



$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} (k!)^2}{(2k+2)!} = \frac{\pi^2}{4}$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

$${}_qF_q\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

TÓPICOS DE FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS



Rosalba Mendoza Suárez
Juan Carlos López Carreño
Jairo Alonso Mendoza Suárez

TÓPICOS DE FUNCIONES
HIPERGEOMÉTRICAS

Tópicos de funciones hipergeométricas / Rosalba Mendoza Suárez, Juan Carlos López Carreño, Jairo Alonso Mendoza Suárez — Pamplona: Universidad de Pamplona. 2026.

118 p. 17 cm x 24 cm

ISBN (Digital): 978-628-7656-95-6

© Universidad de Pamplona

© Sello Editorial Unipamplona

Sede Principal Pamplona, Km 1 Vía Bucaramanga-
Ciudad Universitaria. Norte de Santander, Colombia.

www.unipamplona.edu.co

Teléfono: 6075685303

TÓPICOS DE FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS

Rosalba Mendoza Suárez

Juan Carlos López Carreño

Jairo Alonso Mendoza Suárez

ISBN (Digital): 978-628-7656-95-6

DOI: <https://doi.org/10.24054/8m7eq732>

Primera edición marzo de 2026

Colección Ciencia e Innovación

© Sello Editorial Unipamplona

Rector: Ivaldo Torres Chávez Ph.D

Vicerrector de Investigaciones: Aldo Pardo García Ph.D

Corrección de Estilo: Andrea del Pilar Durán Jaimes

Hecho el depósito que establece la ley. Todos los derechos reservados.

Prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio, sin permiso del editor.



TÓPICOS DE FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS

Dr. Juan Carlos López C.

ORCID: 0000-0001-9283-9257.

email: jclopez@unipamplona.edu.co

Mg. Rosalba Mendoza Suárez.

ORCID: 0000-0002-3698-6014..

email: rosalbame@unipamplona.edu.co

Dr. Jairo Alonso Mendoza Suárez

ORCID: 0000-0002-7164-8010

email: jairoam@unipamplona.edu.co



“Formando nuevas generaciones con
sello de excelencia comprometidos
con la transformación social de las
regiones y un país en paz”



Dedicatoria

Juan Carlos, a mis hijas Melissa, Marcela y a mi nieto Luca.

Rosalba, a mi hijo Daniel Alberto.

Jairo, a mis hijos Jairo Andrés y Natalia Sofía.

Índice general

1. Introducción	9
2. Función Gamma	11
2.1. Nociones generales	13
2.2. La función Gamma	13
2.3. La función Gamma como un producto	16
2.3.1. La constante de Euler-Mascheroni	16
2.3.2. Teorema de Weierstrass	19
2.4. Fórmula del seno como un producto	22
2.5. Fórmula de reflexión de Euler	28
2.6. Fórmula de duplicación de Legendre	40
2.7. Símbolo de Pochhammer y Propiedades	42
2.8. Ejercicios	47
3. Series Hipergeométricas	51
3.1. Ecuación Hipergeométrica	52
3.2. Serie Hipergeométrica	60
3.3. Función Hipergeométrica generalizada	61
3.3.1. Ejemplos	62
3.4. Representación integral de Euler	66
3.5. Fórmulas de sumación	72
3.5.1. Fórmula de sumación de Pfaff-Saalschütz	73
3.6. Fórmulas de transformación	75
3.6.1. Identidades de Clausen	75
3.6.2. Otra fórmula de transformación	80
3.7. Ejercicios	81
4. Sumas binomiales	85
4.1. Un problema del Monthly	85
4.2. Un problema de las olimpiadas universitarias	87
4.3. Desarrollo en fracciones parciales de la función cotangente	91

4.4. Una serie de funciones Gamma	94
4.5. Serie infinita con coeficientes binomiales	96
4.6. Otra representación para π como una serie infinita	98
4.7. Un ejercicio del libro de Andrews, Askey y Roy	100
4.8. Una serie de caricatura	103
4.9. Identidades polinomiales con coeficientes binomiales	106
4.10. Problemas propuestos	111

Índice de figuras

2.1. Leonard Euler	11
2.2. Comparación de áreas	17
2.3. Comparación áreas 2	18
3.1. Carl Friedrich Gauss	51
3.2. Adrien Marie Legendre	60
4.1. Figura tomada de la referencia [12] (2020)	103
4.2. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass	110

Resumen

Este libro de matemáticas avanzadas aborda el estudio de algunos temas de funciones especiales. El documento se estructura en tres capítulos. El primero está dedicado a la función Gamma, presentando las definiciones dadas por Euler Gauss y Weierstrass; estableciendo sus equivalencias. En este primer capítulo también se enuncian y demuestran algunas de las propiedades más esenciales de la función Gamma, entre las que se destacan la relación de recurrencia, la fórmula de reflexión de Euler, la fórmula de duplicación de Legendre. El segundo capítulo introduce la función hipergeométrica, explorando algunas de sus propiedades. En el tercer capítulo se aplica la teoría desarrollada para calcular sumas binomiales y series especiales.

Palabras clave

Función Gamma. Fórmula de reflexión de Euler. Función Beta. Serie hipergeométrica. Sumas binomiales.

Abstrac

This advanced mathematics book addresses the study of selected topics in special functions. The document is structured into three chapters. The first is dedicated to the Gamma function, presenting the definitions provided by Euler, Gauss, and Weierstrass, and establishing their equivalencies. This first chapter also states and proves some of the most essential properties of the Gamma function, notably the recurrence relation, Euler's reflection formula, and Legendre's duplication formula. The second chapter introduces the hypergeometric function, exploring several of its properties. In the third chapter, the developed theory is applied to calculate binomial sums and special series.

Keywords

Gamma function. Euler's reflection formula. Beta function. Hypergeometric series. Binomial sums.

1. Introducción

En el vasto campo de las matemáticas, ciertos conceptos se destacan por su profundidad y aplicación en diversas áreas del conocimiento. Este libro se adentra en varios de estos temas, explorando desde las sumas binomiales y funciones hipergeométricas hasta la función Gamma, el Teorema de Weierstrass y la fórmula de reflexión de Euler. Cada una de estas concepciones no solo poseen una belleza intrínseca en su estructura matemática, sino que también desempeña un papel crucial en la comprensión y resolución de problemas tanto teóricos como prácticos.

Las sumas binomiales y las funciones hipergeométricas son conceptos fundamentales en el ámbito de las series y las ecuaciones diferenciales. Las sumas binomiales, surgen naturalmente en contextos donde se requiere la combinación de objetos o la evaluación de probabilidades. Estas series no solo tienen aplicaciones en combinatoria y teoría de probabilidades, sino que también encuentran utilidad en la teoría de números y la física matemática.

Por otro lado, las funciones hipergeométricas, generalizan las sumas binomiales a un contexto más amplio, son herramientas poderosas en el estudio de ecuaciones diferenciales y en la formulación de soluciones a problemas físicos y matemáticos avanzados. Su estructura permite la representación de soluciones en términos de series convergentes, proporcionando así una vía para la exploración de fenómenos complejos en diversas ramas de la ciencia.

En este libro, exploraremos con detalle cada uno de estos temas, destacando sus aplicaciones, propiedades fundamentales y conexiones interdisciplinarias. A través de ejemplos concretos, desarrollos históricos y aplicaciones contemporáneas, se ofrecerá al lector una perspectiva completa y profunda de estos conceptos matemáticos fundamentales.

Los temas que se abordan en el presente texto están en principio inspirados en el libro "Special Functions" de los autores George E. Andrews, Richard Askey y Ranjan Roy; en la sección 2.7 del mencionado libro los autores expresan la im-

portancia de las identidades hipergeométricas en la evaluación de ciertas sumas de productos de coeficientes binomiales. Siguiendo estas directrices, el presente trabajo tiene por objeto dar una aplicación de la teoría de las funciones hipergeométricas generalizadas al cálculo de la suma de series con coeficientes binomiales y otras series, cuyos términos generales pueden expresarse como el cociente de funciones racionales (series hipergeométricas).

El texto está distribuido de la siguiente manera: En el capítulo dos, de preliminares se presentan las funciones Gamma, Beta y el símbolo de Pochhammer, y se demuestran algunas de sus propiedades más importantes.

En el capítulo tres, se introducen las funciones hipergeométricas y se observa que una gran cantidad de funciones elementales que originadas en la Física y las Matemáticas tienen representaciones como series hipergeométricas. En este capítulo se introduce la representación integral de Euler, que permite derivar dos fórmulas de transformación de funciones hipergeométricas, la de Pfaff, y la de Euler; con estas últimas se demuestran algunas fórmulas de sumación y se establecen algunas identidades hipergeométricas como la de Clausen, entre otras.

En el capítulo cuatro, que constituye el cuerpo principal del trabajo, se evalúan ciertas series binomiales, usando para ello el método originalmente desarrollado por Euler y Gauss. Los ejemplos presentados fueron seleccionados de tal manera que resultaran interesantes a juicio de los autores. Con el fin de que los lectores de este texto tengan la oportunidad de practicar la metodología expuesta, se presentan, en la parte final de este capítulo algunos problemas propuestos.

2. Función Gamma. Propiedades

Figura 2.1: Leonhard Euler (1707-1783) Download scientific diagram from publication: Russian Science Prior to the Russian Revolution (2018)



Leonhard Euler, nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, en una familia de clase obrera. Su padre era un pastor luterano y su madre provenía de una familia de artistas. Fue el primer hijo de los cinco que tuvieron sus padres. Se casó con Katharina Gsell en 1734, con quien tuvo trece hijos. Sin embargo, solo cinco de estos sobrevivieron hasta la edad adulta, lo que fue una fuente de tristeza y dolor para Euler y su esposa.

Desde una edad temprana, mostró talento para las matemáticas y recibió educación inicial en casa. Más tarde, asistió a la Universidad de Basilea, donde es-

tudió filosofía y teología, pero fue influenciado significativamente por Christian Goldbach, Johann Bernoulli y su hijo Daniel Bernoulli. Estos maestros y mentores no solo enseñaron a Euler los fundamentos de las matemáticas, sino que también lo guiaron y lo inspiraron en sus investigaciones y contribuciones posteriores. La influencia de estos prominentes personajes del siglo XVIII se refleja en el enfoque sistemático y riguroso de Euler hacia los problemas científicos que abordó a lo largo de su vida.

Leonhard Euler, pasó la mayor parte de su carrera trabajando en San Petersburgo y Berlín, donde ocupó posiciones en academias científicas prominentes. En San Petersburgo, trabajó en la Academia de Ciencias de Rusia durante casi 25 años, mientras que en Berlín fue miembro de la Academia de Ciencias de Prusia durante otros 25 años. A lo largo de su carrera, tuvo varios estudiantes y discípulos que fueron influenciados por su trabajo y sus métodos matemáticos. Algunos de sus estudiantes más destacados o que estuvieron directamente influenciados por él incluyen: Joseph-Louis Lagrange, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, Simeon Denis Poisson este último que aunque no fue directamente su estudiante, estudió en la École Polytechnique, donde las enseñanzas de Euler y sus métodos influyeron en el currículo matemático de la época.

Estos matemáticos son ejemplos de aquellos que fueron influidos directa o indirectamente por las contribuciones y métodos de Euler. Además de enseñar directamente a estudiantes individuales, Euler también dejó un legado duradero a través de sus numerosos trabajos publicados, que continúan influyendo en el desarrollo de las matemáticas y otras disciplinas científicas hasta el día de hoy. Hizo contribuciones significativas a una variedad de campos matemáticos y científicos, incluyendo el análisis matemático, la teoría de grafos, la mecánica, la óptica, la astronomía, la teoría de números, entre otros. Era descrito como un hombre amable y humilde, que disfrutaba de la compañía de sus colegas y estudiantes. Además de su trabajo, tenía intereses en música y literatura, y fue un miembro activo de la sociedad académica de su tiempo. A lo largo de su vida, enfrentó varios problemas de salud, incluyendo la pérdida de la visión en un ojo debido a una enfermedad ocular y problemas de cataratas en su otro ojo en sus últimos años. A pesar de estas dificultades, continuó trabajando incansablemente en sus investigaciones matemáticas y científicas. Falleció el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia.

Leonhard Euler no solo dejó un legado impresionante en términos de descubrimientos matemáticos, sino que también fue un maestro en la claridad y la elegancia en la formulación de problemas y soluciones. Un ejemplo de dedicación y perseve-

rancia en su vida personal y profesional (ver [1], [2]).

2.1. Nociones generales

Una de las mas simples e importantes funciones especiales es la función Gamma, cuya teoría es un prerequisite para el estudio de muchas otras funciones especiales, entre ellas las funciones de Bessel, los polinomios de Hermite, los polinomios de Laguerre.

En las primeras décadas del siglo XVIII, Euler, estudió el problema de hallar una función continua de la variable x que fuera igual a $n!$ cuando $x = n$, $n \in \mathbb{N}$, con el fin de obtener la generalización del factorial encontrada por Euler, supongamos que $x, n \in \mathbb{N}$ y usemos la notación

$$(x)_n := x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1), \quad n > 0, \\ (x)_0 := 1.$$

Partiendo de la definición del factorial de un número natural,

$$x! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}, \\ x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n} = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n} = \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \frac{(n+1)_x}{n^x},$$

teniendo en cuenta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+x)}{n \cdots n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \cdots (1 + \frac{x}{n})}{1} = 1,$$

de esta manera se logra expresar el factorial como un límite usando el símbolo de Pochhammer.

$$x! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}.$$

2.2. La función Gamma

La discusión presentada en la sección anterior, es una motivación que conlleva al siguiente concepto.

Definición 2.2.1

Para todo $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$, la función Gamma está definida por

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n}.$$

Ejemplo 2.2.1

Hallar $\Gamma(3)$

Por definición

$$\Gamma(3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^2}{(3)_n},$$

usemos la definición del símbolo de Pochhammer para expresar $(3)_n$, es decir,

$$\begin{aligned} (3)_n &= 3 \cdot (3+1) \cdot (3+2) \cdots (3+n-1) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2) \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \Gamma(3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n! \cdot n^2}{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{n}{n+2} \right) = 2 \\ \Gamma(3) &= 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.2

Encontrar una expresión en términos de factoriales de la expresión:

$$\left(\frac{1}{2} \right)_n.$$

Por definición,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \right)_n &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{(2n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$

así,

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!}.$$

El próximo resultado, expresa una de las propiedades más importantes de la función Gamma, en el se demuestra que esta función resuelve el problema de interpolación que fue el origen de su invención.

Teorema 2.2.1

Relación funcional de la función Gamma.

Para $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$, se tiene

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (2.1)$$

Demostración 2.2.1

Para cada $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n}, \quad \Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)_n},$$

de donde,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x (x)_n}{(x+1)_n n! n^{x-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx(x+1) \cdots (x+n-1)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{x}{n} + 1} = x. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 2.2.1

Para cada entero no negativo n se tiene

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Demostración 2.2.2

Nuevamente, haciendo uso de la definición **1.2.1** con $x = 1$, se obtiene

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(1)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n} = 1,$$

de donde haciendo la demostración por inducción se tiene

$$\begin{aligned} m = 0, \quad & \Gamma(m+1) = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!, \\ m = 1, \quad & \Gamma(1+1) = (1)\Gamma(1) = 1 \times 1 = 1 = 1!, \\ m = 2, \quad & \Gamma(2+1) = (2)\Gamma(2) = 2 \times 1 = 2 = 2!, \\ m = 3, \quad & \Gamma(3+1) = (3)\Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!, \\ m = 4, \quad & \Gamma(4+1) = (4)\Gamma(4) = 4 \times 3! = 4!, \\ & \vdots \\ m = n, \quad & \Gamma(n+1) = (n)\Gamma(n) = n \times (n-1)! = n!, \\ m = n+1, \quad & \Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1) \times n! = (n+1)!. \quad \square \end{aligned}$$

2.3. Representación de la función Gamma como un producto

De la definición (1.2.1) se desprende que la función Gamma tiene polos en cero y en cada uno de los enteros negativos, luego $\frac{1}{\Gamma(x)}$ es una función entera con ceros en estos puntos. Es conocido que cada función entera tiene una representación como un producto. A continuación se presenta una constante importante en matemáticas, que aparece en el resultado principal de esta sección.

2.3.1. La constante de Euler-Mascheroni

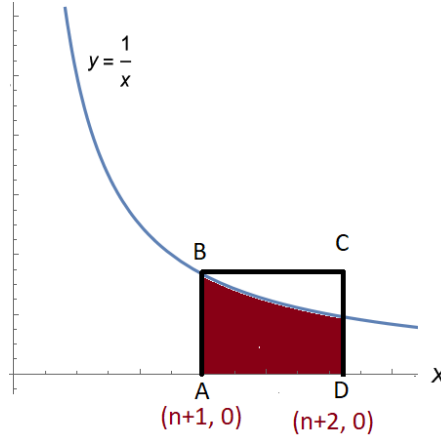
En sus investigaciones sobre la relación de la serie armónica y el logaritmo natural, Leonard Euler alrededor del año 1734, estableció que si $\{a_n\}$ es la sucesión cuyo término general a_n , viene dado por

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1),$$

entonces $\{a_n\}$ es convergente, a éste límite lo llamó γ , (en realidad utilizó la letra C , para denotar este límite); es decir,

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1) \right],$$

Figura 2.2: Comparación de áreas función $1/x$, figura elaborada por los autores (2026)



En 1790, Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 decimales y la denotaría como A . Ya más tarde se denotaría de la forma moderna como γ , debido a su conexión con la función Gamma, el valor encontrado por Mascheroni fue $\gamma = 0,577215664901532860606\dots$; por lo anterior, es usual encontrar en algunos textos dedicados a este tema, γ se conoce como la constante de Euler-Mascheroni (ver [3]).

Veamos que efectivamente la sucesión $\{a_n\}$ es convergente

I. $\{a_n\}$ es una sucesión creciente

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+2) + \log(n+1), \quad (2.2)$$

teniendo en cuenta que la función $y = \frac{1}{x}$ es decreciente para $x > 0$, el área debajo de esta curva limitada por las rectas $y = 0$ $x = n+1$, $x = n+2$ es menor que el rectángulo $ABCD$ (ver Figura [2.2]).

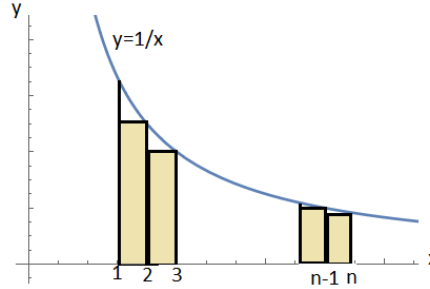
$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} &< 1f(n+1) = \frac{1}{n+1} \\ \log x \Big|_{n+1}^{n+2} &< \frac{1}{n+1} \\ \log(n+2) - \log(n+1) &< \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

es decir, $\frac{1}{n+1} - \log(n+2) + \log(n+1) > 0$, luego de (2.2) se puede concluir que $a_{n+1} - a_n > 0$; por lo tanto $\{a_n\}$ es creciente.

II. $\{a_n\}$ es una sucesión acotada superiormente, en efecto:

$$a_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \log(n+1) \quad (2.3)$$

Figura 2.3: Comparación de áreas función $y = \frac{1}{x}$, figura elaborada por los autores (2026).



El área de los rectángulos inscritos (ver Figura [2.3]) es menor que el área debajo de la curva $y = \frac{1}{x}$, y sobre el eje x entre $x = 1$ y $x = n$, esto es

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

como la función $f(x) = \log x$ es creciente para $x > 0$, se tiene $\log n < \log(n+1)$ así,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1) < 0$$

por lo tanto, teniendo en cuenta (2.3) $a_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ de I y II se concluye que $\{a_n\}$ es convergente.

Nota 2.3.1

En algunos libros se encuentra la definición de la constante de Euler como

$$\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right),$$

sin embargo, esta definición y la dada en el texto son iguales, pues

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n + \log n - \log(n+1) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n - \log(n+1)) \\
 &= \gamma_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n}{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

usando la continuidad de la función logaritmo, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n}{n+1} \right) = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \log 1 = 0,$$

así $\gamma = \gamma_1$.

La representación de $\frac{1}{\Gamma(x)}$ como un producto infinito, viene expresada en el siguiente teorema.

2.3.2. Teorema de Weierstrass

El Teorema de Weierstrass es una joya de la teoría de funciones complejas, estableciendo que toda función analítica puede aproximarse arbitrariamente bien por polinomios. Esta noción fundamental no solo revoluciona nuestra comprensión de las funciones en el plano complejo, sino que también tiene aplicaciones significativas en el análisis numérico y la teoría de aproximación.

Teorema 2.3.1

Para cada $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$, se cumple

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right\},$$

donde γ es la constante de Euler, dada por,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

Demostración 2.3.1

Aplicando la definición (1.2.1) y haciendo las operaciones correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x)_n}{n! n^{x-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)(1 + \frac{x}{n})}{(n-1)! n^x (1 + \frac{x}{n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x \log n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} x e^{x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)} \prod_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\} \\
&= x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\}.
\end{aligned}$$

En la expresión anterior, la última igualdad se justifica por el teorema de la convergencia dominada, teniendo en cuenta que la función exponencial crece más rápido que la función polinomial, cuando la variable independiente tiende al infinito. Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Definición 2.3.1

La función Digamma se define como la derivada logarítmica de la función Gamma, usualmente es denotada con Ψ , así

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (2.4)$$

El siguiente ejemplo ilustra una propiedad importante de la función Digamma

Ejemplo 2.3.1

(Ecuación funcional) Consideramos la recurrencia de la función Gamma:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

Tomando logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad anterior

$$\log \Gamma(z+1) = \log z + \log \Gamma(z),$$

diferenciando con respecto a z :

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z+1) = \frac{1}{z} + \frac{d}{dz} \log \Gamma(z).$$

teniendo en cuenta la definición dada en (2.4) se obtiene

$$\Psi(z+1) = \frac{1}{z} + \Psi(z).$$

En el siguiente ejemplo se muestra una representación de la función Digamma por medio de una serie.

Ejemplo 2.3.2

Considerando la representación de la función Gamma como un producto

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{\infty} e^{x/k} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1}, \quad (2.5)$$

tomando el logaritmo natural:

$$\log \Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k} - \log \left(1 + \frac{x}{k}\right),$$

diferenciando ambos miembros de la igualdad anterior,

$$\frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) - \gamma.$$

De la definición de (2.4) y la ecuación funcional dada en el ejemplo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(x) + \frac{1}{x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) - \gamma, \\ \Psi(x+1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) - \gamma. \end{aligned}$$

Esta igualdad se obtiene teniendo en cuenta el ejemplo anterior.

El resultado obtenido en el ejemplo 2.3.2, nos permite evaluar ciertas integrales impropias interesantes como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.3

Mostrar que si $s > 0$, entonces

$$I(s) = \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \frac{1}{2} \left[\Psi \left(\frac{1+s}{2} \right) - \Psi \left(\frac{s}{2} \right) \right].$$

En efecto, usando la serie geométrica:

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{s+n-2} dx,$$

el teorema de la convergencia dominada nos permite el intercambio de la integral con la sumatoria, así:

$$I(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 x^{s+n-2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+s-1}.$$

Al reordenar la serie anterior, considerando en un grupo los términos correspondientes a n par y en el otro para los subíndices n impar, se obtiene:

$$\begin{aligned} I(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+s-2} - \frac{1}{2n+s-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+s-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+s-2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{s-1}{2}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{s-2}{2}} \right) \right], \end{aligned}$$

utilizando el resultado del ejemplo anterior, para la primera sumatoria con $x = \frac{s-1}{2}$, y para la segunda con $x = \frac{s-2}{2}$, se obtiene finalmente que:

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \frac{1}{2} \left[\Psi \left(\frac{s+1}{2} \right) - \Psi \left(\frac{s}{2} \right) \right].$$

2.4. Fórmula del seno como un producto

En un trabajo de 1740, Euler tomó el polinomio

$$f(x) = 1 - a_1x + \cdots + (-1)^n a_n x^n, \quad \text{con } a_n \neq 0,$$

y considerando las relaciones que existen entre los coeficientes y las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de un polinomio, relaciones conocidas desde Newton, escribió:

$$1 - a_1x + \cdots + (-1)^n a_n x^n = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right). \quad (2.6)$$

A continuación considera el desarrollo en serie de potencias de la función Seno

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \cdots \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (2.7)$$

y si $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, son las soluciones de las ecuaciones (2.7), y suponiendo que el resultado dado en (2.6), se podía extender al caso infinito, (no considera cuestiones de convergencia) expresó:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) \cdots,$$

y como los ceros de la función $\frac{\sin x}{x}$ son $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$, entonces

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k\pi}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

si en la igualdad anterior se reemplaza x por πx se obtiene:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Como se puede observar, algunos de los pasos en el desarrollo anterior, requieren de una debida justificación matemática. Pese a que Euler, era consciente de la necesidad de ser cuidadoso al tratar con procesos infinitos, en algunos casos sacrificó este rigor en pro de obtener resultados prácticos. Cabe anotar que esto último le llevo a cometer algunos errores y obtener resultados falsos, como por ejemplo al sustituir x por 2 en la serie geométrica,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

y obtener:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots.$$

Con el fin de obtener una expresión que relacione la función Gamma con la función seno; recordemos la fórmula desarrollada por Euler en 1748 y que expresa la función seno como un producto infinito.

Teorema 2.4.1

Teorema (Euler, 1748) Para todo $x \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\text{sen}(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Demostración 2.4.1

Para cada número real x y cada número natural n , definimos:

$$I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(xt) \cos^n t \, dt. \quad (2.8)$$

Una primera aplicación del método de integración por partes, con

$$u = \cos^n t, \quad dv = \cos(xt) \, dt,$$

permite escribir $I_n(x)$ en la forma

$$I_n(x) = \frac{n}{x} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \sin t \sin(xt) \, dt,$$

una nueva aplicación de la integración por partes, esta vez con

$$u = \cos^{n-1} t \sin t, \quad dv = \sin(xt) \, dt,$$

conduce, a la siguiente fórmula de recurrencia:

$$n(n-1)I_{n-2}(x) = (n^2 - x^2)I_n(x).$$

Si definimos

$$F_n(x) = \frac{I_n(x)}{I_n(0)},$$

y teniendo en cuenta que $I_n(0) > 0$, la recurrencia anterior se puede escribir como

$$F_{n-2}(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) F_n(x), \quad n \geq 2$$

En la igualdad anterior, al variar los valores de n desde $n = 2$, hasta $n = N$, y multiplicando miembro a miembro las $N - 2$ ecuaciones así obtenidas se tiene

$$F_0(x)F_1(x) = \prod_{k=2}^N \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) F_{N-1}(x)F_N(x) \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta la definición de $I_n(x)$ dada en (2.8)

$$I_0(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(xt) \, dt = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x}; \quad I_0(0) = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_0^{\pi/2} \cos(xt) \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(x+1)t + \cos(x-1)t \, dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(x+1)\frac{\pi}{2}}{x+1} + \frac{\sin(x-1)\frac{\pi}{2}}{x-1} \right] = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^2}
\end{aligned}$$

$$I_1(0) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 1.$$

Como $F_n(x) = \frac{I_n(x)}{I_n(0)}$, se tiene que:

$$F_0(x) = \frac{I_0(x)}{I_0(0)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi x}; \quad F_1(x) = \frac{I_1(x)}{I_1(0)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^2},$$

reemplazando las expresiones anteriores de $F_0(x)$ y $F_1(x)$ en la ecuación (2.9) se tiene

$$\frac{2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi x(1-x^2)} = \prod_{k=2}^N \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) F_{N-1}(x) F_N(x),$$

recordando la fórmula trigonométrica $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, la igualdad anterior se puede escribir como:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) F_{N-1}(x) F_N(x),$$

veamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = 1$$

en efecto

$$\begin{aligned}
|I_n(0) - I_n(x)| &= \left| \int_0^{\pi/2} (1 - \cos xt) \cos^n t \, dt \right| \leq \frac{1}{2} x^2 \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^n t \, dt \\
&\leq \frac{1}{2} x^2 \int_0^{\pi/2} t \cos^{n-1} t \sin t \, dt = \frac{1}{n} I_n(0),
\end{aligned}$$

Es de notar que se han usado las desigualdades $1 - \cos z \leq \frac{z^2}{2}$, y $z \leq \tan z$. De esta manera,

$$\left| \frac{I_n(x)}{I_n(0)} - 1 \right| \leq 1,$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = 1,$$

teniendo en cuenta este último límite en (2.9), finalmente se obtiene:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Ejemplo 2.4.1

Si en la fórmula del teorema anterior, se hace $x = \frac{1}{2}$, se tiene

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2 - 1}{4n^2}\right),$$

se puede escribir como

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$$

que corresponde a la expresión para el número π , dada por Wallis.

Ejemplo 2.4.2

(Problema de Basilea) El problema de Basilea, cuyo nombre se debe a la ciudad de Basilea, Suiza, lugar de nacimiento de L. Euler (1707-1783), consiste en determinar el valor exacto de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots.$$

Este problema fue planteado en 1644 por P. Mengoli. Varios matemáticos; entre ellos Wallis, Leibniz, Jacob Bernoulli, intentaron sin éxito encontrar la solución. En 1736 el problema fue resuelto por Euler. Aquí se presenta la primera solución de este problema, dada por Euler, haciendo uso de la fórmula que representa a la función seno como producto infinito, En la demostración del teorema 2.4.1 se estableció que:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

utilizando el desarrollo en serie de Taylor del $\sin x$, en el lado izquierdo de la igualdad anterior y expandiendo en el producto del lado derecho se tiene:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots \right) x^2 + \cdots$$

al igualar los coeficientes de x^2 se obtiene:

$$-\frac{1}{3!} = - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots \right),$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejemplo 2.4.3

Haciendo uso de la representación del seno como un producto, dada en el teorema 2.4.1 :

$$\frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi y)} = \frac{x}{y} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - x^2}{n^2 - y^2} \right) = \frac{x}{y} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n-x)(n+x)}{(n-y)(n+y)} \right),$$

si en la identidad anterior se toma $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{6}$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/6)} = \sqrt{2} &= \frac{6}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{4})(n + \frac{1}{4})}{(n - \frac{1}{6})(n + \frac{1}{6})}, \\ \sqrt{2} &= \frac{3}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-1)(4n+1)}{(6n-1)(6n+1)} \frac{6}{4} \end{aligned}$$

luego

$$\sqrt{2} = \frac{3}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(12n-3)(12n+3)}{(12n-2)(12n+2)} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 27 \cdot 33 \cdot 39 \cdot 45 \cdots}{2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 22 \cdot 26 \cdot 34 \cdot 38 \cdot 46 \cdots},$$

se puede observar que el producto infinito del lado derecho de la igualdad anterior se escribe de la forma:

$$\prod_{n=0}^{\infty} = \frac{a_n \cdot b_n}{c_n \cdot d_n},$$

en donde

$$\begin{aligned}\{a_n\} &= \{3, 15, 27, 39, \dots\}; & \{b_n\} &= \{9, 21, 33, 45, \dots\} \\ \{c_n\} &= \{2, 14, 26, 38, \dots\}; & \{d_n\} &= \{10, 22, 34, 46, \dots\},\end{aligned}$$

que corresponden a progresiones aritméticas, el término general de cada una de estas sucesiones es de la forma $a + nd$, en donde a es el primer término y d la diferencia, que en el caso de cada sucesión es de $d = 12$; así,

$$a_n = 3 + 12n; \quad b_n = 9 + 12n \quad c_n = 2 + 12n \quad d_n = 10 + 12n,$$

de esta manera:

$$\sqrt{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(12n+3)(12n+9)}{(12n+2)(12n+10)}.$$

Esta representación de $\sqrt{2}$, como un producto infinito fue obtenida por el matemático Belga-Francés Eugene Catalan en 1873.

2.5. Fórmula de reflexión de Euler

La fórmula de reflexión de Euler, ofrece una relación profunda entre las funciones trigonométricas y la función Gamma, conectando así dos áreas aparentemente diferentes de las matemáticas. Esta fórmula no solo destaca la elegancia y la interconexión de conceptos matemáticos aparentemente dispares, sino que también encuentra aplicaciones en el análisis de integrales y la teoría de números complejos.

El siguiente resultado, conocido como la fórmula de reflexión de Euler, relaciona la función Gamma con la función seno.

Teorema 2.5.1

Para todo $x \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\operatorname{sen} \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}, \quad (2.10)$$

donde el lado derecho de (2.10) es 0 si x o $1-x$ es un entero negativo.

Demostración 2.5.1

Si x no es un entero negativo, se sigue de la Relación funcional de Euler dada en (2.1) y del Teorema de Weierstrass que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= \frac{1}{\Gamma(x)(-x)\Gamma(-x)} = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{1}{\Gamma(-x)} \frac{1}{(-x)} \\ &= \left\{ x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} \right\} \left\{ -x e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \right\} \right\} \left\{ \frac{1}{-x} \right\} \\ \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi}, \quad \square \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde la última igualdad de (2.11) se sigue del teorema 1.2.4.

Ejemplo 2.5.1

En particular, tomando $x = \frac{1}{2}$, en el resultado del teorema 2.5.1, se obtiene

$$\text{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

así

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \pi,$$

como $\Gamma(x) > 0$ para $x > 0$, luego

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ejemplo 2.5.2

Escribiendo la fórmula de reflexión de Euler en la forma

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

derivando, con respecto a la variable x , ambos lados de la igualdad anterior

$$\Gamma'(x)\Gamma(1-x) - \Gamma(x)\Gamma'(1-x) = -\frac{\pi^2 \cos(\pi x)}{(\sin(\pi x))^2},$$

de donde,

$$\frac{\Gamma'(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} - \frac{\Gamma(x)\Gamma'(1-x)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = -\frac{\pi^2 \cos(\pi x)}{(\sin(\pi x))^2} \frac{\sin(\pi x)}{\pi},$$

así

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = -\frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)},$$

usando la definición de la función Digamma dada en el ejemplo 2.3.2, la igualdad anterior se puede escribir:

$$\Psi(x) - \Psi(1-x) = -\frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)},$$

derivando una vez mas con respecto a x se obtiene:

$$\Psi'(x) + \Psi'(1-x) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad (2.12)$$

Ejemplo 2.5.3

Si α, β son números reales tales que $0 < \alpha + 1 < \beta$, evaluar la integral

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \log x}{1+x^\beta} dx.$$

Teniendo en cuenta la linealidad de la integral con respecto al intervalo de integración;

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{1+x^\beta} dx + \int_1^\infty \frac{y^\alpha \log y}{1+y^\beta} dy,$$

si en la segunda integral del lado derecho de la igualdad anterior, hacemos el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$, con la cual $dy = -\frac{1}{x^2} dx$, y cuando $x = 1$ $y = 1$; $x = 0$ si $y = \pm\infty$, entonces $I(\alpha, \beta)$ se puede escribir:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{1+x^\beta} dx - \int_0^1 \frac{x^{\beta-\alpha-2} \log x}{1+x^\beta} dx, \quad (2.13)$$

al considerar

$$f(t) = \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^\beta} dx,$$

derivando bajo el signo integral se tiene:

$$f'(t) = \int_0^1 \frac{x^t \log x}{1+x^\beta} dx,$$

teniendo en cuenta la expresión anterior para $f'(t)$ y la relación dada en 2.13 de observa que:

$$I(\alpha, \beta) = f'(\alpha) - f'(\beta - \alpha - 2). \quad (2.14)$$

Mediante la sustitución $z = x^\beta$ en la integral que define a f , se obtiene:

$$f(t) = \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^\beta} dx = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{z^{\frac{t+1}{\beta}-1}}{1+z} dz,$$

teniendo en cuenta la fórmula integral desarrollada en el ejemplo 2.5, con $s = \frac{t+1}{\beta}$,

$$f(t) = \frac{1}{2\beta} \left[\Psi \left(\frac{t+\beta+1}{2\beta} \right) - \Psi \left(\frac{t+1}{2\beta} \right) \right]$$

derivando con respecto a t , la igualdad anterior

$$f'(t) = \frac{1}{4\beta^2} \left[\Psi' \left(\frac{t+\beta+1}{2\beta} \right) - \Psi' \left(\frac{t+1}{2\beta} \right) \right],$$

ahora, si en la igualdad anterior reemplazamos primero t por α , y luego t por $\beta - \alpha - 2$, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{1}{4\beta^2} \left[\Psi' \left(\frac{\alpha+\beta+1}{2\beta} \right) - \Psi' \left(\frac{\alpha+1}{2\beta} \right) \right] \\ f'(\beta - \alpha - 2) &= \frac{1}{4\beta^2} \left[\Psi' \left(\frac{2\beta - \alpha - 1}{2\beta} \right) - \Psi' \left(\frac{\beta - \alpha - 1}{2\beta} \right) \right], \end{aligned}$$

al sustituir estas dos expresiones en 2.14

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\beta^2} \left[\Psi' \left(\frac{\beta - \alpha - 1}{2\beta} \right) + \Psi' \left(\frac{\alpha + \beta + 1}{2\beta} \right) \right] - \left[\Psi' \left(\frac{\alpha + 1}{2\beta} \right) + \Psi' \left(\frac{2\beta - \alpha - 1}{2\beta} \right) \right],$$

finalmente, aplicando la fórmula del ejemplo 2.12:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{1+x^\beta} dx = \frac{\pi^2}{4\beta^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \pi \left(\frac{\beta - \alpha - 1}{2\beta} \right)} - \frac{1}{\sin^2 \pi \left(\frac{\alpha + 1}{2\beta} \right)} \right].$$

Nota 2.5.1

Para $\alpha = 1, \beta = 3$, $\frac{\beta - \alpha - 1}{2\beta} = \frac{3-1-1}{2(3)} = \frac{1}{6}$, $\frac{\alpha+1}{2\beta} = \frac{1+1}{2(3)} = \frac{1}{3}$, así:

$$\int_0^1 \frac{x \log x}{1+x^3} dx = \frac{\pi^2}{4(3)^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} \right] = \frac{\pi^2}{36} \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{2\pi^2}{27}.$$

Este caso, corresponde al problema 489, propuesto en el volumen 27, número 2 (2024) de la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, en la cual tendrán en cuenta las soluciones recibidas antes del 28 de febrero de 2025. [20]

Se verán a continuación algunas propiedades que se desprenden del teorema reflexión de Euler 2.5.1, que serán muy útiles a la hora de sumar series infinitas.

Corolario 2.5.1

■

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$$

■

$$\Gamma(x) \Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x \sin(\pi x)}$$

■

$$\Gamma(1+x) \Gamma(-x) = \frac{-\pi}{\sin(\pi x)}$$

■

$$\Gamma(1+x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$$

A continuación se presenta la definición original dada por Euler de la función Gamma como una integral.

Teorema 2.5.2

Sea $z \in \mathbb{C}$, con $\Re(z) > 0$, entonces

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.15)$$

Nota 2.5.2

Esta expresión para $\Gamma(z)$ como es la integral, se debe a A. M. Legendre.

Demostración 2.5.2

Para x un número real positivo y n un número natural, consideramos la integral I_n , definida por:

$$I_n = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

Una aplicación del método de integración por partes, donde

$$u = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n; \quad dv = t^{x-1} dt$$

con lo cual,

$$du = -\frac{n}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \quad v = \frac{t^x}{x},$$

se obtiene:

$$I_n = \frac{n}{x} \frac{1}{n} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x dx,$$

utilizando nuevamente integración por partes, esta vez con

$$u = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}; \quad dv = t^x dx; \quad du = -\frac{(n-1)}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt; \quad v = \frac{t^{x+1}}{x+1},$$

la integral I_n , se escribe como:

$$I_n = \frac{(n-1)n}{n^2 x(x+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1} dt,$$

continuyendo de esta manera, se llega a

$$I_n = \frac{n!}{n^n x(x+1) \cdots (x+n-1)} \int_0^n t^{x+n-1} dt,$$

es decir,

$$I_n = \frac{n!}{n^n (x)_n} \frac{n^x n^n}{x+n} = \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} \frac{n}{x+n} \quad (2.16)$$

recordando que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t},$$

para cada $t \in (0, \infty)$, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, al tomar el límite en 2.16 se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x+n},$$

teniendo en cuenta la definición de la función Gamma dada en (2.1), se tiene finalmente que:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x). \quad (2.17)$$

el resultado para $z \in \mathbb{C}$, con $\Re z > 0$, se obtiene de 2.17 por prolongación analítica.

Nota 2.5.3

La integral que expresa la función Gamma en el teorema 2.5.2 con frecuencia se llama integral de Euler de segunda clase. La integral de Euler de primera clase, es la siguiente integral por medio de la cual se define la función Beta.

Definición 2.5.1

La llamada función Beta de Euler, es la integral,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx. \quad (2.18)$$

con $\Re(m) \geq 0$ y $\Re(n) \geq 0$.

La integral de (2.18) es simétrica en n y m como puede deducirse si se hace el cambio de variable $x = 1 - y$.

La función Beta está relacionada con la función Gamma, relación que queda consignada en el siguiente resultado:

Teorema 2.5.3

Sea $m, n \in \mathbb{C}$ con $\Re(m) \geq 0$, $\Re(n) \geq 0$ entonces,

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

Demostración 2.5.3

Usando la expresión integral para la función Gamma definida en 2.5.2,

$$\Gamma(n) = \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \right).$$

De donde,

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{m-1} y^{n-1} dx dy. \end{aligned}$$

Al realizar el cambio de variable, $t = x + y$ y $s = x$, se tiene:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty \int_0^t e^{-t} s^{m-1} (t-s)^{n-1} ds dt = \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_0^t s^{m-1} (t-s)^{n-1} ds \right) dt. \quad (2.19)$$

Si en (2.19), hacemos la sustitución $s = tu$, para la integral que se realiza sobre s , se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^t s^{m-1} (t-s)^{n-1} ds &= \int_0^1 (tu)^{m-1} (t-tu)^{n-1} t du \\ &= \int_0^1 (tu)^{m-1} t^{n-1} (1-u)^{n-1} t du \\ &= \int_0^1 t^{m-1} u^{m-1} t^{n-1} (1-u)^{n-1} t du \\ &= \int_0^1 t^{m+n-1} u^{m-1} (1-u)^{n-1} du \\ &= t^{m+n-1} \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du \\ &= t^{m+n-1} B(m, n). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Al sustituir (2.20) en (2.19) se obtiene:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{m+n-1} B(m, n) dt = B(m, n) \int_0^\infty e^{-t} t^{m+n-1} dt,$$

pero,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \text{de donde} \quad \Gamma(m+n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{m+n-1} dt.$$

Así

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = B(m, n)\Gamma(m+n)$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m, n) \quad \square$$

Ejemplo 2.5.4

Encontrar el valor de la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Teniendo en cuenta el resultado del Corolario 1.2.1, seguido de la relación entre la función Beta y la función Gamma dada en el Teorema 1.5.3, se obtiene:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \cdot 2^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \cdot B(n+1, n+1)$$

por la definición de la función Beta establecida en (1.5):

$$B(n+1, n+1) = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx,$$

de esta manera,

$$S = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 [2x(1-x)]^n dx = 2 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} [2x(1-x)]^n dx$$

Se nota que la serie que figura en el integrando de la igualdad anterior corresponde a una serie geométrica, así;

$$S = 2 \int_0^1 \frac{1}{1 - 2x(1-x)} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} dx = \pi$$

La función Beta junto con sus propiedades resulta muy útil en la evaluación de ciertas integrales, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.5.5

Forma Trigonométrica de la función Beta

Si en la integral que define a la función Beta

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

hacemos la sustitución $t = \sin^2 \theta$, con $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ se tiene

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-2} (\cos \theta)^{2y-2} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta$$

Ejemplo 2.5.6

(Integral de Dirichlet) Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n} d\theta, \quad \text{para, } n \in \mathbb{N}.$$

Haciendo la identificación $2x - 1 = 2n$, $2y - 1 = 0$, en la expresión para $B(x, y)$, dado en el ejemplo anterior, tenemos:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2n} d\theta = \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

utilizando la relación entre las funciones Beta y Gamma:

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)}$$

teniendo en cuenta que:

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})},$$

I_n se escribe como:

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)_n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n!},$$

sabemos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, y utilizando el resultado del ejemplo 1.2.2, se tiene finalmente que:

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{\pi (2n)!}{n! 2^{2n} n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \cdot \pi.$$

Ejemplo 2.5.7

Mostrar que es válida la siguiente representación integral para la función Beta:

$$B(x, y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1} + s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}} ds$$

De acuerdo a la definición de la función Beta:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

si se efectúa la sustitución;

$$t = \frac{s}{s+1} \leftrightarrow s = \frac{t}{1-t},$$

cuando $t = 0$, $s = 0$; y si $t = 1$, $s = \infty$, así

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds = \int_0^1 \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds + \int_1^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds$$

si en la segunda integral ($1 \leq s \leq \infty$), se hace el cambio de variable $u = \frac{1}{s}$;

$$\int_1^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds = \int_0^1 \frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} du,$$

por lo tanto,

$$B(x, y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds + \int_0^1 \frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} du,$$

y como las variables de integración son letras mudas:

$$B(x, y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1} + s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}} ds$$

Ejemplo 2.5.8

Mostrar que:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \quad 0 < p < 1.$$

Primero expresemos el cociente $\frac{\Gamma(p)}{x^p}$ por medio de una integral impropia; de acuerdo a la expresión para la función Gamma dada en la definición 2.5.2,

$$\frac{\Gamma(p)}{x^p} = \frac{1}{x^p} \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$$

mediante el cambio de variable $t = xu$, $x > 0$ fijo, la igualdad anterior se escribe:

$$\frac{\Gamma(p)}{x^p} = \int_0^\infty u^{p-1} e^{-xu} du,$$

multiplicando por $\text{sen}(x)$ e integrando con respecto a x :

$$\Gamma(p) \int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \int_0^\infty \text{sen}(x) \left[\int_0^\infty u^{p-1} e^{-xu} du \right] dx, \quad (2.21)$$

si en la integral doble, intercambiamos el orden de la integración y haciendo uso de la fórmula integral,

$$\int_0^\infty e^{-xu} \text{sen}(x) dx = \frac{1}{1+u^2},$$

la ecuación(2.21) se puede escribir,

$$\Gamma(p) \int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{1+u^2} du,$$

efectuando el cambio de variable $u^2 = s$. la igualdad anterior:

$$\Gamma(p) \int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{s^{p/2-1}}{1+s} ds, \quad (2.22)$$

si en la integral del lado derecho de (2.22) utilizamos la sustitución

$$s = \frac{t}{1-t} \leftrightarrow t = \frac{s}{1+s},$$

cuando $s = 0, t = 0; s = +\infty, t = 1$.

la igualdad (2.22) se puede escribir como:

$$\Gamma(p) \int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{p/2-1} (1-t)^{-p/2} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, 1 - \frac{p}{2}\right),$$

usando el teorema 2.5.3:

$$\Gamma(p) \int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right),$$

finalmente teniendo en cuenta la fórmula de reflexión de Euler,

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\text{sen}\left(\frac{p\pi}{2}\right)}.$$

Ejemplo 2.5.9

Si p es un número real positivo, evaluar la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\cosh t)^{2p}}.$$

Recordando la definición del coseno hiperbólico

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

la integral I se puede escribir como:

$$I = 2^{2p} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2pt}}{(1 + e^{-2t})^{2p}} dt,$$

mediante la sustitución $e^{-2t} = s$, $t = 0$, $s = 1$, $t = \infty$, $s = 0$; se tiene que:

$$I = 2^{2p-1} \int_0^1 \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{2p}} ds = 2^{2p-2} \int_0^1 \frac{s^{p-1} + s^{p-1}}{(1+s)^{2p}} dp,$$

tomando $x = y = p$ en el ejemplo 2.5.7, resulta:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\cosh t)^{2p}} = 2^{2p-2} B(p, p).$$

En particular si $p = \frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(\cosh t)} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2.6. Fórmula de duplicación de Legendre

Como una aplicación de la relación funcional de Beta con Gamma expresada en el teorema 2.5.3, se puede establecer el siguiente resultado

Teorema 2.6.1

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (2.23)$$

Demostración 2.6.1

En efecto, en la fórmula:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Tomando $w = z$, se tiene:

$$\frac{(\Gamma(z))^2}{\Gamma(2z)} = B(z, z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt \quad (2.24)$$

se puede observar que en integrando en (2.24) es una función simétrica con respecto a $t = \frac{1}{2}$ así:

$$\int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt = 2 \int_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1} dt, \quad (2.25)$$

mediante la sustitución $t = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{s}) \longleftrightarrow s = \sqrt{1-2t}$, cuando $t = 0$, $s = 1$; $t = \frac{1}{2}$, $s = 0$; de esta manera la integral se escribe en términos de la variable s ,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1} dt &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{z-1} ds = \frac{1}{2^{2z-1}} B\left(\frac{1}{2}, z\right) \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

de (2.24), (2.25), (2.26) se obtiene el resultado deseado.

Ejemplo 2.6.1

Si en la fórmula de duplicación de Legendre (2.24) $z = n$, n un número natural se obtiene:

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Recordando que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, multiplicando por $2n$, ambos miembros de la igualdad anterior:

$$2n\Gamma(2n) = \frac{2^{2n}n\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

por la fórmula de recurrencia de la función Gamma $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ se sigue que:

$$\Gamma(2n+1) = 2^{2n}\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n$$

y como $\Gamma(m+1) = m!$, si $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)} = \frac{(2n!)}{2^{2n}n!}$$

se obtiene el Pochhammer $\left(\frac{1}{2}\right)_n$ dado en el ejemplo 2.2.2.

2.7. Símbolo de Pochhammer y Propiedades

El siguiente concepto constituye una generalización del factorial de un número natural.

Definición 2.7.1

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, se define $(\alpha)_n$ mediante:

- $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$, $n \geq 1$,
- $(\alpha)_0 = 1$, si $\alpha \neq 0$.

La función $(\alpha)_n$ se llama símbolo de Pochhammer.
se observa

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = (1)_n.$$

En manipulaciones con $(\alpha)_n$, es importante tener presente que, por definición, $(\alpha)_n$ es un producto de n factores cuyo primer factor es α y cada factor es una unidad mayor que el factor precedente.

En el siguiente resultado, se establece la fórmula de duplicación para el símbolo de Pochhammer.

Teorema 2.7.1

Duplicación de Pochhammer Si $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$(\alpha)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{\alpha}{2} \right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)_n. \quad (2.27)$$

Demostración 2.7.1

Ciertamente (2.27) es válido para $\alpha = 0$, así supongamos que $\alpha \neq 0$, si $n = 0$ (2.27) se verifica trivialmente. Para $n = 1$,

$$(\alpha)_{2(1)} = (\alpha)_2 = \alpha(\alpha + 1) = \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) 2^2.$$

Supongamos que (2.27) es válido para n , y bajo esta hipótesis veamos también que se cumple para $n + 1$, en efecto,

$$\begin{aligned}
(\alpha)_{2(n+1)} &= (\alpha)_{(2n+2)} = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+2n+2-3)(\alpha+2n+2-2)(\alpha+2n+2-1) \\
&= \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+2n-1)(\alpha+2n)(\alpha+2n+1) \\
&= (\alpha)_{2n}(\alpha+2n)(\alpha+2n+1) \\
&= 2^{2n} \left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha}{2}+n\right) \left(\frac{\alpha+1}{2}+n\right) 2^2 \\
&= 2^{2(n+1)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha}{2}+n\right) \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2}+n\right) \\
&= 2^{2(n+1)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)_{n+1} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_{n+1} \quad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.7.1

Mostrar que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

De la fórmula de duplicación, dada en el teorema 2.7 con $\alpha = 1$, se obtiene

$$(1)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n (1)_n,$$

entonces:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(1)_{2n}}{2^{2n}(1)_n},$$

recordando que $(1)_m = m!$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

A continuación se utilizará el teorema 2.2.1, que establece la relación funcional de la función Gamma, para expresar el símbolo de Pochhammer $(\alpha)_n$ en términos de esta función.

Teorema 2.7.2**Relación Gamma- Pochhammer**

Si $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, \dots\}$, entonces

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2.28)$$

Demostración 2.7.2

Para $n = 0$:

$$(\alpha)_0 = 1 = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha + 0)}{\Gamma(\alpha)},$$

Para $n = 1$:

$$(\alpha)_1 = \alpha = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)},$$

Supongamos que (2.28) es válido para n , usando el método de demostración por inducción matemática veamos que también se cumple para $n + 1$, en efecto,

$$\begin{aligned} (\alpha)_{(n+1)} &= \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n + 1 - 2)(\alpha + n + 1 - 1) \\ &= \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)(\alpha + n) \\ &= (\alpha)_n(\alpha + n), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la hipótesis de inducción

$$(\alpha)_{(n)} = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)},$$

la expresión anterior se transforma en

$$(\alpha)_{(n+1)} = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}(\alpha + n),$$

utilizando la relación funcional dada en el teorema 2.2.1, finalmente se obtiene:

$$(\alpha)_{(n+1)} = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha)} \quad \square$$

Con ayuda del resultado de (2.27) y de la fórmula de reflexión de Euler (2.10) se establece fácilmente el siguiente teorema.

Teorema 2.7.3**Teorema Pochhammer** $n - k$

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$

$$(\alpha)_{n-k}(1 - \alpha - n)_k = (-1)^k (\alpha)_n. \quad (2.29)$$

Demostración 2.7.3

En efecto, por el teorema 2.7.2, el lado izquierdo de (2.29) es:

$$\begin{aligned} (\alpha)_{n-k}(1 - \alpha - n)_k &= \frac{\Gamma(\alpha + n - k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1 - \alpha - n + k)}{\Gamma(1 - \alpha - n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n - k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1 - (\alpha + n - k))}{\Gamma(1 - (\alpha + n))}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si en (2.30) hacemos $x = \alpha + n - k$, $y = \alpha + n$ se tiene:

$$\begin{aligned} (\alpha)_{n-k}(1 - \alpha - n)_k &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(1 - (x))}{\Gamma(1 - y)} \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)} \frac{\Gamma(1 - x)}{\Gamma(1 - y)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Recordando la fórmula de reflexión de Euler:

$$\operatorname{sen} \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1 - x)},$$

(2.31) se puede escribir como

$$(\alpha)_{n-k}(1 - \alpha - n)_k = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\operatorname{sen}(\pi y)}{\operatorname{sen}(\pi x)},$$

de donde,

$$\begin{aligned} (\alpha)_{n-k}(1 - \alpha - n)_k &= \frac{(\alpha)_n \operatorname{sen}(\pi(\alpha + n))}{\operatorname{sen}(\pi(\alpha + n - k))} \\ &= \frac{(\alpha)_n [\operatorname{sen}(\pi\alpha) \cos(n\pi) + \cos(\pi\alpha) \operatorname{sen}(n\pi)]}{\operatorname{sen}(\pi\alpha) \cos((n - k)\pi) + \cos(\pi\alpha) \operatorname{sen}((n - k)\pi)} \\ &= \frac{(\alpha)_n \operatorname{sen}(\pi\alpha) (-1)^n}{\operatorname{sen}(\pi\alpha) (-1)^{n-k}} = (\alpha)_n (-1)^k \quad \square \end{aligned}$$

Un caso simple, pero particularmente importante del teorema 2.7.3 se obtiene tomando $\alpha = 1$:

$$(-1)_{n-k}(-n)_k = (-1)^k (1)_n,$$

así se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.7.1

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}. \quad (2.32)$$

Teorema 2.7.4

$$\frac{(-m - \frac{1}{2})_m}{(\frac{1}{2})_m} = (-1)^m (2m+1), \quad (2.33)$$

Demostración 2.7.4

Recordando la expresión (2.28), dada en el teorema 2.7.2, el lado izquierdo de (2.33), se puede escribir como:

$$\frac{(-m - \frac{1}{2})_m}{(\frac{1}{2})_m} = \frac{\Gamma(-m - \frac{1}{2} + m) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-m - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + m)} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-(m + \frac{1}{2})) \Gamma(m + \frac{1}{2})}, \quad (2.34)$$

Ahora utilizando la relación funcional de Gamma dada en (2.1), y la fórmula de reflexión de Euler dada en (2.10),

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin(\pi x)},$$

el lado derecho de (2.34), se transforma en:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{\frac{1}{2} \sin\left(\pi \frac{1}{2}\right)} = -2\pi,$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\left(m + \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= -\frac{\pi}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \sin \pi \left(m + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{-\pi}{\left(m + \frac{1}{2}\right) ((-1)^m)} \end{aligned}$$

De donde sustituyendo las expresiones anteriores en (2.34), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{(-m - \frac{1}{2})_m}{(\frac{1}{2})_m} &= \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-(m + \frac{1}{2})) \Gamma(m + \frac{1}{2})} = \frac{-2\pi}{\frac{-\pi}{(m + \frac{1}{2})(-1)^m}} \\ &= \frac{-2\pi (m + \frac{1}{2}) (-1)^m}{-\pi} = (2m+1)(-1)^m \quad \square \end{aligned}$$

2.8. Ejercicios

1. Probar que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \quad 0 < p < 1$$

2. (Integrales de Fresnel) Demostrar que:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3. Si se definen las integrales I , y J mediante

$I = \int_0^1 (1-x^m)^n dx$, $J = \int_0^1 (1-x^m)^{n-1} dx$, con n, m reales positivos; demuestre que:

$$\frac{I}{J} = \frac{nm}{1+nm}.$$

4. Haciendo uso de la fórmula de duplicación de Lagendre, muestre que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{14}\right) \Gamma\left(\frac{9}{14}\right) \Gamma\left(\frac{11}{14}\right) = 4\pi\sqrt{\pi}.$$

5. Si $a > 0$ y $\operatorname{Re} s > 1$, demuestre que:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+a)^s}.$$

6. Establecer las siguientes propiedades del símbolo de Pochhammer, si $z \in \mathbb{C}$, k un número natural mayor o igual a cero.

(a) $(z)_{n+k} = (z)_n (z+n)_k$

(b) $(3z)_{3k} = 27^k (z)_k \left(z + \frac{1}{3}\right)_k \left(z + \frac{2}{3}\right)_k$.

7. Demostrar que para $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1-2z)} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}.$$

8. Para $n = 2, 3, 4, \dots$ considere las integrales I_n , J_n , definidas por:

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^{2n})^{1/n}}; \quad J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^{2n})^{1/n}},$$

demuestre que:

$$I_n = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot J_n.$$

(a) Evaluando las respectivas integrales.

(b) Por medio de una interpretación geométrica en términos de un círculo y polinomios inscritos.

9. El objetivo de este ejercicio es calcular el valor de la siguiente integral:

$$I = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\mu dv dw}{1 - \cos \mu \cos v \cos w}.$$

(a) Realizando la integral con respecto a la variable w , muestre que

$$I = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\mu dv}{\sqrt{1 - \cos^2 \mu \cos^2 v}}.$$

(b) Utilizando las sustituciones

$$\cos \mu = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \quad \cos v = \frac{1 - y^2}{1 + y^2},$$

muestre que I se puede escribir:

$$I = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 + x^2 y^2)}}.$$

(c) Mediante el cambio de variables a coordenadas polares, muestre que

$$I = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1 + r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}}.$$

(d) Observe que la sustitución $t^4 = r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ permite escribir I en la forma:

$$I = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}},$$

(e) Evalúe, usando la función beta, las dos integrales que aparecen en el inciso (d), para finalmente hallar que:

$$I = \frac{1}{4\pi^2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^4.$$

10. Utilizando la representación de la función Gamma como una integral, dada en el teorema 1.5.2, muestre que el valor de cada una de las siguientes integrales es el que se indica.

(a)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(b)

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2x^3} dx = \frac{1}{6} \Gamma(1) = \frac{1}{6}.$$

(c)

$$\int_0^1 x^p (\log x)^q dx = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}, \quad q \in \mathbb{N}, p > -1.$$

(d)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{2^x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\log 2)^{-3/2}.$$

(e)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\log t}} = \sqrt{\pi}.$$

3. Series Hipergeométricas

Figura 3.1: Carl Friedrich Gauss (1777, 1855). Tomado de <http://archiv.bbaw.de/archiv/archivbestaende/abteilung-sammlungen/gesamtbestand-des-kunstbesitzes/gelehrten-gemaelde/gelehrten-gemalde-seiten/ZIMM-0001.html> (2023)



Johann Carl Friedrich Gauss fue un matemático, astrónomo, físico y estadístico alemán que vivió entre 1777 y 1855. En 1805, se casó con Johanna Osthoff, con quien tuvo seis hijos y quien desafortunadamente falleció en 1809, dejándolo viudo a los 32 años. En 1810, contrajo matrimonio nuevamente, esta vez con Minna Waldeck. Tuvieron dos hijos más, sumando ocho en total entre ambos matrimonios. A pesar de sus contribuciones significativas al mundo académico y científico, fue conocido por ser reservado en lo personal. Su familia jugó un papel importante en su vida, brindándole apoyo y estabilidad emocional durante sus períodos de trabajo intenso y estrés académico.

Johann Carl Friedrich Gauss tuvo varios maestros y mentores a lo largo de su vida, quienes contribuyeron a su formación intelectual y académica. Algunos de los más destacados: Johann Martin Bartels, Johann Friedrich Pfaff, y Carl Wilhelm Borchardt que aunque no fue un maestro directo de Gauss, fue un matemático y editor alemán que más tarde se convirtió en un defensor y biógrafo de Gauss. Contribuyó significativamente a preservar y difundir el trabajo de Gauss después de su muerte. Estos maestros y mentores desempeñaron roles importantes en la vida y la carrera de Gauss, proporcionándole la orientación y el estímulo necesarios para desarrollar su prodigioso talento matemático y científico.

Realizó contribuciones significativas en varios campos del conocimiento. Hizo avances fundamentales en áreas como el análisis matemático, la teoría de números, la geometría diferencial, la estadística y la astronomía. Entre sus logros más destacados se encuentran el teorema fundamental del álgebra, la distribución normal (o gaussiana), el método de los mínimos cuadrados y el teorema del número primo.

Johann Carl Friedrich Gauss también tuvo estudiantes destacados a quienes influyó con su conocimiento y mentoría. Algunos de sus estudiantes más prominentes incluyen: Bernhard Riemann, Richard Dedekind y Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Ellos no solo fueron influenciados por el conocimiento y las ideas de Gauss, sino que también continuaron y ampliaron su legado matemático, dejando una marca indeleble en la historia de las matemáticas.

Además de sus contribuciones teóricas, Gauss también trabajó en la geodesia, cartografía, magnetismo y electrónica. Su genio matemático y su impacto en la ciencia han dejado un legado duradero que sigue siendo estudiado y aplicado en la actualidad (ver [1], [4]).

3.1. Ecuación Hipergeométrica

El propósito de esta sección es mostrar en detalle como se obtienen las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación hipergeométrica. Las funciones especiales surgen, en la historia de la matemática, en la búsqueda de soluciones por medio de series de potencias a ecuaciones ordinarias, la ecuación diferencial que se estudia a continuación fue inicialmente estudiada por Euler, pero fue K. Gauss, en su escrito de 1812 sobre las series hipergeométricas, donde profundizó sobre este tema. La ecuación hipergeométrica de Gauss es la ecuación (3.1),

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0. \quad (3.1)$$

Se observa que $x = 0$, es un punto singular regular de la ecuación; en efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]}{x(1-x)} x = \gamma; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-\alpha\beta}{x(1-x)} = 0,$$

así se utiliza el método de Frobenius para buscar una solución de la ecuación (3.1) en la forma,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s}, \quad c_0 \neq 0 \quad (3.2)$$

las dos primeras derivadas de (3.2) da como resultado,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) c_n x^{n+s-1}; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) c_n x^{n+s-2} \quad (3.3)$$

sustituyendo (3.2) y (3.3) en la ecuación (3.1),

$$\begin{aligned} & x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) c_n x^n - x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) c_n x^{n+1} + \\ & x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(n+s) c_n x^n - x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + \beta + 1)(n+s) c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\beta c_n x^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

suprimiendo el factor común x^{s-1} , la expresión anterior se escribe como,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1+\gamma) c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(\alpha + \beta + n - s) + \alpha\beta] c_n x^{n+1} = 0$$

Con el fin de reducir las dos sumatorias anteriores a una sola, expandimos el primer término de la primera serie y en la segunda usamos el cambio de variable $k = n+1$, así,

$$\begin{aligned} & \gamma(s+\gamma-1)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+s)(n+s-1+\gamma) c_n x^n \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1+s)(\alpha + \beta + k - 1 - s) + \alpha\beta] c_{k-1} x^k = 0 \\ & \gamma(s+\gamma-1)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+s)(n+s-1+\gamma) \\ & c_n [(n-1+s)(\alpha + \beta + n - 1 - s) + \alpha\beta] c_{n-1}) x^n = 0. \end{aligned}$$

La idea es encontrar los coeficientes c_n que hacen que cada potencia de x sea cero. Así, el término independiente debe anularse,

$$s(s + \gamma - 1)c_0 = 0,$$

y como $c_0 \neq 0$, entonces,

$$s = 0 \quad s = 1 - \gamma, \quad (3.4)$$

si $s = 0$, la ecuación que permite determinar los coeficientes es,

$$n(n + \gamma - 1)c_n = [(n - 1)(\alpha + \beta + n - 1) + \alpha\beta]c_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

expresión que se puede escribir como:

$$c_n = \frac{(n - 1)^2 + (n - 1)(\alpha + \beta) + \alpha\beta}{n(n - 1 + \gamma)}c_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

de esta manera, con $c_0 = 1$,

$$\begin{aligned} n = 1, & \quad c_1 = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} \\ n = 2, & \quad c_2 = \frac{1 + \alpha + \beta + \alpha\beta}{2(1 + \gamma)}c_1 = \frac{(1 + \alpha + \beta + \alpha\beta)(\alpha\beta)}{1 \cdot 2\gamma(1 + \gamma)} = \frac{\alpha(1 + \alpha)\beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(1 + \gamma)} \\ n = 3, & \quad c_3 = \frac{4 + 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta}{3(2 + \gamma)}c_2 = \frac{\alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)}, \end{aligned}$$

continuando de esta manera se obtiene,

$$c_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{1}{n!}, \quad (3.5)$$

en donde, $(\alpha)_n$ representa el símbolo de Pochhammer, utilizando (3.2) y (3.5) se encuentra que una solución de la ecuación hipergeométrica (3.1) viene dada por,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!},$$

la expresión para y dada anteriormente se llama función hipergeométrica y se acostumbra a notar,

$$y_1 = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

La expresión para y_1 tiene sentido si γ no es un entero positivo. Con un procedimiento similar al anterior, y utilizando $s = 1 - \gamma$, se puede encontrar una segunda solución de la ecuación (3.1). Sin embargo, preferimos utilizar el siguiente método. Sea:

$$y = x^{1-\gamma}w, \quad (3.6)$$

de donde,

$$\begin{aligned} y' &= (1 - \gamma)x^{-\gamma}w + x^{1-\gamma}w' \\ y'' &= -\gamma(1 - \gamma)x^{-\gamma-1}w + 2(1 - \gamma)x^{-\gamma}w' + x^{1-\gamma}w'', \end{aligned} \quad (3.7)$$

reemplazando las expresiones (3.6) y (3.7) en la ecuación (3.1), se obtiene luego de simplificar,

$$x(1 - x)w'' + [2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)x]w' - (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)w = 0,$$

que se reconoce como una ecuación hipergeométrica con parámetros,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + 1 - \gamma \\ \beta' &= \beta + 1 - \gamma \\ \gamma' &= 2 - \gamma, \end{aligned}$$

es decir, se puede utilizar la fórmula (3.6),

$$w = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha + 1 - \gamma & \beta + 1 - \gamma \\ 2 - \gamma \end{matrix} \middle| x \right),$$

la expresión para w tiene sentido si $\gamma \neq 2$ o de un entero positivo de donde por la ecuación (3.6), una segunda solución de la ecuación diferencial hipergeométrica de Gauss,

$$y_2 = x^{1-\gamma} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha + 1 - \gamma & \beta + 1 - \gamma \\ 2 - \gamma \end{matrix} \middle| x \right),$$

la discusión anterior la podemos resumir en el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1

Si α, β, γ son números complejos con $\gamma \notin \mathbb{Z}$, la ecuación diferencial

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

admite como solución general,

$$y = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) c_1 + c_2 x^{1-\gamma} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha+1-\gamma & \beta+1-\gamma \\ 2-\gamma \end{matrix} \middle| x \right), \quad (3.8)$$

con c_1, c_2 números complejos arbitrarios.

Ejemplo 3.1.1

Hallar la solución general de la ecuación

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{1}{2} - 2x\right)y' + 6y = 0.$$

Si comparamos la ecuación dada con la ecuación diferencial hipergeométrica (1.28) tenemos que los parámetros α, β, γ satisfacen las ecuaciones:

$$\gamma = \frac{1}{2}; \quad \alpha + \beta + 1 = 2; \quad \alpha\beta = -6,$$

es decir, $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = \frac{1}{2}$; por lo tanto, de acuerdo al Teorema 2.1.1, la solución general de la ecuación propuesta viene dada por:

$$y = c_1 \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 3, -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x \right) + c_2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x \right).$$

Se puede observar que la primera función hipergeométrica del lado derecho de la igualdad anterior es un polinomio de grado dos; en efecto,

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 3, -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3)_n (-2)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{(3)_1 (-2)_1}{\left(\frac{1}{2}\right)_1} \cdot \frac{x^1}{1!} + \frac{(3)_2 (-2)_2}{\left(\frac{1}{2}\right)_2} \cdot \frac{x^2}{2!},$$

pues $(-2)_3 = (-2) \cdot (-2+1) \cdot (-2+2) = 0$, y en general $(-2)_n = 0$ si $n \geq 3$, de esta manera:

$$y = c_1 \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 3, -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x \right) = 1 - 12x + 16x^2.$$

Verifique que y_1 es una solución de la ecuación dada.

Así, la solución general:

$$y = c_1(1 - 12x + 16x^2) + c_2 \cdot \sqrt{x} \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x \right).$$

Ejemplo 3.1.2

Resolver la ecuación diferencial

$$(1 - e^x)y'' + 2y' + 3e^xy = 0.$$

Mediante el cambio de variable $t = e^x$, utilizando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^x \frac{dy}{dt} = t \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(t \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(t \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} + t \frac{d^2y}{dt^2} \right) t = t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

escribiendo la ecuación dada en términos de la nueva variable independiente t , se obtiene:

$$t(1 - t) \frac{d^2y}{dt^2} + (3 - t) \frac{dy}{dt} + 9y = 0,$$

esta última ecuación es de la forma dada en el teorema 2.1.1, con $\gamma = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = -3$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$y = c_1 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 3, -3 \\ 3 \end{matrix} \middle| t \right) + c_2 t^{-2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, -5 \\ 3 \end{matrix} \middle| t \right).$$

aplicando la definición de función hipergeométrica, la expresión y de la solución general se puede escribir:

$$y = c_1 (1 - 3t + 3t^2 - t^3) + c_2 t^{-2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, -5 \\ 3 \end{matrix} \middle| t \right).$$

y como $t = e^x$,

$$y = c_1 (1 - e^x)^3 + c_2 e^{-2x} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, -5 \\ 3 \end{matrix} \middle| e^x \right).$$

Algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden en la cual los coeficientes de y'' , y' , y son polinomios de grado 2, 1, 0, respectivamente, se pueden transformar en una ecuación diferencial hipergeométrica por medio de un adecuado cambio de la variable independiente, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.3

Para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ la ecuación diferencial de Legendre es la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

Las raíces del polinomio $1 - x^2$, coeficiente de y'' , son $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, mediante el cambio de variable

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 1}{-2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

la ecuación de Legendre, se escribe en términos de la nueva variable independiente, t :

$$t(1 - t)\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 2t)\frac{dy}{dt} + n(n + 1)y = 0,$$

que se reconoce como la ecuación hipergeométrica de Gauss, con parámetros

$$\gamma = 1, \quad \alpha = n + 1, \quad \beta = -n,$$

por lo tanto, una solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$y(t) = c_1 {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & n + 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| t\right)$$

como $t = \frac{1-x}{2}$, una solución de la ecuación de Legendre viene dada por

$$y = c_1 {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & n + 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2}\right),$$

se puede observar que esta función hipergeométrica es un polinomio en la variable x , de grado n :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & n + 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(1)_k (1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k,$$

que corresponde a los polinomios de Legendre $P_n(x)$; por ejemplo si $n = 2$,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{(-2)_k (3)_k}{k! K!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k = 1 + (-2)_1 \cdot (3)_1 \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right) + \frac{(-2)_2 \cdot (3)_2}{4} \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \\ &= 1 - 3(1-x) + \frac{3(1-x)^2}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \end{aligned}$$

Nota 3.1.1

Si $\gamma = 0, -1, -2, -3, \dots$, una solución particular de la ecuación hipergeométrica es y_2 . Si $\gamma = 1, 2, 3, 4, \dots$, una solución particular de la ecuación hipergeométrica es y_1 . En cualquiera de los dos casos anteriores una segunda solución puede encontrarse con la fórmula de reducción de orden: Si y_0 es una solución particular de la ecuación lineal homogénea de segundo orden,

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0,$$

una segunda solución es:

$$y = y_0 \int \frac{e^{-F}}{y_0^2} dx, \quad F(x) = \int \frac{f_1}{f_2} dx.$$

Nota 3.1.2

Si en la definición de función hipergeométrica tomamos $a = 1$, $b = c$ se tiene:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, b \\ b \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (b)_n}{(b)_n n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \end{aligned}$$

de aquí el nombre de serie hipergeométrica ya que de acuerdo a lo anterior se puede considerar como una generalización de la serie geométrica.

Adrien Marie Legendre, fue un matemático francés nacido el 18 de septiembre de 1752 en París y fallecido el 10 de enero de 1833 en la misma ciudad. Legendre era conocido por ser una persona reservada, metódica en su vida personal, características que también se reflejaban en su enfoque hacia las matemáticas y la ciencia. Tuvo varios maestros y mentores a lo largo de su carrera académica. algunos de los más destacados, Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace, estos matemáticos influyentes jugaron un papel crucial en su formación intelectual y académica, reflejado en su enfoque riguroso y analítico hacia los problemas matemáticos.

Es conocido por sus contribuciones significativas a diversos campos de las matemáticas, especialmente en análisis matemático y teoría de números. Además de sus contribuciones científicas, Legendre fue un miembro destacado de la comunidad matemática de su época y jugó un papel importante en la promoción y difusión de las matemáticas en Francia.

Figura 3.2: Adrien Marie Legendre (1752 - 1833), imagen tomada de: <https://shre.ink/LDuX> (2026)



Su obra más conocida es "Éléments de Géométrie", un texto fundamental que influyó en la enseñanza de las matemáticas durante muchos años. Legendre, tuvo varios alumnos destacados que continuaron su legado y realizaron contribuciones significativas en diversos campos matemáticos. Algunos de sus alumnos más conocidos incluyen Simeon-Denis Poisson, François Arago, Jean-Baptiste Biot, estos tres alumnos son ejemplos destacados de cómo Legendre influyó en la siguiente generación de matemáticos y científicos en Francia, y cómo su enseñanza y mentoría contribuyeron al avance de la ciencia en diversas disciplinas.

En resumen, Adrien-Marie Legendre fue un matemático prolífico cuyas contribuciones abarcaron áreas diversas de las matemáticas, desde la teoría de números hasta la geodesia, dejando un legado duradero en el campo científico.

3.2. Serie Hipergeométrica

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k,$$

se llama serie hipergeométrica si

$$\frac{C_{k+1}}{C_k},$$

es el cociente de dos polinomios en variable k , es decir:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)} \frac{x}{(k+1)}. \quad (3.9)$$

Observemos que:

$$C_k = C_0 \left(\frac{C_1}{C_0} \right) \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \cdots \left(\frac{C_k}{C_{k-1}} \right), \quad (3.10)$$

de donde usando (3.9), (3.10), se transforma en:

$$\begin{aligned} C_k &= C_0 \left(\frac{(a_1)(a_2)\cdots(a_p)x}{(b_1)(b_2)\cdots(b_q)1} \right) \left(\frac{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_p+1)x}{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_q+1)2} \right) \\ &\quad \cdots \left(\frac{(a_1+k-1)(a_2+k-1)\cdots(a_p+k-1)x}{(b_1+k-1)(b_2+k-1)\cdots(b_q+k-1)k} \right) \\ C_k &= C_0 \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k k!}, \end{aligned}$$

donde, $(\alpha)_k$ es el símbolo de de Pochhammer como se definió en el capítulo uno.

De esta manera, si

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k,$$

es una serie hipergeométrica, entonces la podemos escribir así:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k k!},$$

que usando la notación de función hipergeométrica se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \cdots, a_p \\ b_1, b_2, \cdots, b_q \end{matrix} \middle| x \right).$$

3.3. Función Hipergeométrica generalizada

La función hipergeométrica de Gauss

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.11)$$

considerada en la sección anterior, tiene dos parámetros numéricos en el numerador, a y b y uno en el denominador c . Se puede generalizar (3.11) a una función ${}_pF_q$ con p parámetros numéricos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ en el numerador y q parámetros $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ en el denominador, como sigue:

Definición 3.3.1

Sean $p, q \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \in \mathbb{C}$ con

$$\beta_j \in \mathbb{Z} - \{0, -1, -2, \dots\},$$

$j = 1, 2, \dots, q$, la función hipergeométrica generalizada se define por:

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_q)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.12)$$

Nótese que si alguno de los parámetros α_i en (3.12) es cero o un entero negativo, la serie termina.

Como una aplicación del criterio del cociente para series se obtiene el siguiente resultado (ver [5], [12]).

Proposición 3.3.1

La serie hipergeométrica

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x \right),$$

- Converge absolutamente para todo x , si $p \leq q$.
- Converge absolutamente para $|x| < 1$, si $p = q + 1$ y diverge para $|x| > 1$.
- Diverge para $x \neq 0$, si $p > q + 1$.

3.3.1. Ejemplos

Muchas funciones elementales tienen representación como una serie hipergeométrica, se demuestran algunas de dichas funciones:

Ejemplo 3.3.1**Función exponencial**

Donde no hay parámetros en el numerador ni en el denominador,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = {}_0F_0 \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| x \right).$$

Ejemplo 3.3.2

Serie Binomial

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{x^n}{n!} = {}_1F_0 \left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \middle| x \right). \quad (3.13)$$

Demostración 3.3.1

El teorema del binomio de Newton, cuando se generaliza a un exponente $\alpha \in \mathbb{C}$, y se restringe x a valores $|x| < 1$, para garantizar la convergencia de la serie establece que:

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)(-a-1)(-a-2) \cdots (-a-n+1)(-1)^n}{n!} x^n,$$

que puede escribirse como:

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)(-1)^n}{n!} x^n,$$

teniendo en cuenta la definición del símbolo de Pochhammer, la serie binomial se puede expresar como serie hipergeométrica donde hay parámetros en el numerador pero no en el denominador así,

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{x^n}{n!} = {}_1F_0 \left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \middle| x \right).$$

Ejemplo 3.3.3**Función arcotangente**

Al integrar ambos lados de la igualdad que expresa la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad |t| < 1$$

se obtiene,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt,$$

de donde,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

que corresponde a la serie de potencias de la función arcotangente, descubierta por el matemático escocés James Gregory en 1671.

Teniendo en cuenta la definición del símbolo de Pochhammer y la fórmula de duplicación de Legendre:

$$2n+1 = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} = \frac{(1)_{2n+1}}{(1)_{2n}} = \frac{(2)_{2n}}{(1)_{2n}} = \frac{2^{2n}(1)_n \left(\frac{3}{2}\right)_n}{2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n (1)_n},$$

la igualdad anterior se puede escribir como:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n (1)_n} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \cdot \frac{(-x^2)^n}{n!},$$

de esta manera se obtiene la representación de la función arcotangente como una función hipergeométrica,

$$\arctan(x) = x \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -x^2\right).$$

Proposición 3.3.2

Otra función expresada como serie hipergeométrica

$$\frac{1}{2} \left[(1+z)^n + (1-z)^n \right] = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z^2\right). \quad (3.14)$$

Donde hay parámetros en el numerador y en el denominador.

Demostración 3.3.2

Primero supongamos que n es par: $n = 2m$; en este caso

$$A := {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z^2\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, \frac{1}{2} - m \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z^2\right), \quad (3.15)$$

usando la definición de una ${}_2F_1$, como una serie de potencias, tenemos

$$A = \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k \left(\frac{1}{2} - m\right)_k x^{2k}}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}, \quad (3.16)$$

utilizando la fórmula de reflexión de Euler:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

primero con $x = m + \frac{1}{2}$, y luego con $x = \frac{1}{2} + k - m$, se obtiene respectivamente,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) = \frac{\pi}{(-1)^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}, \quad (3.17)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + k - m\right) = \frac{\pi}{(-1)^{k-m} \Gamma\left(m + \frac{1}{2} - k\right)}, \quad (3.18)$$

teniendo en cuenta la relación entre el símbolo de Pochhammer y la función Gamma y las expresiones dadas en (3.17), (3.18), se tiene, luego de hacer unas simplificaciones

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - m\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k} = \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2} - k\right)}, \quad (3.19)$$

de $(1)_k = k!$, la relación de la función Gamma, el símbolo de Pochhammer, y la fórmula de duplicación se puede ver que:

$$\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2j)! \sqrt{\pi}}{j! 2^{2j}},$$

utilizando esta última expresión, en la identidad (3.19), se recibe finalmente

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - m\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k} = \frac{(-1)^k (2m)!}{(2k)! (2m - 2k)!} \frac{k! (m - k)!}{m!}. \quad (3.20)$$

Recordando (2.32), del Corolario **1.3.5**, y la relación dada en (3.20), se obtiene que la expresión para la función hipergeométrica A dada en (3.15), se puede escribir como:

$$A = \sum_{k=0}^m \frac{(2m)!}{(2k)! (2m - 2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} x^{2k}. \quad (3.21)$$

De otra parte, utilizando el teorema del binomio, desarrollamos el lado izquierdo de (3.14), con $n = 2m$.

$$\begin{aligned} B &:= \frac{1}{2} \left[(1+z)^n + (1-z)^n \right] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} x^j + \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} (-1)^j x^j \right\} \\ B &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} [1 + (-1)^j] x^j \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

pero teniendo en cuenta que:

$$\frac{1 + (-1)^j}{2} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } j \text{ es impar,} \end{cases} \quad (3.23)$$

haciendo $j = 2k$ en (3.22), obtenemos:

$$B = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} x^{2k}. \quad (3.24)$$

Comparando (3.22), con (3.24), se sigue el resultado. El caso n impar se trata de manera similar. $\square$

3.4. Representación integral de Euler

Una importante aplicación de la representación integral de Euler, dada por Euler en [9] se da a continuación:

Teorema 3.4.1

Supongamos que $\Re c > 0$, $\Re b > 0$,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a} dt. \quad (3.25)$$

Demostración 3.4.1

Denotemos con I el lado derecho de la ecuación (3.25). Es decir,

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a} dt. \quad (3.26)$$

teniendo en cuenta la expresión hipergeométrica de la función binomial dada en el

ejemplo 1.3.2 se tiene:

$$I : = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} {}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \middle| xt\right) dt.$$

Aplicando la definición de función hipergeométrica

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k t^k}{k!} \right) dt$$

como las funciones que se están integrando son no negativas, aplicamos el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, para intercambiar el orden de la integral con la sumatoria, por lo tanto

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k}{k!} \int_0^1 t^{b+k-1}(1-t)^{c-b-1} dt. \quad (3.27)$$

Recordemos que:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

de donde sustituyendo en (3.27), con $x = b + k$ y $y = c - b$ nos queda:

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k}{k!} B(b+k, c-b),$$

De la relación que existe entre la función Beta y la función Gamma, dada en el **Teorema 2.5.3**,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

Haciendo la identificación $x = b + k$; $y = c - b$, la expresión para I dada en la

igualdad anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k}{k!} \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b)}{\Gamma(k+c)} \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k}{k!} \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(k+c)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)} \frac{(a)_k x^k}{k!} \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \\
 &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right), \quad |x| < 1.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Recordando la definición de I dada en (3.26) se obtiene la demostración del teorema.

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt.$$

Los ejemplos y teoremas siguientes, proporcionan una importante aplicación de la representación integral de Euler, para obtener dos fórmulas de transformación de funciones hipergeométricas.

Ejemplo 3.4.1

Evaluar la integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}(1+\alpha t)} dt.$$

La integral I se puede escribir como:

$$I = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} (1+\alpha t)^{-1} dt,$$

comparando esta integral con la integral que figura en el teorema 2.4.1 observamos que:

$$b-1 = -\frac{1}{2}, \quad c-b-1 = -\frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad \alpha = -x,$$

de donde, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $a = 1$, haciendo uso de la representación integral de Euler:

$$I = \frac{\Gamma(b) \cdot \Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| -\alpha\right)$$

así,

$$I = (\sqrt{\pi})^2 \cdot {}_1F_0\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ - \end{matrix} \middle| -\alpha\right) = \pi \cdot (1 + \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \alpha}},$$

observe que se ha utilizado la serie binomial dada en el ejemplo 2.3.2.

En el próximo ejemplo evaluamos una cierta función hipergeométrica calculando para ello, la integral que le corresponde por el teorema de representación de Euler.

Ejemplo 3.4.2

Encontrar el valor de la función hipergeométrica

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, p \\ 3p \end{matrix} \middle| \frac{3}{4}\right), \quad \text{con } p > 0.$$

Utilizando la fórmula de representación de Euler, con la siguiente identificación de los parámetros:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = p, \quad c = 3p, \quad x = \frac{3}{4},$$

se obtiene:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, p \\ 3p \end{matrix} \middle| \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(3p)}{\Gamma(p)\Gamma(2p)} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{2p-1} \left(1 - \frac{3}{4}t\right)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (3.29)$$

designando con J la integral del lado derecho de (3.29), y mediante la sustitución $3t = 4 \sin^2 \alpha$,

$$J = \frac{2^{2p+1}}{3^{3p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin \alpha)^{2p-1} (3 - 4 \sin^2 \alpha)^{2p-1} d\alpha,$$

recordando la identidad trigonométrica del seno del ángulo triple:

$$\sin(3\alpha) = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha),$$

la integral J se puede escribir:

$$J = \frac{2^{2p+1}}{3^{3p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3\alpha)^{2p-1} d\alpha,$$

con un nuevo cambio de variable $3\alpha = \theta$, se tiene

$$J = \frac{2^{2p+1}}{3^{3p}} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{2p-1} d\theta = \frac{2^{2p+1}}{3^{3p}} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p-1} d\theta,$$

para evaluar esta última integral, hacemos uso de la forma trigonométrica de la función beta dada en el ejemplo 1.5.5:

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta,$$

con $x = p$, $y = \frac{1}{2}$, luego,

$$J = \frac{2^{2p+1}}{3^{3p}} B\left(p, \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2p+1}}{3^{3p}} \frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)},$$

una aplicación de la fórmula de duplicación de Legendre para la función gamma:

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2p) = 2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right),$$

y teniendo en cuenta, que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, la expresión para J se puede escribir:

$$J = \frac{2^{2p+1} \cdot 2^{2p-1} \cdot \Gamma(p) \cdot \Gamma(p)}{3^{3p}\Gamma(2p)} = \frac{2^{4p}}{3^{3p}} \cdot \frac{(\Gamma(p))^2}{\Gamma(2p)} = \left(\frac{16}{27}\right)^p \cdot \frac{(\Gamma(p))^2}{\Gamma(2p)},$$

finalmente, reemplazando este valor de J en (3.29), se obtiene:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, p \\ 3p \end{matrix} \middle| \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{16}{27}\right)^p \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(3p)}{(\Gamma(2p))^2}.$$

Teorema 3.4.2

Teorema de Pfaff

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right).$$

Demostración 3.4.2

De la representación de Euler

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a} dt,$$

sustituyamos t por $1-s$

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^0 (1-s)^{b-1}(1-(1-s))^{c-b-1}(1-x(1-s))^{-a}(-ds), \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^0 (1-s)^{b-1}s^{c-b-1}(1-x+xs)^{-a}(-ds), \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-x+xs)^{-a}s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}ds, \end{aligned}$$

pero,

$$(1-x+xs)^{-a} = (1-x)^{-a} \left[\frac{1-x+xs}{1-x} \right]^{-a} = (1-x)^{-a} \left[1 - \frac{xs}{x-1} \right]^{-a},$$

luego,

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-x)^{-a} \left[1 - \frac{xs}{x-1} \right]^{-a} s^{c-b-1}(1-s)^{b-1} ds, \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) &= (1-x)^{-a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1} \left[1 - \frac{xs}{x-1} \right]^{-a} ds, \end{aligned} \tag{3.30}$$

y teniendo en cuenta la representación integral de Euler vemos que:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1} \left[1 - \frac{xs}{x-1} \right]^{-a} ds, \tag{3.31}$$

de donde sustituyendo (3.31), en (3.30), nos queda:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right) \quad \square$$

Teorema 3.4.3

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| x\right).$$

Demostración 3.4.3

Para la segunda fórmula de transformación se tiene en cuenta que:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} b, a \\ c \end{matrix} \middle| x\right),$$

junto con la transformación de Pfaff;

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right),$$

usando simetría en Pfaff esta se puede escribir como:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-b, a \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right), \quad (3.32)$$

ahora aplicándole Pfaff a la función hipergeométrica que aparece en el lado derecho de (3.32), ésta se transforma en:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) &= (1-x)^{-a} \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)^{-(c-b)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-b, c-a \\ c \end{matrix} \middle| \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}\right), \\ &= (1-x)^{-a} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-c+b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-b, c-a \\ c \end{matrix} \middle| \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}\right), \\ &= (1-x)^{-a+c-b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-b, c-a \\ c \end{matrix} \middle| x\right) \quad \square \end{aligned}$$

3.5. Fórmulas de sumación

De la fórmula de transformación de Euler, dada en el teorema anterior, escrito en la forma:

$$(1-x)^{a-c+b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-b, c-a \\ c \end{matrix} \middle| x\right), \quad (3.33)$$

y recordando el producto de Cauchy para la multiplicación de series de potencias

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right),$$

donde,

$$C_n = \sum_{j=0}^n A_{n-j} B_j.$$

Se obtiene la siguiente fórmula de sumación de Pfaff-Saalschütz.

3.5.1. Fórmula de sumación de Pfaff-Saalschütz

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ d, 1+a+b-d-n \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{(d-a)_n(d-b)_n}{(d)_n(d-a-b)_n}.$$

Demostración 3.5.1

Recordando la representación hipergeométrica que tiene $(1-x)^{a-c+b}$, dada en (3.13)

$$(1-x)^{a+b-c} = \sum_{n=0}^{\infty} (-a-b+c)_n \frac{x^n}{n!} = {}_1F_0\left(\begin{matrix} -a-b+c \\ - \end{matrix} \middle| x\right),$$

el lado izquierdo de (3.33), lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} (1-x)^{a-c+b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) &= {}_1F_0\left(\begin{matrix} -a-b+c \\ - \end{matrix} \middle| x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right), \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-a-b+c)_n \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \end{aligned}$$

donde,

$$C_n = \sum_{j=0}^n A_{n-j} B_j.$$

Sea

$$A_n = \frac{(c-a-b)_n}{n!}, \quad B_n = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!},$$

así C_n lo podemos escribir como:

$$C_n = \sum_{j=0}^n A_{n-j} B_j = \sum_{j=0}^n \frac{(c-a-b)_{n-j}}{n!} \frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j j!},$$

luego,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-a-b+c)_n \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{(c-a-b)_{n-j}}{(n-j)!} \frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j (j)!}\right) x^n. \quad (3.34)$$

Por otra parte, el lado derecho de la expresión (3.33), es una ${}_2F_1$, que corresponde a la serie

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} c-b, c-a \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.35)$$

comparando (3.34), con (3.35), podemos decir:

$$\sum_{j=0}^n \frac{(c-a-b)_{n-j}}{(n-j)!} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j (j)!} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n} \frac{1}{n!}, \quad (3.36)$$

utilizando la propiedad de los símbolos de Pochhammer

$$(-n)_j = \frac{n!(-1)^j}{(n-j)!},$$

(3.36), se transforma en:

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (-1)^j (a)_j (b)_j (c-a-b)_{n-j}}{(c)_j (j)!} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n}, \quad (3.37)$$

por otro lado,

$$(-1)^j (\alpha)_{n-j} (1-\alpha-n)_j = (\alpha)_n,$$

así (3.37), se escribe

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (a)_j (b)_j}{(c)_j (1-c+a+b-n)_j (j)!} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n}. \quad (3.38)$$

El lado izquierdo de (3.38), corresponde a una ${}_3F_2$ que escrita en forma de función hipergeométrica, permite llegar a concluir la demostración del teorema.

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a, b \\ 1-c+a+b-n, c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n}. \quad \square$$

Teorema 3.5.1

Teorema de Gauss

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)}.$$

Demostración 3.5.2

Tomando el límite cuando $x \rightarrow 1^+$ (3.28), la podemos escribir como:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-t)^{-a} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1-a} dt, \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} B(b, c-a-b), \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)}, \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} \quad \square
\end{aligned}$$

Cuando uno de los parámetros superiores en

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right),$$

es un entero negativo, la función hipergeométrica de Gauss se reduce a una suma finita, y del teorema de Gauss; se desprende el siguiente resultado:

Corolario 3.5.1 *Corolario(Chu-Vandermonde).*

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, a \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(c-a+n)}{\Gamma(c-a)} = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}.$$

El siguiente teorema es de gran importancia para los autores ya que se presentan dos expresiones donde se muestra una función hipergeométrica ${}_3F_2$ en términos del productos de dos funciones hipergeométricas ${}_2F_1$, llamadas identidades de Clausen.

3.6. Fórmulas de transformación

3.6.1. Identidades de Clausen

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 2a, 2b, a+b \\ a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b \end{matrix} \middle| x\right) = \left[{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x\right)\right]^2, \quad (3.39)$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}-a, \frac{1}{2}-b \\ \frac{3}{2}-a-b \end{matrix} \middle| x\right) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} a-b+\frac{1}{2}, b-a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ a+b+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-a-b \end{matrix} \middle| x\right). \quad (3.40)$$

Vamos a demostrar la ecuación (3.40), la demostración de la ecuación (3.39) se hace de forma similar.

Demostración 3.6.1

El producto de las funciones hipergeométricas que figuran en el lado izquierdo de (3.40) se puede escribir de la forma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-a)_n (\frac{1}{2}-b)_n}{(\frac{3}{2}-a-b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

donde,

$$C_n = \sum_{k=0}^n A_{n-k} B_k.$$

Sea

$$A_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \quad B_n = \frac{(\frac{1}{2}-a)_n (\frac{1}{2}-b)_n}{(\frac{3}{2}-a-b)_n} \frac{x^n}{n!},$$

así C_n lo podemos escribir como:

$$C_n = \sum_{k=0}^n A_{n-k} B_k = \sum_{k=0}^n \frac{(a)_{n-k} (b)_{n-k}}{(a+b+\frac{1}{2})_{n-k}} \frac{1}{(n-k)!} \frac{(\frac{1}{2}-a)_k (\frac{1}{2}-b)_k}{(\frac{3}{2}-a-b)_k} \frac{1}{k!},$$

luego,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-a)_n (\frac{1}{2}-b)_n}{(\frac{3}{2}-a-b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(a)_{n-k} (b)_{n-k}}{(a+b+\frac{1}{2})_{n-k}} \frac{1}{(n-k)!} \frac{(\frac{1}{2}-a)_k (\frac{1}{2}-b)_k}{(\frac{3}{2}-a-b)_k} \frac{1}{k!} x^n. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Trabajemos con la sumatoria interna que aparece en el lado derecho de (3.41):

$$\sum_{k=0}^n \frac{(a)_{n-k} (b)_{n-k}}{(a+b+\frac{1}{2})_{n-k}} \frac{1}{(n-k)!} \frac{(\frac{1}{2}-a)_k (\frac{1}{2}-b)_k}{(\frac{3}{2}-a-b)_k} \frac{1}{k!}$$

Recordando que,

$$(a)_{n-k} = \frac{(a)_n (-1)^k}{(1-n-a)_k} \quad (-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!},$$

la sumatoria que vamos a trabajar se transforma en:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(a)_n (-1)^k}{(1-n-a)_k} \frac{(b)_n (-1)^k}{(1-n-b)_k} \frac{(\frac{1}{2}-n-a-b)_k}{(\frac{1}{2}+a+b)_n (-1)^k} \frac{1}{(n-k)!} \frac{(\frac{1}{2}-a)_k (\frac{1}{2}-b)_k}{(\frac{3}{2}-a-b)_k} \frac{1}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a)_n(b)_n}{(\frac{1}{2} + a + b)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \frac{(\frac{1}{2} - n - a - b)_k (\frac{1}{2} - a)_k (\frac{1}{2} - b)_k}{n! (1 - n - a)_k (1 - n - b)_k (1)_k (\frac{3}{2} - a - b)_k} \\
&= \frac{(a)_n(b)_n}{(\frac{1}{2} + a + b)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\frac{1}{2} - n - a - b)_k (\frac{1}{2} - a)_k (\frac{1}{2} - b)_k}{n! (1 - n - a)_k (1 - n - b)_k (1)_k (\frac{3}{2} - a - b)_k}, \quad (3.42)
\end{aligned}$$

sustituyendo (3.42), en (3.41)

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - a)_n (\frac{1}{2} - b)_n}{(\frac{3}{2} - a - b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(\frac{1}{2} + a + b)_n} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\frac{1}{2} - n - a - b)_k (\frac{1}{2} - a)_k (\frac{1}{2} - b)_k}{(1 - n - a)_k (1 - n - b)_k (1)_k (\frac{3}{2} - a - b)_k} \right\} \frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

donde la suma interna del lado derecho de la expresión anterior se puede escribir como una función hipergeométrica ${}_4F_3$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - a)_n (\frac{1}{2} - b)_n}{(\frac{3}{2} - a - b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(\frac{1}{2} + a + b)_n} \left\{ {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} - a, \frac{1}{2} - b, \frac{1}{2} - n - a - b \\ 1 - n - a, 1 - n - b, \frac{3}{2} - a - b \end{matrix} \middle| 1 \right) \right\} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula que se encuentra en la pagina 179 de [12]

$${}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, A, B, C \\ 1 + A - B, 1 + A - C, 1 + A + n \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(A+1)_n (A+1-2B)_n (\frac{1}{2})_n}{(A+1-B)_n (A+1)_n (\frac{1}{2}-B)_n},$$

con la identificación:

$$A = \frac{1}{2} - n - a - b, \quad B = \frac{1}{2} - b, \quad C = \frac{1}{2} - c,$$

(3.43), se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - a)_n (\frac{1}{2} - b)_n}{(\frac{3}{2} - a - b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(\frac{1}{2} + a + b)_n} \left(\frac{(\frac{3}{2} - n - a - b)_n (\frac{1}{2} - n - a + b)_{2n} (\frac{1}{2})_n}{(1 - n - a)_n (\frac{3}{2} - n - a - b)_{2n} (b)_n} \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(a)_n (\frac{3}{2} - n - a - b)_n (\frac{1}{2} - n - a + b)_{2n} (\frac{1}{2})_n}{(1 - n - a)_n (\frac{3}{2} - n - a - b)_{2n} (\frac{1}{2} + a + b)_n} \right) \frac{x^n}{n!}. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de los símbolos de Pochhammer y usando la relación que tienen con la función Gamma

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{3}{2} - n - a - b)_n}{(\frac{3}{2} - n - a - b)_{2n}} &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - n - a - b + n)}{\Gamma(\frac{3}{2} - n - a - b)} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - n - a - b)}{\Gamma(\frac{3}{2} - n - a - b + 2n)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - a - b)}{\Gamma(\frac{3}{2} - a - b + n)} = \frac{1}{(\frac{3}{2} - a - b)_n}, \end{aligned}$$

(3.44), se transforma en

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - a)_n (\frac{1}{2} - b)_n}{(\frac{3}{2} - a - b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(a)_n (\frac{1}{2} - n - a + b)_{2n} (\frac{1}{2})_n}{(1 - n - a)_n (\frac{1}{2} + a + b)_n (\frac{3}{2} - a - b)_n} \right) \frac{x^n}{n!}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

pero,

$$\frac{(a)_n (\frac{1}{2} - n - a + b)_{2n}}{(1 - n - a)_n} = \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(\frac{1}{2} + n - a + b) \Gamma(1 - (n+a))}{\Gamma(a) \Gamma(\frac{1}{2} - n - a + b) \Gamma(1 - a)}.$$

Usando ahora la fórmula de reflexión de Euler

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

para

$$\frac{\Gamma(a+n) \Gamma(1 - (n+a))}{\Gamma(a) \Gamma(1-a)} = (-1)^n,$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n (\frac{1}{2} - n - a + b)_{2n}}{(1 - n - a)_n} &= (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - a + b)}{\Gamma(\frac{1}{2} - n - a + b)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - a + b)}{\Gamma(\frac{1}{2} - a + b)} (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - a + b)}{\Gamma(\frac{1}{2} - n - a + b)} \\ &= \left(\frac{1}{2} - a + b \right)_n \frac{(-1)^n \Gamma(1 - (\frac{1}{2} + a - b))}{\Gamma(1 - n - (\frac{1}{2} + a - b))}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sustituyendo (3.46), en (3.45) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-a)_n (\frac{1}{2}-b)_n}{(\frac{3}{2}-a-b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2}+a+b)_n (\frac{3}{2}-a-b)_n} \right) \left(\frac{1}{2} - a + b \right)_n \\
&\times \frac{(-1)^n \Gamma(1 - (\frac{1}{2} + a - b))}{\Gamma(1 - n - (\frac{1}{2} + a - b))} \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Si en la expresión

$$(x)_{n-k} = \frac{(-1)^k (x)_n}{(1-x-n)_n},$$

hacemos $n = k$, obtenemos:

$$(1-x-n)_n = (-1)^n (x)_n \Rightarrow \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(1-x-n)} (-1)^n = (x)_n,$$

luego haciendo $x = \frac{1}{2} + a - b$

$$(-1)^n \frac{\Gamma(1 - (\frac{1}{2} + a - b))}{\Gamma(1 - n - (\frac{1}{2} + a - b))} = \left(\frac{1}{2} + a - b \right)_n. \tag{3.48}$$

De donde finalmente sustituyendo (3.48), en (3.47) nos queda:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b+\frac{1}{2})_n} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-a)_n (\frac{1}{2}-b)_n}{(\frac{3}{2}-a-b)_n} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{2}+a-b)_n (\frac{1}{2}-a+b)_n}{(\frac{1}{2}+a+b)_n (\frac{3}{2}-a-b)_n} \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} + a - b, \frac{1}{2} - a + b, \frac{1}{2} + a + b \\ \frac{1}{2} + a + b, \frac{3}{2} - a - b \end{matrix} \middle| x \right).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de función hipergeométrica como una serie de potencias, la igualdad anterior permite obtener la demostración de la fórmula de Clausen:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ a + b + \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} - a, \frac{1}{2} - b \\ \frac{3}{2} - a - b \end{matrix} \middle| x \right) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} + a - b, \frac{1}{2} - a + b, \frac{1}{2} + a + b \\ \frac{1}{2} + a + b, \frac{3}{2} - a - b \end{matrix} \middle| x \right).$$

3.6.2. Otra fórmula de transformación

La identidad que se establecerá en esta sección, la cual será utilizada en el ejemplo 3.2 del **capítulo tres**, se deduce como una consecuencia de una serie de manipulaciones algebraicas sobre la función hipergeométrica generalizada y de algunas propiedades del símbolo de Pochhammer establecidas en el **capítulo uno**.

La función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$, se puede escribir:

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right) = I + II, \quad (3.49)$$

en donde,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2j} \cdots (a_p)_{2j}}{(b_1)_{2j} \cdots (b_q)_{2j}} \frac{z^{2j}}{(2j)!}, \\ II &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2j+1} \cdots (a_p)_{2j+1}}{(b_1)_{2j+1} \cdots (b_q)_{2j+1}} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{1}{2} \right)_j 2^{2j} j! = (2j)!,$$

expresión que se obtiene de la fórmula de duplicación para el símbolo de Pochhammer con $\alpha = 1$, y

$$(a_i)_{2j} = 2^{2j} \left(\frac{a_i}{2} \right)_j \left(\frac{a_i+1}{2} \right)_j,$$

se tiene,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j} \left(\frac{a_1}{2} \right)_j \left(\frac{a_1+1}{2} \right)_j \cdots 2^{2j} \left(\frac{a_p}{2} \right)_j \left(\frac{a_p+1}{2} \right)_j}{2^{2j} \left(\frac{b_1}{2} \right)_j \left(\frac{b_1+1}{2} \right)_j \cdots 2^{2j} \left(\frac{b_q}{2} \right)_j \left(\frac{b_q+1}{2} \right)_j} \frac{(z^2)^j}{\left(\frac{1}{2} \right)_j 2^{2j} j!}, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{2j})^p \left(\frac{a_1}{2} \right)_j \left(\frac{a_1+1}{2} \right)_j \cdots \left(\frac{a_p}{2} \right)_j \left(\frac{a_p+1}{2} \right)_j}{(2^{2j})^{q+1} \left(\frac{b_1}{2} \right)_j \left(\frac{b_1+1}{2} \right)_j \cdots \left(\frac{b_q}{2} \right)_j \left(\frac{b_q+1}{2} \right)_j} \frac{(z^2)^j}{\left(\frac{1}{2} \right)_j j!}, \end{aligned}$$

que a su vez, al tener presente la definición de función hipergeométrica, se puede escribir:

$$I = {}_{2p}F_{2q+1} \left(\begin{matrix} \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_p}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \dots, \frac{a_p+1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{b_1}{2}, \dots, \frac{b_q}{2}, \frac{b_1+1}{2}, \dots, \frac{b_q+1}{2} \end{matrix} \middle| 4^{p-q-1} z^2 \right). \quad (3.50)$$

De manera similar, se puede expresar II en la forma

$$II = \frac{(\prod_{i=1}^p a_i)z}{(\prod_{i=1}^q b_i)} {}_{2p}F_{2q+1} \left(\begin{matrix} \frac{a_1+1}{2}, \dots, \frac{a_p+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \dots, \frac{a_p+2}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{b_1+1}{2}, \dots, \frac{b_q+1}{2}, \frac{b_1+1}{2}, \dots, \frac{b_q+2}{2} \end{matrix} \middle| 4^{p-q-1} z^2 \right). \quad (3.51)$$

De las identidades (3.49), (3.50) y (3.51) se obtiene la fórmula de conexión

$$\begin{aligned} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right) &= {}_{2p}F_{2q+1} \left(\begin{matrix} \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_p}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \dots, \frac{a_p+1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{b_1}{2}, \dots, \frac{b_q}{2}, \frac{b_1+1}{2}, \dots, \frac{b_q+1}{2} \end{matrix} \middle| 4^{p-q-1} z^2 \right) \\ &+ \frac{(\prod_{i=1}^p a_i)z}{(\prod_{i=1}^q b_i)} {}_{2p}F_{2q+1} \left(\begin{matrix} \frac{a_1+1}{2}, \dots, \frac{a_p+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \dots, \frac{a_p+2}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{b_1+1}{2}, \dots, \frac{b_q+1}{2}, \frac{b_1+1}{2}, \dots, \frac{b_q+2}{2} \end{matrix} \middle| 4^{p-q-1} z^2 \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Si en (3.52), tomamos $p = 1$ y $q = 0$, ésta se nos transforma en:

$${}_1F_0 \left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \middle| z \right) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z^2 \right) + az {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{a+1}{2}, \frac{a+2}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z^2 \right). \quad (3.53)$$

3.7. Ejercicios

1.

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ 2+a-b, 2+a-c \end{matrix} \middle| 1 \right) &= 2^{-2c+1} \frac{\Gamma(2+a-b) \Gamma(2+a-c) \Gamma(b-1) \Gamma(c-1)}{\Gamma(a-2c+2) \Gamma(a-b-c+2) \Gamma(b) \Gamma(c)} \\ &\times \left\{ \frac{\Gamma(\frac{a}{2}-c+\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{a}{2}-b-c+2)}{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{a}{2}-b+1)} - \frac{\Gamma(\frac{a}{2}-c+1) \Gamma(\frac{a}{2}-b-c+\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}) \Gamma(\frac{a}{2}-b+\frac{3}{2})} \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Su demostración aparece en [10].

2.

$${}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}, b+n, -n \\ \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}, a+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(b-a)_n}{(b)_n},$$

llamada fórmula de Bailey's, su demostración se encuentra en la pagina 170 de [12].

3.

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ \frac{a+b+1}{2}, 2c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(c+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{a+b+c}{2}) \Gamma(c-\frac{a+b-1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2}) \Gamma(\frac{b+1}{2}) \Gamma(c-\frac{a-1}{2}) \Gamma(c-\frac{b-1}{2})}$$

Su demostración se encuentra en la pagina 148 de [12].

4. Muestre que las siguientes funciones tienen las representaciones como series hipergeométricas que se indican

a)

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} \middle| -x\right).$$

b)

$$\arcsen(x) = x \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x^2\right).$$

c)

$$\sin(x) = x \cdot {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{x^2}{4}\right).$$

d)

$$\cos(x) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{x^2}{4}\right).$$

5. Utilizando la demostración de Pfaff (Teorema 2.4.2), demuestre que:

$$\arctan(x) = \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

6. Si la parte real de un número complejo ρ es positiva, muestre que:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, -\rho \\ \rho + 1 \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{1}{2}.$$

7. Utilizando el teorema de Gauss (Teorema 2.5.1) muestre que:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \\ \rho + \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{2^n(\rho)_n}{(2\rho)_n}.$$

8. Para $0 < \rho < 1$, demuestre que:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-\rho, \rho \\ 3\rho \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^\rho} \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(3\rho)}{\{\Gamma(2\rho)\}^2}.$$

9. Tomando $\rho = \frac{1}{2}$, en el ejercicio anterior, muestre que el resultado obtenido es igual al que se obtiene utilizando una de las fórmulas del ejercicio 1.
10. Demuestre que:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-x^2y^2)}} dx dy = \frac{1}{16\pi} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right\}^4$$

Sugerencia: Expanda $(1-x^2y^2)^{-1/2}$ por la fórmula del binomio, luego integre término a término, para escribir I en términos de una función hipergeométrica ${}_3F_2$, luego aplique una de las identidades de Clausen, dadas en la sección 2.6.

11. Aplicando la identidad de Pfaff-Saalschütz, pruebe que:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-b+a)_k (2a-1+n)_k (-n)_k}{(2a-b)_k (a)_k k!} = \frac{(b)_n}{(2a-b)_n}.$$

12. Utilizando la representación integral de Euler, demuestre que:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a-b+1 \end{matrix} \middle| -1\right) = \frac{\Gamma(a-b+1)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}{\Gamma(a+1)\Gamma\left(\frac{a}{2}-b+1\right)}.$$

4. Sumas binomiales

En este capítulo se presentan algunos ejemplos, que nos permiten demostrar cómo sumas de productos de coeficientes binomiales pueden ser reducidas a series hipergeométricas; veremos que el carácter esencial de tales sumas se evidencian escribiéndolas como series hipergeométricas.

4.1. Un problema del Monthly

El problema 3399 de la revista *The American Mathematical Monthly*, considerado en la revista como uno de los mejores 400 problemas (1918-1950), pide probar o refutar

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{r+1}{k} \binom{2r-2k}{r} = r+1,$$

donde $t = \frac{r}{2}$ si r es par y $t = \frac{(r-1)}{2}$ si r es impar.

Anotamos que ninguna de las tres soluciones publicadas en la revista utiliza el método de solución que a continuación ilustramos.

Sin pérdida de generalidad supongamos que r es par de la forma $r = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, y

$$S = \sum_{k=0}^m C_k = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{2m+1}{k} \binom{4m-2k}{2m} = 2m+1.$$

Para escribir esta suma como una serie hipergeométrica, examinemos el cociente

$$\frac{C_{k+1}}{C_k}.$$

Por medio de un cálculo se verifica que:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{(-2m+2k)(-2m+2k+1)[-(2m+1)+k]}{(k+1)(-4m+2k)(-4m+2k+1)},$$

como

$$C_k = C_0 \left(\frac{C_1}{C_0} \right) \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \left(\frac{C_3}{C_2} \right) \cdots \left(\frac{C_{k-1}}{C_{k-2}} \right) \left(\frac{C_k}{C_{k-1}} \right),$$

se tiene,

$$C_k = C_0 \left[\frac{(-2m)(-2m+1)(-(2m+1))}{1(-4m)(-4m+1)} \right] \left[\frac{(-2m+2)(-2m+3)(-(2m+1)+1)}{2(-4m+2)(-4m+3)} \right] \\ \dots \left[\frac{(-2m+2k-2)(-2m+2k-1)(-(2m+1)+k-1)}{k(-4m+2k-2)(-4m+2k-1)} \right].$$

Es decir,

$$C_k = \frac{C_0 (-2m)_{2k} (-(2m+1))_k}{k! (-4m)_{2k}}.$$

Utilizando la fórmula de duplicación para el símbolo de Pochhammer (2.27)

$$S = \sum_{k=0}^m C_k = C_0 \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k \left(\frac{-2m+1}{2}\right)_k (-(2m+1))_k}{(-2m)_k \left(\frac{-4m+1}{2}\right)_k} \frac{1}{k!}, \quad (4.1)$$

donde,

$$C_0 = \binom{4m}{2m}.$$

La expresión (4.1) se puede escribir usando la definición de función hipergeométrica generalizada, como

$$S = C_0 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -m, -m + \frac{1}{2}, -2m - 1 \\ -2m, -2m + \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (4.2)$$

Haciendo uso de la identidad hipergeométrica de Paff-Saalshütz demostrada en el **capítulo dos**:

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -m, a, b \\ d, a + b - m - d + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(d-a)_m (d-b)_m}{(d)_m (d-a-b)_m},$$

con la identificación $a = -m + \frac{1}{2}$, $b = -2m - 1$, $d = -2m$, (4.2), se puede reescribir como:

$$S = C_0 \frac{(-m - \frac{1}{2})_m (1)_m}{(-2m)_m (m + \frac{1}{2})_m} = \frac{(4m)!}{(2m)!(2m)!} \frac{(-m - \frac{1}{2})_m (1)_m}{(-2m)_m (m + \frac{1}{2})_m}, \quad (4.3)$$

recordando la expresión:

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!},$$

dada en (2.32), y utilizando nuevamente la fórmula de duplicación para el símbolo de Pochhammer (2.27), se tiene:

$$\begin{aligned} (-2m)_m &= \frac{(-1)^m (2m)!}{m!}, \\ (4m)! &= (1)_{4m} = 2^{4m} \left(\frac{1}{2}\right)_{2m} (1)_{2m}, \\ (2m)! &= (1)_{2m} = 2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m (1)_m. \end{aligned}$$

Así (4.3), se transforma en:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2^{4m} \left(\frac{1}{2}\right)_{2m} 2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m (1)_m}{\left(2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m (1)_m\right) \left(2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m (1)_m\right)} \frac{(-m - \frac{1}{2})_m (1)_m}{(m + \frac{1}{2})_m} \frac{m!}{(-1)^m 2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m (1)_m}, \\ S &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{2m}}{\left(\frac{1}{2}\right)_m} \frac{(-m - \frac{1}{2})_m}{(-1)^m (m + \frac{1}{2})_m \left(\frac{1}{2}\right)_m}. \end{aligned}$$

De la relación que existe entre la función Gamma y el símbolo de Pochhammer, y la fórmula de reflexión de Euler, demostrada en (2.33), se puede ver que:

$$\frac{(-m - \frac{1}{2})_m}{\left(\frac{1}{2}\right)_m} = (-1)^m (2m + 1),$$

Así,

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{2m} (2m + 1)}{(m + \frac{1}{2})_m \left(\frac{1}{2}\right)_m} = \frac{\Gamma(2m + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2m + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})} (2m + 1),$$

de donde,

$$S = 2m + 1. \quad \square$$

4.2. Un problema de las olimpiadas universitarias

La XV competencia internacional de matemáticas para estudiantes universitarios (ICM 2008) tuvo su sede en la ciudad de *Blagoevgrad, Bulgaria*; evento realizado del 25 al 31 de julio de 2008. Los participantes son estudiantes no graduados de las carreras de matemáticas, el tercero de los 6 problemas correspondientes al día 28 de julio de 2008 fue:

Si n es un entero positivo. Pruebe que 2^{n-1} divide a:

$$\sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} 5^k. \quad (4.4)$$

En este ejercicio, se establece la siguiente fórmula de sumación:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^s \binom{n}{2k+1} x^k = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2} \right)^n \right\}, \quad (4.5)$$

donde,

$$s = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

De esta manera, tomando $x = 5$, se obtiene la solución al problema propuesto, pues es sabido que:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} = F_n,$$

donde F_n es el n -ésimo número de la sucesión de Fibonacci. De otra parte se mostrará que la misma conclusión del problema, se obtiene si se toma x de la forma $4t+1$, con $t = 0, 1, 2, 3 \dots$.

Ahora procedemos a establecer la identidad dada en (4.5), usando el método de las funciones hipergeométricas, para ello vamos a suponer sin pérdida de generalidad que $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, si se da el caso que n sea impar se procede de manera similar. Así el lado izquierdo de (4.5) se puede expresar como:

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} x^k \equiv \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k, \quad (4.6)$$

Para escribir esta suma como una serie hipergeométrica, examinemos el cociente:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k}.$$

Por medio de un cálculo se verifica que:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{(2m-2k-2)(2m-2k-1)}{(2k+2)(2k+3)},$$

como

$$C_k = C_0 \left(\frac{C_1}{C_0} \right) \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \left(\frac{C_3}{C_2} \right) \dots \left(\frac{C_{k-1}}{C_{k-2}} \right) \left(\frac{C_k}{C_{k-1}} \right),$$

se tiene

$$\begin{aligned}
C_k &= C_0 \cdot \left[\frac{(2m-2)(2m-1)}{2 \cdot 3} \right] \cdot \left[\frac{(2m-3)(2m-4)}{4 \cdot 5} \right] \cdots \left[\frac{(2m-2k+1)(2m-2k)}{2k \cdot (2k+1)} \right], \\
&= C_0 \cdot \left[\frac{(-2m+2)(-2m+1)(-2m+3)(-2m+4) \cdots (-2m+2k-1)(-2m+2k)}{(2k+1)!} \right], \\
&= C_0 \cdot \left[\frac{(-2m+1)_{2k}}{(1)_{2k+1}} \right], \\
&= C_0 \cdot \left[\frac{(-2m+1)_{2k}}{(2)_{2k}} \right].
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de duplicación, dada en (2.27), se tiene:

$$C_k = \left[\frac{C_0(-m + \frac{1}{2})_k(-m+1)_k}{(1)_k(\frac{3}{2})_k} \right].$$

De esta manera, el lado izquierdo de (4.6) se puede escribir como:

$$\frac{C_0}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-m+1)_k(-m+\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} \frac{x^k}{k!},$$

que a la luz de la definición de función hipergeométrica generalizada, reconocemos como una ${}_2F_1$, más precisamente, podemos escribir

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} x^k = \frac{C_0}{2^{2m-1}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -(m-1), -m + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x \right), \quad (4.7)$$

al hacer la identificación de la función hipergeométrica que figura en (4.7), con la segunda ${}_2F_1$ que aparece en la fórmula de transformación demostrada en (3.53), nos queda:

$${}_1F_0 \left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \middle| z \right) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z^2 \right) + az {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{a+1}{2}, \frac{a+2}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| z^2 \right),$$

con $a = -2m$, $x = z^2$, se obtiene:

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} x^k = \frac{C_0}{2^{2m-1}} \left\{ \frac{{}_1F_0 \left(\begin{matrix} -2m \\ - \end{matrix} \middle| \sqrt{x} \right) - {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m + \frac{1}{2}, -m \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x \right)}{-2m\sqrt{x}} \right\},$$

y usando en la igualdad anterior, las fórmulas de transformación

$${}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{n!} = (1-x)^{-a}, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{2} \left[(1+z)^n + (1-z)^n \right] = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z^2\right), \quad (4.9)$$

se tiene:

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} x^k = \frac{C_0}{2^{2m-1} 2m \sqrt{x}} \left\{ \frac{1}{2} \left[(1+\sqrt{x})^{2m} - (1-\sqrt{x})^{2m} \right] \right\},$$

luego,

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} x^k = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^{2m} - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2} \right)^{2m} \right\}, \quad (4.10)$$

pues

$$C_0 = \binom{2m}{1} = \frac{(2m)!}{(2m-1)!} = 2m.$$

De esta manera se obtiene (4.5), pues en (4.10) $2m = n$. $\square$

Nota 4.2.1

Llamemos x_m al lado derecho de (4.10), es decir,

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \left(\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^2 \right)^m - \left(\left(\frac{1-\sqrt{x}}{2} \right)^2 \right)^m \right\}.$$

Para $x = 1$, $x_m = 1 \forall m \in \mathbb{N}$.

Para $x = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{35}{16}, \dots$

Para $x = 9$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 21, \dots$ $x_m = \frac{1}{3}(2^{2m} - 1)$, que por inducción se demuestra que x_m es un entero para todo valor de $m \in \mathbb{N}$.

Surge la pregunta:

¿Para cuáles valores reales de x , x_m es un número natural, para todo natural m ?

La respuesta a esta pregunta se obtiene de manera inmediata a partir de la siguiente proposición:

Proposición 4.2.1

Si

$$\alpha = \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)^2, \quad \beta = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)^2, \quad x_m = \frac{1}{\sqrt{x}}[\alpha^m - \beta^m],$$

entonces,

$$x_{m+2} = \left(\frac{1+x}{2}\right) x_{m+1} - \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 x_m.$$

Demostración 4.2.1

La prueba de esta afirmación se obtiene de un cálculo directo, en efecto, nótese que:

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)\alpha - \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 = \alpha^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1+x}{2}\right)\beta - \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 = \beta^2,$$

así,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+x}{2}\right) x_{m+1} - \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 x_m = \\ &= \left(\frac{1+x}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} [\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}] - \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{x}} [\alpha^m - \beta^m] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \alpha^m \left[\left(\frac{1+x}{2}\right)\alpha - \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \right] - \beta^m \left[\left(\frac{1+x}{2}\right)\beta - \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \{ \alpha^m \alpha^2 - \beta^m \beta^2 \} = x_{m+2}. \end{aligned}$$

Donde x_m es un entero para todo valor natural de m si x es de la forma $4t+1$, $t=0, 1, 2, 3, \dots$.

4.3. Desarrollo en fracciones parciales de la función cotangente

El desarrollo en serie de fracciones parciales para la función $\pi \cot(\pi x)$, es conocida desde Euler, numerosas pruebas de este desarrollo han aparecido en la literatura matemática; el objetivo de este ejemplo es presentar aún otra prueba de ello aplicando la teoría de las series hipergeométricas.

Así vamos a demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{x} - \pi \cot(\pi x) \right], \quad (4.11)$$

denotemos con S la serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - x^2}, \quad (4.12)$$

Para escribir esta suma como una serie hipergeométrica, examinemos el cociente:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k}.$$

Por medio de un cálculo se verifica que:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{(k-x)(k+x)}{(k+1-x)(k+1+x)}. \quad (4.13)$$

Como se ha observado en los ejemplos anteriores C_k se puede escribir como el siguiente producto:

$$C_k = C_1 \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \left(\frac{C_3}{C_2} \right) \left(\frac{C_4}{C_3} \right) \cdots \left(\frac{C_{k-1}}{C_{k-2}} \right) \left(\frac{C_k}{C_{k-1}} \right),$$

teniendo en cuenta (4.13), se obtiene que:

$$\begin{aligned} C_k &= C_1 \left(\frac{(1-x)(1+x)}{(2-x)(2+x)} \right) \left(\frac{(2-x)(2+x)}{(3-x)(3+x)} \right) \cdots \left(\frac{(k-1-x)(k-1+x)}{(k-x)(k+x)} \right), \\ C_k &= C_1 \left(\frac{(-x+1)(x+1)}{(-x+2)(x+2)} \right) \left(\frac{(-x+2)(x+2)}{(-x+3)(x+3)} \right) \cdots \left(\frac{(-x+k-1)(x+k-1)}{(-x+k)(x+k)} \right), \\ C_k &= C_1 \frac{(-x+1)_{k-1} (x+1)_{k-1}}{(-x+2)_{k-1} (x+2)_{k-1}}, \end{aligned}$$

luego la serie dada en (4.12) se puede escribir como:

$$S = C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x+1)_{k-1} (x+1)_{k-1}}{(-x+2)_{k-1} (x+2)_{k-1}},$$

utilizando el cambio de variable $k-1 = j$, y recordando que $(1)_j = j!$, la expresión anterior para S toma la forma:

$$S = C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-x+1)_j (x+1)_j (1)_j}{(-x+2)_j (x+2)_j j!},$$

que reconocemos, de acuerdo a la definición de función hipergeométrica generalizada, como una ${}_3F_2$, mas explícitamente podemos escribir:

$$S = C_1 {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, -x+1, x+1 \\ x+2, -x+2 \end{matrix} \middle| 1\right). \quad (4.14)$$

Utilizando la fórmula de sumación [10]

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 2+a-b, 2+a-c \end{matrix} \middle| 1\right) &= 2^{-2c+1} \frac{\Gamma(2+a-b) \Gamma(2+a-c) \Gamma(b-1) \Gamma(c-1)}{\Gamma(a-2c+2) \Gamma(a-b-c+2) \Gamma(b) \Gamma(c)} \\ &\times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}-c+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a}{2}-b-c+2\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a}{2}-b+1\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}-c+1\right) \Gamma\left(\frac{a}{2}-b-c+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a}{2}-b+\frac{3}{2}\right)} \right\}, \end{aligned}$$

haciendo la identificación $a = 1$, $b = -x+1$, $c = x+1$, la función hipergeométrica que aparece en el lado derecho de (4.14), se puede escribir como:

$$\begin{aligned} C_1 {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, -x+1, x+1 \\ x+2, -x+2 \end{matrix} \middle| 1\right) &= C_1 \frac{2^{-2x-1} (1-x^2) \Gamma(x) \Gamma(-x)}{(-2x) \Gamma(-2x)} \\ &\times \left\{ \frac{\pi \Gamma(1+x) \Gamma(1-x) - \Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) \Gamma(1+x)} \right\}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las relaciones funcionales de la función Gamma, obtenidas de manera inmediata, usando la fórmula de reflexión de Euler:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) &= \frac{\pi}{\cos(\pi x)}, \\ \Gamma(x) \Gamma(-x) &= \frac{-\pi}{x \operatorname{sen}(\pi x)}, \\ \Gamma(1+x) \Gamma(-x) &= \frac{-\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}, \\ \Gamma(1+x) \Gamma(1-x) &= \frac{\pi x}{\operatorname{sen}(\pi x)}, \end{aligned}$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& C_1 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, -x+1, x+1 \\ x+2, -x+2 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \\
& C_1 \frac{2^{-2x-1}(1-x^2) \left(\frac{-\pi}{x \sin(\pi x)} \right)}{(-2x)\Gamma(-2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma(1+x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{\pi^2 x}{\sin(\pi x)} - \frac{\pi}{\cos(\pi x)} \right\} \\
& = C_1 \frac{2^{-2x-1}(1-x^2) \left(\frac{-\pi}{x \sin(\pi x)} \right)}{(-2x)\Gamma(-2x)(2x)\Gamma(2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{-2x}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{\pi^2 x}{\sin(\pi x)} - \frac{\pi}{\cos(\pi x)} \right\} \\
& = C_1 \frac{2^{-2x-1}(1-x^2) \left(\frac{-\pi}{x \sin(\pi x)} \right)}{(-2x) \left(\frac{-\pi}{2 \sin(\pi x) \cos(\pi x)} \right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{-2x} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{\pi^2 x}{\sin(\pi x)} - \frac{\pi}{\cos(\pi x)} \right\} \\
& = C_1 \frac{(1-x^2) \cos(\pi x)}{(-2x)^2} \left\{ \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\cos(\pi x)} \right\},
\end{aligned}$$

así,

$$C_1 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, -x+1, x+1 \\ x+2, -x+2 \end{matrix} \middle| 1 \right) = C_1 \frac{(1-x^2)}{(-2x)^2} \{ \pi x \cot(\pi x) - 1 \}, \quad (4.15)$$

de esta manera, y notando que:

$$C_1 = \frac{1}{1-x^2},$$

se obtiene finalmente de (4.12), (4.14), y (4.15) que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2x^2} [1 - \pi x \cot(\pi x)] \quad \square$$

4.4. Una serie de funciones Gamma

En la referencia [6], el autor da una prueba elemental, basada en cierta fórmula de interpolación para el operador de diferencias de la identidad

$$m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+j) \Gamma(m+2j) (-n)_j}{\Gamma(\beta+1-n+2j) \Gamma(m+j+1) j!} = \frac{\Gamma(\beta+1-m)}{\Gamma(\beta+1-n-m)}, \quad (4.16)$$

el objetivo de este ejemplo, es proporcionar una demostración para (4.16), usando el método de las funciones hipergeométricas.

Para escribir esta suma como una serie hipergeométrica, examinemos el cociente:

$$\frac{C_{j+1}}{C_j}.$$

Por medio de un cálculo directo se verifica que:

$$\begin{aligned} \frac{C_{j+1}}{C_j} &= \frac{\Gamma(\beta + 1 + j + 1) \Gamma(m + 2j + 2) (-n)_{j+1} \Gamma(-n + \beta + 1 + 2j) \Gamma(m + 1 + j) j!}{\Gamma(-n + \beta + 1 + 2j + 2) \Gamma(m + 1 + j + 1) (j + 1)! \Gamma(\beta + 1 + j) \Gamma(m + 2j) (-n)_j}, \\ \frac{C_{j+1}}{C_j} &= \frac{(\beta + 1 + j) (m + 2j) (-n + j) (m + 1 + 2j)}{(j + 1) (m + 1 + j) (-n + \beta + 1 + 2j) (-n + \beta + 2 + 2j)}, \end{aligned}$$

como

$$C_j = C_0 \left(\frac{C_1}{C_0} \right) \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \left(\frac{C_3}{C_2} \right) \cdots \left(\frac{C_{j-1}}{C_{j-2}} \right) \left(\frac{C_j}{C_{j-1}} \right),$$

se tiene:

$$\begin{aligned} C_j &= C_0 \left[\frac{(\beta + 1) (m) (m + 1) (-n)}{1 \cdot (m + 1) (-n + \beta + 1) (-n + \beta + 2)} \right] \\ &\times \left[\frac{(\beta + 1 + 1) (m + 2j - 2) (m + 1 + 2j - 2) (-n + j - 1)}{2 \cdot (m + 1 + 1) (-n + \beta + 1 + 2)} \right] \\ &\cdots \times \left[\frac{(\beta + 1 + j - 1) (m + 2j - 2) (m + 1 + 2j - 2) (-n + j - 1)}{j (m + 1 + j - 1) (-n + \beta + 1 + 2j - 2) (-n + \beta + 2 + 2j - 2)} \right]. \end{aligned}$$

Es decir,

$$C_j = \frac{C_0 (\beta + 1)_j (-n)_j (m)_{2j}}{j! (m + 1)_j (-n + \beta + 1)_{2j}},$$

de donde,

$$m \sum_{j=0}^n C_j = m C_0 \sum_{j=0}^n \frac{(\beta + 1)_j (-n)_j (m)_{2j}}{j! (m + 1)_j (-n + \beta + 1)_{2j}}. \quad (4.17)$$

Utilizando la fórmula de duplicación para el símbolo de Pochhammer dado en (2.27), (4.17) se transforma en:

$$m \sum_{j=0}^n C_j = m C_0 \sum_{j=0}^n \frac{(\beta + 1)_j (-n)_j \left(\frac{m}{2}\right)_j \left(\frac{m+1}{2}\right)_j}{j! (m + 1)_j \left(\frac{-n+\beta+1}{2}\right)_j \left(\frac{-n+\beta+2}{2}\right)_j}, \quad (4.18)$$

el lado derecho de (4.18) corresponde a una función hipergeométrica ${}_4F_3$, que se puede escribir como:

$$m \sum_{j=0}^n C_j = m C_0 {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{m}{2}, \frac{m+1}{2} \beta + 1, -n, \\ \frac{-n+\beta+1}{2}, \frac{-n+\beta+2}{2}, m+1 \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (4.19)$$

Haciendo uso de la fórmula de sumación ${}_4F_3$ de Bayley's demostrada en la pagina 70 de [12]

$${}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}, b+n, -n \\ \frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}, a+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(b-a)_n}{(b)_n},$$

con la identificación $a = m$, $b = \beta + 1 - n$, y teniendo en cuenta que:

$$m C_0 = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)},$$

(4.19), se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} m \sum_{j=0}^n C_j &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} \frac{(\beta + 1 - n - m)_n}{(\beta + 1 - n)_n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} \frac{\Gamma(\beta + 1 - m)}{\Gamma(\beta + 1 - n - m)} \frac{\Gamma(\beta + 1 - n)}{\Gamma(\beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1 - m)}{\Gamma(\beta + 1 - m - n)} \quad \square \end{aligned}$$

4.5. Serie infinita con coeficientes binomiales

En el artículo [8] el autor evalúa la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \binom{2k}{k}} = \frac{\pi^2}{18},$$

usando para ello, la transformada de Laplace, algunas propiedades de la función Beta y ciertas propiedades de la función dilogaritmo. Los autores de este trabajo evalúan esta serie usando el método de las funciones hipergeométricas.

Sea:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \quad \text{donde } C_k = \frac{1}{k^2 \binom{2k}{k}}.$$

Para escribir esta suma como una serie hipergeométrica, examinemos el cociente:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k}.$$

Por medio de un cálculo se verifica que:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{k^2}{(2k+1)(2k+2)}. \quad (4.20)$$

como se ha observado en los ejemplos anteriores, C_k se puede escribir como el siguiente producto:

$$C_k = C_1 \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \left(\frac{C_3}{C_2} \right) \left(\frac{C_4}{C_3} \right) \cdots \left(\frac{C_{k-1}}{C_{k-2}} \right) \left(\frac{C_k}{C_{k-1}} \right),$$

teniendo en cuenta (4.20) se obtiene que:

$$\begin{aligned} C_k &= C_1 \left(\frac{1^2}{3 \cdot 4} \right) \left(\frac{2^2}{5 \cdot 6} \right) \left(\frac{3^2}{7 \cdot 8} \right) \cdots \left(\frac{(k-1)^2}{(2k-1)(2k-2)} \right) \\ &= \frac{2C_1}{(1)_{2k}} (k-1)!(k-1)!, \end{aligned}$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} C_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2C_1}{(1)_{2k}} (k-1)!(k-1)!,$$

utilizando el cambio de variable $k-1 = j$, y recordando que $(1)_j = j!$, la expresión anterior para S , toma la forma:

$$S = 2C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j(1)_j}{(1)_{2j+2}}, \quad (4.21)$$

usando la propiedad de los símbolos de Pochhammer

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)_{n-1},$$

con $\alpha = 1$ y $n = 2j+2$, (4.21), se puede escribir como:

$$S = C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j(1)_j}{(3)_{2j}} = C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j(1)_j}{2^{2j} \left(\frac{3}{2}\right)_j (2)_j}. \quad (4.22)$$

De esta manera S se puede escribir como:

$$S = C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j (1)_j (1)_j}{\left(\frac{3}{2}\right)_j (2)_j j!} \left(\frac{1}{4}\right)^j,$$

que a su vez, utilizando la notación para la función hipergeométrica, se puede escribir como:

$$S = C_1 {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, 2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{4}\right), \quad (4.23)$$

Para evaluar la función hipergeométrica utilizamos la identidad de Clausen

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 2a, 2b, a+b \\ a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b \end{matrix} \middle| x\right) = \left[{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x\right)\right]^2,$$

haciendo la identificación $a = b = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$, (4.23) la podemos escribir como:

$$S = C_1 {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, 2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{4}\right) = C_1 \left[{}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

Recordando que la función $f(x) = \arcsin x$, se puede representar en términos de una serie hipergeométrica como:

$$\arcsin x = x {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x^2\right), \quad (4.24)$$

tomando $x = \frac{1}{2}$, en (4.24), nos queda:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1}{4}\right),$$

y dado que $C_1 = \frac{1}{2}$, se obtiene finalmente:

$$S = \frac{1}{2} \left[2 \left(\arcsin \frac{1}{2}\right)\right]^2 = 2 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{18}. \quad \square$$

4.6. Otra representación para π como una serie infinita

Una fórmula que expresa el valor de π como una serie infinita fue proporcionada por el matemático japonés *Takebe Kenko* (1664-1739) en el año 1722. Según se puede ver en [7]. Esta serie también fue obtenida por el misionero *Pierre Jartoux*

en 1720, él trabajó en China y tuvo correspondencia con Leibniz, pero existe la convicción en los historiadores de la matemática que el descubrimiento de Kenko fue independiente. Anotamos además que L. Euler redescubrió esta misma serie en 1737. Hasta donde sabemos, por el método que a continuación utilizamos, dicha fórmula no se ha demostrado hasta el día de hoy.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Para escribir esta suma como una serie hipergeométrica, examinemos el cociente $\frac{C_{k+1}}{C_k}$, en donde:

$$C_k = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}.$$

Por medio de un cálculo se verifica que:

$$\begin{aligned} \frac{C_{k+1}}{C_k} &= \frac{2^{2k+3}(k+1)!(k+1)!(2k+2)!}{(2k+4)!k!k!2^{2k+1}}, \\ \frac{C_{k+1}}{C_k} &= \frac{2^2(k+1)^2}{(2k+4)(2k+3)}, \end{aligned}$$

como:

$$C_k = C_0 \left(\frac{C_1}{C_0} \right) \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \left(\frac{C_3}{C_2} \right) \cdots \left(\frac{C_{k-1}}{C_{k-2}} \right) \left(\frac{C_k}{C_{k-1}} \right),$$

entonces,

$$\begin{aligned} C_k &= C_0 \cdot \frac{2^2 1^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{2^2 2^2}{5 \cdot 6} \cdots \frac{2^2 k^2}{(2k+1) \cdot (2k+2)} \\ &= C_0 \frac{2^{(2k+1)} (1)_k (1)_k}{(2k+2)!} = C_0 \frac{2^{(2k+1)} (1)_k (1)_k}{(1)_{2k+2}} \\ &= C_0 \frac{2^{(2k)} (1)_k (1)_k (1)_k}{(3)_{2k} (1)_k} = \frac{2^{(2k)} (1)_k (1)_k (1)_k}{2^{2k} \left(\frac{3}{2}\right)_k (2)_k (1)_k}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k (1)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k (2)_k k!} (1)^k, \quad (4.25)$$

que usando la notación de función hipergeométrica (4.25), se puede escribir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = C_0 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ \frac{3}{2}, 2 \end{matrix} \middle| 1 \right).$$

Utilizando la fórmula de sumación ${}_3F_2$, que se demuestra en la página 148 de [12]

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ \frac{a+b+1}{2}, 2c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \Gamma\left(c - \frac{a+b-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right) \Gamma\left(c - \frac{a-1}{2}\right) \Gamma\left(c - \frac{b-1}{2}\right)},$$

con $a = b = c = 1$ y teniendo en cuenta que $C_0 = 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1},$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} &= \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^2 \\ &= \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^4 \frac{1}{4} = \frac{(\sqrt{\pi})^4}{4}. \end{aligned}$$

De donde finalmente se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} = \frac{\pi^2}{4} \quad \square$$

4.7. Un ejercicio del libro de Andrews, Askey y Roy

En este ejemplo se resuelve un ejercicio propuesto por G, Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy, en el texto de **Special Functions**, en la página 183 de [12]. Para escribir esta suma como una serie hipergeométrica, examinemos el cociente:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k}.$$

Por medio de un cálculo se verifica que:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{(n-k)(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^3} \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$C_k = C_0 \left(\frac{C_1}{C_0}\right) \left(\frac{C_2}{C_1}\right) \left(\frac{C_3}{C_2}\right) \cdots \left(\frac{C_{k-1}}{C_{k-2}}\right) \left(\frac{C_k}{C_{k-1}}\right),$$

entonces,

$$\begin{aligned} C_k &= C_0 \cdot \left(\frac{n \cdot 1 \cdot 2}{1^3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot 3 \cdot 4}{2^3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad \cdots \left(\frac{(n-k+1) \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{k^3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

$$C_k = C_0 \cdot \left(\frac{(-1)(-n) \cdot 1 \cdot 2}{1^3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{(-1)(-n+1) \cdot 3 \cdot 4}{2^3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \dots \left(\frac{(-1)(-n+k-1) \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{k^3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right),$$

de donde:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} C_k &= C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-n)_k (2k)!}{k! k! k!} \frac{(-1)^k}{2^k}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} C_k &= C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (1)_{2k}}{(1)_k (1)_k (1)_k} \left(\frac{1}{2} \right)^k. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Utilizando la fórmula de duplicación para el símbolo de Pochhammer dado en (2.27), (4.26), se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k 2^{2k} \left(\frac{1}{2} \right)_k (1)_k}{(1)_k (1)_k (1)_k} \left(\frac{1}{2} \right)^k = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k \left(\frac{1}{2} \right)_k}{(1)_k} \left(\frac{2^k}{k!} \right),$$

que escrito con notación de función hipergeométrica nos queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2 \right). \quad (4.27)$$

Para evaluar la función hipergeométrica que figura en el lado derecho de (4.27), procedemos por casos según n sea impar o que n sea par.

1. si n es par $n = 2m$, en este caso aplicamos la suma que aparece en la página 176 de [12],

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2a, b \\ 2b \end{matrix} \middle| x \right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b-a \\ b + \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{x^2}{4(x-1)} \right),$$

con la siguiente identificación $a = -m$, $b = \frac{1}{2}$, $x = 2$. (4.27) se transforma en:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -2m, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2 \right) = (-1)^m {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, \frac{1}{2} + m \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (4.28)$$

Usando la identidad de Chu-Vandermonde demostrada en el capítulo dos:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, a \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(c-a)_n}{(c)_n},$$

con $a = \frac{1}{2} + m, n=m, c = 1$. (4.28), se transforma en:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = \frac{(-1)^m (1 - \frac{1}{2} - m)_m}{(1)_m}. \quad (4.29)$$

Utilizando una de las propiedades de los símbolos de Pochhammer:

$$(1 - x - k)_k = (-1)^k (x)_k,$$

con $k = m, x = \frac{1}{2}$, (4.29) se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = \frac{(\frac{1}{2})_m}{(1)_m}.$$

Recordando que $n = 2m$ vemos que la suma anterior la podemos escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = \frac{(\frac{1}{2})_{\frac{n}{2}}}{(1)_{\frac{n}{2}}}.$$

2. Si n es impar, $n = 2m + 1$ aplicamos la fórmula de transformación de Pfaff que fue demostrada en el capítulo dos:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}\right),$$

con $a = -n, c = 1, b = \frac{1}{2}, x = 2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2\right) = (-1)^{-n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2\right).$$

Para que esta igualdad tenga sentido se debe dar que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 2\right) = 0.$$

De donde finalmente se tiene:

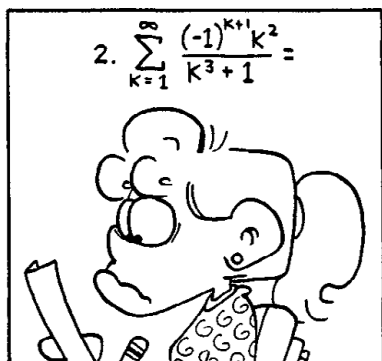
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{2})_{\frac{n}{2}}}{(1)_{\frac{n}{2}}}, & \text{si } n = 2m, \quad m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{si } n = 2m + 1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad \square \end{cases}$$

4.8. Una serie de caricatura

En la página 60 de la referencia [12]; los autores proponen en el ejercicio 56 demostrar la fórmula que aparece en la caricatura de la Figura 4.1

Figura 4.1: Figura tomada de la referencia [12] (2020)

56. Show that



$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} \operatorname{sech}(\pi \sqrt{3}/2).$$

This problem was given without the value by Amend [1996]. FOXTROT
© 1996 Bill Amend. Reprinted with permission of Universal Press Syndicate.
All rights reserved.

Sea

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^3 + 1}.$$

La descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{n^2}{n^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{n - \alpha} + \frac{1}{n - \bar{\alpha}} \right], \quad \text{donde } \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

así,

$$S = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + 1} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n - \alpha} + \frac{1}{n - \bar{\alpha}} \right] \equiv \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2. \quad (4.30)$$

■ Evaluación de S_1 :

La conocida fórmula

$$\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n + 1}, \quad -1 < x \leq 1,$$

obtenida por la integración término a término de la serie geométrica, permite encontrar el valor de S_1 :

$$S_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = -\left[\log 2 - 1\right] = 1 - \log 2. \quad (4.31)$$

■ Evaluación de S_2 :

Reordenando la serie que define a S_2 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n-1-\alpha} + \frac{1}{2n-1-\bar{\alpha}} - \frac{1}{2n-\alpha} - \frac{1}{2n-\bar{\alpha}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\frac{(1+\alpha)}{2}} - \frac{1}{n-\frac{\alpha}{2}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-\frac{(1+\bar{\alpha})}{2}} - \frac{1}{n-\frac{\bar{\alpha}}{2}} \right) \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} [S_3 + S_4] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Recordando que: (ver ejemplo 1.3.3)

$$\psi(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right),$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-\frac{\alpha}{2}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-\frac{(1+\alpha)}{2}} \right) = \psi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right),$$

de manera similar, se muestra que:

$$S_4 = \psi\left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\bar{\alpha}}{2}\right),$$

al sustituir las expresiones de S_3 y S_4 en la igualdad (4.32), se tiene:

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[\psi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\bar{\alpha}}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\psi\left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \right], \quad (4.33)$$

teniendo en cuenta la fórmula, ver ejemplo 1.5.2:

$$\psi(x) - \psi(1-x) = \pi \cot(\pi x),$$

con $x = 1 - \frac{\alpha}{2}$, en el primer sumando de la igualdad anterior y con $y = 1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}$, en el segundo, se tiene que (4.33), se puede escribir como:

$$S_2 = -\frac{\pi}{2} [\cot \pi x + \cot \pi y], \quad (4.34)$$

como $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $y = 1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}$

$$\sin \pi(x + y) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -1 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \sin \pi x &= \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) = \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) - \sin \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) \right], \end{aligned}$$

se manera análoga:

$$\sin \pi y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) - \sin \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) \right],$$

luego,

$$\sin \pi x \cdot \sin \pi y = \frac{1}{2} \left[\cos^2 \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) - \sin^2 \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}i \right) \right] = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}i \right),$$

así,

$$\sin \pi x \cdot \sin \pi y = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}}{2} = \frac{1}{2} \cosh \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right) \quad (4.36)$$

Pero,

$$\begin{aligned} \cot \pi x \cot \pi y &= \frac{\cos \pi x}{\sin \pi y} + \frac{\cos \pi y}{\sin \pi x} = \frac{\sin \pi y \cos \pi x + \cos \pi y \sin \pi x}{\sin \pi x \sin \pi y} \\ \cot \pi x \cot \pi y &= \frac{\sin \pi(x + y)}{\sin \pi x \sin \pi y} = -\frac{2}{\cosh \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right)} \\ &= -2 \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Observe que se ha utilizado en la penúltima igualdad lo establecido en (4.35) y (4.36). Reemplazando en (4.37) en (4.34):

$$S_2 = \pi \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right) \quad (4.38)$$

Finalmente, de (4.31), (4.38), y (4.30) se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^3 + 1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \right)$$

4.9. Identidades polinomiales con coeficientes binomiales

Para establecer ciertas identidades que involucran factoriales, coeficientes binomiales, y símbolos de Pochhammer, el autor en [18] utiliza las distribuciones normal y gamma bivariadas, calculando momentos adecuados de estas distribuciones de probabilidad de dos maneras distintas y comparando los resultados así obtenidos.

Con la estrategia descrita en el párrafo anterior, se demuestra en [18] el siguiente resultado:

Teorema 4.9.1

Para enteros no negativos s, k, n, m y números complejos ρ y β se tiene:

$$\sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} (1+\rho)^{2k-2j} (1+\rho^2)^j (2j-1)!! (2k-2j-1)!! = \frac{(2k)!}{k!} (1+\rho)^k. \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2k} \sum_{m=0}^{[j/2]} (2\rho)^{j-2m} \binom{k}{j-2m} \binom{k-j+2m}{m} = (1+\rho)^k. \quad (4.40)$$

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(\beta)_{j+m}}{(\beta)_j} = (-1)^n n! \binom{m}{n} \frac{(\beta)_m}{(\beta)_n}. \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} (\beta)_m (\beta)_{n-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} \frac{\rho^k k!}{(\beta)_k} \\ = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n!}{(n/2)!} (\beta)_{n/2} (1-\rho)^{n/2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1-\rho)^j \rho^{m-j} (\beta)_{n-j} (\beta+m-j)_j \\ = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n!}{(n/2)!} (\beta)_{n/2} (1-\rho)^{n/2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.43)$$

En este ejemplo, usando el método de las funciones hipergeométricas, se demuestran las identidades (4.39) y (4.41) dejando como un buen ejercicio para el lector, la verificación de las otras tres.

Demostración 4.9.1

Demostración de (4.39).

Denotemos con S , la suma que figura en el lado izquierdo de (4.39). Teniendo en cuenta la definición de factorial doble:

$$(2j-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2j-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2j-1)(2j)}{2 \cdot 4 \cdots (2j)} = \frac{(2j)!}{2^j j!},$$

de manera similar,

$$(2k-2j-1)!! = \frac{(2k-2j)!}{2^{k-j}(k-j)!},$$

así,

$$S = \sum_{j=0}^K \binom{2k}{2j} (1+\rho)^{2k-2j} (1-\rho^2)^j \frac{(2j)!(2k-2j)!}{2^k j!(k-j)!},$$

recordando que el número combinatorio $\binom{2k}{2j}$ se define por

$$\binom{2k}{2j} = \frac{(2k)!}{(2k-2j)!(2j)!},$$

S se puede escribir como

$$S = \frac{(1+\rho)^{2k}(2k)!}{2^k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(k-j)!j!} \frac{(1-\rho^2)^j}{(1+\rho)^{2j}}, \quad (4.44)$$

pero,

$$\frac{(1-\rho^2)^j}{(1+\rho)^{2j}} = \frac{(1-\rho)^j(1+\rho)^j}{(1+\rho)^{2j}} = \frac{(1-\rho)^j}{(1+\rho)^j} = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^j$$

y usando nuevamente la definición del número combinatorio

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!},$$

la expresión para S dada en (4.44) toma la forma:

$$S = \frac{(1+\rho)^{2k}(2k)!}{2^k k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^j, \quad (4.45)$$

Por la igualdad (1.32) establecida en el corolario 1.7.1 se tiene:

$$\binom{k}{j} = \frac{(-1)^j (-k)_j}{j!},$$

y denotando con β el cociente que figura en (4.45),

$$S = \frac{(1+\rho)^{2k}(2k)!}{2^k k!} \sum_{j=0}^k (-k)_j \frac{(-\beta)^j}{j!},$$

la suma que figura en el lado derecho de la igualdad anterior, se reconoce como una función hipergeométrica ${}_1F_0$ que corresponde a la serie binomial (ver ejemplo 2.3.2) luego,

$$S = \frac{(1+\rho)^{2k}(2k)!}{2^k k!} {}_1F_0 \left(\begin{matrix} -k \\ - \end{matrix} \middle| -\beta \right) \quad (4.46)$$

recordando que:

$${}_1F_0 \left(\begin{matrix} -k \\ - \end{matrix} \middle| -\beta \right) = (1+\beta)^k$$

y teniendo en cuenta que $\beta = \frac{1-\rho}{1+\rho}$, resulta:

$${}_1F_0 \left(\begin{matrix} -k \\ - \end{matrix} \middle| -\beta \right) = \left(1 + \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^k = \frac{2^k}{(1+\rho)^k},$$

reemplazando en (4.46) se obtiene finalmente que:

$$S = \frac{(1+\rho)^{2k}(2k)!}{2^k k!} \frac{2^k}{(1+\rho)^k} = \frac{(2k)!(1+\rho)^k}{(k)!},$$

con lo cual queda establecida la identidad (4.39) .

Demostración 4.9.2

Demostración de (4.41) Denotemos con T la serie que aparece en el lado izquierdo de (4.41)

$$T = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(\beta)_{j+m}}{(\beta)_n},$$

se debe probar que:

$$T = (-1)^n n! \binom{m}{n} \frac{(\beta)_m}{(\beta)_n}.$$

De la relación entre función Gamma y el símbolo de Pochhammer (ver teorema 1.7.2)

$$(\beta)_{j+m} = \frac{\Gamma(\beta + m + j)}{\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta + m + j)}{\Gamma(\beta + m)} \frac{\Gamma(\beta + m)}{\Gamma(\beta)} = (\beta + m)_j (\beta)_m,$$

del corolario 1.7.1 se sabe que:

$$\binom{n}{j} = \frac{(-1)^j (-n)_j}{j!},$$

así,

$$T = \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{j!} \frac{(\beta + m)_j (\beta)_m}{(\beta)_j} = (\beta)_m {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, \beta + m \\ \beta \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (4.47)$$

Recordando la identidad de Chu-Vandermonde (ver corolario 2.5.1)

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, a \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(c-a)_n}{(c)_n},$$

mediante la identificación $a = \beta + m$, $c = \beta$, (4.46) se puede escribir:

$$T = \frac{(\beta)_m (-m)_n}{(\beta)_n} = (\beta)_m (-1)^m m! \binom{m}{n},$$

en donde se ha hecho uso nuevamente del corolario 1.7.1, con lo cual queda establecida la identidad (4.41).

Figura 4.2: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1987), imagen tomada de: <https://shre.ink/LDuU> (2026)



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Westfalia, y murió el 19 de febrero de 1897 en Berlín, Alemania. Provenía de una familia modesta y mostró talento temprano para las matemáticas. Estudió en la Universidad de Bonn, donde inicialmente se dedicó al estudio de la teología, pero luego se cambió a las matemáticas. Continuó sus estudios en la Universidad de Münster.

Karl Weierstrass tuvo varios maestros y mentores a lo largo de su formación académica. Algunos de los más significativos: Christoph Gudermann, Ferdinand Gotthold Max Eisenstein y Gustav Dirichlet: estos maestros influyeron no solo por su conocimiento matemático directo, sino también por su ejemplo y orientación en términos de rigor y profundidad en el estudio de las matemáticas. Hizo contribuciones significativas en análisis matemático, especialmente en la teoría de funciones, donde es conocido por la formulación y desarrollo del concepto de función matemática como lo entendemos hoy en día. Su trabajo sobre series convergentes, teoría de funciones abelianas, y la aproximación de funciones continuas por polinomios tuvo un impacto profundo en el desarrollo del análisis moderno.

Karl Weierstrass es recordado no solo por sus teoremas y contribuciones específicas, sino también por su enfoque riguroso y su capacidad para abordar problemas difíciles con profundidad matemática y precisión. Su legado incluye no solo sus contribuciones teóricas fundamentales, sino también la formación de varios estudiantes destacados en el campo de las matemáticas. Algunos de sus alumnos más prominentes: Georg Cantor, Ernst Zermelo y Sofía Kovalevskaya, quien fue una de las primeras mujeres en obtener un doctorado en matemáticas en Europa. Kovalevskaya estudió con Weierstrass en Berlín y se convirtió en su discípula más

famosa. Su trabajo se centró en la teoría de ecuaciones diferenciales y las integrales elípticas, contribuyendo significativamente al campo.

Las ideas y técnicas desarrolladas por Weierstrass influyeron en numerosas áreas de las matemáticas, incluyendo el análisis funcional, la teoría de conjuntos, la teoría de ecuaciones diferenciales y la geometría. Su enfoque en la claridad conceptual y la solidez matemática sigue siendo relevante hasta el día de hoy.

Karl Weierstrass no solo ha dejado una marca indeleble en el análisis matemático y la teoría de funciones, sino que también ha inspirado estándares de rigor y claridad que siguen siendo fundamentales para el desarrollo continuo de las matemáticas modernas.

4.10. Problemas propuestos

Con el fin de que el estudiante tenga la oportunidad de aplicar la metodología propuesta en el presente texto, proponemos los siguientes problemas:

Problema 1.

En el artículo [Choi,J,Rarhie. A. K, Srivastava. H.N. Some hypergeometric and other evaluations of $\zeta(2)$, and alied series, Applied Mathematics and Computation 104 (1999), 101-108][17] los autores presentan otra forma de evaluar la serie:

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

usando funciones hipergeométricas. Siguiendo los pasos que indicamos a continuación el lector podrá calcular este valor de la serie, como se presenta en la mencionada referencia.

Considere la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ y la función Zeta generalizada $\zeta(s, a)$ definidas respectivamente mediante:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

$$\zeta(s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s}, \quad (a \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Sea $\Phi(z, s, a)$ la función definida por:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+a)^s}, \quad (|z| < 1, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots)$$

- Verifique:

$$\begin{aligned}\Phi(1, s, a) &= \zeta(s, a) \\ \Phi(1, s, \frac{1}{2}) &= \zeta(s, \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s)\end{aligned}$$

- Muestre que en términos de la función hipergeométrica generalizada la función Φ se puede escribir:

$$\Phi(z, n, a) = a^{-n} {}_{n+1}F_n \left(\begin{matrix} 1, a, a, a, \dots, a \\ a+1, a+1, \dots, a+1 \end{matrix} \middle| z \right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- Con los resultados obtenidos en los ítems anteriores establezca que:

$$\begin{aligned}\zeta(n, a) &= a^{-n} {}_{n+1}F_n \left(\begin{matrix} 1, a, a, a, \dots, a \\ a+1, a+1, \dots, a+1 \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad n \in \mathbb{N} - \{1\} \\ \zeta(n) &= \left(\frac{2^n}{2^n - 1} \right) {}_{n+1}F_n \left(\begin{matrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad n \in \mathbb{N} - \{1\}\end{aligned}$$

- Finalmente teniendo en cuenta la definición de $\zeta(n)$, del ítem anterior y la fórmula de sumación de Dixon

$$\begin{aligned}{}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \middle| 1 \right) &= \\ \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}a)\Gamma(1 + a - b)\Gamma(1 + a - c)\Gamma(1 + \frac{1}{2}a - b - c)}{\Gamma(1 + a)\Gamma(\frac{1}{2} + a - b)\Gamma(1 + \frac{1}{2}a - c)\Gamma(1 + a - b - c)}.\end{aligned}$$

Muestre que:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problema 2.

En el artículo **Algoritmo de Gosper e aplicações**, escrito por Humberto Silva N, publicado en la revista Eureka No. 29, revista de la olimpiada Brasileira de Matemáticas, se ilustra el Método Gosper para encontrar fórmulas cerradas para ciertas sumas hipergeométricas. Allí se muestra:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2k}{k}^2}{(k+1)4^{2k}} = \frac{n \binom{2n}{n}^2}{4^{2n-1}},$$

invitamos a resolver este problema, utilizando la estrategia desarrollada en el trabajo.

Problema 3.

El siguiente problema corresponde al problema No. 11356, propuesto en la revista American Mathematical Monthly, de Abril de 2008. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

Problema 4.

En el *Preprint* [19] Utilizando la función generatriz para los polinomios de Gegenbauer, la autora da una prueba de:

$$\sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(\lambda+k)\Gamma(\lambda+m-k)}{\Gamma(\lambda)k!\Gamma(\lambda)(m-k)!} = \frac{\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)m!},$$

la cual se realiza, usando un procedimiento basado en solución de ecuaciones diferenciales. Establezca esta identidad, siguiendo un procedimiento similar al usado para resolver el **ejemplo 3.4** de este trabajo.

Problema 5.

La suma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \binom{2k}{k}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

fue demostrada por D.H Lehmer, publicado en "Interesting series involving the central binomial coefficient" Amer Math. Monthly 92(1985), 449-457,[11] para ello, Lehmer uso la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{k \binom{2k}{k}} = \frac{2x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}},$$

para $|x| < 1$. Utilizando diferenciación, integración y tomando valores particulares de x . Se propone evaluar la serie, escribiéndola como una serie hipergeométrica.

Bibliografía

- [1] Burton, D. *The History of Mathematics: An introduction*, 6th edition, (2006) Ed. Mac Graw Hill.
- [2] Varadarajan, V.S. *Euler through time: a new look at old themes*, (2006), American Mathematical Society.
- [3] Havil, J. *Gamma: exploring Euler's constant*, (2009), Princeton University Press.
- [4] Dunnington, G. W. *Carl Friederich Gauss: Titan of Science*, (2004), The Mathematical Association of America.
- [5] Duverney, D. *An Introduction to Hypergeometric Functions*, (2024), Birkhauser.
- [6] Ismail, M. *On formulas of Ramanujan and Evars*, Ramanujan J , (2006). 11: 349-353.
- [7] Smith, D. and Mikami, Y. *History of Japanese Mathematics*, Chicago, open court, (1914).
- [8] Courtney, M. *Infinite series with binomial coefficients*, Mathematics Magazine, vol 64, (1991). N°1, 53 – 55
- [9] Euler, L. *Institutiones Calculi Integralis*, opera omnia ser., vols 11-13 (1769).
- [10] Lavoie, J. Grondin, F. Rathie, A. and Arora, K. *Generalizations of Dixon's theorem on the sum of a ${}_3F_2$* , Math. Comp. **62** (1994), 267–276.
- [11] D.H Lehmer, *Interesting series involving the central binomial coefficient*, Amer Math. Monthly 92(1985), 449-457.
- [12] G. Andrews, R Askey, R Roy. *Special Functions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Volume 71 (Cambridge, Editorial Board, 2000).
- [13] Y. L. Luke, *The special functions and their approximations*, Academic, New York (1969).

- [14] E.D. Rainville, *Special functions*, Macmillan, New York, (1960).
- [15] Artin, E., *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York. (1964).
- [16] Bayley, W. N. *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, New York. (1972).
- [17] Choi, J., Rarhie, A. K, Srivastava, H.N. *Some hypergeometric and other evaluations of $\zeta(2)$, and allied series*, Applied Mathematics and Computation 104 (1999), 101-108
- [18] Pawel J. Szablowski, *Polynomial Identities Involving Binomial Coefficients and Double and Rising Factorials via Probabilistic Interpretations*, Journal of Integer Sequences, Vol. 26 (2023),
- [19] Dann S., *An Interesting application of Gegenbauer polynomials*, <https://arxiv.org/pdf/1003.5216>, (2010).
- [20] V. Mircea, Problema 489, Problemas y Soluciones, La *Gaceta* de la RSME, Vol 27.pag 329 - 346, (2024).



Juan Carlos López Carreño (jclopez@unipamplona.edu.co)

Licenciado en Matemáticas por la Universidad Nacional de Colombia, Doctor en Matemáticas por la Universidad Nacional de Colombia. Le gusta escuchar salsa. Amante de la buena literatura, su autor favorito es Julio Cortázar. Actualmente es profesor en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pamplona.



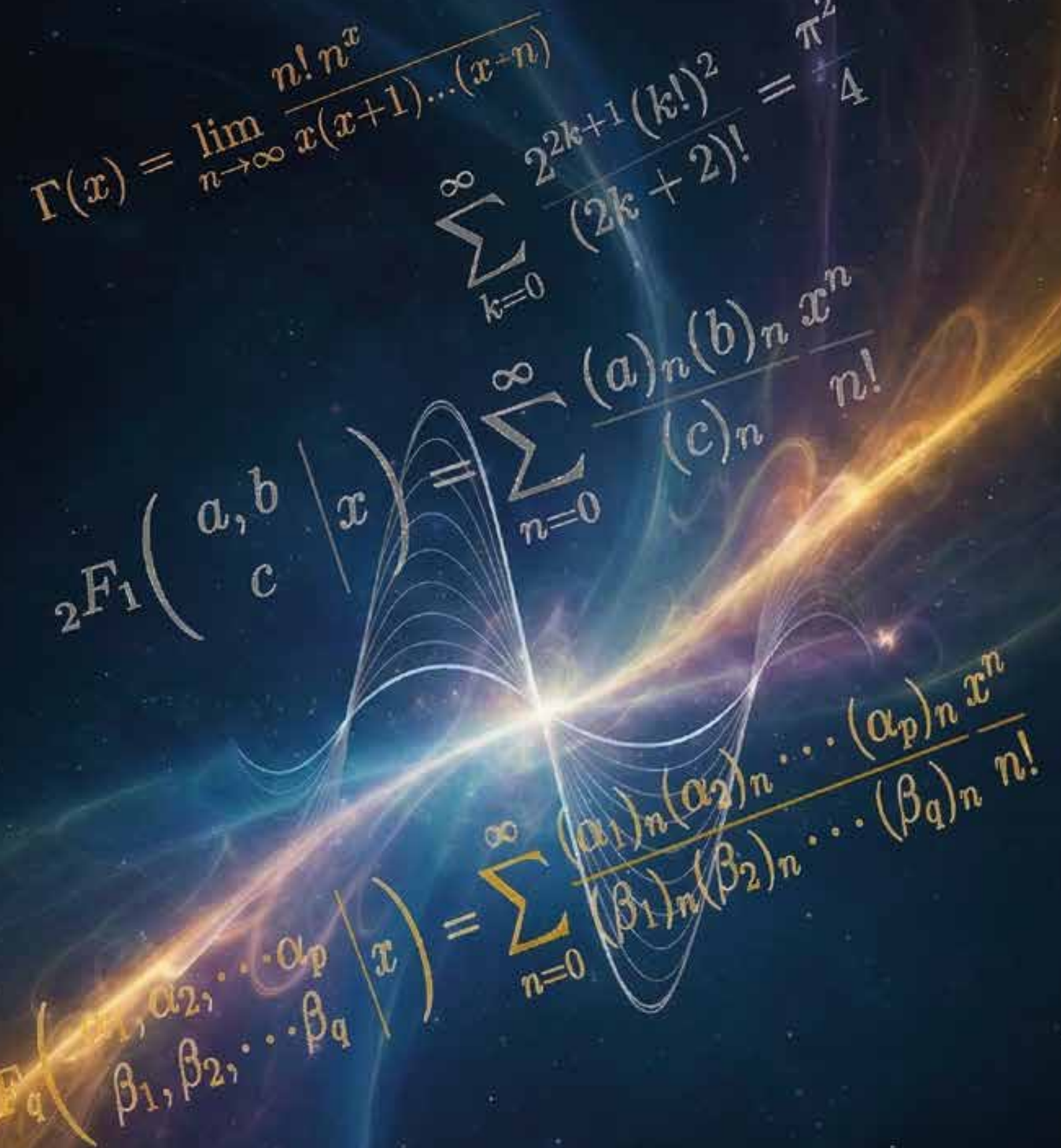
Rosalba Mendoza S. (rosalbamesu@unipamplona.edu.co)

Licenciada en Matemáticas - Física por la Universidad de Pamplona, Máster en Matemáticas por la Universidad Industrial de Santander. Disfruta de la vida familiar y de la docencia. Actualmente cursa estudios de doctorado en Ingeniería Matemática en la Universidad Carlos III de Madrid. Actualmente trabaja como profesora en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pamplona.



Jairo Alonso Mendoza S. (jairoam@unipamplona.edu.co)

Licenciado en Física - Matemáticas por la Universidad de Pamplona, Magíster en Física por la Universidad Industrial de Santander y Doctor en Ciencias Naturales, Física, de la Universidad Industrial de Santander, Colombia. Su investigación se centra en partículas elementales y mecánica cuántica. Actualmente es profesor en el Departamento de Física de la Universidad de Pamplona.



$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} (k!)^2}{(2k+2)!} = \frac{\pi^2}{4}$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}$$

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n x^n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_q)_n n!}$$