

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

ESTUDIO DEL CORRIMIENTO Y EL ANCHO DE LOS NIVELES DE ENERGÍA POR INTERACCIONES FUERTES Y ELECTROMAGNÉTICAS EN EL ÁTOMO HIDRÓGENO PIÓNICO.



TRABAJO DE MAESTRÍA

Presentado por:

Estudiante de Maestría: Físico Amando Delgado Solano

Director:

Ph.D. Jairo Alonso Mendoza Suárez

Facultad de ciencias básicas

Programa de maestría en física

Pamplona, Diciembre de 2015

Título

ESTUDIO DEL CORRIMIENTO Y EL ANCHO DE LOS NIVELES DE ENERGÍA POR INTERACCIONES FUERTES Y ELECTROMAGNÉTICAS EN EL ÁTOMO HIDRÓGENO PIÓNICO

Autor

Físico Amando Delgado Solano*

Director

Dr: Jairo Alonso Mendoza Suárez†

Universidad de Pamplona

Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Física y Geología
Pamplona 2015

* *Electronic address:* akgar2230@gmail.com

† *Electronic address:* jairoalonsos@gmail.com

AGRADECIMIENTOS

Al terminar este trabajo me embarga un enorme sentimiento de cariño y agradecimiento hacia la Universidad de Pamplona, la institución que me abrió sus puertas desde el pregrado, que me dio la oportunidad de desempeñarme como profesional y seguir mi formación académica con este posgrado, gracias por su apoyo económico para las salidas a congresos, gracias por el descuento a la matrícula, ya que sin este, cursar esta maestría hubiera sido difícil.

También estoy profundamente agradecido con el cuerpo docente del departamento de física, ya que con paciencia y dedicación han estado conmigo, apoyándome, brindándome sus conocimientos y experiencias, todo con la finalidad de convertirme en un excelente físico y profesional. Debo agradecer especialmente al Dr. Jairo Alonso Mendoza, quien fue mi tutor desde el pregrado, quien me ha apoyado siempre y ha puesto su confianza en mí para sacar adelante este trabajo.

A mis compañeros, mis amigos de estudio y trabajo, con los cuales hemos compartido grandes momentos por varios años, desde que iniciamos la carrera de física, hasta hoy que estamos culminando la maestría, siempre deseando que nuestra amistad nunca se pierda.

Quiero agradecer también a mi familia, mi mamá, mi papá y mis hermanas que siempre han creído en mí, de una u otra manera me han ayudado a sobrepasar los obstáculos, su compañía y cariño ha sido el apoyo necesario en momentos de debilidad.

Finalmente, quiero dedicar esta tesis a mi hija y a su madre, que han estado conmigo en los buenos y malos momentos, gracias por la paciencia cuando por trabajo no he

podido estar con ustedes, por comprenderme en los momentos de estrés y mal humor, gracias por entender y soportar mis errores, mis defectos, gracias por estar conmigo, por ser mi familia, ustedes son el motivo por el cual todo el esfuerzo vale la pena.

***Amando Delgado Solano
Pamplona, Noviembre de 2015***

RESUMEN

El estudio de los átomos hadrónicos tiene como finalidad encontrar una teoría aunque sea efectiva local, general para todos los estados ligados hadrónicos, capaz de estudiar la superposición de los potenciales fuertes y electromagnéticos[5].

Este trabajo se desarrolla con la finalidad de estudiar el estado ligado $H\pi$, con interacciones fuertes como perturbaciones a un sistema electromagnético, a bajas energías (teoría efectiva local). Primero se deducen las ecuaciones del cambio en los niveles de energía y la tasa de decaimiento del sistema, siempre en el estado base de interacción. Por medio de la condición de equivalencia dichas expresiones estarán dadas en términos de las longitudes de dispersión de ondas s .

El objetivo es encontrar una solución al sistema de manera simultanea y obtener una región convergente de valores para las longitudes de dispersión de ondas s . Si existe región de convergencia es posible concluir que el método utilizado es correcto. El resultado obtenido en este trabajo es mostrado en el capítulo 5, aquí también se muestran algunos resultados ya publicados por diferentes autores y se realiza una breve comparación.

El presente trabajo consta de cinco capítulos. El primer capítulo es la introducción; donde se realiza una discusión de la actualidad de los átomos hadrónicos, los aspectos y la fenomenología básica en la formación de estos estados ligados, adicionalmente se menciona la importancia de este tema en la comunidad científica.

El segundo capítulo se basa en una recopilación de los conceptos más relevantes para el desarrollo del trabajo, en mecánica cuántica, teoría cuántica de campos, También se ponen en discusión algunos resultados obtenidos en trabajos anteriores, para futuros cálculos y comparaciones con los resultados finales de este trabajo. Algunas definiciones elementales del átomo de hidrógeno, se dejan en los apéndices, pues este modelo atómico es usado como base para el hidrógeno piónico.

En el tercer capítulo se realiza una detallada descripción de la interacción pión-nucleón. Partiendo desde los campos de cada una de las partículas libres, se define la función de onda en el estado base para el átomo hidrógeno piónico y se demuestra la condición de normalización para dicho estado, estableciendo antes las reglas de conmutación de los operadores creación y aniquilación de las partículas. Por otro lado, se analizan los estados posibles en la interacción pión-nucleón permitidos, por el acoplamiento del momento de Isospin, con la finalidad de establecer los procesos de dispersión y un estimativo de sus respectivas amplitudes.

El cuarto capítulo es quizás el que más relevancia tiene en el trabajo, pues aquí se demuestran las expresiones algebraicas para la tasa de decaimiento y los corrimientos en los niveles energéticos del átomo hidrógeno piónico. Por medio de la aplicación de la serie de Dyson para la matriz de interacción y la solución de integrales de momento. Cabe resaltar que este desarrollo tiene un alto grado de complejidad.

Finalmente, en el capítulo 5; se analiza el comportamiento de la tasa de decaimiento y el corrimiento en los niveles de energía del átomo $H\pi$, a partir de los valores experimentales hasta ahora publicados. Con las expresiones obtenidas para los parámetros antes mencionados, se calcula la región de convergencia para los valores de las longitudes de dispersión de ondas s ; y se comparan con otros resultados existentes en la literatura, para establecer así el éxito en los objetivos del trabajo. Adicionalmente se realiza el cálculo de la vida media del átomo $H\pi$ y se compara con el resultados obtenidos anteriormente.

Índice General

1	<i>INTRODUCCIÓN</i>	2
2	<i>TEORÍA FUNDAMENTAL</i>	6
2.1	Nucleones y piones	6
2.2	Postulado de simetrización	6
2.3	Reglas de conmutación	8
2.4	Átomos hadrónicos	8
2.4.1	Transiciones del átomo $H\pi$	9
2.4.2	Series espectrales del $H\pi$	9
2.5	Producto cronológico de Dyson	10
2.6	Matriz S de interacción	11
2.6.1	Unitariedad de la matriz S	12
2.7	Dispersiones y longitudes de dispersión	13
2.8	Condición de equivalencia	15
3	<i>INTERACCIÓN PIÓN-NUCLEÓN πN</i>	17

3.1	Función de onda para el hidrógeno piónico $H\pi$	17
3.1.1	Normalización de la función de onda $H\pi$	19
3.2	Dispersión πN por simetría de Isospín	22
3.2.1	Isospín del nucleón	22
3.2.2	Isospín del pión	23
3.3	Acoplamiento de Isospín pión-nucleón	23
3.3.1	Estados πN en la base vectorial	27
3.4	Amplitudes de los procesos πN	29
4	<i>TAZA DE DECAIMIENTO Y CAMBIO EN LOS NIVELES DE ENERGÍA DEL ESTADO $H\pi$</i>	34
4.1	Parámetros del átomo $H\pi$	34
4.2	Termino de primera aproximación para ϵ_{1s}	37
4.3	Taza de decaimiento Γ_{1s} del $H\pi$	46
4.4	Cálculo de ϵ_{1s} de segunda aproximación	56
4.5	Análisis de las ecuaciones de ϵ_{1s} y Γ_{1s}	61
4.5.1	Vida media del $H\pi$	64
5	<i>CONCLUSIONES</i>	69
A	<i>PARTÍCULAS SUBATÓMICAS</i>	74
A.1	Bosones	74
A.2	Fermiones	75

A.3 Quarks	76
A.4 Hadrones	77
A.4.1 Bariones	77
A.4.2 Mesones	77
A.5 Clasificación de las Partículas Elementales	78
B EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO	81
B.0.1 Series espectrales	82
C MOMENTO DE ISOSPIN	84
D CAMPO FERMIÓNICO Y MESÓNICO	89
D.1 El campo mesónico	89
D.2 El campo fermiónico	91
E ARTÍCULOS Y PONENCIAS DEL TRABAJO	93
Bibliografía	100

Índice De Figuras

2.1	<i>Clasificación de los Hadrones.</i>	7
2.2	<i>Series de Lyman para el átomo de hidrógeno y para el $H\pi$.</i>	10
2.3	<i>Comportamiento en el tiempo de la matriz S.</i>	12
2.4	<i>Proceso de dispersion[12].</i>	14
3.1	<i>Interacción $p + \pi^-$.</i>	18
4.1	<i>Corrimiento en el nivel de energía base del átomo $H\pi$ debido a la perturbación de las interacciones fuertes[5].</i>	38
4.2	<i>Interacción $p + \pi^-$ vista desde el marco de referencia de centro de masa del sistema</i>	39
4.3	<i>Proceso de decaimiento del átomo $H\pi$</i>	49
4.4	<i>Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s, en el estado $H\pi$; usando las fórmulas DGBT. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s}. A la derecha se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, a la izquierda se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.</i>	65

4.5	<i>Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s, en el estado $H\pi$; considerando correcciones de primer orden. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s}. A la derecha se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, a la izquierda se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.</i>	65
4.6	<i>Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s, en el estado $H\pi$; considerando correcciones de segundo orden. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s}. A la derecha se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, a la izquierda se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.</i>	66
4.7	<i>Curva de decaimiento para el $H\pi$. A la izquierda los resultados obtenidos en este trabajo, la escala del tiempo esta a 1×10^{-14}. A la derecha los resultados obtenidos con una aproximación de la regla de oro de Fermi; aquí la escala temporal esta a 1×10^{-13}.</i>	67
5.1	<i>Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s, en el estado $H\pi$; considerando los tres casos de correcciones a la misma escala. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s}. En la parte superior se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, en la parte inferior se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.</i>	70
5.2	<i>Resultados obtenidos para las amplitudes en la dispersión πN en los estados $H\pi$ y $D\pi$. Se puede apreciar que no existe región de convergencia simultanea para los dos estados[5].</i>	71
5.3	<i>Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s, para el estado $H\pi$ y $D\pi$[30].</i>	71
5.4	<i>Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s, para el estado $H\pi$ y $D\pi$[3].</i>	72
C.1	<i>Representación del Isospin para el pión y el nucleón.</i>	87
E.1	<i>Artículo publicado en la revista Bistua.</i>	94
E.2	<i>Artículo publicado en la revista Bistua.</i>	95

E.3	<i>Artículo publicado en la revista El hombre y la maquina, Universidad Autónoma de Occidente.</i>	96
E.4	<i>Certificado de ponente Congreso internacional de formación y moderación de ciencias básicas 2014.</i>	97
E.5	<i>Certificado de ponente Congreso internacional de formación y moderación de ciencias básicas 2015.</i>	98
E.6	<i>Certificado de ponente Congreso Nacional de Ingeniería Física 2014.</i>	99

Índice De Tablas

1.1	<i>átomos hadrónicos</i>	2
3.1	Procesos elásticos	29
3.2	Procesos de intercambio de carga	29
4.1	<i>Valores de $\mathcal{O}(n)$</i>	62
A.1	<i>partículas elementales, bosones.</i>	75
A.2	<i>partículas elementales, leptones</i>	76
A.3	<i>partículas elementales, quarks</i>	77
A.4	<i>partículas compuestas, bariones</i>	78
A.5	<i>partículas compuestas, mesones</i>	79
A.6	<i>partículas elementales, el modelo estándar</i>	80
C.1	Nucleones e hiperones [21]	85

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Actualmente el Modelo Estándar (SM) tiene una clasificación muy completa de partículas, que sigue en construcción (ver apéndice A). Otra importante línea de investigación se basa en la interacción entre todas estas partículas, con la finalidad de entender a gran plenitud la naturaleza del universo. El desarrollo de este trabajo se basa en la interacción entre hadrones, especialmente la interacción entre protón-pión $|p\pi^- \rangle$, estado conocido como átomo hidrógeno piónico. Básicamente el átomo hidrógeno piónico es un átomo de hidrógeno cuyo electrón ha sido reemplazado por un pión negativo.

El hidrógeno piónico es uno de los tantos átomos hadrónicos que actualmente son estudiados por la comunidad científica, los más comunes se presentan en la tabla (1.1):

Tabla 1.1: *átomos hadrónicos*

átomo	nombre	simbolo
$\pi^+\pi^-$	pionium	$A_{2\pi}$
$\pi^\pm\kappa^\pm$	átomo $\pi\kappa$	$A_{\pi\kappa}$
$p\pi^-$	Hidrógeno piónico	$H\pi$
$p\kappa^-$	Hidrógeno káonico	$H\kappa$
$d\pi^-$	deuterio piónico	$D\pi$
$d\kappa^-$	deuterio káonico	$D\kappa$

En la formación de átomos hadrónicos tienen lugar tres procesos fundamentales[1].

- i Captura de fase: El hadrón es frenado por la interacción con el átomo, hasta que encuentra una órbita adecuada, en este punto es atraído hacia el núcleo de órbita en órbita. Como va de una órbita de mayor energía a una de menor, se

tiene que liberar energía. Esta energía es capaz de liberar electrones, los cuales lleva consigo una función de onda asociada, las funciones de onda del electrón y el pión se superponen; esto sucede a bajas energías de interacción, es decir, que este fenómeno se presenta en las orbitas más elevadas.

- ii Emisión de rayos x : Como el hadrón está inicialmente enlazado en órbitas relativamente superiores, el radio del orbital disminuye rápidamente por la diferencia de masa entre el electrón y el hadrón. Por esta razón el pión se ve obligado a realizar transiciones hacia niveles inferiores a grandes velocidades; cuando alcanza un nivel de energía inferior adecuado, reduce bruscamente su velocidad y se ve obligado a emitir altas energías, estas energías son liberadas como rayos x . Este fenómeno se presenta mientras que el hadrón alcanza un orbital estable.
- iii Interferencia Coulomb-Nuclear: Cuando el hadrón alcanza un orbital estable muy cercano al núcleo, la distancia entre estos es tan pequeña que está dentro del alcance de las interacciones fuertes, presentándose esta entre los quark que forman el hadrón y los que forman el núcleo, se produce entonces una interferencia entre la fuerza electromagnética de Coulomb y la fuerza nuclear fuerte. La fuerza nuclear produce un cambio en la posición del nivel atómico modificando su espectro y haciendo inestable el estado ligado logrando que finalmente decaiga.

La importancia de los átomos hadrónicos para los científicos radica principalmente en dos puntos esenciales; primero los fenómenos físicos presentes en el proceso de formación y segundo la parte experimental.

Respecto a los fenómenos presentes, el estudio detallado permite comprender de forma clara la conservación y rompimiento de algunas simetrías como la simetría quiral y la de isospin; siendo estas fundamentales en el desarrollo de la cromodinámica cuántica QCD [2], la teoría de perturbación quiral ($ChPT$); bases fundamentales para el modelo estándar para dar explicación a la formación de la materia y la teoría del big-bang[3][4], además ya que en la interacción están presentes potenciales electromagnéticos y potenciales de interacción fuerte, un estudio profundo de este fenómeno podría arrojar luces y brindar un primer paso en la teoría de gran unificación.

Otro aspecto importante, se debe a la diferencia de masas, actualmente el tamaño del protón se ha calculado reemplazando al electrón por un muon en el átomo de hidrógeno, midiendo la radiación emitida por el cambio en las orbitas de los niveles de energía.

El muon es alrededor de 200 veces más pesado que el electrón, sus orbitas alrededor del protón son más pequeñas lo que lleva a un mejor cálculo en el radio del protón; el pión es alrededor de 300 veces más masivo que el electrón, el uso correcto del pión en

este cálculo podría arrojar un valor más exacto para el protón. Dicho cálculo no es muy sencillo que digamos, ya que este involucra el factor de forma, y mientras que el muon es una partícula sin estructura, el pión si lo es. Es bueno aclarar también que el factor de forma del pión es aun un tema en investigación.

Un factor adicional a la relevancia del desarrollo de estos estados ligados, sería formular una generalización de la mecánica cuántica, al estudiar en detalle la interacción entre hadrones, es posible describir con detalle el problema cuántico entre dos partículas y la superposición de 2 potenciales.

Por otra parte, está generando una gran cantidad de descubrimientos los cuales a su vez abren la puerta a nuevas teorías, pues estos son nuevos átomos, estados ligados diferentes, que necesitan un tratamiento particular; en consecuencia los científicos se ven obligados a modificar las teorías conocidas que proporcionan explicación a los átomos que conocemos en la naturaleza.

Esta ciencia en crecimiento genera muchas expectativas para el futuro en la comunidad científica ya que perfecciona teorías como la teoría cuántica de campos, también proporciona algunas alternativas en la formación de nuevos materiales con aplicaciones en nanotecnología, adicionalmente podría brindar respuestas a una de las preguntas que más despierta el interés de la comunidad científica; la formación de la materia.

En la actualidad grandes grupos de investigación se dedican a estudiar estos enlaces atómicos, obteniendo una gran cantidad de datos y evidencia experimental, un grupo importante es el *The DIRAC collaboration group* en el *CERN* en Suiza, el grupo *Pionic Hydrogen Collaboration* en *The Paul Scherrer Institute* (PSI), el grupo *DEAR/SIDDHARTA collaboration* en *Laboratori Nazionali di Frascati* (LNF)[2][5][6].

Capítulo 2

TEORÍA FUNDAMENTAL

En este capítulo se presenta una descripción de los conceptos de mayor relevancia de mecánica cuántica y teoría cuántica de campos, necesarios para las interacciones analizadas durante el desarrollo del trabajo. También se realiza una breve descripción de los hadrones, especialmente al protón y pión, que son las partículas que forman el estado ligado a estudiar. Por otro lado, se da una breve descripción de los átomos hadrónicos; considerando la teoría del átomo de hidrógeno como punto de partida en la interacción.

2.1 Nucleones y piones

Entre los bariones se encuentran los nucleones, el protón y el neutrón(A). Estas son las partículas que forman el núcleo atómico. Por otro lado, en la familia de los mesones tenemos los piones. Los piones son los mesones más ligeros, lo que los hace esenciales en la formación del átomo $H\pi$, ya que el sistema se hace más análogo al átomo de Hidrógeno; la diferencia radica en los radios de los orbitales, en la energía de interacción y las interacciones fuertes.

2.2 Postulado de simetrización

En mecánica cuántica, las partículas son representadas por funciones de onda que deben cumplir ciertas características para ser funciones de onda aceptables. Esta función de onda depende de ciertos números cuánticos como el número cuántico principal n , el número cuántico de spin s entre otros.

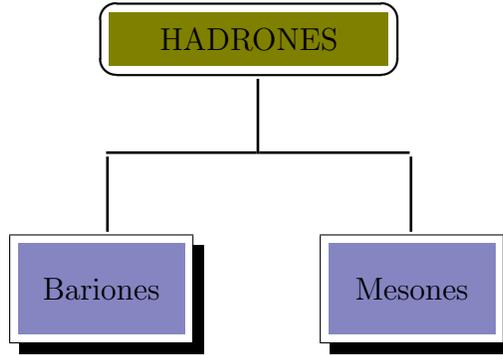


Figura 2.1: *Clasificación de los Hadrones.*

Suponiendo que se tiene un sistema de N partículas, la función de onda para este sistema está dado por:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N, t). \quad (2.1)$$

El operador permutación \hat{P} , es un operador que intercambia partículas entre sí. Si se aplica el operador permutación a la función de onda del sistema de N partículas se tiene:

$$\hat{P}_{ij}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N, t) = \pm\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N, t). \quad (2.2)$$

El signo \pm indica la naturaleza de las partículas intercambiadas, si es positivo la función es simétrica, si es negativo la función es antisimétrica. Las funciones de onda mixtas no existen, por esta razón las partículas solo pueden ser representadas por funciones de onda simétricas o antisimétricas. Las funciones simétricas representan bosones, las antisimétricas fermiones, según esto; el postulado de simetrización establece que en la naturaleza solo existen dos tipos de partículas; bosones y fermiones[7].

Los bosones y los fermiones se identifican por su número cuántico de spin, los fermiones tienen spin semientero mientras que los bosones spin entero. Cada familia de partículas obedece una estadística diferente, por eso es importante establecer que tipo de partícula forma el sistema. El protón es un fermión, pues tiene spin $\frac{1}{2}$ mientras que el pión es un bosón con spin 1. El átomo de hidrógeno es un bosón, pues el protón y el electrón ambos con spin semientero forman un sistema con spin entero, pero el hidrógeno piónico formado por el protón y el pión pertenece a los fermiones.

2.3 Reglas de conmutación

Las reglas de conmutación para los operadores creación y destrucción, están definidas de tal forma que los fermiones obedecen las reglas de los anticonmutadores, mientras los bosones obedecen a los conmutadores. Ya que el pión es un bosón, las reglas de conmutación son mas relevantes en este trabajo, y están dadas por[8]:

$$[a_i(\mathbf{k})', a_j(\mathbf{k})] = [a_i^\dagger(\mathbf{k}'), a_j^\dagger(\mathbf{k})] = 0 \quad (2.3)$$

$$[a_i(\mathbf{k}'), a_j^\dagger(\mathbf{k})] = (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.4)$$

$$[a_i(\mathbf{k})', a_j(\mathbf{k})] = [a_i^\dagger(\mathbf{k}'), a_j^\dagger(\mathbf{k})] = 0 \quad (2.5)$$

$$[a_i(\mathbf{k}'), a_j^\dagger(\mathbf{k})] = (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.6)$$

2.4 Átomos hadrónicos

Considere un átomo común y corriente que interactúa con la materia, es decir; con cualquier tipo de partícula. Cuando esta partícula es frenada y capturada por el núcleo del átomo, se forma un átomo exótico. En el caso de los átomos hadrónicos las partículas implicadas en el proceso son siempre hadrones.

En la formación del átomo $H\pi$, el núcleo del hidrógeno, el protón p , atrapa al pión negativo π^- inicialmente por interacciones electromagnéticas, en una orbita de energía superior; en este punto las partículas están lo suficientemente alejadas como para no considerar todavía su estructura interna. El π^- empieza su descenso a altas velocidades a través de las diferentes orbitas energéticas gracias a la atracción de Coulomb, hasta que se acerca lo suficiente al protón, en este punto ya es posible que las interacciones fuertes hagan efecto, y los quarks que conforman a estos hadrones empiezan a interactuar.

Para hacer más sencillo el estudio, la energía de interacción fuerte se puede considerar como una perturbación al sistema de interacciones electromagnéticas. Esta perturbación al sistema produce cambios en los niveles de energía. La esencia de este trabajo es poder entender y describir estos cambios.

El π^- se ve atraído al p y cae rápidamente a través de los diferentes orbitales hacia el núcleo del átomo, cuando las interacciones fuertes empiezan a influenciar el sistema,

el π^- llega a su estado base de energía y es frenado bruscamente, de tal forma que se ve obligado a emitir altas energías, esta energía es emitida en el rango de los rayos X . Para describir el espectro de emisión en la formación del $H\pi$, necesario implementar un sistema de transiciones para los niveles de energía, análogamente al átomo de hidrógeno.

2.4.1. Transiciones del átomo $H\pi$

Las transiciones energéticas realizadas por el átomo $H\pi$, se presentan en el orden de los rayos X . Ya que el π es diferente al electrón, sus orbitas atómicas también lo son. La diferencia entre los niveles de energía en este caso, se pueden determinar por las transiciones de rayos X . El problema está en el penúltimo nivel energético donde el efecto es mínimo y no se puede observar de una forma directa.

Conociendo la intensidad de la última transición de rayos X , a menudo se puede deducir la relación de las probabilidades de transición de los dos procesos presentes, a partir de la cual la anchura del antepenúltimo nivel puede determinarse. Los cambios de energía se miden a partir de la diferencia entre la energía total y la energía presente por interacciones electromagnéticas.

$$\Delta E = E_t - E_e \quad (2.7)$$

La convención de signo positivo (negativo) se correspondería a fuerzas de repulsión (atracción), sin tener en cuenta absorción nuclear. Por lo tanto, un cambio negativo puede obtenerse también con un potencial atractivo si el componente de absorción del potencial es lo suficientemente grande[1].

2.4.2. Series espectrales del $H\pi$

La analogía entre el átomo de hidrógeno y el estado ligado $H\pi$, nos permite analizar su espectro por medio de series espectrales. La diferencia está en el corrimiento y el ancho de los niveles de energía, debido a la perturbación de interacciones fuertes. El nivel $1s$ está corrido ϵ_{1s} con respecto a su posición por el potencial de Coulomb y además de eso, el sistema es inestable debido a la interacción de absorción por la perturbación de interacciones fuertes. Estos cambios no son muy apreciables en los niveles de mayor energía, ya que allí las interacciones fuertes son mínimas. Sin embargo, el corrimiento y el ancho del nivel $2s$ es posible medirlo de forma indirecta[1].

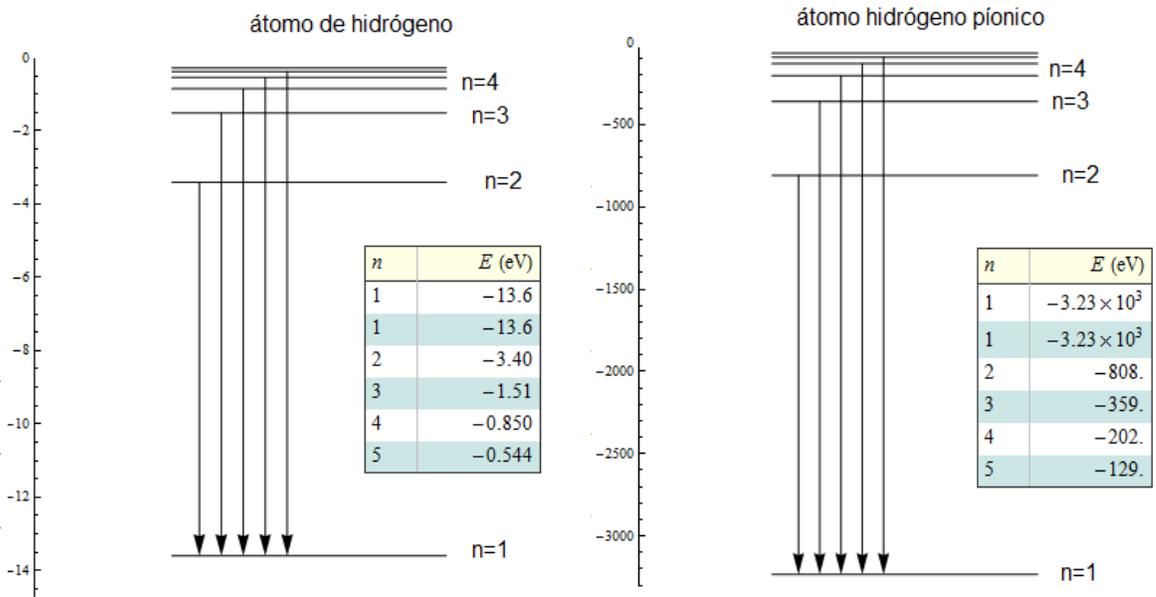


Figura 2.2: Series de Lyman para el átomo de hidrógeno y para el $H\pi$.

La obtención del corrimiento y el ancho del estado $1s$ es un poco más compleja y es necesario otro proceso que se llevara a cabo durante de este trabajo. Una primera aproximación realizada a partir de la mecánica cuántica para las series de Lyman es mostrada en la figura (2.2)[9]:

2.5 Producto cronológico de Dyson

Supongamos que se tienen dos estados, $|A\rangle$ y $|B\rangle$; uno función del otro. Ir de un estado a otro es posible bajo la acción de una magnitud actuando sobre uno de los estados, tal que[10]:

$$|A\rangle = \hat{O}|B\rangle. \tag{2.8}$$

\hat{O} se conoce como operador. Un operador lineal cumple con las siguientes condiciones:

$$\hat{O}(|A\rangle + |B\rangle) = \hat{O}|A\rangle + \hat{O}|B\rangle \quad \hat{O}(\alpha|A\rangle) = \alpha\hat{O}|A\rangle. \tag{2.9}$$

Dados los operadores lineales dependientes del tiempo, se establece el producto orde-

nado temporalmente T :

$$T(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\hat{C}(t_3)\dots) = \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\hat{C}(t_3); \quad t_1 > t_2 > t_3\dots \quad (2.10)$$

Para un par de operadores se tiene[11]:

$$T(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)) = \Theta(t_1 - t_2)\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) + \Theta(t_2 - t_1)\hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1); \quad (2.11)$$

donde $\Theta(t)$ es la función escalón.

2.6 Matriz S de interacción

Para cualquier proceso físico entre partículas es necesario considerar la interacción entre los campos de estas. En general las ecuaciones a las que conllevan este tipo de problemas son ecuaciones no lineales, lo que complica enormemente encontrar una solución al sistema.

Una forma para simplificar el sistema es trabajar con teoría de perturbaciones:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_i; \quad (2.12)$$

donde \mathfrak{L}_i representa la perturbación. Aun así el problema es sumamente complejo, y es necesario introducir otra técnica que facilite la solución del problema. Si se lleva el sistema al espacio de representación de interacción RI , se puede expresar la perturbación del sistema en una serie de potencias conocida como serie de Dyson[7].

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T[\mathfrak{L}_1(x_1)\mathfrak{L}_2(x_2)\dots\mathfrak{L}_n(x_n)]; \quad (2.13)$$

donde T representa un producto cronológico de Dyson. Esta matriz se denomina matriz S de interacción[11]. La matriz S contiene toda la información del proceso y generalmente sirve para extraer la amplitud de la transición en un sistema perturbativo.

Mucho tiempo antes de que ocurra una interacción, tenemos un estado inicial, $|\phi_i\rangle$, la matriz de interacción en este caso toma un valor nulo y las partículas son libres. Un instante antes de la dispersión las partículas están listas para interactuar, en este punto

la matriz de interacción toma valor, el cual permanece constante durante la interacción. Justo después de que la interacción ha tenido lugar, la matriz empieza a disminuir y cuando ha transcurrido un tiempo suficiente se hace nula. En este caso tenemos un nuevo estado denominado estado final $|\phi_f\rangle$. Este comportamiento de S se representa en la figura 2.3.

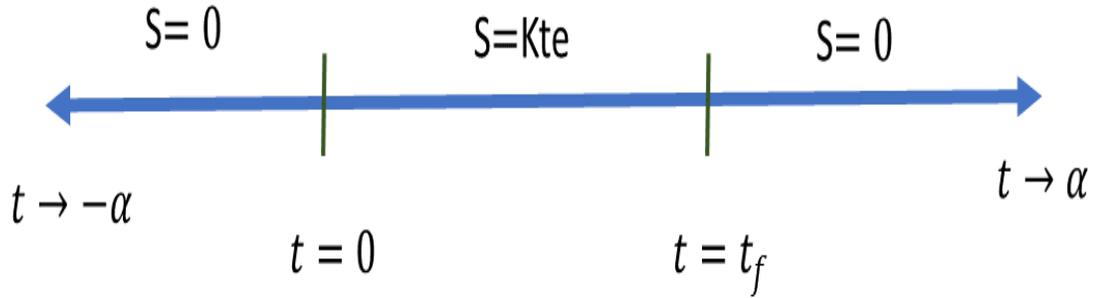


Figura 2.3: Comportamiento en el tiempo de la matriz S .

2.6.1. Unitariedad de la matriz S

Supongamos que se tiene la matriz $S = U(-\infty, \infty)$. El estado después de la perturbación está dado por:

$$|\phi(t)\rangle = U(t, t_0)|\phi(t_0)\rangle. \quad (2.14)$$

Sustituyendo a $|\phi(t)\rangle$ en la ecuación de Schrodinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t}(U(t, t_0)|\phi(t_0)\rangle) = H_i U(t, t_0)|\phi(t_0)\rangle;$$

Multiplicando por $\langle\phi(t_0)|$ se tiene:

$$i\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_i U(t, t_0). \quad (2.15)$$

Análogamente para los adjuntos:

$$-i\frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = U^\dagger(t, t_0)H_i. \quad (2.16)$$

Ahora si aplico a (2.15) por la izquierda a $U^\dagger(t, t_0)$ y a (2.16) por la derecha a $U(t, t_0)$:

$$U^\dagger(t, t_0) \left(i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} \right) = U^\dagger(t, t_0) H_i U(t, t_0).$$

$$-i \left(i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} \right) U(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) H_i U(t, t_0).$$

Finalmente, restando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$i \frac{\partial}{\partial t} (U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)) = 0. \quad (2.17)$$

Esta última ecuación implica que $U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) = kte = 1$. Esta es la unitariedad de la matriz S .

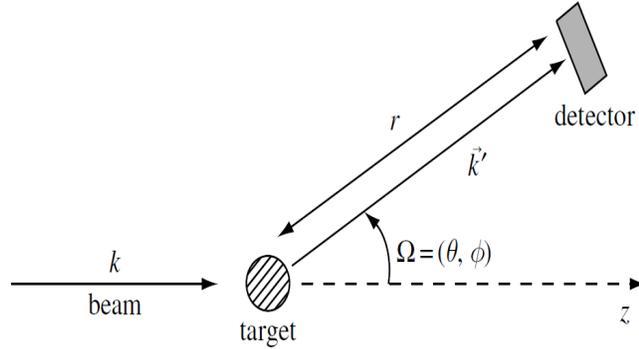
2.7 Dispersiones y longitudes de dispersión

El conocimiento actual de la física de partículas se debe principalmente al fenómeno de las dispersiones. Fue así como en 1906 Ernest Rutherford descubrió el núcleo atómico y en la actualidad es la base de la física nuclear, estudio de partículas, caracterización de materiales, moléculas, átomos entre otros.

En la teoría de dispersiones una magnitud física que desempeña un papel muy importante es la sección eficaz o sección transversal, la cual se define como el número de partículas dispersadas en un elemento de ángulo solido, por unidad de tiempo por unidad flujo de partículas incidentes[7].

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{1}{J_{in}} \frac{dN(\theta, \phi)}{d\Omega}. \quad (2.18)$$

En general los procesos de dispersión se consideran en un marco de referencia en el cual el blanco esta en reposo, mientras que el haz dispersor esta en movimiento como se muestra en la figura (2.4). Para facilitar el cálculo, el centro de masas del sistema, está en reposo antes y después de la colisión. La sección transversal total σ es independiente del marco de referencia que se elija, mientras la sección transversal diferencial si depende, pues los ángulos de dispersión si dependen del sistema elegido.

Figura 2.4: *Proceso de dispersión*[12].

Cuando la dispersión se produce por un potencial central, simétricamente esférico, el momento angular del sistema se conserva, en el formalismo ondulatorio la sección eficaz total toma la forma[12]:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l; \quad (2.19)$$

donde δ_l es la fase de la onda, y l el número cuántico de momento angular. Si $l = 0$ tienen el nivel s de energía y por consiguiente dispersión de ondas s . De la ecuación (2.19) se tiene:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0. \quad (2.20)$$

En el límite de bajas energías, potenciales de rango finito, donde $k \rightarrow 0$ la fase toma la forma $\delta_0 \rightarrow ka_0$, la cual se hace muy pequeña tal que es válida la aproximación $\sin \delta_0 \rightarrow \delta_0$; entonces la sección eficaz es expresada por:

$$\sigma = 4\pi a_0^2; \quad (2.21)$$

donde a_0 tiene unidades de longitud, pues k tiene unidades inversas de longitud. La constante a_0 se denomina “longitud de dispersión de ondas s ”. En este caso las longitudes de dispersión a son proporcionales a la amplitud del proceso de dispersión.

2.8 Condición de equivalencia

La mecánica cuántica y la mecánica clásica son equivalentes en todo momento. La relación de esta equivalencia radica en el principio de correspondencia[7]:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (\text{Mecánica Cuántica}) \rightarrow \text{Mecánica Clásica.} \quad (2.22)$$

De igual forma se establece la relación entre teorías relativistas y no relativistas, por medio de la “*condición de equivalencia*”. En las teorías cuánticas relativistas el número de partículas no es constante, dicha variación se debe a una serie de procesos físicos energéticos que constituyen una alta complejidad para la matriz de interacción S .

Cuando el cálculo se realiza a bajas energías, los momentos de las partículas tienden a cero, de esta forma, la amplitud del proceso, es decir, el valor esperado de la matriz S se hace muy sencilla, proporcional a las longitudes de dispersión de ondas s . Según esto como consideramos momentos pequeños, se puede ir de mecánica cuántica relativista a la no relativista. En el caso del átomo $H\pi$ se tiene:

$$\lim_{k_\pi, k_N \rightarrow 0} \langle in | \mathfrak{L}(0) | out \rangle = 8\pi(m_\pi + m_p)T, \quad (2.23)$$

donde T depende del proceso[3].

Capítulo 3

INTERACCIÓN PIÓN-NUCLEÓN πN

En este capítulo se estudia la interacción πN . Por un lado se define la función de onda en el estado base para el estado ligado $\pi^- + p$, para esto se considera la interacción entre el campo mesónico y el campo de Dirac, junto con su propagador. Además, se demuestra la condición de normalización de la función de onda para el $H\pi$. Por otro lado, se acoplan los Isospines del sistema nucleón-pión para establecer los estados posibles, y se aplica la simetría de isospín para definir los canales de interacción y un estimativo de las respectivas amplitudes. También se establecen las ecuaciones de los parámetros básicos necesarios para el desarrollo final, como condiciones de normalización, conmutadores, entre otros.

3.1 Función de onda para el hidrógeno piónico $H\pi$

Las ecuaciones (D.4) y (3.1), representan mesones y fermiones libres, mucho tiempo antes de que se presente la interacción. Cuando las partículas están lo suficientemente cercanas ocurre el proceso de interacción. Este proceso es el que nos interesa, ya que aquí se genera el átomo $H\pi$; se considera entonces la interacción de los campos libres formando la función de onda del estado. En este caso la función de onda esta definida como[8]:

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2p_1^0(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2p_2^0(2\pi)^3} f_1(\mathbf{p}_1) f_2(\mathbf{p}_2) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, in\rangle \quad (3.1)$$

Donde f_1 y f_2 son cada una de las funciones de onda interactuando en el espacio de momento. in representa el estado inicial, antes de la interacción $in = |0\rangle$, el estado

vacío. El producto de los campos libres, la interacción entre ellos, forman la función de onda del estado ligado. Para el átomo $H\pi$ ver figura (3.1), en el estado base, sin considerar el spin se tiene[13]:

$$|H\pi(\mathbf{P})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) \quad (3.2)$$

$$\times \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) |\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p)\rangle.$$

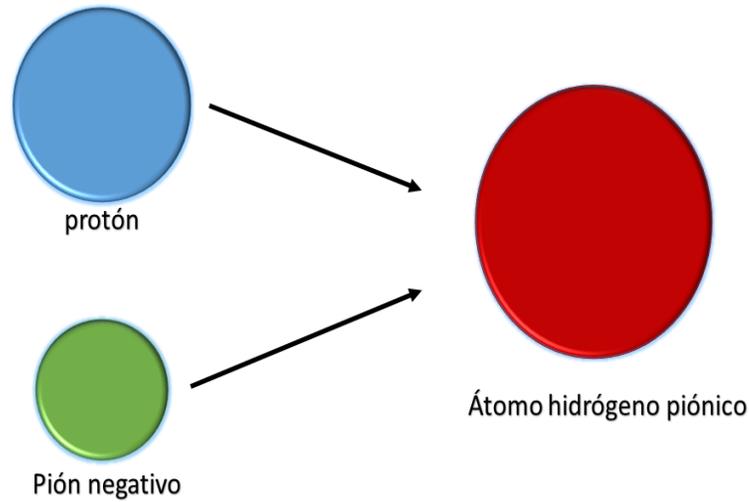


Figura 3.1: *Interacción $p + \pi^-$.*

Aquí $E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)$ es la energía total del átomo $H\pi$ en el estado base definida como:

$$E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p) = \sqrt{M^2 + |\mathbf{P}|^2}; \quad (3.3)$$

con \mathbf{P} el momento de estado $H\pi$, y $M = m_p + m_{\pi^-} + E_{1s}$ su masa. El factor E_{1s} es la energía de ligadura del átomo. $\Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})$ la función de onda del pión ligado al protón en su estado base, en el espacio de momento. La cual esta normalizada por[13]:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})|^2 = 1. \quad (3.4)$$

El ket $|\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-})p(\mathbf{k}_p)\rangle$ es el vector estado de la interacción pión-protón definido por[10]:

$$|\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-})p(\mathbf{k}_p)\rangle = a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)|0\rangle; \quad (3.5)$$

con $a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})$ y $a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)$ los operadores creación para el pión y el protón a partir del estado vacío. Para estos operadores creación y destrucción están definidas las reglas de conmutación y anticonmutación dadas por las ecuaciones (2.3-2.6). Para el caso del π^- y el p en la representación del momento se tiene[14]:

$$[a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}), a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})] = (2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-}) \delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}_{\pi^-}) \quad (3.6)$$

$$[a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}), a_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})] = [a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}'_{\pi^-}), a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})] = 0 \quad (3.7)$$

$$\{a_p(\mathbf{k}'_p), a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)\} = (2\pi)^3 2E_p(\mathbf{k}_p) \delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p) \quad (3.8)$$

$$\{a_p(\mathbf{k}'_p), a_p(\mathbf{k}_p)\} = [a_p^\dagger(\mathbf{k}'_p), a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)] = 0 \quad (3.9)$$

3.1.1. Normalización de la función de onda $H\pi$

Para obtener la condición de normalización se consideran dos estados diferentes, uno dado por la ecuación (3.2), el otro estado está dado por:

$$\begin{aligned} |H\pi(\mathbf{P}')\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}'_p) \quad (3.10) \\ &\quad \times \sqrt{2E_0(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p)} \Phi_0(\mathbf{k}'_{\pi^-}) |\pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-})p(\mathbf{k}'_p)\rangle. \end{aligned}$$

Para integrar las ecuaciones (3.2) y (3.10), se aplican las propiedades de la función δ [15]:

$$\delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) = \delta^3(\mathbf{k}_p - (\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-})); \quad (3.11)$$

luego:

$$\begin{aligned} |H\pi(\mathbf{P})\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P})}} \delta^3(\mathbf{k}_p - (\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-})) \\ &\quad \times \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) |\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-})p(\mathbf{k}_p)\rangle; \end{aligned}$$

evaluando la integral con respecto a \mathbf{k}_p , entonces $\mathbf{k}_p = \mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-}$, y se obtiene:

$$|H\pi(\mathbf{P})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{\sqrt{2E_0(\mathbf{P})}}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-})}} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) |\pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-})p(\mathbf{k}_p)\rangle.$$

Análogamente para el otro estado:

$$|H\pi(\mathbf{P}')\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{\sqrt{2E_0(\mathbf{P}')}}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-})}} \Phi_0(\mathbf{k}'_{\pi^-}) |\pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-})p(\mathbf{k}'_p)\rangle.$$

Para normalizar la función se hace el “sandwich ” $\langle H\pi(\mathbf{P}')|H\pi(\mathbf{P})\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle H\pi(\mathbf{P}')|H\pi(\mathbf{P})\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3 k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{\sqrt{2E_0(\mathbf{P})}}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-})}} \\ &\times \frac{\sqrt{2E_0(\mathbf{P}')}}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-})}} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-})p(\mathbf{k}'_p) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-})p(\mathbf{k}_p) \rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A continuación se desarrolla el bracket de los estados dados por la ecuación (3.5), y recordando que:

$$\langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-})p(\mathbf{k}'_p) | = \langle 0 | a_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-}) a_p(\mathbf{k}'_p); \quad (3.13)$$

entonces:

$$\langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-})p(\mathbf{k}'_p) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-})p(\mathbf{k}_p) \rangle = \langle 0 | a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}) a_p(\mathbf{k}'_p) a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-}) a_p^\dagger(\mathbf{k}_p) | 0 \rangle.$$

Usando la abreviatura $\langle \pi^-, p \rangle$ para el bracket, además ya que cada partícula es creada independiente de la otra, es decir, el operador creación del protón solo actúa en el espacio del protón y lo mismo sucede para el pión, se puede realizar una permutación entre ellos sin afectar la ecuación, tal que:

$$\langle \pi^-, p \rangle = \langle 0 | a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}) a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-}) a_p(\mathbf{k}'_p) a_p^\dagger(\mathbf{k}_p) | 0 \rangle. \quad (3.14)$$

Ya que:

$$[a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}), a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})] = a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}) a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-}) - a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-}) a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-});$$

y usando la ecuación (3.6) se tiene:

$$a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-}) = (2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})\delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}_{\pi^-}) + a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}). \quad (3.15)$$

Análogamente:

$$\{a_p(\mathbf{k}'_p), a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)\} = a_p(\mathbf{k}'_p)a_p^\dagger(\mathbf{k}_p) + a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)a_p(\mathbf{k}'_p);$$

y tomando la ecuación (3.8) finalmente se llega a:

$$a_p(\mathbf{k}'_p)a_p^\dagger(\mathbf{k}_p) = (2\pi)^3 2E_p(\mathbf{k}_p)\delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p) - a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)a_p(\mathbf{k}'_p). \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.15) y (3.16) en (3.14):

$$\begin{aligned} \langle \pi^-, p \rangle &= \langle 0 | [(2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})\delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}_{\pi^-}) + a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})] \\ &\quad \times [(2\pi)^3 2E_p(\mathbf{k}_p)\delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p) - a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)a_p(\mathbf{k}'_p)] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Realizando los productos:

$$\begin{aligned} \langle \pi^-, p \rangle &= \langle 0 | (2\pi)^6 4E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})E_p(\mathbf{k}_p)\delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}_{\pi^-})\delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p) | 0 \rangle - \\ &\quad \langle 0 | (2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})\delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}_{\pi^-})a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)a_p(\mathbf{k}'_p) | 0 \rangle + \\ &\quad \langle 0 | (2\pi)^3 2E_p(\mathbf{k}_p)\delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p)a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-}) | 0 \rangle - \\ &\quad \langle 0 | a_{\pi^-}^\dagger(\mathbf{k}_{\pi^-})a_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})a_p^\dagger(\mathbf{k}_p)a_p(\mathbf{k}'_p) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Recordando que $\langle 0|0\rangle = 1$ y que $a_i|0\rangle = 0$ se obtiene:

$$\langle \pi^-, p \rangle = (2\pi)^6 4E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})E_p(\mathbf{k}_p)\delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}_{\pi^-})\delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p). \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.17) en (3.12):

$$\begin{aligned} \langle H\pi(\mathbf{P}') | H\pi(\mathbf{P}) \rangle &= 4 \int \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{\sqrt{2E_0(\mathbf{P})}}{\sqrt{2E(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-})}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{2E_0(\mathbf{P}')}}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-})}} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})\Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-})E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-}) \\ &\quad E_p(\mathbf{k}_p)\delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}_{\pi^-})\delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p). \end{aligned}$$

Integrando con respecto a \mathbf{k}'_{π^-} , se evalúa $\mathbf{k}'_{\pi^-} = \mathbf{k}_{\pi^-}$, y recordando que $\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} = \mathbf{k}_p$:

$$\langle H\pi(\mathbf{P}') | H\pi(\mathbf{P}) \rangle = 2E_0(\mathbf{P}) \delta^3(\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p) \int d^3k_{\pi^-} |\Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})|^2.$$

Finalmente $\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p = \mathbf{P}' - \mathbf{P}$, y sustituyendo la condición de normalización (3.4) se llega a:

$$\langle H\pi(\mathbf{P}') | H\pi(\mathbf{P}) \rangle = (2\pi)^3 E_0(\mathbf{P}) \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{P}). \quad (3.18)$$

3.2 Dispersión πN por simetría de Isospín

A continuación, vamos a realizar un estudio de la interacción πN usando la teoría de Isospín, para poder establecer los estados permitidos, y los canales de cada proceso. Primero se plantean los estados de Isospín para cada partícula.

3.2.1. Isospín del nucleón

Sea I el número cuántico de Isospín, entonces $\mathbf{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3$ con \hat{I}_3 la componente a lo largo del eje de preferencia. En el apéndice (C) se discute el valor de $I = \frac{1}{2}$ para el nucleón, entonces $I_3 = \pm \frac{1}{2}$; el positivo para el protón y negativo para el neutrón, luego: [7].

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad |n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.19)$$

Los diferentes estados del nucleón en la base espinorial están dados por:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

3.2.2. Isospín del pión

Como se discutió en el capítulo 2, número cuántico de isospín para el pión es $I = 1$, entonces la componente 3 de isospín toma valores $I_3 = 1, 0, -1$. Para el π^+ el 1, para el π^- el -1 y para el π^0 el 0, luego[16]:

$$|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle. \quad (3.21)$$

Finalmente, los espinores del pión son:

$$|\pi^+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\pi^-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\pi^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

3.3 Acoplamiento de Isospín pión-nucleón

En el estudio de la interacción pión-nucleón como para cualquier proceso en general, es necesario establecer las reglas de selección. Estas reglas permiten aclarar los estados de interacción permitidos. Ya que el proceso pión-nucleón se presenta bajo interacciones fuertes, se consideran los estados en base de la interacción de isospín. Para establecer los estados permitidos, se realiza el acople del momento de isospín del pión y el nucleón con la teoría de suma de momentos angulares y coeficientes de Clebsch-Gordan.

El número de estados permitidos está dado por[7]:

$$N = (2t_1 + 1)(2t_2 + 1); \quad (3.23)$$

donde t_1 y t_2 son los números de isospín a sumar. En este caso para el pión y el nucleón se tiene que $t_1 = 1$ (pión) y $t_2 = 1/2$ (nucleón). Lo que nos arroja un total de 6 estados posibles. Los valores de momento de isospín permitidos en la interacción están establecidos por la relación:

$$|t_1 - t_2| \leq t \leq |t_1 + t_2|. \quad (3.24)$$

Donde t serán los valores permitidos de isospín. Según esto se obtiene $1/2 \leq t \leq 3/2$.

Sea m la componente 3 del Isospín resultante, y ya que $m = -t, \dots, t$ entonces para $t = 1/2$ se tienen dos estados $m_1 = -1/2$ y $m_2 = 1/2$. Con esto se pueden establecer dos estados:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle; \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.25)$$

Análogamente para $t = 3/2$ se tiene $m = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$, y los estados:

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle, \quad \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle. \quad (3.26)$$

Estos son los seis estados establecidos por (3.23). Para obtener los estados formados en la interacción usamos la relación[7]:

$$\begin{aligned} |t_1 \pm t_2, m\rangle &= \sqrt{\frac{t_1 \mp m + \frac{1}{2}}{2t_1 + 1}} \left| t_1, t_2; m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \pm \sqrt{\frac{t_1 \pm m + \frac{1}{2}}{2t_1 + 1}} \\ &\left| t_1, t_2; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para $t = 1/2$, $m = 1/2$, se tiene el estado $|1/2, 1/2\rangle$. Aplicando (3.27) y tomando el primer signo negativo se tiene:

$$\left| 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones (3.19-3.21) se llega a:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |\pi^+\rangle |n\rangle - \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |\pi^0\rangle |p\rangle. \quad (3.28)$$

Análogamente se puede obtener el estado $|1/2, -1/2\rangle$:

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1 - (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Con lo que se obtiene:

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |\pi^0\rangle |n\rangle - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |\pi^-\rangle |p\rangle. \quad (3.29)$$

Ahora si $t = 3/2$, entonces para $m = -3/2$ se toma el primer signo positivo de la ecuación (3.27):

$$\left| 1 + \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{0}{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; -2, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \pm \left| 1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Por convención de fase[7], se considera la raíz positiva, luego:

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Nuevamente reescribiendo en términos de los estados de los hadrones se llega a:

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = |\pi^-\rangle |n\rangle. \quad (3.30)$$

Repitiendo el cálculo para $m = 3/2$:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

La primera raíz se anula, y tomando la convención de fase se tiene:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle;$$

finalmente:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |\pi^+\rangle |p\rangle. \quad (3.31)$$

Ahora considerando $m = -1/2$:

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Con lo que se obtiene:

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |\pi^0\rangle |n\rangle + \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |\pi^- \rangle |p\rangle. \quad (3.32)$$

Repitiendo el procedimiento para $m = 1/2$:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1) + 1}} \left| 1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Finalmente se llega a:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) |\pi^+\rangle |n\rangle + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) |\pi^0\rangle |p\rangle. \quad (3.33)$$

3.3.1. Estados πN en la base vectorial

El cálculo de cada uno de los estados en la base vectorial, implica retomar las ecuaciones (3.28-3.33). Para encontrar el estado $|\pi^+ + p\rangle$, tomamos todos los estados de acoplamiento de Isospín que lo involucren, si revisamos se puede notar que este estado es único, ecuación (3.31) con Isospín resultante 3/2.

Vamos ahora a calcular el estado $|\pi^0 + p\rangle$, el cual está relacionado por las ecuaciones

(3.28) y (3.33). Ahora multiplico (3.28) por $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ y (3.33) por $\sqrt{\frac{2}{3}}$ así:

$$-\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+\rangle |n\rangle + \left(\frac{1}{3} \right) |\pi^0\rangle |p\rangle \right). \quad (3.34)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+\rangle |n\rangle + \left(\frac{2}{3} \right) |\pi^0\rangle |p\rangle \right). \quad (3.35)$$

Sumando (3.34) y (3.35), y solucionando para $|\pi^0 + p\rangle$ se llega a:

$$|\pi^0 + p\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.36)$$

Ahora el estado $|\pi^- + p\rangle$ está relacionado por las ecuaciones (3.29) y (3.32); primero multiplico a (3.29) por $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, y a (3.32) por $\sqrt{\frac{1}{3}}$:

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^0\rangle |n\rangle + \frac{2}{3} |\pi^-\rangle |p\rangle. \quad (3.37)$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0\rangle |n\rangle + \frac{1}{3} |\pi^-\rangle |p\rangle. \quad (3.38)$$

Ahora haciendo (3.37)+(3.38) y solucionando para $|\pi^- + p\rangle$ se tiene:

$$|\pi^- + p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.39)$$

Para el estado $|\pi^+ + n\rangle$ el cual esta relacionado por las ecuaciones (3.28) y (3.33), multiplico (3.28) por $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mientras que a (3.33) por $\sqrt{\frac{1}{3}}$ y luego sumando se llega a:

$$|\pi^+ + n\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.40)$$

Para calcular el estado $|\pi^0 + n\rangle$ multiplico la ecuación (3.29) por $\sqrt{\frac{1}{3}}$ y a (3.32) por $\sqrt{\frac{2}{3}}$, y después de sumar se obtiene:

$$|\pi^0 + n\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.41)$$

Finalmente, el estado $|\pi^- + n\rangle$ está dado por la ecuación (3.30). Las ecuaciones (3.30), (3.31), (3.36), (3.39), (3.40) y (3.41) representan los 6 estados πN en la base vectorial.

Con todo esto ya es posible establecer los procesos que se presentan en la dispersión pión Nucleón $\pi N \rightarrow \pi N$. Puede apreciarse que es posible que se presenten seis procesos elásticos (Tabla 3.1), y cuatro procesos de intercambio de carga (Tabla 3.2)[17]:

Tabla 3.1: Procesos elásticos

(a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$	(b) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$
(c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$	(d) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$
(e) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$	(f) $\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$

Tabla 3.2: Procesos de intercambio de carga

(g) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$	(h) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$
(i) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$	(j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

3.4 Amplitudes de los procesos πN

Como se mencionó en el capítulo (2), la transición del estado inicial al estado final esta determinada por los elementos de la matriz S de interacción. Esta matriz tiene toda la información del proceso; en teoría de perturbaciones se define como la amplitud de transición de un estado a otro[18].

En interacciones fuertes de baja energía, donde la interacción se puede tratar como una perturbación, se define un lagrangiano efectivo local; porque solo funciona y es efectivo para un determinado rango definido muy pequeño de energías. En este caso los elementos de la matriz de transición están relacionados con este lagrangiano efectivo por[10]:

$$\mathbb{T} = \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (3.42)$$

Mientras que la amplitud de un proceso cualquiera, para ir de un estado inicial a un estado final esta dada por el valor esperado del operador:[8]

$$T = \langle in|\mathcal{L}|out\rangle. \quad (3.43)$$

El paso siguiente es estimar la forma de la amplitud para todos los procesos de las tablas 3.1 y 3.2.

Para la amplitud del proceso elástico a de la tabla 3.1, se usa la ecuación (3.31), entonces la amplitud esta dada por:

$$\langle \pi^+ + p|\mathcal{L}|\pi^+ + p\rangle = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \left| \mathcal{L} \right| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = T^{\frac{3}{2}}; \quad (3.44)$$

donde el exponente $3/2$ indica el Isospín resultante del estado.

La amplitud del proceso elástico b de la tabla 3.1 se puede determinar con el estado (3.36), luego:

$$\langle \pi^0 + p|\mathcal{L}|\pi^0 + p\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \left| \right. - \sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \right. \right) \mathcal{L} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right),$$

$$\langle \pi^0 + p|\mathcal{L}|\pi^0 + p\rangle = \frac{2}{3} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \left| \mathcal{L} \right| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{3} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \mathcal{L} \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Aquí se puede ver que el primer término tiene Isospín $3/2$, mientras que el segundo Isospín $1/2$; así que:

$$\langle \pi^0 + p|\mathcal{L}|\pi^0 + p\rangle = \frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}T^{\frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

Ahora se calcula la amplitud del proceso c de la tabla 3.1, con el estado (3.39):

$$\langle \pi^- + p|\mathcal{L}|\pi^- + p\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \left| \right. - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| \right. \right) \mathcal{L} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right),$$

$$\langle \pi^- + p|\mathcal{L}|\pi^- + p\rangle = \frac{1}{3} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \left| \mathcal{L} \right| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{2}{3} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| \mathcal{L} \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Se puede ver entonces que el primer término tiene Isospín $\frac{3}{2}$, mientras que el segundo $\frac{1}{2}$, luego:

$$\langle \pi^- + p | \mathcal{L} | \pi^- + p \rangle = \frac{1}{3} T^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} T^{\frac{1}{2}}. \quad (3.46)$$

Análogamente para el proceso d con el estado (3.40):

$$\langle \pi^+ + n | \mathcal{L} | \pi^+ + n \rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \right) \mathcal{L} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right);$$

con lo que se obtiene:

$$\langle \pi^+ + n | \mathcal{L} | \pi^+ + n \rangle = \frac{1}{3} T^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} T^{\frac{1}{2}}. \quad (3.47)$$

Para el proceso e se usa el estado (3.41) y se tiene:

$$\langle \pi^0 + n | \mathcal{L} | \pi^0 + n \rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \right) \mathcal{L} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right),$$

$$\langle \pi^0 + n | \mathcal{L} | \pi^0 + n \rangle = \frac{1}{3} T^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}}. \quad (3.48)$$

Finalmente para el proceso f se toma el estado (3.30):

$$\langle \pi^- + n | \mathcal{L} | \pi^- + n \rangle = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \middle| \mathcal{L} \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = T^{\frac{3}{2}}. \quad (3.49)$$

Por otro lado para el proceso g de cambio de carga tabla 3.2, $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$, se toman los estados (3.40) y (3.36), entonces:

$$\langle \pi^+ + n | \mathcal{L} | \pi^0 + p \rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \right) \mathcal{L} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right),$$

$$\langle \pi^+ + n | \mathcal{L} | \pi^0 + p \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| \mathcal{L} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \mathcal{L} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Se puede apreciar aquí que el primer término tiene Isospín $3/2$ mientras que el segundo $1/2$, luego se llega a:

$$\langle \pi^+ + n | \mathcal{L} | \pi^0 + p \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}}); \quad (3.50)$$

la cual es análoga para el proceso h ya que involucra los mismos estados. Ahora para el estado i el cual es idéntico al j se usan los estados (3.39) y (3.41) con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \pi^- + p | \mathcal{L} | \pi^0 + n \rangle &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \middle| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \right) \mathcal{L} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right), \\ \langle \pi^- + p | \mathcal{L} | \pi^0 + n \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \mathcal{L} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \mathcal{L} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \langle \pi^- + p | \mathcal{L} | \pi^0 + n \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} (T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Finalmente, estos procesos y sus amplitudes pueden ser agrupados por procesos elásticos y cambio de carga. Para los procesos elásticos:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \langle \pi^+ + p | \mathcal{L} | \pi^+ + p \rangle \\ \langle \pi^- + n | \mathcal{L} | \pi^- + n \rangle \end{aligned} \right\} &= T^{\frac{3}{2}} \\ \left. \begin{aligned} \langle \pi^0 + p | \mathcal{L} | \pi^0 + p \rangle \\ \langle \pi^0 + n | \mathcal{L} | \pi^0 + n \rangle \end{aligned} \right\} &= \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} T^{\frac{1}{2}} \\ \left. \begin{aligned} \langle \pi^- + p | \mathcal{L} | \pi^- + p \rangle \\ \langle \pi^+ + n | \mathcal{L} | \pi^+ + n \rangle \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{3} T^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} T^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Mientras que para los de cambio de carga[8]:

$$\left. \begin{aligned} \langle \pi^+ + n | \mathcal{L} | \pi^0 + p \rangle \\ \langle \pi^0 + p | \mathcal{L} | \pi^+ + n \rangle \\ \langle \pi^- + p | \mathcal{L} | \pi^0 + n \rangle \\ \langle \pi^0 + n | \mathcal{L} | \pi^- + p \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{\sqrt{2}}{3} (T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}}) \quad (3.53)$$

Capítulo 4

TAZA DE DECAIMIENTO Y CAMBIO EN LOS NIVELES DE ENERGÍA DEL ESTADO $H\pi$

Como se mencionó anteriormente, la interferencia del potencial electromagnético y las interacciones fuertes producen un cambio en los niveles de energía de átomo $H\pi$, haciendo el estado inestable. En este capítulo se realizara un cálculo de dicho cambio, usando la función de onda en el estado base y el proceso elástico de interacción $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$. Ya que el sistema es inestable, se puede calcular también la tasa de decaimiento Γ ; utilizando el proceso de cambio de carga $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$. Para esto se aplican las interacciones fuertes como perturbaciones; haciendo uso de la matriz S de interacción. Cabe mencionar que todos los cálculos se realizan en el estado base energético del sistema sin considerar el momento angular de spin.

4.1 Parámetros del átomo $H\pi$

Ya que el átomo $H\pi$ es similar al átomo de Hidrógeno; dos partículas interactuando mediante potencial de Coulomb, el espectro enérgico entre estos dos estados no difieren mucho para las órbitas superiores. La diferencia es notable al analizar los estados de energía en órbitas pequeñas. Ya que entre más cerca este el protón del pión nos adentramos al espacio donde la influencia de las interacciones fuertes se hace presente. Dichas interacciones pueden ser consideradas a bajas intensidades, pues como se mencionó en el apéndice (B), el radio en el estado base del átomo $H\pi$ es aun mayor al radio

de alcance de las interacciones fuertes. Por esta razón cualquier cálculo que se realice, las interacciones fuertes serán tratadas como perturbaciones.

La unitariedad de la matriz de interacción dada por(2.17) es de suma importancia ya que permite realizar en teoría de perturbaciones la siguiente descomposición[8]:

$$S = 1 + i\mathbb{T}; \quad (4.1)$$

donde \mathbb{T} se considera la perturbación al sistema. Ya que esta perturbación esta dada por interacciones fuertes, se relaciona con la energía de interacciones fuertes $\mathbb{T} = F(\mathfrak{L}_{st})$, donde \mathfrak{L}_{st} es la densidad lagrangiana de la interacción.

Si aplicamos la serie de Dyson dada por (2.13), y considerando solo dos ordenes de perturbación:

$$S = 1 - i \int d^4x_1 \mathfrak{L}_i(x_1) - \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathfrak{L}_i(x_1) \mathfrak{L}_i(x_2)],$$

$$S = 1 + i \left(- \int d^4x_1 \mathfrak{L}_i(x_1) + \frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathfrak{L}_i(x_1) \mathfrak{L}_i(x_2)] \right). \quad (4.2)$$

Si comparamos las ecuaciones (4.1) y (4.2), es fácil apreciar que la perturbación esta dada por:

$$\mathbb{T} = - \int d^4x_1 \mathfrak{L}_i(x_1) + \frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathfrak{L}_i(x_1) \mathfrak{L}_i(x_2)]. \quad (4.3)$$

Para obtener cualquier observable del operador es necesario calcular el valor esperado de este. La matriz de elementos $\langle \phi_i | S | \phi_f \rangle$, en este caso, para el átomo $H\pi$:

$$\langle S \rangle = \langle H\pi(\mathbf{P}') | S | H\pi(\mathbf{P}) \rangle; \quad (4.4)$$

entonces:

$$\langle S \rangle = \langle H\pi(\mathbf{P}') | H\pi(\mathbf{P}) \rangle + i \langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathbb{T} | H\pi(\mathbf{P}) \rangle. \quad (4.5)$$

Los elementos de la segunda matriz proporcionan los cambios en el sistema debido a la

perturbación. Dicha matriz, de acuerdo a (4.3) toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathbb{T}|H\pi(\mathbf{P})\rangle &= -\langle H\pi(\mathbf{P}')|\int d^4x_1\mathcal{L}_1(x_1)|H\pi(\mathbf{P})\rangle + \\ &\quad \frac{i}{2}\langle H\pi(\mathbf{P}')|\int d^4x_1d^4x_2T[\mathcal{L}_1(x_1)\mathcal{L}_2(x_2)]|H\pi(\mathbf{P})\rangle \end{aligned}$$

En el momento en el que inicia la interacción $t_1 = 0$. Además, la integral respecto a d^4x_1 , representa el volumen donde la interacción toma lugar. Aquí el operador de interacción, en este caso el lagrangiano; toma un valor constante, de igual manera la función de onda no depende del tiempo ni las coordenadas, ya que el espacio donde la interacción está sucediendo no cambia. Esta integral representa solo el volumen de un espacio de momento cuadrimensional donde se presenta la dispersión, entonces:

$$\begin{aligned} \langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathbb{T}|H\pi(\mathbf{P})\rangle &= -\langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathcal{L}(0)|H\pi(\mathbf{P})\rangle \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 + \\ &\quad \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}')|T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(0)]|H\pi(\mathbf{P})\rangle \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathbb{T}|H\pi(\mathbf{P})\rangle &= (2\pi)^4\delta^4(\mathbf{P} - \mathbf{P}') [-\langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathcal{L}(0)|H\pi(\mathbf{P})\rangle + \\ &\quad \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}')|T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(0)]|H\pi(\mathbf{P})\rangle]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

El término $(2\pi)^4\delta^4(\mathbf{P} - \mathbf{P}')$ está definido como el cuadvolumen VT para $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ [19]; luego:

$$\begin{aligned} \frac{\langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathbb{T}|H\pi(\mathbf{P})\rangle}{TV} &= -\langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathcal{L}(0)|H\pi(\mathbf{P})\rangle + \\ &\quad \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}')|T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(0)]|H\pi(\mathbf{P})\rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ya que no limitamos el espacio para el sistema $TV \rightarrow \infty$, y:

$$\begin{aligned} \lim_{T,V \rightarrow \infty} \frac{\langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathbb{T}|H\pi(\mathbf{P})\rangle}{TV} &= -\langle H\pi(\mathbf{P}')|\mathcal{L}(0)|H\pi(\mathbf{P})\rangle + \\ &\quad \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}')|T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(0)]|H\pi(\mathbf{P})\rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Cuando se tratan las dispersiones en teoría de perturbaciones, el cambio de los niveles de energía y la tasa de decaimiento están definidos por:[13][19].

$$\lim_{TV \rightarrow \infty} \left. \frac{\langle H\pi(\mathbf{P}) | \mathbb{T} | H\pi(\mathbf{P}) \rangle}{2E_0(\mathbf{P})VT} \right|_{\mathbf{P}=0} = -\epsilon_{1s} + i \frac{\Gamma_{1s}}{2} \quad (4.9)$$

Comparando las ecuaciones (4.9) y (4.8) se tiene que:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \langle H\pi(\mathbf{P}) | \mathcal{L}(0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle \quad (4.10)$$

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}) | T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(0)] | H\pi(\mathbf{P}) \rangle. \quad (4.11)$$

4.2 Termino de primera aproximación para ϵ_{1s}

Las interacciones fuertes producen un corrimiento en el nivel energético del estado base del átomo $H\pi$, con respecto al esperado por interacciones electromagnéticas, (ver figura 4.1). Sea ϵ_{1s}^1 el término de primera aproximación de ϵ_{1s} , ya que está dado por el primer término de perturbación en la serie de Dyson.

Para desarrollar el cálculo, se retoma función de onda en el estado base del átomo $H\pi$ ecuación (3.2). Introduciendo (3.2) en (4.10) se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= 2E_0 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}'_p) \sqrt{2E_0(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p)} \\ &\times \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(0) | \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)} \\ &\times \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle; \end{aligned} \quad (4.12)$$

organizando términos:

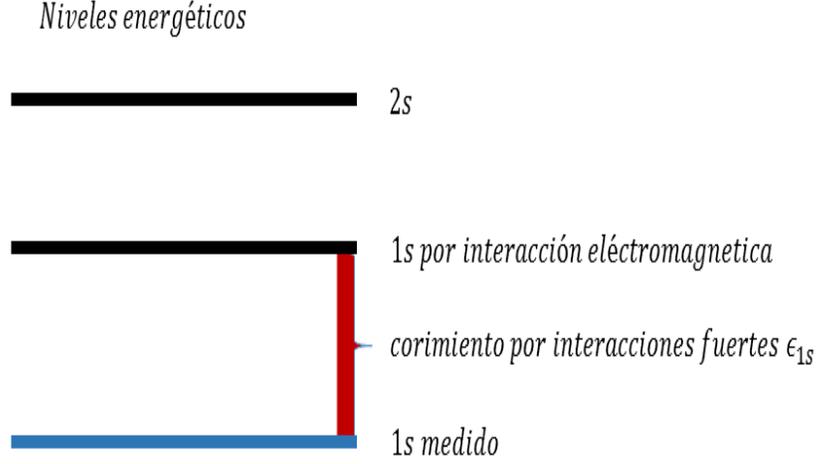


Figura 4.1: Corrimiento en el nivel de energía base del átomo $H\pi$ debido a la perturbación de las interacciones fuertes[5].

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^1 &= \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \left[\frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3 k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \frac{d^3 k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3 k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \right. \\
&\quad \times \sqrt{2E_0(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p)} \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}'_p) \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) \\
&\quad \left. \times \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle \right]. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

El factor del valor esperado de $\mathcal{L}(0)$ es la amplitud del proceso (ver ecuación (3.43)). Para solucionar las integrales con respecto a \mathbf{k}_p y \mathbf{k}'_p , se aplica $\delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) = \delta^3(\mathbf{k}_p - (\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-}))$ [15]. Se cumple así el principio de conservación de la cantidad de movimiento; $\mathbf{P} = \mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p$, luego $\mathbf{k}_p = \mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-}$; entonces:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^1 &= \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \left[\frac{T}{(2\pi)^6} \sqrt{2E_0(\mathbf{P})} \sqrt{2E_0(\mathbf{P}')} \int \frac{d^3 k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3 k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})}{\sqrt{2E_p(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-})}} \right]; \quad (4.14)
\end{aligned}$$

donde T es la amplitud. Considerando que la interacción es vista desde el marco de referencia del centro de masa ver figura (4.2), entonces el estado ligado $H\pi$ esta en reposo; luego $\mathbf{P} = \mathbf{P}' = 0$, lo que implica que $\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p = 0$ y $|\mathbf{k}_{\pi^-}| = |\mathbf{k}_p|$:

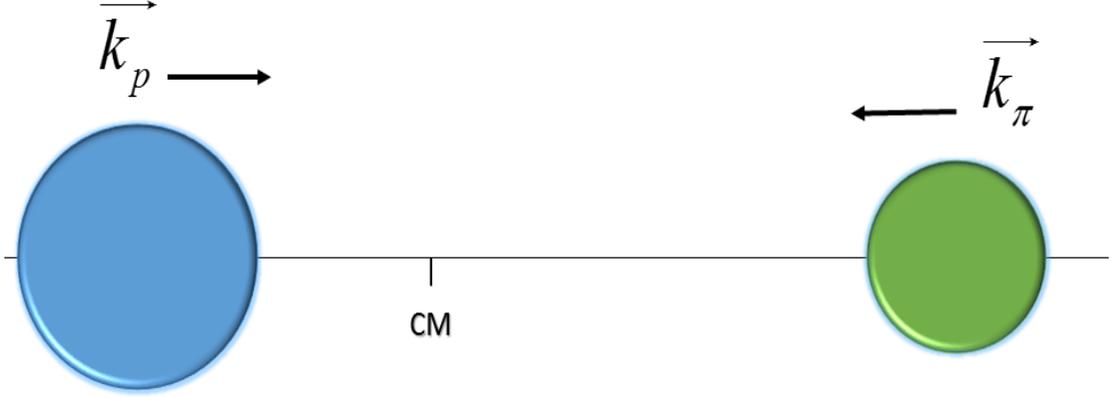


Figura 4.2: Interacción $p + \pi^-$ vista desde el marco de referencia de centro de masa del sistema

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{T}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k'_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}'_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})} 2E_p(\mathbf{k}_{\pi^-})} \int \frac{d^3 k_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(\mathbf{k}_{\pi^-})}}. \quad (4.15)$$

$$\epsilon_{1s}^1 = T \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}'_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})} 2E_p(\mathbf{k}_{\pi^-})} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(\mathbf{k}_{\pi^-})}}.$$

Considerando los conmutadores dados por (3.6-3.9), se generaliza en momento tal que $\mathbf{k}'_{\pi^-} = \mathbf{k}_{\pi^-} \equiv \mathbf{k}$; luego:

$$\epsilon_{1s}^1 = T \left(\int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k})} 2E_p(\mathbf{k})} \right)^2 \quad (4.16)$$

La forma de la amplitud T para este proceso se obtuvo por la simetría de isospín y esta dada por la ecuación (3.52), ya que se toma el proceso elástico c de la tabla (3.1). Debido a que esta interacción se ha considerado con interacciones fuertes de baja energía,

por la condición de equivalencia se tiene:

$$T = 8\pi(m_{\pi^-} + m_p)T_{\pi^-+p \rightarrow \pi^-+p}. \quad (4.17)$$

Considerando la ecuación (3.52):

$$T = \frac{8\pi}{3}(m_{\pi^-} + m_p)(2T^{1/2} + T^{3/2}); \quad (4.18)$$

luego:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{8\pi}{3}(m_{\pi^-} + m_p)(2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k})2E_p(\mathbf{k})}} \right)^2. \quad (4.19)$$

Ahora realizando el producto de las energías se tiene:

$$\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k})2E_p(\mathbf{k})} = \sqrt{4E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(\mathbf{k})} = 2 \left(\sqrt{m_{\pi^-}^2 + k^2} \sqrt{m_p^2 + k^2} \right)^{1/2};$$

la cual puede ser escrita:

$$\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k})2E_p(\mathbf{k})} = 2 \left(m_p \sqrt{m_{\pi^-}^2 + k^2} \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_p^2}} \right)^{1/2}.$$

En el limite de bajas energías, la masa del protón se hace muy grande en comparación con el momento $m_p \gg k$, luego:

$$\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k})2E_p(\mathbf{k})} = 2\sqrt{m_p}(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}. \quad (4.20)$$

Entonces:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{8\pi}{3}(m_{\pi^-} + m_p)(2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{2\sqrt{m_p}(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2. \quad (4.21)$$

La masa reducida del sistema $H\pi$ esta dada por:

$$\mu = \frac{m_{\pi^-} m_p}{m_{\pi^-} + m_p}, \quad m_{\pi^-} + m_p = \frac{m_{\pi^-} m_p}{\mu}; \quad (4.22)$$

reemplazando en (4.21):

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= \frac{8\pi}{3} \frac{m_{\pi^-} m_p}{\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{m_p}(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2, \\ \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\sqrt{m_{\pi^-} m_p} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{m_p}(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2, \\ \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para resolver esta última integral es necesario considerar la función de onda en el espacio de momento $\Phi_0(\mathbf{k})$, la cual esta dada por[13]:

$$\Phi_{nl}(\mathbf{k}) = \sqrt{4\pi} \int_0^\infty j_l(kr) R_{nl}(r) r^2 dr, \quad (4.24)$$

donde $j_l(kr)$ son las funciones esféricas de Bessel. Para la función de onda en el estado base, $l = 0$ se tiene:

$$\Phi_0(\mathbf{k}) = \sqrt{4\pi} \int_0^\infty j_0(kr) R_0(r) r^2 dr. \quad (4.25)$$

Por otro lado tomando $d^3 k = d\Omega k^2 dk$, y ya que el resto de la función es independiente de las coordenadas angulares, la integral de ángulo solido es 4π . ϵ_{1s}^1 puede ser escrito:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} 4\pi \sqrt{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dk dr j_0(kr) R_0(r) r^2 k^2}{(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2. \quad (4.26)$$

$R_0(r)$ esta dado por (B.3), pero:

$$\Psi_{1s}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \quad \frac{1}{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\pi} \Psi_{1s}(0) \quad (4.27)$$

Las funciones esféricas de Bessel se definen por [15]:

$$j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\sin x}{x} \right). \quad (4.28)$$

Sustituyendo (B.4) (4.27) y (4.28) para $l = 0$ en (4.26) se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{8\pi^3} 8\pi\sqrt{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{2\sqrt{\pi}\Psi_{1s}(0) \mathbf{e}^{-\frac{r}{a}} r^2 k^2}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} dr dk \right)^2; \\ \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{2\sqrt{m_{\pi^-}}}{\pi} \Psi_{1s}(0) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(kr) \mathbf{e}^{-\frac{r}{a}} rk}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} dr dk \right)^2. \end{aligned}$$

Estas integrales pueden ser separadas así:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{2\sqrt{m_{\pi^-}}}{\pi} \Psi_{1s}(0) \int_0^\infty \mathbf{e}^{-\frac{r}{a}} r dr \int_0^\infty \frac{\sin(kr)k}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} dk \right)^2. \quad (4.29)$$

La solución de esta integral es algo compleja. No se puede solucionar de manera directa; para solucionarla se debe aplicar algunas propiedades de las funciones de Bessel. Primero recordando que $k \sin(kr) = -\frac{d}{dr}[\cos(kr)]$:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(-\frac{2\sqrt{m_{\pi^-}}}{\pi} \Psi_{1s}(0) \int_0^\infty \mathbf{e}^{-\frac{r}{a}} r dr \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{\cos(kr)}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} dk \right)^2. \quad (4.30)$$

Ahora usando la fórmula (pag 376, ecuación 9.6.25)[20]:

$$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}x^\nu} \int_0^\infty \frac{\cos(xt)dt}{(t^2 + z^2)^{\nu+1/2}}; \quad (4.31)$$

donde K_ν son las funciones de Bessel modificadas de segunda especie y Γ la función gamma. Fácilmente se puede apreciar que $r = x$, $t = k$ y $z = m_{\pi^-}$, con $\nu = -1/4$,

entonces:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(kr)}{(m_{\pi^-}^2 + k^2)^{1/4}} dk = \frac{K_{-\frac{1}{4}}(m_{\pi^-} r) \sqrt{\pi} r^{-1/4}}{\Gamma(\frac{1}{4})(2m_{\pi^-})^{-1/4}} = \frac{\sqrt{\pi} 2^{1/4} K_{-\frac{1}{4}}(m_{\pi^-} r)}{\Gamma(\frac{1}{4})} \left(\frac{m_{\pi^-}}{r}\right)^{1/4}. \quad (4.32)$$

Las funciones de Bessel cumplen con la propiedad $K_{-\frac{1}{4}} = K_{\frac{1}{4}}$. Según esto el corrimiento energético toma la forma:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(-\frac{2\sqrt{m_{\pi^-}}}{\pi} \Psi_{1s}(0) \int_0^\infty \mathbf{e}^{\frac{-r}{a}} r dr \frac{d}{dr} \left[\frac{\sqrt{\pi} 2^{1/4} K_{\frac{1}{4}}(m_{\pi^-} r)}{\Gamma(\frac{1}{4})} \left(\frac{m_{\pi^-}}{r}\right)^{1/4} \right] \right)^2;$$

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(-\frac{2^{5/4} m_{\pi^-}^{3/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Psi_{1s}(0)}{\Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^\infty \mathbf{e}^{\frac{-r}{a}} r dr \frac{d}{dr} \left[K_{\frac{1}{4}}(m_{\pi^-} r) r^{-1/4} \right] \right)^2. \quad (4.33)$$

Ahora haciendo un cambio de variable;

$$z = m_{\pi^-} r \rightarrow r = \frac{z}{m_{\pi^-}} \rightarrow r^{-1/4} = z^{-1/4} m_{\pi^-}^{1/4};$$

$$dr = \frac{dz}{m_{\pi^-}} \rightarrow \frac{d}{dr} = m_{\pi^-} \frac{d}{dz};$$

se tiene:

$$\frac{d}{dr} \left[K_{\frac{1}{4}}(m_{\pi^-} r) r^{-1/4} \right] = m_{\pi^-}^{5/4} \frac{d}{dz} \left[K_{\frac{1}{4}}(z) z^{-1/4} \right]. \quad (4.34)$$

Tomando la relación (pag 376, ecuación 9.6.28)[20]:

$$\frac{1}{z^k} \frac{d^k}{dz^k} \left[z^{-\nu} K_\nu(z) \right] = (-1)^k z^{-\nu-k} K_{\nu+k}(z); \quad (4.35)$$

con $k = 1$, $\nu = \frac{1}{4}$, se tiene que $k + \nu = \frac{5}{4}$ luego:

$$\frac{d}{dz} \left[z^{-1/4} K_{1/4}(z) \right] = -z^{-1/4} K_{5/4}(z);$$

finalmente la ecuación (4.34) se puede escribir:

$$\frac{d}{dr} \left[K_{\frac{1}{4}}(m_{\pi^-} r) r^{-1/4} \right] = -m_{\pi^-}^{5/4} z^{-1/4} K_{5/4}(z). \quad (4.36)$$

Sustituyendo en ϵ_{1s}^1 se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(-\frac{2^{5/4} m_{\pi^-}^{3/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^\infty \frac{z}{m_{\pi^-}} \mathbf{e}^{(-z/m_{\pi^-} - a)} \frac{dz}{m_{\pi^-}} m_{\pi^-}^{5/4} [-K_{\frac{1}{4}}(z) z^{-1/4}] \right)^2; \\ \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{2^{5/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^\infty z^{3/4} \mathbf{e}^{(-z/m_{\pi^-} - a)} K_{\frac{5}{4}}(z) dz \right)^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tomando la serie de Taylor para $\mathbf{e}^{-z/m_{\pi^-} - a}$:

$$\mathbf{e}^{-z/m_{\pi^-} - a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{m_{\pi^-} - a} \right)^n. \quad (4.38)$$

Sustituyendo en la integral:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{2^{5/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^\infty z^{3/4} K_{\frac{5}{4}}(z) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{m_{\pi^-} - a} \right)^n \right] dz \right)^2;$$

ordenando:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{2^{5/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \frac{z^{3/4+n}}{(m_{\pi^-} - a)^n} K_{\frac{5}{4}}(z) dz \right)^2. \quad (4.39)$$

Sustituyendo a (B.1) se tiene:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{2^{5/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\mu\alpha}{m_{\pi^-}} \right)^n \int_0^\infty z^{3/4+n} K_{\frac{5}{4}}(z) dz \right)^2 \quad (4.40)$$

Aplicando la formula (pag 486, ecuación 11.4.22)[20]:

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} K_{\nu}(x) dx = 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu + \nu + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu - \nu + 1}{2}\right); \quad (4.41)$$

con $\mu = \frac{3}{4} + n$ y $\nu = \frac{5}{4}$; entonces:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) \left(\frac{2^{5/4} \Psi_{1s}(0)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\mu\alpha}{m_{\pi^-}}\right)^n 2^{3/4+n-1} \right. \\ &\quad \left. \Gamma\left(\frac{\frac{3}{4} + n + \frac{5}{4} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{3}{4} + n - \frac{5}{4} + 1}{2}\right) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^1 &= \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} 2^{n+1} \left(\frac{\mu\alpha}{m_{\pi^-}}\right)^n \right. \\ &\quad \left. \Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} + n}{2}\right) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Si se define:

$$\mathcal{O}(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} 2^{n+1} \left(\frac{\mu\alpha}{m_{\pi^-}}\right)^n \Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} + n}{2}\right); \quad (4.44)$$

entonces ϵ_{1s}^1 puede ser escrito como:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2T^{1/2} + T^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 (\mathcal{O}(n))^2; \quad (4.45)$$

donde $\mathcal{O}(n)$ son términos de correcciones de orden n realizadas a ϵ_{1s}^1 , con $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Ya que estamos en el límite de bajas energías, las amplitudes de los estados se pueden aproximar por longitudes de dispersión de ondas s tal que:

$$\epsilon_{1s}^1 = \frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 (\mathcal{O}(n))^2. \quad (4.46)$$

4.3 Taza de decaimiento Γ_{1s} del $H\pi$

Retomando la ecuación (4.11):

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}) | T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(0)] | H\pi(\mathbf{P}) \rangle. \quad (4.47)$$

Hay que considerar el producto de cronológico de Dyson dado por (2.11), en este caso con $x_1 = 0$ tiempo inicial, y $x_2 = x$. Cabe resaltar que el espacio sigue siendo constante, pues la interacción tiene lugar en el mismo marco de referencia, mientras que el tiempo si transcurre progresivamente, luego:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle H\pi(\mathbf{P}') | \Theta(-x^0)\mathcal{L}(0)\mathcal{L}(x^0) + \Theta(x^0)\mathcal{L}(x^0)\mathcal{L}(0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle; \quad (4.48)$$

donde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y x^0 la coordenada temporal, y $\Theta(x)$ la función escalón, que garantiza el orden temporal. Ordenando:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(x^0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \langle H\pi(\mathbf{P}') | \mathcal{L}(x^0) \mathcal{L}(0) | H\pi(\mathbf{P}) \rangle \right]. \quad (4.49)$$

Introduciendo los estados $H\pi$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{2E_0(\mathbf{P})} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}'_p) \right. \\
& \sqrt{2E_0(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p)} \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(x^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \\
& \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle + \\
& \left. \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{k}'_{\pi^-} - \mathbf{k}'_p) \right. \\
& \sqrt{2E_0(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p)} \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(x^0) \mathcal{L}(0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \\
& \left. \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{\pi^-} - \mathbf{k}_p) \sqrt{2E_0(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p)} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Ya que $\mathbf{P}' = \mathbf{P} = 0$ entonces:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{(2\pi)^6} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \right. \\
& \delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p) \delta^3(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle \\
& \times \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \int \frac{d^3k'_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k'_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}'_p)}} \frac{d^3k_{\pi^-}}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})}} \\
& \frac{d^3k_p}{\sqrt{2E_p(\mathbf{k}_p)}} \delta^3(\mathbf{k}'_{\pi^-} + \mathbf{k}'_p) \delta^3(\mathbf{k}_{\pi^-} + \mathbf{k}_p) \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-}) \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-}) \\
& \left. \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(\mathbf{k}'_p) | \mathcal{L}(x^0) \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(\mathbf{k}_p) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Para solucionar las integrales con respecto a \mathbf{k}_p y \mathbf{k}'_p se aplica principio de conservación del momento, así que se tiene $\mathbf{k}_p = -\mathbf{k}_{\pi^-}$ y $\mathbf{k}'_p = -\mathbf{k}'_{\pi^-}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{(2\pi)^6} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3k'_{\pi^-} \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(-\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(-\mathbf{k}_{\pi^-})}} \right. \\
& \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}'_{\pi^-}) | \mathfrak{L}(0) \mathfrak{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}_{\pi^-}) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \\
& \int \frac{d^3k'_{\pi^-} \Phi_0^*(\mathbf{k}'_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(-\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{d^3k_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})}{\sqrt{2E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{2E_p(-\mathbf{k}_{\pi^-})}} \\
& \left. \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}'_{\pi^-}) | \mathfrak{L}(x^0) \mathfrak{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}_{\pi^-}) \rangle \right].
\end{aligned}$$

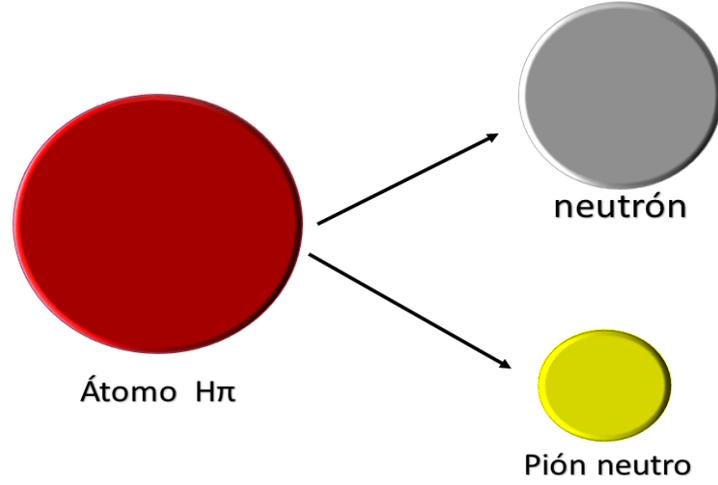
Ya que los momentos no dependen de x , podemos agrupar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}'_{\pi^-})}{2\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}'_{\pi^-})} \sqrt{E_p(-\mathbf{k}'_{\pi^-})}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_{\pi^-} \Phi_0(\mathbf{k}_{\pi^-})}{2\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}_{\pi^-})} \sqrt{E_p(-\mathbf{k}_{\pi^-})}} \\
& \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}_{\pi^-}) | \mathfrak{L}(0) \mathfrak{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}_{\pi^-}) \rangle \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}'_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}_{\pi^-}) | \mathfrak{L}(x^0) \mathfrak{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}_{\pi^-}) p(-\mathbf{k}_{\pi^-}) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Aplicando los conmutadores (2.3-2.6) se generaliza el momento tal que $\mathbf{k}'_{\pi^-} = \mathbf{k}_{\pi^-} = \mathbf{k}$; luego:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})} \sqrt{E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \tag{4.50} \\
& \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathfrak{L}(0) \mathfrak{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathfrak{L}(x^0) \mathfrak{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Ya que se está trabajando sobre un decaimiento, con el fin de no perder información es necesario considerar todos los estados posibles después del proceso. En este caso se considera el canal $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ de la tabla (3.2); ver figura (4.3). Los estados para cada partícula sin considerar spin están normalizados y además forman una base completa ortogonal, luego podemos introducirlos a la ecuación sin alterarla de la siguiente forma[8]:

Figura 4.3: *Proceso de decaimiento del átomo $H\pi$*

$$\begin{aligned}
 1 = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{(2\pi)^3 2E_p(\mathbf{Q}_p)} |\pi(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi(\mathbf{Q}_{\pi^-})p(\mathbf{Q}_p)| + \\
 & \frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{(2\pi)^3 2E_n(\mathbf{Q}_n)} |\pi(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|; \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ garantiza que el producto de los estados sea la unidad y no altere la ecuación, y \mathbf{Q} los momentos de las partículas. Es necesario considerar ambos estados $|\pi(\mathbf{Q}_{\pi^-}, p(\mathbf{Q}_p))\rangle$ y $|\pi(\mathbf{Q}_{\pi^0}, n(\mathbf{Q}_n))\rangle$; ya que del estado inicial $|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle$ es posible obtener cualquiera de estos dos estados finales, dependiendo del proceso que se lleve a cabo. Introduciendo estos estados:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) \right. \\
& \left[\frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{(2\pi)^3 2E_p(\mathbf{Q}_p)} |\pi(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p)| + \right. \\
& \frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{(2\pi)^3 2E_n(\mathbf{Q}_n)} |\pi(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n)| \mathcal{L}(x^0) \\
& \left. |\pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k})\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) \left[\frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{d^3 Q_p}{(2\pi)^3 2E_p(\mathbf{Q}_p)} |\pi(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p)| + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{(2\pi)^3 2E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{d^3 Q_n}{(2\pi)^3 2E_n(\mathbf{Q}_n)} |\pi(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n)| \right] \mathcal{L}(0) |\pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k})\rangle \right].
\end{aligned}$$

Realizando los productos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \left[\int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \right. \right. \\
& \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k})\rangle + \\
& \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(x^0) \\
& \left. \left. |\pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k})\rangle \right] + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \left[\int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) \right. \right. \\
& \left. \left. |\pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p)\rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) |\pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k})\rangle + \int \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \right. \right. \\
& \left. \left. \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(0) |\pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k})\rangle \right] \right].
\end{aligned}$$

Organizando términos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \right. \\
& \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3 Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \\
& \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \\
& \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \\
& \left. \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Ya que Γ_{1s} esta relacionada con un proceso de decaimiento, los estados elásticos están prohibidos[13], luego no pueden aportar para este cálculo. Solo los procesos de decaimiento se consideran. A los términos de procesos elásticos se les define como el corrimiento en el nivel energético de segunda aproximación ϵ_{1s}^2 , ya que provienen del factor de segundo orden en la serie de Dyson. Luego:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} = & \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \right. \\
& \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \Theta(x^0) \int \frac{d^3 Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3 Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \\
& \left. \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right]. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^2 &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \right. \\
&\quad \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \\
&\quad \left. \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right] \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Prosiguiendo con el desarrollo del cálculo de (4.52); y separando las coordenadas espaciales de la temporal, tal que[19]:

$$\int d^4x = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \int dx^0; \quad (4.54)$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} &= \frac{1}{32} \frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^6} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \Theta(-x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \right. \\
&\quad \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(x^0) \\
&\quad | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \Theta(x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \\
&\quad \left. \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right]. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

El factor $\delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n)$ aplica el principio de conservación del momento, luego:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1s} &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \Theta(-x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \right. \\
&\quad \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(x^0) \\
&\quad | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \Theta(x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \\
&\quad \left. \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) \rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0}) n(\mathbf{Q}_n) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right]. \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Utilizando la relación entre las funciones delta y escalón para mesones[8]:

$$\Theta(\pm x^0) = 2\pi\delta(E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0}) + E_n(\mathbf{Q}_n) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k}))\delta(x^0). \quad (4.57)$$

Esta relación aplica el principio de conservación de la energía en el proceso de decaimiento, mientras que el factor $\delta(x)$ garantiza que la matriz de transición del proceso permanece constante mientras este tiene lugar. Entonces:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1s} = & \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int dx^0 \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \right. \\ & \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) 2\pi\delta[E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0}) + E_n(\mathbf{Q}_n) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k})]\delta(x^0) \\ & \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{L}(0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{L}(x^0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int dx^0 \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} 2\pi\delta(E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0}) + E_n(\mathbf{Q}_n) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k})) \\ & \delta(x^0)\delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n)\langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{L}(x^0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \\ & \left. \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{L}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})\rangle \right]. \end{aligned}$$

Ahora al resolver la integral respecto a x^0 , se aplica la propiedad de la función δ , esto garantiza que la matriz de interacción, en este caso el lagrangiano no depende del tiempo y mientras la interacción tenga lugar, permanecerá constante. Luego:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1s} = & \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \right. \\ & \delta[E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0}) + E_n(\mathbf{Q}_n) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k})] \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{L}(0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \\ & \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{L}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(\mathbf{k})\rangle + \int \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \\ & \delta(E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0}) + E_n(\mathbf{Q}_n) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k})) \langle \pi^-(\mathbf{k})p(-\mathbf{k})|\mathcal{L}(0)|\pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)\rangle \\ & \left. \langle \pi^0(\mathbf{Q}_{\pi^0})n(\mathbf{Q}_n)|\mathcal{L}(0)|\pi^-(\mathbf{k})p(\mathbf{k})\rangle \right]. \end{aligned}$$

Es fácil apreciar que las dos integrales son idénticas, ya que los términos de la amplitud son el mismo en ambos casos, ver ecuación (3.53); agrupando estos términos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1s} = & \frac{(T_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n})^2}{16(2\pi)^2} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k\Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k})E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int \frac{d^3Q_{\pi^0}}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0})} \frac{d^3Q_n}{E_n(\mathbf{Q}_n)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^0} + \mathbf{Q}_n) \right. \\ & \left. \delta[E_{\pi^0}(\mathbf{Q}_{\pi^0}) + E_n(\mathbf{Q}_n) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k})] \right]. \quad (4.58) \end{aligned}$$

Ahora resolvemos la integral con respecto a Q_n y aplicando la función delta nuevamente se puede generalizar el momento tal que $|\mathbf{Q}_n| = |\mathbf{Q}_{\pi^0}| = |\mathbf{Q}|$, entonces:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^2} (T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \quad (4.59)$$

$$\left[\int \frac{d^3 Q}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) E_n(-\mathbf{Q})} \delta[E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) + E_n(\mathbf{Q}) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k})] \right].$$

Ya que $d^3 Q = 4\pi Q^2 dQ$ en coordenadas esféricas:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)} (T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \quad (4.60)$$

$$\left[\int \frac{dQ Q^2}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) E_n(-\mathbf{Q})} \delta[E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) + E_n(\mathbf{Q}) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(\mathbf{k})] \right].$$

Análogamente al cálculo anterior, en el límite de bajas energías $k \rightarrow 0$ con respecto a las masas de las partículas, luego:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)} (T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \quad (4.61)$$

$$\left[\int \frac{dQ Q^2}{E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) E_n(-\mathbf{Q})} \delta[E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) + E_n(\mathbf{Q}) - m_{\pi^-} - m_p] \right].$$

Ahora considerando la energía total del sistema:

$$E = E_{\pi^0}(\mathbf{Q}) + E_n(\mathbf{Q}) = \sqrt{m_{\pi^0}^2 + Q^2} + \sqrt{m_n^2 + Q^2}; \quad (4.62)$$

si derivamos la energía con respecto a Q se puede hacer un cambio de variable en la integral así:

$$\frac{dE}{E} = \frac{Q dQ}{\sqrt{m_{\pi^0}^2 + Q^2} \sqrt{m_n^2 + Q^2}}; \quad (4.63)$$

entonces:

$$\Gamma_{1s} = \frac{(T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n})^2}{8(2\pi)} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int \frac{Q dE}{E} \delta[E - m_{\pi^-} - m_p] \right].$$

Resolviendo la integral en Q se obtiene:

$$\Gamma_{1s} = \frac{(T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n})^2}{8(2\pi)} \frac{Q}{m_{\pi^-} + m_p} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2; \quad (4.64)$$

donde Q es un momento constante para el cual la energía se conserva. Por la condición de equivalencia se tiene[13]:

$$T_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n} = 8\pi(m_{\pi^-} + m_p)T, \quad (4.65)$$

con T dada por (3.53), luego:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{8(2\pi)} [8\pi(m_{\pi^-} + m_p)T]^2 \frac{Q}{m_{\pi^-} + m_p} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2. \quad (4.66)$$

Sustituyendo T se llega a:

$$\Gamma_{1s} = \frac{[8\pi(m_{\pi^-} + m_p)]^2}{8(2\pi)} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} (T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}}) \right]^2 \frac{Q}{m_{\pi^-} + m_p} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2;$$

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9} \pi (m_{\pi^-} + m_p) Q \left[T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \right]^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2;$$

ya que $m_{\pi^-} + m_p = \frac{m_{\pi^-} m_p}{\mu}$ entonces:

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9} \pi \frac{Q}{\mu} \left[T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \right]^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k \Phi_0(\mathbf{k}) \sqrt{m_{\pi^-} m_p}}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2. \quad (4.67)$$

Utilizando la relación (4.20):

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9}\pi \frac{Q}{\mu} \left[T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \right]^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k}) \sqrt{m_{\pi^-} m_p}}{\sqrt{m_p}(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2; \quad (4.68)$$

luego:

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9}\pi \frac{Q}{\mu} \left[T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \right]^2 \left(\frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2. \quad (4.69)$$

Esta última integral es la misma de la ecuación (4.23), la cual se resolvió para calcular ϵ_{1s} . Utilizando este resultado se tiene:

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9}\pi \frac{Q}{\mu} \left[T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \right]^2 [\Psi_{1s}(0)]^2 (\mathcal{O}(n))^2. \quad (4.70)$$

con $\mathcal{O}(n)$ definida en la ecuación (4.44). En términos de las longitudes de dispersion de ondas s :

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9}\pi \frac{Q}{\mu} \left[a_0^{\frac{3}{2}} - a_0^{\frac{1}{2}} \right]^2 [\Psi_{1s}(0)]^2 (\mathcal{O}(n))^2. \quad (4.71)$$

4.4 Cálculo de ϵ_{1s} de segunda aproximación

El termino de ϵ_{1s} de segunda aproximación esta dado por la ecuación (4.53)

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^2 &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(-x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \right. \\ &\quad \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \Theta(x^0) \int \frac{d^3Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \\ &\quad \left. \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right] \quad (4.72) \end{aligned}$$

Para proceder con el desarrollo de las integrales nuevamente se sustituye en la integral de cuadrivolumen la relación $d^4x = (2\pi)^3 \delta^3[\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p] dx^0$:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^2 &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} dx^0 \Theta(-x^0) \right. \\
&\quad \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p) \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(x^0) \\
&\quad | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3Q_{\pi^-}}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-})} \frac{d^3Q_p}{E_p(\mathbf{Q}_p)} \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p) dx^0 \Theta(x^0) \\
&\quad \left. \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(\mathbf{k}) \rangle \right] \quad (4.73)
\end{aligned}$$

Ahora usando la relación entre la función escalón y la función δ ; que en este caso está dada por[8]:

$$\Theta(\pm x) = \frac{\delta(x)}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) + E_p(\mathbf{Q}_p) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})}; \quad (4.74)$$

con la cual se aplica el principio de conservación de la energía. Sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^2 &= \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int_{\infty}^{-\infty} \int \frac{d^3Q_{\pi^-} d^3Q_p}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) E_p(\mathbf{Q}_p)} dx^0 \right. \\
&\quad \frac{\delta(x^0) \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p)}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) + E_p(\mathbf{Q}_p) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \\
&\quad \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3Q_{\pi^-} d^3Q_p}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) E_p(\mathbf{Q}_p)} dx^0 \\
&\quad \frac{\delta(x^0) \delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p)}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) + E_p(\mathbf{Q}_p) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(x^0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \\
&\quad \left. \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Nuevamente evaluando la integral con respecto a x^0 :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^2 = & \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int \frac{d^3Q_{\pi^-} d^3Q_p}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) E_p(\mathbf{Q}_p)} \right. \\
& \frac{\delta(\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p)}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) + E_p(\mathbf{Q}_p) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \\
& \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) \rangle + \int \frac{d^3Q_{\pi^-} d^3Q_p}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) E_p(\mathbf{Q}_p)} \\
& \frac{\delta^3(\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p)}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) + E_p(\mathbf{Q}_p) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})} \langle \pi^-(\mathbf{k}) p(-\mathbf{k}) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) \rangle \\
& \left. \langle \pi^-(\mathbf{Q}_{\pi^-}) p(\mathbf{Q}_p) | \mathcal{L}(0) | \pi^-(\mathbf{k}) p(\mathbf{k}) \rangle \right].
\end{aligned}$$

Aquí fácilmente se puede apreciar que las integrales son iguales, además el último factor es el producto de las amplitudes de cada proceso, entonces:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^2 = & \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^3} (T_{\pi^- p \rightarrow \pi^- p})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \\
& \left[\int \frac{d^3Q_{\pi^-} d^3Q_p}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) E_p(\mathbf{Q}_p)} \frac{\delta(\mathbf{Q}_{\pi^-} + \mathbf{Q}_p)}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}_{\pi^-}) + E_p(\mathbf{Q}_p) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})} \right].
\end{aligned}$$

Se procede a resolver la integral con respecto a \mathbf{Q}_p , aplicando propiedades de la función delta se puede generalizar los momentos así; $|\mathbf{Q}_p| = |\mathbf{Q}_{\pi^-}| = |\mathbf{Q}|$, luego:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1s}^2 = & \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^3} (T_{\pi^- p \rightarrow \pi^- p})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \quad (4.75) \\
& \left[\int \frac{d^3Q}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) E_p(-\mathbf{Q}) [E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) + E_p(-\mathbf{Q}) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})]} \right].
\end{aligned}$$

En este caso la amplitud es la misma que para ϵ_{1s} de primera aproximación, ya que el proceso es el mismo, entonces sustituyendo a (4.18) y realizando la integral angular en coordenadas esféricas se llega a:

$$\epsilon_{1s}^2 = \frac{1}{16} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left(\frac{8\pi}{3} (m_{\pi^-} + m_p) (2T^{1/2} + T^{3/2}) \right)^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int \frac{dQ Q^2}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) E_p(-\mathbf{Q}) [E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) + E_p(-\mathbf{Q}) - E_{\pi^-}(\mathbf{k}) - E_p(-\mathbf{k})]} \right].$$

Ya considerando bajas energías se tiene:

$$\epsilon_{1s}^2 = 2(m_{\pi^-} + m_p)^2 (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\int \frac{dQ Q^2}{E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) E_p(-\mathbf{Q}) [E_{\pi^-}(\mathbf{Q}) + E_p(-\mathbf{Q}) - m_{\pi^-} - m_p]} \right]. \quad (4.76)$$

Esta última integral es logarítmicamente divergente, un problema que no se había presentado antes. Para solucionarlo se aplica la condición a bajas energías y las teorías efectivas locales. En el caso del átomo $H\pi$ el momento generalizado de las partículas no puede exceder el valor de $Q = \alpha\mu$ [4][13]. De esta manera, el desarrollo y la teoría solo son validas para este intervalo de energías, lo que la hace una teoría efectiva local. Ya que $\alpha\mu = 0,887\text{MeV}$ [21], si lo comparamos con las masas de las partículas involucradas $m_{\pi^-} = 139,57\text{MeV}$ y $m_p = 938,272\text{MeV}$; se puede apreciar que el máximo valor de Q es muy pequeño comparado con las masas. Según esto es posible realizar una expansión de las energías de la siguiente forma¹:

$$\begin{aligned} \sqrt{m_{\pi^-}^2 + Q^2} &= m_{\pi^-} + \frac{Q^2}{2m_{\pi^-}} - \frac{Q^4}{8m_{\pi^-}^3} + \dots \\ \sqrt{m_p^2 + Q^2} &= m_p + \frac{Q^2}{2m_p} - \frac{Q^4}{8m_p^3} + \dots; \end{aligned}$$

¹La elección del valor de $\alpha\mu$, como el acotamiento del momento que rompe la indeterminación en la integral, se debe a que el potencial electromagnético es de la forma $\frac{1}{r}$, y ya que se toma el estado base de energía, entonces $r = \frac{1}{\alpha\mu}$, este es el radio de Bohr para el hidrógeno piónico.

despreciando los términos de potencias superiores para Q se tiene:

$$\sqrt{m_{\pi^-}^2 + Q^2} = m_{\pi^-} + \frac{Q^2}{2m_{\pi^-}}, \quad (4.77)$$

$$\sqrt{m_p^2 + Q^2} = m_p + \frac{Q^2}{2m_p}; \quad (4.78)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s}^2 = & 2(m_{\pi^-} + m_p)^2 (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \\ & \left[\int_0^{\alpha\mu} \frac{dQ Q^2}{\left(m_{\pi^-} + \frac{Q^2}{2m_{\pi^-}}\right) \left(m_p + \frac{Q^2}{2m_p}\right)} \frac{1}{m_{\pi^-} + \frac{Q^2}{2m_{\pi^-}} + m_p + \frac{Q^2}{2m_p} - m_{\pi^-} - m_p} \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Agrupando términos:

$$\epsilon_{1s}^2 = 2(m_{\pi^-} + m_p)^2 (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \quad (4.80)$$

$$\left[\int_0^{\alpha\mu} \frac{dQ Q^2 8m_p m_{\pi^-} \mu}{(2m_{\pi^-}^2 + Q^2)[2m_p^2 + Q^2]Q^2} \right]. \quad (4.81)$$

Considerando que $m_p^2 \gg Q^2$ y $m_{\pi^-}^2 \gg Q^2$ se obtiene:

$$\epsilon_{1s}^2 = 2(m_{\pi^-} + m_p)^2 (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\frac{2\mu}{m_p m_{\pi^-}} \int_0^{\alpha\mu} dQ \right].$$

Resolviendo la integral:

$$\epsilon_{1s}^2 = 2(m_{\pi^-} + m_p)^2 (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2 \left[\frac{2\mu^2 \alpha}{m_p m_{\pi^-}} \right];$$

$$\epsilon_{1s}^2 = 4\alpha m_{\pi^-} m_p (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{\sqrt{E_{\pi^-}(\mathbf{k}) E_p(-\mathbf{k})}} \right)^2. \quad (4.82)$$

De forma análoga la última integral la podemos llevar a la forma de (4.23) usando la relación (4.20):

$$\epsilon_{1s}^2 = 4\alpha (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 \left(\frac{\sqrt{m_{\pi^-}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \Phi_0(\mathbf{k})}{(m_{\pi^-} + k^2)^{1/4}} \right)^2. \quad (4.83)$$

Luego:

$$\epsilon_{1s}^2 = 4\alpha (2T^{1/2} + T^{3/2})^2 [\Psi_{1s}(0)]^2 (\mathcal{O}(n))^2. \quad (4.84)$$

Y finalmente se obtiene el corrimiento a segundo orden en términos de $a_0^{1/2}$ y $a_0^{3/2}$, el cual esta dado por::

$$\epsilon_{1s}^2 = 4\alpha \left(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2} \right)^2 [\Psi_{1s}(0)]^2 (\mathcal{O}(n))^2. \quad (4.85)$$

4.5 Análisis de las ecuaciones de ϵ_{1s} y Γ_{1s}

Las ecuaciones (4.46,4.71,4.85), proporcionan una expresión para calcular directamente el valor numérico del cambio y ancho de los niveles de energía en el estado base del átomo $H\pi$. Aun así dicho cálculo está condicionado a los valores de las longitudes de dispersión de ondas s . Estas relaciones forman un conjunto de ecuaciones, el cual puede ser solucionado, tomando como referencia los valores experimentales para ϵ_{1s} y Γ_{1s} .

Los valores experimentales medidos para estos observables han sido publicados por el grupo *Pionic Hydrogen Collaboration* en *The Paul Scherrer Institute* (PSI), un centro de investigaciones altamente complejo de última tecnología, ubicado en Suiza. Los resultados son[3][24]:

$$\epsilon_{1s} = -7,120 \pm 0,011eV; \quad \Gamma_{1s} = 0,823 \pm 0,019eV. \quad (4.86)$$

Primero es fundamental realizar un análisis a la serie $\mathcal{O}(n)$ dada por (4.44), ya que cualquier termino que se desee analizar tiene dependencia directa de este factor. El cálculo desarrollado en *WOLFRAM MATHEMATICA* para cada valor respectivo de n para $\mathcal{O}(n)$ desde $n = 0$ hasta $n = 10$ arrojó el resultado mostrado en la tabla (4.1). Al apreciar estos resultados se puede concluir que a medida que los n_i aumentan el valor de $\mathcal{O}(n_i)$ tiende a cero. Esto quiere decir que es una serie convergente, y no hay necesidad de truncamiento.

Tabla 4.1: Valores de $\mathcal{O}(n)$

n	$\mathcal{O}(n)$
0	1
1	-0,00484664
2	0,0000302808
3	$-1,9568 \times 10^{-7}$
4	$1,27351 \times 10^{-9}$
5	$-8,29548 \times 10^{-12}$
6	$5,39879 \times 10^{-14}$
7	$-3,50874 \times 10^{-16}$
8	$2,27704 \times 10^{-18}$
9	$-1,47566 \times 10^{-20}$
10	$9,55092 \times 10^{-23}$

Por otro lado al realizar toda la sumatoria, el cálculo realizado en *WOLFRAM MATHEMATICA* para $\mathcal{O}(n)$ da como resultado que dicha serie converge al valor de:

$$\mathcal{O}(n) = 0,995183; \quad (4.87)$$

Ya que el corrimiento de los niveles de energía está compuesto por dos factores, de primero y segundo orden de perturbación, teniendo en cuenta el signo en la ecuación (4.9) entonces:

$$\epsilon_{1s} = -\epsilon_{1s}^1 + \epsilon_{1s}^2; \quad (4.88)$$

luego:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 (-\mathcal{O}(n))^2 + 4\alpha \left(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}\right)^2 [\Psi_{1s}(0)]^2 (\mathcal{O}(n))^2. \quad (4.89)$$

Esta ecuación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2\pi}{3\mu}(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 \left[-(\mathcal{O}(n))^2 + (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \frac{6\mu\alpha}{\pi} (\mathcal{O}(n))^2 \right]. \quad (4.90)$$

El segundo factor del corchete, puede ser definido como una corrección de segundo orden al corrimiento:

$$\mathcal{O}_2(n) = \frac{6\mu\alpha}{\pi} (\mathcal{O}(n))^2; \quad (4.91)$$

entonces:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2\pi}{3\mu}(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2 \left[-(\mathcal{O}(n))^2 + (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \mathcal{O}_2(n) \right]. \quad (4.92)$$

Donde:

$$\mathcal{O}_2(n) = 1,67746 \quad (4.93)$$

Combinando las ecuaciones (4.87,4.88,4.93), además sustituyendo el valor de $\Psi_{1s}(0)$ (ver apéndice B) se tiene:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2}{3}\mu^2\alpha^3(2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) \left[-(0,995183)^2 + (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2})(1,6774)MeV \right]; \quad (4.94)$$

donde las unidades de MeV se deben al factor de μ en (4.91).

Ahora para calcular Γ_{1s} volvemos a la ecuación (4.71). Adicionalmente es necesario el valor de Q , que es momento para el cual la energía se conserva. Este momento está dado por[9]:

$$|Q| = \frac{(m_{\pi^-} + m_p)}{2} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_n + m_{\pi^0}}{m_{\pi^-} + m_p}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_n - m_{\pi^0}}{m_{\pi^-} + m_p}\right)^2\right)}. \quad (4.95)$$

Sustituyendo el valor de las masas:

$$|Q| = 28,05MeV. \quad (4.96)$$

Nuevamente considerando las ecuaciones (B.4) y (B.1) se obtiene:

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9} Q \mu^2 \alpha^3 \left[a_0^{\frac{3}{2}} - a_0^{\frac{1}{2}} \right]^2 (\mathcal{O}(n))^2; \quad (4.97)$$

Según estas ecuaciones se puede hacer un análisis para tres casos, sin correcciones, con correcciones de primer orden y para correcciones de segundo orden.

En el caso en que no se consideran correcciones, se tiene las fórmulas *DGBT*[23]:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2\pi}{3\mu} (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [\Psi_{1s}(0)]^2; \quad (4.98)$$

$$\Gamma_{1s} = \frac{8}{9} \pi \frac{Q}{\mu} \left[a_0^{\frac{3}{2}} - a_0^{\frac{1}{2}} \right]^2 [\Psi_{1s}(0)]^2. \quad (4.99)$$

Ahora si se considera la primera corrección se tiene:

$$\epsilon_{1s} = \frac{2}{3} \mu^2 \alpha^3 (2a_0^{1/2} + a_0^{3/2}) [-(0,995183)^2]; \quad (4.100)$$

mientras que Γ_{1s} esta dada por (4.97). Finalmente tomando correcciones de segundo orden, ϵ_{1s} esta dado por (4.94).

Usando los valores medidos para ϵ_{1s} y Γ_{1s} , considerando un rango de 4 incertidumbres en cada uno de los casos, con y sin correcciones (fórmulas *DGBT*); con el uso del software "MATHEMATICA"; se obtuvieron las regiones de convergencia para los valores de las longitudes de dispersión de ondas s . Los resultados son mostrados en las figuras (4.4), (4.5), (4.6):

4.5.1. Vida media del $H\pi$

Con el valor experimental de Γ_{1s} podemos hacer un estimativo de la vida media del átomo $H\pi$. Primero se realiza el cambio de unidades usando la conversión:

$$\frac{1}{1MeV} = 0,658167 \times 10^{-21} s; \quad (4.101)$$

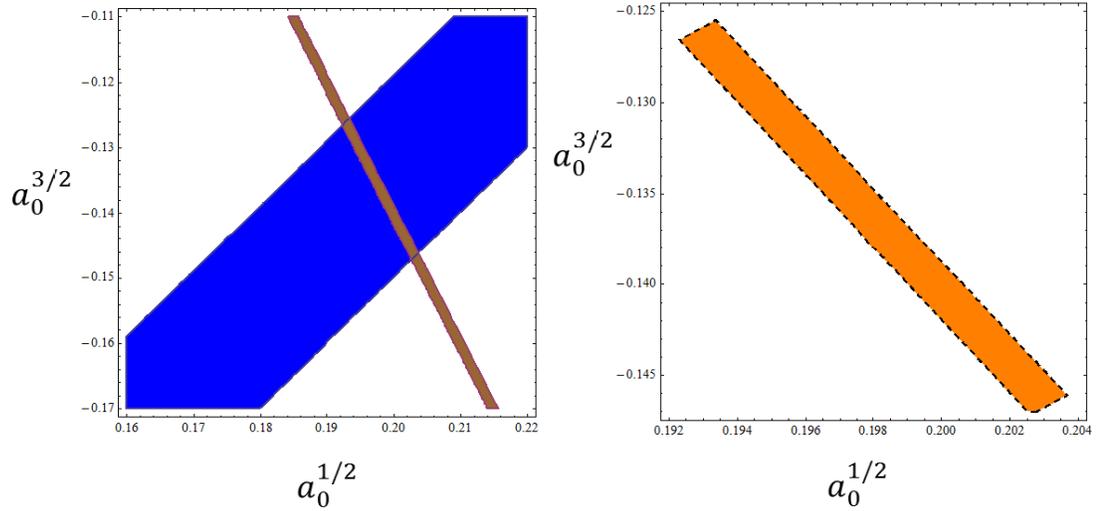


Figura 4.4: Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s , en el estado $H\pi$; usando las fórmulas DGBT. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s} . A la derecha se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, a la izquierda se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.

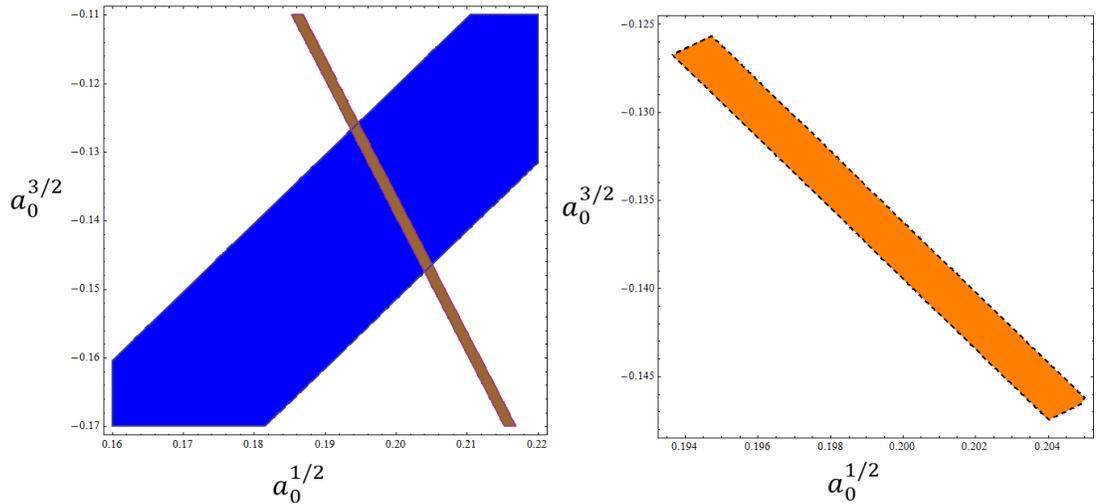


Figura 4.5: Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s , en el estado $H\pi$; considerando correcciones de primer orden. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s} . A la derecha se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, a la izquierda se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.

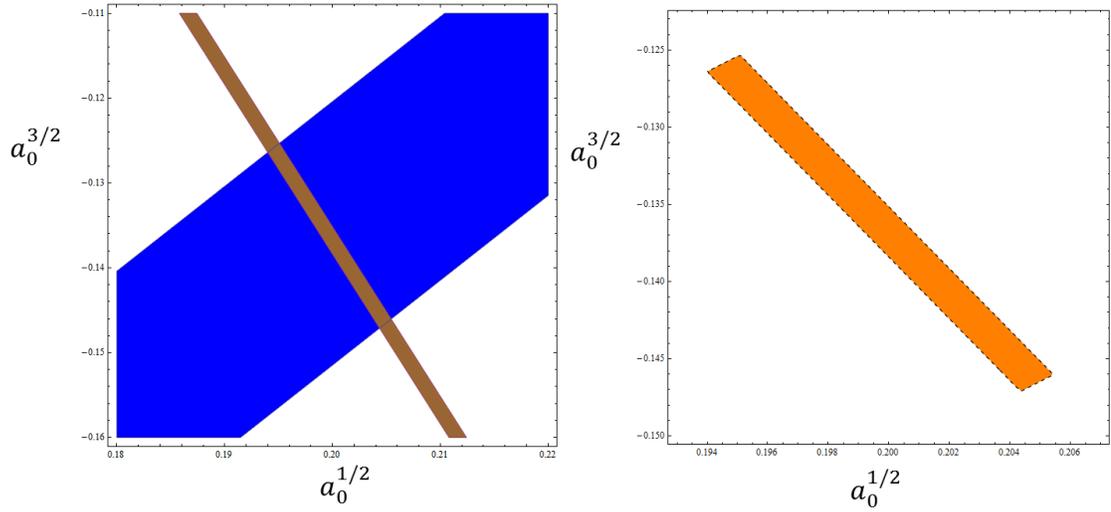


Figura 4.6: Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s , en el estado $H\pi$; considerando correcciones de segundo orden. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s} . A la derecha se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, a la izquierda se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.

luego se tiene:

$$\Gamma_{1s} = 1,25044 \times 10^{15} \frac{1}{s}. \quad (4.102)$$

Ahora usando la relacion[16]:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (4.103)$$

entonces:

$$\tau = 0,799717 \times 10^{-15} s. \quad (4.104)$$

Por otro lado en un trabajo anteriormente desarrollado[9], se utilizó la regla de oro de fermi y una aproximación con mecánica cuántica. Aquí se obtuvo un valor de:

$$\tau = 2,09134 \times 10^{-14} s. \quad (4.105)$$

La diferencia es clara, debido a que en este cálculo no se consideraron interacciones fuertes. La curva de distribución de decaimiento del átomo $H\pi$ es mostrada en la figura (4.7). El eje vertical es la función de decaimiento $N(t)$ [16], mientras que el horizon-

tal representa el tiempo. Se puede apreciar que la vida media del $H\pi$ calculada con interacciones fuertes es menor que la aproximación por regla de oro de Fermi.

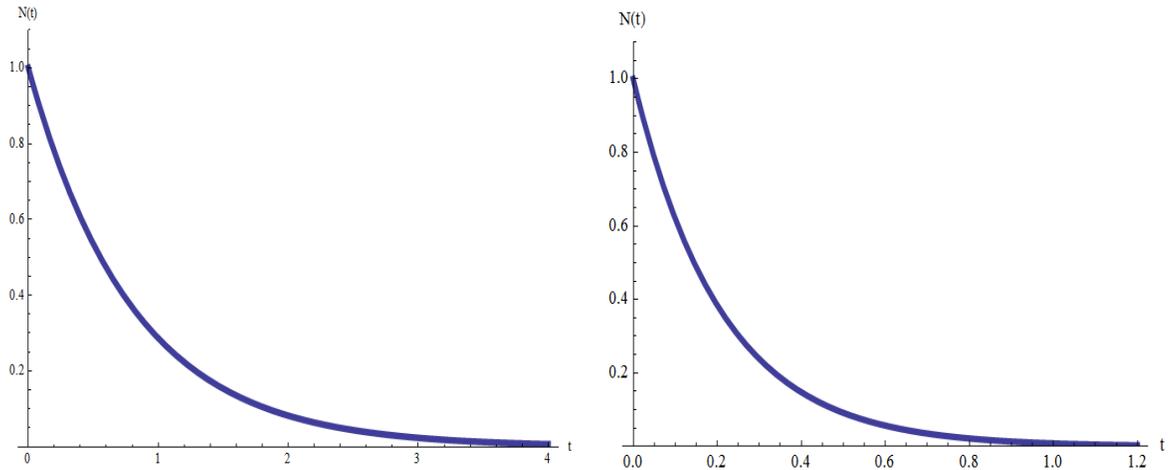


Figura 4.7: Curva de decaimiento para el $H\pi$. A la izquierda los resultados obtenidos en este trabajo, la escala del tiempo esta a 1×10^{-14} . A la derecha los resultados obtenidos con una aproximación de la regla de oro de Fermi; aquí la escala temporal esta a 1×10^{-13} .

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Con un análisis detallado de las regiones que solucionan el sistema de ecuaciones para ϵ_{1s} y Γ_{1s} , es posible extraer los valores aceptables para las longitudes de dispersión de ondas s . En cuanto a las fórmulas *DGBT* (gráfica 4.4) son para $a_0^{1/2}$ $[0,192875, 0,203125] \pm 0,000625$; mientras que para $a_0^{3/2}$ $[-0,1467, -0,1259] \pm 0,0006$ aproximadamente. Por otro lado, los valores obtenidos considerando corrección de primer orden (ver figura 4.6) son $a_0^{1/2}$ $[0,194125, 0,2045] \pm 0,000625$; y para $a_0^{3/2}$ $[-0,14675, -0,12615] \pm 0,00075$. Finalmente, tomando el segundo término de la serie de Dayson (figura 5.1) se obtuvo $a_0^{1/2}$ $[0,1944, 0,2048] \pm 0,0006$; y $a_0^{3/2}$ $[-0,14675, -0,12575] \pm 0,00075$; todos los valores en unidades de $\frac{1}{m_{\pi^-}}$. Se puede apreciar un corrimiento a la derecha de las regiones calculadas con correcciones respecto a la región encontrada para las fórmulas *DGBT*. En la figura (5.1), se muestra a la misma escala, el efecto de las correcciones obtenidas.

Por otro lado en la actualidad grupos de investigación han publicado resultados con dos estados similares, el hidrógeno piónico $H\pi$, y el deuterio piónico $D\pi$. Aplicando diferentes métodos y correcciones a segundo orden. En las figuras 5.2, 5.3, 5.4 se muestran algunos resultados publicados por otros autores utilizando diferentes métodos. Cabe aclarar que no se estudiaron dichos métodos, el interés radica en el resultado final para una posible comparación.

Es difícil dar como aceptable un valor para las longitudes de dispersión de ondas s en la interacción pión-nucleón. Debido a la complejidad del problema, y las aproximaciones que se aplican. Como se puede apreciar, si comparamos los resultados obtenidos aquí con con los diferentes trabajos realizados y publicados por otros autores, estos valores varían considerablemente. De igual forma los valores de las longitudes de dispersión de ondas s , pierden relevancia en cuanto a que lo importante es encontrar una solución simultánea al sistema de ecuaciones para diferentes estados ligados.

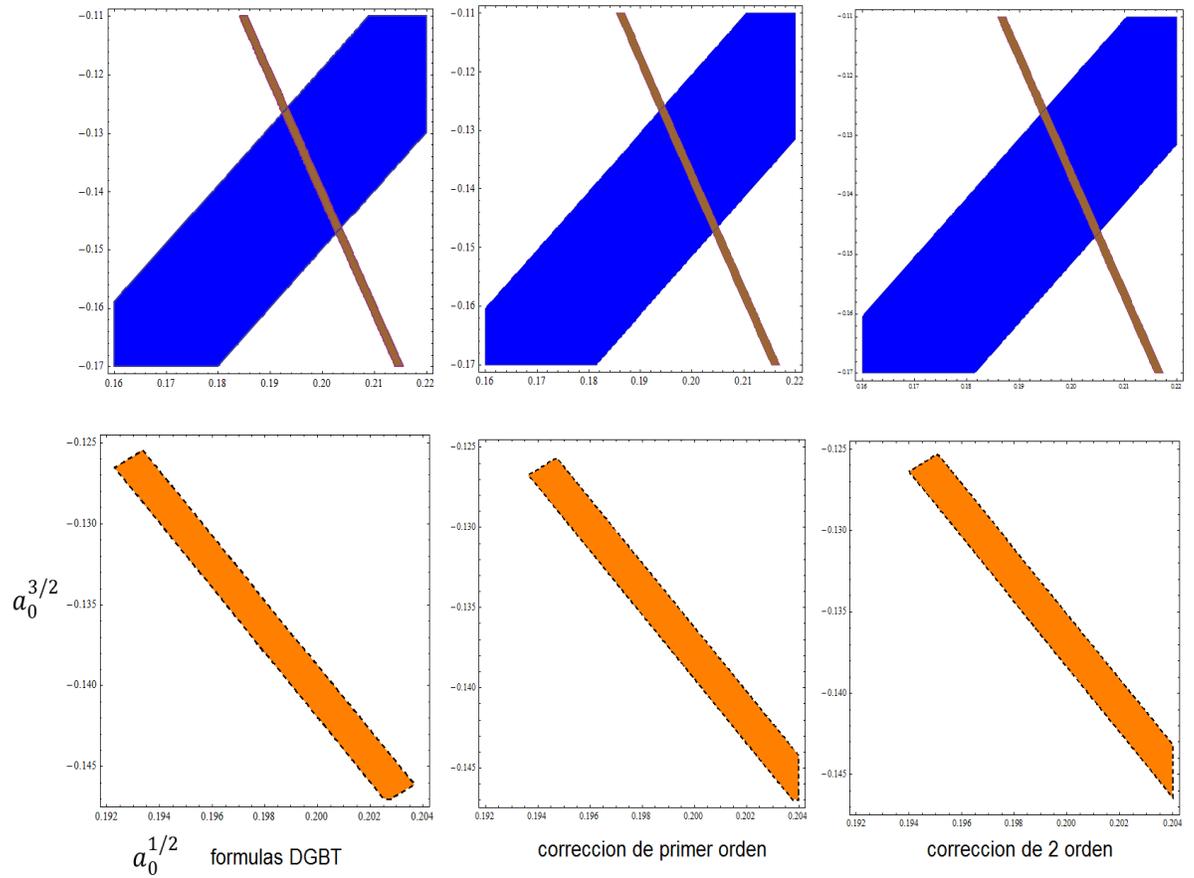


Figura 5.1: Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s , en el estado $H\pi$; considerando los tres casos de correcciones a la misma escala. La región café hace referencia a ϵ_{1s} mientras que la azul a Γ_{1s} . En la parte superior se presenta el corte o región de convergencia del sistema para las dos soluciones, en la parte inferior se muestra la región de convergencia del sistema ampliada.

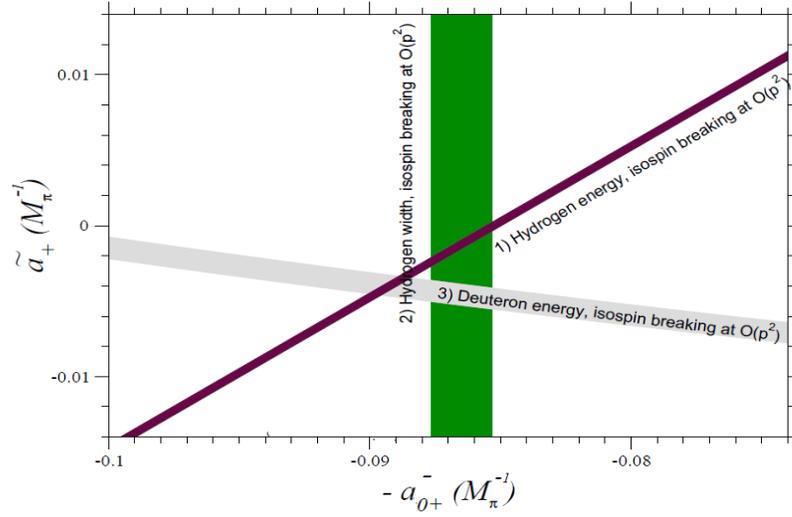


Figura 5.2: Resultados obtenidos para las amplitudes en la dispersión πN en los estados $H\pi$ y $D\pi$. Se puede apreciar que no existe región de convergencia simultanea para los dos estados[5].

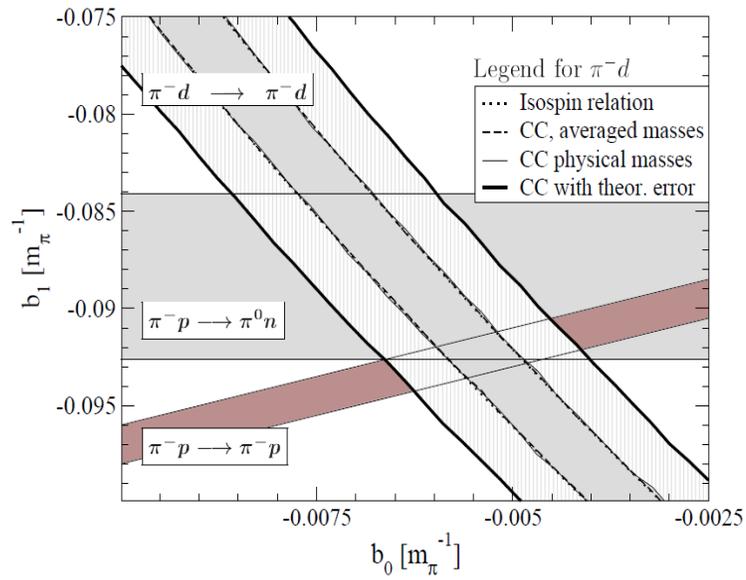


Figura 5.3: Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s , para el estado $H\pi$ y $D\pi$ [30].

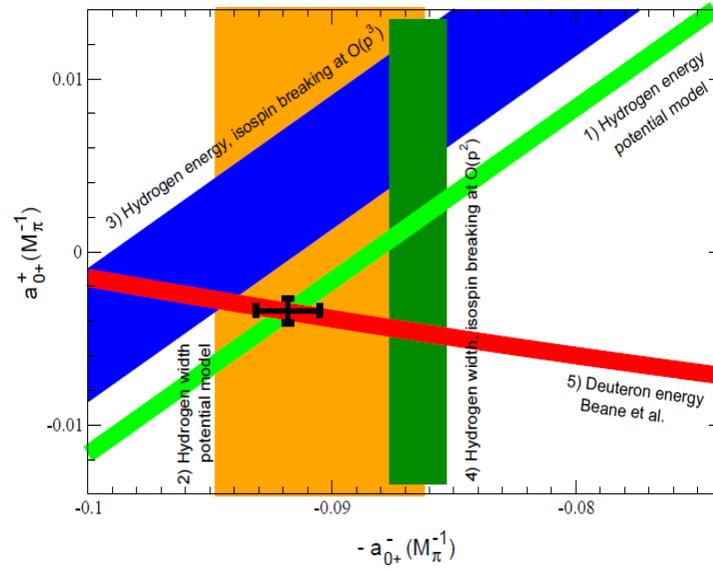


Figura 5.4: Resultados obtenidos para las longitudes de dispersión de ondas s , para el estado $H\pi$ y $D\pi$ [3].

Desafortunadamente no es posible concluir si los resultados obtenidos para $a_0^{1/2}$ y $a_0^{3/2}$ son aceptables o no, ya que es necesario realizar los cálculos para otros estados ligados como el deuterio piónico $D\pi$, o el hidrógeno kaónico Hk con la finalidad de buscar una región de convergencia completa que involucre los dos estados y obtener así un mejor resultado. Dicho trabajo queda como una extensión ya que no fue el compromiso en este, el cual solo se desarrolló alrededor del estado $H\pi$. Por ahora encontramos que dicha región existe para el átomo $H\pi$, luego el método se da correcto a este nivel.

Apendice A

PARTÍCULAS SUBATÓMICAS

Actualmente la comunidad científica clasifica las partículas como partículas elementales y partículas compuestas. Las partículas elementales son aquellas que no tienen estructura interna, es decir que no están formadas por otras, se clasifican en dos grupos; fermiones y bosones.

A.1 Bosones

Son las partículas encargadas de las interacciones físicas, tienen spin entero y no cumplen con el principio de exclusión de Pauli, además obedecen la estadística de Bose-Einstein. Entre estos están:[21]

- ✓ **Boson:** Llamado también weak, es la partícula mediadora en las interacciones nucleares débiles, existen tres clases de bosones, los dos W^\pm y los Z . Fueron predichas por la teoría electrodébil, trabajo realizado por los científicos Sheldon Glashow, Steven Weinberg, y Abdus Salam.
- ✓ **Gluon:** Es el bosón responsable de la interacción fuerte, pero este a su vez también sufre su efecto y es su propia antipartícula. Fue predicha por el físico estadounidense Murray Gell-Mann.
- ✓ **Fotón:** Es la partícula elemental responsable de las interacciones electromagnéticas entre partículas cuánticas y es responsable de todas las manifestaciones cuánticas del espectro electromagnético. Fue predicha teóricamente por el físico alemán Albert Einstein en su trabajo sobre el efecto fotoeléctrico.

En la tabla (A.1) son mostrados los bosones con sus respectivas características.

Tabla A.1: *partículas elementales, bosones.*

bosón	símbolo	masa(GeV/c^2)	carga eléctrica	spin	interacción
Fotón	γ	0	0	1	electromagnética
Bosón	W^+	80.425	1	1	débil
	W^-	80.425	-1	1	débil
	Z^0	91.1876	0	1	débil
Gluon	g	0	0	1	fuerte

A.2 Fermiones

Llamados así en honor al físico Enrico Fermi, son partículas elementales de spin semientero. En el modelo estándar hay dos clases de fermiones, los quarks y leptones. Entre los leptones se encuentran:

- ✓ **Electrón:** Es de las más importantes ya que componen los átomos, se considera estable, muy liviano y su movimiento genera corriente. Fue predicha por el físico irlandés G. Johnstone Stoney como una unidad de carga y descubierta por Joseph John Thomson en 1897 en el Laboratorio Cavendish de la Universidad de Cambridge, su antipartícula es el positrón.
- ✓ **Muon:** Partícula masiva, de masa aproximadamente 200 veces mayor que la del electrón, tiene una vida media de $2,1976 \times 10^{-6}s$. Fue la primera partícula elemental descubierta que no pertenecía a los átomos convencionales; descubierta por el físico estadounidense Carl David Anderson.
- ✓ **Tao:** Partícula masiva de masa 3000 veces mayor que la del electrón aproximadamente, tiene una vida muy corta de unos $3 \times 10^{-13}s$. Fue detectado por primera vez a través de experimentos dirigidos por el físico estadounidense Martin Lewis Perl entre 1974 y 1977.
- ✓ **Neutrino:** Es una partícula cuya masa es más o menos un millón de veces menor a la del electrón pero no nula, por tener una masa tan pequeña se logra mover casi a la velocidad de la luz, los neutrinos son; electrónico, muónico y taónico. La existencia de los neutrinos fue propuesta por el físico austriaco Wolfgang Ernst Pauli al interpretar la desintegración β de los neutrones.

En la tabla (A.2) se muestran los leptones y sus principales características.

Tabla A.2: *partículas elementales, leptones*

lepton	símbolo	masa(MeV/c^2)	c. eléctrica	spin
Electrón	e	0.51099	-1	$\pm 1/2$
Muon	μ^-	105.658	-1	$1/2$
Tao	τ^-	1776.99	-1	$1/2$
neutrino electrónico	ν_e	$< 3eV$	0	$1/2$
neutrino muónico	ν_μ	$< 0,19$	0	$1/2$
neutrino taonico	ν_τ	$< 18,2$	0	$1/2$

A.3 Quarks

Los quarks son partículas elementales que se combinan para formar otras partículas subatómicas como los hadrones; además son las únicas partículas fundamentales que interactúan con las cuatro fuerzas fundamentales. Fueron predichos por Murray Gell-Mann y Kazuhiko Nishijima para clasificar los hadrones en 1964 y descubiertos de manera experimental por Taylor, Kendall y Friedmann, líderes de los experimentos en el SLAC. Hay seis quarks diferentes:

- ✓ **Quark up (Arriba)**: por ser un fermión cumple con el principio de exclusión de Pauli. Pertenece a la primera generación de quarks.
- ✓ **Quark down (Abajo)**: este quark junto con el quark arriba y los electrones, forma toda la materia que podemos ver y de la que estamos hechos.
- ✓ **Quark charm (Encanto)**: pertenece a la segunda generación de quarks, con una vida media corta.
- ✓ **Quark strange (Extraño)**: junto con el quark charm forman hadrones que se desintegran rápidamente y pertenece a la segunda generación.
- ✓ **Quark top (Cima)**: es uno de los últimos quarks en ser descubiertos, pertenece a la tercera familia de quarks y es el más masivo de todos, también es inestable.
- ✓ **Quark bottom (Fondo)**: es el segundo quark más masivo con una masa aproximadamente cuatro veces la del proton, es detectado en su mayoría en la desintegración del quark top, también es inestable y pertenece a la tercera generación.

En la tabla (A.3) se muestran los quarks y algunas de sus principales características.

Tabla A.3: *partículas elementales, quarks*

quark	símbolo	masa(MeV/c^2)	c. eléctrica	spin
down	d	4 a 8	$-1/3$	$1/2$
up	u	1.5 a 4	$2/3$	$1/2$
charm	c	1.15 a 1.35	$2/3$	$1/2$
strange	s	80 a 130	$-1/3$	$1/2$
top	t	$174,3GeV$ a $178,1GeV$	$2/3$	$1/2$
bottom	b	4,1 a 4.4	$-1/3$	$1/2$

A.4 Hadrones

Las partículas que tiene estructura interna y están compuestas por las partículas elementales; son llamadas hadrones; su carga eléctrica es un número entero, y son formados por quark, antiquark y gluones. Los hadrones se dividen en dos clases; los bariones y los mesones.

A.4.1. Bariones

Están compuestos por tres quarks, entre ellos están los nucleones que son las partículas que forman el núcleo atómico, el protón y el neutrón, se consideran estables aunque el neutrón aislado no lo es, con una vida media de mas o menos $885,7s$ [21] y están formados por quarks ligeros down y up. Los hiperones que son hadrones más pesados están formados por los quark pesados top, strange, charm y bottom, son muy inestables y decaen en bariones más ligeros como el protón y neutrón. En la tabla (A.4) se muestran algunos bariones y sus principales características.

A.4.2. Mesones

Son los hadrones más ligeros formados por dos quarks, en general quark-antiquark; los mesones tienen spin entero. La existencia de los mesones fue predicha por el físico japonés Yukawa Hideki en 1935 y descubiertas en 1947. Los mesones más importantes son mostrados en la tabla (A.5), de allí se puede destacar el hecho que el pión es el mesón mas ligero con una masa para el π^\pm de $139,57018 \frac{MeV}{c^2}$, y para el π^0 una masa de $134,9766 \frac{MeV}{c^2}$, la cual es bastante pequeña comparada con los demás hadrones que tiene

Tabla A.4: *partículas compuestas, bariones*

Barión	símbolo	masa(MeV/c^2)	quarks	spin	vida media
protón	p	938.27203	uud	1/2	10^{31} a 10^{33} años
neutrón	n	939.56536	udd	1/2	885.7s aislado
lambda	Λ_c^+	2284.9	udc	1/2	$200 \times 10^{-15}s$
	Λ^0	1115.683	uds	0	$2,632 \times 10^{-10}s$
sigma	Σ^+	1189.37	uus	1	$0,8018 \times 10^{-10}s$
	Σ^0	1192.642	uds	1/2	$7,4 \times 10^{-20}s$
	Σ^-	1197.449	dds	1/2	$1,479 \times 10^{-10}s$
xi	Ξ^0	1314.83	uss	1/2	$2,9 \times 10^{-10}s$
	Ξ^-	1321.31	dss	1/2	$1,639 \times 10^{-10}s$
omega	Ω^-	1672.45	sss	2/3	$0,821 \times 10^{-10}$

masa alrededor de $1 \frac{GeV}{c^2}$ [22] lo que lo hace privilegiado para el estudio en este trabajo.

A.5 Clasificación de las Partículas Elementales

La clasificación de las partículas ha variado mucho a medida que se han desarrollado las diferentes teorías cuánticas. La historia se remonta a la era clásica que comprende los años 1897-1932, con el descubrimiento de algunas partículas como el electrón, el proton y el fotón. El descubrimiento de los primeros mesones trajo una nueva generación de partículas en los años 1934-1947, adicional a la necesidad de explicar porque los protones del núcleo permanecen juntos, entonces se introducen las interacciones fuertes. En los años venideros hasta 1956 se descubren las antipartículas y hasta el año 1962 los neutrinos y las denominadas en ese entonces partículas extrañas, lo que obliga a los científicos a buscar la forma de clasificarlas. En un principio estas se separaron en tres familias, la de los leptones, la de los bariones y la de los mesones, estas dos últimas se juntan en el grupo de los hadrones, con el descubrimiento de las antipartículas la familia de los leptones estaba constituida por 8 miembros, el electrón, el muon, sus respectivos neutrinos y antiparticulas¹, mientras los hadrones constituían las partículas que sufrían las interacciones fuertes. Subsecuentemente el descubrimientos de otros mesones como el kaon K y el barión Λ entre muchos otros, hicieron la familia de los hadrones muy numerosa. En 1962 el físico estadounidense Murray Gell-Mann creo el camino del octete,

¹Los respectivos neutrinos son para el electrón el neutrino electrónico, para el muon el neutrino muónico, y sus antipartículas antineutrino electrónico y muónico.

Tabla A.5: *partículas compuestas, mesones*

mesón	símbolo	masa(MeV/c^2)	quarks	spin	vida media
Pión	π^+	139.57018	$u\bar{d}$	0	$2,6033 \times 10^{-8} s$
	π^-	139.57018	$d\bar{u}$	0	$2,6033 \times 10^{-8} s$
	π^0	134.9766	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	$8,4 \times 10^{-17} s$
Kaón	K^+	493.677	$u\bar{s}$	0	$1,2384 \times 10^{-8} s$
	K^-	493.677	$\bar{u}s$	0	$1,2384 \times 10^{-8} s$
	K^0	497.648	$d\bar{s}$	0	
$\tilde{E}ta$	η	547.75	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	$< 10^{-18} s$
Rho	ρ^+	≈ 770	$u\bar{d}$	1	$0,4 \times 10^{-23} s$
	ρ^-	≈ 770	$\bar{u}d$	1	$0,4 \times 10^{-23} s$
	ρ^0	≈ 770	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	1	$0,4 \times 10^{-23} s$
D	D^+	1869.4	$c\bar{d}$	0	$1040 \times 10^{-15} s$
	D^-	1869.4	$\bar{c}d$	0	$1040 \times 10^{-15} s$
	D^0	1864.6	$c\bar{u}$	0	$410,3 \times 10^{-15} s$
Phi	φ	≈ 1020	$s\bar{s}$	1	$20 \times 10^{-23} s$
J/Ψ	J/Ψ	3096.916	$c\bar{c}$	1	$0,8 \times 10^{-20}$

clasifico los bariones como el octeto bariónico y los mesones como el octeto mesónico dependiendo de sus características como la carga, la masa y otros números cuánticos conocidos en este momento.

En 1964 el propio Murray Gell-Mann propuso que los hadrones estaban constituidos por partículas mas pequeñas a las que llamo quarks, generando así un nuevo modelo de clasificación de partículas llamado modelo quark, en el cual se clasificaban los hadrones respecto a los quarks que los formaban, los bariones eran formados por tres quarks y los mesones por un quark y un antiquark. Inicialmente Murray Gell-Mann propuso la existencia de tres quarks u , d y s , la combinación con repetición de tres, los tres quarks producen 10 tipos diferentes de bariones, los cuales fueron llamados el decuple bariónico, y la combinación de dos de estos quarks genera 9 diferentes mesones los cuales llamo el noneto mesónico. El descubrimiento de un nuevo leptón, el taon, y otros bariones llevaron a la comunidad científica a creer en la existencia de tres quarks adicionales que hasta entonces solo se consideraban teóricos pues no existía evidencia experimental. El desarrollo tecnológico y los primeros aceleradores de partículas permitieron realizar una serie de experimentos como el de dispersión inelástica profunda, que consiste en analizar el interior de los hadrones, por medio de partículas mas pequeñas como el electrón y otros leptones para que penetren en estos, lo que llevo a la confirmación experimental de la existencia de los quarks. A partir de este momento en el año de 1978 se creo el modelo estándar de clasificación de partículas elementales, el cual consiste en la formación de familias por generaciones, la familia de los leptones y los quarks. En la

Tabla A.6: *partículas elementales, el modelo estándar*

Bosones	Gluones	Fotones γ	Bosones o weak Z^0, W^\pm
Leptones	primera generación	segunda generación	tercera generación
	electrón e^-	muón μ	taon τ
	neutrino electrónico ν_e	neutrino muónico ν_μ	neutrino taónico ν_τ
Quarks	primera generación	segunda generación	tercera generación
	up u	charm c	top t
	down d	strange s	bottom b

tabla (A.6) se muestra esta clasificación[16].

Apendice B

EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

El átomo de hidrógeno es un estado ligado formado por protón-electrón en el cual el electrón está girando alrededor del núcleo, este sistema se puede estudiar solamente con interacciones electromagnéticas. Las transiciones de los niveles de energía para los electrones están determinadas por[7]:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}R \left(\frac{m_p}{m_p + m_e} \right),$$

Para el átomo de hidrógeno la energía del estado base; con $n = 1$ es $E_1 = -13,6eV$ aproximadamente. Las transiciones del $H\pi$ tiene otro comportamiento debido a la interferencia de interacciones electromagnéticas y fuertes.

El radio para el estado base del átomo de hidrógeno está dado por el radio de Bohr en unidades naturales:

$$a = \frac{1}{\mu\alpha}, \tag{B.1}$$

donde μ es la masa reducida del sistema, para el átomo de hidrógeno este radio toma el valor de $0,52\text{\AA}$, mientras para el hidrógeno piónico es $222,664fm$ [9]. Las interacciones fuertes son poco perceptibles a distancias mayores de $1fm$, por esta razón la principal interacción en este sistema es la electromagnética y las interacciones fuertes entre los quarks del protón y el pión se puede tomar como una perturbación al hamiltoniano del sistema, esta afirmación será muy útil para el desarrollo del estado ligado $p\pi^-$. Cabe destacar aquí que los fuertes efectos de interacción entran de manera altamente no lineal y, en general, no se pueden evaluar perturbativamente.

Las funciones de onda del átomo de hidrógeno están dadas por:

$$\Psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{B.2})$$

cada una de las funciones determinan el comportamiento respecto a diferentes coordenadas, la radial esta expresada por la función:

$$R_{nl} = - \left(\frac{2}{na} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2r}{na} \right)^l e^{\frac{-r}{na}} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na} \right); \quad (\text{B.3})$$

donde L_{n+l}^{2l+1} son los polinomios de Laguerre. La función angular esta dada por los armónicos esféricos. Para el estado base donde $n = 1$ y $l = 0$ se tiene:

$$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{\frac{-r}{a}}; \quad (\text{B.4})$$

con a el radio de Bohr[7]. La función de onda para el átomo de hidrógeno en el estado base en la representación del momento esta normalizada por[19]:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\Psi(\mathbf{k})|^2 = 1 \quad (\text{B.5})$$

B.0.1. Series espectrales

Para el átomo de hidrógeno, están establecidas una serie de líneas espectrales observadas en su espectro de emisión. La relación entre la longitud de onda emitida y la transición en los niveles de energía realizada esta dada por:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right); \quad (\text{B.6})$$

Donde n_1 y n_2 son los niveles final inicial respectivamente involucrados en la transición.

Si las transiciones se realizan de cualquier nivel al estado base, se tienen las series de Lyman, en este caso $n_1 = 1$ y $n_2 \geq 2$. En el espectro electromagnético estas series se

presentan en la frecuencia del ultravioleta.

Si $n_1 = 2$ es decir el segundo nivel energético, luego $n_2 \geq 3$, estas series se denominan series de Balmer. Estas series están en la zona visible del espectro.

Por otro lado, si $n_1 = 3$ y $n_2 \geq 4$ se tiene las series de Paschen, las transiciones se realizan al tercer nivel energético. Esta parte corresponde en el espectro electromagnético a la frecuencia infrarroja.

En la gráfica 2.2 se muestran los resultados de las series de Lyman para el átomo de hidrógeno y para el hidrógeno piónico, realizando una aproximación en la mecánica cuántica.

Apendice C

MOMENTO DE ISOSPIN

Para las interacciones nucleares no existe dependencia de la carga eléctrica. Bajo esta afirmación se puede considerar algunas partículas idénticas, como lo es en el caso del protón y el neutrón; partículas diferentes bajo interacciones electromagnéticas pero idénticas bajo fuerzas nucleares. La pregunta es; como hacer para diferenciarlas? Para responder este interrogante es necesario introducir un número cuántico adicional, análogo al número cuántico de spin llamado spin isotópico o Isospín. Tanto el neutrón como el protón se consideran dos estados diferentes de una misma partícula la cual se denomina *nucleón*.

La diferencia entre el protón y el neutrón es análoga a las partículas con spin arriba y spin abajo. El isospín es entonces una propiedad cuántica asignada a las partículas, en general a los hadrones para diferenciarlas bajo interacciones fuertes, y tiene las mismas características del spin[7].

La idea de isospín nace en la física nuclear, fue Heisenberg quien introdujo en 1933 un formalismo elegante, considerado en aquella época sólo una convención: el formalismo de isospín. Este formalismo estaba en completa analogía con la teoría del spin, y de hecho, se atribuía al nucleón un isospín de valor $+1/2$. En un principio, la introducción del isospín no fue recibida con gran entusiasmo por la comunidad científica. Sin embargo, esta variable volvió a aparecer en otro contexto: la teoría de la desintegración beta desarrollada por Fermi en analogía con la electrodinámica cuántica (QED).

En 1935, Yukawa desarrolló una teoría en la que la variable de isospín era usada en el contexto de la teoría de campos. Dos escuelas diferentes, una en Gran Bretaña y otra en Japón, desarrollaron la teoría del mesón en la que el isospín era necesario para explicar la independencia de la carga en las fuerzas nucleares. Mientras, en 1937, Wigner introdujo el isospín en la espectroscopia nuclear renombrándolo como spin isotópico.

De este modo, el isospín pasó de ser solo una herramienta útil, a un número cuántico con consecuencias de simetría. La observación experimental, con la llegada de los aceleradores de partículas, permitió reconocer al isospín como un número cuántico que se conserva en los procesos de interacción fuerte.

En la teoría de isospín se considera al neutrón y al protón como estados de una misma partícula, el nucleón N .

$$N \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

que puede aparecer, por tanto, con o sin carga eléctrica. De hecho, ambos poseen la misma extrañeza, spin y número bariónico, aunque difieren ligeramente en la masa.

Tabla C.1: Nucleones e hiperones [21]

Partícula	Masa(MeV)	Vida media (s)	Modos de decaimiento y fracción (%)
p	933.3	Estable	
n	939.6	889	$pe^{-}\nu$ 100
Λ^0	1115.6	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$p\pi^{-}$ 64
Σ^+	1189.4	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$p\pi^0$ 51.6
Σ^0	1192.6	$7,4 \cdot 10^{-20}$	$n\pi^0$ 48.4
Σ^-	1197.4	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0\gamma$ 100 $n\pi^{-}$ 99.85
Ξ^0	1314.9	$2,9 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0\pi^0$ 100
Ξ^-	1321.3	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0\pi^{-}$ 100
Ω^-	1672.4	$0,8 \cdot 10^{-10}$	Λ^0K^{-} 68 $\Xi^0\pi^{-}$ 24 $\Xi^{-}\pi^0$ 8

Si se observa el cuadro (C.1), se encuentra que los hadrones pueden ser organizados en grupos, de tal forma que cada partícula del mismo grupo posee la misma extrañeza, el mismo número bariónico y el mismo spin, y sólo pequeñas diferencias entre las masas.

Estos grupos son llamados *multipletes de isospín*. En estos grupos encontramos dobletes (p, n) , (Ξ^0, Ξ^-) , tripletes $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ y singletes Λ^0, Ω^- , Para cada multiplete de bariones existe un multiplete de antibariones.

El Isospín surge como analogía entre la carga y el spin de las partículas. Recordando que un spin de magnitud J (en unidades de \hbar), puede orientarse en $2J + 1$ estados con respecto a una dirección definida del espacio. Como se ha indicado, Heisenberg asumió que partículas similares (como el neutrón y el protón) eran diferentes estados de una misma partícula básica, al igual que los dos estados de spin del electrón. Él denotó estos estados por la dirección de un vector imaginario con propiedades similares a las del spin. Así para tener dos estados, el vector debe tener una longitud de $1/2$; para obtener tres estados, una longitud de 1, y así sucesivamente, tal vector es el isospín.

Matemáticamente, se definen tres operadores I_+, I_- e I_3 , que cumplen las reglas de conmutación del momento angular. El operador I_3 es la proyección del vector isospín a lo largo del eje z en el espacio imaginario en el que ha sido definido. La relación entre isospín e hipercarga esta dada por la fórmula de Gell-Mann and Nishijima[17]:

$$I_3 = -\frac{Y}{2} + Q, \quad (\text{C.2})$$

Donde Q representa en unidades la carga del protón. Donde se ha definido $Y = S + B$, con S la extrañeza y B el número bariónico, se puede reescribir (C.2) como:

$$I_3 = -\frac{B + S}{2} + Q, \quad (\text{C.3})$$

El físico alemán Werner Heisenberg establece que el álgebra de isospín es análogo al de momento angular generalizado, el cual es descrito por dos números cuánticos, I el número de isospín principal e I_3 la componente de isospín a lo largo del eje de preferencia, generalmente el eje z . Luego el álgebra de isospín forma un grupo especial unitario $SU(2)$.

El isospín es una magnitud dimensional, cuyas ecuaciones de valores propios están dadas por:

$$\hat{I}^2|\Psi\rangle = i(i+1)|\Psi\rangle \quad \hat{I}_3|\Psi\rangle = m|\Psi\rangle. \quad (\text{C.4})$$

En el caso del protón[21], $Q = 1$, $S = 0$ y $B = 1$, aplicando (C.2) se obtiene $I_3 = \frac{1}{2}$, mientras que para el neutrón $Q = 0$, $S = 0$ y $A = 1$ luego $I_3 = -\frac{1}{2}$, entonces el isospín

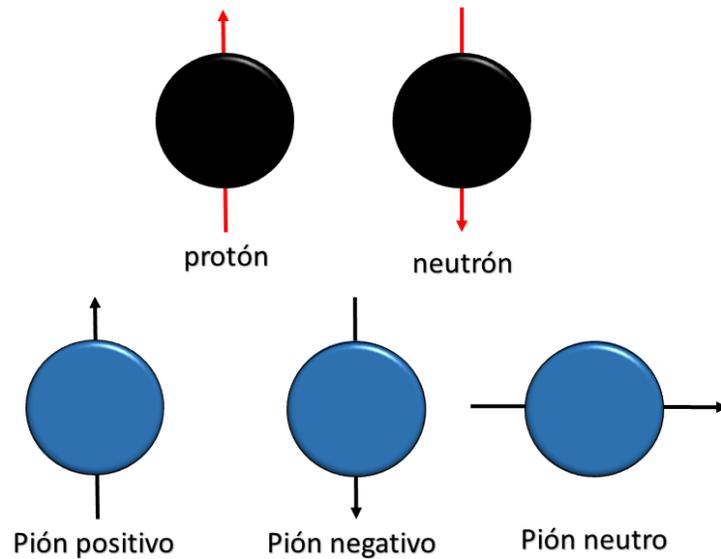


Figura C.1: Representación del Isospin para el pión y el nucleón.

del nucleón es $I = \frac{1}{2}$. Para el π^+ $Q = 1$, $A = S = 0$ se obtiene una componente de isospin $I_3 = 1$, para el π^- $Q = -1$, $A = S = 0$ luego $I_3 = -1$ y finalmente para el π^0 ; $Q = 0$, $A = S = 0$ lo que conlleva a $I_3 = 0$, con esto se deduce que el isospin del pión es $I = 1$.

El isospin se conserva en las interacciones fuertes. Es decir, el isospin total de las partículas participando en una interacción fuerte, es igual al isospin total de los productos. Por otra parte, I_3 se conserva tanto en la interacción fuerte como electromagnética. La ley de conservación de I_3 es una simple regla de conteo, mientras que la ley de conservación de I , es más complicada, dado que es una magnitud vectorial, usualmente es posible añadir los isospines de varias partículas de más de una forma.

El isospin, como se ha mencionado, es como el momento angular, pero en un espacio abstracto. La conservación del isospin se corresponde con la invariancia bajo rotaciones en ese espacio imaginario (I-espacio), de la misma forma que la conservación del momento angular refleja la invariancia rotacional en el espacio real, luego las interacciones fuertes no poseen una dirección privilegiada en el I-espacio, no distinguen entre arriba y abajo, entre un protón y un neutrón. La invariancia de isospin, explica, por tanto, el hecho de que cueste la misma energía extraer un protón que un neutrón de un núcleo.

Es posible realizar un planteamiento más formal, considerando el Hamiltoniano que

describe las partículas, y sabiendo que las partículas de un mismo multiplete tienen masas parecidas, se tiene:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_f + \mathbf{H}_{em} + \mathbf{H}_d, \quad [\mathbf{H}, \mathbf{I}] = 0 \quad (\text{C.5})$$

Indicando así, explícitamente, que la interacción fuerte conmuta con todas las componentes del isospín, es la llamada *simetría de isospín*. Ahora bien, la diferencia de masas entre partículas de un mismo multiplete es del orden de MeV , lo que indica que la interacción electromagnética no conmuta con los operadores I_{\pm} . Sin embargo, sí conmuta con I_3 de la forma como se muestra en la ecuación (C.4), ya que conserva la carga eléctrica, el número bariónico y la extrañeza, dando lugar a la simple regla de conteo citada antes. La interacción débil no conserva ninguna de las componentes del isospín [8].

Apendice D

CAMPO FERMIÓNICO Y MESÓNICO

Una de las características en teoría cuántica de campos, es representar las diferentes partículas por medio de campos, cuya naturaleza dependerá de cada partícula. En este trabajo se utiliza el campo para mesones y fermiones, que son las partículas implicadas en el proceso.

D.1 El campo mesónico

Los piones se clasifican dentro de la familia de los mesones. Es necesario entonces establecer las funciones de estado que describen estas partículas. Considerando la densidad lagrangiana escalar[18]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2]. \quad (\text{D.1})$$

Recordando las ecuaciones de Euler y lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0 \quad (\text{D.2})$$

Aplicando euler y lagrange a la densidad lagrangiana (D.1) se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2] \right) = -m^2 \phi$$

Para la otra derivada se tiene que realizar un cambio de indices, introduciendo el tensor

$g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2] \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi \partial_\mu \phi); \end{aligned}$$

ya que $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$. Aplicando regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial_\mu \phi}{\partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \frac{\partial_\nu \phi}{\partial_\mu \phi} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta_\mu^\nu) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (2\partial_\nu \phi) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \partial^\mu \phi; \end{aligned}$$

finalmente, considerando los indices de la métrica de Minkowski:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] &= \partial_\mu \partial^\mu \phi \\ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] &= (\partial_0 \partial^0 - \nabla^2) \phi \\ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \square^2 \phi. \end{aligned}$$

Combinando estos resultados se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\square^2 \phi + m^2 \phi = 0 \tag{D.3}$$

La ecuación (D.3) modela una partícula libre[8]. La solución de esta ecuación es lo que se denomina campo escalar real o campo mesónico; y es el campo con el cual se

representa a partículas con spin cero. El campo mesónico independiente del tiempo está dado por[18]:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_k \mathbf{e}^{-ik \cdot x} + a_k^\dagger \mathbf{e}^{ik \cdot x} \right] \quad (\text{D.4})$$

D.2 El campo fermiónico

La familia de los fermiones la componen las partículas con spin quebrado, el protón tiene spin 1/2, lo que lo hace un fermión. Para obtener la función que describe los fermiones se considera la densidad lagrangiana[18]:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x), \quad (\text{D.5})$$

donde γ^μ son las matrices de dirac(A). Nuevamente aplicando las ecuaciones de euler y lagrange (D.2) para la función $\bar{\Psi}(x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} (\bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x)) = -i\gamma^\mu \Psi;$$

luego

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) = -i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi.$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -m\Psi;$$

con lo que se obtiene:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0; \quad (\text{D.6})$$

la cual se conoce como ecuación de Dirac. Análogamente, se puede obtener la ecuación adjunta:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} + m\bar{\Psi} = 0. \quad (\text{D.7})$$

La solución a la ecuación (D.6) es[8]:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{\alpha} (b(\mathbf{p}, \alpha) v^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \mathbf{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b^{\dagger}(\mathbf{p}, \alpha) \nu^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \mathbf{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \quad (\text{D.8})$$

Aquí v^{α} y ν^{α} son espinores de Dirac.

Bibliografía

- [1] A. Deloff. Fundamentals in hadronic Atom Theory. Soltan Institute for Nuclear Studies, Warsaw, Poland. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003.
- [2] J. Gasser. V. E. Lyubovitskij and A. Rusetsky. Spectrum and Decays of Hadronic Atoms. arXiv:hep-ph/9911260v1 5 Nov 1999.
- [3] J. Gasser, V.E. Lyubovitskij and A. Rusetsky. Hadronic atoms in QCD + QED. arXiv:0711.3522v2 [hep-ph] 11 Mar 2009.
- [4] Patrick Labelle Physics Department , McGill University, Montreal , Canada H3A 2T8, Kirk Buckley Physics Department, Bishops University, Lennoxville, Canada. A new $O(\alpha)$ correction to the decay rate of ponium. arXiv:hep-ph/9804201v1 1 Apr 1998.
- [5] J. Gasser, V.E. Lyubovitskij and A. Rusetsky. Hadronic Atoms. arXiv:0903.0257v2 [hep-ph] 9 Apr 2009.
- [6] B Adeva, L Afanasyev, M Benayoune et.al. Detection of $\pi^+\pi^-$ atoms with the DIRAC spectrometer at CERN. arXiv:hep-ex/0409053v2 28 Sep 2004.
- [7] Nouredine Zettili. Quantum Mechanics, Concepts and aplicaciones. Jacksonville State University 2001. John Wiley and sons, LTDA. New York.
- [8] Claude Itzykson, Jean Bernard Zuber. Quantum Field Theory. McGraw-Hill. International Edition 1980.
- [9] Fisico Amando Delgado Solano, Dr. Jairo Alonso Mendoza. Sección eficaz del Hidrógeno Píonico. Tesis de pregrado. Universidad de Pamplona. Pamplona 2012.
- [10] P. A. M.Dirac. The Principles of Quantum Mechanics. Ediciones Ariel Esplugues de Llobregat. Barcelona 1967.

-
- [11] A. O. Barut. The Theory of the Scattering Matrix for the Interactions of Fundamental Particles. Barut. Macmillan, New York, 1967.
- [12] Michel Le Bellac. Quantum Physics. Cambridge University Press 2006.
- [13] A. N. Ivanov, M Faber, J. MAron, N. I. Troitskaya. Energy level displacement of the excited nl state of pionic hydrogen. arXiv:nucl-th/0310027v2 January 27, 2014.
- [14] A. N. Ivanov, M Faber, J. MAron, N. I. Troitskaya. On pionic hydrogen. Quantum field theoretic, relativistic covariant and model independent approach. arXiv:nucl-th/0306047v3 20 Nov 2003.
- [15] Weber H.J, Arfken G.B. Essential mathematical methods for physicists 2003.
- [16] David Griffiths. Introduction to Elementary Particles. Red college. Jhon Wiley and sons, INC. 1987.
- [17] Javier M. G. Duarte. Isospin and SU(2) Symmetry. Massachusetts Institute of Technology, MA 02142 April 28, 2009.
- [18] George Sterman. An Introduction a Quantum Field Theory. Institute for theoretical physics. State University of New York at Stony Brook. Cambridge University. 1993.
- [19] S.S Schweber. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Row, Peterson and co. Evaston III.Elmsford,New York. 1961.
- [20] M. Abramowitz and I. E. Stegun, HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 1972.
- [21] K.A. Olive et al. The Review of Particle Physics (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).
- [22] Torleif Ericson CERN, Geneva and Wolfram Weise University of Regensburg. Pions and Nucleos. CLARENDON PRESS - OXFORD 1988.
- [23] S. Deser, M. L. Goldberger, K. Baumann, and W. Thirring, Phys. Rev. 96, 774 (1954).
- [24] T.E.O. ERICSON, B. LOISEAU and S. WYCECHA. PHENOMENOLOGICAL DETERMINATION OF THE PION-NUCLEON SCATTERING LENGTHS FROM PIONIC HYDROGEN. arXiv:hep-ph/0411230v1 17 Nov 2004.
- [25] N.N Bogoliubov. D. V. Shirkov. Introduction To The Theory Of Quantized Fields. Steklov Mathematical Institute. Academy Of Sciences, Moscow USSR.

-
- [26] L. I. Schiff, Quantum Mechanics. New York, McGraw-Hill, Third Edition. 1968.
- [27] Barry R. Holstein Hadronic Atoms and Effective Interactions. Institut Kernphysik and Department of Physics and Astronomy University of Massachusetts Amherst February 9 2008. arXiv:nucl-th/9901041v2 17 Sep 1999.
- [28] Torleif Ericson CERN, Geneva and Wolfram Weise. Pions and Nucleos. University of Regensburg. CLARENDON PRESS - OXFORD 1988.
- [29] J Mitroy and I A Ivallov. Quantum defect theory for the study of hadronic atoms. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27. 21 March 2001.
- [30] M. Doring, E. Oset, and M.J. Vicente Vacas. s wave pion nucleon scattering lengths from πN pionic hydrogen and deuteron data. arXiv:nucl-th/0402086v3 5 Aug 2004.