

**SOBRE LA EXPRESIÓN DEL PROPAGADOR DE UNA PARTÍCULA EN UN
CAMPO MAGNÉTICO EN TÉRMINOS DEL ESPACIO FASE DE LA INTEGRAL
DE CAMINO**

**ADOLFO VILLAMIZAR VILLAMIZAR
COD. 88157902**

**UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA
PAMPLONA
2015**

**SOBRE LA EXPRESIÓN DEL PROPAGADOR DE UNA PARTÍCULA EN UN
CAMPO MAGNÉTICO EN TÉRMINOS DEL ESPACIO FASE DE LA INTEGRAL
DE CAMINO**

**ADOLFO VILLAMIZAR VILLAMIZAR
COD. 88157902**

Trabajo de grado presentado para optar por el título de Magister en Física

**Director
PhD. ARIEL REY BECERRA BECERRA
Universidad de Pamplona**



**UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA
PAMPLONA
2015**

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	5
1. INTRODUCCIÓN	6
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	8
2.1 INTEGRALES DE CAMINO	8
2.2 APROXIMACIÓN INTUITIVA AL FORMALISMO DE LA INTEGRAL DE CAMINOS	9
2.3 PRINCIPIOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA	11
2.4 LA ACCIÓN CLÁSICA	12
2.5 EL PROPAGADOR	13
2.6 EVENTOS SUCESIVOS	15
2.7 EL PROPAGADOR DE LA PARTÍCULA LIBRE	18
2.8 ESPACIO FASE	20
2.9 EL PROPAGADOR EN EL ESPACIO FASE	23
2.10 PARTÍCULA LIBRE	28
2.11 EL OSCILADOR ARMÓNICO	29
3. PROPAGADOR DE UNA PARTICULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE EN TÉRMINOS DEL ESPACIO FASE.	32
3.1 HAMILTONIANO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE	32
3.2 PROPAGADOR DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE	33
3.2.1 Cálculo del propagador con el vector potencial A'	34
3.2.2 Cálculo del propagador con el vector potencial $A(x) = (0, Bx, 0)$	38

4.	CONCLUSIONES	45
	APENDICES	46
A.	LAGRANGIANO DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE	46
B.	ACCIÓN CLÁSICA PARA UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EN DIRECCIÓN AL EJE z .	50
C.	INTEGRACIÓN GAUSSIANA	54
	REFERENCIAS	57

RESUMEN

El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético constantes es analizado mediante la integral de camino en el espacio fase. Para encontrar la expresión del propagador la acción es formulada en términos de las posiciones y los momentos mediante la transformación de Legendre a partir del lagrangiano de la partícula en el campo magnético constante.

En la evaluación de la integral se emplea la transformada de Fourier de la función delta de Dirac para reducir la acción hasta hacerla coincidir con la de un oscilador armónico unidimensional, que se ajusta el movimiento de la partícula en el campo magnético y cuyo resultado es conocido.

Finalmente, mediante integración gaussiana y el uso de identidades trigonométricas se hace concordar con la expresión obtenida con el resultado clásico más un término de superficie. Al obtener la expresión del propagador empleando el espacio fase se observa un resultado más preciso que el obtenido clásicamente ya que adiciona un término de superficie.

1. INTRODUCCIÓN

El descubrimiento de las leyes naturales fundamentales siempre ha inquietado al ser humano y describir sus fenómenos por medio de ecuaciones matemáticas que predigan con exactitud su comportamiento ha sido una tarea ardua para los científicos e investigadores de la física teórica. Especialmente se ha mostrado muy compleja la formulación de leyes físicas en el micromundo, el comportamiento de las partículas elementales ha sido esquivo por mucho tiempo a su formulación en expresiones matemáticas exactas, tanto así, que describir solamente el problema de tres cuerpos se ha tornado casi imposible y sólo se han alcanzado soluciones aproximadas. Sin embargo, en el recorrer de la ciencia y la investigación se han desarrollado numerosos métodos matemáticos que en muchos casos han facilitado el camino a encontrar la verdad sobre los fenómenos físicos, lo cual sin duda ha afinado la herramienta matemática para lograr estos y otros objetivos. De esta manera se ha creado un vínculo irrompible entre la física y la matemática. El desarrollo de diferentes formas matemáticas de abordar un problema físico ha contribuido a comprender mejor estos fenómenos naturales y en muchos casos a encontrar soluciones a problemas preliminarmente insolubles. Un ejemplo clásico de ello es el surgimiento de la teoría de operadores que dio origen a la mecánica cuántica. Luego, obedeciendo a la dinámica de la vida científica, aparecen nuevas formas de expresar el comportamiento de los cuerpos microscópicos por medio del concepto de probabilidad expresado a través de las integrales por recorrido que planteó por primera vez R. Feynman. Esto nos demuestra reiteradamente que la ciencia, así como la vida cotidiana, no se aferra a un solo procedimiento y a una sola forma de ver las cosas, sino que se compone de múltiples elementos y puntos de vista que la equilibran y la conducen constantemente a su destino siempre y simplemente inalcanzable.

El estudio del comportamiento del electrón como partícula fundamental y una de las principales partículas que intervienen en la vida científica y tecnológica del hombre, se convierte en uno de los principales problemas actuales de la ciencia.

Las integrales de camino fueron introducidas en la mecánica cuántica por Richard Feynman en 1948, su principal característica consiste en considerar todas las

posibles trayectorias que una partícula sigue entre dos puntos establecidos. A cada una de estas trayectorias se le asigna un número complejo conocido como amplitud de probabilidad, estas amplitudes son sumadas dentro de la integral de caminos. La amplitud es la suma de contribuciones $\phi[x(t)]$ de cada camino $K(x_b, x_a) = \sum \phi[x(t)]$. La contribución de cada trayectoria tiene una fase proporcional a la acción S : $\phi[x(t)] = \text{const } e^{(i/\hbar)S[x(t)]}$. [1]

En el presente trabajo, la acción de una partícula que se propaga a través de un campo magnético en términos del lagrangiano, es transformada para ser puesta en términos del espacio fase por medio de las ecuaciones de Legendre, el espacio de los momentos y las posiciones, conocido también como el espacio de Hamilton. En esta acción el campo magnético \mathbf{B} es expresado como el rotacional de un vector potencial que debe ser seleccionado de forma adecuada para que la integral de caminos pueda ser evaluada empleando el propagador del oscilador armónico unidimensional. Esto debido a que el movimiento de la partícula dentro del campo se comporta como un oscilador armónico.

El propagador de una partícula dentro de un campo magnético constante es conocido y es obtenido por medio del lagrangiano, empleando la acción clásica. Una vez se ha evaluado la integral, en el espacio fase, empleando la expresión del propagador para un oscilador armónico, la dificultad reside en hacer coincidir la expresión obtenida con el resultado clásico. Para lograr esto se emplean procedimientos algebraicos como completar cuadrados y se hace uso de identidades trigonométricas que permiten el cálculo de las integrales restantes mediante integrales gaussianas, para finalmente observar que además del resultado conocido se obtiene una expresión más completa que incluye un término de superficie.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 INTEGRALES DE CAMINO

La formulación de la mecánica cuántica usando las integrales de camino es sin duda muy intuitiva. Esta inicia con la integral

$$K(x_f, t_f | x_i, t_i) = \int \mathcal{D} x(t) e^{iS[x(t)]/\hbar} \quad (2.1)$$

El significado de esta ecuación es el siguiente. Si se desea conocer la amplitud mecánico cuántica de una partícula en la posición x_i en el tiempo t_i llegue a la posición x_f en el tiempo t_f , se integra sobre todos los posibles caminos que conectan los puntos con un factor de fase dado por la acción clásica para cada camino. De aquí el nombre de integral de camino [1]. Conociendo la amplitud para todo x es suficiente información para conocer todo acerca del sistema. La expresión es generalizada para más dimensiones y partículas de una manera muy sencilla.

Esta formulación es completamente equivalente a la usual formulación de la mecánica cuántica algunas de las características que se deben tener en cuenta son:

2.1.1. La clásica ecuación del movimiento se origina de una manera muy simple. Si se toma el límite $\hbar \rightarrow 0$, el peso del factor $e^{iS/\hbar}$ oscila muy rápidamente. Por lo que la principal contribución a la integral de caminos proviene de los caminos cercanos a la acción estacionaria. Esto no es más que la derivación de la ecuación Euler-Lagrange de la acción clásica. Por lo tanto, la trayectoria clásica domina la integral de caminos cuando \hbar se hace muy pequeña.

2.1.2. No se conoce el camino que la partícula ha seleccionado, pero si se conoce la posición inicial y final. Esta es la forma como se generaliza el experimento de la doble rendija. Si se sabe el origen de la partícula y donde impacta sobre la pantalla, pero no se conoce que ranura atravesó. La integral de caminos es una

generalización con una barrera intermedia con infinitas ranuras, donde no se puede especificar por cuál de ellas la partícula cruzó para impactar la pantalla.

2.1.3. Intuitivamente se tiene una idea del comportamiento de la partícula moviéndose alrededor de la trayectoria clásica. La trayectoria puede desviarse de la trayectoria clásica si la diferencia en la acción es más o menos el valor de \hbar . Estas trayectorias cercanas hacen interferencia constructiva y contribuyen en fase al propagador.

2.1.4. Se tiene una expresión integral en lugar de ecuaciones diferenciales de la mecánica cuántica de Schrödinger, habiendo varios métodos disponibles para su solución como los métodos de aproximación o igualmente se puede pensar en un cambio de variable para simplificar el problema.

2.2 APROXIMACIÓN INTUITIVA AL FORMALISMO DE LA INTEGRAL DE CAMINOS

Para hacer la aproximación intuitiva se considera el experimento de la doble rendija. Cada vez que un electrón llega a la pantalla, no hay forma de saber qué rendija el electrón ha pasado. Después de repetir el mismo experimento muchas veces, un patrón de franjas aparece gradualmente en la pantalla, lo que demuestra que hay una interferencia entre dos ondas, uno de una ranura, y el otro de la otra. Se llega a la conclusión de que se tiene que sumar las amplitudes de estas dos ondas que se corresponden con diferentes trayectorias del electrón. Ahora se agregan más ranuras a la barrera que se interpone entre la fuente y la pantalla, en consecuencia hay más caminos, cada uno de los cuales contribuye con una amplitud, como se aprecia en la figura 2.1. A medida que aumenta el número de ranuras, con el tiempo toda la obstrucción desaparece, sin embargo, está claro que hay muchos caminos que contribuyen a la amplitud final de la propagación de electrones a la pantalla.

La generalización mental del experimento, implica que la amplitud de una partícula que se mueve de un punto x_i a otro punto x_f se compone de muchos componentes de cada uno de los cuales corresponde a un camino particular que

conecta estos dos puntos. Uno de tales caminos es la trayectoria clásica. Sin embargo, hay un número infinito de otros caminos que diferentes al clásico que contribuyen a la amplitud de la mecánica cuántica. Este argumento lleva a la noción de una integral de camino, en el que suma sobre todos los posibles caminos que conectan los puntos inicial y final para obtener la amplitud total.

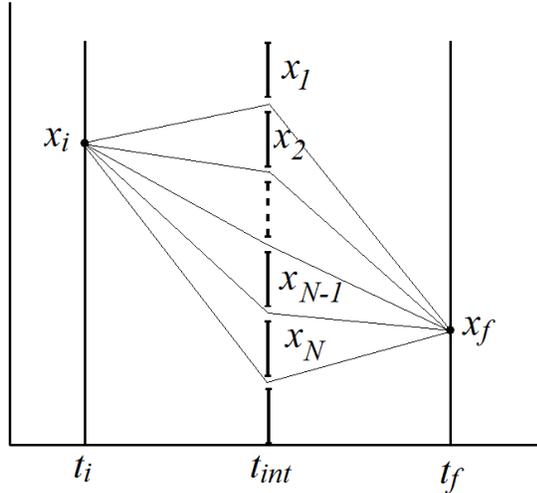


Figura 2.1: Experimento con Múltiples ranuras

La pregunta entonces es ¿cómo contribuye cada camino individual a la fase total? Es claro que el factor de peso debe ser elegido de tal manera que la trayectoria clásica se destaca en el límite $\hbar \rightarrow 0$. La elección correcta resulta ser $e^{iS[x(t)]/\hbar}$, donde $S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(\dot{x}, x, t) dt$ es la acción clásica para el camino $x(t)$ que satisface las condiciones de frontera $x(t_i) = x_i$, $x(t_f) = x_f$. En el límite $\hbar \rightarrow 0$ el factor de fase oscila tan rápidamente que casi todos los caminos se anulan entre sí quedando fuera de la amplitud final. Sin embargo, hay un camino que hace que la acción estacionaria, cuya contribución no se cancela. Este camino en particular es otra cosa que la trayectoria clásica. De esta manera, vemos que la trayectoria clásica domina la integral de camino en el límite $\hbar \rightarrow 0$.

Si se incrementa \hbar , los caminos se hacen imprecisos. La trayectoria clásica sigue dominando, pero hay otros caminos cercanos a ella cuya acción está dentro de $\Delta S \sim \hbar$ que contribuyen de manera significativa a la amplitud. La partícula se mueve alrededor de la trayectoria clásica.

2.3 PRINCIPIOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA

Como punto de partida para la descripción de un sistema cuántico tomamos los siguientes principios [2]:

2.3.1. A cada evento es asociado una amplitud de probabilidad ϕ . La probabilidad del evento es encontrada elevando al cuadrado la amplitud:

$$P = |\phi|^2 \quad (2.2)$$

2.3.3. Si un evento puede ocurrir clásicamente en varias formas $i = 1, \dots, n$ cada uno caracterizado por una amplitud ϕ_i , entonces la amplitud total del evento corresponde a la sumatoria:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (2.3)$$

2.3.4. Si un evento puede ser descompuesto en varios pasos individuales $j = 1, \dots, m$, cada uno caracterizado por la amplitud ϕ_j , entonces la amplitud total del evento es encontrada por el producto:

$$\phi = \prod_{j=1}^m \phi_j \quad (2.4)$$

Considérese los tiempos t_a y t_b , en el tiempo t_a se tiene la amplitud $\psi(x, t_a)$ de probabilidad de encontrar la partícula en x . En el tiempo t_b se tiene otra amplitud $\psi(x, t_b)$ de probabilidad de encontrar la partícula en x . La amplitud $\psi(x, t)$ es la función de onda de Schrödinger. Ahora se debe encontrar una fórmula que conecte $\psi(x, t)$ en los tiempos $t = t_a$ y $t = t_b$.

Sea $\psi(x_b, t_b)$ la amplitud de encontrar la partícula en x_b en el tiempo t_b . Denominemos por $K(x_b, t_b | x_a, t_a)$ la amplitud de probabilidad para el evento en el que la partícula emitida en x_a en el tiempo t_a sea observada en x_b en el tiempo t_b .

Una partícula que arriba en x_b en el tiempo t_b debió estar en algún lugar en el tiempo t_a , por lo tanto hay varios caminos posibles que la partícula pudo haber seguido, caracterizados por la posición en el tiempo t_a . Cada una de estas posibilidades está compuesta por dos pasos individuales [1], [3]:

1. La partícula estaba en el punto x_a en el tiempo t_a con una amplitud $\psi(x_a, t_a)$.
2. La partícula fue emitida del punto x_a en el tiempo t_a , y observada en x_b el tiempo t_b con una amplitud $\psi(x_b, t_b)$.

Como el evento fue descompuesto en dos pasos individuales podemos expresar la amplitud como:

$$K(x_b, t_b | x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) \quad (2.5)$$

Para encontrar la amplitud total $\psi(x_b, t_b)$ de encontrar la partícula en x_b en el tiempo t_b , se suman todas las amplitudes para obtener:

$$\psi(x_b, t_b) = \int K(x_b, t_b | x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a \quad (2.6)$$

Esta es la ecuación dinámica básica que permite encontrar la equivalencia de las integrales de camino con la ecuación de Schrödinger.

2.4 LA ACCIÓN CLÁSICA

Existe una acción clásica que puede ser calculada para cada camino. El camino clásico $\bar{x}(t)$ es aquel para el cual S es un mínimo. La cantidad S es dada por la expresión

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt \quad (2.7)$$

Donde L representa el lagrangiano del sistema. Para una partícula de masa m sujeta a la energía potencial $V(x, t)$, en función de la posición y el tiempo, está expresado de la siguiente manera:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, y) \quad (2.8)$$

Para determinar el camino clásico se emplea el método del cálculo de variaciones. Este camino mínimo o mejor dicho extremo es la trayectoria que satisface la condición

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

Que corresponde a la acción lagrangiana clásica del movimiento. En mecánica clásica, la forma de la integral $S = \int L dt$ es de interés solo el valor extremo S_{cl} . Este interés deriva de la necesidad de conocer la acción a lo largo de un conjunto de trayectorias vecinas con el propósito de determinar el camino de menor acción. En mecánica cuántica la forma de la integral y el valor extremo son igualmente importantes.

2.5 EL PROPAGADOR

Considérese la amplitud $K(x_b, t_b | x_a, t_a)$, es la amplitud para el evento que una partícula que fue emitida en x_a en el tiempo t_a sea observada en x_b en el tiempo t_b , para tal evento la partícula debió seguir algún camino. Igualmente la partícula pudo haberse movido por cualquier camino que conduzca del punto (x_a, t_a) a (x_b, t_b) , $\psi_\gamma(x_b, t_b | x_a, t_a)$ denota la amplitud de una partícula emitida en (x_a, t_a) y observada en (x_b, t_b) que se mueve a lo largo del camino γ . Donde la integral que representa la suma sobre la trayectoria γ que conduce de (x_a, t_a) a (x_b, t_b) es:

$$\int \psi_\gamma(x_b, t_b | x_a, t_a) D[\gamma] \quad (2.10)$$

A cada camino γ se le asocia la acción clásica:

$$S[\gamma] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dt \quad (2.11)$$

Dado que cada camino contribuye con un factor a la fase, se tiene:

$$\psi_\gamma(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[\gamma] \right] \quad (2.12)$$

Ahora se toma la contribución de cada uno de los caminos a la amplitud de probabilidad para sumarlos en una integral y a la cual hacemos referencia como el propagador, escrito que una forma más completa de la puesta inicialmente:

$$K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) = \int_{\mathbf{x}(t_a)=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}(t_b)=\mathbf{x}_b} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dt \right] D[\mathbf{x}(t)] \quad (2.13)$$

Todos los caminos no contribuyen a la suma general debido a la interferencia destructiva. La trayectoria clásica es el extremo y todos los caminos cercanos tendrán casi la misma acción por lo tanto harán interferencia constructiva. De ahí que la principal contribución al propagador llega de las trayectorias cercanas al camino clásico, y dado que tienen aproximadamente la misma acción podemos aproximarlas a la contribución de este camino. Dado que la principal contribución al propagador proviene de las trayectorias cercanas al camino clásico, y dado que tienen aproximadamente la misma acción que el camino clásico se hace la siguiente aproximación:

$$K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) \sim \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L \left(\mathbf{x}_{cl}, \frac{d\mathbf{x}_{cl}}{dt}, t \right) dt \right] \quad (2.14)$$

Conocida como la aproximación clásica.

La principal contribución al propagador proviene de la franja alrededor del camino clásico donde la acción varía muy poco, y donde los cambios en la acción son más pequeños que $\pi\hbar$. Para un problema clásico esta región es muy pequeña pero

para un problema de mecánica cuántica esta región es muy amplia. Consecuentemente el camino clásico pierde su significado en una típica situación mecánico cuántica [1].

2.6 EVENTOS SUCESIVOS

Para la amplitud de dos eventos sucesivos en el tiempo se debe suponer que existe t_c en medio de t_a y t_b . Entonces la acción para el camino entre a y b puede ser escrito como [1]:

$$S[b, a] = S[b, c] + S[c, a] \quad (2.15)$$

Esto sigue de la definición de la acción como una integral en el tiempo y del hecho de que L no depende de derivadas mayores que la velocidad. Entonces para el propagador se tiene la expresión:

$$K(b, a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}\{S[b,c]+S[c,a]\}} \mathcal{D}\mathbf{x}(t) \quad (2.16)$$

Es posible dividir cualquier camino en dos partes. La primera parte podría tener los puntos finales en x_a y $x_c = x(t_c)$, y la segunda parte podría tener los puntos finales x_c y x_b , como lo muestra la figura 2.2. Es posible integrar sobre todos los caminos de a hasta c y después sobre todos los caminos de c hasta b , y finalmente integrar el resultado sobre todos los valores posibles de x_c . En la realización de esta primera etapa de esta integración, $S[b, c]$ es constante. Así el resultado puede ser escrito como:

$$K(b, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_c^b e^{\frac{i}{\hbar}S[b,c]} K(c, a) \mathcal{D}\mathbf{x}(t) dx_c \quad (2.17)$$

Donde la integración debe ahora ser realizada no solo sobre los caminos entre c y b sino también sobre la variable x_c . Así:

$$K(b, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(b, c) K(c, a) dx_c \quad (2.18)$$

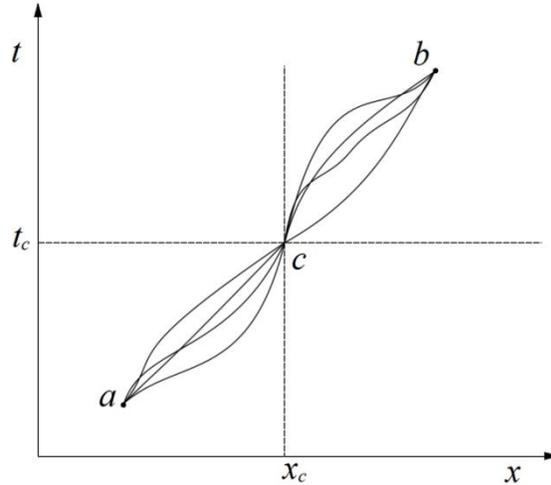


Figura 2.2: Caminos alternativos que van de a hasta b pasando por el punto c .

El procedimiento puede ser resumido de la siguiente manera. Selecciónese un tiempo discreto como t_c . Sea $t_c = t_k$ y $x_c = x_k$. Primero se efectúa la integración sobre estos x_i tal que $i < K$, esto introducirá el factor en la integral $K(c, a)$. Seguidamente efectuamos las integrales sobre todas las x_i tal que $i > K$. Esto introduce el factor $K(b, c)$. Lo que resta es una integral sobre x_c .

Entonces se tiene que todos los caminos alternativos de a hasta b pueden ser descritos por la posición específica x_c a través del cual pasan en el tiempo t_c . Entonces el propagador de una partícula que va de a hasta b puede ser calculado con las reglas:

1. El propagador para ir de a hasta b es la suma, sobre todos los posibles valores de x_c , de las amplitudes para la partícula para ir de a hasta c y de c hasta b .
2. La amplitud para ir de a hasta c y luego a b es el propagador para ir de a hasta c por el propagador para ir de c hasta b .

La regla se puede extender a varios eventos. Es perfectamente posible hacer dos divisiones en todos los caminos: uno en t_c y otro por ejemplo en t_d . Entonces el propagador de una partícula que va desde a hasta b puede ser escrito

$$K(b, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(b, c)K(c, d)K(d, a) dx_d dx_c \quad (2.19)$$

Esto significa que describimos una partícula que va de a hasta b , como si esta primero fuera de a hasta d , entonces de d se dirija a c , y finalmente de c hasta b . Para calcular la amplitud para tal camino se hace el producto de los propagadores para cada parte de la trayectoria. El propagador tomado sobre todos los caminos que conducen de a hasta b se obtiene por la integración de este producto sobre todos los posibles valores de x_d y x_c .

Se puede continuar este proceso hasta que la escala de tiempo t haya sido dividida en N intervalos. El resultado es

$$K(b, a) = \int_{x_{N-1}} \cdots \int_{x_2} \int_{x_1} K(b, N-1)K(N-1, N-2) \cdots \\ \times K(i+1, i) \cdots K(1, a) dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \quad (2.20)$$

En esta definición de propagador para una partícula que viaja en medio de dos puntos separados por un intervalo de tiempo infinitesimal ϵ es:

$$K(i+1, i) = \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon L \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \right\} \quad (2.21)$$

Que es la regla correcta para el primer orden en ϵ . Entonces por la regla de multiplicar las amplitudes de los intervalos que ocurren sucesivamente en el tiempo, tenemos

$$\emptyset[x(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{N-1} K(i+1, i) \quad (2.22)$$

Para la amplitud de un camino completo. Entonces usando la regla que indica sumar cuando hay caminos alternativos llegamos al propagador $K(b, a)$. [1], [3]

2.7 EL PROPAGADOR DE LA PARTÍCULA LIBRE

Para calcular el propagador de una partícula libre [1] se inicia por establecer el lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (2.23)$$

Donde

$$S[b, a] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt \quad (2.24)$$

Por lo tanto el propagador para una partícula libre es

$$K_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \times \int \cdots \int \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \epsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right\} dx_1 \cdots dx_{N-1} \quad (2.25)$$

Esto representa un conjunto de integrales gaussianas, es decir integrales de la forma $\int \exp(-ax^2 + bx)$, dado que la integral de una gaussiana es nuevamente una gaussiana, integramos una variable después de la otra.

Donde

$$S = \frac{m}{2\epsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2$$

$$x_0 = x_a$$

$$x_N = x_b$$

Para evaluar (2.25) se integra primero sobre x_1 , esta coordenada sólo aparece en la primera y la segunda intervalo de tiempo ($N = 2$) por lo solo se emplea la integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right\} \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\epsilon} \left[2 \left(x_1 - \frac{1}{2}(x_0 + x_2) \right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 \right] \right\} \\ & = \left(\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m} \frac{1}{2} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \cdot 2\epsilon} (x_2 - x_0)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

En esta última expresión ya no aparece x_1 . Poniendo este resultado en (2.25) se tiene una nueva expresión similar pero con $N - 1$ intervalos en lugar de N a la original. Además el primer intervalo es ahora 2ϵ en lugar de ϵ . Ahora se integra sobre x_2 .

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \exp \left\{ i \frac{m}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right] \right\} \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \exp \left\{ i \frac{m}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{3}{2} \left(x_2 - \frac{1}{3}x_0 - \frac{2}{3}x_3 \right)^2 + \frac{1}{3}(x_3 - x_0)^2 \right] \right\} \\ & = \left(\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m} \frac{2}{3} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \cdot 3\epsilon} (x_3 - x_0)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ahora se hace inducción sobre N . En el N -ésimo paso la integral sobre x_n llegará a ser

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \exp \left\{ i \frac{m}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{1}{2}(x_n - x_0)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \exp i \frac{m}{2\epsilon\hbar} \left[\frac{n+1}{n} \left(x_n - \left(\frac{1}{n+1} x_0 + \frac{n}{n+1} x_{n+1} \right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - x_0)^2 \right] \\
&= \left(\frac{2\pi i \epsilon \hbar}{m} \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \epsilon} \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - x_0)^2 \right\} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Juntando los resultados (2.26), (2.27) y el resultado de la inducción (2.28)

$$\begin{aligned}
K_0(b, a) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{2}{3} \cdots \frac{N-1}{N}} \exp \left\{ \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar N \epsilon} \right\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar N} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar N \epsilon} \right\}
\end{aligned}$$

calculando el límite se encuentra la expresión para el propagador de una partícula libre

$$K_0(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar (t_b - t_a)} \right\} \tag{2.29}$$

Donde se ha usado el hecho que $N\epsilon = t_b - t_a$

2.8 ESPACIO FASE

En la primera sección de este trabajo se desarrolló la integral de camino en el espacio configuración, este puede ser generalizado en un espacio n dimensional descrito por las coordenadas generalizadas $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Hay n coordenadas, una por cada grado de libertad del sistema, todas variables independientes. En la formulación lagrangiana las coordenadas son extendidas a $2n$, tratando las velocidades $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ como coordenadas independientes. Sin embargo en cambio de enfocarnos en la evolución temporal de las coordenadas $q(t)$ para una determinada trayectoria en el espacio configuración,

se toma q para significar una posible configuración en un instante dado, entonces las coordenadas no determinan la velocidad en el mismo instante [4], [5].

Supóngase que una partícula tiene una posición r en un tiempo dado t . La velocidad v en el mismo instante no es determinada por la posición, y puede por lo tanto ser tratada como una variable independiente. Esto simplemente significa que las trayectorias de las partículas, con diferentes velocidades, pueden pasar a través del mismo punto en el espacio. Variando v con r fija significa el cambio de una órbita a otra. En este sentido coordenadas y velocidades del lagrangiano pueden ser tratadas como independientes. Solo después que las ecuaciones de Lagrange han sido evaluadas, con las condiciones iniciales dadas, las coordenadas y las velocidades se unen para determinar una única trayectoria en el espacio configuración.

En la formulación hamiltoniana las coordenadas y los momentos son tratados sobre la misma base. En este espacio las coordenadas y las velocidades son tratadas como variables independientes. Además, en lugar de tomar coordenadas y velocidades, se toman coordenadas y momentos como variables independientes del espacio fase, dado que estas son las variables estándar en las ecuaciones de Hamilton.

Una de las características interesantes de la descripción en el espacio fase se manifiesta cuando se considera la evolución temporal con condiciones iniciales. Sabemos que $2n$ datos iniciales son necesarios para dar una única trayectoria. En la formulación lagrangiana esto es porque hay n ecuaciones diferenciales de segundo orden para determinar el movimiento, y en la formulación hamiltoniana hay $2n$ ecuaciones de primer orden. En el espacio configuración esto significa que a un punto dado lo atraviesan muchas posibles trayectorias. Sin embargo, en el espacio fase el número de coordenadas necesarias para determinar un punto es $2n$ y este es también el número de datos necesario para determinar una única trayectoria.

A través de cada punto pasa una y solo una trayectoria, especificada por las condiciones iniciales. Si continuamente se cambian estas condiciones, la

trayectoria se forma de tal manera que, cuando se consideran todos los posibles movimientos del sistema al mismo tiempo, las trayectorias formarán un patrón de flujo a través del espacio tiempo. Estos caminos serán distintos y nunca se cruzarán.

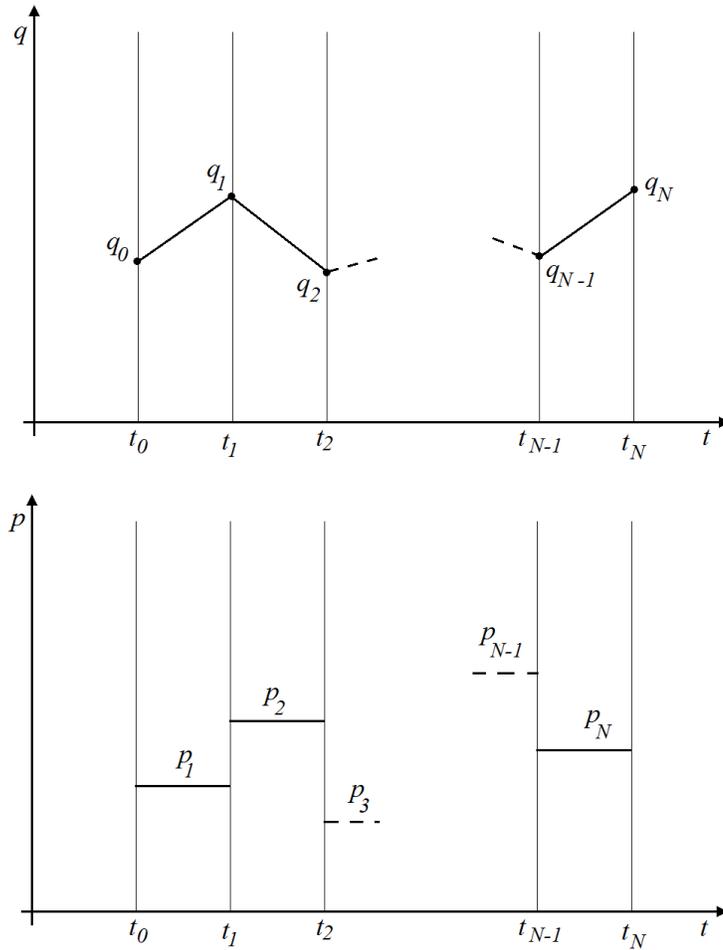


Figura 2.3: Discretización en q y discretización en p .

En la integral de camino en el espacio fase se hace uso de una discretización similar al espacio configuración pero empleando en el espacio momento [6]. Como se observa en la figura 2.3, las discretización tiene la diferencia fundamental en que los momentos permanecen constantes en cada intervalo mientras en el espacio posición son funciones lineales varían.

2.9 EL PROPAGADOR EN EL ESPACIO FASE

Considérese una partícula moviéndose en una dimensión, con el hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.30)$$

En la formulación de Schrödinger se puede escribir una formulación como la siguiente:

$$K(q_b, T | q_a, 0) = \langle q_b | e^{-iHT/\hbar} | q_a \rangle \quad (2.31)$$

Para indicar la amplitud de probabilidad de encontrar una partícula que inicialmente estaba en la posición q_a en el tiempo $t_a = 0$ en la posición q_b en el tiempo $t_b = T$. La expresión anterior equivale al propagador $K(q_b, T | q_a, 0)$ desde el punto inicial $(q_a, 0)$ hasta el punto final (q_b, T) . Ahora vamos a derivar una expresión para representar la amplitud en forma de suma sobre todos los posibles caminos entre el punto inicial y el punto final [7], [8].

Se separa la evolución temporal de la anterior amplitud en dos pequeñas evoluciones temporales, escribiendo $e^{-iTH/\hbar} = e^{-iH(T-t_1)/\hbar} e^{-iHt_1/\hbar}$. Reemplazando la expresión anterior de amplitud por

$$K(q_b, T | q_a, 0) = \langle q_b | e^{-iH(T-t_1)/\hbar} e^{-iHt_1/\hbar} | q_a \rangle \quad (2.32)$$

Insertando el factor

$$\int dq |q\rangle \langle q| = 1 \quad (2.33)$$

Se obtiene la amplitud

$$\begin{aligned} K(q_b, T | q_a, 0) &= \langle q_b | e^{-iH(T-t_1)/\hbar} \int dq |q\rangle \langle q| e^{-iHt_1/\hbar} | q_a \rangle \\ &= \int dq_1 K(q_b, T | q_1, t_1) K(q_1, t_1 | q_a, 0) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Esta fórmula es la regla de la mecánica cuántica para combinar amplitudes, si un proceso puede ocurrir en un número de formas, la amplitud para cada una de estas formas se adicionan. Una partícula que se propaga de q_a a q_b , debe estar en algún lugar en el tiempo intermedio t_1 , en la posición q_1 , calculamos la amplitud para e propagador a través de q_1 integramos sobre todas las posibles posiciones intermedias.

Repetimos la división del intervalo de tiempo T , en un gran número de intervalos de tiempo N de duración $\epsilon = T/N$, como se aprecia en la figura 2.4.

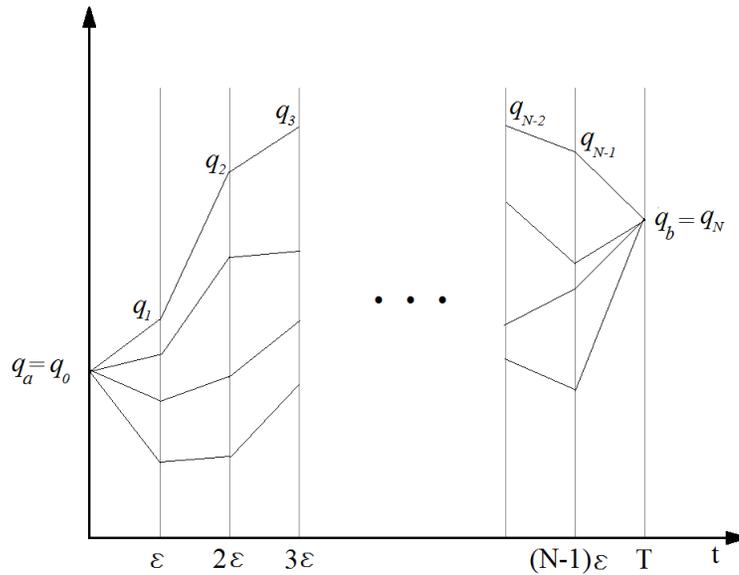


Figura 2.4: Amplitud como suma sobre cada uno de los caminos

Entonces podemos escribir el propagador como

$$K(q_b, T | q_a, 0) = \left\langle q_b \left| \left(e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} \right)^N \right| q_a \right\rangle = \left\langle q_b \left| e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} \dots e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} \right| q_a \right\rangle \quad (2.35)$$

Podemos insertar un conjunto completo de estados en medio de cada exponencial produciendo

$$K(q_b, T | q_a, 0) = \langle q_b | e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} \int dq_{N-1} |q_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}| e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} \int dq_{N-2} |q_{N-2}\rangle \langle q_{N-2}| \dots$$

$$\begin{aligned}
& \cdots \int dq_2 |q_2\rangle \langle q_2| e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} \int dq_1 |q_1\rangle \langle q_1| e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} |q_a\rangle \\
K(q_b, T | q_a, 0) &= \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q_b | e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} |q_{N-1}\rangle \cdots \langle q_1 | e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} |q_a\rangle \\
&= \int dq_1 \cdots dq_{N-1} K_{q_N, q_{N-1}} K_{q_{N-1}, q_{N-2}} \cdots K_{q_1, q_0}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Donde se ha definido $q_0 = q_a$, $q_N = q_b$. La expresión anterior nos dice que la amplitud es la integral de las amplitudes de cada uno de los N segmentos en los que ha sido dividido cada camino. Escrito más concretamente

$$K = \sum_{\text{Caminos}} K_{\text{camino}} \tag{2.37}$$

Donde

$$\sum_{\text{caminos}} = \int dq_1 \cdots dq_{N-1}$$

$$K_{\text{camino}} = K_{q_N, q_{N-1}} K_{q_{N-1}, q_{N-2}} \cdots K_{q_2, q_1} K_{q_1, q_0}$$

El propagador para un intervalo es $K_{q_{j+1}, q_j} = \langle q_{j+1} | e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} |q_j\rangle$ dado que ϵ es muy pequeño la exponencial se puede expandir

$$\begin{aligned}
K_{q_{j+1}, q_j} &= \langle q_{j+1} | \left(1 - \frac{i}{\hbar} H\epsilon - \frac{1}{2} \frac{H^2 \epsilon^2}{\hbar^2} + \cdots \right) |q_j\rangle \\
&= \langle q_{j+1} | q_j\rangle - \langle q_{j+1} | H | q_j\rangle + o(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

El primer término corresponde a la función delta que podemos escribir

$$\langle q_{j+1} | q_j\rangle = \delta(q_{j+1} - q_j) = \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} \tag{2.39}$$

En el segundo término de (2.38) se inserta el factor 1 en la forma de una integral sobre los eigenestados del momento en medio de H y $\langle q_j \rangle$, obteniendo

$$\begin{aligned}
K_{q_{j+1}, q_j} &= -\frac{i}{\hbar} \epsilon \langle q_{j+1} | \left(\frac{\hat{p}^2}{2\pi} + V(\hat{q}) \right) \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} |p_j\rangle \langle p_j| q_j \rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar} \epsilon \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \left(\frac{p_j^2}{2m} + V(q_{j+1}) \right) \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar} \epsilon \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \left(\frac{p_j^2}{2m} + V(q_{j+1}) \right) e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Usando $\langle q|p\rangle = \exp(ipq)$ en la primera línea, el operador \hat{p} opera a la derecha, mientras que $V(\hat{q})$ opera a la izquierda.

La expresión (2.40) es asimétrica en medio de q_j y q_{j+1} ; el origen de esta asimetría es la elección de poner el factor 1 en medio de H en el segundo término de (2.38). Si en cambio lo hubiéramos puesto a la izquierda, podríamos haber obtenido $V(q_j)$ en (2.40). Se puede seleccionar el promedio entre los dos que se escribe como $V(\bar{q}_j)$ donde $\bar{q}_j = \frac{1}{2}(q_j + q_{j+1})$. Combinando (2.38) y (2.39), el intervalo del propagador es

$$\begin{aligned}
K_{q_{j+1}, q_j} &= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon \left(\frac{p_j^2}{2m} + V(\bar{q}_j) \right) + o(\epsilon^2) \right) \\
&= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon H(p_j, \bar{q}_j)} (1 + o(\epsilon^2))
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Hay N de tales factores en la amplitud. Combinándolos y escribiendo $\dot{q} = (q_{j+1} - q_j)/\epsilon$, obtenemos

$$K_{camino} = \int \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} (p_j \dot{q}_j - H(p_j, \bar{q}_j)) \right] \tag{2.42}$$

Donde se ha descartado un factor de la forma $(1 + o(\epsilon^2))^N$, que tiende hacia 1 cuando N tiende a infinito. Entonces el propagador llega a ser

$$K = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \int \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} (p_j \dot{q}_j - H(p_j, \bar{q}_j)) \right] \quad (2.43)$$

Se debe tener en cuenta que hay una integral de momento para cada intervalo, N en total, mientras que hay una integral de posición para cada una de las posiciones intermedias, $N - 1$ en total.

Si $N \rightarrow \infty$, esto se aproxima a una integral sobre las funciones $p(t)$, $q(t)$. Donde usualmente se escribe con la siguiente notación:

$$K \equiv \int \mathcal{D}p(t) \mathcal{D}q(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt (p\dot{q} - H(p, q)) \right] \quad (2.44)$$

Este resultado es conocido como la integral de caminos en el espacio fase. Se integra sobre todas las funciones $p(t)$ y $q(t)$ donde $q(0) = q_a$, $q(T) = q_b$.

Si, como es frecuente el caso, el hamiltoniano es de la forma estándar, es decir, $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, se pueden calcular las integrales sobre las funciones de momento en (2.43). Donde se escribe esta expresión como

$$K = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=0}^{N-1} V(\bar{q}_j) \int \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left(p_j \dot{q}_j - \frac{p_j^2}{2m} \right) \right] \right] \quad (2.45)$$

Las integrales de momento son todas gaussianas, cuya solución está dada por

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon (p\dot{q} - \frac{p^2}{2m})} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon m \dot{q}^2 / 2} \quad (2.46)$$

El propagador toma la forma

$$\begin{aligned}
K &= \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=0}^{N-1} V(\bar{q}_j) \right] \prod_{j=0}^{N-1} \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \epsilon m \frac{\dot{q}^2}{2} \right) \right) \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{m \dot{q}_j^2}{2} - V(\bar{q}_j) \right)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

En el argumento de la exponencial es una aproximación discreta de la acción de un camino que pasa a través de los puntos $q_0 = q_a, \dots, q_{N-1} = q_b$, esto se puede escribir en forma más abreviada como

$$K = \int \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]} \tag{2.48}$$

Esta integral es conocida como la integral de caminos en el espacio configuración. Nuevamente, podría ser vista como una notación para la más precisa expresión (2.46), cuando $N \rightarrow \infty$.

2.10 PARTÍCULA LIBRE

Para la descripción del movimiento de una partícula libre, empleamos el hamiltoniano $H = p^2/2m$, y entonces calcular el propagador $K = (q_b, T; q_a, 0)$ usando la mecánica cuántica tradicional.

$$\begin{aligned}
K(q_b, T | q_a, 0) &= \langle q_b | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | q_a \rangle \\
&= \langle q_b | e^{-iT\hat{p}^2/2m\hbar} \int \frac{dp}{2\pi} | p \rangle \langle p | q_a \rangle \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iTp^2/2m\hbar} \langle q_b | p \rangle \langle p | q_a \rangle \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{iTp^2}{2m\hbar} + \frac{i}{\hbar}(q_b - q_a)p}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Haciendo la integral gaussiana se obtiene

$$K(q_b, T|q_a, 0) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{im(q_b - q_a)^2/2T\hbar} \quad (2.50)$$

2.11 EL OSCILADOR ARMÓNICO

Sea el propagador

$$K(q_b, T|q_a, 0) = \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q(t)]} \quad (2.51)$$

Para el oscilador armónico,

$$S[q(t)] = \int_0^T dt \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right) \quad (2.52)$$

Los caminos sobre los cuales la integral va a ser calculada van de $q(0) = q_a$ hasta $q(T) = q_b$. Suponga que se conoce la solución al problema clásico $q_c(t)$, [7]

$$\ddot{q}_c + \omega^2 q_c = 0, \quad q_c(0) = q_a, \quad q_c(T) = q_b$$

Escribiendo $q(t) = q_c(t) + y(t)$, y realizar un cambio de variables en la integral de caminos a $y(t)$ dado que la integración sobre todas las desviaciones del camino clásico es equivalente a la integración sobre todos los posibles caminos. Ya que en cada tiempo, q y y difieren por una constante, el jacobiano de la transformación es 1. Además dado que q_c cumple con las condiciones de frontera, los caminos $y(t)$ sobre los que se integra van de $y(0) = 0$ hasta $y(T) = 0$. La acción para el camino $q_c(t) + y(t)$ puede ser escrita como serie de potencias en y [7]

$$\begin{aligned} S[q_c(t) + y(t)] &= \int_0^T dt \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_c^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q_c^2 + (\text{lineares en } y) \right) \\ &+ \int_0^T dt \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 y^2 \right) \end{aligned}$$

Los términos lineales en y desaparecen por construcción: q_c , siendo este el camino clásico, es el camino para el que la acción es estacionaria. Se puede escribir $S[q_c(t) + y(t)] = S[q_c(t)] + s[y(t)]$. Al sustituir estos términos en (2.48) se obtiene

$$K(q_b, T | q_a, 0) = e^{iS[y(t)]} \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q_c(t)]} \quad (2.53)$$

Los caminos $y(t)$ sobre los que se realizó la integral van de $y(0) = 0$ hasta $y(T) = 0$, la posición inicial y final aparecen como en la acción clásica. Una vez más, las integrales de camino son separadas en dos factores. El primero es escrito en términos de la acción del camino clásico y el segundo es una integral de caminos sobre las variaciones del camino clásico. El segundo factor es independiente de los puntos inicial y final.

El primer factor es el que contiene la mayor información útil. Para la evaluación de (2.25), hay varias técnicas disponibles. Se puede calcular esto en el espacio de Fourier (escribiendo $y(t) = \sum_k a_k \text{sen}(k\pi t/T)$) e integrando sobre los coeficientes $\{a_k\}$, para ver el desarrollo del procedimiento se puede ver Feynman y Hibbs [1], capítulo 3. El resultado es:

$$K(q_b, T | q_a, 0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \text{sen } \omega T} \right)^{1/2} e^{iS[q_c(t)]} \quad (2.54)$$

La acción clásica puede ser evaluada directamente, el resultado es

$$S[q_c(t)] = \frac{m\omega}{2 \text{sen } \omega T} ((q_b^2 + q_a^2) \cos \omega T - 2q_a q_b) \quad (2.55)$$

Haciendo algunos cambios en la notación y reacomodando los factores se expresa en una forma más útil para el desarrollo posterior del propagador de una partícula en un campo magnético, primero en forma unidimensional. Haciendo $q_b = x_b$ y $q_a = x_a$ y expresando T como la diferencia $t_b - t_a$ obtenemos la expresión equivalente [7], [9]

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b | x_a, t_a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar / m}} \sqrt{\frac{\omega}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)}} \\
&\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_b x_a] \right\} \quad (2.56)
\end{aligned}$$

El resultado puede fácilmente extenderse a cualquier número d de dimensiones, donde la acción es

$$S[\mathbf{x}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{x}}^2 - \omega^2 \mathbf{x}^2) \quad (2.57)$$

Siendo cuadrática en \mathbf{x} , la acción es la suma de las acciones para cada componente llevando la amplitud factorizada

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) &= \frac{1}{(2\pi i \hbar / m)^{d/2}} \left(\frac{\omega}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} \right)^{d/2} \\
&\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} [(\mathbf{x}_b^2 + \mathbf{x}_a^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a] \right\} \quad (2.58)
\end{aligned}$$

3. PROPAGADOR DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE EN TÉRMINOS DEL ESPACIO FASE

3.1 HAMILTONIANO DE UNA PARTICULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

La formulación hamiltoniana de la dinámica de un sistema físico puede ser vista como una derivación de la formulación de Lagrange,

$$L(\dot{q}, q, t) \rightarrow H(q, p, t) \quad (3.1)$$

Donde la transformación es combinada con un cambio en las variables fundamentales, del conjunto de coordenadas generalizadas y velocidades (q, \dot{q}) , al conjunto de coordenadas y momentos conjugados (q, p) . Este tipo de transformación es referido como la transformación de Legendre. La razón para combinar el cambio de las variables fundamentales con el cambio de la función dinámica es que las ecuaciones del movimiento son expresadas a través de derivadas parciales de esta función con respecto a las variables fundamentales [5]. Según la definición de hamiltoniano

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.2)$$

Se puede invertir la relación entre el momento conjugado y la velocidad en la expresión para p_i , para dar la velocidad como una función del momento y las coordenadas.

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q, t) \quad (3.3)$$

El lagrangiano para una partícula cargada en un campo electromagnético es dado por $L = \frac{mv^2}{2} - e\phi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ con ϕ y \mathbf{A} como los potenciales electromagnéticos, m como la masa y e como la carga de la partícula. El correspondiente momento canónico es, haciendo $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{A} \quad (3.4)$$

Y el respectivo hamiltoniano [5]

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi \quad (3.5)$$

3.2 PROPAGADOR DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO MAGNÉTICO EN TÉRMINOS DEL ESPACIO FASE DE LA INTEGRAL DE CAMINO

Para evaluar la integral de caminos de una partícula de carga e en un campo magnético constante se parte de su comportamiento como un sistema armónico y por lo tanto se emplea en su solución la integral de camino para un oscilador armónico [9], [11]. Un segundo aspecto a tener en cuenta en el desarrollo de la integral de camino es definir la acción mediante el hamiltoniano, en función de los momentos y las posiciones, en el denominado espacio fase [7], es decir:

$$K \equiv \int \mathcal{D}p(t) \mathcal{D}q(t) \exp i \int_{t_a}^{t_b} dt (p\dot{q} - H(p, q))$$

El campo magnético \mathbf{B} se expresa como el rotacional de una función vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, denominada el vector potencial, que puede ser elegido de acuerdo a las condiciones del problema, sin embargo se emplea la función $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (0, Bx, 0)$ que resulta ser la más apropiada [12], con el campo apuntando en dirección del eje z . En la evaluación de la integral se hace uso de las integrales gaussianas que permiten determinar fácilmente algunos de los factores que forman parte del propagador. Igualmente la transformada de Fourier de la función δ de Dirac es de gran utilidad para simplificar parte de los cálculos.

La integral de camino de la partícula en un campo magnético en el espacio fase está enmarcada en la mecánica cuántica no relativista, es decir, no tiene en cuenta los efectos relativistas producidos sobre partícula que se desplaza con velocidad cercana a la de la luz. El desarrollo del propagador está basado en el

libro *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* de Hagen Kleinert [13], donde se puede encontrar amplia información sobre el tema.

3.2.1 Cálculo del propagador con el vector potencial A'

Sea una base coordenada tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$, apunte en la dirección del eje z , tal campo puede ser descrito por el vector potencial,

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

con componentes

$$A'_x = -\frac{1}{2}By, \quad A'_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A'_z = 0 \quad (3.6)$$

En general, la acción en el espacio fase expresada como [5]

$$s[\mathbf{p}, \mathbf{x}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{e}}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

y el propagador está dado por

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\mathbf{x}(\tau) \frac{\mathcal{D}\mathbf{p}(\tau)}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar} S} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j dy_j dz_j \prod_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde S es la acción discreta de tiempo

$$\begin{aligned}
S = \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_j(x_j - x_{j-1}) \right. \\
\left. - \frac{\epsilon}{2m} \left[p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2 - \frac{2e}{c} (p_{xj}A_{xj} + p_{yj}A_{yj} + p_{zj}A_{zj}) \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{e^2}{c^2} (A_{xj}^2 + A_{yj}^2 + A_{zj}^2) \right] \right\} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

aquí se ha hecho $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ y se han reemplazado los componentes del vector potencial \mathbf{A}' en la acción por las relaciones establecidas en (3.6)

$$\begin{aligned}
S = \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_j(x_j - x_{j-1}) \right. \\
\left. - \frac{\epsilon}{2m} \left[p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2 - \frac{2e}{c} \left(p_{xj} \left(-\frac{1}{2} B y_j \right) + p_{yj} \left(\frac{1}{2} B x_j \right) \right) \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{e^2}{c^2} \left(\left(-\frac{1}{2} B y_j \right)_{xj}^2 + \left(\frac{1}{2} B x_j \right)_{yj}^2 \right) \right] \right\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Realizando una ordenación de la acción por componentes

$$\begin{aligned}
S = \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_{xj}(x_j - x_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{xj}^2 - \frac{\epsilon e^2}{8mc^2} B^2 x_j^2 + p_{yj}(y_j - y_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{yj}^2 \right. \\
\left. - \frac{\epsilon e^2}{8mc^2} B^2 y_j^2 + p_{zj}(z_j - z_{j-1}) + p_{zj}^2 + \epsilon \frac{eB}{2mc} p_{yj} x_j \right. \\
\left. - \epsilon \frac{eB}{2mc} p_{xj} y_j \right\}, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

haciendo $\Omega = \frac{eB}{2mc}$ y reemplazando en la ecuación (3.11), se obtiene

$$S = \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_{xj}(x_j - x_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{xj}^2 - \epsilon \frac{m\Omega^2}{2} x_j^2 + p_{yj}(y_j - y_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{yj}^2 - \epsilon \frac{m\Omega^2}{2} y_j^2 + p_{zj}(z_j - z_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{zj}^2 + \epsilon \Omega (p_{yj}x_j - p_{xj}y_j) \right\} \quad (3.12)$$

Para simplificar se hace la integración en z_j reordenando los términos de la sumatoria

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N+1} p_{zj}(z_j - z_{j-1}) &= p_{z(N+1)}z_{N+1} - p_{z1}z_0 - (p_{z(N+1)} - p_{zN})z_N - \dots \\ &\quad - (p_{z2} - p_{z1})z_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

La reordenación de los términos permite integrar empleando la representación de Fourier para las funciones δ de Dirac, es decir, para el caso de la variable z :

$$\begin{aligned} \delta(p_b - p_a) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i(p_b - p_a)z} \\ &= (2\pi\hbar)^N [\delta(p_{z(N+1)} - p_{zN}) \dots \delta(p_{z2} - p_{z1})] \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $p_z \equiv p_{z(N+1)}$, por lo tanto se obtiene el propagador:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j dy_j \prod_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_{xk} dp_{yk}}{(2\pi\hbar)^2} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p_z(z_b - z_a) - (t_b - t_a) \frac{p_z^2}{2m} \right] \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_R \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

La acción se ha simplificado y S_R se denomina la acción reducida

$$S_R = \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_{xj}(x_j - x_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{xj}^2 - \epsilon \frac{m\Omega^2}{2} x_j^2 + p_{yj}(y_j - y_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{yj}^2 - \epsilon \frac{m\Omega^2}{2} y_j^2 + \epsilon \Omega (p_{yj}x_j - p_{xj}y_j) \right\} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) representa la acción para un oscilador bidimensional con frecuencia Ω , y los dos últimos términos de la exponencial son los componentes z del momento orbital angular. Sin embargo, la trayectoria de la partícula en un campo magnético empleando la acción clásica es circular (para el caso xy) y para describir tal movimiento solo se requiere básicamente de un oscilador armónico unidimensional. Es necesario replantear el procedimiento utilizado y buscar una alternativa en la transformación gauge que simplifique el procedimiento para emplear un oscilador unidimensional. Para hacer esto, se descompone el vector potencial empleando la siguiente transformación [9]:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}(x) + \nabla\alpha(x) \quad (3.17)$$

Con el operador ∇ actuado sobre la función $\alpha(x) = -(1/2)Bxy$ se obtiene

$$\nabla\alpha(x) = -\frac{1}{2}By - \frac{1}{2}Bx$$

donde $\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla\alpha(x)$, \mathbf{A}' con componentes definidos en (3.6), entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{2}By + \frac{1}{2}Bx + \frac{1}{2}By + \frac{1}{2}Bx \\ &= Bx \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bx es la componente A_y del vector potencial, teniendo en cuenta los componentes de \mathbf{A}' y de $\nabla\alpha(x)$. En este caso el vector $\mathbf{A}(x)$ tiene componentes [12], [13]:

$$A_x = 0 \quad A_y = Bx \quad A_z = 0 \quad (3.19)$$

que permite describir el campo magnético como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Este vector satisface la condición gauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ empleada para campos estáticos.

3.2.2 Cálculo del propagador con el vector potencial $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (0, Bx, 0)$

El propagador

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\mathbf{x}(\tau) \frac{\mathcal{D}\mathbf{p}(\tau)}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar}S} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j dy_j dz_j \prod_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

utiliza la acción S dada en (3.7) y reemplazándola por la acción discreta de tiempo.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_j(x_j - x_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\epsilon}{2m} \left[p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2 - \frac{2e}{c} (p_{xj}A_{xj} + p_{yj}A_{yj} + p_{zj}A_{zj}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e^2}{c^2} (A_{xj}^2 + A_{yj}^2 + A_{zj}^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

utilizando los componentes del vector potencial dados en (3.19), se obtiene la acción

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_{xj}(x_j - x_{j-1}) + p_{yj}(y_j - y_{j-1}) + p_{zj}(z_j - z_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\epsilon}{2m} \left[p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2 - \frac{2e}{c} p_{yj}Bx_j + \frac{e^2}{c^2} B^2 x_j^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nuevamente se emplea un procedimiento similar al empleado en (3.13) para efectuar la integración sobre las variables y_j, z_j . De la ecuación (3.22) se toman

los términos que las contienen, transformando la sumatoria de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N+1} p_{y_j}(y_j - y_{j-1}) + p_{z_j}(z_j - z_{j-1}) \\
&= p_{y_{(N+1)}}(y_{N+1} - y_N) + p_{z_{(N+1)}}(z_{N+1} - z_N) + p_{y_N}(y - y_{N-1})p_{z_N}(z_N \\
&- z_{N-1}) + \dots + p_{y_2}(y_2 - y_1) + p_{z_2}(z_2 - z_1) + p_{y_1}(y_1 - z_0) \\
&+ p_{z_1}(z_1 - z_0) \\
&= p_{y_{(N+1)}}y_{N+1} + p_{z_{(N+1)}}z_{N+1} - p_{y_1}y_0 - p_{z_1}z_0 - (p_{y_{(N+1)}} - p_{y_N})y_N \\
&- (p_{z_{(N+1)}} - p_{z_N})z_N - \dots - (p_{y_2} - p_{y_1})y_1 - (p_{z_2} - p_{z_1})z_1
\end{aligned}$$

Utilizando la transformada de Fourier para las funciones δ de Dirac (3.14) para analizar esta relación. Se puede observar entonces, que para no obtener una solución trivial, las integrales de los N momentos p_n ($n = 1, \dots, N$) se evaluarán con la condición $p_N = p_{N-1} = \dots = p_1$, por lo tanto la integración sobre las variables y_j , z_j produce las funciones δ de Dirac:

$$(2\pi\hbar)^{2N} [\delta(p_{y_{(N+1)}} - p_{y_N})\delta(p_{z_{(N+1)}} - p_{z_N}) \dots \delta(p_{y_2} - p_{y_1})\delta(p_{z_2} - p_{z_1})]$$

En consecuencia, la amplitud de transición puede ser representada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y dp_z}{2\pi\hbar} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \prod_{k=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_{xk}}{(2\pi\hbar)^2} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p_y(y_b \right. \right. \\
&\left. \left. - y_a) + p_z(z_b - z_a) - (t_b - t_a) \frac{p_z^2}{2m} \right] \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_R \right\} \quad (3.23)
\end{aligned}$$

en donde se ha obtenido la acción para un oscilador armónico unidimensional con frecuencia $\omega = \frac{eB}{mc}$, (la frecuencia de ciclotrón),

$$S_R = \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ p_{xj}(x_j - x_{j-1}) - \frac{\epsilon}{2m} p_{xj}^2 - \frac{\epsilon}{2m} \left(p_y - \frac{eB}{c} x_j \right)^2 \right\} \quad (3.24)$$

Que se puede comparar con la acción para un oscilador armónico unidimensional

$$S[p, x] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[p\dot{x} - \frac{1}{2m} p^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right]$$

Integrando entonces la expresión (3.23), se obtiene

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b | x_a, t_a) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin \omega(t_b - t_a)}} \\ &\times \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b - t_a)} \left\{ [(x_b - x_0)^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + (x_a - x_0)^2] \cos \omega(t_b - t_a) - 2(x_b - x_0)(x_a - x_0) \right\}\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aquí se aplica la solución para el oscilador armónico cuyo centro de oscilación depende de p_y y está localizado en

$$x_0 = \frac{p_y}{m\omega} \quad (3.26)$$

Donde el radio $r = \frac{p}{qB}$ es el radio de Larmor, es el radio del movimiento circular de una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme

Al evaluar la integral gaussiana de p_z en (3.23)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \times \exp \frac{i}{\hbar} \left[p_z(z_b - z_a) - (t_b - t_a) \frac{p_z^2}{2m} \right]$$

Se obtiene la expresión

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \times \exp \left[\frac{im(z_b - z_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \right] \quad (3.27)$$

También en (3.23) se hace las sustitución de $p_y = m\omega x_0$, transformando la integral en p_y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_y(y_b - y_a)] \right\}$$

por

$$m\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [m\omega x_0(y_b - y_a)] \right\} \quad (3.28)$$

Finalmente solo queda calcular la integral en x_0 , que reúne las expresiones (3.25) y (3.28), donde se obtiene la exponencial

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{im\omega}{\hbar} x_0(y_b - y_a) \right. \\ \left. + \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2\text{sen } \omega(t_b - t_a)} \{ [(x_b - x_0)^2 + (x_a - x_0)^2] \cos \omega(t_b - t_a) \right. \\ \left. - 2(x_b - x_0)(x_a - x_0) \} \right\} \quad (3.29) \end{aligned}$$

Para facilitar los cálculos se escribe e^E donde E es el exponente en (3.29). Efectuando los productos en el exponente se obtiene

$$\begin{aligned} E = \frac{im\omega}{\hbar} \left\{ x_0(y_b - y_a) + (x_b^2 + x_a^2) \frac{\cos \omega(t_b - t_a)}{2\text{sen } \omega(t_b - t_a)} - (x_0x_b + x_0x_a) \frac{\cos \omega(t_b - t_a)}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} \right. \\ \left. + x_0^2 \frac{\cos \omega(t_b - t_a)}{2\text{sen } \omega(t_b - t_a)} - \frac{x_bx_a}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} + \frac{x_bx_0}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} \right. \\ \left. + \frac{x_ax_0}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} - \frac{x_0^2}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} - \frac{(x_b^2 + x_a^2)}{2\text{sen } \omega(t_b - t_a)} \right. \\ \left. + \frac{(x_b^2 + x_a^2)}{2\text{sen } \omega(t_b - t_a)} \right\} \end{aligned}$$

Se completan cuadrados para eliminar las expresiones que contienen seno y coseno y expresar toda la suma en términos de la tangente del ángulo medio, para obtener el propagador que coincida con la expresión de la acción clásica.

$$E = \frac{im\omega}{\hbar} \left\{ x_0(y_b - y_a) - \frac{1}{2}(x_b^2 + x_a^2) \left(\frac{1}{\sin \omega(t_b - t_a)} - \frac{\cos \omega(t_b - t_a)}{\sin \omega(t_b - t_a)} \right) \right. \\ \left. - x_0^2 \left(\frac{1}{\sin \omega(t_b - t_a)} - \frac{\cos \omega(t_b - t_a)}{\sin \omega(t_b - t_a)} \right) \right. \\ \left. + x_0(x_b + x_a) \left(\frac{1}{\sin \omega(t_b - t_a)} - \frac{\cos \omega(t_b - t_a)}{\sin \omega(t_b - t_a)} \right) + \frac{(x_b^2 - 2x_b x_a + x_a^2)}{2\sin \omega(t_b - t_a)} \right\}$$

Ahora se emplea la identidad trigonométrica

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Para obtener

$$E = \frac{im\omega}{\hbar} \left\{ -\frac{1}{2}(x_b^2 + x_a^2) \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2} + \frac{(x_b - x_a)^2}{2\sin \omega(t_b - t_a)} + x_0^2 \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2} \right. \\ \left. + x_0(x_b + x_a) \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2} + x_0(y_b - y_a) \right\}$$

completando cuadrados en la expresión anterior

$$E = \frac{i m \omega}{\hbar} \left\{ -\frac{1}{2} (x_b^2 + x_a^2) \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2} + \frac{(x_b - x_a)^2}{2 \operatorname{sen} \omega(t_b - t_a)} + x_0^2 \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2} \right. \\ \left. + x_0(x_b + x_a) \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2} + x_0(y_b - y_a) + \frac{(x_b + x_a)^2}{4 \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2}} \right. \\ \left. - \frac{(x_b + x_a)^2}{4 \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2}} + \frac{(y_b - y_a)^2}{4 \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2}} + \frac{(y_b - y_a)^2}{4 \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (x_b + x_a)(y_b - y_a) - \frac{1}{2} (x_b + x_a)(y_b - y_a) \right\}$$

Reagrupando los términos

$$E = \frac{i m \omega}{2 \hbar} \left\{ -(x_b^2 + x_a^2) \tan[\omega(t_b - t_a)/2] + \frac{(x_b - x_a)^2}{\operatorname{sen} \omega(t_b - t_a)} \right\} \\ - \frac{i m \omega}{\hbar} \tan[\omega(t_b - t_a)/2] \left(x_0 - \frac{x_b + x_a}{2} - \frac{y_b - y_a}{2 \tan[\omega(t_b - t_a)/2]} \right)^2 \\ + \frac{i m \omega}{2 \hbar} \left[\frac{(x_b + x_a)^2}{2} \tan[\omega(t_b - t_a)/2] + \frac{(y_b - y_a)^2}{2 \tan[\omega(t_b - t_a)/2]} \right. \\ \left. + \frac{i m \omega}{2 \hbar} (x_b + x_a)(y_b - y_a) \right]$$

En la anterior expresión para el exponente E se observa que solo hay un término que contiene x_0 , que desarrollado produce el exponente de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \exp \left\{ -\frac{i m \omega}{\hbar} \tan \frac{\omega(t_b - t_a)}{2} \left[x_0^2 - x_0 \left(\frac{x_b + x_a}{2} + \frac{y_b - y_a}{2 \tan \left[\frac{\omega(t_b - t_a)}{2} \right]} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(x_b + x_a)(y_b - y_a)}{2 \tan \left[\frac{\omega(t_b - t_a)}{2} \right]} + \frac{(x_b + x_a)^2}{4} + \frac{(y_b - y_a)^2}{4 \tan^2[\omega(t_b - t_a)/2]} \right] \right\}$$

esta integral es gaussiana produce el factor:

$$\frac{m\omega}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{im\omega \tan[\omega(t_b - t_a)/2]}} \quad (3.30)$$

Ahora el exponente se reduce a

$$E = \frac{im\omega}{2\hbar} \left\{ -(x_b^2 + x_a^2) \tan[\omega(t_b - t_a)/2] + \frac{(x_b - x_a)^2}{\text{sen } \omega(t_b - t_a)} \right\} \\ + \frac{im\omega}{2\hbar} \left[\frac{(x_b + x_a)^2}{2} \tan[\omega(t_b - t_a)/2] + \frac{(y_b - y_a)^2}{2 \tan[\omega(t_b - t_a)/2]} \right. \\ \left. + \frac{im\omega}{2\hbar} (x_b + x_a)(y_b - y_a) \right] \quad (3.31)$$

Reuniendo los factores (3.27), (3.30) y la exponencial (3.31) se encuentra la siguiente expresión para el propagador

$$K(\mathbf{x}_b, t_b | \mathbf{x}_a, t_a) \\ = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega(t_b - t_a)/2}{\text{sen}[\omega(t_b - t_a)/2]} \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left[\frac{im(z_b - z_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega}{2} \cot[\omega(t_b - t_a)/2] [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2] + \omega(x_a y_b - x_b y_a) \right. \right. \\ \left. \left. + \omega(x_b y_b - x_a y_a) \right] \right\}$$

El último término que aparece en la exponencial no aparece si se emplea el vector potencial $\mathbf{A}' = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}$, y es denominado término de superficie [13] $\omega(x_b y_b - x_a y_a)$. La misma situación se puede observar en el caso de la acción para la integral de caminos dada en el espacio de configuraciones cuando la acción se expresa en términos del lagrangiano [1],

$$L = \frac{m}{2} \left[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x}) \right]$$

4. CONCLUSIONES

La técnica de las integrales de camino en el espacio fase permitió la obtención de un resultado más preciso que el resultado clásico (Apéndice B), con un componente de superficie, mostrando que existe una fuerte relación entre el hamiltoniano y la varianza gauge empleada para describir el campo magnético. La integral de camino para un oscilador armónico resulta matemáticamente más sencilla en su solución que con métodos de la mecánica clásica [1]. Es importante recalcar, que a su vez la comprensión del comportamiento del oscilador armónico contribuye a problemas más complejos como el caso de una partícula cargada en un campo magnético. La parte con mayor dificultad reside en conciliar el resultado obtenido con el resultado clásico donde el trabajo algebraico y trigonométrico puede ser bastante tedioso. Pero en general la expresión para el propagador está también sustentada por integrales gaussianas que facilitan el resultado.

Se ha demostrado además en el presente trabajo que al abordar el problema para la partícula en un espacio tridimensional, su solución se reduce prácticamente a la solución de un problema unidimensional, según se vio en (3.16). El rol del vector potencial en este proceso es crucial ya que a partir de él resultado se simplifica a una sola dimensión, como se muestra a través de la transformación (3.17).

APENDICES

APENDICE A

LAGRANGIANO DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

Para derivar el lagrangiano de una partícula en un campo magnético constante se parte de la ecuación de fuerza de Lorentz [10]

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{A.1})$$

Hay que tener en cuenta alguna de las consecuencias de las leyes de Maxwell tales como: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que implica la ausencia de cargas magnéticas puntuales o monopolos magnéticos.

También la ley de Faraday en forma diferencial

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que \mathbf{B} puede ser expresado como rotacional de otro campo, entonces se puede escribir $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, donde \mathbf{A} es el vector potencial del campo magnético. Se aplica lo anterior a la ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

Tomando la parte izquierda y derecha de la ecuación se puede escribir

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{A.4})$$

para indicar que el campo es conservativo y por lo tanto se puede escribir como el gradiente de una función escalar.

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

Un potencial escalar ϕ más un potencial vectorial \mathbf{A} .

$$\mathbf{F} = e \left[-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (\text{A.7})$$

Empleando la ecuación (A.1) donde se han modificado \mathbf{E} y \mathbf{B} . Se tiene que demostrar que la fuerza (A.7) admite un potencial generalizado,

DEFINICIÓN A.1: Sea Q_k la k -ésima fuerza generalizada a partir del potencial generalizado U [10]

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (\text{A.8})$$

En el caso de las tres dimensiones cartesianas se tiene $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$.

La fuerza en (A.7) debe ser puesta en la forma de las fuerzas generalizadas (A.8), donde se debe introducir una derivada total en relación al tiempo.

Ahora como $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, se halla la derivada total del potencial \mathbf{A} .

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

Donde

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

En el segundo término de la ecuación (A.9) admite un operador nabra en relación a las velocidades, debido a la presencia del término $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$ en (A.8), que puede ser definido de la siguiente manera

DEFINICIÓN A.2: Operador nabra para las velocidades

$$\nabla_v = \hat{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \quad (\text{A.10})$$

Este operador solo actúa sobre las velocidades. Ahora se reescribe la fuerza

$$\mathbf{F} = e \left[-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (\text{A.11})$$

Teniendo en cuenta que \mathbf{A} se puede escribir como $\mathbf{A} = \nabla_v(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, debido a que \mathbf{A} no es función de las velocidades.

$$\mathbf{F} = e \left[-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \nabla_v(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (\text{A.12})$$

Aplicando la identidad vectorial que permite reescribir la suma de términos de una manera conveniente para llegar a la forma del potencial generalizado.

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (\text{A.13})$$

Haciendo $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{A}$, como ∇ no afecta v , se puede simplificar la expresión, quedando de la siguiente manera

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.14})$$

Con este resultado y teniendo en cuenta la similitud con la parte derecha de la ecuación (A.12), \mathbf{F} puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= e \left[-\nabla\phi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \nabla_v(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] \\
&= e \left[-\nabla \left(\phi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{d}{dt} \nabla_v \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{A.15}$$

Por lo tanto, con

$$U = e\phi - \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \tag{A.16}$$

U es el potencial generalizado resulta

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \frac{d}{dt} (\nabla_v U), \tag{A.17}$$

por lo tanto, el lagrangiano de una partícula cargada en un campo magnético es

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\phi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \tag{A.18}$$

APÉNDICE B

ACCIÓN CLÁSICA PARA UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EN DIRECCIÓN AL EJE z .

El lagrangiano tiene la forma, con el vector potencial $\mathbf{A} = \frac{1}{2}B \times \mathbf{r}$, $\omega = eB/mc$

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= \frac{m}{2}[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \omega(x\dot{y} - y\dot{x})] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

La coordenada z satisface la ecuación del movimiento para una partícula libre. La acción clásica está por tanto dada por

$$S[z] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \dot{z}^2 = \frac{m}{2} \frac{(z_2 - z_1)^2}{t_2 - t_1} \quad (\text{B.2})$$

El movimiento perpendicular al eje z sigue de

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - \frac{m}{2}\omega\dot{y} - \frac{m}{2}\omega\dot{y} = 0; \quad \ddot{x} = \omega\dot{y} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + \frac{m}{2}\omega\dot{x} + \frac{m}{2}\omega\dot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x} \quad (\text{B.4})$$

La ecuación (B.4) es resuelta por $\dot{y} = -\omega x + \omega C$, y sustituyéndola en (B.3) produce

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 C \quad (\text{B.5})$$

Con el usual ansatz,

$$x(t) = A' \text{sen}(\omega t) + B' \text{cos}(\omega t) + C \quad (\text{B.6})$$

que produce

$$\dot{y}(t) = -\omega A' \sin(\omega t) - \omega B' \cos(\omega t) - \omega C + \omega C \quad (\text{B.7})$$

Y por lo tanto

$$y(t) = A' \cos(\omega t) - B' \sin(\omega t) + D \quad (\text{B.8})$$

Usando las condiciones iniciales $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, se obtiene

$$x(t) = A \sin[\omega(t - t_1)] + B \cos[\omega(t - t_1)] + x_1 - B \quad (\text{B.9})$$

$$y(t) = A \cos[\omega(t - t_1)] - B \sin[\omega(t - t_1)] + y_1 - A \quad (\text{B.10})$$

Tomando la derivada en ambas ecuaciones

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos[\omega(t - t_1)] - B\omega \sin[\omega(t - t_1)] \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{y}(t) = -A\omega \sin[\omega(t - t_1)] - B\omega \cos[\omega(t - t_1)] \quad (\text{B.12})$$

Haciendo $t = t_2$ en las ecuaciones (B.9) y B.10) y posteriormente sumando

$$x(t_2) = x_2 = A \sin[\omega(t_2 - t_1)] + B \cos[\omega(t_2 - t_1)] + x_1 - B \quad (\text{B.13})$$

$$y(t_2) = y_2 = A \cos[\omega(t_2 - t_1)] - B \sin[\omega(t_2 - t_1)] + y_1 - A \quad (\text{B.14})$$

Escribiendo $t_2 - t_1 = T$, $\sin \varphi = 2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$, $\cos \varphi - 1 = 2 \sin^2(\varphi/2)$ se obtiene

$$x_2 = 2A \sin \frac{\omega T}{2} \cos \frac{\omega T}{2} - 2B \sin^2 \frac{\omega T}{2} + x_1 \quad (\text{B.15})$$

$$y_2 = -2A \sin^2 \frac{\omega T}{2} - 2B \sin \frac{\omega T}{2} \cos \frac{\omega T}{2} + y_1 \quad (\text{B.16})$$

O también

$$(x_2 - x_1) \sin \frac{\omega T}{2} + (y_2 - y_1) \cos \frac{\omega T}{2} = -2B \sin \frac{\omega T}{2} \quad (\text{B.17})$$

de donde se sigue que

$$B = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}(\omega T/2)} \left[(x_2 - x_1) \operatorname{sen} \frac{\omega T}{2} + (y_2 - y_1) \cos \frac{\omega T}{2} \right] \quad (\text{B.18})$$

además,

$$(x_2 - x_1) \cos \frac{\omega T}{2} - (y_2 - y_1) \operatorname{sen} \frac{\omega T}{2} = 2A \operatorname{sen} \frac{\omega T}{2} \quad (\text{B.19})$$

con

$$A = \frac{1}{2 \operatorname{sen}(\omega T/2)} \left[(x_2 - x_1) \cos \frac{\omega T}{2} - (y_2 - y_1) \operatorname{sen} \frac{\omega T}{2} \right] \quad (\text{B.20})$$

Finalmente se calcula la acción

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) \right] \\ &= \frac{m}{2} [x\dot{x} + y\dot{y}]_1^2 - \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[x \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \omega\dot{y} \right) + y \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \omega\dot{x} \right) \right] \\ &= \frac{m}{2} [(x_2\dot{x}_2 - x_1\dot{x}_1) + (y_2\dot{y}_2 - y_1\dot{y}_1)] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Ahora se expresa $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ en términos de x_1, x_2, y_1, y_2 esto se logra empleando las ecuaciones (A.11), (A.12) y (A.18), (A.19). Para obtener

$$x_2\dot{x}_2 = \frac{\omega}{2 \operatorname{sen}(\omega T/2)} [x_2(x_2 - x_1) \cos(\omega T/2) + x_2(y_2 - y_1) \operatorname{sen}(\omega T/2)]$$

$$x_1\dot{x}_1 = \frac{\omega}{2 \operatorname{sen}(\omega T/2)} [x_1(x_2 - x_1) \cos(\omega T/2) - x_1(y_2 - y_1) \operatorname{sen}(\omega T/2)]$$

$$y_2\dot{y}_2 = \frac{-\omega}{2 \operatorname{sen}(\omega T/2)} [y_2(x_2 - x_1) \operatorname{sen}(\omega T/2) - y_2(y_2 - y_1) \cos(\omega T/2)]$$

$$y_1\dot{y}_1 = \frac{\omega}{2 \operatorname{sen}(\omega T/2)} [y_1(x_2 - x_1) \operatorname{sen}(\omega T/2) + y_1(y_2 - y_1) \cos(\omega T/2)]$$

Reemplazando estas expresiones en (B.21)

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} [(x_2 \dot{x}_2 - x_1 \dot{x}_1) + (y_2 \dot{y}_2 - y_1 \dot{y}_1)] \\ &= \frac{m}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \times \cot \frac{\omega T}{2} + \frac{m}{2} \omega (x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{aligned}$$

Ahora se agrupa todo incluyendo el movimiento en z

$$\begin{aligned} S_{cl} = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(z_2 - z_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{\omega}{2} \cot \frac{(t_2 - t_1)}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \right. \\ \left. + \omega (x_1 y_2 - y_1 x_2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

APÉNDICE C

INTEGRACIÓN GAUSSIANA

La forma más simple de integral gaussiana es la siguiente:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (\text{C.1})$$

Que puede ser calculada fácilmente. Elevando al cuadrado la integral I , se obtiene

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \int_{-\infty}^{+\infty} (-y^2) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx dy \quad (\text{C.2})$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares, se tiene $r^2 = x^2 + y^2$, $dx dy = r dr d\theta$ y se obtiene la integral

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r dr d\theta \quad (\text{C.3})$$

La solución a esta integral es directa

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{C.4})$$

Muchos problemas pueden incluir el factor constante $a/2$ en el término exponencial, pero por simple sustitución se puede mostrar que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (\text{C.5})$$

La presencia de la constante a cobra importancia cuando se enfrentan integrales de la forma

$$\int x^m \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) dx \quad (\text{C.6})$$

Donde m es algún entero positivo. Si se diferencia ambos lados con respecto a a , se obtiene

$$\frac{dI}{da} = -\frac{1}{2} \int x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) dx = -\frac{1}{2} \sqrt{2\pi} a^{-3/2} \quad (\text{C.7})$$

De donde se concluye

$$\int x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \sqrt{2\pi} a^{-3/2} \quad (\text{C.8})$$

Por repetida diferenciación se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \int x^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) dx &= (2n-1)!! \sqrt{2\pi} a^{-(2n+1)/2} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{a^n} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \\ &= \frac{(2n)!!}{a^n 2^n n!} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Donde $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1$. Es fácil ver que (C.6), siempre es cero cuando m es impar, porque el integrando es entonces impar en x mientras que los límites de integración son pares. El hecho que la integral exista solo para potencias pares de x es importante, porque en la aproximación de las integrales de camino a la física cuántica de campos el factor x^{2m} está relacionado con la creación y aniquilación de partículas, que siempre ocurren en pares.

La siguiente integral gaussiana involucra un término lineal en la exponencial

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 + Jx\right) dx \quad (\text{C.10})$$

Donde J es una constante. Para evaluar esta integral primera se completa el cuadrado en la exponencial.

$$-\frac{1}{2}ax^2 + Jx = -\frac{1}{2}a\left(x - \frac{J}{a}\right)^2 + \frac{J^2}{2a} \quad (\text{C.11})$$

Haciendo la sustitución $x \rightarrow x - J/a$ para hacer ver que esta integral es esencialmente la misma que (C.5) con un término constante, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 + Jx\right) dx = \exp\left(\frac{J^2}{2a}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (\text{C.12})$$

Igualmente se pueden evaluar integrales tales como

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 + Jx\right) dx \quad (\text{C.13})$$

Usando el mismo truco de diferenciación que en las anteriores integrales, pero esta vez diferenciando con respecto a J en (C.10). En tal caso tenemos

$$\frac{dI}{dJ} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 + Jx\right) dx = \frac{J}{a} \exp\left(\frac{J^2}{2a}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (\text{C.14})$$

Cuando $J = 0$, obtenemos la misma situación par-impar anterior, y la integral es cero. Una segunda diferenciación da

$$\frac{d^2I}{dJ^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 + Jx\right) dx = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{J^2}{2a}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left(1 + \frac{J^2}{a}\right) \quad (\text{C.15})$$

Tomando derivadas sucesivas se llega a expresiones más complicadas pero todas se reducen a (C.9).

REFERENCIAS

- [1] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, Emended Edition. Dover Publications, Inc. New York, 2010.
- [2] B. Felsager. Geometry, Particles, and Fields. Springer. New York, 1998.
- [3] H. Müller-Kirsten. Introduction to Quantum Mechanics Schrödinger Equation and Path Integral. World Scientific Publishing, 2006.
- [4] T. Soldovieri. Introducción a la mecánica de Lagrange y Hamilton. Universidad del Zulia. República Bolivariana de Venezuela, 2011.
- [5] J. M. Leinaas. Classical Mechanics and Electrodynamics, Lecture notes – FYS 3120. Department of Physics, University of Oslo, 2009.
- [6] M. B. Mensky. Continuous quantum measurements and path integrals. IOP Publishing Ltd. Londres, 1993.
- [7] R. MacKenzie. Path Integral Methods and Applications arXiv:quant-ph/0004090.
- [8] B. E. Baaquie. Path Integrals and Hamiltonians. Cambridge University Press. United Kingdom, 2014.
- [9] M. Chaichian and A. Demichev, Path Integrals in Physics: Volume I Stochastic Processes and Quantum Mechanics, Institute of Physics Publishing, 2001.
- [10] N. A. Lemos. Mecânica Analítica. Departamento de Física Universidad Federal Fluminense. Niterói, 2000.
- [11] L.S. Schulman, Techniques and Applications of Path Integration. JohnWiley and Sons. United States of America 1981.
- [12] L. D. Landau. Quantum Mechanic, Non-relativistic Theory. Pergamon Press. Great Britain, 1989.
- [13] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets, World Scientific, 2009.
- [14] W. Dittrich and M. Reuter. Classical and Quantum Dynamics. Springer, New York, 2001.