

PRODUCCIÓN DE MATERIA OSCURA A TRAVÉS DE LA FUSIÓN DE GLUONES

OMAR RAFAEL TORRIJO GONZALEZ

Documento presentado al Programa de Física
como requisito para optar por el título de Físico.

Directores: Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas
Ph.D Blanca Cecilia Cañas Orduz



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Básicas

Julio 2024

Resumen

En este trabajo de grado se estudia la producción de bosones de Higgs a través del canal dominante de fusión de gluones mediado por un loop virtual del quark top y el posterior decaimiento en materia oscura. La amplitud de scattering para este proceso, así como la sección eficaz de producción del bosón de Higgs, se calcula en el formalismo canónico de la QFT usando la expansión perturbativa de Dyson y el teorema de Wick, pero también se verifica usando el método diagramático de Feynman. Para reducir la amplitud correspondiente en términos de integrales irreducibles con estructura analítica conocida, se utiliza regularización dimensional y el método de Passarino-Veltman. El cálculo completo se implementó en un código en Mathematica con la ayuda de paquetes especializados, como FeynArts y FeyCalc. Finalmente, se revisan los resultados entregados por los experimentos ATLAS y CMS sobre los posibles decaimientos invisibles del Higgs en materia oscura. El papel que juega la sección eficaz de producción del bosón de Higgs en los decaimientos invisibles y las restricciones que se imponen sobre sus tasas de decaimiento son estudiadas en el modelo Higgs-portal considerando los WIMPs como candidatos a materia oscura.

Palabras Clave: amplitud de probabilidad, fusión, Gluón, Higgs, materia oscura, regularización dimensional, sección eficaz, WIMP.

Agradecimientos

Deseo agradecer a mi familia mi madre Yaritza, mi padre Rafael, y mis hermanos Andris y Camilo por siempre estar presentes y apoyarme mientras desarrollaba mi proceso formativo, son pilares que me han sostenido con todo lo que tienen y por quienes no me alcanzan las palabras para agradecer a la vida por el tipo de familia en la que nací.

A mis directores de trabajo de grado el profesor Ph.D Edilson Reyes quien durante mas de 3 años ha estado formándome para que pueda adquirir todas las competencias necesarias para afrontar futuros proyectos, a la profesora Ph.D Blanca Cañas quien en este año de su dirección me ha motivado a explorar la física de neutrinos y abordar retos como lo fue el estudio de la materia oscura.

Agradecer al proyecto PhysicsLatam, quien en colaboración con el ICTP, la UNESCO y IAEA me impartieron el curso de Quantum Field Theory I en el año 2023.

Agradecer al profesor Ph.D Angelo Raffaele Fazio docente adscrito a la Universidad Nacional y Director del grupo Campos y Partículas por el seminario impartido en la Universidad de Pamplona sobre One-Loop Renormalization in QFT en el presente año (2024).

Ahora me es pertinente agradecer de forma personal a algunas personas que aun sin necesidad de apoyarme lo hicieron y también merecen ser resaltados en este trabajo ya que su contribución me ayudó a concluir en este punto, el profesor Ph.D Juan David Vasquez quien en un principio me mostró el por que es importante resaltar y aplaudir el merito y evitar que sea menospreciado, el abogado Jhon smith quien me ha motivado siempre a continuar con mi proceso formativo.

Fuente de Financiación

Este trabajo fue financiado con recursos de las siguientes convocatorias:

- Convocatoria : 890-2020 CONV. PARA EL FORTALECIMIENTO DE CTel EN INST. DE EDUCACIÓN SUPERIOR PÚBLICAS MECANISMO I, realizada por el Ministerio de Ciencias (Minciencias), del proyecto: Explorando las fronteras del Modelo Estándar: Neutrinos y Materia Oscura.
- Convocatoria interna de banco de proyectos - año 2024 - Universidad de Pamplona, asociado al proyecto «Observables de Alta Precisión en la Física del Bosón de Higgs» con código SIGP 400-156.012-014(GA313-BP-2024).

Tabla de contenido

	Pag.
Resumen	I
Agradecimientos	II
Fuente de Financiación.....	III
TABLA DE CONTENIDO	IV
1. Introducción.....	1
2. Teorías Gauge No Abelianas	3
2.1 Teoría de Yang Mills	3
2.2 Cromodinamica Cuántica	6
2.3 Mecanismo de Brout-Englert-Higgs	9
2.4 Reglas de Feynman QCD	13
3. Fusión de gluones para la Producción de bosones de Higgs	17
3.1 Mecanismos de producción del Higgs	17
3.2 Cálculo de la sección eficaz de producción del bosón de Higgs a través de la fusión de gluones	18
4. Materia Oscura	27
4.1 Materia Oscura	27
4.2 Candidatos a materia oscura.....	29
4.2.1 Materia oscura fría	29
4.2.2 Materia oscura tibia	30
4.2.3 Materia oscura caliente.....	31
4.3 Métodos de detección de DM	31
4.3.1 Método de detección directa	32
4.3.2 Método de detección indirecta	32
4.3.3 Método de detección por colisionadores.....	33
4.4 Búsqueda de materia oscura con los experimentos ATLAS y CMS: decaimientos invisibles del bosón de Higgs.....	33
4.4.1 Fusión de bosones vectoriales	34
4.4.2 Emisión de leptones más momento transversal perdido	35

4.4.3	Fusión de gluones	36
4.4.4	Resultados obtenidos por los experimentos ATLAS y CMS	37
5.	Conclusiones	41
	Referencias	42
	Apendice. A. Notación y convenciones	52
A.1	Unidades	52
A.2	Relatividad	52
A.3	Matrices	52
A.4	Transformada de Fourier	53
A.5	QCD	53
	Apendice. B. Álgebra de Dirac	54
	Apendice. C. Funciones de Passarino-Veltman	56
	Apendice. D. Cálculos adicionales	58
D.1	Expansión de Dyson	58
D.2	Expansión del cuarto término	58
D.3	Definición de las Contracciones de Wick	59
D.4	Aplicación de las contracciones de Wick	60
D.5	Álgebra de Dirac en Trazas de la amplitud.	62
D.6	Aplicación del Método de Passarino-Veltman.	63
D.7	Relación entre los logaritmos complejos y la función inversa del seno.....	79
	Apendice. E. Desarrollo Computacional	80

1. Introducción

Con el descubrimiento del boson de Higgs en el 2012 por los experimentos ATLAS y CMS [1, 2] en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC), el cual fue teorizado por P. Higgs, F. Englert y R. Brout [3, 4], se abrió la posibilidad de estudiar de manera directa las propiedades de dicha partícula, los canales de producción y sus decaimientos [5, 6]. El bosón de Higgs puede decaer en múltiples partículas, sin embargo, existe una parte de dichos decaimientos que son considerados invisibles donde se espera encontrar indicios de nueva física [7, 8, 9]. Los productos de estos decaimientos pueden ser candidatos a materia oscura, aunque en la actualidad los datos analizados en el LHC no muestran ninguna discrepancia significativa con las predicciones del Modelo Estándar. La evidencia de la existencia de materia oscura proviene de las observaciones cosmológicas donde se han estudiado las diferentes estructuras colapsadas gravitacionalmente, como se concluyó inicialmente del estudio del cúmulo de coma [10] y posteriormente en otros cúmulos de galaxias [11, 12, 13]. Sin embargo, se espera que en los aceleradores futuros como el HL-LHC, FCC o ILC, los cuales tendrán una mayor luminosidad y energía, se obtengan resultados adicionales sobre esta búsqueda.

El propósito de este trabajo es estudiar el proceso de producción de materia oscura a través del decaimiento del bosón de Higgs [14, 15, 16, 17, 18]. El bosón de Higgs es una partícula inestable que actualmente solo puede ser producida a partir del scattering inelástico de protones en el LHC, es necesario entonces considerar su sección eficaz de producción y relacionarlo con las tasas de decaimiento. El cálculo perturbativo de la amplitud de scattering para la producción del Higgs a través de la fusión de gluones, que representa el canal más probable de producción, ha sido estudiado en [19, 18, 20], y será estudiado en detalle al orden de un-loop en este trabajo. La importancia que tiene la sección eficaz de producción del bosón de Higgs en los decaimientos invisibles [21] y el cálculo de sus restricciones sobre los límites superiores [22, 9] serán relevantes para las futuras búsquedas en los próximos aceleradores.

Este trabajo de grado esta dividido en cinco secciones. En el Capítulo 2 se dará una introducción a las teorías gauge no abelianas, conocidas como teorías de Yang-Mills,

se estudia el Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica y las reglas de Feynman derivadas de los términos de interacción. Se revisa el mecanismo de Higgs encargado de darle masa a las partículas en el Modelo Estándar, centrándonos particularmente en las partículas masivas asociadas al proceso que se está estudiando. En el Capítulo 3 se abordarán los mecanismo de producción del boson de Higgs, específicamente en el canal dominante de la fusión de gluones mediados por un loop de quarks top, y se estudia el posterior decaimiento a materia oscura. Se realiza el cálculo explícito de la sección eficaz de producción del bosón de Higgs a través de la fusión de gluones implementando un algoritmo en Mathematica con ayuda de los paquetes FeynArts y FeynCalc. En el Capítulo 4 se estudiará el concepto de materia oscura, la evidencia que respalda dicho concepto, los posibles candidatos a materia oscura y sus propiedades, y la búsqueda de materia oscura con los experimentos ATLAS y CMS en los decaimientos invisibles del bosón de Higgs donde se mostrará la importancia del conocimiento de la sección eficaz de producción del bosón de Higgs en los decaimientos y las restricciones que se imponen sobre las tasas de decaimiento a materia oscura. Finalmente, en el Capítulo 5 damos nuestras conclusiones y perspectivas futuras de investigación. Además de estos cinco capítulos, hay un apartado de Apéndices donde en el Apéndice A, se explica las notaciones y convenciones necesarias para entender los cálculos que se harán en el trabajo de grado; en el Apéndice B, se aborda el álgebra de Dirac donde se explican las propiedades de las matrices de Dirac sus reglas de anti-conmutación, algunas identidades relacionadas que se cumplen en 4 dimensiones y como se deben tratar las matrices en d dimensiones; en el Apéndice C, se detallan las funciones de Passarino-Veltman con una breve descripción de estas, sus propiedades, algunos ejemplos y superficialmente el método de reducción de las funciones de rango tensorial mayores que cero; en el Apéndice D, se agrupan los cálculos adicionales que detallan los procedimientos necesarios para desarrollar el cálculo principal de la sección eficaz de producción del Higgs; y en el Apéndice D, está el código desarrollado mediante el programa de Mathematica con los paquetes de «FeynArts», «FeynCalc», y «FeynHelper» que apoya y verifica el cálculo de la amplitud de probabilidad al cuadrado con la suma de todos los estados de polarización.

2. Teorías Gauge No Abelianas

2.1 Teoría de Yang Mills

La teoría de Yang Mills es una teoría cuántica de campos (QFT) con una simetría gauge no abeliana propuesta por C.N Yang y R.L. Mills en 1954 [23]. El grupo de simetría es el grupo $SU(N)$, el cual tiene dos representaciones: la representación fundamental (r) y la representación adjunta (G). La dimensión e índices para cada una de estas representaciones se encuentran en la Tabla (2.1):

Los generadores de la simetría $SU(N)$ satisfacen el álgebra de Lie en la representación adjunta:

$$[T_G^a, T_G^b]_{de} = i f^{abc} (T_G^c)_{de}, \quad (2.1)$$

que es equivalente a la identidad de Jacobi para los generadores en la representación fundamental. El Lagrangiano clásico invariante bajo la transformación $SU(N)$ de los campos gauge: $A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) - f^{abc} A_\mu^b(x) \alpha^c(x)$ es:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde $F_{\mu\nu}^a = \partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ como el campo de fuerza gauge, A_μ^a es el campo gauge, g es la constante de acoplamiento y f^{abc} es un conjunto de números llamados constantes de estructura de grupo de Lie no abeliano [24].

La cuantización funcional introducida por Feynman utilizando el formalismo de integrales de camino para teorías cuánticas de campo inicia con una teoría clásica donde se considera una fuente y define la amplitud para que una partícula se

Dimensión	Índice
N	r
$N^2 - 1$	G

Tabla 2.1: Dimensión e índices de los dos tipos de representaciones.

detectada como la suma de todos los caminos posibles entre la fuente y el detector, la cual es dependiente de la acción en función de los campos y dicha amplitud es definida de manera clásica como:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}, \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{D}\phi$ es la medida funcional sobre el espacio de configuraciones de todos los campos y $S[\phi]$ es la acción [25]. Si consideramos que el kernel de la acción en función de los campos es cuadrático obtendríamos una integral tipo gaussiana del cual conocemos su solución y el propagador del campo sería el inverso de dicho kernel, un ejemplo de una acción cuadrática sería:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2], \quad (2.4)$$

donde el kernel asociado al espacio de Fourier es:

$$\mathcal{K}(k) = k^2 - m^2, \quad (2.5)$$

así el propagador del campo es:

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.6)$$

esto es para campos escalares en una teoría libre [26], pero si consideramos campos gauge, por ejemplo un campo electromagnético de manera clásica, este tiene simetrías locales generando redundancia sobre la medida y para resolver esto se introduce un término que fija el gauge o gauge fixing eliminando la redundancia sobre la medida al ser estados físicamente equivalentes, este proceso es posible de hacer en las teorías gauge abelianas y no abelianas pero para este segundo caso el procedimiento tiene su complejidad, sin embargo vale la pena por que las ventajas asociadas a este procedimiento de cuantización son: Genera consistencia en la teoría, eliminando la redundancia sobre la medida, define bien los propagadores, tiene una interpretación física clara, todos los términos extras que dan consistencia a la cuantización funcional aparecen de manera natural se puede aplicar a cualquier teoría efectiva y mas allá del Modelo Estándar [27, 28]. La cuantización funcional de \mathcal{L}_{YM} no es trivial y presenta varios inconvenientes. El mas importante se debe al procedimiento de fijación de gauge para resolver la redundancia obtenida debido a la simetría interna de la Lagrangiana. El determinante jacobiano que acompaña a la medida de integración en

la integral funcional depende del campo gauge para una simetría no abeliana, haciendo imposible incluirlo dentro de un factor de normalización de la medida de integración. La solución a este problema fue proporcionada por L.D Faddeev y V. Popov (FP) [29], realizando el siguiente procedimiento. Partiendo de la función de Green de N puntos, definida como:

$$G(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta^N}{\delta J^{\mu_1}(x_1) \dots \delta J^{\mu_N}(x_N)} \left(\frac{Z[J(x_1), \dots, J(x_N)]}{Z[0]} \right) \Big|_{J=0}, \quad (2.7)$$

donde $J^{\mu_j}(x_j)$ son fuentes arbitrarias que permiten agregar inserciones de los campos gauge (A_μ^a) en la función de Green, mientras que Z representa el funcional generatriz, definido como:

$$Z[J(x_1), \dots, J(x_N)] = \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{YM} - iJ^\mu(x)A_\mu(x)) \right], \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{D}A$ es la medida funcional,

$$\mathcal{D}A = \prod_x \prod_{\mu=0}^3 dA_\mu(x). \quad (2.9)$$

Se agregaron los siguientes términos a la teoría: Para fijar el gauge Faddeev- Popov aplicaron el siguiente truco:

$$1 = \Delta_{FP}[A_\mu] \int \prod_x d\theta(x) \delta \left(F \left[A_\mu^{(\theta)}(x) \right] \right), \quad (2.10)$$

el cual puede ser considerado como una relación de completitud, donde $\Delta_{FP}[A_\mu]$ es el determinante de FP el cual mide como cambia $F[A_\mu^{(\theta)}(x)]$ bajo pequeñas transformaciones, $\delta \left(F \left[A_\mu^{(\theta)}(x) \right] \right)$ es la delta de Dirac que impone la condición $F[A_\mu(x)] = 0$, con este 1 definido se inserto en Z y surge el término:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\xi}, \quad (2.11)$$

donde ξ es el parámetro de fijación del gauge. A lo largo de este trabajo usaremos el gauge de Feynman, $\xi = 1$.

Luego el determinante de FP fue reescrito utilizando la técnica de exponenciación de

determinantes, una manera de reescribir los determinantes en términos de integrales funcionales:

$$\Delta_{FP}[A_\mu] = \det \left(\frac{\delta F[A_\mu^\theta(x)]}{\delta \theta(y)} \right)_{\theta=0} = \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{-i\bar{c}(\frac{\delta F}{\delta \theta})_{\theta=0} \times c}, \quad (2.12)$$

donde surge naturalmente el término:

$$\mathcal{L}_{FP} = \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b, \quad (2.13)$$

donde c^b es el campo ghost de FP, \bar{c}^a es el anti-ghost, el cuál es un campo independiente de c^b , y D_μ^{ab} es la derivada covariante en la representación adjunta definida como $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c$. Este término soluciona el problema de la redundancia en la medida ya que el determinante jacobiano puede escribirse en términos de campos grassmannianos c y \bar{c} de acuerdo con la formula (2.12). Estos campos grassmannianos son denominados fantasmas debido a que no existen en la realidad física, bajo transformaciones de Lorentz se comporta como un boson escalar, pero debido a que son campos de Grassmann anti-conmutan como si fueran fermiones $\{c, \bar{c}\} = i\delta^{ab}$, violando el teorema spin-estadística [30].

De esta manera el Lagrangiano cuantizado para la teoría de Yang-Mills es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{c}^a \partial_\mu D_{ab}^\mu c^b - \frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\xi}. \quad (2.14)$$

Es pertinente mencionar que esta teoría tomo relevancia cuando Gerard t'Hooft y Martinus J.G. Veltman demostraron que era unitaria y se podía renormalizar [31].

2.2 Cromodinamica Cuántica

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría de Yang-Mills que describe la interacción fuerte entre quarks a través del grupo de simetría $SU(3)_C$, donde la C hace referencia a un nuevo numero cuántico denominado color. La interacción es mediada por bosones gauge llamados gluones, los cuales son partículas sin masa con helicidad 1, neutros eléctricamente y con carga de color. En la representación adjunta de $SU(3)$ existen ocho generadores de simetría y por lo tanto hay 8 campos gauge, por eso se dice que los gluones portan un octeto de carga de color o tiene ocho grados de

Sabor	Carga Eléctrica	masa (\approx)
Top (t)	$+\frac{2}{3}$	172.57 ± 0.29 GeV
Botton (b)	$-\frac{1}{3}$	4.183 ± 0.007 GeV
Charm (c)	$+\frac{2}{3}$	1.273 ± 0.0046 GeV
Strange (s)	$-\frac{1}{3}$	93.5 ± 0.8 MeV
Down (d)	$-\frac{1}{3}$	4.7 ± 0.07 MeV
Up (u)	$+\frac{2}{3}$	2.16 ± 0.07 MeV

Tabla 2.2: Características principales de los quarks [35].

libertad. Portar esta carga de color les permite interactuar entre si a diferencia de los fotones [32, 33, 34]. Por otro lado, existen seis tipos de quarks conocidos como sabores con sus respectivas anti-partículas, estos son fermiones (spin $\frac{1}{2}$) cuya carga eléctrica se caracteriza por ser una fracción de la carga del electrón además de llevar tres posibles carga de color (verde, rojo o azul) y una masa. Las propiedades de estas partículas pueden encontrarse en la Tabla (2.2). La fuerza fuerte se comporta de manera muy distinta a la electromagnética, entre mas se alejan las partículas unas de otras mayor es su intensidad, fenómeno conocido como la libertad asintótica, esto es lo que genera el confinamiento de los quarks dentro de los hadrones y limita el rango efectivo de acción de los gluones aproximadamente a 1[fm] [36, 37].

El Lagrangiano de la QCD que incluye todas las interacciones presentes entre gluones y quarks viene dado por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}_f(i\cancel{D} - m_f)\psi_f - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b, \quad (2.15)$$

donde $G_{\mu\nu}^a$ es el tensor de campo de fuerza gluonico con índice de color a definido como $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$. El campo del gluon se representa con G_μ^a , g_s es la constante de acople fuerte, f^{abc} es la constante de estructura del grupo $SU(3)_C$, ψ es el campo del quark de sabor f y m_f la masa del quark correspondiente. \cancel{D} es la derivada covariante contraída tal que $\cancel{D} = \gamma^\mu D_\mu$, se debe tomar en cuenta que en el término de Dirac (segundo término a la derecha) la derivada covariante esta en la representación fundamental y entonces esta definida como $(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - it_{ij}^a A_\mu^a$. Se debe notar que t^a son los generadores del grupo $SU(3)_C$ en la representación fundamental.

El primer término del Lagrangiano de la QCD contiene las auto-interacciones cúbicas y cuárticas entre gluones, el segundo término contiene la interacción entre quarks y gluones, el tercer término se encarga de fijar el gauge y el último término contiene los fantasmas de Faddeev-Popov.

Los generadores de la simetría $SU(3)$ de color obedecen un álgebra de Lie que permite encontrar una representación matricial, conocida como las matrices de Murray Gell-Mann, donde $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$ y λ^a están definidas como:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La transformación U generada por estas matrices es unitaria y satisface $\det(U) = 1$, como consecuencia

$$\text{tr}[t^a] = 0. \quad (2.17)$$

La traza para el producto de dos generadores define dos operadores Casimir $C(r)$ y $C_2(r)$ de tal forma que

$$\text{tr}[t^a t^a] = C_2(r) \cdot \text{tr}[1], \quad \text{tr}[t^a t^b] = C(r) \delta^{ab}. \quad (2.18)$$

El valor de estos operadores en la representación fundamental viene dado por:

$$C(r) = \frac{1}{2} \quad C_2(r) = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (2.19)$$

Esto implica que para $N=3$ tenemos:

$$C(r) = \frac{1}{2} \quad C_2(r) = \frac{4}{3}, \quad (2.20)$$

$$\text{tr}[t^a t^a] = 4, \quad \text{tr}[t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (2.21)$$

Finalmente, la constante de estructura f^{abc} puede definirse en términos de los generadores como:

$$f^{abc} = -\frac{i}{C(r)} \text{tr}\{[t^a, t^b] t^c\}. \quad (2.22)$$

Toda esta álgebra de color es necesaria y se utilizará al momento de darle solución al calculo de amplitud de probabilidades que se construirá ya sea por medio de las contracciones de Wick o por diagramas de Feynman, ademas es necesario entender el mecanismo que permite que las partículas que se encuentran presentes en los procesos de scattering adquieran masa.

2.3 Mecanismo de Brout-Englert-Higgs

En 1964 de manera simultánea P. Higgs, F. Englert y R. Brout formularon el mecanismo por el cual las partículas elementales, a excepción de los neutrinos, adquieren masa en el SM [3, 4]. Este mecanismo considera la existencia de un campo presente en todo el universo, que al interactuar con una partícula le da masa, la cual depende de un parámetro conocido como el valor esperado del vacío (vev). En el SM el mecanismo se aplica a la simetría gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$, donde las corrientes de $SU(2)_L$ describen las interacciones entre dobletes de isoespín left-handed con los bosones Z y W , mientras que $U(1)_Y$ es un grupo abeliano que incluye un nuevo número cuántico, denominado la Hipercarga, de donde se deriva la corriente electromagnética y se garantiza que el fotón no tenga masa [38]. Este mecanismo puede ser explicado por medio de una ruptura espontánea de la simetría (SSB) [39, 40], o a través de una transformación conveniente de los campos gauge y de Higgs volviéndolos invariantes de gauge [41, 42].

De manera simplificada, para el sector electrodébil el SSB requiere definir un doblete escalar complejo Φ

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

que transforma bajo $SU(2)_L$ de acuerdo con:

$$\Phi \rightarrow e^{ig\alpha_i\tau_i/2}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ H + v \end{pmatrix} e^{iG_i\tau_i/v}. \quad (2.24)$$

La matriz de transformación $e^{ig\alpha_i\tau_i/2}$ contiene la constante de acople g , los parámetros de la transformación α_i y los generadores de la simetría τ_i , que corresponden a las matrices de Pauli. En la transformación anterior se ha utilizado el gauge unitario donde los parametros gauge corresponden a los campos de los bosones de Goldstone G_i . Estos campos no son grados de libertad físicos por lo que usualmente son absorbidos para dar masa a los campos gauge W^\pm y Z . Finalmente v representa el vev del doblete de Higgs. El valor numérico de vev viene dado por:

$$v = \sqrt{\frac{1}{G_F\sqrt{2}}} \simeq 246.22 \text{ GeV}, \quad (2.25)$$

donde G_F es la constante de Fermi cuyo valor es $G_F = 1.1663787(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ [38, 35].

Para aplicar el mecanismo de Higgs y calcular la masa del boson de Higgs, debemos considerar el potencial siguiente:

$$V(\Phi) = \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2, \quad (2.26)$$

donde μ es un parámetro con unidades de masa $[\mu] = m^1$ que controla la ruptura espontánea de la simetría del campo de Higgs y λ es la constante de acople cuártico de auto-interacción del Higgs, la cual es adimensional. Si expandimos el doblete de Higgs alrededor del vev:

$$\Phi = \left(\Phi + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}}, \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

y reemplazamos en el potencial, tenemos:

$$V(\Phi) \approx \lambda \left[\left(\Phi + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}} \right)^\dagger \left(\Phi + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right]^2, \quad (2.28)$$

que explícitamente produce

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}(2\lambda v^2)H^2 + 2\lambda vH^3 + \frac{\lambda}{4}H^4, \quad (2.29)$$

donde el término que acompaña al H^2 representa la masa al cuadrado del bosón de Higgs, de tal forma que:

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v. \quad (2.30)$$

El bosón de Higgs fue descubierto experimentalmente el 4 de Julio de 2012 por los laboratorios ATLAS y CMS en el CERN [1, 2]. El último valor medido hasta la fecha de su masa es 125.20 ± 0.11 GeV como lo reporta [35]. Desde el punto de vista teórico, se ha realizado múltiples predicciones de la masa del Higgs en diferentes modelos mas allá del modelo estándar, como lo reportan [43, 44] en extensiones supersimétricas del SM, manteniendo un gran acuerdo con los resultados experimentales. Cabe resaltar que la masa del bosón de Higgs no es una predicción en el Modelo Estándar, sino un parámetro de entrada que se usa para calcular otros observables electro-débiles, como la masa del bosón W.

Por otra parte para calcular la masa de los fermiones construimos un Lagrangiano tipo Yukawa:

$$\mathcal{L}_Y = -y_f \bar{\psi}^i \phi \psi_j, \quad (2.31)$$

donde ϕ representa un campo escalar, ψ el campo fermionico y y_f la constante de acople de Yukawa, así es como se ve usualmente este tipo de lagrangiano. Entonces necesitamos que nuestro lagrangiano que respete la simetría $SU(2)_L$ tal que la componente left-handed este conformada por un doblete, mientras que la componente right-handed es un singlete:

$$\mathcal{L}_Y = - \left[\bar{q}'_L \Phi^\dagger Y'_D d'_R + \bar{d}'_R \Phi Y'_D{}^\dagger q'_L \right] - \left[\bar{q}'_L \Phi^\dagger Y'_T t'_R + \bar{t}'_R \Phi Y'_T{}^\dagger q'_L \right] \quad \text{con} \quad q'_L = \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

En este caso estamos eligiendo el doblete con los quarks top y down, donde Y'_D y Y'_T son matrices $n \times n$ que contienen las correspondientes constantes de acople de Yukawa. Estas matrices no necesariamente son diagonales pero pueden ser reescritas por medio de transformaciones unitarias en el espacio de sabores para obtener matrices con diagonales

de enteros no negativos, utilizando las matrices CKM (V):

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

donde θ_c representa el angulo de Cabibbo, de tal forma que:

$$Y_T \equiv V_L^{T\dagger} Y'_T V_R^T \quad Y_D \equiv V_L^{D\dagger} Y'_D V_R^D, \quad (2.34)$$

donde ahora las matrices de acople Y_D y Y_T son diagonales con valores reales no negativos denotados con y_f . Este mismo procedimiento se realiza con los campos no diagonalizados de los quarks tal que:

$$\begin{aligned} t'_L &= V_L^T t_L & d'_L &= V_L^D d_L, \\ t'_R &= V_R^T t_R & d'_R &= V_R^D d_R. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por otra parte, el doblete escalar de Higgs conjugado, Φ_C , esta definido como

$$\Phi_C = \left(\Phi + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}} \right)_C = \epsilon \left(\Phi + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}} \right)^\star, \quad (2.36)$$

donde ϵ es una matriz anti-simétrica en dos dimensiones. Así al reemplazar (2.34), (2.35) y (2.36) en (2.32) tenemos entonces:

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{y_t}{\sqrt{2}} v \bar{t} t - \frac{y_d}{\sqrt{2}} v \bar{d} d - \frac{y_t}{\sqrt{2}} \bar{t} t H - \frac{y_d}{\sqrt{2}} \bar{d} d H, \quad (2.37)$$

donde el primer término contiene la masa del quark top, el segundo la masa del quark botton, el tercer y cuarto término contienen los vértices de interacción de los quarks con el campo de Higgs. De esta manera la masa del quark top es:

$$m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}} v, \quad (2.38)$$

expresada en términos de la constante de Yukawa del quark top y el vev del Higgs. El valor experimental de la masa del top es $m_t = 172.57 \pm 0.29$ GeV [35, 45].

En este punto tenemos los términos del Lagrangiano que se necesitan para calcular la

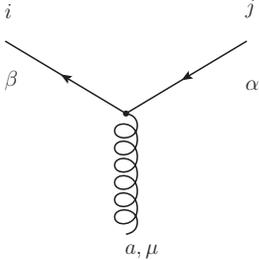
amplitud dominante para el proceso de producción del Higgs a través de la fusión de gluones. En la próxima sección damos las reglas de Feynman que permiten construir la amplitud correspondiente.

2.4 Reglas de Feynman QCD

El usar diagramas en los procesos de cálculos de amplitud de probabilidades en los scattering, fue popularizado por R. Feynman [46], dando una receta que permitía simplificar la construcción de las amplitudes en todas las teorías de campos cuánticos. En la QCD los diagramas que se agregaron extras con respecto a la QED son los siguientes diagramas:

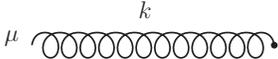
El primer vértice puede ser obtenido del término $\bar{\psi}_f(i\not{D} - m_f)\psi_f$ donde aparece la interacción entre los quarks y el gluon, además de la regla de los gluones entrantes.

Vértice Quarks-Gluon:



$$= -ig_s \gamma_{\beta\alpha}^{\mu} [t^a]_{ji}. \quad (2.39)$$

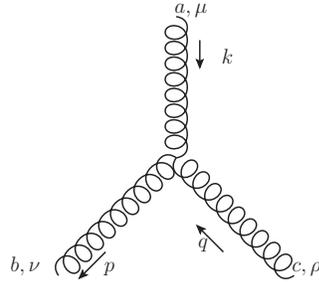
Gluon entrante:



$$= \epsilon_{\mu}(k, \sigma). \quad (2.40)$$

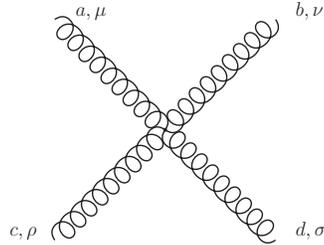
Los siguientes vértices aparecen del término $-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$ donde vemos la auto interacción entre los gluones dándonos vértices de interacción de tres y cuatro gluones.

Vértice tri-lineal de gluones:



$$\begin{aligned}
 & g f^{abc} [g^{\mu\nu} (k - p)^\rho \\
 & = +g^{\nu\rho} (p - q)^\mu \\
 & + g^{\rho\mu} (q - k)^\nu].
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

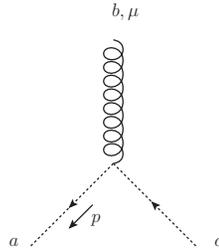
Vértice cúbico de gluones:



$$\begin{aligned}
 & -i g^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\rho} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 & = +f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 & + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})].
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

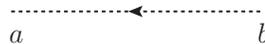
El siguiente vértice aparece del término del lagrangiano $\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b$ de donde se obtiene el vértice de los ghost con el gluon y el propagar del ghost.

Vértice Ghosts-Gluon:



$$= g_s f^{abc} p^\mu. \tag{2.43}$$

Propagador para Ghost:

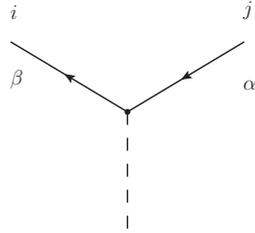


$$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2}. \tag{2.44}$$

Y las reglas de Feynman de la interacción de los quarks con un campo escalar y el respectivo propagador de los quarks proviene de un lagrangiano tipo Yukawa (2.31)

desde la QED que contempla dicha interacción y el respectivo sabor de los quarks.

Vértice Quarks-Higgs:



$$= -i \frac{y_t \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{2}}. \quad (2.45)$$

Propagador para Quarks:



$$= \frac{i(\not{k} + m)_{\beta\alpha} \delta_{ij}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.46)$$

Estas reglas permiten construir las diferentes amplitudes de probabilidad de los procesos que ocurren en la QCD de manera más rápida y eficiente además de poder sistematizar dichas construcciones con paquetes desarrollados en Mathematica como FeynArts [47], FeynCalc [48] y FeynHelpers [49].

FeynArts es el encargado de construir y pintar todos los posibles diagramas de un proceso para construir la amplitud de probabilidad del proceso en cuestión. Las funciones principales de dicho paquete son: *CreateTopologies*, que se encarga de recibir la información general del proceso de dispersión, como el número de loops, la cantidad de partículas que inician el proceso y las resultantes, el número máximo de propagadores que conforman un vértice, y de filtrar el tipo de topologías en el diagrama (internas o externas). *Paint* muestra el diagrama en pantalla. *InsertFields* discrimina el tipo de campos que forman o no parte del proceso que queremos estudiar, y determina el modelo al que corresponde dicho proceso. Finalmente, *CreateFeynAmp* aplica las reglas de Feynman sobre el o los diagramas construidos para generar la amplitud de probabilidad correspondiente al proceso en cuestión.

FeynCalc complementa las limitaciones de FeynArts dado que este solo se limita a construir la amplitud de probabilidad del procesos y FeynCalc toma dicha amplitud construida, la reescribe en su lenguaje y realiza una evaluación simbólica hasta entregarla en términos de funciones de Passarino-Veltman. Las funciones de nuestro

interés en FeynCalc son: *FCFAConvert* transforma la amplitud del lenguaje de FeynArts al lenguaje de FeynCalc especificando las variables para los momentos entrantes, momentos salientes, momentos de loop, la dimensión en la que se va a evaluar dicha amplitud, entre otras opciones. *SUNSimplify* aplica el álgebra de color sobre la amplitud. *DiracTrace* aplica el álgebra de Dirac sobre la amplitud. *TID* reescribe la amplitud en términos de las funciones de Passarino-Veltman. *ComplexConjugate* calcula el complejo conjugado de la amplitud. Finalmente *DoPolarizationSums* actúa sobre el cuadrado de la amplitud realizando la suma sobre todos los estados de polarización.

FeynHelpers es una interfaz de complemento para FeynCalc que permite usar las funciones de los siguientes algoritmos FIESTA, FIRE, KIRA, LoopTools, Package-X [50], pySecDec, QGRAF y Tensor reduction, donde para nuestro cálculo usaremos las funciones de Package-X que permite (entre otras cosas) calcular las soluciones de las funciones de Passarino-Veltman mediante la función *PaXEvaluate*.

La combinación de estas herramientas computacionales permiten realizar el cálculo de las amplitudes de probabilidades de los diagramas de Feynman presentes en cualquier proceso de scattering permitiendo sistematizar la solución de los diagramas cuando su número crece de manera exponencial. Es pertinente especificar que estos paquetes trabajan de manera eficiente hasta los dos loops.

3. Fusión de gluones para la Producción de bosones de Higgs

3.1 Mecanismos de producción del Higgs

Existen diversos canales de producción de bosones de Higgs en los colisionadores de partículas, estos canales no se dan de manera directa, son sub-procesos que surgen de distintos procesos uno es la colisión de e^+e^- donde los canales principales de producción son el Higgs-strahlung [51, 52, 53] y la fusión de WW [54]. El otro es la colisión de hadrones por ejemplo de protones (LHC) donde los canales principales de producción son la fusión de gluones $gg \rightarrow H$ [55, 56, 57, 58], la fusión del bosón vectorial $W^+W^-/ZZ \rightarrow H$ [59, 60], la emisión radiativa del bosón de Higgs por bosones vectoriales y el Higgs bremsstrahlung emitido por quarks top [5, 6]. Nuestro principal objetivo es estudiar el canal dominante dentro de los procesos que generan el bosón de Higgs. La fusión de gluones para la producción del Higgs, este proceso no puede darse de manera directa dado que los gluones no tienen masa, y el Higgs no posee carga de color esto implica la existencia de un loop triangular obligatoriamente fermiónico que medie dicha interacción, siendo está la contribución a orden principal (L.O) y su diagrama de Feynman es:

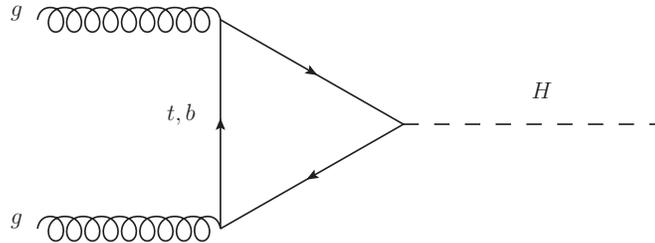


Figura 3.1: Diagrama de contribución L.O en el proceso $gg \rightarrow H$.

La obligatoriedad en el loop se debe a que los quarks son las únicas partículas conocidas con carga de color además de los gluones y tienen masa, permitiendo conservar la carga de color y la interacción con el bosón de Higgs. En principio cualquier quark puede ser mediador de este proceso, sin embargo, los que generaran una mayor contribución serán los quarks más pesados específicamente el quark top (t) y el botton (b). Para nuestro

trabajo nos centraremos en el proceso mediado por un loop de $t\bar{t}$ dado que es el que tiene una mayor masa en comparación con los demás como vemos en la tabla (2.2) y genera la mayor contribución al proceso $gg \rightarrow H$.

3.2 Cálculo de la sección eficaz de producción del bosón de Higgs a través de la fusión de gluones

Consideremos entonces la lagrangiana de la QCD (2.15) + Yukawa (2.31).

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(x)G_a^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}_f(i\not{D} - m_f)\psi_f - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{c}^a\partial^\mu D_\mu^{ab}c^b - y_f\bar{\psi}^i(x)\phi(x)\psi_i(x), \quad (3.1)$$

al reemplazar explícitamente la derivada covariante tenemos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(x)G_a^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}^i(x)[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig_s G_\mu^a(x)t^a) - m]\psi_i(x) \dots \dots - y_f\bar{\psi}^i(x)\phi(x)\psi_i(x) \quad (3.2)$$

$$= -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(x)G_a^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}^i(x)(i\not{D} - m)\psi_i(x) + g_s\bar{\psi}^i(x)\gamma^\mu G_\mu^a(x)t^a\psi_i(x) \dots - y_f\bar{\psi}^i(x)\phi(x)\psi_i(x), \quad (3.3)$$

con los dos últimos términos de la ecuación (3.3) identificamos el lagrangiano que usaremos para realizar nuestro cálculo, este contiene la interacción gluon-fermión y fermión-escalar. Es preciso aclarar que estos términos no son los únicos términos de interacción presentes en el lagrangiano también está $-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(x)G_a^{\mu\nu}(x)$ que representa la interacción entre gluones pero nuestro proceso ($gg \rightarrow H$) no las tiene por eso se omite. Por lo tanto:

$$L_{Int} = g_s\bar{\psi}^i(x)\gamma^\mu G_\mu^a(x)t^a\psi_i(x) - y_f\bar{\psi}^i(x)\phi(x)\psi_i(x), \quad (3.4)$$

con el lagrangiano de interacción identificado procedemos a calcular la amplitud de probabilidad por medio de la matriz S para el scattering $2 \rightarrow 1$ la cual viene definida de la forma:

$$\langle f | S | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_i - k_f) i\mathcal{M}(k_i \rightarrow k_f), \quad (3.5)$$

con $|i\rangle = |(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2)\rangle$, un estado inicial el cual se puede escribir en términos del momento y helicidad de los gluones; $S = T \left[\exp \left(-i \int d^4x \mathcal{L}_{Int} \right) \right]$, la acción; $\langle f| = \langle k_3| = \langle k_1 + k_2|$, el estado final escrito en términos de un momento final o la suma de los momentos iniciales, así los elementos de la matriz S quedan de la forma:

$$\langle f| S |i\rangle = \langle k_3| T \left[\exp \left(-i \int d^4x \mathcal{L}_{Int} \right) \right] |(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2)\rangle, \quad (3.6)$$

reemplazando el lagrangiano de interacción tenemos

$$i\mathcal{M}(k_i \rightarrow k_f) = \langle k_3| T \left\{ \exp \left[-i \int d^4x (g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \dots \dots - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)) \right] \right\} |(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2)\rangle. \quad (3.7)$$

Al realizar la expansión perturbativa de Dyson sobre el exponencial (ver Apéndice (D.1)) tenemos un número infinito de términos que serán evaluados aplicando un braket a cada elemento de la expansión de Dyson, usando el teorema de Wick, y contraemos (ver Apéndice (D.3)), hasta obtener la primera contribución dominante de la serie (Leading order = LO). Dado que el primer término de la serie es 1 tenemos y los estados son diferentes por ortonormalidad de estados la contribución del primer elemento es 0 lo que es lógico dado que el primer término de la serie representa los estados libres donde no hay interacción por ende no debe haber contribución, entonces para el segundo término de la serie tenemos:

$$\langle k_3| T \left\{ -i \int d^4x [g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)] \right\} |(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2)\rangle \quad (3.8)$$

$$= -i \int d^4x (g_s \langle k_3| \overbrace{\bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x)} \rangle |(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2)\rangle \dots \dots - y_f \langle k_3| \overbrace{\bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)} \rangle |(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2)\rangle) \quad (3.9)$$

$$= -g_s \left(-i \int d^4x S(x, x) \gamma^\mu \epsilon_\mu(k_1, \sigma_1) e^{-ik_1 \cdot x} \right) t^a \langle k_3| \overbrace{\psi_i(x)} \rangle |(k_2, \sigma_2)\rangle \dots \dots \dots + y_f - \left(i \int d^4x S(x, x) e^{ik_3 \cdot x} \right) \langle 0| \overbrace{(k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2)} \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Al mantenerse la ortogonalidad en los estados en todas las combinaciones posibles de las contracciones la contribución del segundo termino es 0, entonces para el tercer termino de la serie tenemos:

$$\langle k_3 | T \left\{ \frac{i^2}{2!} \int d^4x \int d^4y (g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)) \dots \right. \\ \left. \dots \times (g_s \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) - y_f \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y)) \right\} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle \quad (3.11)$$

$$= \frac{i^2}{2!} \int d^4x \int d^4y \langle k_3 | T \{ g_s^2 \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \dots \\ \dots + g_s y_f \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) - g_s y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \dots \\ \dots + y_f^2 \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle. \quad (3.12)$$

Como ocurrió con el segundo término no hay ninguna combinación posible al aplicar contracciones que permitan tener un estado inicial igual a un estado final en ninguno de los elementos dentro de la integral por ende su contribución también es 0. Procedemos a tratar el cuarto termino de la serie de igual manera que los anteriores (ver Apéndice (D.2)), donde a diferencia de los términos anteriores acá encontramos la primera contribución que se conforma de la suma de los elementos que tiene la siguiente estructura de sus campos independientemente de su orden, notación y elementos de los acampanen:

$$(\bar{\psi} G \psi)(\bar{\psi} G \psi)(\bar{\psi} \phi \psi), \quad (3.13)$$

de los ocho elementos que conforman el tercer término solo los tres cumplen con (3.13) los demás no generan contribución por la ortogonalidad en sus estados, entonces tenemos:

$$i\mathcal{M} = \\ - \frac{i^3}{3!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \langle k_3 | T \{ [-y_f g_s^2 \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) \dots \\ \dots \times t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) - g_s^2 y_f \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \dots \\ \dots \times \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) - g_s^2 y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \dots \\ \dots \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z)] \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle, \quad (3.14)$$

de esta manera solamente tenemos las siguientes contribuciones (ver Apéndice (D.4)):

$$\begin{aligned}
&= (-1)(2)\{\text{Tr}[S_F(z-y)\gamma^\nu S_F(y-x)\gamma^\mu S_F(x-z)]\dots \\
&\quad \dots \times \epsilon_\mu^a(k_1, \sigma_1)\epsilon_\nu^b(k_2, \sigma_2)\text{tr}[t^a t^b] e^{-ix\cdot k_1} e^{-iy\cdot k_2} e^{iz\cdot k_3} \dots \\
&\quad \dots + \text{Tr}[S_F(z-y)\gamma^\nu S_F(y-x)\gamma^\mu S_F(x-z)]\dots \\
&\quad \dots \times \epsilon_\mu^a(k_2, \sigma_2)\epsilon_\nu^b(k_1, \sigma_1)\text{tr}[t^a t^b] e^{-ix\cdot k_2} e^{-iy\cdot k_1} e^{iz\cdot k_3}\}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Así tenemos la amplitud con la primera contribución a LO como:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= i^3 g_f^2 y_f (-1) \int d^4x \int d^4y \int d^4z \{\text{Tr}[S_F(z-y)\gamma^\nu S_F(y-x)\gamma^\mu S_F(x-z)]\dots \\
&\quad \dots \times \epsilon_\mu^a(k_1, \sigma_1)\epsilon_\nu^b(k_2, \sigma_2)\text{tr}[t^a t^b] e^{-ix\cdot k_1} e^{-iy\cdot k_2} e^{iz\cdot k_3} + \text{Tr}[S_F(z-y)\dots \\
&\quad \dots \times \gamma^\nu S_F(y-x)\gamma^\mu S_F(x-z)] \epsilon_\mu^a(k_2, \sigma_2)\epsilon_\nu^b(k_1, \sigma_1)\text{tr}[t^a t^b] e^{-ix\cdot k_2} e^{-iy\cdot k_1} e^{iz\cdot k_3}\}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Al escribirlo en el espacio de los momentos tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= g_f^2 \left(\frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \text{tr}[t^a t^b] \epsilon_\mu^a(k_1, \sigma_1)\epsilon_\nu^b(k_2, \sigma_2) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \dots \\
&\quad \left\{ \frac{\text{Tr}[(l - \not{k}_1 + m)(l + \not{k}_2 + m)\gamma^\mu(l + m)\gamma^\nu]}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]} \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + \frac{\text{Tr}[(-l + \not{k}_1 + m)\gamma^\nu(-l + m)\gamma^\mu(-l - \not{k}_2 + m)]}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

A esta misma amplitud se puede llegar aplicando los diagramas recordando su definición para las distintas partes del diagrama (2.39), (2.45), (2.46) y (2.40). El proceso $gg \rightarrow H$ está descrito por:

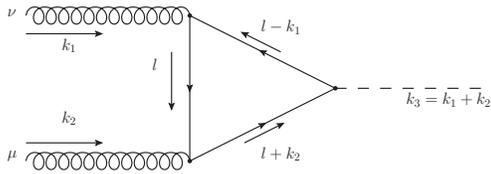


Figura 3.2: Primera contribución $gg \rightarrow H$.

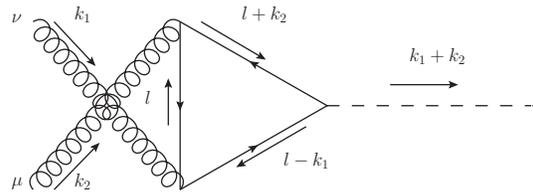


Figura 3.3: Segunda contribución $gg \rightarrow H$.

Al aplicar las reglas de Feynman para el primer diagrama su contribución es:

$$i\mathcal{M}_{(1)} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{l} - \not{k}_1 + m)}{(l^2 - m^2)} \left(-i \frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \frac{i(\not{l} + \not{k}_2 + m)}{[(l - k_1)^2 - m^2]} \cdots \\ \times (-ig_s \gamma^\mu [t^a]) \frac{i(\not{l} + m)}{[(l + k_2)^2 - m^2]} (-ig_s \gamma^\nu [t^b]) \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2), \quad (3.18)$$

organizando los elementos de la amplitud y dejando solamente los términos que interactúan con la integral tenemos:

$$i\mathcal{M}_{(1)} = i^3 (-ig_s)^2 \left(-i \frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \text{tr}\{t^a t^b\} \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2) \cdots \\ \cdots \times \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{(\not{l} - \not{k}_1 + m)(\not{l} + \not{k}_2 + m)\gamma^\mu(\not{l} + m)\gamma^\nu\}}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.19)$$

Para el segundo diagrama su contribución es:

$$i\mathcal{M}_{(2)} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i(-\not{l} + \not{k}_1 + m)}{(l^2 - m^2)} (-ig_s \gamma^\nu [t^b]) \frac{i(-\not{l} + m)}{[(l + k_2)^2 - m^2]} (-ig_s \gamma^\mu [t^a]) \cdots \\ \times \frac{i(-\not{l} - \not{k}_2 + m)}{[(l - k_1)^2 - m^2]} \left(-i \frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2), \quad (3.20)$$

$$i\mathcal{M}_{(2)} = i^3 (-ig_s)^2 \left(-i \frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \text{tr}\{t^b t^a\} \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2) \cdots \\ \cdots \times \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{(-\not{l} + \not{k}_1 + m)\gamma^\nu(-\not{l} + m)\gamma^\mu(-\not{l} - \not{k}_2 + m)\}}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.21)$$

sumamos las dos contribuciones y obtenemos una amplitud total de probabilidad la cual es finita, para verificarlo utilizaremos regularización dimensional pasando a un espacio de dimensión $d = 4 - 2\epsilon$ y el método de Passarino-Veltman, entonces tenemos:

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_{(1)} + i\mathcal{M}_{(2)} \rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_{(1)} + \mathcal{M}_{(2)}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = & (ig_f)^2 y_f \text{tr} [t^a t^b] \epsilon_\mu^a(k_1, \sigma_1) \epsilon_\nu^b(k_2, \sigma_2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \dots \\
& \dots \times \left\{ \frac{\text{Tr} [(l - k_1 + m)(l + k_2 + m)\gamma^\mu(l + m)\gamma^\nu]}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]} \dots \right. \\
& \left. \dots + \frac{\text{Tr} [(-l + k_1 + m)\gamma^\nu(-l + m)\gamma^\mu(-l - k_2 + m)]}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

donde reducimos ligeramente la dimensión de la integral con el factor 2ϵ cuando este tiende a cero y agregamos un factor de escala μ^{4-d} que es el encargado de preservar las unidades físicas. Ahora centrándonos en la integral de loop aplicamos el álgebra de Dirac sobre la Traza del primer término, porque el segundo término es posible reescribirlo como el primero, realizando cambios en los índices de Lorentz que son mudos, redefiniendo el momento de loop y usando las propiedades de ciclicidad de la traza, entonces una vez realizado el procedimiento (ver Apéndice (D.5)) y reemplazando el resultado en (3.23) tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = & g_f^2 \left(\frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \text{tr}[t^a t^b] \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu^{4-d} \dots \\
& \times 8m \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{k_1^\mu k_2^\nu - k_1^\nu k_2^\mu + 2k_2^\mu l^\nu - 2k_1^\nu l^\mu + 4l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu} k_1 \cdot k_2 - g^{\mu\nu} l \cdot l + g^{\mu\nu} m^2}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Ahora redefinimos los elementos del denominador de la integral de loop tal que:

$$D_0 = l^2 - m^2, \quad (3.25)$$

$$D_1 = (l - k_1)^2 - m^2, \quad (3.26)$$

$$D_2 = (l + k_2)^2 - m^2, \quad (3.27)$$

y reescribimos la integral de loop en un conjunto de integrales separadas nos quedaría

de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= 8mg_f^2 \left(\frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \text{tr}[t^a t^b] \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2) \dots \\
&\times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^{4-d} \left[k_1^\mu k_2^\nu \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1 D_2} - k_1^\nu k_2^\mu \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1 D_2} + 2k_2^\mu \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\nu}{D_0 D_1 D_2} \dots \right. \\
&\dots - 2k_1^\nu \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_1 D_2} + 4 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{D_0 D_1 D_2} - g^{\mu\nu} k_1 \cdot k_2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1 D_2} \dots \\
&\left. \dots - g^{\mu\nu} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{D_0 D_1 D_2} - g^{\mu\nu} m^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1 D_2} + g^{\mu\nu} m^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1 D_2} \right]. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Estas integrales son conocidas como funciones de Passarino - Veltman (ver Apéndice (C)), que pueden ser escritas de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= 8mg_f^2 \left(\frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \text{tr}[t^a t^b] \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[k_1^\mu k_2^\nu C_{(0,1,2)}^0 - k_1^\nu k_2^\mu C_{(0,1,2)}^0 \dots \right. \\
&\left. \dots + 2k_2^\mu C_{(0,1,2)}^\nu - 2k_1^\nu C_{(0,1,2)}^\mu + 4C_{(0,1,2)}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} k_1 \cdot k_2 C_{(0,1,2)}^0 - g^{\mu\nu} B_{(1,2)}^0 \right], \tag{3.29}
\end{aligned}$$

donde las funciones de rango > 1 pueden ser reescritas en términos de funciones de rango 0 aplicando el método de Passarino-Veltman (ver Apéndice (D.6)), donde además se le da solución a las funciones de rango 0, reemplazaremos específicamente $C^{\mu\nu}$ (ver Apéndice (D.83)) y obtendremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= 8mg_f^2 \left(\frac{y_t}{\sqrt{2}} \right) \text{tr}[t^a t^b] \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[k_1^\mu k_2^\nu C_{(0,1,2)}^0 - k_1^\nu k_2^\mu C_{(0,1,2)}^0 \dots \right. \\
&\dots + 2k_2^\mu C_{(0,1,2)}^\nu - 2k_1^\nu C_{(0,1,2)}^\mu + 4(C_{21} k_1^\mu k_1^\nu + C_{22} k_2^\mu k_2^\nu \dots \\
&\left. \dots + C_{23}(k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu) + C_{24} g^{\mu\nu}) - g^{\mu\nu} k_1 \cdot k_2 C_{(0,1,2)}^0 - g^{\mu\nu} B_{(1,2)}^0 \right]. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Evaluando la traza de color a partir de (2.18) (2.19) y distribuyendo los vectores de polarización simplificamos términos que se vuelven cero por $\epsilon(k_i, \sigma_i) \cdot k_i = 0$ dado que los gluones tiene solamente 2 grados de libertad transversales y no longitudinales, así

entonces:

$$i\mathcal{M} = 4m \frac{g_s^2 y_t \delta^{ab}}{\sqrt{2}} \epsilon_\nu(k_1, \sigma_1) \epsilon_\mu(k_2, \sigma_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(C_{(0,1,2)}^0 + 4C_{23}) k_1^\mu k_2^\nu \cdots \right. \\ \left. + g^{\mu\nu} \left(4C_{24} - B_{(1,2)}^0 - \frac{1}{2} s C_{(0,1,2)}^0 \right) \right]. \quad (3.31)$$

Reemplazando los valores calculados de las funciones escalares de Lorentz C_{23} y C_{24} (ver Apéndice (D.196) y (D.199)) y considerando los valores calculados de $B_{(1,2)}^0$ (ver Apéndice (D.177)) y $C_{(0,1,2)}^0$ (ver Apéndice (D.64)) tenemos:

$$i\mathcal{M} = -\frac{i\alpha_s \delta^{ab}}{2\pi v} \left[\left(\frac{m_H^2}{2} \epsilon(k_1, \sigma_1) \cdot \epsilon(k_2, \sigma_2) - [\epsilon(k_1, \sigma_1) \cdot k_2][\epsilon(k_2, \sigma_2) \cdot k_1] \right) \cdots \right. \\ \left. \times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau \left(\mu^{2\varepsilon} + (1 - \tau) \arcsin^2 \sqrt{\frac{1}{\tau}} \right) \right]. \quad (3.32)$$

Con la amplitud de probabilidad, se procede a calcular la amplitud de probabilidad al cuadrado y se hace la suma sobre todos los estados de polarización, estados de color para obtener y se promedia sobre los estados de polarización y color también para obtener la amplitud de probabilidad al cuadrado despolarizada tal que:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{\alpha_s^2 m_H^4}{32^2 \pi^2 v^2} \tau^2 \left| 1 + (1 - \tau) \arcsin^2 \sqrt{\frac{1}{\tau}} \right|^2. \quad (3.33)$$

Una vez llegado a este punto se implemento un código computacional en Mathematica (ver Apéndice (E)) con el cual se verificó los resultados obtenidos y se sistematizo el proceso. La amplitud de probabilidad obtenida fue:

$$i\mathcal{M} = -\frac{im y_t g^2 \delta^{ab}}{16\sqrt{2}\pi^2 m_H^4} \left[m_H^2 \vec{\epsilon}(k_1) \cdot \vec{\epsilon}(k_2) - 2\vec{k}_1 \vec{\epsilon}(k_2) \vec{k}_2 \vec{\epsilon}(k_1) \right] \cdots \\ \cdots \times \left[4m^2 \log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) \cdots \right. \\ \left. \cdots - m_H^2 \log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) - 4m_H^2 \right]. \quad (3.34)$$

la amplitud de scattering al cuadrado despolarizada fue:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g^4}{64\pi^4 m_H^4} & \left[my_t m_H^2 \log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) - 4my_t m_H^2 \dots \right. \\ & \left. \dots - 4m^3 y_t \log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Consideramos $\tau = \frac{4m^2}{m_H^2}$ con $\tau \geq 1$ dado que la masa del quark top es mayor que la masa del Higgs, $\alpha_s^2 = \frac{g^4}{16\pi^2}$, $y_t^2 = \frac{2m^2}{v^2}$ y recordando la relación entre los logaritmos complejos y el inverso del seno (ver Apéndice (D.7)) podemos reescribir nuestro resultado de la siguiente forma:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{\alpha_s^2 m_H^4}{1024\pi^2 v^2} \tau^2 \left[1 + (1 - \tau) \arcsin^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \right]^2. \quad (3.36)$$

Una vez realizada la verificación tanto teórica como computacional, procedemos a calcular la sección eficaz la cual está definida como:

$$\sigma(gg \rightarrow H)_{SM} = \frac{1}{2s} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3 2E_H} (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_3 - \sum_{i=1}^2 k_i \right) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (3.37)$$

$$\sigma(gg \rightarrow H)_{SM} = \frac{\pi}{m_H^2} \delta(s - m_H^2) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (3.38)$$

$$= \frac{\alpha_s^2 m_H^2}{1024\pi v^2} \tau^2 \delta(s - m_H^2) \left[1 + (1 - \tau) \arcsin^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \right]^2. \quad (3.39)$$

Este resultado está acorde con los resultados reportados en la literatura [19, 20], además de ser importante para posteriores cálculos de restricciones sobre los decaimientos invisibles del bosón de Higgs, siendo estos candidatos a materia oscura.

Contrastar el resultado teórico de la sección eficaz calculada con el observado experimentalmente requiere de la reconstrucción de la sección eficaz observada mediante la convolución de la sección eficaz partonica resultante del proceso pp y las funciones de distribución partonica [56, 61, 62]. Este tipo de reconstrucciones normalmente se realizan con programas especializados como lo es «The POWHEG BOX» [63] y «PYTHIA» [64].

4. Materia Oscura

4.1 Materia Oscura

Las primeras evidencias de materia oscura surgieron de observaciones cosmológicas y astrofísicas. En 1933 Zwicky publica sus observaciones sobre el cúmulo de Coma [10], donde muestra que existe una discrepancia entre la velocidad de rotación observada de las galaxias y la velocidad calculada teóricamente. Esto le permitió concluir que debería existir más materia de la que se observaba; de otra forma, dicha estructura colapsada gravitacionalmente no podría mantenerse unida por falta de una fuerza gravitacional. Esta discrepancia se siguió encontrando en diferentes observaciones [11, 12, 13], dando más peso a dicho argumento; además, el efecto lente gravitacional que confirmó la teoría de la relatividad de Einstein confirma la existencia de la DM [65, 66] ya que la materia observada no era suficiente para explicar el efecto observado. Este método se usa para medir las masas de las diferentes estructuras colapsadas gravitacionalmente, dado que hay una relación entre la curvatura de la luz y la cantidad de materia que curva el espacio-tiempo.

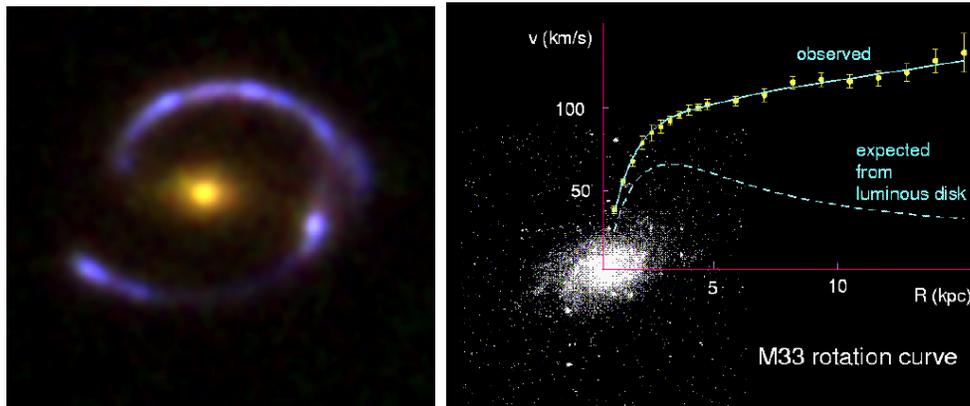


Figura 4.1: A la izquierda: Lente gravitacional de la galaxia *ojo cósmico*, generado por una abundancia de DM dado que el conjunto de masa bariónica (amarilla) no es suficiente para generar tal distorsión según las simulaciones realizadas [65]. A la derecha: Superposición de las velocidades de rotación de la galaxia espiral enana M33 (puntos) comparada con las predicciones teóricas (línea punteada) [67, 68].

Estas observaciones predicen las propiedades que debe tener la DM: su carga eléctrica es neutra, ya que no interactúa con la luz; debe ser masiva, entre 2 GeV - 1 TeV (la cota inferior conocida como el límite de Lee-Weinberg y la cota superior conocida como el límite de unitariedad); debe moverse a velocidades no relativistas, para no afectar la formación de galaxias ni la estructura a gran escala observada en el Universo; debe ser estable, comparada con las escalas de tiempo cosmológico; debe tener una auto interacción débil, para poder crear las estructuras cosmológicas observadas y preferiblemente su interacción es débil o sub débil y es materia no-bariónica. [69]. Este tipo de DM es conocida como Materia Oscura Fría (CDM).

No obstante, si solo se considera este tipo de materia como explicación a las discrepancias anteriormente mencionadas, surgen nuevos problemas tales como el problema de los satélites de galaxias [70], del cúmulo central [71], del «halo too big to fail» [72] entre otros, los cuales no concuerdan con las observaciones. La solución a estos problemas es considerar dos tipos extras de DM conocidas como materia oscura tibia (WDM), la cual no es tan masiva como la CDM ya que va del orden de pocos keV y se mueve a velocidades relativistas y materia oscura caliente (HDM), la cual es muy ligera, del orden de pocos eV y se mueve a velocidades ultra relativistas (cercasas a la velocidad de la luz). Al considerar estos nuevos tipos de DM se permite suavizar la formación de subestructuras cosmológicas y acercar las simulaciones a las observaciones. Esta clasificación se basa en cuán relativistas son cuando salen del equilibrio térmico en el Universo temprano, osea, cuando se desacoplan del plasma térmico.

DENSIDAD TOTAL DE MATERIA EN EL UNIVERSO

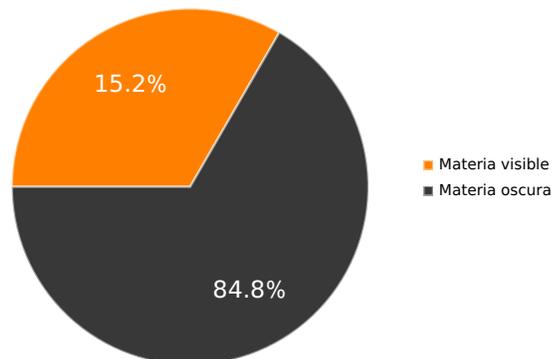


Figura 4.2: Densidad total de materia en el universo en términos porcentuales. Gráfica adaptada de los datos de [35].

4.2 Candidatos a materia oscura

Los diferentes candidatos a DM están relacionados según su tipo, sea CDM, WDM o HDM. Hay partículas cuyo rango de masa puede abarcar todos los tipos de DM como hay otras cuyo rango de masa las mantienen encasilladas en una sola categoría.

4.2.1 Materia oscura fría

Estos candidatos están conformados por las partículas que se encuentren en el rango de masa aproximado de 2 GeV a 1 TeV cuya velocidad es no relativista y se pueden explicar con: partículas masivas débilmente interactuantes (WIMPs), materia oscura del sector oculto (HSDM), las reliquias térmicas ocultas (WIMPLEes) [73], la materia oscura asimétrica (ADM) [74, 75] y materia oscura congelada por inclusión (FIDM) [76], estos candidatos podrían ser detectadas a través de colisiones de partículas.

Los WIMPs pueden ser considerados puramente CDM ya que están en el orden de los GeV en adelante, entre ellos tenemos a los Neutralinos, Gluinos, Charginos, el Higgsino y los sleptons, los cuales cumplen con las propiedades fundamentales de la DM [77]. En la Figura (4.3) se muestran los límites superiores de sección eficaz de producción de estos WIMPs reportados por diferentes colaboraciones.

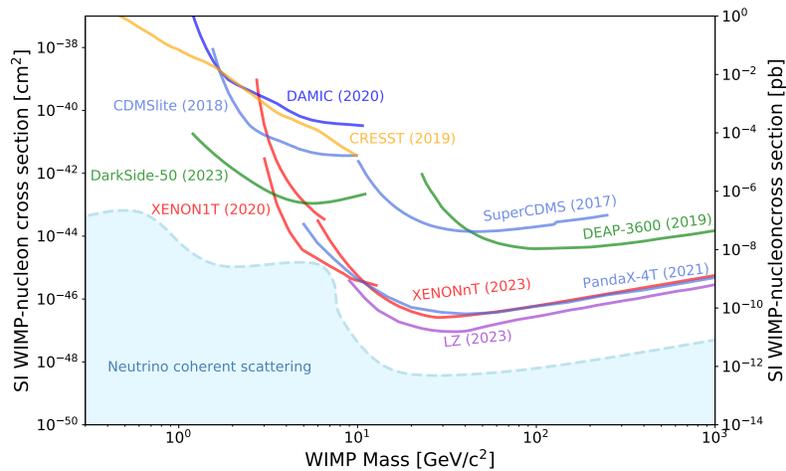


Figura 4.3: Límites superiores de la sección eficaz WIMPs-Nucleón en función de la masa para distintos experimentos [35].

Además la CDM es la base del modelo cosmológico estándar Λ CDM, el cual explica la estructura, evolución del universo a gran escala y la radiación cósmica del fondo de microondas. Este modelo considera la materia visible, la DM y la energía oscura (DE), esta última es la encargada de explicar la expansión acelerada del universo [78, 79].

Aunque el modelo Λ CDM es efectivo, predice la existencia de más galaxias satélites de las que se han observado conocido como el «*The missing satellites*», predice que la densidad de materia en el centro de las galaxias enanas y de bajas energías deben tener una distribución de DM que sigue un perfil cuspidal en el centro, pero esto no se ve en las observaciones astronómicas y es conocido como «*The cusp-core*». Adicionalmente, predice la existencia de grandes halos de DM alrededor de la vía láctea evidencia que no se ha observado, conocido como el «*The too-big-to-fail*» [80, 81]. Todos estos problemas presentes en el modelo tendrían una posible solución si se considera que la DM no solo es CDM sino que también podría existir una WDM y HDM (esta no es la única explicación posible).

4.2.2 Materia oscura tibia

Dentro de estos candidatos tenemos las partículas cuyo rango de masa es $m_{WDM} > (1.6 - 2.3)$ keV y se mueve a velocidades relativistas [35], los posibles candidatos son: los neutrinos estériles, y los anteriormente mencionados HSDM, WIMPLEes, ADM y FIDM. Al centrarnos en los neutrinos estériles tenemos que estos candidatos pueden ser de dos tipos: neutrinos estériles tipo Majorana o tipo Dirac [82], donde estos se diferencian en el mecanismo por el cual adquieren masa, por ejemplo si consideramos los neutrinos de mano derecha tipo Dirac su masa se explica mediante el mecanismo de Higgs como cualquier fermión, lo que implicaría que los neutrino de mano derecha tendrían una masa dentro del rango de la WDM, sin embargo si consideramos que estos neutrinos son tipo Majorana el mecanismo para adquirir masa es otro y es conocido como el mecanismo seesaw [83, 84, 85] donde el neutrino de mano derecha es muy masivo para poder explicar la poca masa del neutrino de mano izquierda dado que de la interacción de los dos neutrinos el derecho adquiere la mayor cantidad de masa mientras que el izquierdo queda con una pequeña porción explicando los neutrinos izquierdos observados de poca masa.

Las propiedades de la WDM permiten explicar la formación de las estructuras colapsadas gravitacionalmente a pequeña escala, suaviza la distribución de galaxias pequeñas en todo el universo y ajusta las observaciones de galaxias y cúmulos de galaxias en el modelo Λ CDM.

4.2.3 Materia oscura caliente

Considerar este tipo de DM es importante para terminar de acoplar el modelo Λ CDM a las observaciones cosmológicas. Los candidatos deben estar en un rango de masa $m_{HDM} < 1$ eV y deben tener velocidades ultra relativistas, quienes cumplen estas condiciones son: los neutrinos, neutrinos estériles ligeros, axion [86], gravitino [87] y las partículas de Kaluza-Klein [88]. A excepción de los neutrinos, los demás candidatos son partículas hipotéticas. Los neutrinos son el único tipo de materia no bariónica que conocemos en el universo, el cual cumple con todas las propiedades para ser HDM y son los que normalmente son reconocidos como tal. La función principal de la HDM en el modelo Λ CDM es evitar la formación excesiva de estructuras colapsadas gravitacionalmente a pequeña escala terminando de suavizar las distribuciones de DM y junto con la WDM brinda una posible solución a los problemas del modelo Λ CDM explicados anteriormente.

La búsqueda de DM se está desarrollando desde diferentes áreas de la física. A partir de la evidencia experimental cosmológica sabemos que hay algo que no estábamos considerando y que podría ser DM, estas búsquedas se hacen de diferentes formas.

4.3 Métodos de detección de DM

La materia oscura podría ser detectada de manera directa, indirecta o en colisionadores dependiendo del tipo de experimento. En la Figura (4.4) se representa de forma esquemática los tres tipos de búsqueda de DM.

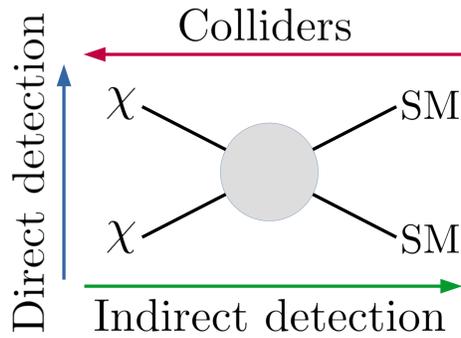


Figura 4.4: Representación esquemática de los tres tipos de búsqueda de materia oscura y los diferentes procesos de interacción. Esta figura fue tomada de la Ref. [89].

4.3.1 Método de detección directa

Este método se caracteriza por tratar de observar la interacción de las partículas de DM presentes en la tierra con una masa concentrada de ciertos elementos que son más probables a interactuar con la DM. Por ejemplo, el experimento LUX-ZEPLIN utiliza un detector de Xenón líquido ultra purificado para realizar la búsqueda [90]. Si la densidad local de DM en el sistema solar es alrededor de $0.4\text{GeV}/\text{cm}^3$ [91, 92], y se considera que esta es una partícula con una masa de alrededor de 100 GeV debería haber más o menos 4 partículas por metro cúbico en la Tierra [89] y estas partículas son las que se espera que interactúen con los detectores. En la Figura (4.4) correspondería a una interacción tipo: $\chi + \text{SM} \rightarrow \chi + \text{SM}$

4.3.2 Método de detección indirecta

Este método se caracteriza por tratar de detectar partículas del SM que son producto de decaimientos o procesos de colisión de partículas de DM que generan en mayor medida pares de partícula-antipartícula cargadas como lo son protón-anti protón ($p\bar{p}$), electrón-positrón ($e\bar{e}$) y neutrinos. Un ejemplo de experimento que está enfocada en este tipo de detección indirecta es el Espectrómetro Magnético Alpha (AMS-02) [93]. El estudio de este tipo de detección es fundamental para entender cómo la DM podría producir partículas del SM [89]. En la Figura (4.4) correspondería a una interacción tipo: $\chi + \chi \rightarrow \text{SM} + \text{SM}$

4.3.3 Método de detección por colisionadores

Este método se centra en tratar de detectar partículas a través de colisiones de altas energías de partículas como protones, electrones o positrones, o formar partículas pesadas que posteriormente decaen en DM [89]. Los decaimientos de las partículas del SM han sido ampliamente estudiados, sin embargo, hay un conjunto de partículas que tienen la posibilidad de decaer en DM y el principal candidato para estos procesos es el bosón de Higgs el cual podría producir una partícula de DM «ligera» la cual puede ser detectada mediante un momento trasverso faltante en los procesos que se estudian [9], este decaimiento parcial del bosón de Higgs es conocido como decaimientos invisibles y es ampliamente estudiado e investigado. Un modelo básico que hace parte del sector oscuro para extender el SM y agregar los decaimientos invisibles es el conocido como «portal del Higgs» [94, 95, 96]. Este modelo se utiliza en la búsqueda de WIMPs en los aceleradores de partículas como lo es el LHC. En la Figura (4.4) correspondería a una interacción tipo: $SM + SM \rightarrow \chi + \chi$

La física de partículas está intentando obtener evidencia directa de la existencia de DM mediante los experimentos realizados en el LHC estudiando los posibles decaimientos invisibles del bosón de Higgs liderado por las colaboraciones ATLAS y CMS.

4.4 Búsqueda de materia oscura con los experimentos ATLAS y CMS: decaimientos invisibles del bosón de Higgs

Los experimentos ATLAS y CMS han realizado búsquedas de los posibles decaimientos invisibles del bosón de Higgs, utilizando los datos recopilados entre los años 2010-2012, 2015-2018 y 2022 (Run 1, Run 2 y Run 3, respectivamente) [9, 22]. El bosón de Higgs puede entenderse de dos distintas formas dentro del proceso de producción de DM. La primera es, cuando este es considerado como una partícula libre (On-Shell), la cual esta obligada a tener una masa específica ($m_H = 125.2$ GeV [35]) y pasado su tiempo de vida media (1.56×10^{-22} s) decae en dos partículas de materia oscura cuyas masas son $m_{DM} \leq \frac{m_H}{2} = 62.6$ GeV, explicando así la producción de partículas de materia oscura con una masa $m_{DM} \leq 62.6$ GeV. La segunda es, cuando este es considerado como un propagador (Off-Shell), en este caso

no hay restricciones a la masa que pueda adquirir dicho propagador, limitado solamente por la cantidad de energía inicial del proceso de fusión de gluones dada la conservación del cuadrimomento, explicando así la producción de materia oscura con masas superiores a 62.6 GeV pero manteniendo la proporcionalidad de $m_{DM} \leq \frac{m_H}{2}$. Es pertinente aclarar que aunque es posible explicar la producción de DM en cualquier rango de masa con los decaimiento del Higgs para este canal se debe considerar la conservación de: el cuadrimomento, la hipercarga débil, la carga, la carga de color, las simetrías discretas (C,P y CP) y una nueva simetría asociada a la materia oscura denominada paridad Z_2 para que el proceso sea valido de otra forma se debe buscar otros canales de producción de DM distintos al bosón de Higgs.

Dado que los decaimientos invisibles del Higgs son detectados de manera indirecta, se estudian procesos donde los decaimientos de las partículas resultantes de la producción del Higgs emitan partículas detectables o estas partículas hadronicen y emitan uno o mas jets cuárquicos o un jet gluónico que puedan ser observados. Los jets están bien identificados debido a sus características las cuales son: su ángulo de emisión, el conjunto de partículas que conforman el jet y la distribución de energía sobre estas o qué tan colimado es el jet emitido. Estos jets pueden dar información sobre la tasa de decaimiento del bosón de Higgs hacia estados finales invisibles, $\mathcal{B}_{H \rightarrow \text{Inv}}$, mediante un posible momento transversal perdido (E_T^{miss}) realizando una regresión sobre estos. Los procesos asociados a la producción del bosón de Higgs que emiten uno o más jets que son estudiados por ATLAS y CMS para la búsqueda de E_T^{miss} son:

4.4.1 Fusión de bosones vectoriales

Se caracteriza por emitir 2 jets cuárquicos con un ángulo azimutal no superior a π o «*no back-to-back*» (VBF+ E_T^{miss}), son los que llevan la información para la búsqueda de posibles $\mathcal{B}_{H \rightarrow \text{Inv}}$ [14]. El diagrama de Feynman asociado a este proceso se muestra en la Figura (4.5).

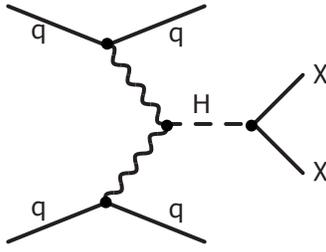


Figura 4.5: Diagrama de producción del Higgs a través de la fusión de bosones vectoriales (W , Z) donde se emiten dos quark que se hadronizan y forman dos jets cuárquicos y que posteriormente el Higgs decae en materia oscura. [9].

Un proceso extra que hace parte de la VBF pero que se diferencia con el proceso anterior es cuando el Higgs se produce a través de dos bosones W , pero uno de los bosones W emite un fotón extra antes de producir el boson de Higgs ($VBF + \gamma + E_T^{\text{miss}}$) [15]. El diagrama de Feynman asociado a este último proceso se presenta en la Figura (4.6).

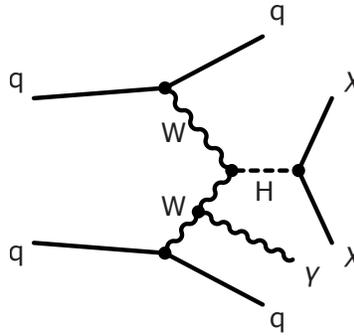


Figura 4.6: Diagrama de producción del Higgs a través de la fusión de bosones W emitiendo dos quark que se hadronizan formando dos jets cuárquicos y el Higgs decae posteriormente en materia oscura. [9].

4.4.2 Emisión de leptones más momento transversal perdido

En este proceso se busca un exceso de eventos de dos leptones más momento transversal perdido. Los leptones provienen de la desintegración del bosón Z , el cual se produce junto al Higgs, quien a su vez se desintegra en DM ($Z + H$ [$Z \rightarrow \ell\ell$] + E_T^{miss}) [16]. La Figura (4.7) muestra el diagrama de Feynman asociado a este proceso.

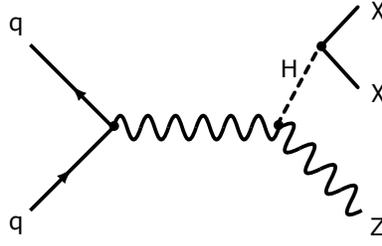


Figura 4.7: Diagrama de producción del Higgs a través del decaimiento de un bosón vectorial (W , Z) que emite un bosón Z y el bosón de Higgs que posteriormente decae en materia oscura. [9].

4.4.3 Fusión de gluones

Este proceso se caracteriza por que el quark t y un \bar{t} resultantes del proceso de fusión de gluones decaen posteriormente en $W + b$, donde el quark b se hadroniza formando un jet cuárquico y el bosón W decae en un par de leptones ($t\bar{t} + E_T^{\text{miss}}$), esta firma característica puede identificar el proceso anteriormente mencionado [17]. El diagrama de Feynman asociado a este proceso se presenta en la Figura (4.8).

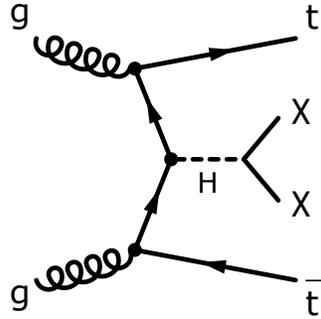


Figura 4.8: Diagrama de producción del Higgs a través de la fusión de gluones que emiten un $t + \bar{t}$ donde el Higgs posteriormente decae en materia oscura [9].

Para finalizar tenemos el último proceso que se estudió en la búsqueda de decaimientos invisibles, siendo este el más relevante para nuestro trabajo y que también está relacionado con la fusión de gluones que generan un Higgs ($\text{Jet} + E_T^{\text{miss}}$). A diferencia del proceso anterior, en este caso quien contiene la información es un jet gluónico que se emite de uno de los gluones que se fragmenta [9]. La Figura (4.9) muestra el diagrama de Feynman que describe este último proceso.

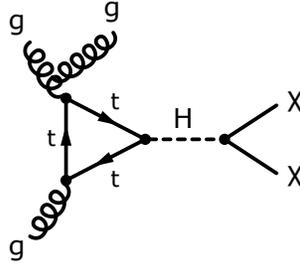


Figura 4.9: Producción del Higgs a través de la fusión de gluones donde uno de los gluones se fragmente para que esa fragmentación se hadroniza y emita un jet gluónico y la otra parte fragmentada realiza la fusión de gluones mediante un loop de quarks t que generan un bosón de Higgs y este posteriormente decae en materia oscura.[9].

La relevancia de este proceso, con respecto al canal estudiado en la sección anterior radica en que es detectable, esto es posible mediante la reconstrucción realizada con la información que aporta el jet gluónico a los detectores. Este proceso también es conocido como una corrección real sobre los cálculos perturbativos.

4.4.4 Resultados obtenidos por los experimentos ATLAS y CMS

Canal	A.O $\mathcal{B}_{H \rightarrow \text{Inv}}$	L.S Obs. 95 %CL	L.S Esp. 95 %CL
Jet + E_{miss}	$-0.09^{+0.19}_{-0.20}$	0.329	$0.383^{+0.157}_{-0.107}$
VBF + γ + E_{miss}	$0.04^{+0.17}_{-0.15}$	0.375	$0.346^{+0.151}_{-0.097}$
$t\bar{t}$ + E_{miss}	0.08 ± 0.15	0.376	$0.295^{+0.125}_{-0.083}$
$(Z \rightarrow \ell\ell)$ + E_{miss}	0.00 ± 0.09	0.185	$0.185^{+0.078}_{-0.052}$
VBF + E_{miss}	0.05 ± 0.05	0.145	$0.103^{+0.041}_{-0.028}$
RUN 2 Comb.	0.04 ± 0.04	0.113	$0.080^{+0.031}_{-0.022}$
RUN 1 Comb.	$-0.02^{+0.14}_{-0.13}$	0.252	$0.265^{+0.105}_{-0.074}$
RUN 1 + 2 Comb.	0.04 ± 0.04	0.107	$0.077^{+0.030}_{-0.022}$

Tabla 4.1: Relación de los canales de producción de Higgs con ajuste óptimo (A.O) de los decaimientos invisibles del Higgs y los límites superiores (L.S), observados (Obs.) y Esperados (Esp.) con un 95 % de CL [9].

Aunque no se han detectado de manera concluyente los $\mathcal{B}_{H \rightarrow \text{Inv}}$, si se han obtenido restricciones que limitan el porcentaje de estos dependiendo del proceso. Los resultados reportados por el experimento ATLAS para los distintos canales de producción de DM se presentan en la Tabla (4.1).

Mientras que los resultados obtenidos por el experimento CMS se presentan en la Tabla (4.2).

Canal	A.O $\mathcal{B}_{H \rightarrow \text{Inv}}$	L.S Obs.(Esp.) 95 %CL
Combinación	0.08 ± 0.04	0.15(0.08)
VBF	0.09 ± 0.05	0.18(0.10)
VH	0.07 ± 0.09	0.24(0.18)
$t\bar{t}$	-0.11 ± 0.15	0.25(0.30)
ggH	0.22 ± 0.16	0.49(0.32)

Tabla 4.2: Relación de los canales de producción de Higgs con ajuste óptimo (A.O) de los decaimientos invisibles del Higgs y los límites superiores (L.S) observados (Obs.) y esperados (Esp.) con un 95 % de CL [22].

Los resultados de las tablas obtenidas por los experimentos ATLAS y CMS se presentan en la Figura (4.10).

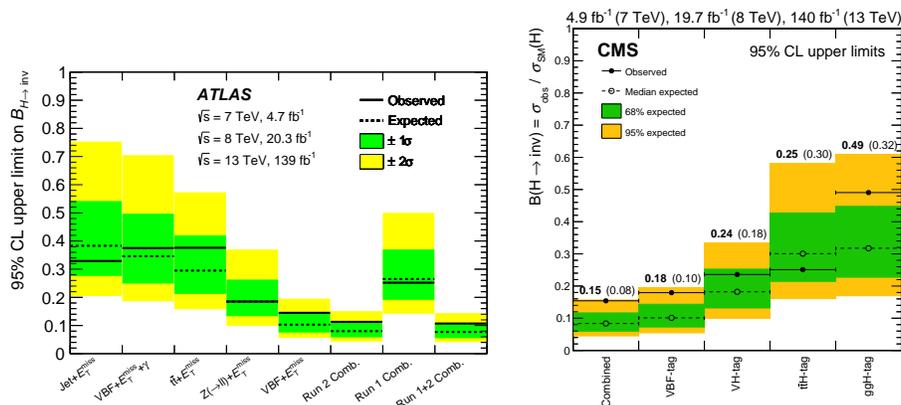


Figura 4.10: Límites superiores, observados y esperados, para los decaimientos invisibles en los diferentes canales de producción de Higgs los cuales pueden decaer en DM. Panel izquierdo: obtenidos por el experimento ATLAS. Panel derecho: reportados por el experimento CMS. Gráficas tomadas de la Ref. [9, 22], respectivamente.

A partir del análisis realizado con los resultados obtenidos por los experimentos ATLAS y CMS se concluyó que no se observó un exceso significativo de eventos por encima del ruido predicho por el SM. Estos procesos son estudiados usando el modelo de Higgs-Portal para la detección de DM en el LHC [97, 21, 98], donde se extiende el SM y anexa los vértices de interacción del Higgs con la DM sea esta escalar, Majorana o vectorial, dependiendo del candidato que se estudie. ATLAS Y CMS también realizaron una búsqueda sobre la sección eficaz de producción de WIMPS en función de su masa para cada tipo de DM comparándolos con los resultados obtenidos en experimentos de detección directa de DM usando el Higgs-Portal para WIMPs:

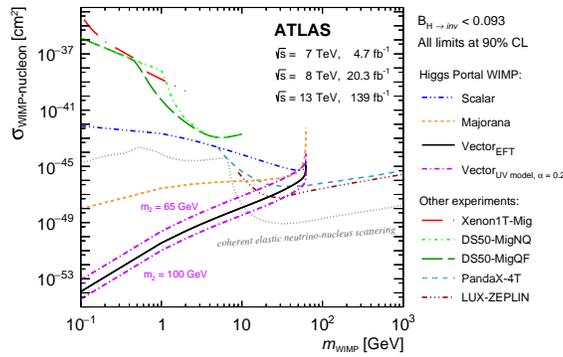


Figura 4.11: Límites superiores con un 90 % CL de la sección eficaz de producción de DM tipo WIMP mediante el Portal de Higgs del LHC comparado con otros experimentos de detección directa de DM realizado por el experimento ATLAS. Gráfica tomada de la Ref. [9].

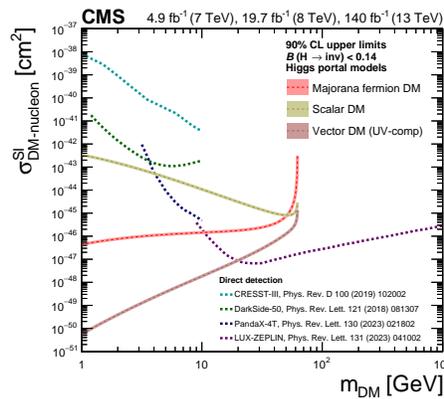


Figura 4.12: Límites superiores con un 90 % CL de la sección eficaz de producción de DM tipo WIMP mediante el Portal de Higgs del LHC comparado con otros experimentos de detección directa de DM realizado por el experimento CMS. Gráfica tomada de la Ref. [22].

Calcular $\sigma(gg \rightarrow H)_{SM}$ es necesario para obtener los $\mathcal{B}_{H \rightarrow \text{Inv}}$, las restricciones que se imponen sobre los mismos y el posterior cálculo de la sección eficaz de producción de materia oscura [$\sigma(H \rightarrow \chi\chi)$]. Las restricciones en la tasas de decaimientos invisibles del Higgs del proceso de fusión de gluones esta definida como:

$$R_{\text{Inv}}^{gg} = \frac{\sigma(gg \rightarrow H) \times \mathcal{B}_{H \rightarrow \text{Inv}}^{gg}}{\sigma(gg \rightarrow H)_{SM}}. \quad (4.1)$$

Esto permite acotar los rangos de búsqueda para futuros experimentos que tendrán mayor estadística y energía donde se espera concluir la existencia o no de estos decaimientos y por ende de DM, además impone límites claros sobre los modelos teóricos que permiten acotar parámetros, descartar escenarios y validar o excluir la existencia de nueva física.

5. Conclusiones

Mediante técnicas de cálculo perturbativo como lo son la expansión de Dyson, el método diagramático de Feynman, el álgebra de Dirac, el álgebra de color en la Cromodinámica Cuántica y el método de reducción de Passarino-Veltman se calculó la sección eficaz de la producción de un bosón de Higgs a través de la fusión de gluones al orden dominante, mediado por un loop de un quark top virtual. Usando regularización dimensional se verificó explícitamente que la amplitud de scattering está libre de divergencias ultra-violetas, el resultado es finito y proporcional a la masa del quark top, haciendo dominante esta contribución. El cálculo se automatizó en un algoritmo en Mathematica usando la ayuda de los paquetes de FeynArts, FeynCalc y FeynHelpers, los resultados se verificaron con la literatura.

Adicionalmente se estudió la producción de materia oscura a partir del decaimiento del bosón de Higgs en el modelo Higgs-portal y se revisó los métodos de detección y los resultados experimentales obtenidos por los experimentos ATLAS y CMS en el CERN. Se mostró la relevancia del cálculo de la sección eficaz de producción del Higgs en el cálculo del branching ratio de los decaimientos invisibles, además de las restricciones impuestas en las tasas de decaimiento para la posible producción de materia oscura. En particular para el proceso de fusión de gluones estudiado en este trabajo, los experimentos ATLAS y CMS mostraron que máximo entre 38 % – 49 % de los decaimientos pueden ser invisibles.

Finalmente como perspectivas a futuro, se quiere desarrollar los cálculos relacionados a los procesos de decaimientos del bosón de Higgs en materia oscura y su sección eficaz de producción en el modelo Higgs-portal para el caso en que la materia oscura sea considerada como una partícula escalar, vectorial o fermiónica para el canal estudiado y extenderlo a otros posibles canales de producción del Higgs.

Referencias

- [1] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, and S. e al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Physics Letters B*, 716(1):1–29, 2012.
- [2] S. Chatrchyan, V. Khachatryan, and A.M. Sirunyan e al. Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lhc. *Physics Letters B*, 716(1):30–61, 2012.
- [3] Peter W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, 12:132–133, 1964.
- [4] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–323, Aug 1964.
- [5] C Grojean. Higgs physics. *arXiv preprint arXiv:1708.00794*, 2017.
- [6] M Gomez-Bock, M Mondragon, M Muhlleitner, R Noriega-Papaqui, I Pedraza, M Spira, and PM Zerwas. Rompimiento de la simetria electrodebil y la fisica del higgs: Conceptos basicos. *arXiv preprint hep-ph/0509077*, 2005.
- [7] Gholamhossein Haghightat, Mojtaba Mohammadi Najafabadi, Kodai Sakurai, and Wen Yin. Probing a light dark sector at future lepton colliders via invisible decays of the sm-like and dark higgs bosons. *Physical Review D*, 107(3):035033, 2023.
- [8] Albert M Sirunyan, Armen Tumasyan, Wolfgang Adam, Federico Ambrogio, Ece Asilar, Thomas Bergauer, Johannes Brandstetter, Marko Dragicevic, Janos Erö, A Escalante Del Valle, et al. Search for invisible decays of a higgs boson produced through vector boson fusion in proton-proton collisions at s= 13tev. *Physics Letters B*, 793:520–551, 2019.
- [9] Georges Aad, B Abbott, Kira Abeling, SH Abidi, Asmaa Aboulhorma, Halina Abramowicz, Henso Abreu, Yiming Abulaiti, AC Abusleme Hoffman, Bobby Samir Acharya, et al. Combination of searches for invisible decays of the higgs boson using 139 fb⁻¹ of proton-proton collision data at s= 13 tev collected with the atlas experiment. *Physics Letters B*, 842:137963, 2023.

- [10] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helv. Phys. Acta*, 6:110–127, 1933.
- [11] Horace W. Babcock. The rotation of the Andromeda Nebula. *Lick Observatory Bulletin*, 498:41–51, January 1939.
- [12] Vera C. Rubin and Jr. Ford, W. Kent. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *apj*, 159:379, February 1970.
- [13] M. S. Roberts and R. N. Whitehurst. The rotation curve and geometry of M31 at large galactocentric distances. *apj*, 201:327–346, October 1975.
- [14] Georges Aad, Brad Abbott, Dale C Abbott, Adam Abed Abud, Kira Abeling, Deshan Kavishka Abhayasinghe, Syed Haider Abidi, Asmaa Aboulhorma, Halina Abramowicz, Henso Abreu, et al. Search for invisible higgs-boson decays in events with vector-boson fusion signatures using 139 fb⁻¹ of proton-proton data recorded by the atlas experiment. *Journal of High Energy Physics*, 2022(8):1–66, 2022.
- [15] Georges Aad, B Abbott, DC Abbott, A Abed Abud, Kira Abeling, Deshan Kavishka Abhayasinghe, SH Abidi, Asmaa Aboulhorma, Halina Abramowicz, Henso Abreu, et al. Observation of electroweak production of two jets in association with an isolated photon and missing transverse momentum, and search for a higgs boson decaying into invisible particles at 13 tev with the atlas detector. *The European Physical Journal C*, 82(2):105, 2022.
- [16] Georges Aad, B Abbott, DC Abbott, A Abed Abud, Kira Abeling, Deshan Kavishka Abhayasinghe, SH Abidi, Asmaa Aboulhorma, Halina Abramowicz, Henso Abreu, et al. Search for associated production of a z boson with an invisibly decaying higgs boson or dark matter candidates at s= 13 tev with the atlas detector. *Physics Letters B*, 829:137066, 2022.
- [17] Georges Aad, B Abbott, DC Abbott, Kira Abeling, SH Abidi, Asmaa Aboulhorma, Halina Abramowicz, Henso Abreu, Yiming Abulaiti, AC Abusleme Hoffman, et al. Constraints on spin-0 dark matter mediators and invisible higgs decays using atlas 13 tev pp collision data with two top quarks and missing transverse momentum in the final state. *The European Physical Journal C*, 83(6):503, 2023.

- [18] Georges Aad, Brad Abbott, Dale Charles Abbott, Adam Abed Abud, Kira Abeling, Deshan Kavishka Abhayasinghe, Syed Haider Abidi, OS AbouZeid, Nadine L Abraham, Halina Abramowicz, et al. Search for new phenomena in events with an energetic jet and missing transverse momentum in pp collisions at $s = 13$ tev with the atlas detector. *Physical Review D*, 103(11):112006, 2021.
- [19] Patrick Motylinski Stan Bentvelsen, Eric Laenen. Higgs production through gluon fusion at leading order. *NIKHEF 2005 - 007*, 2005.
- [20] Stefan Richter. Higgs production via gluon fusion at next-to-leading order. *University College London*, November 2013.
- [21] Abdelhak Djouadi, Adam Falkowski, Yann Mambrini, and Jeremie Quevillon. Direct detection of higgs-portal dark matter at the lhc. *The European Physical Journal C*, 73:1–7, 2013.
- [22] CMS Collaboration et al. Dark sector searches with the cms experiment. *arXiv preprint arXiv:2405.13778*, 2024.
- [23] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, Oct 1954.
- [24] M.E. Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [25] M. Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 1 2007.
- [26] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3 2014.
- [27] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 6 2005.
- [28] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. Cambridge University Press, 8 2013.
- [29] L.D. Faddeev and V.N. Popov. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physics Letters B*, 25(1):29–30, 1967.
- [30] W. Pauli. The connection between spin and statistics. *Phys. Rev.*, 58:716–722, Oct 1940.

- [31] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys. B*, 44:189–213, 1972.
- [32] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, 8:214–215, 1964.
- [33] G. Zweig. *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2*, pages 22–101. CERN, 2 1964.
- [34] H. Fritzsch, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett. B*, 47:365–368, 1973.
- [35] S. Navas et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 110(3):030001, 2024.
- [36] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30(26):1343–1346, 1973.
- [37] H. David Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, Jun 1973.
- [38] Giovanni Ridolfi Carlo M. Becchi. *An Introduction to Relativistic Processes and the Standard Model of Electroweak Interactions*. Springer Cham, 2014.
- [39] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964.
- [40] Peter W. Higgs. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. *Phys. Rev.*, 145:1156–1163, May 1966.
- [41] Suzanne van Dam. Spontaneous symmetry breaking in the higgs mechanism. This essay was submitted as part of the Master's course "Part III of the Mathematical Tripos." at the University of Cambridge.
- [42] T. W. B. Kibble. Symmetry breaking in non-abelian gauge theories. *Phys. Rev.*, 155:1554–1561, Mar 1967.
- [43] Pietro Slavich, Sven Heinemeyer, E Bagnaschi, Henning Bahl, M Goodsell, Howard E Haber, T Hahn, R Harlander, W Hollik, G Lee, et al. Higgs-mass predictions in the mssm and beyond. *The European Physical Journal C*, 81(5):1–71, 2021.

- [44] EA Reyes R and AR Fazio. Higgs boson mass corrections at three loops in the top-yukawa sector of the standard model. *Physical Review D*, 108(5):053007, 2023.
- [45] The ATLAS and CMS collaborations. Combination of measurements of the top quark mass from data collected by the atlas and cms experiments at $\sqrt{s} = 7$ and 8 tev. *ATLAS-CONF-2023-066*, September 2023.
- [46] R. P. Feynman. Space - time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76:769–789, 1949.
- [47] Thomas Hahn. Generating feynman diagrams and amplitudes with feynarts 3. *Computer Physics Communications*, 140(3):418–431, 2001.
- [48] R. Mertig, M. Bohm, and Ansgar Denner. FEYN CALC: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes. *Comput. Phys. Commun.*, 64:345–359, 1991.
- [49] Vladyslav Shtabovenko. Feynhelpers: connecting feyncalc to fire and package-x. *Computer Physics Communications*, 218:48–65, 2017.
- [50] Hiren H Patel. Package-x: A mathematica package for the analytic calculation of one-loop integrals. *Computer Physics Communications*, 197:276–290, 2015.
- [51] John Ellis, Mary K. Gaillard, and D.V. Nanopoulos. A phenomenological profile of the higgs boson. *Nuclear Physics B*, 106:292–340, 1976.
- [52] Arild Skjold and Per Osland. Testing cp in the bjorken process. *Nuclear Physics B*, 453(1):3–16, 1995.
- [53] Benjamin W. Lee, C. Quigg, and H. B. Thacker. Weak interactions at very high energies: The role of the higgs-boson mass. *Phys. Rev. D*, 16:1519–1531, Sep 1977.
- [54] Chong-Xing Yue and Nan Zhang. Effects of the littlest Higgs model with T-parity on Higgs boson production at high energy e+ e- colliders. *EPL*, 77(5):51003, 2007.
- [55] A. Djouadi, M. Spira, and P.M. Zerwas. Production of higgs bosons in proton colliders. qcd corrections. *Physics Letters B*, 264(3):440–446, 1991.
- [56] Michael Spira, Abdelhak Djouadi, D Graudenz, and RM Zerwas. Higgs boson production at the lhc. *Nuclear Physics B*, 453(1-2):17–82, 1995.

- [57] H. M. Georgi, S. L. Glashow, M. E. Machacek, and D. V. Nanopoulos. Higgs bosons from two-gluon annihilation in proton-proton collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 40:692–694, Mar 1978.
- [58] S. Dawson. Radiative corrections to higgs boson production. *Nuclear Physics B*, 359(2):283–300, 1991.
- [59] T Figy, D Zeppenfeld, and C Oleari. Next-to-leading order jet distributions for higgs boson production via weak-boson fusion. *Physical Review D*, 68(7):073005, 2003.
- [60] R.N. Cahn and Sally Dawson. Production of very massive higgs bosons. *Physics Letters B*, 136(3):196–200, 1984.
- [61] Charalampos Anastasiou, Claude Duhr, Falko Dulat, Elisabetta Furlan, Thomas Gehrmann, Franz Herzog, Achilleas Lazopoulos, and Bernhard Mistlberger. High precision determination of the gluon fusion higgs boson cross-section at the lhc. *Journal of High Energy Physics*, 2016(5):1–101, 2016.
- [62] Atlas Collaboration et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *arXiv preprint arXiv:1207.7214*, 2012.
- [63] Simone Alioli, Paolo Nason, Carlo Oleari, and Emanuele Re. A general framework for implementing nlo calculations in shower monte carlo programs: the powheg box. *Journal of High Energy Physics*, 2010(6):1–58, 2010.
- [64] Christian Bierlich, Smita Chakraborty, Nishita Desai, Leif Gellersen, Ilkka Helenius, Philip Ilten, Leif Lönnblad, Stephen Mrenna, Stefan Prestel, Christian Tobias Preuss, et al. A comprehensive guide to the physics and usage of pythia 8.3. *SciPost Physics Codebases*, page 008, 2022.
- [65] Richard Massey, Thomas Kitching, and Johan Richard. The dark matter of gravitational lensing. *Reports on Progress in Physics*, 73(8):086901, 2010.
- [66] Douglas Clowe, Maruša Bradač, Anthony H Gonzalez, Maxim Markevitch, Scott W Randall, Christine Jones, and Dennis Zaritsky. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal*, 648(2):L109, 2006.

- [67] Varun Sahni. Dark matter and dark energy. *Lecture Notes in Physics*, 653, 03 2004.
- [68] Edvige Corbelli and Paolo Salucci. The extended rotation curve and the dark matter halo of m33. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 311(2):441–447, 2000.
- [69] S. Weinberg. *Cosmology*. Cosmology. OUP Oxford, 2008.
- [70] Anatoly Klypin, Andrey V Kravtsov, Octavio Valenzuela, and Francisco Prada. Where are the missing galactic satellites? *The Astrophysical Journal*, 522(1):82, 1999.
- [71] B. Moore, F. Governato, T. Quinn, J. Stadel, and G. Lake. Resolving the structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*, 499(1):L5, may 1998.
- [72] Jie Wang, Carlos S Frenk, Julio F Navarro, Liang Gao, and Till Sawala. The missing massive satellites of the milky way. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 424(4):2715–2721, 2012.
- [73] Jonathan L. Feng and Jason Kumar. Dark-matter particles without weak-scale masses or weak interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 101:231301, Dec 2008.
- [74] P. Hut and K.A. Olive. A cosmological upper limit on the mass of heavy neutrinos. *Physics Letters B*, 87(1):144–146, 1979.
- [75] S. Nussinov. Technocosmology — could a technibaryon excess provide a “natural” missing mass candidate? *Physics Letters B*, 165(1):55–58, 1985.
- [76] Francesco D’Eramo, Lawrence J Hall, Duccio Pappadopulo, et al. Freeze-in dark matter with displaced signatures at colliders. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(12):024, 2015.
- [77] Jungman Gerard, Kamionkowski Marc, and Kim Griestb. Supersymmetric dark matter. *The Astrophysical Journal*, 1995.
- [78] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Ron L Gilliland, Craig J Hogan, Saurabh Jha, Robert P Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an

accelerating universe and a cosmological constant. *The astronomical journal*, 116(3):1009, 1998.

- [79] Saul Perlmutter, Goldhaber Aldering, Gerson Goldhaber, Richard A Knop, Peter Nugent, Patricia G Castro, Susana Deustua, Sebastien Fabbro, Ariel Goobar, Donald E Groom, et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [80] Laura V Sales, Andrew Wetzel, and Azadeh Fattahi. Baryonic solutions and challenges for cosmological models of dwarf galaxies. *Nature Astronomy*, 6(8):897–910, 2022.
- [81] Matteo Viel, George D Becker, James S Bolton, and Martin G Haehnelt. Warm dark matter as a solution to the small scale crisis: New constraints from high redshift lyman- α forest data. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 88(4):043502, 2013.
- [82] Samoil M Bilenky. Neutrinos: Majorana or dirac? *Universe*, 6(9):134, 2020.
- [83] Juan Herrero-Garcia, Giacomo Landini, and Tsutomu T Yanagida. Dark matter in the high-scale seesaw leptogenesis paradigm. *arXiv preprint arXiv:2411.03452*, 2024.
- [84] María Belén Gavela, P Hernandez, Jean Orloff, and Olivier Pène. Standard model cp-violation and baryon asymmetry. *Modern Physics Letters A*, 9(09):795–809, 1994.
- [85] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. Neutrino Masses and Mixings in Gauge Models with Spontaneous Parity Violation. *Phys. Rev. D*, 23:165, 1981.
- [86] CB Adams, N Aggarwal, A Agrawal, R Balafendiev, C Bartram, M Baryakhtar, H Bekker, P Belov, KK Berggren, A Berlin, et al. Axion dark matter. *arXiv preprint arXiv:2203.14923*, 2022.
- [87] Wilfried Buchmüller. Gravitino dark matter. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1200, pages 155–164. American Institute of Physics, 2010.
- [88] T. Kaluza. Zum unitätsproblem der physik. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Math.-Phys. Klasse*, 966, 1921.

- [89] Alexandre Arbey and Farvah Mahmoudi. Dark matter and the early universe: a review. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 119:103865, 2021.
- [90] J. Aalbers, D. S. Akerib, C. W. Akerlof, and e al. Al Musalhi. First dark matter search results from the lux-zepplin (lz) experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 131:041002, Jul 2023.
- [91] Riccardo Catena and Piero Ullio. A novel determination of the local dark matter density. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(08):004, 2010.
- [92] Fabrizio Nesti and Paolo Salucci. The dark matter halo of the milky way, ad 2013. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(07):016, 2013.
- [93] M. Aguilar, L. Ali Cavasonza, and e al. Alpat. Antiproton flux, antiproton-to-proton flux ratio, and properties of elementary particle fluxes in primary cosmic rays measured with the alpha magnetic spectrometer on the international space station. *Phys. Rev. Lett.*, 117:091103, Aug 2016.
- [94] Brian Patt and Frank Wilczek. Higgs-field portal into hidden sectors. *arXiv preprint hep-ph/0605188*, 2006.
- [95] John March-Russell, Stephen M West, Daniel Cumberbatch, and Dan Hooper. Heavy dark matter through the higgs portal. *Journal of High Energy Physics*, 2008(07):058, 2008.
- [96] Abdelhak Djouadi, Oleg Lebedev, Yann Mambrini, and Jeremie Quevillon. Implications of lhc searches for higgs-portal dark matter. *Physics Letters B*, 709(1-2):65–69, 2012.
- [97] Brian Patt and Frank Wilczek. Higgs-field portal into hidden sectors. *arXiv preprint hep-ph/0605188*, 2006.
- [98] Mattia Di Mauro, Chiara Arina, Nicolao Fornengo, Jan Heisig, and Daniele Massaro. Dark matter in the higgs resonance region. *Physical Review D*, 108(9):095008, 2023.
- [99] E. Stein W. Greiner, S.Schramm. *Quantum Chromodynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

- [100] Giampiero Passarino Dima Bardin. *The Standard Model in the Making*. Oxford Science Publications, 1999.
- [101] C.M. Becchi and G. Ridolfi. *An Introduction to Relativistic Processes and the Standard Model of Electroweak Interactions*. UNITEXT for Physics. Springer International Publishing, 2014.
- [102] J. SMITH B. DE WIT. *Field Theory in Particle Physics, Volume 1*. North Holland, 1986.
- [103] G. Passarino and M. Veltman. One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the weinberg model. *Nuclear Physics B*, 160(1):151–207, 1979.
- [104] J. C. Rom ao. *Advanced Quantum Field Theory*. Tecnico Lisboa, 2020.
- [105] Vladyslav Shtabovenko, Rolf Mertig, and Frederik Orellana. Feyncalc 10: Do multiloop integrals dream of computer codes? *Computer Physics Communications*, page 109357, 2024.

Apéndice A

Notación y convenciones

A.1 Unidades

Unidades naturales:

$$\hbar = c = 1, \quad (\text{A.1})$$

en el sistema,

$$[\text{Longitud}] = [\text{Tiempo}] = [\text{Energía}]^{-1} = [\text{Masa}]^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Relatividad

Para los índices de Lorentz se usa la convención de Einstein donde los índices repetidos expresan una sumatoria. Los índices de Lorentz utilizan las etiquetas de índices griegos ($\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$) y su recorrido es desde 0 hasta 3.

$$g^{\mu\nu} = \text{Diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (\text{A.3})$$

$$p^\mu p_\mu = p \cdot p = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (p^0)^2 - \|\vec{p}\|^2. \quad (\text{A.4})$$

$$p^\mu x_\mu = p \cdot x = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}. \quad (\text{A.5})$$

A.3 Matrices

Las matrices de Dirac están definidas como γ^μ tal que:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

A.4 Transformada de Fourier

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(x). \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{f}(x) = \int d^4x e^{ik \cdot x} f(x). \quad (\text{A.9})$$

$$\int d^n x \delta^n(x) = 1. \quad (\text{A.10})$$

$$\int d^4x e^{ik \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^4(k). \quad (\text{A.11})$$

A.5 QCD

Los índices (a, b, c, \dots) etiquetan la carga de color en esta teoría y siguen la convención de índices repetidos de Einstein y recorren desde 1 hasta 8.

Los índices (i, j) etiquetan el sabor asociado a los quarks en esta teoría y siguen la convención de índices repetidos de Einstein y recorren desde 1 hasta 3.

Apéndice B

Álgebra de Dirac

Las matrices de Dirac satisfacen las reglas de anti conmutación del álgebra de Clifford tal que:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I} \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{I}, \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0. \quad (\text{B.3})$$

A continuación se presentan algunas identidades y relaciones que cumplen las matrices de Dirac y el tensor métrico en 4 dimensiones:

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4, \quad (\text{B.4})$$

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4, \quad (\text{B.5})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = 2\gamma^\nu, \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu. \quad (\text{B.8})$$

Cuando las matrices de Dirac se encuentran dentro de una traza cumplen con las siguientes identidades:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] = \text{Tr}[\text{Todo } \# \text{ Impar de } \gamma] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0. \quad (\text{B.9})$$

Recordando que $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Ahora la traza para las matrices de Dirac en 4 dimensiones cumple las siguientes identidades:

$$\text{Tr}[\mathbb{I}] = 4, \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.11})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] = 4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}), \quad (\text{B.12})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{B.13})$$

Además las matrices de Dirac cumplen con la regla de Ciclicidad dentro de la traza tal que $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho]$, todas estas identidades fueron tomadas de la Ref. [26]. Sin embargo, al aplicar la regularización dimensional extendiendo el espacio - tiempo en d dimensiones entendienddo que se busca es reducir ligeramente la dimensión, implica definir las matrices de Dirac en d dimensiones:

$$\gamma^0, \gamma_{\mu 1}, \dots, \gamma_{\mu d}. \quad (\text{B.14})$$

Donde γ^0 es hermitica y γ^i es anti-hermitica.

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d, \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d\mathbb{I}, \quad (\text{B.16})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\mu = (2 - d)\gamma^\alpha, \quad (\text{B.17})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu = (d - 4)\gamma_\alpha \gamma_\beta + 4g_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.18})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\mu = -2\gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha - (d - 4)\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta. \quad (\text{B.19})$$

Las modificaciones que tienen las identidades de las trazas es únicamente en la traza de la identidad tal que:

$$\text{Tr}[\mathbb{I}] = d, \quad (\text{B.20})$$

para las matrices de Dirac se mantiene igual dado que lo que cambia en d dimensiones son el numero de matrices y no sus dimensiones, todas estas identidades fueron tomadas de la Ref. [99].

Apéndice C

Funciones de Passarino-Veltman

Las funciones de Passarino-Veltman (PV) son un conjunto de expresiones que dependiendo su rango tensorial en el numerador tienen una denominación. Partimos con las expresiones de rango tensorial 0 las cuales son denominadas como un conjunto de integrales maestras o integrales irreducibles (MI), las cuales están definidas como:

$$A_0^{(n)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_n}, \quad (\text{C.1})$$

$$B_0^{(n,m)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_n D_m}, \quad (\text{C.2})$$

$$C_0^{(n,m,l)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_n D_m D_l}, \quad (\text{C.3})$$

$$D_0^{(n,m,l,k)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_n D_m D_l D_k}, \quad (\text{C.4})$$

donde el subíndice 0 representa el rango tensorial de la expresión, los superíndices $n, m, l, k \in \mathbb{Z}^+$ representan la etiqueta de los momentos externos en los denominadores siendo 0 la ausencia de los mismos. Existen múltiples expresiones de integrales maestras dependiendo el número de D en el denominador y cada una de estas expresiones diferentes tendrán asociada una letra en nuestro caso expresamos las primeras cuatro como ejemplo.

Siguiendo entonces con las expresiones de rango tensorial > 0 , estas PV pueden en algunos casos ser reducidas a un conjunto de MI mediante el método de reducción de Passarino-Veltman (PVM) este conjunto de integrales viene dado por:

$$A_\mu^{(n)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_\mu}{D_n}, \quad (\text{C.5})$$

$$B_\mu^{(n,m)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_\mu}{D_n D_m}, \quad (\text{C.6})$$

$$C_{\mu}^{(n,m,l)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_{\mu}}{D_n D_m D_l}, \quad (\text{C.7})$$

$$D_{\mu}^{(n,m,l,k)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_{\mu}}{D_n D_m D_l D_k}. \quad (\text{C.8})$$

$$A_{\mu\nu}^{(n)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_{\mu} l_{\nu}}{D_n}, \quad (\text{C.9})$$

$$B_{\mu\nu}^{(n,m)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_{\mu} l_{\nu}}{D_n D_m}, \quad (\text{C.10})$$

$$C_{\mu\nu}^{(n,m,l)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_{\mu} l_{\nu}}{D_n D_m D_l}, \quad (\text{C.11})$$

$$D_{\mu\nu}^{(n,m,l,k)} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_{\mu} l_{\nu}}{D_n D_m D_l D_k}. \quad (\text{C.12})$$

⋮

Estos son algunos ejemplos pero como vemos en teoría las PV pueden un número indefinido de momentos de loop sin embargo existe un límite práctico dado los requisitos computacionales para su posterior solución. Estas funciones se reescriben en términos de MI mediante PVM el cual consiste (brevemente) en reescribir dichas funciones en una expresión que sea una combinación lineal de coeficientes y cuadri-momentos externos que mantengan la invarianza Lorentz para posteriormente construir un conjunto de ecuaciones donde se pueda encontrar los valores de los coeficientes [100].

Apéndice D

Cálculos adicionales

D.1 Expansión de Dyson

$$\begin{aligned}
 \exp \left[-i \int d^4x (g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)) \right] &= 1 \dots \\
 \dots - i \int d^4x (g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)) \dots \\
 \dots + \frac{i^2}{2!} \int d^4x \int d^4y (g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)) \dots \\
 \dots \times (g_s \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) - y_f \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y)) \dots \\
 \dots - \frac{i^3}{3!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z (g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)) \dots \\
 \dots \times (g_s \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) - y_f \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y)) \dots \\
 \dots \times (g_s \bar{\psi}^k(z) \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) - y_f \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z)) + \dots \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

D.2 Expansión del cuarto término

$$\begin{aligned}
 \langle k_3 | T \left\{ -\frac{i^3}{3!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z (g_s \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) - y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x)) \dots \right. \\
 \dots \times (g_s \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) - y_f \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y)) \dots \\
 \left. \dots \times (g_s \bar{\psi}^k(z) \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) - y_f \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z)) \right\} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle \quad (D.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i^3}{3!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \langle k_3 | T \{ [g_s^2 \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \dots \\
&\dots - g_s y_f \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) - g_s y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \dots \\
&\dots + y_f^2 \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y)] [g_s \bar{\psi}^k(z) \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) \dots \\
&\dots - y_f \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z)] \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle \quad (D.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i^3}{3!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \langle k_3 | \dots \\
&\dots \times T \{ [g_s^3 \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) \dots \\
&\dots - y_f g_s^2 \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) \dots \\
&\dots - g_s^2 y_f \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) \dots \\
&\dots + g_s y_f^2 \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) \dots \\
&\dots - g_s^2 y_f \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) \dots \\
&\dots + g_s y_f^2 \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) \dots \\
&\dots g_s y_f^2 \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \gamma^\rho G_\rho^c(z) t^c \psi_k(z) \dots \\
&\dots - y_f^3 \bar{\psi}^i(x) \phi(x) \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \phi(y) \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z)] \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle. \quad (D.4)
\end{aligned}$$

D.3 Definición de las Contracciones de Wick

Aplicar las contracciones de Wick (CW) tiene unas reglas definidas para cada tipo de campo que genera uno o un conjunto de términos de la siguiente forma, para los campos escalares tenemos:

$$\phi(x) |p\rangle = e^{-ip \cdot x} |0\rangle \quad \langle p | \phi(x) = \langle 0 | e^{ip \cdot x} \quad \overline{\phi(x) \phi(y)} = \Delta_f(x - y). \quad (D.5)$$

Campos fermiónicos:

$$\psi(x) |p, s\rangle = u^s(p) e^{-ip \cdot x} |0\rangle \quad \langle p, s | \psi(x) = \langle 0 | v^s(p) e^{ip \cdot x} \quad \overline{\psi(x) \psi(y)} = 0, \quad (D.6)$$

$$\bar{\psi}(x) |k, s\rangle = \bar{v}^s(k) e^{-ik \cdot x} |0\rangle \quad \langle k, s | \bar{\psi}(x) = \langle 0 | \bar{u}^s(k) e^{ik \cdot x} \quad \overline{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)} = 0, \quad (D.7)$$

$$\overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)} = S(x - y) \quad \overline{\bar{\psi}(y) \psi(x)} = -S(x - y). \quad (D.8)$$

Campos gluónicos:

$$G_\mu^a(x) |p, \sigma\rangle = \epsilon_\mu(p, \sigma) e^{-ip \cdot x} t^a |0\rangle \quad \overline{G_\mu^a(x) G_\nu^b(x)} = D_{\mu\nu}^{ab}(x - y). \quad (\text{D.9})$$

Ortonormalidad de estados:

$$\langle a|b\rangle = \delta_{a,b} \quad \text{con} \quad \delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Estas no son las únicas reglas para aplicar las contracciones de Wick, las cuales son explicadas en [24, 99].

D.4 Aplicación de las contracciones de Wick

Consideremos el primer elemento de (3.14) omitiendo las constantes de acople, este término tienen 4 formas de contraerse con el teorema de Wick, al mostrar el procedimiento para las 4 formas del primer elemento, podemos repetir el procedimiento para los otros elementos de la integral (3.14).

$$\langle k_3 | T \{ \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle \quad (\text{D.11})$$

$$= (-1) e^{iz \cdot k_3} [-S_F(y-x)_{\alpha\beta}] \gamma_{\beta\theta}^\mu \epsilon_\mu^a(k_1, \sigma_1) e^{-ix \cdot k_1} t_{IJ}^a S_F(x-z)_{\theta\sigma} \dots \\ \dots \times [-S_F(z-y)_{\sigma\rho}] \gamma_{\rho\chi}^\nu \epsilon_\nu^b(k_2, \sigma_2) e^{-iy \cdot k_2} t_{JI'}^b \quad (\text{D.12})$$

$$= (-1) \text{tr} [S_F(z-y) \gamma^\nu S_F(y-x) \gamma^\mu S_F(x-z)] \dots \\ \dots \times \epsilon_\mu^a(k_1, \sigma_1) \epsilon_\nu^b(k_2, \sigma_2) \text{Tr} [t^a t^b] e^{-ix \cdot k_1} e^{-iy \cdot k_2} e^{iz \cdot k_3} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{array}{c}
\text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\
\langle k_3 | T \{ \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle
\end{array}
\quad (D.14)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1) \text{tr} [S_F(z-y) \gamma^\nu S_F(y-x) \gamma^\mu S_F(x-z)] \dots \\
&\quad \dots \times \epsilon_\mu^a(k_2, \sigma_2) \epsilon_\nu^b(k_1, \sigma_1) \text{Tr} [t^a t^b] e^{-ix \cdot k_2} e^{-iy \cdot k_1} e^{iz \cdot k_3} \quad (D.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\
\langle k_3 | T \{ \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle
\end{array}
\quad (D.16)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} [S_F(z-x) \gamma^\nu S_F(x-y) \gamma^\mu S_F(y-z)] \dots \\
&\quad \dots \times \epsilon_\mu^a(k_1, \sigma_1) \epsilon_\nu^b(k_2, \sigma_2) \text{Tr} [t^a t^b] e^{-ix \cdot k_1} e^{-iy \cdot k_2} e^{iz \cdot k_3} \quad (D.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\
\langle k_3 | T \{ \bar{\psi}^i(x) \gamma^\mu G_\mu^a(x) t^a \psi_i(x) \bar{\psi}^j(y) \gamma^\nu G_\nu^b(y) t^b \psi_j(y) \bar{\psi}^k(z) \phi(z) \psi_k(z) \} | (k_1, \sigma_1), (k_2, \sigma_2) \rangle .
\end{array}
\quad (D.18)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} [S_F(z-x) \gamma^\nu S_F(x-y) \gamma^\mu S_F(y-z)] \dots \\
&\quad \dots \times \epsilon_\mu^a(k_2, \sigma_2) \epsilon_\nu^b(k_1, \sigma_1) \text{Tr} [t^a t^b] e^{-iy \cdot k_1} e^{-ix \cdot k_2} e^{iz \cdot k_3} . \quad (D.19)
\end{aligned}$$

Podemos notar que (D.13) y (D.17) son iguales, si consideramos las reglas de anticonmutación que cumplen los propagadores y las matrices de Dirac vemos que por medio de permutaciones aparece naturalmente un signo negativo y se reorganiza mediante la propiedad de ciclicidad de las trazas, evitando así que se eliminen las contribuciones entre si. Este mismo procedimiento ocurre con (D.15) y (D.19).

D.5 Álgebra de Dirac en Trazas de la amplitud.

$$\text{tr}[(\not{l} - \not{k}_1 + m)(\not{l} + \not{k}_2 + m)\gamma^\mu(\not{l} + m)\gamma^\nu] \quad (\text{D.20})$$

$$= \text{tr}[(\gamma^\alpha l_\alpha - \gamma^\beta k_{1\beta} + m)(\gamma^\theta l_\theta + \gamma^\phi k_{2\phi} + m)(\gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu l_\psi + \gamma^\mu \gamma^\nu m)] \quad (\text{D.21})$$

$$= \text{tr}[(\gamma^\alpha l_\alpha \gamma^\theta l_\theta + \gamma^\alpha l_\alpha \gamma^\phi k_{2\phi} + m \gamma^\alpha l_\alpha - \gamma^\beta k_{1\beta} \gamma^\theta l_\theta - \gamma^\beta k_{1\beta} \gamma^\phi k_{2\phi} \dots \\ \dots - \gamma^\beta k_{1\beta} m + \gamma^\theta l_\theta m + \gamma^\phi k_{2\phi} m + m^2)(\gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu l_\psi + \gamma^\mu \gamma^\nu m)]. \quad (\text{D.22})$$

Terminamos de operar organizamos los cuadri-momentos a la derecha y las matrices de Dirac a la izquierda además de dividir cada elemento en una traza independiente y aplicamos las propiedades para las Matrices de Dirac [101] tal que:

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2^{\frac{d}{2}} g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.23})$$

$$\text{tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0 \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.24})$$

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 2^{\frac{d}{2}} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{D.25})$$

$$= \text{tr}[\cancel{\gamma^\alpha \gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu} l_\alpha l_\theta l_\psi + \cancel{\text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] l_\alpha k_{2\phi} l_\psi} + \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] l_\alpha l_\psi m \dots \\ \dots - \cancel{\text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] k_{1\beta} l_\theta l_\psi} - \cancel{\text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] k_{1\beta} k_{2\phi} l_\psi} - \text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] k_{1\beta} l_\psi m \dots \\ \dots + \text{tr}[\gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] l_\theta l_\psi m + \text{tr}[\gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] k_{2\phi} l_\psi m + \cancel{\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] l_\psi m^2} \dots \\ \dots + \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\nu] l_\alpha l_\theta m + \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\nu] l_\alpha k_{2\phi} m + \cancel{\text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu] l_\alpha m^2} \dots \\ \dots - \text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\nu] k_{1\beta} l_\theta m - \text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\nu] k_{1\beta} k_{2\phi} m - \cancel{\text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] k_{1\beta} m^2} \dots \\ \dots + \cancel{\text{tr}[\gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\nu] l_\theta m^2} + \cancel{\text{tr}[\gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\nu] k_{2\phi} m^2} + \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] m^3. \quad (\text{D.26})$$

$$= \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\nu] l_\alpha l_\theta m + \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\nu] l_\alpha k_{2\phi} m + \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] l_\alpha l_\psi m \dots \\ \dots - \text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\nu] k_{1\beta} l_\theta m - \text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\nu] k_{1\beta} k_{2\phi} m - \text{tr}[\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] k_{1\beta} l_\psi m \dots \\ \dots + \text{tr}[\gamma^\theta \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] l_\theta l_\psi m + \text{tr}[\gamma^\phi \gamma^\mu \gamma^\psi \gamma^\nu] k_{2\phi} l_\psi m + \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] m^3 \quad (\text{D.27})$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{\frac{d}{2}} m [(g^{\alpha\theta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\theta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\theta\mu}) l_\alpha l_\theta + (g^{\alpha\phi} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\phi\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\phi\mu}) l_\alpha k_{2\phi} \dots \\
&\quad \dots + (g^{\alpha\mu} g^{\psi\nu} - g^{\alpha\psi} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\psi}) l_\alpha l_\psi - (g^{\beta\theta} g^{\mu\nu} - g^{\beta\mu} g^{\theta\nu} + g^{\beta\nu} g^{\theta\mu}) k_{1\beta} l_\theta \dots \\
&\quad \dots - (g^{\beta\phi} g^{\mu\nu} - g^{\beta\mu} g^{\phi\nu} + g^{\beta\nu} g^{\phi\mu}) k_{1\beta} k_{2\phi} - (g^{\beta\mu} g^{\psi\nu} - g^{\beta\psi} g^{\mu\nu} + g^{\beta\nu} g^{\mu\psi}) k_{1\beta} l_\psi \dots \\
&\quad \dots + (g^{\theta\mu} g^{\psi\nu} - g^{\theta\psi} g^{\mu\nu} + g^{\theta\nu} g^{\mu\psi}) l_\theta l_\psi + (g^{\phi\mu} g^{\psi\nu} - g^{\phi\psi} g^{\mu\nu} + g^{\phi\nu} g^{\mu\psi}) k_{2\phi} l_\psi + g^{\mu\nu} m^2],
\end{aligned} \tag{D.28}$$

ahora distribuimos cuadri-momentos, organizamos, contraemos índices y operamos:

$$\begin{aligned}
&= 2^{\frac{d}{2}} m [\cancel{l^\theta l_\theta g^{\mu\nu}} \mp \cancel{l^\mu l^\nu} + l^\nu l^\mu - \cancel{k_1^\theta l_\theta g^{\mu\nu}} \pm \cancel{k_1^\mu l^\nu} - k_1^\nu l^\mu + \cancel{l^\phi k_{2\phi} g^{\mu\nu}} - \cancel{l^\mu k_2^\nu} - l^\nu k_2^\mu \dots \\
&\quad \dots - \cancel{l^\psi l_\psi g^{\mu\nu}} \pm \cancel{l^\mu l^\nu} + l^\nu l^\mu + \cancel{k_1^\psi l_\psi g^{\mu\nu}} - \cancel{k_1^\mu l^\nu} - k_1^\nu l^\mu - \cancel{k_{2\psi} l^\psi g^{\mu\nu}} + k_2^\nu l^\mu \pm \cancel{k_2^\mu l^\nu} \dots \\
&\quad \dots - l^\psi l_\psi g^{\mu\nu} + l^\mu l^\nu + l^\nu l^\mu - k_1^\phi k_{2\phi} g^{\mu\nu} + k_1^\mu k_2^\nu - k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} m^2] \tag{D.29}
\end{aligned}$$

$$= 2^{\frac{d}{2}} m [-l^\psi l_\psi g^{\mu\nu} + 4l^\nu l^\mu - 2k_1^\nu l^\mu + 2k_2^\mu l^\nu - k_1^\phi k_{2\phi} g^{\mu\nu} + k_1^\mu k_2^\nu - k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} m^2] \tag{D.30}$$

$$= 2^{\frac{d}{2}} m [k_1^\mu k_2^\nu - k_1^\nu k_2^\mu + 2k_2^\mu l^\nu - 2k_1^\nu l^\mu + 4l^\nu l^\mu - g^{\mu\nu} (k_1 \cdot k_2) - g^{\mu\nu} (l \cdot l) + g^{\mu\nu} m^2], \tag{D.31}$$

para este caso sabemos de $d = 4 - 2\varepsilon$ con $\varepsilon \rightarrow 0$ y al aplicar dicho límite tenemos entonces que la traza no presenta divergencias quedando solo:

$$= 4m [k_1^\mu k_2^\nu - k_1^\nu k_2^\mu + 2k_2^\mu l^\nu - 2k_1^\nu l^\mu + 4l^\nu l^\mu - g^{\mu\nu} (k_1 \cdot k_2) - g^{\mu\nu} (l \cdot l) + g^{\mu\nu} m^2], \tag{D.32}$$

como se dijo anteriormente este es uno de los elementos que conforma la traza pero segundo elemento de la traza al operar se obtiene el mismo resultado entonces para el numerador en la integral de loop tenemos:

$$= 8m [k_1^\mu k_2^\nu - k_1^\nu k_2^\mu + 2k_2^\mu l^\nu - 2k_1^\nu l^\mu + 4l^\nu l^\mu - g^{\mu\nu} (k_1 \cdot k_2) - g^{\mu\nu} (l \cdot l) + g^{\mu\nu} m^2]. \tag{D.33}$$

D.6 Aplicación del Método de Passarino-Veltman.

Método de Passarino-Veltman para una integral tensorial de loop rango 0 de 3 puntos.

$$C_{(0,1,2)}^0 = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]}, \tag{D.34}$$

aplicando la parametrización de Feynman tenemos:

$$\frac{1}{D_0 D_1 D_2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[D_0 + (D_1 - D_0)x + (D_2 - D_0)z]^3}. \quad (\text{D.35})$$

Pero

$$\begin{aligned} D_0 + (D_1 - D_0)x + (D_2 - D_0)z &= l^2 - m^2 + [(l - k_1)^2 - m^2 - l^2 + m^2]x \dots \\ &\dots + [(l + k^2)^2 - m^2 - l^2 + m^2]z \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

$$= l^2 - m^2 - 2l(k_1 x + k_2 z) = [l - (k_1 x - k_2 z)]^2 - [(k_1 x - k_2 z)^2 + m^2] \quad (\text{D.37})$$

$$\Delta = (k_1 x - k_2 z)^2 + m^2 \quad L = l - (k_1 x - k_2 z) \quad d^d L = d^d l \quad (\text{D.38})$$

$$D_0 + (D_1 - D_0)x + (D_2 - D_0)z = L^2 - \Delta \quad (\text{D.39})$$

$$\frac{1}{D_0 D_1 D_2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{(L^2 - \Delta)^3} \quad (\text{D.40})$$

$$C_{(0,1,2)}^0 = \mu^{4-d} \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{(L^2 - \Delta)^3}, \quad (\text{D.41})$$

aplicando la rotación de Wick transformamos el momento de Lorentz al momento Euclidiano reemplazando $L = iL_E$, tenemos:

$$C_{(0,1,2)}^0 = \mu^{4-d} i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int \frac{d^d L_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L_E^2 + \Delta)^3}. \quad (\text{D.42})$$

Centrándonos en la Integral de momento y reescribiendo en coordenadas esféricas en d dimensiones tenemos:

$$d^d L_E = d\Omega_{d-1} dL_E L_E^{d-1} \rightarrow \int \frac{d^d L_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L_E^2 + \Delta)^3} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dL_E \frac{L_E^{d-1}}{(L_E^2 + \Delta)^3}, \quad (\text{D.43})$$

realizando las siguientes sustituciones tenemos:

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{d-1} &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} & L_E &= \sqrt{\Delta} y & L_E^2 &= \Delta y^2 \\ dL_E &= \sqrt{\Delta} dy & L_E^{d-1} &= (\sqrt{\Delta} y)^{d-1} \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dL_E \frac{L_E^{d-1}}{(L_E^2 + \Delta)^3} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \Delta^{\frac{d}{2}-3} \int_0^\infty dy \frac{y^{d-1}}{(y^2 + 1)^3} \quad (\text{D.45})$$

$$t = \frac{1}{y^2 + 1} \quad dt = -\frac{1}{(y^2 + 1)^2} 2y dy; \quad y = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \quad t(0) = 1 \quad t(\infty) = 0 \quad (\text{D.46})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \Delta^{\frac{d}{2}-3} \int_0^\infty dy \frac{y_E^{d-1}}{(y^2 + 1)^3} = \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-3}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^1 dt \left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{d-2} t \quad (\text{D.47})$$

$$= \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-3}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^1 dt (1-t)^{\frac{d}{2}-1} t^{2-\frac{d}{2}}. \quad (\text{D.48})$$

Esta integral tiene la forma de la función Beta de Euler tal que:

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 dt t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}, \quad (\text{D.49})$$

entonces la solución de la integra (D.48) es:

$$\frac{\Delta^{\frac{d}{2}-3}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(3 - \frac{d}{2} + \frac{d}{2}\right)} = \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-3}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(3)^{2!}} = \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-3}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)}{2}. \quad (\text{D.50})$$

Al reemplazar (D.50) en (D.42) tenemos:

$$C_{(0,1,2)}^0 = \mu^{4-d} i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-3}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)}{2}, \quad (\text{D.51})$$

recordando que $d = 4 - 2\varepsilon$ y $\Delta = (k_1x - k_2z)^2 + m^2$, tenemos entonces:

$$C_{(0,1,2)}^0 = i\mu^{2\varepsilon} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{2} \frac{1}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz [(k_1x - k_2z)^2 + m^2]^{-(1+\varepsilon)}, \quad (\text{D.52})$$

donde

$$(k_1x - k_2z)^2 + m^2 = \cancel{k_1^2 x^2} + \cancel{k_2^2 z^2} - 2k_1 \cdot k_2 xz + m^2$$

$$\text{con } s = (k_1 + k_2)^2 = \cancel{k_1^2} + \cancel{k_2^2} + 2k_1 \cdot k_2 \rightarrow \frac{s}{2} = k_1 \cdot k_2$$

$$\text{así } (k_1x - k_2z)^2 + m^2 = m^2 - sxz. \quad (\text{D.53})$$

$$\Gamma(1+\varepsilon) \sim e^{-\varepsilon\gamma_E} \quad \text{con } \gamma_E \text{ como la constante de Euler-Mascheroni.} \quad (\text{D.54})$$

Reemplazando estos resultados en (D.51) tenemos:

$$C_{(0,1,2)}^0 = i\mu^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon\gamma_E}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz (m^2 - sxz)^{-(1+\varepsilon)}, \quad (\text{D.55})$$

sabemos que $\varepsilon \rightarrow 0$ lo que implica

$$C_{(0,1,2)}^0 = \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{m^2 - sxz} = \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{m^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{1 - \frac{s}{m^2}xz}, \quad (\text{D.56})$$

aplicando las siguientes sustituciones para resolver la integral tenemos:

$$U = 1 - \frac{s}{m^2}xz \quad dU = -\frac{s}{m^2}xdz \quad -\frac{m^2 dU}{sx} = dz \quad U(0) = 1$$

$$U(1-x) = 1 - \frac{s}{m^2}x(1-x) \quad (\text{D.57})$$

$$C_{(0,1,2)}^0 = -\frac{i}{32\pi^2 s} \int_0^1 dx \frac{1}{x} \int_1^{1-\frac{s}{m^2}x(1-x)} \frac{dU}{U} = -\frac{i}{32\pi^2 s} \int_0^1 dx \frac{1}{x} \ln U \Big|_1^{1-\frac{s}{m^2}x(1-x)} \quad (\text{D.58})$$

$$C_{(0,1,2)}^0 = -\frac{i}{32\pi^2 s} \int_0^1 dx \frac{\ln \left[1 - \frac{s}{m^2}x(1-x) \right]}{x} \quad \text{sí } A = \frac{s}{m^2} \quad (\text{D.59})$$

$$C_{(0,1,2)}^0 = -\frac{i}{32\pi^2 s} \int_0^1 dx \frac{\ln [1 - Ax(1-x)]}{x} \quad (\text{D.60})$$

$$U = 1 - Ax(1-x) \quad dU = \frac{Ax - A(1-x)}{1 - Ax(1-x)} \quad dv = \frac{1}{x} \quad V = \ln x \quad (\text{D.61})$$

$$C_{(0,1,2)}^0 = -\frac{i}{32\pi^2 m^2} \int_0^1 dx \frac{(1-2x) \ln x}{1 - Ax(1-x)}. \quad (\text{D.62})$$

Esta integral es compleja de realizar pero tiene solución en la Ref. [102] Cap 7, así tenemos:

$$C_{(0,1,2)}^0 = -\frac{i}{16\pi^2 s} \begin{cases} -2 \left[\arcsin \sqrt{\frac{1}{4}A} \right]^2 & 0 < A < 4 \\ \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+\sqrt{1-4A^{-1}}}{1-\sqrt{1-4A^{-1}}} \right) - i\pi \right]^2 & A > 4 \end{cases} \quad (\text{D.63})$$

si definimos $\tau = \frac{4}{A}$ tenemos que $A = \frac{4}{\tau}$

$$C_{(0,1,2)}^0 = -\frac{i}{16\pi^2 s} \begin{cases} -2 \arcsin^2 \sqrt{\tau^{-1}} & \tau \geq 1 \\ \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+\sqrt{1-\tau}}{1-\sqrt{1-\tau}} \right) - i\pi \right]^2 & \tau < 1 \end{cases} \quad (\text{D.64})$$

Método de Passarino-Veltman para una integral tensorial de loop rango 1 de 3 puntos.

$$C_{(0,1,2)}^\mu = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_1 D_2}, \quad (\text{D.65})$$

$$C_{(0,1,2)}^\mu = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]} \quad (\text{D.66})$$

dado que C^μ es un vector de Lorentz, es posible escribirlo como una combinación lineal de los momentos externos del loop. Simplificando la notación $C_{(0,1,2)}^\mu = C^\mu$, tenemos:

$$C^\mu = C_1 k_1^\mu + C_2 k_2^\mu \quad \text{donde } C_1, C_2 \text{ son funciones escalares de Lorentz.} \quad (\text{D.67})$$

$$k_{1,\mu} C^\mu = k_{1,\mu} (C_1 k_1^\mu + C_2 k_2^\mu) = C_1 \cancel{k_1^\mu}^0 + C_2 k_1 \cdot k_2 = C_2 k_1 \cdot k_2 \quad (\text{D.68})$$

$$k_{2,\mu} C^\mu = k_{2,\mu} (C_1 k_1^\mu + C_2 k_2^\mu) = C_1 k_2 \cdot k_1 + C_2 \cancel{k_2^\mu}^0 = C_1 k_2 \cdot k_1. \quad (\text{D.69})$$

De la ecuación (3.26) y (3.27) tenemos:

$$-2l \cdot k_1 = D_1 - l^2 + m^2 = D_1 - D_0 \quad 2l \cdot k_2 = D_2 - l^2 + m^2 = D_2 - D_0 \quad (\text{D.70})$$

$$k_1 \cdot l = \frac{D_0 - D_1}{2} \quad k_2 \cdot l = \frac{D_2 - D_0}{2}. \quad (\text{D.71})$$

Además tenemos:

$$k_{1,\mu} C^\mu = \mu^{4-d} k_{1,\mu} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_1 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{k_1 \cdot l}{D_0 D_1 D_2} \quad (\text{D.72})$$

$$k_{1,\mu} C^\mu = \mu^{4-d} \frac{1}{2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{D_0 - D_1}{D_0 D_1 D_2} = \frac{1}{2} \left[\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2} \cdots \right. \\ \left. \cdots - \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_2} \right] \quad (\text{D.73})$$

$$k_{1,\mu} C^\mu = \left[\frac{B_{(1,2)}^0 - B_{(0,2)}^0}{2} \right] \quad (\text{D.74})$$

$$k_{2,\mu} C^\mu = \mu^{4-d} k_{2,\mu} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_1 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{k_2 \cdot l}{D_0 D_1 D_2} \quad (\text{D.75})$$

$$k_{2,\mu}C^\mu = \frac{1}{2}\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{D_2 - D_0}{D_0 D_1 D_2} = \frac{1}{2} \left[\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1} \cdots \right. \\ \left. \cdots - \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2} \right] \quad (\text{D.76})$$

$$k_{2,\mu}C^\mu = \left[\frac{B_{(0,1)}^0 - B_{(1,2)}^0}{2} \right]. \quad (\text{D.77})$$

Igualando (D.74) con (D.68) y (D.77) con (D.69) tenemos:

$$\left[\frac{B_{(1,2)}^0 - B_{(0,2)}^0}{2} \right] = C_2 k_1 \cdot k_2 \rightarrow C_2 = \frac{1}{2k_1 \cdot k_2} [B_{(1,2)}^0 - B_{(0,2)}^0], \quad (\text{D.78})$$

$$\left[\frac{B_{(0,1)}^0 - B_{(1,2)}^0}{2} \right] = C_1 k_1 \cdot k_2 \rightarrow C_1 = \frac{1}{2k_1 \cdot k_2} [B_{(0,1)}^0 - B_{(1,2)}^0]. \quad (\text{D.79})$$

Reemplazando (D.79) y (D.78) en (D.67) tenemos:

$$C^\mu = \frac{1}{2k_1 \cdot k_2} [B_{(0,1)}^0 - B_{(1,2)}^0] k_1^\mu + \frac{1}{2k_1 \cdot k_2} [B_{(1,2)}^0 - B_{(0,2)}^0] k_2^\mu, \quad (\text{D.80})$$

$$C^\mu = \frac{1}{s} [B_{(0,1)}^0 k_1^\mu - B_{(0,2)}^0 k_2^\mu + B_{(1,2)}^0 (k_2^\mu - k_1^\mu)]. \quad (\text{D.81})$$

Método de Passarino-Veltman para una integral tensorial de loop rango 2 de 3 puntos.

$$C_{(0,1,2)}^{\mu\nu} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{D_0 D_1 D_2}. \quad (\text{D.82})$$

Reescribimos la función $C^{\mu\nu}$ en términos de los momentos externos tal que:

$$C^{\mu\nu} = C_{21} k_1^\mu k_1^\nu + C_{22} k_2^\mu k_2^\nu + C_{23} (k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu) + C_{24} g^{\mu\nu}, \quad (\text{D.83})$$

donde C_{21}, C_{22}, C_{23} y C_{24} son funciones escalares de Lorentz. Ahora para calcular estos coeficientes tenemos:

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} = C_{21} k_1^\mu k_1^\nu + C_{22} k_2^\mu k_2 \cdot k_1 + C_{23} (k_1^\mu k_2 \cdot k_1 + k_2^\mu k_1^\nu) + C_{24} k_1^\mu \quad (\text{D.84})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} = \frac{s}{2} (C_{22} k_2^\mu + C_{23} k_1^\mu) + C_{24} k_1^\mu \quad (\text{D.85})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} k_{1,\mu} = \frac{s}{2} (C_{22} k_2 \cdot k_1 + C_{23} \cancel{k_1^2}) + C_{24} \cancel{k_1^2} \quad (\text{D.86})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} k_{1,\mu} = \frac{s^2}{4} C_{22} \quad (\text{D.87})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} k_{2,\mu} = \frac{s}{2} (C_{22} \cancel{k_2^2} + C_{23} k_1 \cdot k_2) + C_{24} k_1 \cdot k_2 \quad (\text{D.88})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} k_{2,\mu} = \frac{s^2}{4} C_{23} + \frac{s}{2} C_{24} \quad (\text{D.89})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} = C_{21} k_1^\mu k_1 \cdot k_2 + C_{22} \cancel{k_2^\mu k_2^2} + C_{23} (k_1^\mu \cancel{k_2^2} + k_2^\mu k_1 \cdot k_2) + C_{24} k_2^\mu \quad (\text{D.90})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} = \frac{s}{2} (C_{21} k_1^\mu + C_{23} k_2^\mu) + C_{24} k_2^\mu \quad (\text{D.91})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} k_{1,\nu} = \frac{s}{2} (C_{21} \cancel{k_1^2} + C_{23} k_2 \cdot k_1) + C_{24} k_2 \cdot k_1 \quad (\text{D.92})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} k_{1,\nu} = \frac{s^2}{4} C_{23} + \frac{s}{2} C_{24} \quad (\text{D.93})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} k_{2,\nu} = \frac{s}{2} (C_{21} k_1 \cdot k_2 + C_{23} \cancel{k_2^2}) + C_{24} \cancel{k_2^2} \quad (\text{D.94})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} k_{2,\nu} = \frac{s^2}{4} C_{21}. \quad (\text{D.95})$$

$$C^{\mu\nu} g^{\mu\nu} = C_{21} \cancel{k_1^2} + C_{22} \cancel{k_2^2} + 2C_{23} k_1 \cdot k_2 + dC_{24} \quad (\text{D.96})$$

$$C^{\mu\nu} g^{\mu\nu} = sC_{23} + dC_{24}. \quad (\text{D.97})$$

Pero también tenemos que:

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l \cdot k_1}{D_0 D_1 D_2} = \frac{1}{2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu (D_0 - D_1)}{D_0 D_1 D_2} \quad (\text{D.98})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} = \frac{1}{2} \left(\cancel{\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_1 D_2}}^{B_{(1,2)}^\mu} - \cancel{\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_2}}^{B_{(0,2)}^\mu} \right) \quad (\text{D.99})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} = \frac{1}{2} \left(B_{(1,2)}^\mu - B_{(0,2)}^\mu \right) \quad (\text{D.100})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} k_{1,\mu} = \frac{1}{2} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{1,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{1,\mu} \right) \quad (\text{D.101})$$

$$C^{\mu\nu} k_{1,\nu} k_{2,\mu} = \frac{1}{2} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) \quad (\text{D.102})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu \cdot k_2}{D_0 D_1 D_2} = \frac{1}{2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu (D_2 - D_0)}{D_0 D_1 D_2} \quad (\text{D.103})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} = \frac{1}{2} \left(\cancel{\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_1} \xrightarrow{B_{(0,1)}^\mu}} - \cancel{\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_2} \xrightarrow{B_{(1,2)}^\mu}} \right) \quad (\text{D.104})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} = \frac{1}{2} \left(B_{(0,1)}^\mu - B_{(1,2)}^\mu \right) \quad (\text{D.105})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} k_{1,\mu} = \frac{1}{2} \left(B_{(0,1)}^\mu k_{1,\mu} - B_{(1,2)}^\mu k_{1,\mu} \right) \quad (\text{D.106})$$

$$C^{\mu\nu} k_{2,\nu} k_{2,\mu} = \frac{1}{2} \left(B_{(0,1)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) \quad (\text{D.107})$$

$$C^{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{D_0 D_1 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\cancel{(l^2 - m^2)} + m^2}{D_0 D_1 D_2} \quad (\text{D.108})$$

$$C^{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \cancel{\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2} \xrightarrow{B_{(1,2)}^0}} + m^2 \cancel{\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1 D_2} \xrightarrow{C_0}} \quad (\text{D.109})$$

$$C^{\mu\nu} g^{\mu\nu} = B_{(1,2)}^0 + m^2 C_0. \quad (\text{D.110})$$

Al igualar (D.97) con (D.110) tenemos que:

$$B_{(1,2)}^0 + m^2 C_0 = s C_{23} + d C_{24} \rightarrow C_{23} = \frac{1}{s} (B_{(1,2)}^0 + m^2 C_0 - d C_{24}), \quad (\text{D.111})$$

reemplazando (D.111) en (D.89) e igualando con (D.102) tenemos:

$$\frac{s^2}{4} \left[\frac{1}{s} (B_{(1,2)}^0 + m^2 C_0 - d C_{24}) \right] + \frac{s}{2} C_{24} = \frac{1}{2} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) \quad (\text{D.112})$$

$$C_{24} = \frac{1}{(2-d)} \left[\frac{2}{s} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) - B_{(1,2)}^0 - m^2 C_0 \right], \quad (\text{D.113})$$

al igualar (D.87) con (D.101) y (D.95) con (D.107) tenemos:

$$\frac{s^2}{4} C_{22} = \frac{1}{2} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{1,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{1,\mu} \right) \quad (\text{D.114})$$

$$C_{22} = \frac{2}{s^2} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{1,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{1,\mu} \right) \quad (\text{D.115})$$

$$\frac{s^2}{4}C_{21} = \frac{1}{2} \left(B_{(0,1)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) \quad (\text{D.116})$$

$$C_{21} = \frac{2}{s^2} \left(B_{(0,1)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} \right), \quad (\text{D.117})$$

y reemplazando (D.113) en (D.111) obtenemos todos los coeficientes, entonces:

$$C_{23} = \frac{1}{s} \left\{ B_{(1,2)}^0 + m^2 C_0 - \frac{d}{(2-d)} \left[\frac{2}{s} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) \dots \dots - B_{(1,2)}^0 - m^2 C_0 \right] \right\} \quad (\text{D.118})$$

Así

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu} &= \frac{2}{s^2} \left(B_{(0,1)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) k_1^\mu k_1^\nu + \frac{2}{s^2} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{1,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{1,\mu} \right) k_2^\mu k_2^\nu \dots \\ &\dots + \frac{1}{s} \left\{ B_{(1,2)}^0 + m^2 C_0 - \frac{d}{(2-d)} \left[\frac{2}{s} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) - B_{(1,2)}^0 - m^2 C_0 \right] \right\} \dots \\ &\dots \times (k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu) + \frac{1}{(2-d)} \left[\frac{2}{s} \left(B_{(1,2)}^\mu k_{2,\mu} - B_{(0,2)}^\mu k_{2,\mu} \right) - B_{(1,2)}^0 - m^2 C_0 \right] g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{D.119})$$

Método de Passarino-Veltman para una integral tensorial de loop rango 0 de 2 puntos.

$$B_{(0,1)}^0 = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_1} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.120})$$

Aplicamos la parametrización de Feynman sobre la fracción y tenemos:

$$\frac{1}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{\{[(l - k_1)^2 - m^2]x + (1-x)(l^2 - m^2)\}^2} \quad (\text{D.121})$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(xl^2 - 2xlk_1 + xk_1^2 - m^2x + l^2 - m^2 - xl^2 + xm^2)^2} \quad (\text{D.122})$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(l^2 - 2xlk_1 - m^2)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(l^2 - xk_1)^2 + x^2 k_1^2 - m^2]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(l - xk_1)^2 - m^2]^2}. \quad (\text{D.123})$$

Entonces

$$B_{(0,1)}^0 = \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(l - xk_1)^2 - m^2]^2}. \quad (\text{D.124})$$

Considerando la siguiente sustitución tenemos:

$$L = l - xk_1 \quad d^d L = d^d l, \quad (\text{D.125})$$

$$B_{(0,1)}^0 = \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{1}{[L^2 - m^2]^2}. \quad (\text{D.126})$$

Aplicando la rotación de Wick tenemos $L = iL_E$

$$B_{(0,1)}^0 = \mu^{4-d} i \int_0^1 dx \int \frac{d^d L_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-L_E^2 - m^2)^2} = \mu^{4-d} i \int_0^1 dx \int \frac{d^d L_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(L_E^2 + m^2)^2}. \quad (\text{D.127})$$

Reescribiendo la integral en el espacio de las coordenadas en d dimensiones tenemos $d^d L_E = d\Omega_d dL_E L_E^{d-1}$

$$B_{(0,1)}^0 = \mu^{4-d} i \int_0^1 dx \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dL_E \frac{L_E^{d-1}}{(L_E^2 + m^2)^2}. \quad (\text{D.128})$$

Recordando (D.44), realizamos algo similar para este caso

$$L_E(y) = my \quad dL_E = mdy \quad L_E^2 = m^2 y^2 \quad L_E^{d-1} = m^{d-1} y^{d-1} \quad (\text{D.129})$$

$$L_E(0) = 0 \quad L_E(\infty) = \infty \quad (\text{D.130})$$

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{\mu^{4-d} i 2\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \frac{m^{d-1} y^{d-1}}{(m^2 y^2 + m^2)^2}. \quad (\text{D.131})$$

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{\mu^{4-d} i 2\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \frac{m^d y^{d-2} y}{m^4 (y^2 + 1)^2}. \quad (\text{D.132})$$

Considerando la siguiente sustitución tenemos:

$$t(y) = \frac{1}{y^2 + 1} \quad \frac{dt}{2} = -\frac{ydy}{(y^2 + 1)^2} \quad y = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \quad t(0) = 1 \quad t(\infty) = 0 \quad (\text{D.133})$$

$$B_{(0,1)}^0 = -\frac{\mu^{4-d} i 2\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} m^{d-4} \int_0^1 dx \int_1^0 \frac{dt}{2} \left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{d-2} \quad (\text{D.134})$$

$$= \frac{\mu^{4-d} m^{d-4} i \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 dx \int_0^1 dt \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{d}{2}-1} \quad (\text{D.135})$$

$$= \frac{\mu^{4-d} m^{d-4} i \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 dx \int_0^1 dt t^{(2-\frac{d}{2})-1} (1-t)^{(\frac{d}{2})-1}, \quad (\text{D.136})$$

usando (D.49) para resolver la integral tenemos:

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{\mu^{4-d} m^{d-4} i \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(2-\frac{d}{2}+\frac{d}{2})} = \frac{\mu^{4-d} m^{d-4} i \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \quad (\text{D.137})$$

$$B_{(0,1)}^0 = i \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\mu^{4-d} m^{d-4}}{(2\pi)^d} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right). \quad (\text{D.138})$$

Pero sabemos que $d = 4 - 2\varepsilon$ así

$$B_{(0,1)}^0 = i \pi^{\frac{4-2\varepsilon}{2}} \frac{\mu^{4-4+2\varepsilon} m^{4-2\varepsilon-4}}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \Gamma\left(2-\frac{4-2\varepsilon}{2}\right) \quad (\text{D.139})$$

$$B_{(0,1)}^0 = i \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2\varepsilon} \frac{\pi^2 \pi^{-\varepsilon} (2\pi)^{2\varepsilon}}{16\pi^4} \Gamma(\varepsilon) = i \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2\varepsilon} \frac{4^\varepsilon \pi^\varepsilon}{16\pi^2} \Gamma(\varepsilon) = i \mu^{2\varepsilon} (m^2)^{-\varepsilon} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{16\pi^2} \Gamma(\varepsilon) \quad (\text{D.140})$$

$$B_{(0,1)}^0 = i \mu^{2\varepsilon} (m^2)^{-\varepsilon} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{16\pi^2} \Gamma(\varepsilon), \quad (\text{D.141})$$

reemplazando el valor de $\Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1+\varepsilon)$, recordando (D.54), expandiendo $(4\pi)^\varepsilon$, $(m^2)^{-\varepsilon}$ y $e^{-\varepsilon\gamma_E}$ alrededor de ε tenemos:

$$\Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon\gamma_E} = \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon\gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \quad (\text{D.142})$$

$$\Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon\gamma_E) \quad (\text{D.143})$$

$$(m^2)^{-\varepsilon} = e^{\ln(m^2)^{-\varepsilon}} = e^{-\varepsilon \ln(m^2)} = 1 - \varepsilon \ln(m^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{D.144})$$

$$(m^2)^{-\varepsilon} \sim 1 - \varepsilon \ln(m^2) \quad (\text{D.145})$$

$$(4\pi)^\varepsilon = e^{\ln(4\pi)^\varepsilon} = e^{\varepsilon \ln(4\pi)} = 1 + \varepsilon \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{D.146})$$

$$(4\pi)^\varepsilon \sim 1 + \varepsilon \ln(4\pi). \quad (\text{D.147})$$

Reemplazando (D.143), (D.145) y (D.147) en (D.141) tenemos:

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left[(1 - \varepsilon \ln(m^2)) (1 + \varepsilon \ln(4\pi)) \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon\gamma_E) \right] \mu^{2\varepsilon} \quad (\text{D.148})$$

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left[(1 + \varepsilon \ln 4\pi - \varepsilon \ln m^2 - \varepsilon^2 \ln m^2 \ln 4\pi)(1 - \varepsilon\gamma_E) \frac{1}{\varepsilon} \right] \mu^{2\varepsilon} \quad (\text{D.149})$$

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left[(1 + \varepsilon \ln 4\pi - \varepsilon \ln m^2 - \varepsilon^2 \ln m^2 \ln 4\pi - \varepsilon\gamma_E - \varepsilon^2 \ln 4\pi\gamma_E \dots \dots - \varepsilon^2 \ln m^2\gamma_E + \varepsilon^3 \ln m^2 \ln 4\pi\gamma_E) \frac{1}{\varepsilon} \right] \mu^{2\varepsilon} \quad (\text{D.150})$$

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln m^2 - \varepsilon \ln m^2 \ln 4\pi - \varepsilon \ln 4\pi\gamma_E \dots \dots - \varepsilon \ln m^2\gamma_E + \varepsilon^2 \ln m^2 \ln 4\pi\gamma_E \right] \mu^{2\varepsilon}. \quad (\text{D.151})$$

Si consideramos

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi, \quad (\text{D.152})$$

y aplicamos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ para todos los elementos que están siendo multiplicados directamente por ε tenemos:

$$B_{(0,1)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln m^2 \right) \mu^{2\varepsilon}. \quad (\text{D.153})$$

Realizamos el mismo procedimiento para $B_{(0,2)}^0$:

$$B_{(0,2)}^0 = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_0 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - m^2)[(l + k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.154})$$

Aplicamos la parametrización de Feynman sobre la fracción y tenemos:

$$\frac{1}{(l^2 - m^2)[(l + k_2)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{\{[(l + k_2)^2 - m^2]x + (1 - x)(l^2 - m^2)\}^2} \quad (\text{D.155})$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(\cancel{x}l^2 + 2xlk_2 + \cancel{x}k_2^2 - m^2x + l^2 - m^2 - \cancel{x}l^2 + \cancel{x}m^2)^2} \quad (\text{D.156})$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(l^2 + 2xlk_2 - m^2)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(l^2 + xk_2)^2 + \cancel{x^2k_2^2} - m^2]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(l + xk_2)^2 - m^2]^2}. \quad (\text{D.157})$$

Entonces

$$B_{(0,2)}^0 = \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(l + xk_2)^2 - m^2]^2}. \quad (\text{D.158})$$

Considerando la siguiente sustitución tenemos:

$$L = l - xk_2 \quad d^d L = d^d l, \quad (\text{D.159})$$

$$B_{(0,2)}^0 = \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{1}{[L^2 - m^2]^2}, \quad (\text{D.160})$$

notamos que (D.160) es igual a (D.126) dando como resultado

$$B_{(0,2)}^0 = B_{(0,1)}^0. \quad (\text{D.161})$$

Ahora calculamos $B_{(1,2)}^0$:

$$B_{(1,2)}^0 = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{D_1 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.162})$$

Aplicamos la parametrización de Feynman sobre la fracción y tenemos:

$$\frac{1}{[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{\{[(l + k_2)^2 - m^2]x + (1-x)[(l - k_1)^2 - m^2]\}^2} \quad (\text{D.163})$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(\cancel{x^2} + 2xlk_2 + \cancel{xk_2^2} - \cancel{xm^2} + l^2 - 2lk_1 + \cancel{k_1^2} - m^2 - \cancel{x^2} + 2xlk_1 - \cancel{xk_1^2} - \cancel{xm^2})^2} \quad (\text{D.164})$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(l^2 + 2xlk_2 - 2lk_1 + 2xlk_1 - m^2)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[l^2 + 2l(xk_2 - k_1 + xk_1) - m^2]^2} \quad (\text{D.165})$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(\{l + [x(k_1 + k_2) - k_1]\}^2 - [x(k_1 + k_2) - k_1]^2 - m^2)^2}. \quad (\text{D.166})$$

Entonces

$$B_{(1,2)}^0 = \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\{l + [x(k_1 + k_2) - k_1]\}^2 - \{[x(k_1 + k_2) - k_1]^2 + m^2\})^2} \quad (\text{D.167})$$

Considerando la siguiente sustitución tenemos:

$$L = l + [x(k_1 + k_2) - k_1] \quad d^d L = d^d l \quad \Delta^2(x, k_1, k_2) = [x(k_1 + k_2) - k_1]^2 + m^2 \quad (\text{D.168})$$

$$B_{(1,2)}^0 = \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d L}{(2\pi)^d} \frac{1}{[L^2 - \Delta^2]^2}, \quad (\text{D.169})$$

observamos que tiene la misma estructura que $B_{(0,1)}^0$ y su solución se desarrolla de la misma forma hasta (D.137) antes de evaluar la integral con respecto a x entonces tenemos:

$$B_{(1,2)}^0 = \frac{\mu^{4-d} i \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \Delta^{d-4} = \frac{\mu^{4-d} i \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx (\Delta^2)^{\frac{d-4}{2}} \quad (\text{D.170})$$

$$= \frac{\mu^{4-d} i \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \{[x(k_1 + k_2) - k_1]^2 + m^2\}^{\frac{d-2}{2}}. \quad (\text{D.171})$$

Reemplazamos $d = 4 - 2\varepsilon$

$$B_{(1,2)}^0 = \frac{\mu^{2\varepsilon} i \pi^{2-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon)}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int_0^1 dx \left[x^2(k_1 + k_2)^2 - 2x(k_1 + k_2)k_1 + k_1^2 + m^2 \right]^{-\varepsilon} \quad (\text{D.172})$$

$$B_{(1,2)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left[(4\pi)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx (2x^2 k_1 k_2 - 2x k_1 k_2 + m^2)^{-\varepsilon} \right] \mu^{2\varepsilon}. \quad (\text{D.173})$$

Expandimos alrededor de ε usando (D.147), (D.143) y:

$$(2x^2 k_1 k_2 - 2x k_1 k_2 + m^2)^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon \ln(2x^2 k_1 k_2 - 2x k_1 k_2 + m^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{D.174})$$

entonces

$$B_{(1,2)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left\{ (1 + \varepsilon \ln 4\pi) \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \gamma_E) \int_0^1 dx [1 - \varepsilon \ln(2x^2 k_1 k_2 - 2x k_1 k_2 + m^2)] \right\} \mu^{2\varepsilon} \quad (\text{D.175})$$

$$B_{(1,2)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \varepsilon \ln 4\pi \gamma_E \right) \int_0^1 dx [1 - \varepsilon \ln(2x^2 k_1 k_2 - 2x k_1 k_2 + m^2)] \right\} \mu^{2\varepsilon} \quad (\text{D.176})$$

usando (D.152) y aplicamos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ para todos los elementos que están siendo multiplicados directamente por ε tenemos:

$$B_{(1,2)}^0 = \frac{i}{16\pi^2} \frac{\mu^{2\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (\text{D.177})$$

Método de Passarino-Veltman para una integral tensorial de loop rango 1 de 2 puntos.

$$B_{(0,1)}^\mu = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_1} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{(l^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.178})$$

Entonces:

$$B_{(0,1)}^\mu = B_{(0,1)}^1 k_1^\mu \quad \text{con} \quad B_{(0,1)}^1 = \frac{1}{2} B_{(0,1)}^0. \quad (\text{D.179})$$

Así

$$B_{(0,1)}^\mu = \frac{1}{2} B_{(0,1)}^0 k_1^\mu, \quad (\text{D.180})$$

$$B_{(0,2)}^\mu = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_0 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{(l^2 - m^2)[(l + k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.181})$$

Entonces:

$$B_{(0,2)}^\mu = B_{(0,2)}^1 k_2^\mu \quad \text{con} \quad B_{(0,2)}^1 = -\frac{1}{2} B_{(0,2)}^0 \quad (\text{D.182})$$

Así

$$B_{(0,2)}^\mu = -\frac{1}{2} B_{(0,2)}^0 k_2^\mu \quad \text{pero} \quad B_{(0,2)}^0 = B_{(0,1)}^0 \quad (\text{D.183})$$

$$B_{(0,2)}^\mu = -\frac{1}{2} B_{(0,1)}^0 k_2^\mu, \quad (\text{D.184})$$

y para el último tenemos:

$$B_{(1,2)}^\mu = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D_1 D_2} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{[(l - k_1)^2 - m^2][(l + k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{D.185})$$

Entonces:

$$B_{(1,2)}^\mu = (k_1^\mu - k_2^\mu) \frac{1}{2} B_{(1,2)}^0. \quad (\text{D.186})$$

Los resultado obtenidos pueden ser verificados en la literatura [103], [100], [104].

Una vez obtenido los resultados de las funciones de Passarino-Veltman, procedemos a calcular las funciones escalares de lorentz correspondientes a la función $C^{\mu\nu}$, para ello debemos considerar:

$$\frac{1}{2-d} \quad \text{con} \quad d = 4 - 2\varepsilon \quad (\text{D.187})$$

$$\frac{1}{2-4+2\varepsilon} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\varepsilon}. \quad (\text{D.188})$$

Realizando una expansión alrededor de ε aplicando series geométricas tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad (\text{D.189})$$

tenemos:

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\varepsilon} \approx -\frac{1}{2} [1 + \varepsilon + \cancel{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}] = -\frac{1}{2}(1 + \varepsilon), \quad (\text{D.190})$$

además con:

$$\frac{d}{2-d} = \frac{d+2-2}{2-d} = 2 \left(\frac{1}{2-d} \right) - 1 = 2 \left[-\frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \right] - 1 \quad (\text{D.191})$$

$$\approx -(2 + \varepsilon). \quad (\text{D.192})$$

Recordando que (D.180) depende de k_1^μ , (D.184) depende de k_2^μ y (D.186) dependen de k_1^μ y k_2^μ se puede aplicar la condición de transversalidad de los cuadvectores de polarización, entonces para calcular C_{23} reemplazamos las funciones de Passarino-Veltman por sus valores calculados y aplicamos la expansión alrededor de ε en (D.118), así:

$$C_{23} = \frac{1}{s} \left\{ B_{(1,2)}^0 + m^2 C_{(0,1,2)}^0 + (2 + \varepsilon) \left[\frac{2}{s} (k_1^\mu - \cancel{k_2^\mu}) \times \frac{1}{2} B_{(1,2)}^0 \cdot k_{2\mu} \cdots \right. \right. \\ \left. \left. \cdots - B_{(1,2)}^0 - m^2 C_{(0,1,2)}^0 \right] \right\} \quad (\text{D.193})$$

$$C_{23} = \frac{1}{s} \left[B_{(1,2)}^0 + m^2 C_{(0,1,2)}^0 + (2 + \varepsilon) \left(-\frac{1}{2} B_{(1,2)}^0 - m^2 C_{(0,1,2)}^0 \right) \right] \quad (\text{D.194})$$

$$= -\frac{1}{s} \left(m^2 C_{(0,1,2)}^0 + \frac{\varepsilon}{2} B_{(1,2)}^0 \right) \quad (\text{D.195})$$

$$C_{23} = -\frac{1}{2s} \frac{i\mu^{2\varepsilon}}{16\pi^2} - \frac{m^2}{m_H^2} C_{(0,1,2)}^0. \quad (\text{D.196})$$

Este mismo procedimiento se realiza para calcular C_{24} recordando (D.113), entonces:

$$C_{24} = -\frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \left\{ \frac{2}{s} \left[\left(k_1^\mu - \cancel{k_2^\mu} \right) \frac{1}{2} B_{(1,2)}^0 \right] k_{2\mu} + \frac{1}{2} \cancel{B_{(1,2)}^0 k_2^\mu k_{2\mu}} \right\} \cdots \\ \cdots - B_{(1,2)}^0 - m^2 C_{(0,1,2)}^0 \quad (\text{D.197})$$

$$C_{24} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \left(\frac{1}{2}B_{(1,2)}^0 + m^2 C_{(0,1,2)}^0 \right) \quad (\text{D.198})$$

$$C_{24} = \frac{1}{4}B_{(1,2)}^0 + \frac{\varepsilon}{4}B_{(1,2)}^0 + \frac{1}{2}m^2 C_{(0,1,2)}^0 \quad (\text{D.199})$$

D.7 Relación entre los logaritmos complejos y la función inversa del seno.

Para demostrar dicha relación consideremos que:

$$\omega = \arcsin z \quad \text{donde } Z \in \mathbb{R} \quad (\text{D.200})$$

$$\sin \omega = z \quad \text{Pero } \sin \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \quad (\text{D.201})$$

$$\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = z \quad (\text{D.202})$$

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2zi \quad (\text{D.203})$$

$$(e^{i\omega})^2 - 1 = 2zie^{i\omega} \quad (\text{D.204})$$

$$(e^{i\omega})^2 - 2zie^{i\omega} - 1 = 0. \quad (\text{D.205})$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado tal que:

$$e^{i\omega} = \frac{2zi \pm \sqrt{(2zi)^2 + 4}}{2} \quad (\text{D.206})$$

$$e^{i\omega} = zi \pm \sqrt{1 - z^2} \quad (\text{D.207})$$

$$i\omega = \log zi \pm \sqrt{1 - z^2} \quad (\text{D.208})$$

$$\omega = -i \log zi \pm \sqrt{1 - z^2}. \quad (\text{D.209})$$

Tomando la solución positiva que es la que representa correctamente la función inversa del seno:

$$\arcsin z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right). \quad (\text{D.210})$$

Apéndice E

Desarrollo Computacional

En este Apéndice explica el algoritmo implementado como apoyo para el cálculo de la amplitud de scattering de este trabajo, el cual es desarrollado en el entorno de Mathematica utilizando los paquetes de FeynArts [47], FeynCalc [105] y FeynHelpers [49], entonces:

Partimos por llamar los paquetes de FeynArts, FeynCalc y FeynHelpers previamente instalados en Mathematica

```
$LoadAddOns={"FeynHelpers", "FeynArts"};  
$FeynCalcStartupMessages=False;  
<<FeynCalc`;  
FeynArts`$FAVerbose=0;
```

Construimos la topología del tipo de diagrama que vamos a trabajar y la pintamos, solicitando que ignore los diagramas con topologías internas:

```
ggh=CreateTopologies[1,2-> 1,Adjacencies-> {3},ExcludeTopologies->  
Internal];  
Paint[ggh, ColumnsXRows->{1,1},FieldNumbers->True];
```

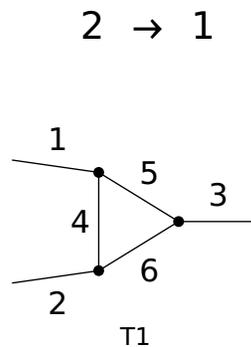


Figura E.1: Diagrama topológico creado con FeynArts sin asignación de campos.

Procedemos a definir los campos de las partículas entrantes, salientes, excluimos los campos que puedan aparecer dentro del Loop que no es de nuestro interés y definimos el modelo donde vamos a evaluar el o los posibles diagramas y que pinte los diagramas en una fila con 2 columnas:

```
CamposExcluidos={F[1, _],F[2, _],F[3, {1}],F[3, {2}], F[4, _],
                S[2], S[3],
                V[1], V[2],
                U[1 | 2 | 3 | 4 | 5 ]};

Dggh=InsertFields [ggh, {V[5], V[5]}->S[1],
                  Model->"SMQCD",
                  InsertionLevel -> {Particles},
                  ExcludeParticles->CamposExcluidos];

Paint [Dggh, ColumnsXRows->{2,1}];
```

$g g \rightarrow H$

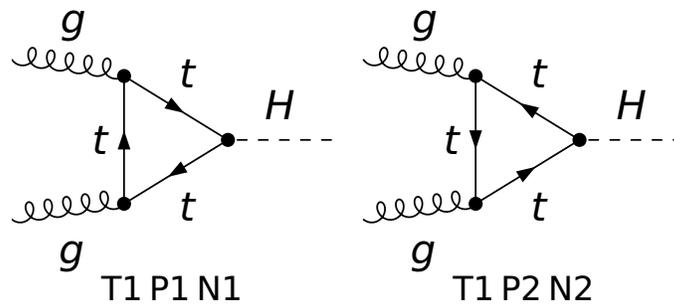


Figura E.2: Diagramas de Feynman que generan contribución al proceso de producción del bosón de Higgs a través de la fusión de gluones creado con FeynArts una vez asignados los campos.

Una vez obtenido todos los diagramas que generan contribución a la amplitud de scattering procedemos a construirla, para ello se toman las topologías construidas con FeynArts:

```
AmpDggh=CreateFeynAmp [Dggh, Truncated-> False]
```

Una vez llegado a este punto FeynArts no puede continuar su labor de realizar los diagramas y construir la amplitud de scattering esta hecha, así procedemos a utilizar FeynCalc para continuar con nuestro tratamiento a nuestra amplitud, para ello reescribimos la amplitud de scattering construida por FeynArts en el lenguaje de FeynCalc, definimos los momentos entrantes, el momento saliente, la dimensión en la que vamos a trabajar y especificamos que omita la representación quiral de dicha amplitud:

```
AmpDgghC=FCFACONVERT [ AmpDggh,
    ChangeDimension->D,
    IncomingMomenta->{k1, k2},
    OutgoingMomenta->{k1+k2},
    LoopMomenta->{1},
    DropSumOver->True,
    List->False,
    UndoChiralSplittings->True] // Contract
```

Obteniendo así el siguiente resultado de la amplitud en el lenguaje de FeynCalc:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\text{tr} \left(\frac{i \text{FCGV}(\text{EL}) \text{FCGV}(\text{MT}) g_s^2 T_{\text{Col5Col4}}^{\text{Glu1}} T_{\text{Col4Col5}}^{\text{Glu2}} (\text{FCGV}(\text{MT}) + \gamma \cdot (l - k1)) \cdot (\text{FCGV}(\text{MT}) + \gamma \cdot (k2 + l)) \cdot (\gamma \cdot \varepsilon(k2)) \cdot (\text{FCGV}(\text{MT}) + \gamma \cdot l) \cdot (\gamma \cdot \varepsilon(k1))}{2 \text{FCGV}(\text{MW}) \text{FCGV}(\text{SW})} \right)}{16\pi^4 (l^2 - \text{FCGV}(\text{MT})^2) \cdot ((k2 + l)^2 - \text{FCGV}(\text{MT})^2) \cdot ((l - k1)^2 - \text{FCGV}(\text{MT})^2)} \\
 & + \frac{\text{tr} \left(\frac{i \text{FCGV}(\text{EL}) \text{FCGV}(\text{MT}) g_s^2 T_{\text{Col4Col5}}^{\text{Glu1}} T_{\text{Col5Col4}}^{\text{Glu2}} (\text{FCGV}(\text{MT}) + \gamma \cdot (l - k1)) \cdot (\text{FCGV}(\text{MT}) + \gamma \cdot (k2 + l)) \cdot (\gamma \cdot \varepsilon(k2)) \cdot (\text{FCGV}(\text{MT}) + \gamma \cdot l) \cdot (\gamma \cdot \varepsilon(k1))}{2 \text{FCGV}(\text{MW}) \text{FCGV}(\text{SW})} \right)}{16\pi^4 (l^2 - \text{FCGV}(\text{MT})^2) \cdot ((k2 + l)^2 - \text{FCGV}(\text{MT})^2) \cdot ((l - k1)^2 - \text{FCGV}(\text{MT})^2)},
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

posteriormente procedemos a realizar algunos arreglos a dicha amplitud de scattering con el fin de traducirla a nuestro lenguaje matemático así y que aplique directamente el álgebra de color:

```
arreglos={FCGV[a_]:>ToExpression[a],
    EL->e, MT->m, Lor1->u, Lor2->v, Col4->a, Col5->b, Glu1->alph, Glu2
    ->bet};
AmpFDgghC=AmpDgghC//.arreglos//FullSimplify
arreglos2={e*m->g*SW *yt*v/Sqrt[2], MW->g*v/2};
AmpFDgghCC=AmpFDgghC//.arreglos2//FullSimplify//SUNSimplify
```

Obteniendo así una amplitud de scattering en nuestro lenguaje y siendo este resultado

la suma de las dos amplitudes de scattering:

$$i\mathcal{M} = \frac{i y_t g_s^2 \delta^{\text{alpbet}} \text{tr}((m - \gamma \cdot (k1 - l)) \cdot (\gamma \cdot (k2 + l) + m) \cdot (\gamma \cdot \varepsilon(k2)) \cdot (\gamma \cdot l + m) \cdot (\gamma \cdot \varepsilon(k1)))}{16\sqrt{2}\pi^4 (l^2 - m^2) \cdot ((k2 + l)^2 - m^2) \cdot ((k1 - l)^2 - m^2)}, \quad (\text{E.2})$$

procedemos a separar el denominador y el numerador en dos elementos individuales, donde posteriormente usaremos el álgebra de Dirac para el numerador y volveremos a unirlos con el denominador tal que:

```
AmpFDgghCC=AmpFDgghC//. arreglos2 // FullSimplify // SUNSimplify

Den=Flatten@@Cases [AmpFDgghCC, FeynAmpDenominator [__], Infinity ]
Num=Block [{ res }, SetOptions [ DiracTrace , DiracTraceEvaluate->True ,
  FeynCalcExternal->True ];
res=DeleteCases [AmpFDgghCC, FeynAmpDenominator [__], Infinity ] //
  FullSimplify
PreSol=Times [Num, Den]
```

$$i\mathcal{M} = \frac{i y_t g_s^2 \delta^{\text{alpbet}}}{4\sqrt{2}\pi^4 (l^2 - m^2) \cdot ((k2 + l)^2 - m^2) \cdot ((k1 - l)^2 - m^2)} [(k1 \cdot \varepsilon(k2))(k2 \cdot \varepsilon(k1)) \cdots \\ \cdots - (k1 \cdot \varepsilon(k1) - 2(l \cdot \varepsilon(k1)))(k2 \cdot \varepsilon(k2) + 2(l \cdot \varepsilon(k2))) \cdots \\ \cdots + (\varepsilon(k1) \cdot \varepsilon(k2)) (-k1 \cdot k2 - l^2 + m^2)], \quad (\text{E.3})$$

ahora procedemos a reescribir la amplitud de scattering en términos de las funciones de Passarino - Veltman y simplificamos los momentos al cuadrado que no contribuyen y reescribimos el producto del cuadri momento de los momentos entrantes en términos de la masa del Higgs, así:

```
FSolu=OneLoop [1, PreSol, Dimension->D, FeynCalcExternal->True] // FullSimplify

ScalarProduct [k1, k1]=0;
ScalarProduct [k2, k2]=0;
ScalarProduct [k1, k2]=(SMP["m_H"]^2)/2;
FSolu
```

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} = & \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} myt g_s^2 \delta^{\text{alphabet}} \left((\bar{\varepsilon}(k1) \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) \left(B_0(m_H^2, m^2, m^2) + \frac{1}{2} m_H^2 C_0(0, 0, m_H^2, m^2, m^2, m^2) \dots \right. \right. \\
& \dots - 4C_{00}(0, 0, m_H^2, m^2, m^2, m^2) - (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) (\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) C_0(0, 0, m_H^2, m^2, m^2, m^2) \dots \\
& \dots + (\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) C_0(0, 0, m_H^2, m^2, m^2, m^2) + 2(\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) \dots \\
& \dots \times C_1(0, m_H^2, 0, m^2, m^2, m^2) - 2(\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) C_1(0, m_H^2, 0, m^2, m^2, m^2) \dots \\
& \dots + 2(\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k2) - \bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) C_1(0, m_H^2, 0, m^2, m^2, m^2) \dots \\
& \dots - 4(\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) (\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) C_{11}(0, m_H^2, 0, m^2, m^2, m^2) - 4(\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) \dots \\
& \dots \times C_{11}(0, m_H^2, 0, m^2, m^2, m^2) + 4(\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) (\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) C_{12}(0, m_H^2, 0, m^2, m^2, m^2) \dots \\
& \dots + 4(\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) C_{12}(0, m_H^2, 0, m^2, m^2, m^2) \left. \right), \quad (\text{E.4})
\end{aligned}$$

una vez se escrita la Amplitud de scattering en términos de las funciones de Passarino-Veltman procedemos a evaluar dichas funciones con el paquete de FeynHelpers y aplicamos la condición de transversalidad de los gluones $\epsilon_\mu(k_i, \sigma_i) k_i^\mu = 0$ teniendo así:

```
F1Amp=FSolu//PaXEvaluate//FullSimplify
```

```
Pair[Momentum[k1], Momentum[Polarization[k1, I]]] = 0;
```

```
Pair[Momentum[k2], Momentum[Polarization[k2, I]]] = 0;
```

```
F1Amp//FullSimplify
```

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} = & \frac{myt g_s^2 \delta^{\text{alphabet}}}{16\sqrt{2}\pi^2 m_H^4} \left[4m^2 \log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) \dots \right. \\
& \dots - m_H^2 \left(\log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) - 4 \right) \left[(2(\bar{k}1 \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) (\bar{k}2 \cdot \bar{\varepsilon}(k1)) \dots \right. \\
& \left. \left. \dots - m_H^2 (\bar{\varepsilon}(k1) \cdot \bar{\varepsilon}(k2)) \right) \right], \quad (\text{E.5})
\end{aligned}$$

Entonces calculada la amplitud de scattering se calcula la amplitud al cuadrado y se realiza la suma sobre todos los estados de polarización encontrando así el resultado que necesitamos para posteriormente calcular la sección eficaz:

```

AmpSq=F1Amp ComplexConjugate [F1Amp] 1/2//SUNSimplify[# ,SUNNToCACF->False
]&

AmpSq2=AmpSq//DoPolarizationSums[# ,k1 ,0]&
AmpSq3=AmpSq2//DoPolarizationSums[# ,k2 ,n]&

AmpSq4=AmpSq3// FullSimplify

```

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g^4}{64\pi^4 m_H^4} & \left[m y_t m_H^2 \log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) - 4m y_t m_H^2 \dots \right. \\
& \left. \dots - 4m^3 y_t \log^2 \left(\frac{\sqrt{m_H^4 - 4m^2 m_H^2} - m_H^2 + 2m^2}{2m^2} \right) \right]^2. \quad (\text{E.6})
\end{aligned}$$