B12** = $B_y = -8,3 \times 10^{-5}$, y **C12** = $B_z = -1,4 \times 10^{-5}$.
3. **A11** =0, **B11** =0,24, **C11** =0, resultado:
A12 = $B_x = 3,5 \times 10^{-19} \approx 0$, **B12** = $B_y = -2,9 \times 10^{-18} \approx 0$, y **C12** = $B_z = 7,3 \times 10^{-4}$.
4. **A11** =0, **B11** =0,26, **C11** =0, resultado:
A12 = $B_x \approx 0$, **B12** = $B_y \approx 0$, y **C12** = $B_z = -3,7 \times 10^{-4}$.

Las discrepancias o aproximaciones en los resultados pueden deberse a dos factores principales: (1) la espira no está perfectamente centrada, o (2) la espira no es completamente circular. Al tomar puntos alejados de la espira, por ejemplo, a una distancia equivalente al doble del radio, se observa que la influencia del número de elementos dl en el cálculo del campo magnético se vuelve menos significativa.

Por ejemplo, consideremos las coordenadas **A11** =0, **B11** =0,26, **C11** =0. El resultado obtenido para la componente B_z del campo magnético es $B_z = -3,7 \times 10^{-4}$ T. Si aumentamos el número de elementos dl al doble, es decir, configuramos **B3** =36 y presionamos el botón **[+OBJ]**, es necesario reducir el incremento angular $\Delta\phi$ a **G30** =5 para mantener el tamaño de la espira. Con esta configuración, el resultado obtenido es $B_z = -1,7 \times 10^{-3}$ T, el cual difiere significativamente del valor anterior.

Sin embargo, al tomar un punto más alejado de la espira, por ejemplo, **A11**

$=0$, $B_{11} = 0,5$, $C_{11} = 0$, el campo magnético calculado con 72 elementos de corriente es $B_z = -1,73 \times 10^{-5}$ T. Si reducimos el número de elementos a la mitad (presionando el botón **-OBJ**) y ajustamos $G_{30} = 10$, el resultado obtenido es $B_z = -1,722 \times 10^{-5}$ T, lo cual es aproximadamente igual al valor anterior.

Aunque, en principio, estas variaciones podrían interpretarse como un defecto del modelo computacional en realidad ilustran un principio fundamental: Las fórmulas clásicas para el cálculo de campos magnéticos son válidas principalmente a distancias considerables de las fuentes que los generan, como en el caso de las corrientes. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones prácticas esto no representa un problema, ya que los cálculos de campos magnéticos suelen realizarse a distancias grandes en comparación con las dimensiones de las fuentes de corriente o carga. Este principio puede observarse claramente en la figura 11.23, en donde a distancias alejadas de la espira, los campos magnéticos generados por espiras con 72 elementos (representados por vectores rojos) y 36 elementos (representados por vectores azules) son muy similares en puntos cercanos entre sí. Sin embargo, en regiones muy próximas a la espira, el campo magnético correspondiente a la espira con 72 elementos es significativamente mayor en magnitud que el de la espira con 36 elementos. Esta diferencia se debe a la mayor densidad de elementos de corriente en la espira con 72 segmentos, lo que permite una representación más precisa del campo magnético cerca de la fuente.

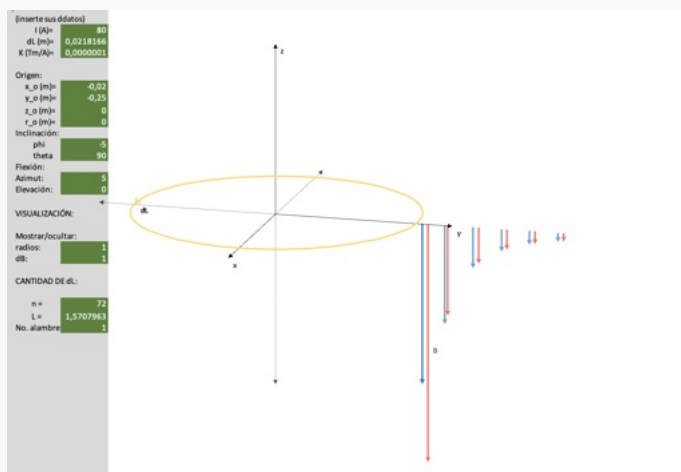


Figura 11.23

Campos magnéticos (en rojo y en azul) generados por dos espiras circulares con el mismo radio y la misma corriente, pero con diferente número de elementos de corriente.

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 11.8.2 Configuración de una botella magnética

A partir del ejemplo anterior (ejemplo 11.8.1), se propone crear un modelo de una

botella magnética utilizando dos espiras circulares con las mismas características descritas previamente, pero separadas una distancia determinada. El objetivo es obtener una configuración bidimensional del campo magnético en el plano perpendicular a las espiras.

SOLUCIÓN

Para construir una botella magnética, se duplica la espira con corriente creada en el ejemplo anterior y se desplaza verticalmente una distancia equivalente al doble del radio de una de las espiras. Antes de duplicar la espira, se debe asegurar que la espira original esté compuesta por 36 elementos de corriente. A continuación, se sigue el siguiente procedimiento:

1. En la celda **B2**, se ingresa la palabra **ENTIRE** (sin espacios ni signos adicionales). 2. Luego, en las celdas **B3** y **C3**, se introducen los números correspondientes a la primera y última filas del paquete de filas que componen la espira, es decir **B3** = 15 y **C3** = 995, donde 995 corresponde a la última fila de las celdas que contienen los 36 elementos de corriente. 3. Finalmente, se presiona nuevamente el botón **+OBJ** para agregar la nueva corriente.

Una vez agregada la segunda espira, se etiqueta con el número 2 en **G1024** = 2 y se posiciona ligeramente por encima de la primera espira, configurando **G1005** = 0.6. Para obtener una representación gráfica del campo magnético similar a de la figura 11.24, se incrementa la corriente en ambas espiras a **G17** = 200 y **G998** = 200. Además, se ajusta la escala de los vectores en el sistema de coordenadas configurando **B8** = 80* 0.002 (sin incluir el signo igual).

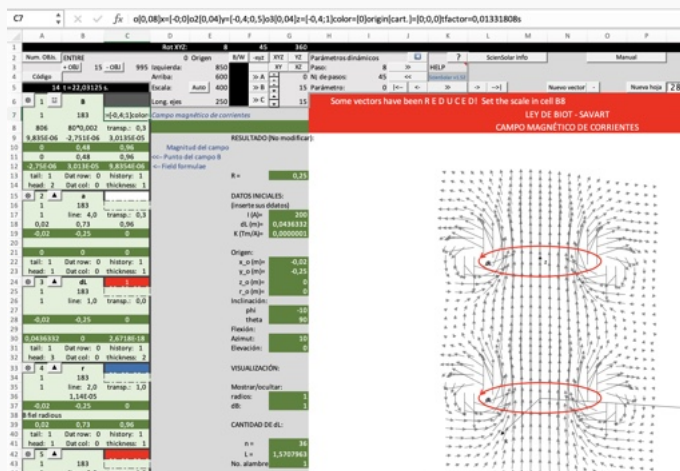


Figura 11.24

Botella magnética a partir de dos corrientes circulares.

Nota. Elaboración propia.

Finalmente, en la celda **C7**, se ingresa la siguiente cadena de valores para

definir los parámetros de visualización:

```
o[0,08]x=[-0;0]o2[0,04]y=[-0,4;0,5]o3[0,04]z=[-0,4;1]
```

```
color=[0]origin[cart.]=[0;0,0]tfactor=0,01331808s.
```

No olvide oprimir **XYZ** para ver los resultados. Excel demorará unos cuantos segundos en poner los vectores en la hoja de cálculo.

11.9 Campo magnético de una corriente toroidal

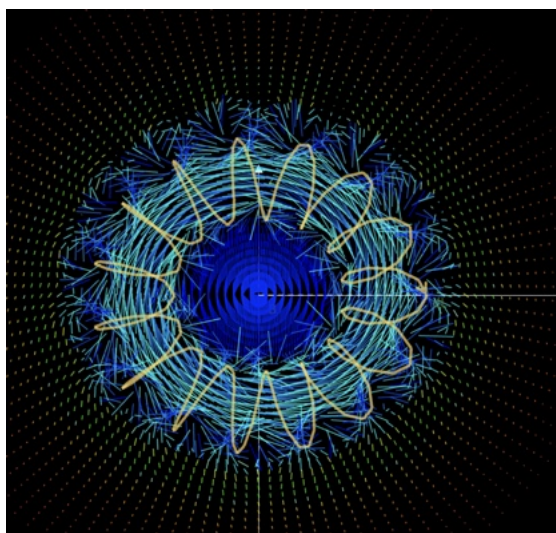


Figura 11.25.

Campo magnético dentro y fuera de una corriente de forma toroidal modelada en ScienSolar.

Nota. Elaboración propia.

Un toroide es una superficie generada por la rotación de un círculo en un espacio tridimensional. Este objeto topológico tiene la forma de un anillo o "donut" y es una de las superficies más comunes en geometría diferencial y física matemática, especialmente en el estudio de campos electromagnéticos y fluidos.

Descripción geométrica del toroide

Para entender las ecuaciones paramétricas que describen un toroide, es fundamental definir algunas variables. Consideramos un círculo de radio r que se encuentra en el plano yz perpendicular al plano xy , cuya posición inicial se encuentra en el origen de coordenadas. Este círculo se rota alrededor de un eje que es paralelo al eje z , pero desplazado una distancia R desde el origen.

El parámetro que controlará la posición de un punto sobre el toroide será el ángulo de rotación tanto en el círculo interior como en el círculo mayor. Específicamente, se

utilizarán dos parámetros:

- θ , el ángulo que define la posición de un punto sobre el círculo menor de radio r .
- ϕ , el ángulo que define la posición del círculo mayor de radio R .

Ecuaciones paramétricas

Con base en la descripción geométrica anterior, las coordenadas de un punto sobre la superficie del toroide pueden expresarse mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(\phi, \theta) = (R + r \cos \theta) \cos \phi, \quad (11.34)$$

$$y(\phi, \theta) = (R + r \cos \theta) \sin \phi, \quad (11.35)$$

$$z(\phi, \theta) = r \sin \theta. \quad (11.36)$$

Estas ecuaciones describen la posición de un punto en el espacio tridimensional, donde ϕ varía entre $0 \leq \phi < 2\pi$, y θ varía entre $0 \leq \theta < 2\pi$. De esta manera, ϕ describe la rotación alrededor del eje z y θ describe la rotación alrededor de la línea circular que pasa por el centro del toroide, como muestra la figura 11.26.

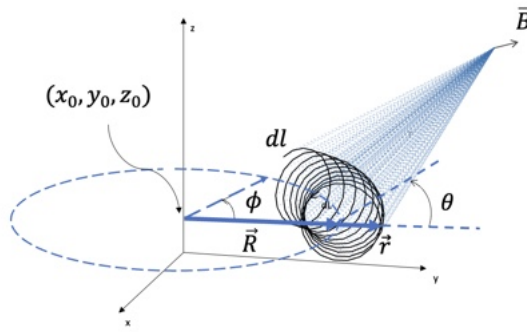


Figura 11.26.

Ángulos y radios para el modelo de corrientes toroidales.

Nota. Elaboración propia.

En el modelo, se adaptarán las ecuaciones para incorporar ángulos iniciales de la siguiente manera:

$$dl_x(\phi, \theta) = (R + r \cos(\theta_o + \Delta\theta_i)) \cos(\phi_o + \Delta\phi_i) + x_o, \quad (11.37)$$

$$dl_y(\phi, \theta) = (R + r \cos(\theta_o + \Delta\theta_i)) \sin(\phi_o + \Delta\phi_i) + y_o, \quad (11.38)$$

$$dl_z(\phi, \theta) = r \sin(\theta_o + \Delta\theta_i) + z_o, \quad (11.39)$$

donde $\Delta\theta_i$ y $\Delta\phi_i$ representan los incrementos en los ángulos polar y azimutal, respectivamente, que experimentan los elementos de corriente $d\vec{l}$ durante la construcción del toroide.

Construcción del modelo

El modelo se diseñará de modo que el usuario pueda especificar los siguientes parámetros:

1. Los radios interno r y externo R del toroide.
2. La cantidad n de elementos de corriente dl que contiene el toroide.
3. La magnitud de la corriente eléctrica.
4. El número de espiras N que conforman el toroide.
5. El ángulo de distribución de las espiras, también denominado ángulo del toroide.
6. Duplicar los toroides o segmentos para hacer modelos de mayor complejidad.
7. La capacidad de calcular y visualizar el campo magnético en cualquier punto del espacio generado por la corriente del toroide, así como obtener una representación espacial del campo en el volumen del toroide.
8. Mostrar u ocultar los radios y campos magnéticos de cada elemento dl .

Para el modelo se necesitan ocho vectores: Un vector para el campo magnético resultante $\mathbf{B}$, un vector para $\mathbf{a}$ para posicionar el toroide, tres vectores $d\mathbf{l}$, $\mathbf{r}$ y $d\mathbf{B}$ para el primer elemento de corriente y otros tres para el i -ésimo elemento, que tiene la posibilidad de clonarse. En la fórmula de Excel 11.77 se muestran los valores que deben tener las celdas de conteo y de datos iniciales.

Fórmula en Excel 11.77

- B3 =51 { - fila inicial para clonar los dl_i },
- C3 =77 { - fila final para clonar los dl_i },
- E5 =2500 { - Escala del sistema },
- G10 =SI(C7="";RAIZ(A12^2+B12^2+C12^2);"") { $= |B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ },
- G15 =0;0000001 { $= K$ },
- G16 =100 { $= I(A)$ },
- G17 =0;01 { $= r(m)$ },
- G18 =0;04 { $= R(m)$ },
- G19 =1 { $= N$ },
- G20 =0 { $= \alpha$ - ángulo del toroide },
- G22 =0 { $= x_o$ },
- G23 =0 { $= y_o$ },
- G24 =0;01 { $= z_o$ },
- G27 =90 { $= \phi_o$ },
- G28 =0 { $= \theta_o$ },
- G30 =G20/G41 { $= \Delta\phi$ },
- G31 =360*G19/G41 { $= \Delta\theta$ },
- G36 =1 { - mostrar/ocultar radios de cada dl },
- G37 =1 { - mostrar/ocultar vectores campo de cada dl }
- G41 =CONTAR.SI(D:D;"B"&G43&"_*") { $= n$ - cantidad de dl },

- G43 =1 { - número del toroide },
- D48 ="B"&G\$43&"_"&C24 { - etiqueta de cada dB_i }.

En la fórmula de Excel 11.78 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo resultante **B**.

Fórmula en Excel 11.78 1

Configuración de las celdas que corresponden a **B**:

- B8 =60*1 { - regulación del tamaño de los vectores en la hoja },
- A9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(C:C;D:D;"B*") { $= B_z = \sum_{i=1}^n B_{iz}$ },
- B9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(A:A;D:D;"B*") { $= B_x = \sum_{i=1}^n B_{ix}$ },
- C9 =SUMAR.SI.CONJUNTO(B:B;D:D;"B*") { $= B_y = \sum_{i=1}^n B_{iy}$ },
- A10 =A11, B10 =B11, C10 =C11,
- A11 =0, B11 =0,04, C11 =0,01 { - punto de observación },
- A12 =B9 { $= B_x$ }, B12 =C9 { $= B_y$ }, C12 =A9 { $= B_z$ }.

En la fórmula de Excel 11.79 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **a** encargado de posicionar el toroide.

Fórmula en Excel 11.79 2

Configuración de las celdas que corresponden a **a**:

- A15 =A6+1, A19 =G22, B19 =G23, C19 =G24,
- A21 =\$G\$17*COS(RADIANTES(\$G\$27))*COS(RADIANTES(\$G\$28))
+\$G\$18*COS(RADIANTES(\$G\$27))+A\$19 { $= (R + r \cos(\theta)) \cos(\phi) + x_o$ },
- B21 =\$G\$17*SENO(RADIANTES(\$G\$27))*COS(RADIANTES(\$G\$28))
+\$G\$18*SENO(RADIANTES(\$G\$27))+B\$19 { $= (R + r \cos(\theta)) \sin(\phi) + y_o$ },
- C21 =\$G\$17*SENO(RADIANTES(\$G\$28))+C\$19 { $= r \sin(\theta) + z_o$ },
- {Otros , línea = 4 , transparencia = 1 , cabeza del vector = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.80 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **dl**.

Fórmula en Excel 11.80 3

Configuración de las celdas que corresponden a **dl**:

- A24 =A15+1,
- A28 =\$G\$17*COS(RADIANTES(\$G\$27+\$G\$30*C24))*COS(RADIANTES(\$G\$28
+\$G\$31*C24))+G\$18*COS(RADIANTES(\$G\$27+\$G\$30*C24))+A\$19
{ $= (R + r \cos(\theta + \Delta\theta_i)) \cos(\phi + \Delta\phi_i) + x_o$ },

- B28 = \$G\$17*SENO(RADIANES(\$G\$27+\$G\$30*C24))*COS(RADIANES(\$G\$28+\$G\$31*C24))+ \$G\$18*SENO(RADIANES(\$G\$27+\$G\$30*C24))+ \$B\$19
 $\{ = (R + r \cos(\theta + \Delta\theta_i)) \sin(\phi + \Delta\phi_i) + y_o \},$
- C28 = \$G\$17*SENO(RADIANES(\$G\$28+\$G\$31*C24))+ \$C\$19
 $\{ = r \sin(\theta + \Delta\theta_i) + z_o \},$
- A30 = A21-A28, B30 = B21-B28, C30 = C21-C28,
- A31 = SI(G16<0;3;1),
- A32 = SI(G16>0;3;1).

En la fórmula de Excel 11.81 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **r** que va desde **dI** hasta **B**.

Fórmula en Excel 11.81 4

Configuración de las celdas que corresponden a **r**:

- A33 = A24+1, C35 = G36 { - ocultar/mostrar el vector, transparencia },
- B36 = \$G\$15*\$G\$16/(POTENCIA(A39^2+B39^2+C39^2;3/2)) $\{ = \frac{K I}{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^{3/2}} \},$
- A37 = A28, B37 = B28, C37 = C28,
- A39 = A10-A28, B39 = B10-B28, C39 = C10-C28,
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 1 }.

En la fórmula de Excel 11.82 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector campo magnético **dB** del primer **dI**.

Fórmula en Excel 11.82 5

Configuración de las celdas que corresponden a **dB**:

- A42 = A33+1,
- C44 = \$G\$37 { - mostrar/ocultar el vector },
- A46 = A39+A37, B46 = B39+B37, C46 = C39+C37,
- A48 = (B30*C39-C30*B39)*B36 $\{ = dB_{1x} \},$
- B48 = (-A30*C39+C30*A39)*B36 $\{ = dB_{1y} \},$
- C48 = (A30*B39-B30*A39)*B36 $\{ = dB_{1z} \},$
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 1 , cabeza del vector = 2 }.

En las fórmulas de Excel 11.83 - 11.85 se muestran los vectores que tienen la opción de clonarse para agregar al toroide los elementos del alambre **dI**. Cada elemento del alambre está acompañado de dos vectores más, uno para el radio y otro para el campo magnético.

Fórmula en Excel 11.83 6Configuración de las celdas que corresponden a **dl**:

- $A51 = A42 + 1$, $C51 = C24 + 1$, $B53 = B26$, $C53 = C26$,
- $A55 = \$G\$17 * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C51)) * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C51)) + \$G\$18 * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C51)) + \$A\$19$
 $\{ = (R + r \cos(\theta + \Delta\theta_i)) \cos(\phi + \Delta\phi_i) + x_o \}$,
- $B55 = \$G\$17 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C51)) * \text{COS}(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C51)) + \$G\$18 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$27 + \$G\$30 * C51)) + \$B\$19$
 $\{ = (R + r \cos(\theta + \Delta\theta_i)) \sin(\phi + \Delta\phi_i) + y_o \}$,
- $C55 = \$G\$17 * \text{SENO}(\text{RADIANTES}(\$G\$28 + \$G\$31 * C51)) + \$C\$19$
 $\{ = r \sin(\theta + \Delta\theta_i) + z_o \}$,
- $A57 = A28 - A55$, $B57 = B28 - B55$, $C57 = C28 - C55$, $C59 = C32$,
- {Otros , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.

Fórmula en Excel 11.84 7Configuración de las celdas que corresponden a **r**

- $A60 = A51 + 1$, $B62 = B35$, $C62 = C35$,
- $B63 = \$G\$15 * \$G\$16 / (\text{POTENCIA}(A66^2 + B66^2 + C66^2; 3/2)) \{ = \frac{KI}{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{3/2}} \}$,
- $A64 = A55$, $B64 = B55$, $C64 = C55$,
- $A66 = A57 + A39$, $B66 = B57 + B39$, $C66 = C57 + C39$,
- $A67 = A40$, $C67 = C40$, $A68 = A41$,
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 1 }.

Fórmula en Excel 11.85 8Configuración de las celdas que corresponden al campo magnético **dB** (ver ecuaciones 11.29, 11.30, 11.31).

- $A69 = A60 + 1$,
- $B71 = B44$,
- $C71 = \$G\37 { - mostrar/ocultar vector },
- $A73 = A66 + A64$, $B73 = B66 + B64$, $C73 = C66 + C64$,
- $A75 = (B57 * C66 - C57 * B66) * B63 \{ = dB_{ix} \}$,
- $B75 = (-A57 * C66 + C57 * A66) * B63 \{ = dB_{iy} \}$,
- $C75 = (A57 * B66 - B57 * A66) * B63 \{ = dB_{iz} \}$, $A76 = A49$, $C76 = C49$, $A77 = A50$, $C77 = C50$,
- {Otros , línea = 2 , transparencia = 1 , cabeza del vector = 2 }.

Ejemplo 11.9.1 Consideremos de nuevo el ejemplo 11.8.1 y hallemos el campo magnético en el centro de una espira de 25 cm de radio con una corriente de 80 A. Desde luego el resultado debe ser el mismo.

SOLUCIÓN

En nuestro modelo, tomemos un toroide compuesto por una sola espira de radio $r = 0,25$ m. El radio externo del toroide puede tomar cualquier valor, ya que en este caso no influirá en el resultado. Por ejemplo, tomaremos $R = 0,5$ m. Insertamos los siguientes valores: $G16 = 80$, $G17 = 0,25$, $G18 = 0,5$, $G19 = 1$, y la escala del sistema $E5 = 400$. El punto de observación corresponde al centro de la espira, es decir, el punto $P(0, 0, 5, 0)$: $A11 = 0$, $B11 = 0,5$, $C11 = 0$. Para visualizar el vector $\mathbf{B}$ en el sistema de coordenadas, se ajusta su tamaño mediante $B8 = 600 \times 0,001$ (sin incluir el signo igual) y se presiona XYZ . Se observa una representación del campo similar a la de la figura 11.27. El resultado se muestra en la celda $G10 = 0,0002$ T, el cual coincide con el valor obtenido en el ejemplo 11.8.1.

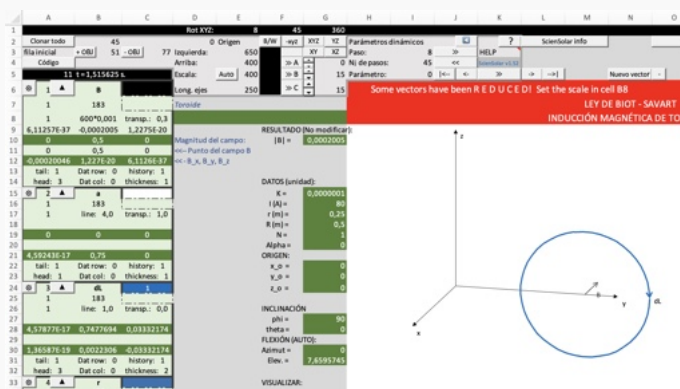


Figura 11.27

Campo magnético de una espira circular con corriente, desde el modelo de corrientes toroidales.

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 11.9.2 Se tiene una sección toroidal compuesta por 20 espiras rectangulares distribuidas uniformemente en un ángulo de 180 grados. Por las espiras circula una corriente de 160 A. El radio exterior del toroide es de 1 metro, mientras que el radio interior (de la circunferencia circunscrita) es de 25 cm. El objetivo es analizar el comportamiento del campo magnético a lo largo de la línea que une los dos extremos del toroide y pasa por su centro geométrico. Para ello, se obtendrán gráficas del campo magnético en dos casos: Cuando la sección toroidal está compuesta por un total de 80 elementos de corriente y cuando está compuesta por 360 elementos de corriente.

SOLUCIÓN

Para que las espiras sean rectangulares, cada una debe estar compuesta por cuatro elementos de corriente. Dado que se tienen 20 espiras, el número total de elementos de corriente es $n = 80$. Utilizando la herramienta , se incrementó el número de elementos hasta alcanzar los 80. Posteriormente, se configuraron las celdas correspondientes al número de espiras y al ángulo del toroide:  = 20 y  = 180.

Se realizaron dos tomas de visualización: Una desde el frente, utilizando la vista proporcionada por el botón  y otra desde arriba, empleando el botón . Inicialmente, se presionó el botón  para obtener la vista frontal. Para registrar los vectores del campo magnético en diferentes puntos a lo largo de la línea que une los extremos del toroide y pasa por su centro geométrico, se configuraron los siguientes parámetros: En la celda  se ingresó el valor -2, que corresponde al punto de inicio; en la celda  se estableció un paso de avance de 0,1 y en la celda  se introdujo el valor 40, lo que permite avanzar desde la coordenada $y = -2$ hasta $y = 2$, cubriendo así la región desde antes del inicio del toroide (izquierda) hasta después de su extremo opuesto (derecha).

A continuación, se presionó el botón  ubicado en la celda A6 para iniciar el registro del recorrido. Con la celda  seleccionada, se procedió con el botón  ubicado en la celda J3. El modelo comenzó a recorrer los puntos y a representar los vectores en el sistema de coordenadas, generando una imagen similar a la mostrada en la figura 11.28 (parte superior izquierda).

Posteriormente, se repitió el procedimiento para la vista . Para ello, se presionó dos veces el botón  con el fin de borrar los resultados anteriores. Se volvió a ingresar el valor  = -2, se dejó la celda seleccionada y se presionó . Esto generó una imagen similar a la superior derecha de la figura 11.28.

Para la segunda parte del problema, se presionó  para eliminar los resultados previos. Luego, se ingresó en la celda  el valor 240 y se presionó  para agregar los 240 elementos restantes, alcanzando un total de 360 elementos de corriente. En esta etapa, el software empleó varios minutos en procesar los cálculos debido a la gran cantidad de elementos de corriente, ya que debió calcular el campo magnético generado por cada uno y luego realizar la suma vectorial para obtener el resultado final.

Para obtener imágenes similares a las anteriores, se repitió el mismo procedimiento para las vistas  y , obteniendo representaciones gráficas como las observadas en la parte inferior de la figura 11.28.

Cabe destacar que las dos configuraciones del toroide son, en principio, diferentes debido a la variación en su geometría. Al aumentar el número de elementos de corriente, las espiras del toroide adquieren gradualmente una forma circular, tal como está diseñado en este modelo. El tamaño de visualización de los vectores puede ajustarse mediante el parámetro en la celda  (600*0,0001). Sin

embargo, en este caso, dicho parámetro se mantuvo constante para las cuatro figuras, con el fin de permitir una comparación visual directa entre ellas. A pesar de ello, se observa que en términos generales, la geometría del campo magnético no experimentó cambios significativos.

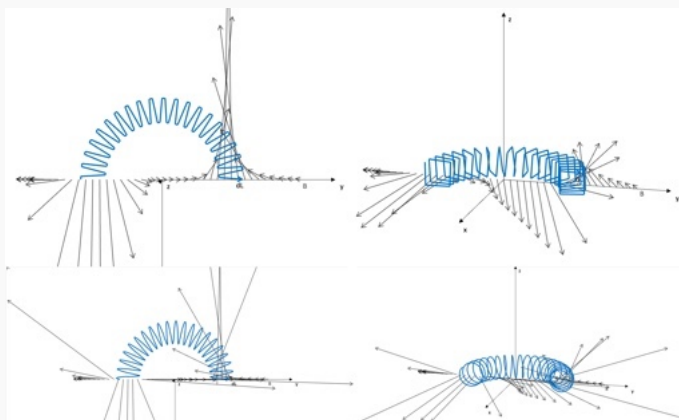


Figura 11.28

*Campo magnético de una sección de una corriente toroidal.
Arriba: Con 80 elementos de corriente. Abajo: con 360
elementos de corriente.*

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 11.9.3 A partir del modelo del campo magnético de una corriente toroidal construir un modelo para calcular el campo magnético de solenoides. Calcular el campo magnético en el centro de un solenoide de 4 cm de radio, 10 cm de largo, 5 espiras y con una corriente de 50 A. Evaluar el campo magnético dentro y fuera del solenoide.

SOLUCIÓN

Si consideramos un solenoide con un radio R , una longitud L y un número de vueltas N , las ecuaciones paramétricas para la curva de un solenoide pueden representarse en coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$x(\phi) = R \cos(\phi),$$

$$y(\phi) = R \sin(\phi),$$

$$z(i) = \frac{L}{n} * i,$$

donde: - R es el radio del solenoide. - L es la longitud total del solenoide. - n es el número de elementos de corriente del solenoide e i es el número del elemento de corriente. Es decir, la coordenada z va aumentando en tal unidad, igual a la longitud total del solenoide dividida entre el número total de elementos del alambre. Como vemos, estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones 11.34 si

$r = 0$, excepto por la coordenada z . Por lo tanto, sólo queda agregarle este término a la fórmula ya existente para el toroide. Tomamos el modelo para el toroide y con el botón **-OBJ** disminuimos la cantidad de elementos hasta el mínimo, es decir hasta que **G41** = 2. Modificamos las celdas como muestra la fórmula de Excel 11.87.

Fórmula en Excel 11.86

- **G21** = 0,1 { = L - longitud del solenoide }.
- **C28** = $\$G\$17 * \text{SENO}(\text{RADIANS}(\$G\$28 + \$G\$31 * C24)) + \$C\$19 + \$G\$25 / (\$G\$41) * C24$
{ - se agregó el término $+\frac{L}{n} * i$ },
- **C55** = $\$G\$17 * \text{SENO}(\text{RADIANS}(\$G\$28 + \$G\$31 * C51)) + \$C\$19 + \$G\$25 / \$G\$41 * C24$
{ - se agregó el término $+\frac{L}{n} * i$ },
- **G30** = $\text{SI}(\text{G17}=0; 360 * \text{G19} / \text{G41}; \text{G20} / \text{G41})$ { = $\Delta\phi = \frac{360^\circ N}{n}$ - condición agregada para el ángulo azimutal, cuando $r = 0$, es decir, cuando el toroide pasa a ser solenoide }.

Para el caso del solenoide de 10 cm de largo se deben configurar las siguientes celdas:

Fórmula en Excel 11.87

Configuración para un solenoide de 10 cm de largo, un radio de 4 cm, 5 espiras y 50 A de corriente:

- **G21** = 0,1 { = L - longitud del solenoide },
- **G!6** = 50 { = I - corriente },
- **G!8** = 0,04 { = R - radio del solenoide },
- **G!9** = 5 { = N - número de espiras },
- **E5** = 2500 { - escala del sistema },
- **G22** = 0, **G23** = 0, **G24** = 0 { posición del solenoide },
- **A11** = 0, **B11** = 0, **C11** = 0,05 { punto de interés de **B** }.
- **B2** = 69 + **+OBJ** { - para agregar 72 elementos al sistema, si al principio habían sólo 3 }.

El resultado de la magnitud del campo se puede observar en la celda **G10** = 0,0024 T. El color del solenoide se puede cambiar eliminando, mediante **-OBJ**, 70 elementos; luego a los dos restantes cambiarles el color en las celdas **C24** y **C51** y finalmente, volver a agregar los 70 elementos. Se obtendrá una imagen como la de la figura 11.29, izquierda. Para obtener una imagen del campo similar a la de la derecha, se debe ingresar **C7** = 0 (en minúscula y sin incluir el signo

=) y, para regular el tamaño de los vectores, $B8 = 60 * 0,05$ (de nuevo, sin incluir el signo =). También se puede regular el espectro del color en la celda $C7$. En los corchetes correspondientes al color, poner, por ejemplo 0,002, debido a que en ese orden está el valor del campo para el presente modelo.

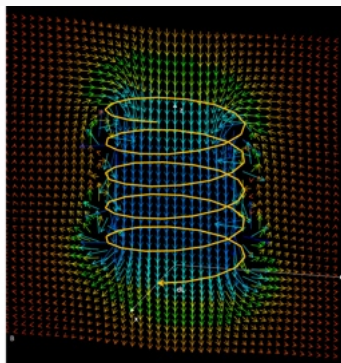
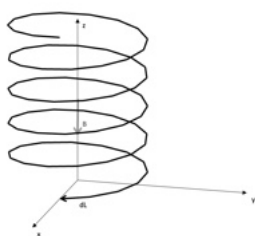


Figura 11.29

Izquierda: Solenoide construido a partir de elementos de corriente. Derecha: Campo magnético del solenoide en el plano YZ.

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 11.9.4 Evaluar el campo magnético de un sistema compuesto por un solenoide y un toroide concéntricos. El solenoide tiene un radio de 4 cm, una longitud de 10 cm, 5 espiras, 72 elementos de corriente y una corriente de 50 A. El toroide tiene un radio interno de 2 cm, un radio externo de 10 cm, 40 espiras distribuidas uniformemente en 360 grados, 160 elementos de corriente y una corriente de 50 A. El objetivo es observar el campo magnético en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN

1. **Construcción del solenoide.** Para construir el solenoide, se puede seguir el procedimiento descrito en el ejemplo 11.9.3 o descargar el modelo de toroides y realizar la siguiente configuración: Utilizando el botón $+OBJ$, se agregan 72 elementos de corriente. Se ingresan los siguientes parámetros en las celdas correspondientes:

- $I = G16 = 50$ (corriente).
- $L = G25 = 0,1$ (longitud del solenoide).
- $G17 = 0$ (parámetro adicional).
- $R = G18 = 0,04$ (radio del solenoide).
- $N = G19 = 5$ (número de espiras).
- Número del toroide: $G43 = 1$.

2. **Construcción del toroide.** Para agregar el toroide, se duplica el solenoide de la

siguiente manera: Se introducen los siguientes valores en las celdas:

- B2 = ENTIRE (sin incluir el signo =).
- B3 = 15.
- C3 = 1967 (asumiendo que el solenoide a clonar tiene 72 elementos). Estos números representan la primera y última fila de las celdas correspondientes al solenoide.

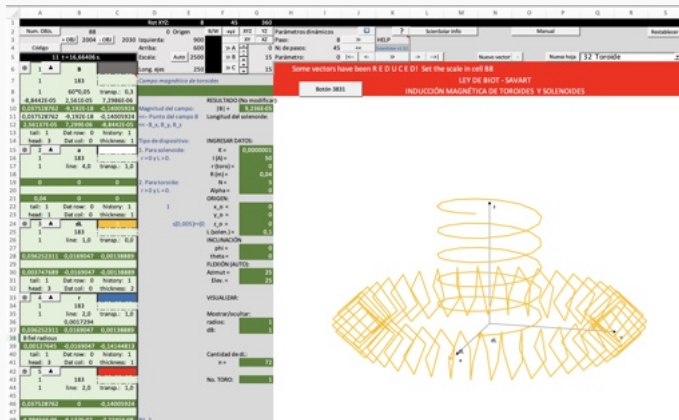


Figura 11.30

Campo magnético de un sistema solenoide - toroide en una hoja de cálculo con el paquete ScienSolar

Nota. Elaboración propia.

Se presiona el botón **+OBJ** para realizar la duplicación. Una vez duplicado, se modifican los parámetros del nuevo solenoide para convertirlo en un toroide:

- $r =$ G1970 = 0,02 (radio interno del toroide).
- $R =$ G1971 = 0,1 (radio externo del toroide).
- $N =$ G1972 = 40 (número de espiras del toroide).
- $L =$ G1978 = 0 (longitud del toroide).
- Número del toroide: 1976 = 2.

-Se modifica la fórmula de la celda de conteo:

G1994 = CONTAR.SI(D:D; "B"&G1996&"_*").

- Se presiona el botón **XYZ** para verificar la presencia de ambas corrientes.

Para alcanzar un total de 160 elementos en el toroide, se agregan $160 - 72 = 88$ elementos adicionales. Para ello, se configuran las siguientes celdas:

- B2 = 88.
- B3 = 2004.

- **C3** = 2030 (correspondiente al paquete de celdas que contienen el elemento a clonar en el toroide).

3. Visualización en coordenadas esféricas. Para obtener las vistas espaciales en coordenadas esféricas, se introduce la siguiente cadena de valores en la celda

```
C7:  
s[0,005]r=[0,03;0,15]s2[10]phi=[0;360]s3[80]theta=[5;180]  
  
color=[0,002]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0s
```

Finalmente, para regular el tamaño de los vectores, se introduce en la celda **B8** el valor 60*0,05 (sin incluir el signo igual). Esto genera imágenes en los perfiles **XY** y **XYZ**, como las mostradas en las figuras 11.30 - 11.34.

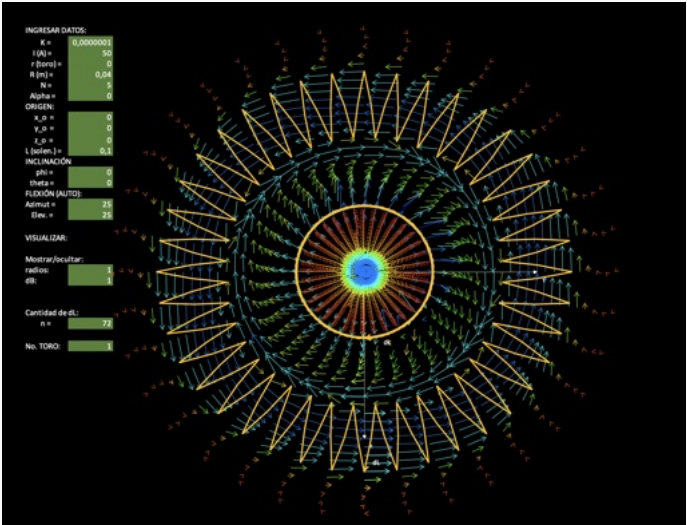


Figura 11.31
Campo magnético de un sistema solenoide-toroide, visto en coordenadas esféricas desde arriba.

Nota. Elaboración propia.

Dependiendo de los requerimientos específicos del análisis o de los objetivos de visualización del usuario, es posible obtener distintas representaciones del campo magnético utilizando diversos sistemas de coordenadas. En particular, el modelo permite trabajar en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas, lo cual resulta especialmente útil para estudiar configuraciones con diferentes simetrías, como es el caso del sistema combinado solenoide–toroide mostrado en las figuras. Para seleccionar el sistema de referencia deseado, basta con introducir la letra correspondiente en la celda **C7**: la letra *o* activa la visualización en coordenadas cartesianas, la letra *c* permite representar el campo en coordenadas cilíndricas, y la letra *s* habilita el uso de coordenadas esféricas.

Cada uno de estos sistemas de coordenadas proporciona una perspectiva distinta del comportamiento del campo magnético. Por ejemplo, en las coordenadas cartesianas se puede analizar con mayor claridad la distribución vectorial en el espacio tridimensional en términos de sus componentes ortogonales. En cambio, las coordenadas cilíndricas resultan particularmente adecuadas para sistemas con simetría axial, como el toroide, donde el campo presenta variaciones significativas en función del radio y el ángulo azimutal. Por su parte, las coordenadas esféricas facilitan el estudio de distribuciones radiales y direccionales, siendo útiles para identificar patrones globales del campo, como los observados en las regiones alejadas del sistema.

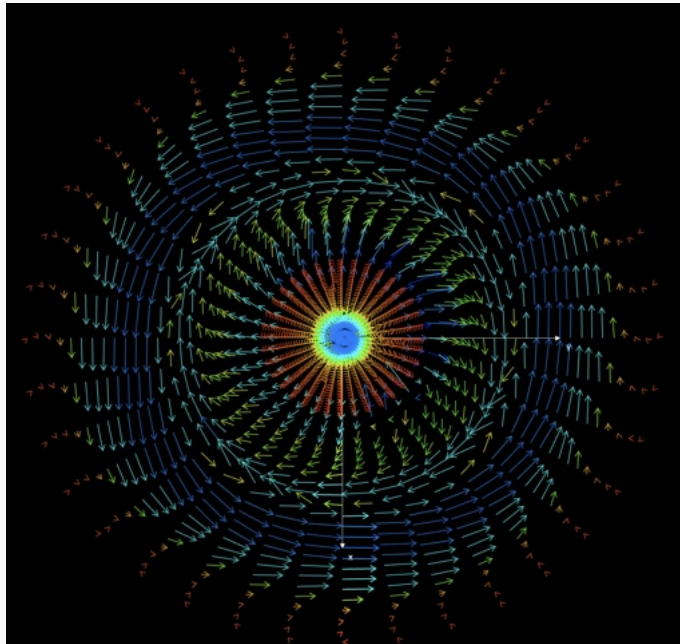


Figura 11.32

Campo magnético de un sistema solenoide - toroide, visto en coordenadas esféricas desde arriba, ocultando las corrientes

$$\boxed{C26} = 1 \text{ y } \boxed{C1979} = 1.$$

Nota. Elaboración propia.

Adicionalmente, el modelo permite configurar de manera flexible el rango de visualización en cada uno de estos sistemas de coordenadas. Esto implica que el usuario puede ajustar los intervalos de las variables espaciales (por ejemplo, radio, ángulo o distancia) para enfocar el análisis en regiones específicas del espacio, como el interior del toroide, la zona del solenoide o las regiones externas donde el campo se dispersa. Esta capacidad de ajuste resulta fundamental para realizar estudios detallados, ya que permite resaltar características particulares del campo magnético que podrían pasar desapercibidas en una visualización global. Tal como se mostró previamente en el caso de las coordenadas esféricas, la selección

adecuada de estos rangos puede mejorar significativamente la interpretación de los resultados.

Por otra parte, el entorno de simulación ofrece la posibilidad de controlar la visibilidad de los diferentes elementos físicos que componen el modelo, lo cual es especialmente útil para fines didácticos y de análisis. En particular, se puede optar por mostrar u ocultar los alambres de corriente que generan el campo magnético. Esta funcionalidad permite alternar entre una visualización más “estructural”, donde se observan claramente las fuentes del campo (las espiras del solenoide y el toroide), y una visualización más “limpia”, centrada exclusivamente en la distribución del campo magnético.

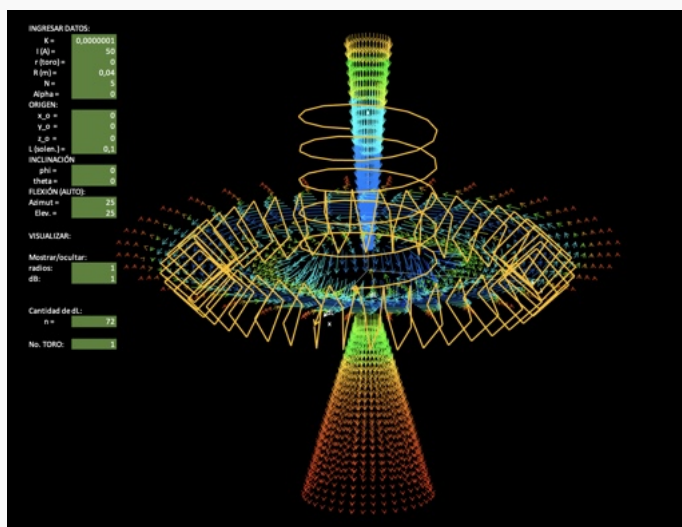


Figura 11.33

Campo magnético de un sistema solenoide - toroide, visto en perspectiva XYZ.

Nota. Elaboración propia.

Por ejemplo, en la figura 11.34 se presenta una representación del campo magnético en la que se han ocultado los alambres de corriente. Esta visualización permite apreciar con mayor claridad la estructura del campo, destacando la concentración de líneas en la región central del solenoide y la distribución toroidal alrededor del eje. Para lograr este efecto, se debe ajustar la transparencia de los alambres asignando el valor 1 en las celdas correspondientes, específicamente $C26 = 1$ y $C1979 = 1$. De esta manera, los elementos conductores se vuelven invisibles, sin afectar el cálculo ni la representación del campo magnético.

Este tipo de configuraciones resulta especialmente útil cuando se desea analizar la topología del campo magnético sin la interferencia visual de los elementos geométricos del sistema. En las imágenes adjuntas, por ejemplo, se puede observar cómo la eliminación de los alambres permite identificar con mayor precisión las

líneas de flujo y la transición entre el comportamiento axial del solenoide y la estructura cerrada del toroide. Asimismo, facilita la comprensión de fenómenos como la continuidad del campo y la forma en que las líneas magnéticas se reorganizan en el espacio tridimensional.

En conjunto, estas herramientas de visualización y configuración convierten al modelo en una plataforma versátil para el estudio del campo magnético en sistemas complejos, permitiendo adaptar la representación a las necesidades específicas del usuario y favoreciendo una comprensión más profunda de los fenómenos físicos involucrados.

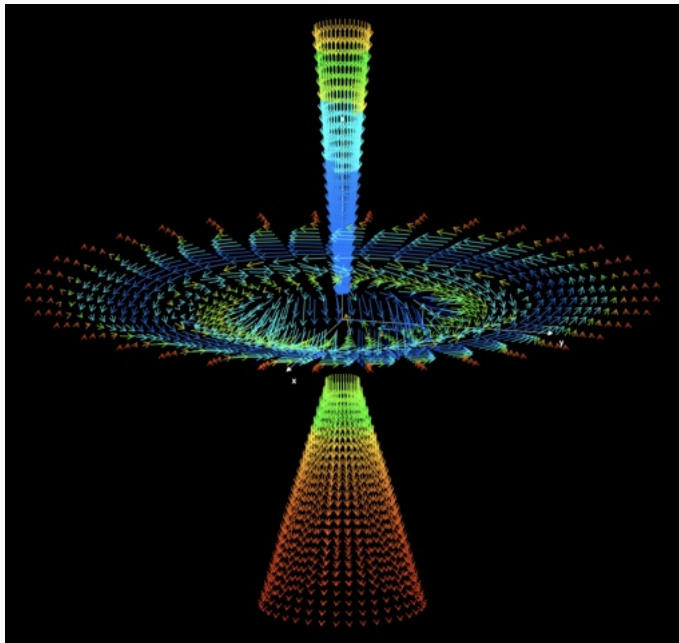


Figura 11.34

Campo magnético de un sistema solenoide - toroide, visto en perspectiva XYZ ocultando las corrientes.

Nota. Elaboración propia.

Otras vistas interesantes se obtienen desde la perspectiva XYZ, incluyendo las corrientes o mostrando únicamente el campo magnético, como se observa en las figuras 11.33 y 11.34.

Consideraciones sobre el costo computacional en solenoides

En ocasiones frecuentes, el usuario requiere simular solenoides o toroides con un número elevado de espiras, lo que implica un número aún mayor de elementos de corriente. En estos casos, es importante tener en cuenta que este modelo utiliza la ley de Biot-Savart para calcular el campo magnético. Este proceso consiste en calcular el campo magnético generado por cada elemento de corriente en el punto de interés y sumar vectorialmente todos los campos magnéticos obtenidos, considerando sus componentes individuales.

Este enfoque, aunque preciso, conlleva un costo computacional significativo, el cual se traduce en un mayor tiempo de cálculo. Cuando se agregan cientos o miles de elementos de corriente, Excel puede experimentar una demora notable en la generación de resultados e incluso puede llegar a bloquearse temporalmente. Este comportamiento es normal y no debe representar una dificultad insuperable, ya que es inherente al proceso de cálculo intensivo requerido por la ley de Biot-Savart.

A pesar del costo computacional asociado, la simulación de sistemas electromagnéticos en Excel con *ScienSolar* ofrece varias ventajas significativas, gracias a que Excel permite adaptar y personalizar los modelos de manera sencilla. Los usuarios pueden ajustar parámetros como el número de espiras, la geometría del sistema, la corriente aplicada y la distribución de los elementos de corriente, lo que facilita la exploración de diferentes escenarios. Otra ventaja de esta combinación de Excel con *ScienSolar* es su capacidad para integrar cálculos numéricos complejos con herramientas de visualización. Los resultados pueden graficarse directamente en hojas de cálculo, lo que permite analizar y comparar datos de manera eficiente. Además, las representaciones gráficas tridimensionales ayudan a interpretar el comportamiento del campo magnético de forma intuitiva.

11.10 Fuerza de Lorentz

El presente modelo tiene como objetivo construir simulaciones de campos eléctricos y magnéticos constantes en configuraciones tridimensionales, en los que se puedan integrar partículas cargadas con condiciones iniciales específicas. Este modelo se enfoca en el estudio de la Fuerza de Lorentz y el movimiento de partículas cargadas en presencia de campos eléctricos y magnéticos, sin considerar la interacción entre partículas ni su influencia sobre los campos. A continuación, se describen los fundamentos y características principales del modelo.

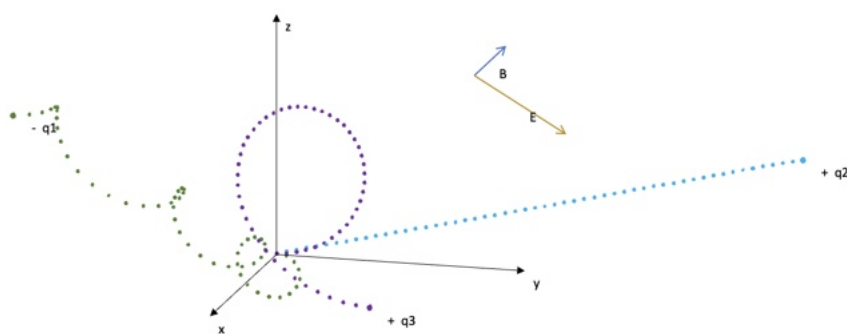


Figura 11.35.

Partículas cargadas moviéndose en campos eléctricos y magnéticos.

Nota. Elaboración propia.

Ecuaciones matemáticas

La Fuerza de Lorentz es una de las ecuaciones fundamentales en el estudio del electromagnetismo y describe la fuerza que experimenta una partícula cargada en presencia de campos eléctricos y magnéticos. Esta fuerza es esencial para comprender el comportamiento de partículas cargadas en dispositivos como aceleradores de partículas, tubos de rayos catódicos y en fenómenos naturales como la aurora boreal.

La Fuerza de Lorentz se expresa matemáticamente como:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (11.40)$$

donde $\mathbf{F}$ es la Fuerza de Lorentz o fuerza que experimenta la partícula al moverse en campos eléctricos y magnéticos, q es la carga de la partícula, $\mathbf{v}$ su velocidad, $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico y $\mathbf{B}$ el campo magnético.

En el espacio tridimensional, la Fuerza de Lorentz puede descomponerse en sus componentes cartesianas. Si expresamos los vectores $\mathbf{E}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ en términos de sus componentes en los ejes x , y y z , las ecuaciones para cada componente de la fuerza son:

$$F_x = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y), \quad (11.41)$$

$$F_y = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z), \quad (11.42)$$

$$F_z = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x). \quad (11.43)$$

Estas ecuaciones describen cómo la Fuerza de Lorentz actúa en cada dirección del espacio, dependiendo de la interacción entre la velocidad de la partícula y los campos eléctrico y magnético presentes.

Por otra parte, el movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético está determinado por la segunda ley de Newton, que relaciona la Fuerza de Lorentz con la aceleración de la partícula:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (11.44)$$

donde m es la masa de la partícula y $\mathbf{a}$ es su aceleración. Combinando esta ecuación con la Fuerza de Lorentz, se obtiene:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (11.45)$$

Esta ecuación diferencial describe la dinámica de la partícula en el espacio tridimensional, y, utilizando las ecuaciones (11.41), (11.42) y (11.43), se puede expresar en términos de sus componentes de la siguiente manera:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}(E_x + v_y B_z - v_z B_y), \quad (11.46)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}(E_y + v_z B_x - v_x B_z), \quad (11.47)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m}(E_z + v_x B_y - v_y B_x). \quad (11.48)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver de forma analítica con algunas restricciones que se mostrarán al final. Para ello la expresamos en forma matricial como sigue

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \frac{q}{m} \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (11.49)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden. Su solución general puede escribirse como la suma de una solución homogénea $\mathbf{v}_h(t)$ (asociada al campo magnético) y una solución particular $\mathbf{v}_p(t)$ (asociada al campo eléctrico):

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_h(t) + \mathbf{v}_p(t). \quad (11.50)$$

Solución homogénea. La solución homogénea corresponde a la ecuación diferencial sin el término del campo eléctrico:

Una partícula en un campo magnético se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{m}B_z & -\frac{q}{m}B_y \\ -\frac{q}{m}B_z & 0 & \frac{q}{m}B_x \\ \frac{q}{m}B_y & \frac{q}{m}B_x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_h. \quad (11.51)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden. Su solución general puede expresarse en términos de los valores propios y vectores propios de la ecuación característica. Entonces:

$$\mathbf{v}_h(t) = C_1 e^{k_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{k_2 t} \mathbf{v}_2 + C_3 e^{k_3 t} \mathbf{v}_3, \quad (11.52)$$

donde C_i son constantes que dependen de las condiciones iniciales, $\mathbf{v}_i$ son los vectores propios y k_i los valores propios de la matriz

$$\frac{q}{m} \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallando estos vectores y valores propios por métodos tradicionales se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{B_x}{B_z} \\ \frac{B_y}{B_z} \\ 1 \end{pmatrix}, & k_1 &= 0, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{iB_y B - B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \\ \frac{-iB_x B - B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \\ 1 \end{pmatrix}, & k_2 &= i \frac{qB}{m}, \\ \mathbf{v}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{-iB_y B - B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \\ \frac{iB_x B - B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \\ 1 \end{pmatrix}, & k_3 &= -i \frac{qB}{m}, \end{aligned} \quad (11.53)$$

donde $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$. Reemplazando 11.53 en 11.52 y expresando la exponencial en términos de senos y cosenos se obtiene una ecuación que contiene partes imaginarias. Para resolver esto, observando que los dos últimos términos de 11.52 son mutuamente conjugados, esta solución se puede presentar como:

$$\mathbf{v}_h(t) = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{W}_2 + C_3 \mathbf{W}_3, \quad (11.54)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2 &= e^{k_2 t} \mathbf{v}_2 + e^{k_3 t} \mathbf{v}_3 = 2\Re(e^{k_2 t} \mathbf{v}_2), \\ \mathbf{W}_3 &= \frac{e^{k_2 t} \mathbf{v}_2 - e^{k_3 t} \mathbf{v}_3}{i} = 2\Im(e^{k_2 t} \mathbf{v}_2). \end{aligned} \quad (11.55)$$

Se hallan las partes reales e imaginarias de la ecuación 11.52. A continuación, se obtienen las componentes de los vectores $\mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_3$, en donde a la magnitud $\omega = \frac{qB}{m}$ se le denomina *frecuencia de ciclotrón*,

$$W_{2x} = 2\Re \left[\left(\frac{iB_y B - B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right]$$

$$= 2 \left(\frac{-B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right),$$

$$W_{2y} = 2\Re \left[\left(\frac{-iB_x B - B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right]$$

$$= 2 \left(\frac{-B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t + \frac{B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right),$$

$$W_{2z} = 2 \cos \omega t,$$

$$W_{3x} = 2\Im \left[\left(\frac{-iB_y B - B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right]$$

$$= 2 \left(\frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right),$$

$$W_{3y} = 2\Im \left[\left(\frac{iB_x B - B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \right) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right]$$

$$= 2 \left(\frac{-B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right),$$

$$W_{3z} = 2 \sin \omega t.$$

Luego, junto con 11.53, estas componentes se reemplazan en 11.54 para obtener las componentes de los vectores velocidad de la partícula para la solución homogénea:

$$v_{hx}(t) = C_1 \frac{B_x}{B_z} + 2C_2 \left(\frac{-B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right) + 2C_3 \left(\frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right), \quad (11.56)$$

$$v_{hy}(t) = C_1 \frac{B_y}{B_z} + 2C_2 \left(\frac{-B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t + \frac{B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right) + 2C_3 \left(\frac{-B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right), \quad (11.57)$$

$$v_{hz}(t) = C_1 + 2C_2 \cos \omega t + 2C_3 \sin \omega t. \quad (11.58)$$

Solución particular. La solución particular $\mathbf{v}_p(t)$ corresponde a la respuesta del sistema al campo eléctrico constante $\mathbf{E}$. Dado que $\mathbf{E}$ es constante, la solución particular es también constante y se obtiene igualando la derivada temporal a cero:

$$0 = \frac{q}{m} \mathbf{E} + \frac{q}{m} \mathbf{B} \mathbf{v}_p. \quad (11.59)$$

Despejando $\mathbf{v}_p$, se obtiene:

$$\mathbf{v}_p = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{E}, \quad (11.60)$$

donde $\mathbf{B}^{-1}$ es la inversa de la matriz $\mathbf{B}$. Sin embargo, dado que $\mathbf{B}$ es una matriz antisimétrica y singular (su determinante es cero), no tiene inversa en el sentido convencional. En su lugar, la solución particular se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{B} \mathbf{v}_p = -\mathbf{E}. \quad (11.61)$$

Las soluciones para la velocidad particular $\mathbf{v}_p$ se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones lineales utilizando la regla de Cramer o eliminación gaussiana.

$$\begin{aligned} v_{px} &= \frac{E_y B_z - E_z B_y}{B^2}, \\ v_{py} &= \frac{E_z B_x - E_x B_z}{B^2}, \\ v_{pz} &= \frac{E_x B_y - E_y B_x}{B^2}, \end{aligned} \quad (11.62)$$

donde $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$.

Estas soluciones representan la velocidad constante de la partícula en presencia de un campo eléctrico constante $\mathbf{E}$ y un campo magnético constante $\mathbf{B}$. La solución particular $\mathbf{v}_p$ es independiente del tiempo y describe el movimiento de la partícula debido únicamente al campo eléctrico.

Solución general. Combinando la solución homogénea y la solución particular, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_h(t) + \mathbf{v}_p, \quad (11.63)$$

o, en términos de sus componentes:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{hx}(t) + v_{px}, \\ v_y(t) &= v_{hy}(t) + v_{py}, \\ v_z(t) &= v_{hz}(t) + v_{pz}, \end{aligned} \quad (11.64)$$

Reemplazando 11.56 - 11.58 y 11.62 en 11.64 se obtienen finalmente las expresiones para las velocidades de la partícula cargada en un campo magnético y eléctrico constantes:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= C_1 \frac{B_x}{B_z} + 2C_2 \left(\frac{-B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right) \\ &\quad + 2C_3 \left(\frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right) + \frac{E_y B_z - E_z B_y}{B^2}, \end{aligned} \quad (11.65)$$

$$\begin{aligned} v_y(t) &= C_1 \frac{B_y}{B_z} + 2C_2 \left(\frac{-B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t + \frac{B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right) \\ &\quad + 2C_3 \left(\frac{-B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t - \frac{B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t \right) + \frac{E_z B_x - E_x B_z}{B^2}, \end{aligned} \quad (11.66)$$

$$v_z(t) = C_1 + 2C_2 \cos \omega t + 2C_3 \sin \omega t + \frac{E_x B_y - E_y B_x}{B^2}, \quad (11.67)$$

donde las constantes C_1 , C_2 y C_3 se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema.

Cuando $t = 0$, las componentes de la velocidad inicial de la partícula son proporcionadas por el usuario y se denotan como v_{ox} , v_{oy} y v_{oz} . Dado que los campos son constantes, sus valores iniciales se representan simplemente como E_x , E_y , E_z para el campo eléctrico, y B_x , B_y , B_z para el campo magnético. La posición inicial de la partícula se denota como x_o , y_o , z_o , mientras que su carga y masa se representan como q y m , respectivamente.

Sustituyendo $t = 0$ en 11.65, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que permite determinar las constantes C_1 , C_2 y C_3 . Al resolver este sistema, se obtienen las siguientes expresiones para las constantes, en función de las condiciones iniciales del problema:

$$C_1 = v_{oz} - v_{pz}, \quad (11.68)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(v_{ox} - v_{px} - C_1 \frac{B_x}{B_z} \right), \quad (11.69)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \left(v_{oy} - v_{py} - C_1 \frac{B_y}{B_z} \right). \quad (11.70)$$

Las coordenadas de la partícula se obtienen integrando las componentes de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \int_0^t v_x(\tau) d\tau \\
 &= x_0 + C_1 \frac{B_x}{B_z} t + 2C_2 \left(\frac{-B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} \right) \\
 &\quad + 2C_3 \left(\frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} \right) + \frac{E_y B_z - E_z B_y}{B^2} t, \quad (11.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_0 + \int_0^t v_y(\tau) d\tau \\
 &= y_0 + C_1 \frac{B_y}{B_z} t + 2C_2 \left(\frac{-B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} + \frac{B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} \right) \\
 &\quad + 2C_3 \left(\frac{-B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} \right) + \frac{E_z B_x - E_x B_z}{B^2} t, \quad (11.72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z(t) &= z_0 + \int_0^t v_z(\tau) d\tau \\
 &= z_0 + C_1 t + 2C_2 \frac{\sin \omega t}{\omega} - 2C_3 \frac{\cos \omega t}{\omega} + \frac{E_x B_y - E_y B_x}{B^2} t. \quad (11.73)
 \end{aligned}$$

Las componentes del vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ se obtienen derivando las componentes de la velocidad $\mathbf{v}(t)$ con respecto al tiempo t :

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= \frac{d}{dt} v_x(t) = 2\omega C_2 \left(\frac{B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t - \frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t \right) \\
 &\quad + 2\omega C_3 \left(-\frac{B_y B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t - \frac{B_x B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t \right), \quad (11.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_y(t) &= \frac{d}{dt} v_y(t) = 2\omega C_2 \left(\frac{B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t + \frac{B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t \right) \\
 &\quad + 2\omega C_3 \left(\frac{B_x B}{B_x^2 + B_y^2} \sin \omega t - \frac{B_y B_z}{B_x^2 + B_y^2} \cos \omega t \right), \quad (11.75)
 \end{aligned}$$

$$a_z(t) = \frac{d}{dt} v_z(t) = 2\omega (-C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t). \quad (11.76)$$

Interpretación física

La solución homogénea describe el movimiento de la partícula en presencia únicamente del campo magnético, lo que resulta en una trayectoria circular o helicoidal, dependiendo de las condiciones iniciales. La solución particular representa la velocidad inducida por el campo eléctrico, que actúa como un desplazamiento adicional en la trayectoria de la partícula.

Construcción del modelo

El modelo se basa en la descripción de campos eléctricos **E** y magnéticos **B** constantes en el espacio tridimensional. Estos campos pueden ser configurados de acuerdo con las necesidades del usuario, permitiendo simular una amplia variedad de situaciones físicas, como campos uniformes, dipolares o de otras geometrías complejas.

Las partículas cargadas se introducen en el sistema con condiciones iniciales definidas, como posición $\mathbf{r}_0$, velocidad $\mathbf{v}_0$, carga q y masa m . La dinámica de cada partícula está gobernada por la Fuerza de Lorentz. El modelo permitirá agregar varias partículas.

Es importante destacar que el modelo no considera interacciones entre partículas cargadas, como fuerzas de Coulomb, ni la influencia de las partículas sobre los campos electromagnéticos. Estas simplificaciones permiten centrarse en el estudio de la Fuerza de Lorentz y su efecto sobre partículas individuales, pero limitan la aplicabilidad del modelo en situaciones donde las interacciones entre partículas son significativas.

Para el modelo son necesarios ocho vectores en *ScienSolar*, dos para los campos eléctrico **E** y magnético **B**, uno para representar la carga q en el espacio tridimensional, uno para la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, uno para el radio vector $\mathbf{r}$ desde el origen de coordenadas hasta la carga, uno para la aceleración de la partícula $\mathbf{a}$ y finalmente uno para el vector **D** que representa la distancia desde donde parte la partícula, (x_0, y_0, z_0) hasta donde se encuentra la carga. Se agregan estos ocho vectores a una nueva hoja de cálculo desde la interface de *ScienSolar*. A continuación se relaciona la configuración de cada celda para que el modelo quede en completo funcionamiento. En la fórmula en Excel 11.88 se encuentra la configuración de las celdas con los parámetros iniciales.

Fórmula en Excel 11.88

Valores iniciales

- B2 =ENTIRE { - sin el signo igual, necesario para duplicar cargas },
- B3 =24 { - primera fila de la carga a duplicar- },
- C3 =77 { - última fila de la carga a duplicar },
- E5 =1 { - escala del sistema },
- H9 =SI(\$E\$14=0;"El campo magnético debe ser diferente de cero";"") { - alerta },
- G11 =-0;00005 { = B_x - componete en x del campo magnético },
- G12 =0 { = B_y - componete en y del campo magnético },
- G13 =0 { = B_z - componete en z del campo magnético },
- E14 =RAIZ(\$A\$12^2+\$B\$12^2+\$C\$12^2) { = $|B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ },
- G16 =0 { = E_x - componete en x del campo eléctrico },
- G17 =0 { = E_y - componete en y del campo eléctrico },
- G18 =-3 { = E_z - componete en z del campo eléctrico },
- E19 =RAIZ(G16^2+G17^2+G18^2) { = $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ },
- G21 =0 { - mostrar/ocultar **E**, valores 0 - 1 },
- G22 =0 { - mostrar/ocultar **B**, valores 0 - 1 },
- G25 =1 { número de la partícula },

- G27 =-2*1;6E-19 {= q - carga de la partícula },
- G29 =4*1;66E-27 {= m - masa de la partícula },
- G32 =0 {= x_o - punto de partida de la partícula en x },
- G33 =0 {= y_o - punto de partida de la partícula en y },
- G34 =0 {= z_o - punto de partida de la partícula en z },
- G36 =0 {= V_{ox} - componente en x de la velocidad inicial},
- G37 =200000 {= V_{oy} - componente en y de la velocidad inicial},
- G38 =0 {= V_{oz} - componente en z de la velocidad inicial},
- G39 =RAIZ(G36^2+G37^2+G38^2) {= $|v_o| = \sqrt{v_{ox}^2 + v_{oy}^2 + v_{oz}^2}$ },
- G44 =0 { - mostrar/ocultar **D**, valores 0 - 1 },
- G45 =1 { - mostrar/ocultar **r**, valores 0 - 1 },
- G46 =0 { - mostrar/ocultar **v_o**, valores 0 - 1 },
- G47 =0 { - mostrar/ocultar **v**, valores 0 - 1 },
- G48 =0 { - mostrar/ocultar **a**, valores 0 - 1 },
- G49 =0 { - iniciar el movimiento en el origen, valores 0 - 1 },
- G55 =G29*G39/ABS(G27*\$E\$14) {= $r = \frac{mv}{|qB|}$ - radio de la trayectoria },
- G57 =RAIZ(A75^2+B75^2+C75^2) {= $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}$ },
- G59 =RAIZ(A57^2+B57^2+C57^2) {= $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ },
- G61 =RAIZ(A48^2+B48^2+C48^2) {= $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ },
- G63 =G29*A66 {= $F_x = m a_x$ - componente en x de la fuerza sobre la partícula },
- G64 =G29*B66 {= $F_y = m a_y$ - componente en y de la fuerza sobre la partícula},
- G65 =G29*C66 {= $F_z = m a_z$ - componente en z de la fuerza sobre la partícula},
- G66 =RAIZ(G63^2+G64^2+G65^2) {= $|F|$ - módulo de la Fuerza de Lorentz},
- E70 =(\$A\$12*\$C\$12*G36+\$B\$12*\$C\$12*G37+\$C\$12^2*G38)/\$E\$14^2 {= $C1$ },
- E71 =(-\$A\$12*\$C\$12*G36-\$B\$12*\$C\$12*G37+\$A\$12^2*G38+\$B\$12^2*G38)/(2*\$E\$14^2) {= $C2$ },
- E72 =(\$B\$12*G36-\$A\$12*G37)/(2*\$E\$14) {= $C3$ },
- E73 =-(2*E71*\$B\$12*\$E\$14+2*E72*\$A\$12*\$C\$12)/(E76*(\$A\$12^2+\$B\$12^2)) {= $C4$ },
- E74 =(2*E71*\$A\$12*\$E\$14-2*E72*\$B\$12*\$C\$12)/(E76*(\$A\$12^2+\$B\$12^2)) {= $C5$ },
- E75 =2*E72/E76 {= $C6$ - constantes de las condiciones iniciales },
- E76 =G27*\$E\$14/G29 { $\omega = qB/m$ }.

En la fórmula en Excel 11.89 se encuentra la configuración de las celdas para el vector **B**:

Fórmula en Excel 11.89

1

- B8 =800*0;000001 { - regula artificialmente el tamaño del vector },

- $C8 = G22$ { - transparencia },
- $B10 = 0,8 * \$E\$6 / \$E\5 { - fórmula de Excel para mostrar **B** independientemente de la escala },
- $C10 = 0,8 * \$E\$6 / \$E\5 { - fórmula de Excel para mostrar **B** independientemente de la escala },
- $A12 = SI(G11=0;1E-20;G11)$, $B12 = SI(G12=0;1E-40;G12)$, $C12 = SI(G13=0;1E-40;G13)$ { - evita que el campo se haga totalmente cero en sus componentes, esto es necesario ya que algunas soluciones de las ecuaciones no admiten que ciertas componentes se hagan cero }.

En la fórmula en Excel 11.90 se encuentra la configuración de las celdas para el vector **E**:

Fórmula en Excel 11.90 2

- $B7 = 200 * 0,1$ { - regula artificialmente el tamaño del vector },
- $C17 = G21$ { - transparencia },
- $B19 = 0,8 * \$E\$6 / \$E\5 { fórmula de Excel para mostrar **B** independientemente de la escala },
- $C19 = 0,8 * \$E\$6 / \$E\5 { fórmula de Excel para mostrar **B** independientemente de la escala },
- $A21 = G16$, $B21 = G17$, $C21 = G18$.

En la fórmula en Excel 11.91 se encuentra la configuración de las celdas para la carga q_i :

Fórmula en Excel 11.91 3

- $A24 = A15 + 1$ { - número consecutivo del vector en *ScienSolar* },
- $B24 = SI(G27 < 0; " - q "; " + q ") & G25$ { - cambia automáticamente la etiqueta de la carga },
- $B25 = 9$ { número para representar un punto en vez de un vector }
- $A28 = A73 + A75$ { - posición de la carga en = x }, $B28 = B73 + B75$ { - posición de la carga en = y }, $C28 = C73 + C75$ { - posición de la carga en = z }.

En la fórmula en Excel 11.92 se introduce la configuración del vector $\mathbf{v}_o$:

Fórmula en Excel 11.92 4

- $A33 = A24 + 1$,
- $B35 = 60 * 1$ { - regula el tamaño del vector en el sistema de coordenadas },
- $C35 = G46$ { - transparencia del vector, valores de 0 a 1 },

- $A37 = G32$, $B37 = G33$, $C37 = G34$ { posición del vector },
- $A39 = G36$, $B39 = G37$, $C39 = G38$ { componentes del vector }.

En la fórmula en Excel 11.93 se configura el vector v :

Fórmula en Excel 11.93 5

- $A42 = A33 + 1$,
- $B44 = 60 * 1$ { - regula el tamaño del vector en el sistema de coordenadas },
- $C44 = G47$ { - transparencia del vector, valores de 0 a 1 },
- $A46 = A28$, $B46 = B28$, $C46 = C28$ { - la misma posición de la carga },
- $A48 = E70 * (\$A\$12 / \$C\$12) + 2 * E71 * ((-\$A\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * \cos(E76 * I5) - (\$B\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * \text{SENO}(E76 * I5)) + 2 * E72 * ((\$B\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\cos(E76 * I5)) - (\$A\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * \text{SENO}(E76 * I5)) + (\$B\$21 * \$C\$12 - \$C\$21 * \$B\$12) / \$E\$14^2$
{ - aquí se introduce la fórmula 11.65 para $v_x(t)$ },
- $B48 = E70 * (\$B\$12 / \$C\$12) + 2 * E71 * ((-\$B\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * \cos(E76 * I5) + (\$A\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * \text{SENO}(E76 * I5)) + 2 * E72 * ((-\$A\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\cos(E76 * I5)) - (\$B\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * \text{SENO}(E76 * I5)) + (\$C\$21 * \$A\$12 - \$A\$21 * \$C\$12) / \$E\$14^2$
{ - aquí se introduce la fórmula 11.66 para $v_y(t)$ },
- $C48 = E70 + 2 * E71 * \cos(E76 * I5) + 2 * E72 * \text{SENO}(E76 * I5) + (\$A\$21 * \$B\$12 - \$B\$21 * \$A\$12) / \$E\$14^2$
{ - aquí se introduce la fórmula 11.67 para $v_z(t)$ },

En la fórmula en Excel 11.94 se configura el vector r :

Fórmula en Excel 11.94 6

- $A51 = A42 + 1$,
- $B53 = 4$ { - tipo de línea },
- $C53 = G45$ { - transparencia },
- $A57 = A75 + G32$ { $= D_x - x_o$ }, $B57 = B75 + G33$ { $= D_y - y_o$ }, $C57 = C75 + G34$ { $= D_z - z_o$ }.

En la fórmula en Excel 11.95 se configura el vector a :

Fórmula en Excel 11.95 7

- $A60 = A51 + 1$,
- $B62 = 80 * 1$ { - regula el tamaño aparente del vector },
- $C62 = G48$ { - transparencia },
- $A64 = A28$ { $= x_o$ }, $B64 = B28$ { $= y_o$ }, $C64 = C28$ { $= z_o$ },
- $A66 = 2 * E71 * E76 / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\$A\$12 * \$C\$12 * \text{SENO}(E76 * I5) - \$B\$12 * \$E\$14 * \text{COS}(E76 * I5)) + 2 * E72 * E76 / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (-\$B\$12 * \$E\$14 * \text{SENO}(E76 * I5) - \$A\$12 * \$C\$12 * \text{COS}(E76 * I5))$
{ - aquí se introduce la fórmula 11.74 para $a_x(t)$ },
- $B66 = 2 * E71 * E76 / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\$B\$12 * \$C\$12 * \text{SENO}(E76 * I5) + \$A\$12 * \$E\$14 * \text{COS}(E76 * I5)) + 2 * E72 * E76 / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\$A\$12 * \$E\$14 * \text{SENO}(E76 * I5) - \$B\$12 * \$C\$12 * \text{COS}(E76 * I5))$
{ - aquí se introduce la fórmula 11.75 para $a_y(t)$ },
- $C66 = -2 * E71 * E76 * \text{SENO}(E76 * I5) + 2 * E72 * E76 * \text{COS}(E76 * I5)$
{ - aquí se introduce la fórmula 11.76 para $a_z(t)$ }.

En la fórmula en Excel 11.96 se configura el vector **D**:

Fórmula en Excel 11.96 8

Configuración de las celdas que corresponden a **D**:

- $A69 = A60 + 1$,
- $B71 = 2$ { - tipo de línea },
- $C71 = G44$ { - transparencia },
- $A73 = G32$ { $= x_o$ }, $B73 = G33$ { $= y_o$ }, $C73 = G34$ { $= z_o$ },
- $A75 = E70 * (\$A\$12 * \$C\$12 * I5 + 2 * E71 * ((-\$A\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\text{SENO}(E76 * I5)) / E76 - (\$B\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\text{COS}(E76 * I5)) / E76) + 2 * E72 * ((\$B\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\text{SENO}(E76 * I5)) / E76 - (\$A\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (1 - \text{COS}(E76 * I5)) / E76) + (\$B\$21 * \$C\$12 - \$C\$21 * \$B\$12) / \$E\$14^2 * I5 + E73 * \text{MAYOR.O.IGUAL}(G49;0;1)$
{ - fórmula 11.71 para $x(t)$. El último término de la fórmula de Excel que no aparece en la ecuación, tiene como fin desplazar el punto de la carga hacia el origen, de acuerdo a las necesidades del usuario. },
- $B75 = E70 * (\$B\$12 * \$C\$12 * I5 + 2 * E71 * ((-\$B\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\text{SENO}(E76 * I5)) / E76 + (\$A\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\text{COS}(E76 * I5)) / E76) + 2 * E72 * ((-\$A\$12 * \$E\$14) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (\text{SENO}(E76 * I5)) / E76 - (\$B\$12 * \$C\$12) / (\$A\$12^2 + \$B\$12^2) * (1 - \text{COS}(E76 * I5)) / E76) + (\$C\$21 * \$A\$12 - \$A\$21 * \$C\$12) / \$E\$14^2 * I5 + E74 * \text{MAYOR.O.IGUAL}(G49;0;1)$
{ - fórmula 11.72 para $y(t)$. El último término de la fórmula de Excel que no aparece en la ecuación, tiene como fin desplazar el punto de la carga hacia el origen, de acuerdo a las necesidades del usuario. },
- $C75 = E70 * I5 + 2 * E71 * \text{SENO}(E76 * I5) / E76 - 2 * E72 * \text{COS}(E76 * I5) / E76 + (\$A\$21 * \$B\$12 - \$B\$21 * \$A\$12) / \$E\$14^2 * I5 + E75 * \text{MAYOR.O.IGUAL}(G49;0;1)$
{ - fórmula 11.73 para $z(t)$. El último término de la fórmula de Excel que no aparece en

la ecuación, tiene como fin desplazar el punto de la carga hacia el origen, de acuerdo a las necesidades que el usuario indique en la celda G49: G49=0 para que la partícula rote alrededor del origen x_o, y_o, z_o , y G49=1 para que la partícula arranque en este punto }.

- {Otros , línea = 2 , transparencia = 0 , cabeza del vector = 1 }.



Ejemplo 11.10.1 En un espectrómetro de masas, un haz de iones ^{16}O se hace pasar a través de un selector de velocidades, donde el campo eléctrico está dirigido en la dirección $-z$ y el campo magnético en la dirección $-x$. Los iones ingresan con una velocidad de 100 000 m/s. Demostrar que, al ingresar a la región donde solo actúa el campo magnético, se cumple la relación:

$$m = \frac{qB_s B_e d}{2E},$$

donde m es la masa de los iones, q es la carga de los iones, B_s es el campo magnético en el selector de velocidades, B_e es el campo magnético en el espectrómetro, d es la distancia hasta el punto de impacto (o el diámetro de curvatura de la trayectoria de la partícula) y E es la magnitud del campo eléctrico en el selector de velocidades.

SOLUCIÓN

En el selector de velocidades, los iones están sometidos a la acción simultánea de un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}_s$. Para que los iones atraviesen el selector sin desviarse, la fuerza eléctrica y la fuerza magnética deben equilibrarse. Esto se expresa mediante la condición:

$$qE = qvB_s,$$

de donde se obtiene la velocidad de los iones:

$$v = \frac{E}{B_s}.$$

Dado que los iones ingresan con una velocidad $v = 100\,000$ m/s, se cumple que:

$$E = vB_s.$$

Al ingresar a la región del espectrómetro donde solo actúa el campo magnético $\vec{B}_e$, los iones describen una trayectoria circular debido a la fuerza centrípeta proporcionada por la fuerza magnética. La condición para el movimiento circular es:

$$qvB_e = \frac{mv^2}{r},$$

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria. Dado que $d = 2r$ (siendo d el diámetro de la trayectoria), se tiene:

$$qvB_e = \frac{mv^2}{d/2}.$$

Simplificando y despejando la masa m , se obtiene:

$$m = \frac{qB_e d}{2v}.$$

Sustituyendo $v = \frac{E}{B_s}$ en la expresión anterior, se llega a:

$$m = \frac{qB_s B_e d}{2E}.$$

Esta es la relación buscada, la cual permite determinar la masa de los iones en función de los campos magnéticos aplicados, la distancia de impacto y el campo eléctrico presente en el sistema. Para modelar este ejemplo en el entorno *ScienSolar*, se detallan a continuación (en la referencia 11.97) las celdas que deben ser configuradas, junto con sus respectivos valores y las fórmulas correspondientes que deben ser introducidas en cada una de ellas.

Con los valores proporcionados, es posible observar que se cumple la relación de las magnitudes expresada como $m = \frac{qB_s B_e d}{2E}$, la cual se ve reflejada numéricamente en la igualdad entre las celdas `H29` y `G29`. El lector debe asumir que esta magnitud siempre es positiva, dado que corresponde físicamente a la masa, una cantidad intrínsecamente positiva. El signo que eventualmente pueda aparecer en la relación matemática únicamente concierne al signo de la carga de la partícula y a la dirección de su trayectoria cuando esta ingresa en la región del campo magnético, sin afectar el valor absoluto de la masa.

Para obtener una configuración del campo como la que se muestra en la figura 11.36, es necesario configurar las celdas C7 y C16 de acuerdo con el siguiente procedimiento:

```

C7 = \texttt{"}o[20]x=[0;0]o2[0;2]y=[-1;0;2]o3[0;2]
z=[-0;1;0;2]color=[0]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0s,
C16 = \texttt{"}o[20]x=[0;0]o2[0;2]y=[-1;0]o3[0;2]
z=[0;020;0;020]color=[0]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0s.

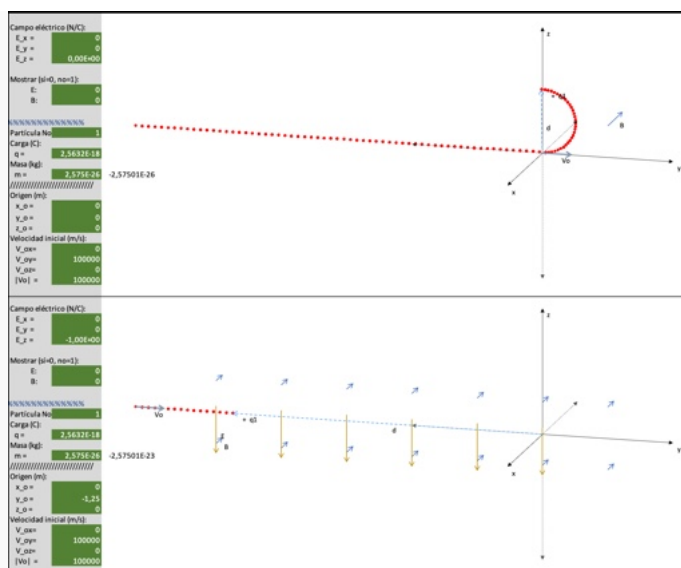
```

Fórmula en Excel 11.97

Configuración para el espectrómetro de masas y selector de velocidades:

- $E3 = 1150$, $E4 = 450$, $E5 = 500$ { - sistema de coordenadas },
- $I3 = 0;0000001$ { - intervalo de tiempo en la simulación },
- $I4 = 95$ { - número de intervalos a reproducir consecutivamente },
- $B8 = 100*0;0001$ { - (sin introducir el signo igual) configuración para visualizar **B** },
- $B17 = 90*0;1$ { - (sin introducir el signo igual) configuración para visualizar **E** },
- $H9 = SI(\$E\$14=0;"El campo magnético debe ser diferente de cero";""),$
- $E11 = -0,00001$ { $= B_s$ - campo magnético en el selector de velocidades },
- $G11 = SI(G18<>0;E11;E12)$ { $= B_x = -0,00001$ - valor del campo magnético dependiendo si es en el selector o en el espectrómetro },
- $E12 = -0,01$ { $= B_e$ - campo magnético en el espectrómetro },
- $E13 = G37*E11$ { $= E_s = vB$ - campo eléctrico en el selector de velocidades },
- $E14 = RAIZ(\$A\$12^2+\$B\$12^2+\$C\$12^2)$ { $= |B|$ },
- $G18 = MAYOR.O.IGUAL(I5;0,0000063)*ABS(E13)+E13$ { $= E_z$ - cuando la partícula entra en el espectrómetro, el valor del campo eléctrico se hace cero },
- $E19 = RAIZ(G16^2+G17^2+G18^2)$ { $= |E|$ },
- $G27 = 16*1,602E-19$ { $= q$ - valor de la carga de la partícula },
- $G29 = 16*1,609383E-27$ { $= m$ - valor de la masa de la partícula },
- $H29 = G27*E11*E12*G55/E13$ { $= m = \frac{qB_sB_e d}{2E} = \frac{qB_sB_e r}{E}$ },
- $G33 = SI(G18<>0;-1;25;0)$ { $= y_o$ - valor de la coordenada inicial en el selector de velocidades },
- $G37 = 100000$ { $= V_o$ y - velocidad inicial de la partícula (constante durante todo el recorrido) },
- $G39 = RAIZ(G36^2+G37^2+G38^2)$ { $= |V_o|$ },
- $G49 = 1$ { - esta opción es para que la partícula en el espectrómetro arranque del origen de coordenadas },
- $G55 = G29*G39/ABS(G27*\$E\$14)$ { $= rB(m)$ - resultado del valor del radio de curvatura },
- $G57 = RAIZ(A75^2+B75^2+C75^2)$ { $= D$ - radio vector del punto o distancia desde el origen de coordenadas hasta donde se encuentra la carga }.



**Figura 11.36**

Espectrómetro de masas en ScienSolar. Arriba: Trayectoria de la partícula, mostrada utilizando los botones  y . Abajo: Configuración para visualizar los campos mediante las celdas C7 y C16.

Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 11.10.2 En un campo magnético uniforme de $20 \mu\text{T}$, un electrón se mueve perpendicularmente al campo con una rapidez de $3 \times 10^6 \text{ m/s}$. a) ¿Cuál debe ser la rapidez del protón para que ambas partículas describan trayectorias con el mismo radio, si la única fuerza que actúa sobre ellas es la fuerza magnética? b) ¿Cuál debe ser la relación entre los tiempos de las dos simulaciones para que las partículas avancen de forma coordinada, es decir, para que describan un mismo círculo en el mismo tiempo? c) Simular las trayectorias de las partículas con estas condiciones en la plataforma *ScienSolar*. d) Estudiar el caso cuando las partículas tienen una componente en la dirección $-x$ diferente de cero.

SOLUCIÓN

Rapidez del protón para trayectorias con el mismo radio. La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada en movimiento dentro de un campo magnético uniforme está dada por la Fuerza de Lorentz:

$$F = qvB,$$

donde q es la carga de la partícula, v es la velocidad de la partícula, B es la magnitud del campo magnético. Esta fuerza actúa como centrípeta, lo que hace que la partícula describa una trayectoria circular. La relación entre la fuerza magnética

y la fuerza centrípeta es:

$$qvB = \frac{mv^2}{r},$$

donde m es la masa de la partícula y r es el radio de la trayectoria circular. Despejando el radio r , obtenemos:

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

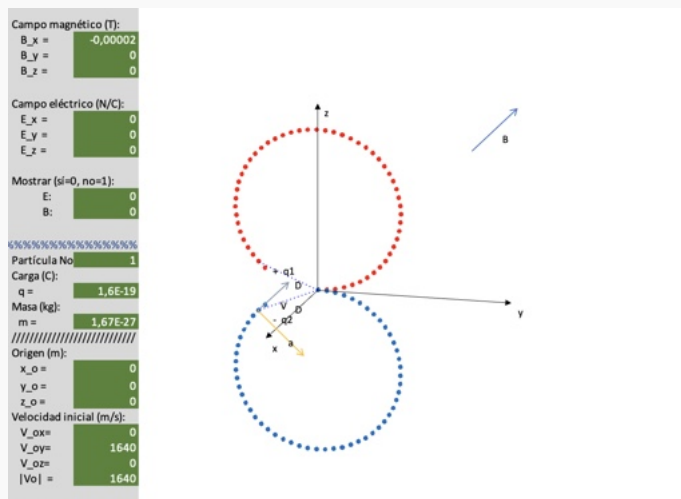


Figura 11.37

Modelo de un protón y un electrón en un campo magnético constante. La velocidad del protón es aproximadamente 2,000 veces menor que la del electrón, y para lograr una sincronización en los tiempos, el tiempo del protón se multiplicó por un factor de 1,833.

Nota. Elaboración propia.

Para que el electrón y el protón describan trayectorias con el mismo radio r , se debe cumplir:

$$\frac{m_e v_e}{q_e B} = \frac{m_p v_p}{q_p B},$$

donde m_e y m_p son las masas del electrón y del protón, respectivamente, v_e y v_p sus velocidades, q_e y q_p sus cargas, respectivamente. Dado que $q_e = q_p$ (en magnitud), la ecuación se simplifica a $m_e v_e = m_p v_p$. Despejando la velocidad del protón v_p :

$$v_p = \frac{m_e}{m_p} v_e.$$

Sustituyendo los valores ya conocidos de la masa del electrón $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, de la masa del protón: $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, y de la velocidad dada en el problema: $v_e = 3 \times 10^6$ m/s, obtenemos:

$$v_p = \frac{9,11 \times 10^{-31}}{1,67 \times 10^{-27}} \times 3 \times 10^6 \approx 1,64 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

Por lo tanto, la rapidez del protón debe ser aproximadamente $1,64 \times 10^3$ m/s para que ambas partículas describan trayectorias con el mismo radio.

Relación entre los tiempos de las simulaciones. Para que el electrón y el protón describan un mismo círculo en el mismo tiempo, deben completar una revolución en el mismo período T . El período de una partícula en movimiento circular dentro de un campo magnético está dado por:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Dado que el campo magnético B y la carga q son los mismos para ambas partículas, la relación entre los períodos del electrón T_e y del protón T_p es:

$$\frac{T_e}{T_p} = \frac{m_e}{m_p}.$$

Sustituyendo los valores de las masas:

$$\frac{T_e}{T_p} = \frac{9,11 \times 10^{-31}}{1,67 \times 10^{-27}} \approx 5,46 \times 10^{-4}.$$

Esto significa que el tiempo de simulación para el electrón debe ser aproximadamente $5,46 \times 10^{-4}$ veces el tiempo de simulación para el protón, para que ambas partículas avancen de forma coordinada y describan un mismo círculo en el mismo tiempo.

Para simular el problema en *ScienSolar*, se utilizó el módulo de **Fuerza de Lorentz** previamente desarrollado. Se agregó una segunda partícula al sistema (para un total de dos partículas) mediante el botón . Dado que las velocidades de las partículas son significativamente diferentes (el electrón es más de 50,000 veces más rápido que el protón), simular ambas partículas simultáneamente resulta prácticamente imposible en tiempo real. Para lograr una simulación visualmente comprensible, se ajustaron las ecuaciones del protón (representadas por el vector $\mathbf{D}$ en la simulación) multiplicando el tiempo por un factor de $t_p = \frac{m_p}{m_e} \approx 1,833 \times 10^3$.

A continuación, se detallan las configuraciones necesarias para que el modelo funcione según los requerimientos del problema:

Fórmula en Excel 11.98

- G11 =0;00002 {= $B = 20 \mu\text{T}$ - campo magnético },
- G18 =0 {= E_z - anular el campo eléctrico },
- **Parámetros del protón:**
- G27 =1,6E-19 {= q_p },
- G29 =1,67E-27 {= $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ },
- G37 =1640 {= $v_p = 1,64 \times 10^3 \text{ m/s}$ },
- G49 =1 { - posicionar la carga en el origen },
- **Parámetros del electrón:**
- G81 =-1,6E-19 {= q_e },
- G83 =9,11E-31 {= $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ },
- G91 =3E06 {= $v_e = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ },
- G103 =1 { - posicionar la segunda carga en el origen },

La sincronización se logra al multiplicar el tiempo del protón por el factor $t_p = \frac{m_p}{m_e} \approx 1,833 \times 10^3$. Este factor compensa adecuadamente la diferencia en las masas y, por consiguiente, en las velocidades de ambas partículas, permitiendo que tanto el electrón como el protón completen una revolución completa en el mismo tiempo simulado. De esta manera, el electrón y el protón describen trayectorias circulares coordinadas entre sí, lo que facilita notablemente la visualización y la comprensión del fenómeno físico subyacente. Para dibujar las trayectorias de las partículas tal como se muestran en la figura 11.37, es necesario presionar los botones  ubicados en las celdas A24 y A78, o alternativamente insertar los valores = 2 y = 2 en las celdas correspondientes.

En la figura 11.38 se trazan las trayectorias para el caso en que el protón ingresa con una velocidad inicial $(-500, 1640, 0)$.

El lector podrá, haciendo uso de este modelo, modificar libremente las magnitudes de las cargas, sus velocidades, sus masas y experimentar con diferentes parámetros físicos. Es importante tener en cuenta que la escala de tiempo definida en la celda y la escala del sistema de coordenadas establecida en la celda deben ser ajustadas cada vez que se realicen modificaciones en los parámetros mencionados, con el fin de mantener la coherencia y la correcta visualización de las simulaciones.

Fórmula en Excel 11.99■ **Ajustar el tiempo para el protón:**

■ G68 =G29/G83 { $= t_p = \frac{m_p}{m_e}$ },

- Multiplicar el tiempo del protón por el factor $t_p = \frac{m_p}{m_e} \approx 1,833 \times 10^3$ para sincronizar su movimiento con el del electrón. Esto se logra modificando las ecuaciones del protón en las celdas correspondientes al vector **D**, reemplazando I5 por I5*G68:

■ A75 =E70*(\$A\$12/\$C\$12)*I5*G68+2*E71*((-\$A\$12*\$C\$12)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(SENO(E76*I5*G68))/E76-(\$B\$12*\$E\$14)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(COS(E76*I5*G68))/E76)+2*E72*(\$B\$12*\$E\$14)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(SENO(E76*I5*G68))/E76-(\$A\$12*\$C\$12)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(1-COS(E76*I5*G68))/E76)+(\$B\$21*\$C\$12-\$C\$21*\$B\$12)/\$E\$14^2*I5*G68+E73*MAYOR.O.IGUAL(G49;0;1),

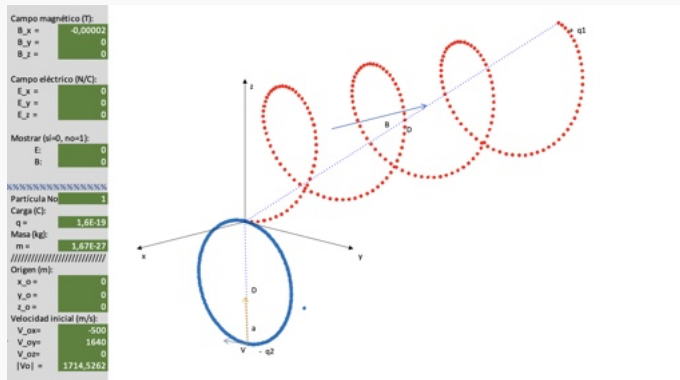
■ B75 = E70*(\$B\$12/\$C\$12)*I5*G68 + 2*E71*(-\$B\$12*\$C\$12)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(SENO(E76*I5*G68))/E76 + (\$A\$12*\$E\$14)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(COS(E76*I5*G68))/E76 + 2*E72*(-\$A\$12*\$E\$14)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(SENO(E76*I5*G68))/E76 - (\$B\$12*\$C\$12)/(\$A\$12^2+\$B\$12^2)*(1-COS(E76*I5*G68))/E76 + (\$C\$21*\$A\$12-\$A\$21*\$C\$12)/\$E\$14^2*I5*G68+E74*MAYOR.O.IGUAL(G49;0;1),

■ C75 = E70*I5*G68 + 2*E71*SENO(E76*I5*G68)/E76 - 2*E72*COS(E76*I5*G68)/E76 + (\$A\$21*\$B\$12-\$B\$21*\$A\$12)/\$E\$14^2*I5*G68 + E75*MAYOR.O.IGUAL(G49;0;1).

■ **Ejecutar la simulación:**

- Presionar el botón

■ Observar cómo ambas partículas describen trayectorias circulares con el mismo radio, pero con velocidades y tiempos ajustados para mantener la sincronización visual.

**Figura 11.38**

Modelo de un protón y un electrón en un campo magnético constante. En este caso el protón tiene además una componente de la velocidad en x diferente de cero.

Nota. Elaboración propia.

11.11 Propagación de una onda plana

A continuación, mostraremos al lector los pasos para construir un modelo simple de propagación de una onda electromagnética plana.

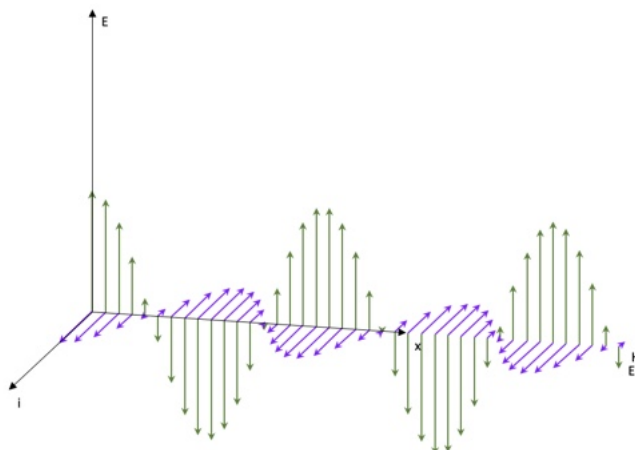


Figura 11.39.

Onda electromagnética plana en ScienSolar.

Nota. Elaboración propia.

Es bien sabido que los campos eléctrico y magnético en una onda plana que se propaga a lo largo del eje y son perpendiculares entre sí y también perpendiculares a la dirección de propagación. Estos campos en su forma compleja se definen respectivamente por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \exp \{i(\omega t - ky)\}, \\ H &= H_0 \exp \{i(\omega t - ky)\}, \end{aligned} \quad (11.77)$$

donde E_0 es la amplitud inicial del campo eléctrico, ω la frecuencia cíclica de la onda plana, t el tiempo, $k = \omega/c$ la magnitud del vector de onda, c la velocidad de la onda electromagnética y i la unidad imaginaria. De manera similar para el campo magnético H . Comenzaremos presionando el botón para abrir una nueva hoja en *ScienSolar* y, sin seleccionar ningún proyecto de la lista, presionamos el botón y damos el nombre E al campo eléctrico. Luego presionamos nuevamente y damos el nombre H al campo magnético. Posteriormente, presionamos dos veces B/W para obtener un fondo blanco y designamos =100 para H_0 , =100 para E_0 , =10000000 para ω , =300000000 para la velocidad de la luz c y =G13/G14 para k . Introducimos cero para las coordenadas distintas de la coordenada y : =0, =0, =0, =0, orientamos E hacia el eje z , por lo tanto =0, =0, H hacia el eje x , así que =0, =0 y

luego vinculamos las coordenadas al tiempo, por razones de escala: $B11 = I5 * 100000$, $B10 = B11$ y $B20 = I5 * 100000$, $B19 = B20$. Es necesario recalcar que en *ScienSolar* el rol del tiempo lo desempeña la celda designada como contador (celda $I5$), las coordenadas x se ubican en la columna A, las coordenadas y en la columna B y las z en la columna C.

De acuerdo con (11.77), introducimos la parte real de la fórmula del campo eléctrico en la celda del eje z utilizando las fórmulas respectivas de Excel:

$$C12 = G12 * IM.REAL(IM.EXP(COMPLEJO(0;(G13 * I5 - G18 * B11)))),$$

y para el campo magnético en la celda del eje x :

$$A21 = G11 * IM.REAL(IM.EXP(COMPLEJO(0;(G13 * I5 - G18 * B20))))).$$

Para congelar la trayectoria de los vectores, introducimos $C22 = C13$. Finalmente, ajustamos la escala $E5 = 1$ y la unidad de tiempo como 105×10^{-6} , es decir, $I3 = 105E-06$. Presionamos $\leftarrow$ para ajustarlo a cero y $\rightarrow$ para comenzar la reproducción. Cuando el tiempo (celda $I5$) empieza a correr, la coordenada $B11$ empieza a cambiar así como la posición $B10$ del vector E . Lo mismo sucede con H . Para fijar la trayectoria de los vectores, antes de ejecutar $\rightarrow$ se presiona el botón  ubicado a la izquierda en la celda $A6$, el fondo de esta celda se vuelve gris. Los resultados se muestran en la Figura 11.39. Para comenzar de nuevo, presionamos $\leftarrow$ y luego presionamos el botón  a la izquierda de la celda $A6$ dos veces.

También es posible mostrar la parte imaginaria (la parte imaginaria no tiene significado físico), por ejemplo, para hacer esto con E debemos colocar $A12 = SI(G24=0;G12*IMAGINARIO(IM.EXP(COMPLEJO(0;(G13 * I5 - G18 * B11)))));0)$, y para ocultar el vector H se debe poner $C17 = 1$.

11.12 Campo de radiación - vector de Poynting

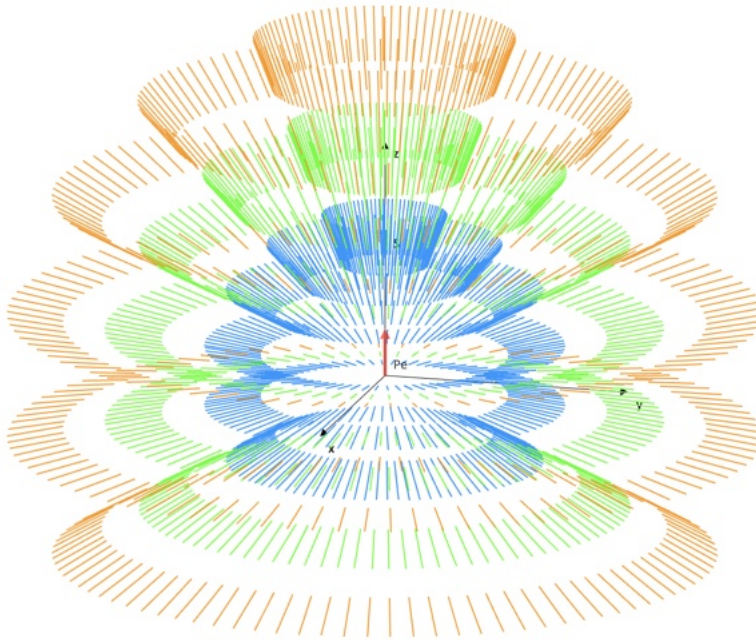
El objetivo de este modelo es simular las propiedades del vector de Úmov - Poynting y comprender su comportamiento en el espacio y en el tiempo.

Ecuaciones matemáticas

De la electrodinámica clásica se sabe que las ondas electromagnéticas son excitadas por cargas eléctricas que se mueven con aceleración; un ejemplo particular es cuando estas cargas forman parte de una corriente eléctrica variable en el tiempo dentro de un circuito. Uno de los sistemas más simples para la excitación de ondas electromagnéticas es el dipolo eléctrico, cuya distancia entre cargas cambia en el tiempo.

En el presente modelo se estudiará un dipolo con un momento dipolar P_e que varía en el tiempo de la siguiente forma:

$$P_e = P_o \sin \omega t, \quad P_o = \text{const.} \quad (11.78)$$

**Figura 11.40.**

Vector de Úmov - Poynting para un oscilador armónico lineal.

Nota. Elaboración propia.

Como es sabido, el momento dipolar es un vector que va desde la carga negativa a la positiva, y su magnitud es igual a la distancia entre las cargas. En este caso, el dipolo es un *emisor de ondas electromagnéticas*, y si su momento cambia en el tiempo según la ley (11.78), se denomina *oscilador armónico lineal*. El campo de las ondas electromagnéticas emitidas por este dipolo se denomina *campo de radiación*. Dado que el dipolo es eléctricamente neutro y sus dimensiones son pequeñas en comparación con la longitud de onda λ de las ondas emitidas, en distancias mucho mayores que λ (es decir, $r \gg \lambda$), el campo de radiación se asemeja al campo de un oscilador con el mismo momento eléctrico. Esta afirmación es válida incluso para osciladores que no necesariamente son armónicos lineales.

Para un oscilador armónico en el vacío, el comportamiento temporal de los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$ del campo de radiación se puede expresar mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r^3} ((\mathbf{P}_o \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}) \sin(\omega t - kr), \\ \mathbf{H}(t) &= -\frac{\omega^2}{4\pi cr^2} (\mathbf{P}_o \times \mathbf{r}) \sin(\omega t - kr),\end{aligned}\tag{11.79}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición desde el dipolo hasta el punto de observación en la zona de onda, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular de

la onda, μ_0 es una constante que depende del sistema de unidades, y c es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. Los vectores $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{r}$ son perpendiculares entre sí y, en el orden mencionado, forman una terna de vectores que sigue la regla de la mano derecha. En la figura 11.41 se muestra la distribución espacial de estos vectores.

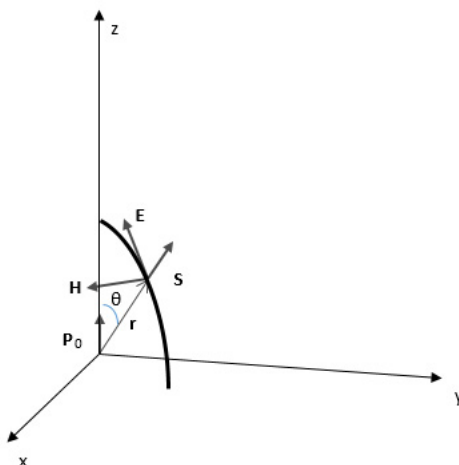


Figura 11.41.

Distribución mutua de los vectores $\mathbf{r}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{S}$ para un oscilador armónico lineal.

Nota. Elaboración propia.

El vector densidad de flujo de energía de la onda electromagnética se denomina *vector de Úmov - Poynting* o simplemente *vector de Poynting*, se denota con la letra $\mathbf{S}$ y se expresa en función de los campos eléctrico y magnético como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (11.80)$$

Como se observa en la figura 11.41, este vector tiene la misma dirección que el vector de posición $\mathbf{r}$, por lo que puede expresarse en función de este. Sustituyendo (11.79) en (11.80) y resolviendo los productos vectoriales, se obtiene la expresión para el vector de Poynting en un punto de la zona de onda de un oscilador armónico lineal:

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 P_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^3} \mathbf{r} \sin^2(\omega t - kr), \quad (11.81)$$

donde θ es el ángulo entre el vector momento dipolar $\mathbf{P}_0$ y el vector de posición $\mathbf{r}$ (ver figura 11.41). Teniendo en cuenta que $\mathbf{r} = (x, y, z)$, las componentes del vector de Poynting se expresan como:

$$\begin{aligned} S_x &= Kx, & S_y &= Ky, & S_z &= Kz, \\ S_x &= Kr \cos \phi \sin \theta, & S_y &= Kr \sin \phi \sin \theta, & S_z &= Kr \sin \theta, \\ K &= K(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 P_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^3} \sin^2(\omega t - kr), \end{aligned} \quad (11.82)$$

donde las ecuaciones del segundo renglón corresponden a la variante en coordenadas esféricas.

Construcción del modelo

Para este modelo se necesitan básicamente dos vectores: El momento dipolar y el vector de Poynting. El momento dipolar cambia en el tiempo según la ecuación (11.78), y, en cualquier punto del espacio alrededor del dipolo y lejos de él, las componentes del vector **S** se comportan de acuerdo con las ecuaciones (11.82).

En la fórmula de Excel 11.100 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector .

Fórmula en Excel 11.100

Configuración de las celdas correspondientes a los parámetros iniciales:.

- E5 =10 { - escala del sistema },
- I3 =0,0004 { - intervalo de tiempo },
- I4 =80 { - número de intervalos a reproducir en una simulación },
- G10 =1 { - diferentes vistas del campo, 1 a 3 },
- G12 =10000000 { = μ_0 },
- G13 =300000000 { = c },
- G14 =0,1 { = p_0 - momento dipolar },
- G15 =G16/G13 { = k - número de onda },
- G16 =21007 { = $w = 2\pi f$ - frecuencia angular },
- G18 =RAIZ(A11^2+B11^2+C11^2) { = r },
- G19 =ATAN(B11/A11) { = ϕ },
- G20 =ACOS(C11/G18)+90 { = θ },
- G21 =G16*I5-G15*G18 { = $wt - kr$ },
- G22 =G12*G16^4*G14^2*POTENCIA(SENO(RADIANTES(G20)));2)*POTENCIA(SENO(RADIANTES(G21)));2)/(16*PI())^2*G13*G18^3)

$$\{ = K = \frac{\mu_0 \omega^4 P_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^3} \sin^2(\omega t - kr) \}.$$

En la fórmula de Excel 11.101 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **S**.

Fórmula en Excel 11.101

Configuración de las celdas que corresponden a S:

- C7 =SI(G10=1;"s[5]r=[10;30]s2[15]phi=[0;360]s3[3]theta=[90;90]color=[7E8]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003224206s";
SI(G10=2;"s[8]r=[10;30]s2[10]phi=[-90;90]s3[20]theta=[0;90]color=[7E8]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003359921s";
SI(G10=3;"s[4]r=[2;30]s2[90]phi=[-90;90]s3[2]theta=[0;45]color=[7E8]origin[cart.]=[0;0;0]tfactor=0;003560127s""")) { = },

- B8 =60*0;00001 {- sin el signo igual. Configuración de visualización del campo vectorial},
- A10 =A11,
- B10 =B11,
- C10 =C11,
- A12 =\$G\$22*A11 {= $K_x = S_x$ },
- B12 =\$G\$22*B11 {= $K_y = S_y$ },
- C12 =\$G\$22*C11 {= $K_z = S_z$ }.

En la fórmula de Excel 11.102 se muestran los valores que deben tener las celdas del vector **Pe**.

Fórmula en Excel 11.102 2

Configuración de las celdas que corresponden a **Pe**:

- B17 =600*0;01 {- sin el signo igual. Configuración de visualización del campo vectorial},
- C21 =G14*SENO(RADIANES(G16*I5)) {= $P_z = P_0 \sin \omega t$ },
- {Otros , línea = 6 , cabeza del vector = 2 }.

Ejecución del modelo

Una vez organizadas las fórmulas en las celdas de Excel, se puede proceder a analizar los diferentes parámetros del modelo de acuerdo con necesidades específicas. Este modelo, al igual que otros diseñados previamente, ofrece múltiples posibilidades de variación de parámetros y visualización en tres dimensiones, además de permitir la modificación de sus objetivos o la creación de nuevos proyectos a partir del ya existente. El modelo ha sido guardado en la lista de proyectos predeterminados de *ScienSolar*; sin embargo, el usuario puede diseñar sus propios proyectos y agregarlos a la lista de proyectos disponibles.

Existen dos enfoques principales para estudiar el vector de Poynting en este modelo:

- Analizarlo como un **campo vectorial**.
- Analizarlo como un **vector único** en un punto específico del espacio.

Análisis del vector de Poynting como campo vectorial

- **Distribución de vectores en el espacio.**
 - En la celda C7 se configuran las diferentes vistas del campo, cuyo número se puede elegir en la celda G10. Las vistas corresponden al sistema de coordenadas esférico y sus parámetros se cambian entre los corchetes que aparecen en la cadena de valores de la celda C7. Se pueden incluir más opciones de visualización agregando más condicionales de Excel.
 - Para visualizar los vectores con cabeza, se asigna el valor 2 a la celda A14.
- **Visualización en un tiempo específico.**

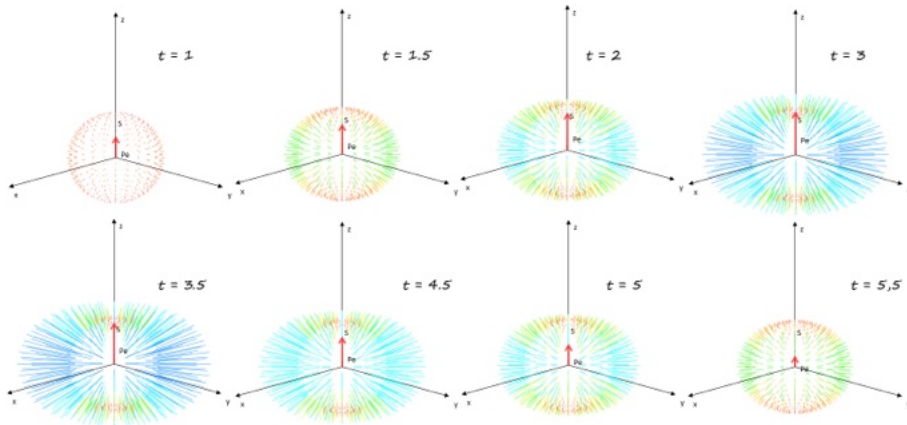
- Para un tiempo determinado, por ejemplo $t = 5$, se ingresa este valor en la celda **I5** y se presiona el botón **XYZ**.
- **Configuración del umbral de color.**
 - Al observar el valor del vector de Poynting, por ejemplo en la celda **A12**, se nota que, para ciertos parámetros, puede alcanzar magnitudes del orden de 10^8 W/m^2 .
 - Para configurar el gradiente de color en este rango, se puede ajustar el segmento de color en la celda **C7**. Por ejemplo, el valor `{color=[7E8]}` establece un umbral superior de $7 \times 10^8 \text{ W/m}^2$. Esto significa que:
 - Los vectores de Poynting con magnitudes cercanas a $7 \times 10^8 \text{ W/m}^2$ se mostrarán en color azul.
 - Los vectores con magnitudes menores adquirirán colores que varían hacia el rojo, dependiendo de su distancia al umbral superior.
 - Este ajuste se realiza mediante prueba y error, modificando el valor en el segmento de color hasta obtener la representación visual deseada.
- **Simulación temporal.**
 - Para observar el comportamiento del vector de Poynting en función del tiempo, se presiona el botón **<--** para reiniciar el contador de tiempo a cero.
 - Se establece la unidad de tiempo en la celda **I3** con un valor de **0.5** y el número de pasos en la celda **I4** con un valor de **10**.
 - Al presionar el botón **>>**, se ejecutará una secuencia de imágenes que muestran la evolución temporal del campo vectorial. Esta simulación puede tardar algunos segundos en completarse, dependiendo de la resolución seleccionada en **C7**. Si se desea reducir el tiempo de ejecución, se pueden modificar los parámetros en esta celda.
 - Durante la ejecución, el proceso puede interrumpirse en cualquier momento poniendo el cursor en la barra de fórmulas.

Análisis del vector de Poynting como vector único

- **Configuración del vector único.**
 - Para analizar el vector de Poynting en un punto específico del espacio, se introduce cero en **G10** =0.
 - Las coordenadas del punto de observación se establecen en las celdas **A11**, **B11** y **C11**.
 - Los parámetros que se pueden modificar se encuentran desde la celda **G10** hasta la celda **G16**.
- **Visualización y simulación temporal.**
 - Al presionar cualquier botón de rotación, se obtendrá una imagen similar a la mostrada en la figura 11.45, parte b).
 - Para observar el comportamiento temporal de los vectores **P_e** y **S**, se establece en la celda **I3** un valor de **4** y en la celda **I4** un valor de **45**. Luego, se presiona el botón **>>**.

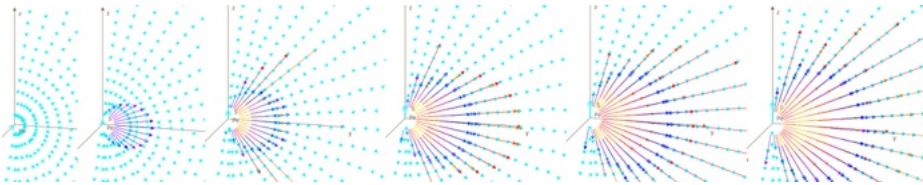
Figuras de referencia

Las figuras 11.42 - 11.45 muestran algunas imágenes que se pueden obtener en este modelo.

**Figura 11.42.**

Vector de Úmov - Poynting para un oscilador armónico lineal en diferentes valores del tiempo y con un radio definido.

Nota. Elaboración propia.

**Figura 11.43.**

Vector de Úmov - Poynting para un oscilador armónico lineal en diferentes momentos de tiempo, visto en el semiplano paralelo al eje z con $\phi = 90^\circ$.

Nota. Elaboración propia.

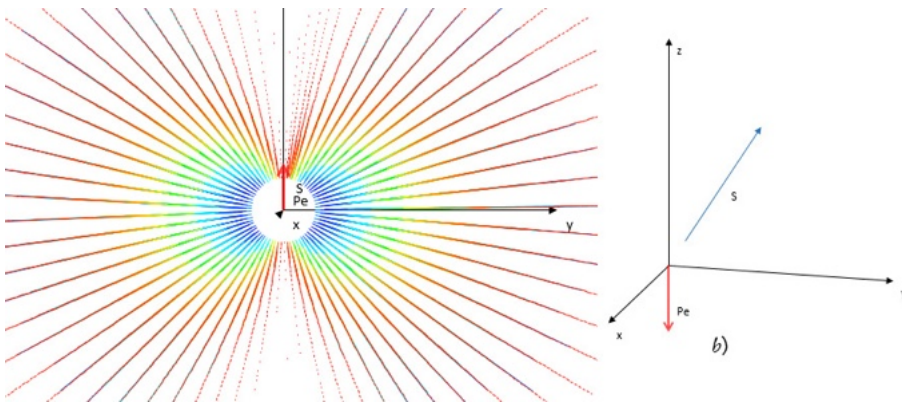
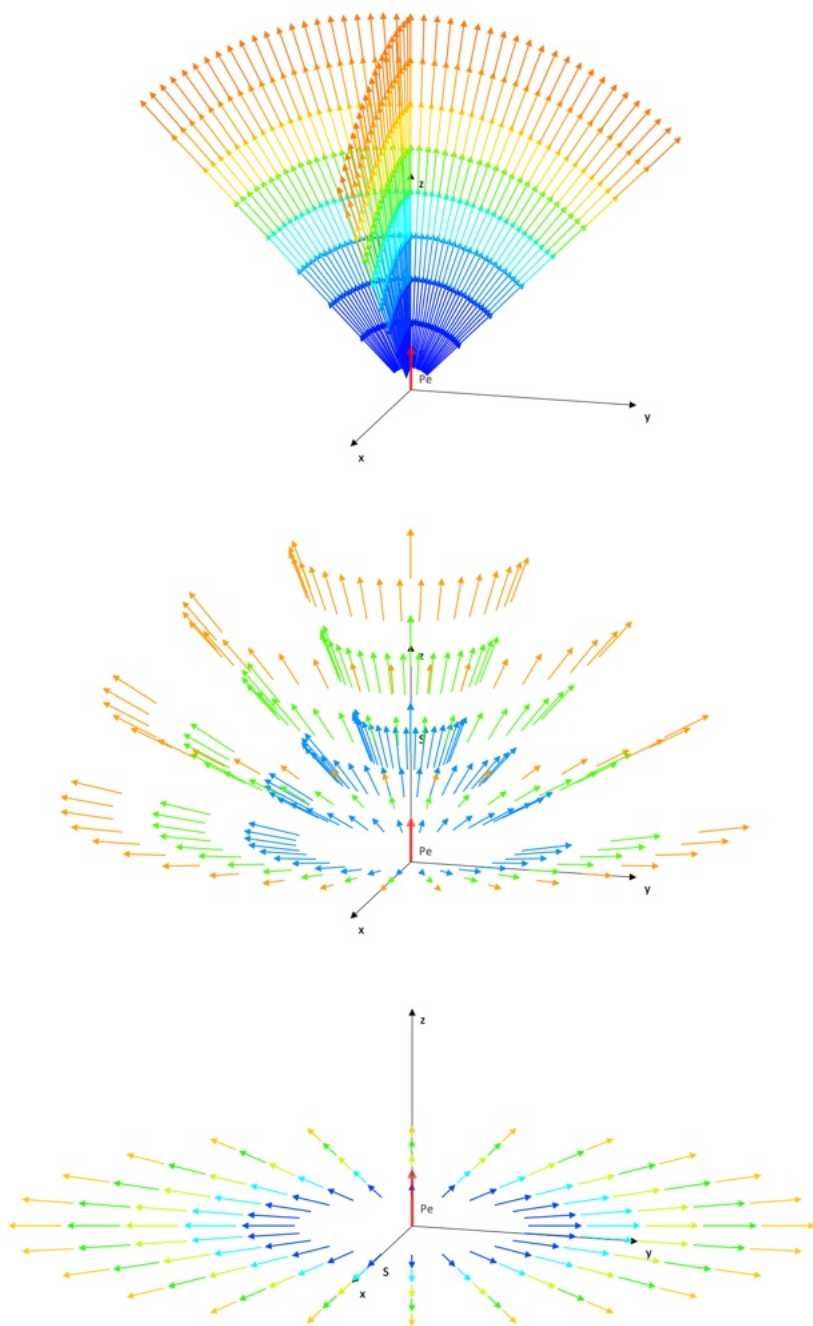


Figura 11.44.

a) Vector de Úmov - Poynting para un oscilador armónico lineal visto en el plano yz en modo campo a partir de un radio determinado. En azul se muestran los vectores de mayor magnitud y en rojo los de menor magnitud. b) El vector en modo "vector único".

Nota. Elaboración propia.

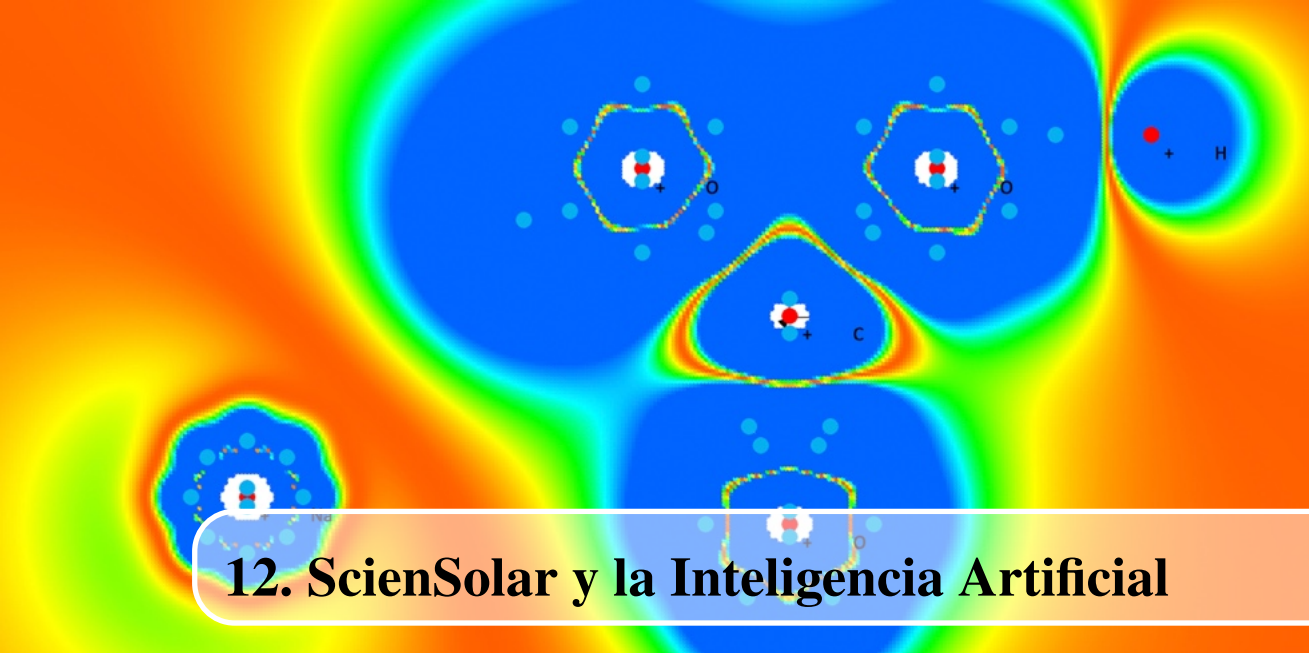
**Figura 11.45.**

Vector de Úmov - Poynting con tres vistas diferentes para una misma configuración, las cuales se eligen en la celda G10.

Nota. Elaboración propia.



ScienSolar y la Inteligencia Artificial (IA)



12. ScienSolar y la Inteligencia Artificial

La inteligencia artificial (IA) ha revolucionado numerosos ámbitos de la tecnología, y su aplicación en herramientas como Microsoft Excel para el modelado de problemas físicos, representa una innovación significativa. En particular, la integración de IA con paquetes especializados como *ScienSolar* (www.sciensolar.com) puede simplificar drásticamente el proceso de escritura, implementación y verificación de modelos matemáticos complejos en hojas de cálculo. Esta sinergia permite a investigadores, ingenieros y estudiantes abordar problemas físicos sofisticados sin requerir experticia en programación o análisis numérico.

12.1 El potencial de la IA en Excel para ciencias físicas

La IA puede actuar como un asistente inteligente multidimensional que no solo ayuda en la creación de fórmulas básicas, sino que también facilita la implementación de modelos físicos complejos. Mediante algoritmos de procesamiento de lenguaje natural (NLP) y aprendizaje automático, Excel puede transformarse en una herramienta poderosa para simulación científica.

12.2 Asistencia inteligente en formulación matemática

Los sistemas de IA equipados con capacidades de NLP pueden interpretar descripciones en lenguaje natural de fenómenos físicos y convertirlas automáticamente en representaciones matemáticas implementables en Excel. Por ejemplo, un usuario podría describir: *"Necesito modelar el campo eléctrico generado por una distribución de carga puntual"*

en coordenadas cartesianas" y la IA podría generar no solo las fórmulas de Coulomb necesarias, sino también la estructura completa de la hoja de cálculo, incluyendo la disposición óptima de parámetros y variables.

Esta capacidad es particularmente valiosa cuando se trabaja con el paquete *ScienSolar*, donde las fórmulas frecuentemente involucran constantes físicas, notación vectorial y operaciones matriciales que pueden resultar intimidantes para usuarios no especializados.

Detección y corrección avanzada de errores

Uno de los desafíos más significativos en el modelado físico con Excel es la introducción de errores conceptuales o de implementación. Los sistemas de IA pueden analizar las fórmulas en contexto, identificando no solo errores sintácticos sino también inconsistencias físicas. Por ejemplo, si un usuario implementa una ecuación para el cálculo de un campo magnético pero utiliza unidades incompatibles, la IA puede detectar esta discrepancia y sugerir correcciones apropiadas.

Además, la IA puede verificar la consistencia dimensional de las ecuaciones, asegurando que las unidades a ambos lados de una igualdad sean coherentes, una funcionalidad particularmente útil en física donde el análisis dimensional es fundamental.

Recomendación contextual de modelos físicos

Los algoritmos de IA pueden analizar los datos ingresados y el contexto del problema para recomendar modelos físicos apropiados. Por ejemplo, si un usuario está trabajando con datos de posición y tiempo, la IA podría sugerir implementar ecuaciones de movimiento uniformemente acelerado, o si detecta patrones periódicos, podría recomendar modelos de movimiento armónico simple.

Esta capacidad se extiende a la recomendación de métodos numéricos apropiados (Euler, Runge-Kutta, etc.) según la naturaleza del problema físico y las características de los datos disponibles.

Optimización de fórmulas vectoriales y matriciales

En física, muchos problemas involucran operaciones vectoriales y tensoriales que son particularmente desafiantes de implementar en Excel. La IA puede generar automáticamente fórmulas array complejas y optimizar referencias dinámicas. Por ejemplo, para calcular el producto vectorial entre dos vectores almacenados en celdas específicas, la IA puede generar la fórmula matricial apropiada considerando la notación de Excel.

Integración con ScienSolar

La IA puede facilitar la integración entre Excel y paquetes especializados como *ScienSolar*, ayudando a los usuarios a aprovechar al máximo las funcionalidades específicas de estas herramientas. Esto incluye la generación automática de macros, la configuración de parámetros de simulación y la interpretación de resultados complejos.

12.3 Metodología de implementación con IA

La implementación exitosa de modelos físicos con asistencia de IA sigue una metodología estructurada que incluye:

1. **Definición clara del problema físico.** Especificar el fenómeno a modelar, las variables involucradas y las condiciones de contorno.
2. **Selección del modelo matemático.** Identificar las ecuaciones fundamentales que gobiernan el sistema.
3. **Disposición de parámetros y variables.** Organizar la hoja de cálculo de manera lógica y eficiente.
4. **Implementación de fórmulas.** Usar la IA para generar y verificar las fórmulas necesarias.
5. **Validación y verificación.** Asegurar que el modelo produce resultados físicamente plausibles.

Aplicación en diferentes dominios físicos

Mecánica clásica

Para problemas de movimiento de proyectiles, la IA puede ayudar a implementar ecuaciones paramétricas que describen la trayectoria, considerando factores como resistencia del aire y variación gravitacional.

Electromagnetismo

En problemas de campos electromagnéticos, la IA puede asistir en la implementación de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial o integral, adaptadas a la geometría específica del problema.

Termodinámica

Para modelar transferencia de calor o procesos termodinámicos, la IA puede generar fórmulas que implementen las leyes de la termodinámica con las aproximaciones adecuadas al problema.

En conclusión, la inteligencia artificial tiene el potencial de transformar radicalmente la forma en que los científicos e ingenieros utilizan Excel para modelado físico. Al reducir la barrera técnica asociada con la implementación de modelos matemáticos complejos, la IA permite a los usuarios concentrarse en la interpretación física de los resultados más que en los detalles computacionales. A medida que estas tecnologías maduren, podemos anticipar una democratización del modelado científico, haciendo herramientas sofisticadas accesibles a una audiencia más amplia.



La efectividad de la asistencia proporcionada por una inteligencia artificial en el modelado de problemas físicos con Excel y *ScienSolar* depende críticamente de la calidad del *requerimiento* presentado. Si este está bien estructurado, debe comunicar de manera precisa y completa la naturaleza del problema físico, el marco matemático, la disposición de datos en la hoja de cálculo y los resultados esperados.

13.1 Principios fundamentales para requerimientos efectivos

Claridad y precisión

Cada elemento del requerimiento debe ser formulado con precisión técnica evitando ambigüedades. Especificar unidades físicas, sistemas de coordenadas y convenciones de signos resulta esencial para obtener asistencia relevante.

Contextualización adecuada

Proporcionar suficiente contexto sobre el problema físico permite a la IA seleccionar aproximaciones y modelos apropiados. Incluir referencias a principios físicos relevantes (leyes de conservación, simetrías, etc.) mejora significativamente la calidad de la asistencia.

Organización lógica

Estructurar el requerimiento en secciones claramente delimitadas facilita su procesamiento por parte de la IA y reduce la probabilidad de malentendidos o omisiones críticas.

13.2 Estructura detallada para requerimientos de modelado físico

Contexto físico y objetivo:

- Describir el fenómeno físico a modelar, mencionando las leyes físicas relevantes.
- Especificar el objetivo del modelo (análisis paramétrico, predicción, optimización, etc.).
- Indicar las aproximaciones o simplificaciones aceptables.

Descripción completa de variables y parámetros:

- Listar todas las variables dependientes e independientes con sus significados físicos.
- Especificar las celdas exactas donde se ubicarán parámetros, constantes y variables, preferiblemente entre las celdas **G10** - **G50**.
- Indicar unidades físicas para cada cantidad y cualquier factor de conversión necesario.
- Para problemas que involucran el tiempo u otro parámetro variable, especificar la celda **I5** en calidad de este parámetro.

Ecuaciones matemáticas y marco teórico:

- Proporcionar las ecuaciones fundamentales en notación matemática estándar (preferiblemente LaTeX).
- Para ecuaciones diferenciales, especificar condiciones iniciales y de contorno.
- Desglosar ecuaciones complejas en componentes manejables.
- Indicar relaciones entre variables y cualquier restricción física.

Disposición específica en Excel:

- Especificar la ubicación exacta de cada variable en la hoja de cálculo.
- Indicar celdas para resultados intermedios y finales (ej: A12, B12, C12 para componentes vectoriales).
- Definir rangos para datos de entrada y salida.
- Especificar el tratamiento de coordenadas (ej: A11, B11, C11 para x, y, z).

Requerimientos técnicos de implementación:

- Indicar el idioma para nombres de funciones (español, inglés, etc.).
- Especificar tipo de referencias (absolutas, relativas o mixtas).
- Definir precisión numérica requerida y método de cálculo.

- Solicitar validaciones o verificaciones específicas.

Formato de salida y documentación:

- Solicitar fórmulas listas para implementar en Excel.
- Pedir explicación paso a paso de fórmulas complejas.
- Requerir documentación de suposiciones y limitaciones.
- Solicitar ejemplos de verificación con valores conocidos.

13.3 Ejemplos ampliados de requerimientos

A continuación se darán algunos ejemplos de requerimientos a la IA.

Ejemplo 13.3.1 Formular un requerimiento sobre el campo magnético con ley de Biot-Savart

SOLUCIÓN

Contexto: Estoy modelando el campo magnético generado por un segmento de corriente rectilíneo usando la ley de Biot-Savart para múltiples puntos de observación en el espacio.

Disposición en Excel:

- Parámetros constantes en celdas fijas: μ_0 (G19), corriente I (G17).
- Coordenadas del punto de observación: x (A10), y (B10), z (C10).
- Componentes del campo magnético: B_x (A12), B_y (B12), B_z (C12).
- Componentes de dL : dL_x (A21), dL_y (B21), dL_z (C21).
- Posición del vector dL : x_L (A19), y_L (B19), z_L (C19).

Ecuaciones:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{L} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdL(yr_z - zr_y)}{r^3}, \quad B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdL(zr_x - xr_z)}{r^3}, \quad B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdL(xr_y - yr_x)}{r^3}$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Requerimientos específicos: Fórmulas en español, usar referencias absolutas para constantes (G17, G18, G19) y relativas para coordenadas, calcular r en celda G12.

Resultado. Una vez hecho el requerimiento con los cuatro elementos a la IA (contexto, disposición en Excel, ecuaciones y requerimientos específicos), la IA proporcionará las fórmulas listas en Excel para copiar y pegar (ver figura ?? para B_x). Si el modelo todavía no se ha empezado a elaborar, entonces, en una nueva hoja de *ScienSolar* se agregan los vectores B y dL , se copian las fórmulas

proporcionadas por la IA y se pegan en las celdas indicadas. El resultado es parecido al mostrado en la figura 13.2.

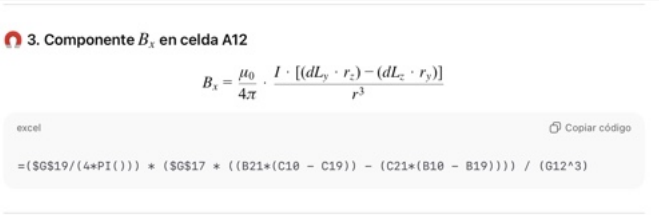


Figura 13.1
Ejemplo de un resultado proporcionado por la IA de una fórmula lista para copiar y pegar en la celda A12.
Nota. Elaboración propia.

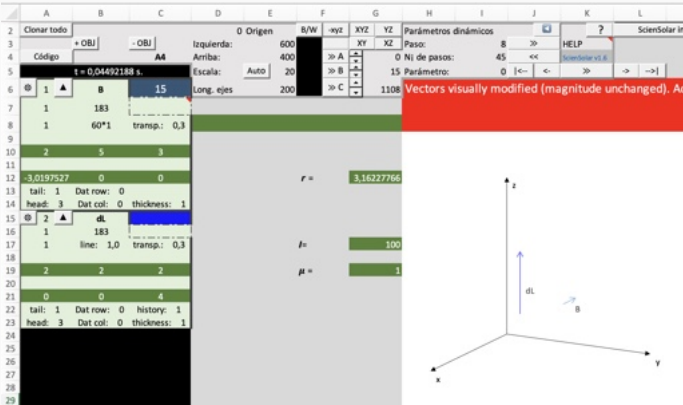


Figura 13.2
Resultado de copiar las fórmulas proporcionadas por la IA y pegarlas en el modelo de ScienSolar. Se observa el campo magnético de un elemento de corriente dL .
Nota. Elaboración propia.

Ejemplo 13.3.2 Movimiento orbital con potencial gravitacional.

SOLUCIÓN

Contexto: Modelo de movimiento planetario usando potencial gravitacional newtoniano para múltiples cuerpos con parámetros variables.

Disposición en Excel:

- Constante gravitacional G en G20.
- Masas de cuerpos en G21:G25.
- Parámetros orbitales variables en G10:G50.
- Posiciones iniciales: x_0 (A10), y_0 (B10), z_0 (C10).
- Componentes de fuerza: F_x (A12), F_y (B12), F_z (C12).

Ecuaciones:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

$$F_x = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} x, \quad F_y = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} y, \quad F_z = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} z$$

Requerimientos: Implementar con método de Euler para integración temporal, fórmulas en español, validar con órbitas circulares conocidas.

Ejemplo 13.3.3 Ecuación de calor en una dimensión.**SOLUCIÓN**

Contexto: Solución numérica de la ecuación de difusión térmica en una barra unidimensional con condiciones de contorno variables.

Disposición en Excel:

- Coeficiente de difusión térmica en G9
- Condiciones de contorno variables en G12:G52
- Temperatura inicial en G10
- Perfil de temperatura en tiempo t: E12:A52
- Fuentes de calor en D11:D50

Ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x, t)$$

Requerimientos: Implementar con método de diferencias finitas, paso temporal adaptativo, fórmulas en español con referencias mixtas.

(Nota: también puede tomar una captura de pantalla de este ejemplo y proporcionárselo a la IA)

13.4 Mejores prácticas y recomendaciones adicionales

Estrategias para problemas complejos

Para modelos físicos extensos o particularmente complejos, se recomienda:

- **Divide y vencerás:** Descomponer el problema en subproblemas manejables y solicitar asistencia para cada componente por separado.
- **Validación progresiva:** Implementar y verificar cada parte del modelo antes de integrarlas.
- **Documentación iterativa:** Mantener registro de todas las suposiciones y decisiones de implementación.

Manejo de incertidumbre y aproximaciones

Es crucial comunicar claramente a la IA el nivel de precisión requerido y las aproximaciones aceptables. Esto incluye:

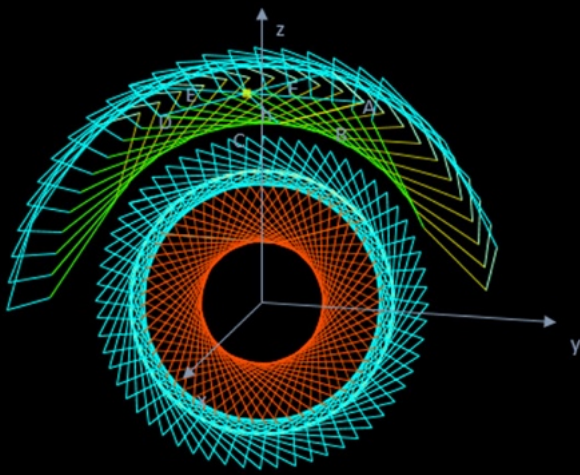
- Especificar tolerancias numéricas para métodos iterativos.
- Indicar simplificaciones físicamente justificadas.
- Definir criterios de convergencia para soluciones aproximadas.

Optimización del proceso iterativo

La comunicación con la IA frecuentemente requiere múltiples iteraciones. Para optimizar este proceso:

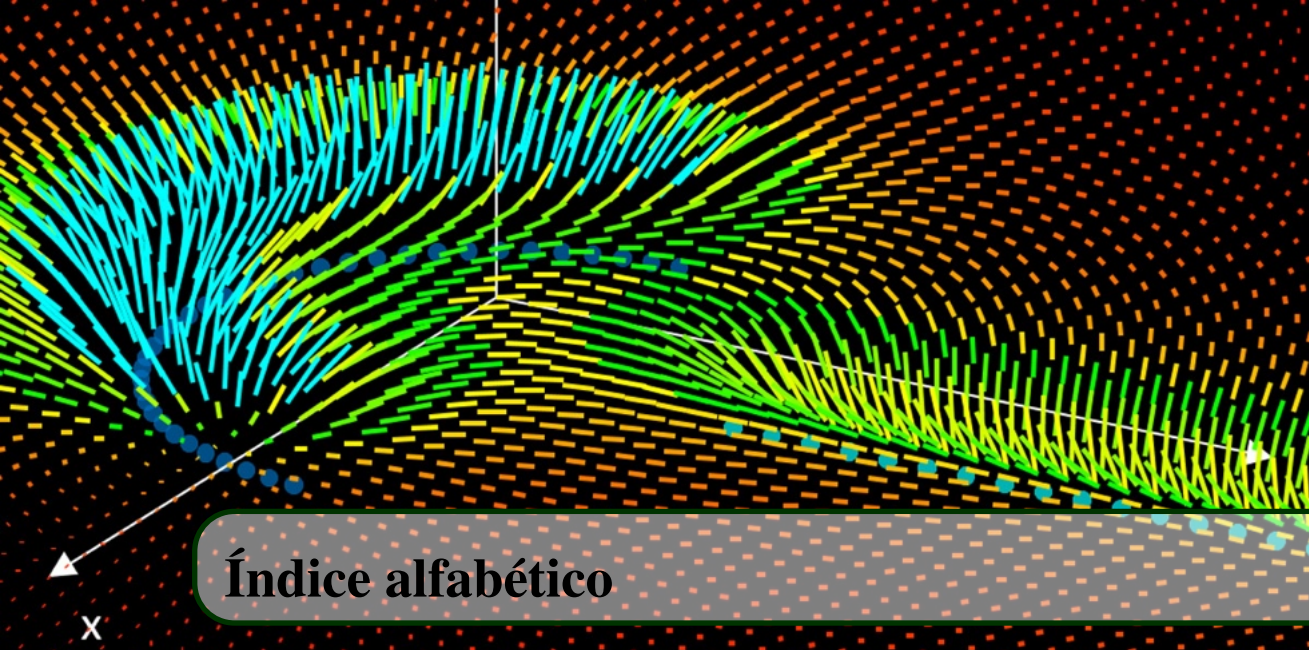
- Proporcionar retroalimentación específica sobre resultados anteriores.
- Mantener consistencia en la notación y disposición de variables.
- Documentar cambios y ajustes realizados durante el desarrollo del modelo.

La efectividad de la colaboración con IA en el modelado físico con Excel y *ScienSolar* depende fundamentalmente de la capacidad del usuario para formular requerimientos claros, completos y técnicamente precisos. Dominar esta habilidad permite aprovechar todo el potencial de estas herramientas emergentes para resolver problemas científicos complejos de manera eficiente y accesible.



Bibliografía

- [1] I. N. Bronshtein and K. A. Semendyayev, *Manual de matemáticas*. Moscú: Mir, 1997.
- [2] B. M. Yavorski and A. A. Detlaf, *Prontuario de física*. Moscú: Mir, 1988.
- [3] H. C. Ohanian and J. T. Markert, *Física para ingeniería y ciencias*, 3ra ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2009.
- [4] D. J. Cooke and H. E. Bez, *Computer mathematics*. Moscú: Nauka, 1990. (En ruso)
- [5] E. A. Volkova, A. M. Popov, and A. T. Rakhimov, *Quantum mechanics on the personal computer*. Moscú: URSS, 1995. (En ruso)
- [6] Microsoft, “Referencia de VBA para Excel,” 2022. [En línea]. Disponible: <https://learn.microsoft.com/es-es/office/vba/api/overview/excel>
- [7] V. I. Kildishov, *MS Excel and VBA to modeling of different problems*. Moscú: Solon-Press, 2018. (En ruso)
- [8] Fisica.ru, *Física que cambia el mundo*, 2022. [En línea]. Disponible: <https://www.fisica.ru>
- [9] ScienSolar, *Sitio informativo de ScienSolar*, 2022. [En línea]. Disponible: <https://sciensolar.com>



Índice alfabético

Botón

-  Vista personalizada, 105
-  rotación en x, 104
-  Color del fondo, 107
-  , ocultar tablero de control, 108
-  Agregar nuevo vector o nuevo proyecto, 75
-  , simular por pasos, 110
-  , ejecutar simulación, 110
-  , ejecutar simulación con parámetro de la celda seleccionada, 110
-  Restablecer la hoja *ScienSolar*, 75
-  , reiniciar el contador, 109
-  Agregar nuevo vector o nuevo proyecto, 76
-  Vista XY, 103
-  Vista XZ, 103
-  Vista YZ, 103
-  Automatizar objetos en un modelo., 80

-  Generar código de un nuevo modelo, 77
-  Formulario de configuración del vector, 82
-  Ocultar/mostrar configuración del vector, 82
-  Vista XYZ, 103

Botón Refresh (hoja CONFIG), 179

Campo

- concepto general, 47
- escalar, 47
 - de simetría cilíndrica, 48
 - de simetría esférica, 49
 - de simetría plana, 48
- vectorial, 49
 - de simetría cilíndrica, 50, 236
 - de simetría esférica, 50, 238
 - de simetría plana, 49, 234

Coordenadas

- cartesianas, 20
- vector en, 22

- cilíndricas, 27, 214, 224, 227, 232
- definición, 19
- esféricas, 30, 219, 227, 229, 232
- transformación de
 - cilíndricas a cartesianas y esféricas, 50
 - esféricas a cartesianas y cilíndricas, 53
- Vectores de cartesianas a cilíndricas, 56
- Vectores de cartesianas a esféricas, 56
- Vectores de cilíndricas a cartesianas, 54
- Vectores de cilíndricas a esféricas, 54
- Vectores de esféricas a cartesianas, 55
- Vectores de esféricas a cilíndricas, 55
- Código, 175
- figuras geométricas
 - modelado, 196
- IA, 355
- Modelos, 155
 - matemáticos, 185
- Modelos físicos, 241
- Multiplicación vectorial, 202
- Módulos, 121
- Refresh (CONFIG), 179
- requerimiento IA, 359
- Rotación, 205, 213
- ScienSolar
 - código, 77
 - Datos
 - extraer datos durante simulación, 98
- Ejecutar una simulación, 107
- entorno de trabajo, 65
- lista de proyectos, 79
- Módulo de operadores diferenciales, 124
- Optimizando el tiempo de ejecución, 83
- qué es, 65
- restablecer, 75
- Trayectorias
 - dibujar trayectorias con líneas espaciales, 121
 - dibujar trayectorias con vectores, 101
- Vector
 - color del, 83
 - modo campo, 89
 - modo campo con una ecuación vectorial, 91
 - nombre del, 83
 - tipos de formas para representar vectores, 142
- vector, 75, 76
- vistas del sistema de coordenadas, 103
- Suma de vectores, 186
- Tablero de control, 73
- Transformaciones
 - compuestas, 39
 - rotación, 37
 - alrededor de un eje, 39
 - consecutiva, 42
 - de los ejes de coordenadas, 41
 - del eje x, 44
 - del eje y, 44
 - del eje z, 44
 - traslación, 36
- Vector
 - agregar nuevo, 79

PERFIL DEL AUTOR

Ariel Rey Becerra Becerra

Físico, magíster y doctor en física teórica por la Universidad de la Amistad de los Pueblos de Moscú (Federación de Rusia), es profesor titular en la Universidad de Pamplona (Colombia). Su trayectoria académica abarca más de dos décadas de docencia, investigación y gestión universitaria.

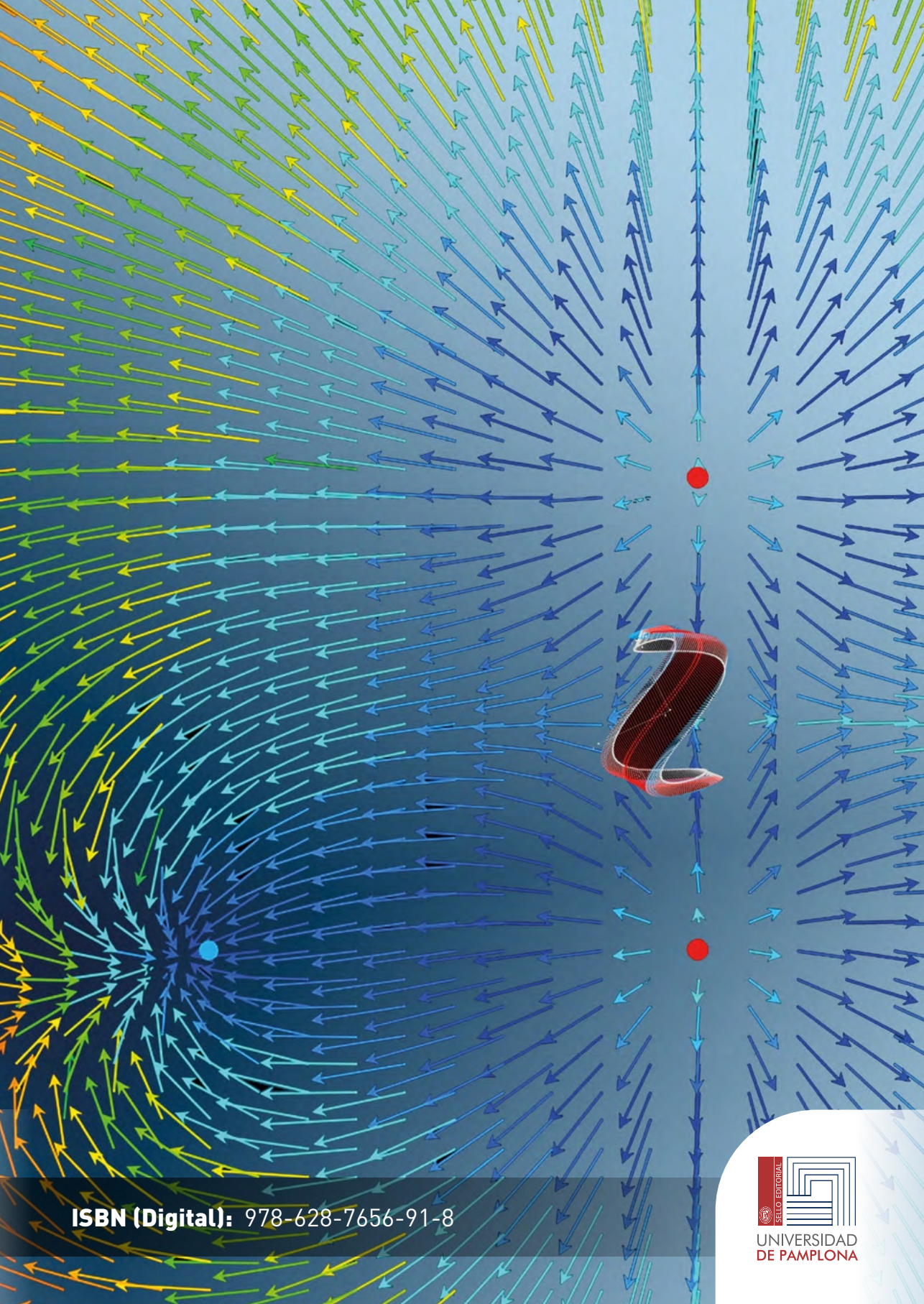
Sus líneas de investigación principales comprenden el estudio de la solución fundamental de la ecuación de Dirac —piedra angular de la mecánica cuántica relativista— desde la perspectiva de la teoría de distribuciones, la física de la energía solar y el desarrollo de aplicaciones computacionales para el modelado de sistemas físicos.

En su carrera universitaria ha desempeñado cargos como director del Departamento de Física, decano de la Facultad de Ciencias Básicas y vicerrector de investigaciones, además de liderar múltiples proyectos de innovación pedagógica y científica.

El Dr. Becerra es autor del paquete ScienSolar, una herramienta gratuita para el modelado de fenómenos físicos en Excel, ampliamente utilizada en contextos universitarios. Su enfoque integra la física, la tecnología y la enseñanza activa para democratizar el acceso al conocimiento científico.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2373-9961>





ISBN (Digital): 978-628-7656-91-8