



# ESTRUCTURA CANÓNICA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Yorlin García

2020



# ESTRUCTURA CANÓNICA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Tesis  
Memoria presentada como requisito parcial para la obtención del  
título de Grado en Físico por la Universidad de Pamplona.

Por  
Yorlin Osney García Sierra

Director(es):  
Dr. Mariano Celada  
Dra. Blanca Cañas

Universidad de Pamplona  
Facultad de ciencias básicas  
Departamento de física y geología  
Escuela de física  
Pamplona, Colombia  
Noviembre 2020

*Dedicado a  
mis padres*

# Agradecimientos

Este trabajo de tesis, me ha permitido aprovechar las competencias y experiencias de muchas personas del cual quiero agradecer en este apartado.

En primer lugar, a mi director de tesis, Dr. Mariano Celada, mi más amplio y profundo agradecimiento por haberme confiado este trabajo, por su paciencia ante mi inconsistencia, por su valiosa dirección y apoyo para seguir este camino y llegar a la conclusión del mismo. Cuya experiencia y educación han sido mi fuente de motivación y curiosidad durante estos años.

A mi directora de tesis, Dra. Blanca Cañas, un especial agradecimiento por sus consejos, sabiduría, paciencia y apoyo que me brindo durante mi estancia donde he tenido la oportunidad de aprender e iniciar parte de este trabajo.

Del mismo modo, agradezco al Dr. Diego González y al Dr. Edilson Reyes, por hacer parte del comité evaluador de trabajo de grado. Todas sus observaciones fueron de gran ayuda para mejorar esta tesis.

Sin todos ellos, nada de esto nunca hubiese sido posible. A los demás, quienes fueron partícipes de forma directa o indirectamente en el desarrollo de este trabajo, mil gracias.

A todos ustedes, mis más sinceros agradecimientos.

# Resumen

La formulación hamiltoniana de la relatividad general en el formalismo de segundo orden lleva a las variables ADM (Arnowitt - Deser - Misner), donde la dinámica de la teoría está codificada en la “evolución” de la métrica de las 3-geometrías que folian el espacio-tiempo. Por otro lado, uno puede desarrollar el análisis canónico de la acción de Palatini (o Holst), la cual constituye una formulación de primer orden de la relatividad general donde el campo gravitacional es representado no por un tensor métrico, sino por un marco ortonormal junto con una conexión de Lorentz. Ya sea eliminando las constricciones de segunda clase o sin introducirlas en el proceso, uno obtiene un espacio de fases parametrizado por variables manifiestamente covariantes de Lorentz sujetas a la restricción de Gauss, la de difeomorfismos y la escalar. Estas dos últimas deben estar asociadas con las que surgen en el formalismo ADM, por lo que encontrar la relación precisa entre ambas formulaciones canónicas de la relatividad general se hace necesario. Esta tesis constituye un primer paso para establecer esta relación. Con este fin, en este trabajo se realiza el análisis canónico de la acción de Palatini en  $n$ -dimensiones (para  $n > 2$ ) con constante cosmológica, que involucra solo constricciones de primera clase (siguiendo de cerca el método desarrollado en [1]). Esto es corroborado explícitamente a través del cálculo del álgebra de constricciones de la teoría, mostrando que esta cierra y es consistente. Finalmente, se lleva a cabo el conteo de grados de libertad físicos de la teoría y se encuentra que coinciden con los de la formulación ADM.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>1. INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>2. Aspectos matemáticos</b>	<b>9</b>
2.1. Variedad diferenciable . . . . .	10
2.1.1. Vector . . . . .	12
2.1.2. Vector dual (1-Formas) . . . . .	15
2.1.3. Tensores . . . . .	16
2.2. Tensor métrico . . . . .	20
2.3. Formas diferenciales . . . . .	23
2.3.1. Derivada exterior . . . . .	24
2.3.2. Integración de formas . . . . .	28
2.4. Derivada de Lie . . . . .	30
2.5. Curvatura y torsión . . . . .	32
2.5.1. Conexión afín . . . . .	33
2.5.2. Derivada covariante . . . . .	33
2.5.3. Transporte paralelo . . . . .	36
2.5.4. Tensor de curvatura y torsión . . . . .	38
2.6. Base no coordenada . . . . .	41
2.6.1. Ecuaciones de Cartan . . . . .	43
<b>3. Relatividad General</b>	<b>45</b>
3.1. Ecuaciones de Campo . . . . .	48
3.2. Formulación lagrangiana . . . . .	53
3.3. Formulación Hamiltoniana . . . . .	55
3.3.1. Formalismo ADM . . . . .	56
<b>4. Formalismo de primer orden</b>	<b>68</b>

4.1. Lagrangiano de Hilbert-Palatini . . . . .	69
4.1.1. Formulación desde las bases ortonormales . . . . .	70
4.2. Formulación hamiltoniana de la acción de HP . . . . .	74
<b>5. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>87</b>
<b>A. Sistemas hamiltonianos con constricciones</b>	<b>89</b>
<b>B. Transporte paralelo</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

# Índice de figuras

1.1. Detección de ondas gravitacionales . . . . .	3
1.2. Imagen del primer agujero negro . . . . .	4
2.1. Variedad . . . . .	11
2.2. Función . . . . .	14
2.3. Difeomorfismo . . . . .	14
2.4. Pullback . . . . .	15
2.5. Banda de Möbius . . . . .	29
2.6. Transporte paralelo sobre $S^2$ . . . . .	37
2.7. Paralelogramo infinitesimal . . . . .	39
3.1. Embebimiento de una variedad . . . . .	57
3.2. Proyección sobre $\Sigma$ de $\mathcal{M}$ . . . . .	59
3.3. Foliación en una variedad $\mathcal{M}$ . . . . .	60
3.4. Variables ADM sobre $\Sigma_t$ . . . . .	62



# Capítulo 1

## INTRODUCCION

La relatividad general (RG) es una teoría geométrica de la gravedad concebida por Albert Einstein, basada en dos principios esenciales: el principio de covarianza general, que puede expresarse como: “*las leyes de la física deben ser las mismas para cualquier observador*”, y el principio de equivalencia, que establece que “*las leyes de la relatividad especial se aplican de forma local para todo observador inercial*” [2]. Einstein publicó su teoría con sus elementos más importantes en noviembre de 1915, en un documento titulado: “*Las ecuaciones de campo de la gravitación*” [3], que dan las ecuaciones de campo correctas para la relatividad general. Su nombre es debido a que generaliza la teoría especial de la relatividad, relatividad a observadores en estado de movimiento arbitrario (es decir, bajo el marco de referencia inercial y no-inercial). Además, modifica la ley de gravitación universal de Newton, proporcionando una descripción unificada de la gravedad como una propiedad geométrica del espacio-tiempo.

La teoría de la RG ha jugado un rol importante en las últimas décadas, puesto que ha revolucionado el pensamiento físico-matemático involucrado en la descripción de los fenómenos macroscópicos. La noción relativa de la teoría juega con la intuición misma, marcando el hecho de que en ningún marco de referencia sea este inercial o no, es distinguible la presencia de un campo gravitacional por medio de experimentos locales. Esto está justamente postulado como el principio de equivalencia de Einstein (PEE): “*las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial en regiones lo suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, en las cuales es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional mediante experimentos locales*” [4]. Así, la interacción gravitatoria deja de ser pensada como una fuerza a distancia para convertirse en una característica del espacio-tiempo, es decir, en la geometría intrínseca del espacio-tiempo mismo.

El PEE muestra que la gravedad es geométrica, dado que no es distinguible encontrarse bajo aceleración uniforme o en un campo gravitacional uniforme: como la aceleración es un concepto geométrico, entonces la gravedad también debe serlo. En la teoría de Newton el potencial gravitacional satisface la ecuación de Poisson, la cual relaciona segundas derivadas del potencial con la densidad de materia. Al trasladar el concepto a relatividad, se generaliza utilizando un tensor que contenga segundas derivadas del tensor métrico y ese tensor es la curvatura de Riemann [4]. El hecho de que el tensor métrico se interprete como potencial gravitacional, viene de postular que el movimiento en el campo gravitacional se dé a lo largo de geodésicas. Esto se justifica con el hecho de que, en pequeñas regiones, al poder igualar gravedad y aceleración, es como si no hubiera gravedad y las trayectorias fueran, en pequeñas regiones líneas rectas, es decir, geodésicas de espacio plano. Así, se postula que el movimiento de partículas de prueba en general sean geodésicas (las líneas más rectas posibles de un espacio dado, que en espacios métricos coinciden con las curvas que extremalizan la distancia). Esto lleva a la propuesta de que lo que experimentamos como gravedad, es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo [4].

Para implementar el principio de covarianza generalizado, la RG hace uso del lenguaje tensorial [2], el cual contiene objetos definidos sobre cada punto de una variedad diferenciable (modelo de espacio-tiempo), que poseen ciertas reglas de transformación bien definidas ante cambios arbitrarios de coordenadas. Estos tensores a su vez determinan propiedades geométricas y físicas de la variedad diferenciable, y entre ellos podemos resaltar al tensor métrico  $g(U, V)$ , el tensor de curvatura de Riemann  $R(X, Y)Z$  [5] y el tensor de energía-momento  $T(U, V)$ , los cuales constituyen la materia prima en la ecuación de campo para gravedad de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

cuya interpretación se dejará para el capítulo 2. La teoría de la RG, ha sido experimentalmente verificada en numerosas ocasiones desde su formulación y publicación; vale la pena mencionar dos predicciones (tempranas) que marcaron el auge de la teoría. La primera publicada el 18 de noviembre de 1915, "*Explicación del movimiento del perihelio de Mercurio a partir de la teoría general de la relatividad*" [6]. Einstein descubrió que el avance de  $43''$  por siglo se explicaba apropiadamente haciendo uso de la RG (más precisamente bajo el uso de las geodésicas de Schwarzschild, ver [4]) sin agregar otros elementos como objetos con mayor masa, concordando con las medidas obtenidas por Le Verrier en

1882 para el corrimiento del perihelio. En la segunda, Einstein descubrió que la desviación de la luz para una estrella situada visualmente justo en el borde del Sol, tenía un desplazamiento aparente de  $1,74''$ . De hecho, después de varios intentos para medir la desviación, dos expediciones británicas en 1919 confirmaron la predicción de Einstein al obtener  $1.98'' \pm 0.30''$  y  $1.61'' \pm 0.30''$ ; las medidas muestran una precisión del 1 % con los valores predichos por la RG [7].

Recientemente la RG ha gozado de gran exposición mediática gracias a la detección de ondas gravitacionales. El 11 de febrero 2016, las colaboraciones LIGO, Virgo y GEO600 anunciaron la primera detección de ondas gravitacionales, (ver figura 1.1) producidas por la fusión de dos agujeros negros [8]. La señal recibida barre hacia arriba en frecuencia de 35 a 250 Hz con una tensión de onda gravitacional máxima de  $1,0 \times 10^{-21} eV/c^2$ , y coincide con la forma de onda pronosticada por la RG para la fusión de un par de agujeros negros [9–11].

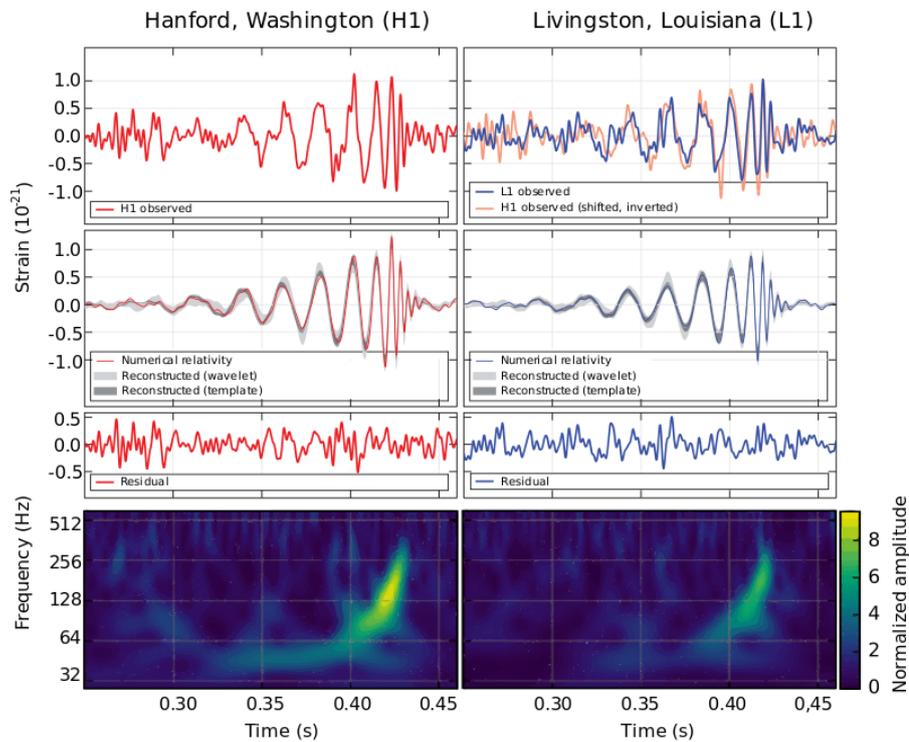


Figura 1.1: Evento de onda gravitacional GW150914 observado por los detectores LIGO Hanford (H1, paneles de la columna izquierda) y Livingston (L1, paneles de la columna derecha). Los horarios se muestran en relación con el 14 de septiembre de 2015 a las 09:50:45 UTC. Tomado de [8].

Otra predicción fundamental de la teoría de la RG es la existencia de agujeros

negros [2, 12]. Una característica principal de estos es su horizonte de eventos, un límite causal unidireccional en el espacio-tiempo del cual ni siquiera la luz puede escapar [13]. Casi un siglo después de los resultados obtenidos por Schwarzschild, siguen siendo el núcleo de las preguntas fundamentales para unificar la RG con la mecánica cuántica.

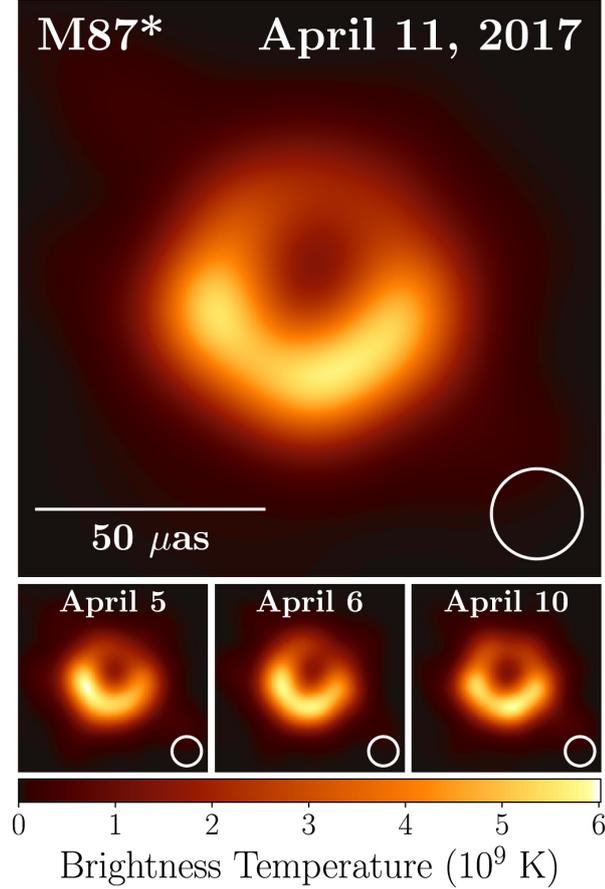


Figura 1.2: Imagen publicada por el EHT del primer agujero negro ubicado en el centro de la galaxia M87 de las observaciones del 11 de abril de 2017, presentado el 10 de abril de 2019. Tomado de [14].

El 10 de abril del 2019, una red de ocho telescopios (Event Horizon Telescope, una matriz global de interferometría de línea de base muy larga que observa a una longitud de onda de  $1.3 \text{ mm}$ ) en distintos lugares del planeta, permitió captar la primera imagen real del horizonte de eventos de un agujero negro supermasivo (ver figura 1.2), en el centro de la galaxia elíptica gigante M87, del cual se derivó una masa central de  $(6,5 \pm 0,7) \times 10^9 M_{\odot}$  [14]. En general, la imagen observada es consistente con las expectativas para la sombra de un agujero negro de Kerr como

lo predice la RG. La asimetría en la intensidad de luz que se observa en el anillo, puede explicarse haciendo uso de la radiación Doppler (radiación relativista), puesto que en la mitad “inferior” de la imagen procesada, el material que se acerca al espectador a velocidades relativistas se percibe con más brillo que el material que se aleja [14–19]. Estos elementos hacen de la RG una de las mejores teorías existentes para la descripción de los fenómenos gravitacionales.

Sin embargo, desde el punto de vista teórico la situación no es tan acogedora. A lo largo de los años se ha realizado una gran cantidad de esfuerzos para desarrollar un marco para la formulación canónica hamiltoniana de la RG. El más conocido e influyente de estas formulaciones, es el llamado formalismo ADM [20], nombrado por sus autores Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W. Misner. La construcción clásica de la teoría hamiltoniana a partir de este punto implica el cálculo de los momentos canónicamente conjugados a las variables dinámicas, es decir, a las componentes del tensor métrico, tomando la derivada parcial de la densidad lagrangiana respecto de las velocidades. Pero es necesario privilegiar alguna de las coordenadas como el tiempo para poder definir velocidades. Esto parece romper la invarianza bajo difeomorfismos. Sin embargo, este no es el caso porque dicha separación del espacio-tiempo en espacio y tiempo es completamente arbitraria. La arbitrariedad, de hecho, agota el grupo de difeomorfismos completo. Dado que la acción ADM es invariante bajo difeomorfismos, no depende de esta división auxiliar y su variación con respecto a ella conduce, como es lógico, a los generadores de este grupo de invarianza [21]. La complicación algebraica a la que lleva tal procedimiento es enorme. Podemos darnos una idea de dicha complejidad con el hecho de que P.A.M. Dirac dedicara más de una década en tal intento sin llegar a resultados satisfactorios [22].

El formalismo canónico se ha desarrollado, en particular, con miras a la cuantización canónica de la gravedad. En los últimos años una variante de las variables canónicas ADM (las variables de Ashtekar-Barbero) se ha vuelto muy popular y forma la base del llamado enfoque de gravedad cuántica de lazos [21]. Pero la RG es una teoría de la gravedad para la cual no existe una versión cuántica exitosa por el momento. Esto es debido a que los métodos de cuantización de campo convencionales se basan en la expansión perturbativa del campo débil. Su aplicación a la RG falla porque produce una teoría no re-normalizable, dado que surge una infinidad de parámetros independientes (coeficientes de contratérmino) necesarios para definir la teoría. Sin embargo, una elección dada para esos parámetros podría darle sentido a la teoría, pero como es imposible realizar infinitos experimentos para fijar los valores de cada parámetro, se ha argumentado que no se tiene, en la teoría de perturbaciones, una teoría física con sentido.

La no-cuantizabilidad proviene del hecho, de que en esta teoría se estaría cuantizando la geometría, es decir, el fondo mismo sobre el cual se formula la teoría. Esta situación es bastante diferente de lo que ocurre en otras teorías en las que la cuantización se realiza sobre un fondo fijo. Así, una teoría de gravedad cuántica implicaría una comprensión profunda de lo que significan el espacio y el tiempo en el régimen cuántico, algo en la cual radica tanto la dificultad de su obtención como la belleza de la misma [23].

Parece entonces que la alternativa más viable para obtener una teoría cuántica de la gravedad, consiste en desarrollar un enfoque de cuantización no perturbativo e independiente del fondo del campo gravitacional. Entre los candidatos más promisorios en esta línea de pensamiento tenemos a la gravedad cuántica de lazos (Loop Quantum Gravity, LQG) [21, 23], la cual predice una estructura discreta del espacio a escalas microscópicas [24, 25]. Dado que dicho modelo se basa en una de las formulaciones canónicas de la relatividad general, es interesante entender cómo tales formulaciones están relacionadas a nivel clásico. Esto a su vez podría proveer nuevos puntos de partida para desarrollar una cuantización canónica de la gravedad donde los problemas que presentan los modelos actuales (como la ambigüedad de Immirzi o la recuperación de un apropiado límite clásico, entre otros) puedan ser resueltos de una forma satisfactoria.

Si bien la gravedad cuántica de lazos es uno de los modelos candidatos para la cuantización del campo gravitacional [26], está basada en las variables de Ashtekar-Barbero para la RG [27] que surgen del análisis canónico de la acción Holst. Aunque las ecuaciones derivadas de esta acción son las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein, contiene un parámetro libre que resulta importante a nivel cuántico. Se cree que la presencia del llamado parámetro de Immirzi [28] puede deberse al hecho de que las variables de Ashtekar-Barbero se obtienen mediante el uso de la norma temporal, que rompe la invarianza de Lorentz reduciéndola a la invarianza rotacional para simplificar la construcción de la teoría cuántica asociada. Debido a esto, han habido varios intentos para construir una descripción canónica covariante de Lorentz del espacio de fase de la RG que busca resolver la ambigüedad de Immirzi [29, 30].

Como es bien sabido, existen diferentes formas en las que puede definirse un lagrangiano para describir la dinámica clásica de un sistema físico. Así pues, las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein pueden ser derivadas de una acción diferente, que depende de un par de variables independientes, la tétrada (o marco ortonormal) y una conexión de Lorentz, la cual es conocida como la acción

de Hilbert-Palatini (HP) y provee un lagrangiano de primer orden para la RG que, además, tiene múltiples relaciones con otras acciones relevantes [31]. Con la introducción de la tétrada, la RG pasa a ser una teoría dotada con dos simetrías fundamentales: la invarianza bajo difeomorfismos (una forma más técnica de expresar la covarianza general) y la invarianza ante transformaciones locales de Lorentz, las cuales implementan cambios de marcos ortonormales en cada punto del espacio-tiempo [32]. El uso de la tétrada y la conexión es de gran utilidad en la formulación de una acción fermiónica generalmente covariante, que acopla los fermiones a la gravedad [21, 33].

La acción de Palatini es solo uno de varios intentos involucrados en la búsqueda de una densidad lagrangiana para obtener gravedad pura. Por ende, existen otros tipos de acciones que involucran diferentes campos o estructuras matemáticas (ver [34] para formulaciones usando 2-formas). Un ejemplo de ello está en la acción de Palatini auto-dual, que puede verse como la base lagrangiana para la formulación de Ashtekar de la gravedad canónica [35–37]. Esta constituye una formulación compleja de la RG para la que se deben especificar condiciones de realidad apropiadas para recuperar la teoría real. La acción Holst [38], que es la base de la versión de variables reales de la teoría de Ashtekar, puede verse como una generalización de la acción HP.

Cuando se realiza un análisis canónico covariante de Lorentz de la RG, se encuentra que este contiene constricciones de segunda clase. Estas constricciones se pueden tratar de manera equivalente introduciendo el paréntesis de Dirac [39] o resolviéndolas de forma explícita [40, 41]. Vale la pena mencionar que, aunque el enfoque derivado en [40, 41] ciertamente es covariante de Lorentz, no lo es manifiestamente covariante de Lorentz (es decir, las simetrías involucradas no se muestran de forma explícita). Dado que nos gustaría mantener intactas las simetrías clásicas de la RG tanto como sea posible, cabe preguntarse si es plausible resolver las restricciones de segunda clase de manera manifiestamente covariante de Lorentz, obteniendo una respuesta afirmativa en [20]. Tal formulación, restringida a la acción de Palatini, es la que deseamos relacionar con la formulación ADM de la relatividad general, es decir, queremos establecer un puente entre ambas formulaciones.

Por lo tanto, el propósito de esta tesis es realizar un análisis canónico de la acción de HP, sin involucrar constricciones de segunda clase, con el fin de encontrar una relación con el formalismo ADM, identificando tanto las variables dinámicas como las no dinámicas, y analizando el comportamiento de las constricciones que surgen en ambos formalismos, siguiendo de cerca el trabajo desarrollado

por los autores de [1]. Esto permitiría establecer un puente directo entre ambos formalismos, sin involucrar ni constricciones de segunda clase ni rompimientos de la simetría interna, algo que llenaría un gap en la literatura de las diferentes formulaciones de la relatividad general. Esto nos permitirá en futuros trabajos, analizar el comportamiento de formalismos más generales/complejos (entre ellas la acción de Holst), la cual tienen como base el formalismo de Palatini.

La estructura de este trabajo estará organizada de la siguiente forma: el capítulo 2, muestra el marco matemático básico para establecer todas las herramientas necesarias para trabajar en los capítulos siguientes. El capítulo 3 hace un recorrido desde las ecuaciones de campo de Einstein, hasta la obtención del formalismo lagrangiano y hamiltoniano de la RG. En el capítulo 4 se realiza un análisis a la acción de Palatini en el formalismo de Cartan, además, se desarrolla el formalismo lagrangiano y hamiltoniano bajo el enfoque mostrado en [1]; este capítulo involucra el análisis de constricciones de la teoría, para el cual se muestra el comportamiento del álgebra de constricciones. Por último, en el capítulo 5 se presenta un resumen de los resultados obtenidos y una breve discusión de estos.

Los apéndices finales constituyen una recopilación de material complementario. En el apéndice A se realiza una breve introducción al método de Dirac para sistemas hamiltonianos con constricciones. Por último, en el apéndice B se muestra el código implementado en Python, para ver el comportamiento de un vector sobre la superficie de una esfera al ser transportado paralelamente sobre una curva<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Es importante resaltar, que en los cálculos efectuados en la presente tesis se asume  $c = 1$  (velocidad de la luz) y  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/Kg^2$  (constante universal de Newton)

# Capítulo 2

## Aspectos matemáticos

Nuestro trabajo como físicos teóricos consiste en la concepción y desarrollo de modelos matemáticos para la descripción de los fenómenos que suceden a nuestro alrededor. Las predicciones de estos modelos son luego puestas a prueba contra los experimentos, que son los que en últimas determinan su éxito para dar cuenta de los fenómenos naturales.

Vale la pena resaltar que la idea de formular la gravedad dentro de un marco que generalice la ley de gravitación universal nos ha llevado a renunciar a la idea de expresar a la gravedad misma como una fuerza que actúa de forma instantánea, en favor de una descripción geométrica de la misma donde la gravitación es vista como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

“No podemos demostrar que la gravedad debe considerarse como la curvatura del espacio-tiempo; en cambio, podemos proponer la idea, de derivar sus consecuencias y ver si el resultado se ajusta razonablemente a nuestra experiencia del mundo” [4].

Resulta que el marco matemático apropiado para describir la curvatura es el de una variedad diferenciable, la cual tiene la particularidad de ser un conjunto de puntos que localmente se parece al espacio plano (de esta manera se implementa el principio de equivalencia). En este capítulo nos limitaremos a comprender su concepto y las estructuras que podemos definir en ellas, siguiendo de cerca el libro “GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS, de Mikio Nakahara” [5].

## 2.1. Variedad diferenciable

Una variedad diferenciable es uno de los objetos más fundamentales en el área de las matemáticas y la física. La idea detrás de la definición de variedad diferenciable es familiar gracias a la geometría analítica, donde uno representa los puntos del plano euclidiano por un par de números reales (por ejemplo, coordenadas cartesianas o polares). En términos generales, una variedad diferenciable es un conjunto cuyos puntos pueden etiquetarse por coordenadas [42].

**Definición 2.1.1** *Sea  $\mathcal{M}$  un conjunto. Se dice que  $\mathcal{M}$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m$  si está provista con una familia de cartas  $\{(U_i, \phi_i)\}$ , tales que:*

- $\{U_i\}$  es una familia de conjuntos abiertos, que cubre a  $\mathcal{M}$ , es decir,  $\mathcal{M} = \cup_i U_i$ .
- $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un isomorfismo<sup>1</sup> con un abierto de  $\mathbb{R}^m$ .
- Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , la función de transición  $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$  es suave (infinitamente diferenciable ( $C^\infty$ )<sup>2</sup>).

En este caso, a la colección de cartas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  se le denomina atlas sobre  $\mathcal{M}$  y esta determina su estructura diferenciable, ver figura 2.1.

Algunos objetos con estructura de variedad diferenciable son:

- $\mathbb{R}^m$  es el caso más claro de una variedad diferenciable dado que es isomorfo a  $\mathbb{R}^m$  localmente y además, globalmente. El plano Euclidiano puede verse como una variedad riemanniana de dimensión dos con curvatura nula.
- La  $m$ -esfera  $S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}$ , es uno de los ejemplos más usados en variedades de dimensión  $m$ .
- El toro  $T^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left( \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}$  es un cuadrado con lados opuestos identificados. De manera análoga, un  $m$ -toro  $T^m$  es un cubo  $m$ -dimensional con lados opuestos identificados.
- El producto de variedades es otra variedad cuya dimensión asociada es la suma de las dimensiones de las variedades involucradas [4]. Si  $\mathcal{M}$  es una

<sup>1</sup>Un isomorfismo es un mapeo  $f : X \rightarrow Y$  para cualesquiera dos conjuntos  $X, Y$ , el cual preserva la estructura algebraica, y admite un inverso  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ .

<sup>2</sup>El símbolo  $C$  representa una clase diferenciable, es decir, a la clasificación de una función por el orden de sus derivadas. Así, una función diferenciable de clase  $C^k$ , es  $k$ -veces diferenciable, para  $k \geq 0$ . Por lo tanto,  $C^\infty$  hace referencia a que la función es infinitamente diferenciable.

variedad de dimensión  $m$  y  $\mathcal{N}$  es una variedad de dimensión  $n$ , luego  $\mathcal{M} \times \mathcal{N} = \{(x, y) | x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$  es una variedad de dimensión  $m + n$ . Algunos ejemplos son  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ , el cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  y el toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ .

- $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^2$  es una variedad diferenciable que está asociada al campo gravitacional producido por una distribución de materia esféricamente simétrica (métrica de Schwarzschild).
- $\mathbb{R} \times \Sigma$  es una variedad, donde  $\mathbb{R}$  representa la dirección temporal y  $\Sigma$  es una 3-variedad homogénea e isotrópica, la cual tiene asociada la métrica de Robertson-Walker, muy usada en el contexto cosmológico.

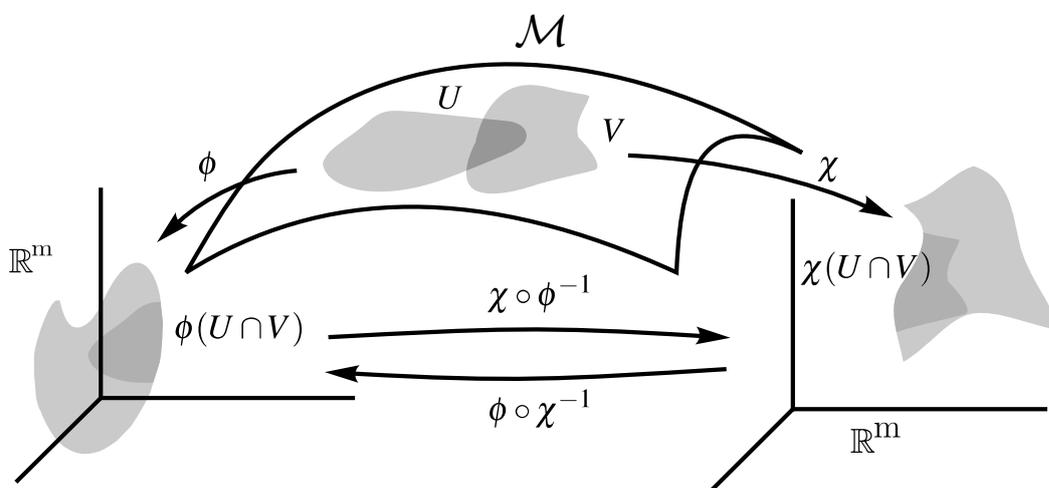


Figura 2.1: Dos conjuntos abiertos  $U$  y  $V$  de  $\mathcal{M}$ , cuyos dominios contienen una intersección no vacía  $U \cap V \neq \emptyset$ , con  $p$  un punto que pertenece a esta intersección. Las cartas  $(U, \phi)$  y  $(V, \chi)$  son  $C^\infty$  relacionados, si los mapeos  $\phi(p) \rightarrow \chi(p)$  y  $\chi(p) \rightarrow \phi(p)$  son funciones diferenciables de clase  $C^\infty$ . Tomado de [42].

En una variedad diferenciable<sup>3</sup> es posible definir objetos geométricos tales como vectores y vectores duales, los cuales llevan a la definición de  $r$ -formas y tensores. Dichos objetos, que son proveídos por la estructura diferenciable, serán introducidos a lo largo de este capítulo.

<sup>3</sup>La idea detrás de variedad diferenciable surge con el fin de usar el cálculo desarrollado en  $\mathbf{R}^m$ . Además, la diferenciable de cada transformación asegura que el resultado sea independiente del sistema coordenado elegido.

### 2.1.1. Vector

En una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$ , un vector se define como un objeto tangente a una curva  $c$  en  $\mathcal{M}$ . Sin embargo, en un espacio general como lo es una variedad diferenciable no es posible definir un vector como una flecha recta que une dos puntos, esto porque la geometría intrínseca de la variedad requeriría la existencia de vectores curvos, los cuales no están bien definidos.

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional (a menudo escrita como  $\mathcal{M}^m$ ), un sistema coordenado  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^m$ , una curva  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}$  y una función arbitraria (pero diferenciable)  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $\lambda$  es el parámetro a lo largo de  $\gamma$ , el operador  $d/d\lambda$  sobre  $\mathcal{M}$  puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} f &= \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda}, \\
 &= \frac{d}{d\lambda} [(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)], \\
 &= \frac{d}{d\lambda} (\phi \circ \gamma)^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \phi^{-1}), \\
 &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu}, \\
 &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Note el abuso de notación:  $\partial f / \partial x^\mu$  es en realidad  $\partial(f \circ \phi^{-1}) / \partial x^\mu$ , al igual que en la primera línea, esto es debido a la arbitrariedad de la función (ver [4, 5]). Gracias a que  $f$  es una función arbitraria,  $d/d\lambda$  puede ser vista como vector cuyas componentes y vectores base están representadas por  $dx^\mu/d\lambda$  y  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$  respectivamente; la letra griega  $\mu$  está definida como un índice que toma los valores desde 0 hasta la dimensión de la variedad menos uno, es decir  $\mu = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . Los índices griegos son caracteres suscritos a una variedad espacio-tiempo donde el valor 0 generalmente denota la coordenada tipo-tiempo (temporales) y los demás, las coordenadas tipo-espacio (espaciales).

Todas las clases de equivalencia de curvas en un punto  $p \in \mathcal{M}$ , es decir, todos los vectores tangentes en  $p$ , forman un espacio vectorial llamado espacio tangente de  $\mathcal{M}$  en  $p$ , denotado por  $T_p\mathcal{M}$ .

$$T_p\mathcal{M} := \text{span}\{\partial_\mu|_p : \mu = 0, 1, \dots, m-1\}, \tag{2.2}$$

por lo tanto un vector  $V \in T_p\mathcal{M}$  puede escribirse como:

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu, \tag{2.3}$$

donde  $\hat{e}_\mu := \partial_\mu$  es llamada base coordenada y  $V^\mu$  las componentes correspondientes a dicha base. Por otro lado, la base de  $T_p\mathcal{M}$  no necesariamente debe ser  $\{\hat{e}_\mu\}$ , dado que puede tomarse una combinación lineal de la misma,  $\hat{e}_I = A^\mu_I \hat{e}_\mu$ , donde  $A^\mu_I \in GL(m, \mathbb{R})$ , esta nueva base  $\{\hat{e}_I\}$  es conocida como base no-coordenada.

La base vectorial definida en  $T_p\mathcal{M}$  permite ver que ante un cambio arbitrario de coordenadas para un sistema  $x^\mu$ , de  $x^{\mu'} \rightarrow x^\mu$ , se obtiene que los vectores base por regla de la cadena satisfacen

$$\hat{e}_{\mu'} = \partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (2.4)$$

De igual manera, dado que los vectores son entes geométricos que son independientes del sistema coordenado, incluso si sus bases no lo son, podemos obtener una ley de transformación para las componentes del vector utilizando la transformación de los vectores base, exigiendo que el vector no se modifique ante un cambio general de coordenadas

$$\begin{aligned} V^\mu \partial_\mu &= V^{\mu'} \partial_{\mu'}, \\ &= V^{\mu'} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \right), \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^{\mu'} \partial_\mu, \end{aligned} \quad (2.5)$$

que implica

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^{\mu'}. \quad (2.6)$$

Es importante definir ahora un mapeo diferenciable.

**Definición 2.1.2** *Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable. Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , si  $f \circ \phi^{-1}$  es  $C^\infty$  para toda carta  $(U, \phi)$  de un atlas sobre  $\mathcal{M}$ .*

Así, una función sobre  $\mathcal{M}$  es un mapeo suave ( $C^\infty$ ) de  $\mathcal{M}$  a  $\mathbb{R}$  en armonía con las funciones de transición  $\psi_{ij}$ , ver figura 2.2; denotamos el conjunto de funciones suaves sobre  $\mathcal{M}$  por  $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ .

Si para cualesquiera dos conjuntos  $X$  y  $Y$  un mapeo  $f : X \rightarrow Y$  satisface

- $f$  es una biyección ( uno a uno y sobre ),
- $f$  es continuo,
- la función inversa  $f^{-1}$  es continua,

entonces  $f$  es un homeomorfismo.

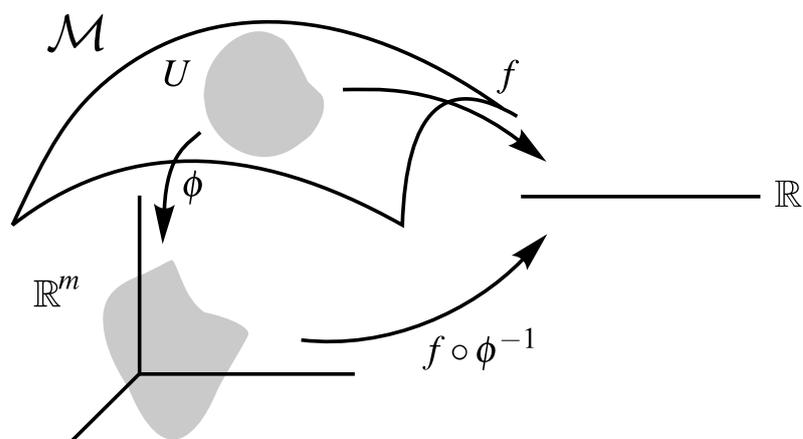


Figura 2.2: Para un par  $(U, \phi)$  sobre  $\mathcal{M}$ , una función de valor real diferenciable  $f$  definida sobre  $\mathcal{M}$  es representada por la función  $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Tomado de [42].

**Definición 2.1.3** Sea  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un homeomorfismo. Si  $\chi \circ g \circ \phi^{-1}$  es invertible y ambos  $y = \chi \circ g \circ \phi^{-1}(x)$ ,  $x = \phi \circ g^{-1} \circ \chi^{-1}(y)$  son  $C^\infty$  (ver figura 2.3),  $g$  es llamado un difeomorfismo y  $\mathcal{M}$  es difeomorfa a  $\mathcal{N}$  y viceversa, para  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  variedades. Luego  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  tienen igual dimensión.

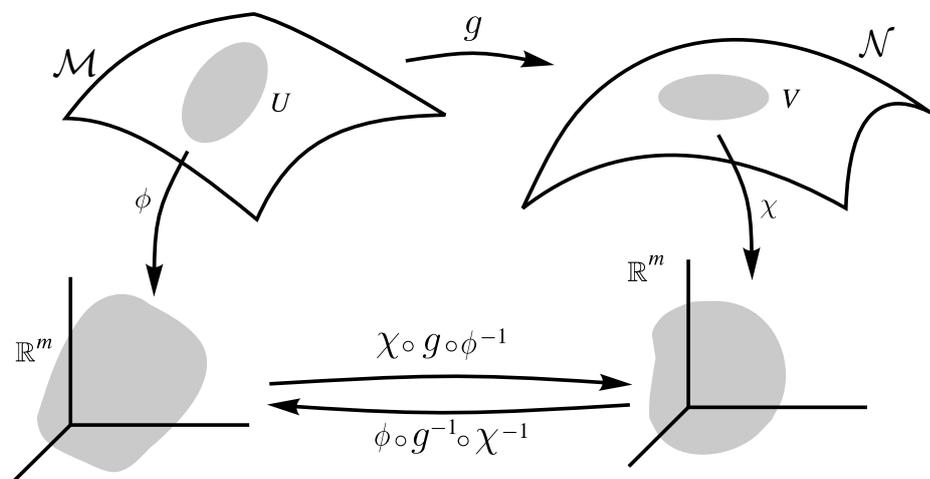


Figura 2.3: Un difeomorfismo  $g$  es un mapeo uno a uno de una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  a una variedad diferenciable  $\mathcal{N}$  tal que  $g$  y  $g^{-1}$  son diferenciables. Tomado de [42].

Los difeomorfismos de una variedad en sí misma pueden verse como un cambio general de coordenadas  $x^\mu \rightarrow y^\alpha$ .

De la misma forma, consideremos dos variedades  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  de dimensión posiblemente diferente, con sistema coordenado  $x^\mu$  y  $y^\alpha$ , respectivamente. El mapeo entre variedades  $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  y una función  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  pueden componerse para construir un mapeo  $(f \circ \zeta) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  el cual es una función sobre  $\mathcal{M}$ , ver figura 2.4. Esta construcción es denominada el Pullback de  $f$  por  $\zeta$ , denotado como  $\zeta^* f$  por

$$\zeta^* f = (f \circ \zeta). \tag{2.7}$$

Es posible hacer retroceder las funciones, pero no impulsarlas hacia adelante. Si

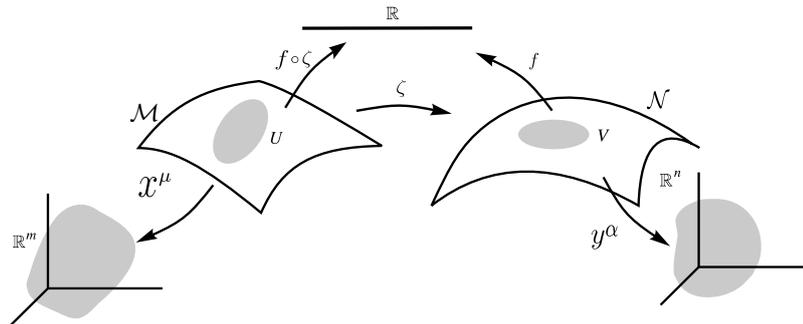


Figura 2.4: El pullbak de una función  $f$  de  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  por el mapeo  $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es visto como la composición de  $\zeta$  con  $f$  [4]. Tomado de [42].

tenemos una función  $f' : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , no hay forma de que podamos componer  $f$  con  $\zeta$  para crear una función en  $\mathcal{N}$ ; la dirección en las flechas no encaja de forma correcta. Sin embargo, un vector puede considerarse como un operador derivada que asigna funciones suaves a números reales  $V : f \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto nos permite definir el Pushforward de un vector; si  $V(p)$  es un vector en un punto  $p$  en  $\mathcal{M}$ , definimos el vector pushforward  $\zeta_* V$  en el punto  $\zeta(p)$  en  $\mathcal{N}$  dando su acción sobre las funciones en  $\mathcal{N}$ :

$$(\zeta_* V)[f] := V[\zeta^* f]. \tag{2.8}$$

### 2.1.2. Vector dual (1-Formas)

Dado que  $T_p \mathcal{M}$  es un espacio vectorial, existe un espacio asociado de igual dimensión conocido como el espacio vectorial dual, cuyos elementos son las funcionales lineales de  $T_p \mathcal{M}$  a  $\mathbb{R}$ . Este espacio es llamado usualmente el espacio co-tangente en  $p$ , denotado por  $T_p^* \mathcal{M}$ . Así, un elemento  $\omega : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $T_p^* \mathcal{M}$  es llamado un vector dual o covector y dentro del contexto de formas diferenciales una 1-forma.

La notación empleada para la base dual es  $\theta^\mu$  y más frecuentemente dentro del contexto de formas como  $dx^\mu$ , de modo que la relación de dualidad expresada en cada punto  $p$  es dada por  $dx^\mu(\partial_\nu) := \delta_\nu^\mu$  (esta definición, nace con el fin de preservar criterios de ortogonalidad). Por lo tanto, se define el espacio cotangente en un punto  $p \in \mathcal{M}$  como

$$T_p^*\mathcal{M} := \text{span} \{dx^\mu|_p : \mu = 0, 1, \dots, m-1\}. \quad (2.9)$$

Como consecuencia, un vector dual ( $V^*$ ) ó 1-forma  $\omega$  es escrita como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (2.10)$$

donde  $\omega_\mu$  representa las componentes de  $\omega$  asociadas a la base  $dx^\mu$ . Dado que  $\omega$  se encuentra definida sin hacer referencia a un sistema coordenado, para un punto  $p \in U_i \cap U_j$  de  $\mathcal{M}$ , las propiedades de transformación de los vectores base y sus componentes se deducen del procedimiento habitual, dado por

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\nu dy^\nu, \quad (2.11)$$

donde  $dy^\nu = (\partial y^\nu / \partial x^\mu) dx^\mu$  y  $\omega'_\nu = (\partial x^\mu / \partial y^\nu) \omega_\mu$ . La acción de un vector dual sobre un vector del espacio tangente en el mismo punto toma la forma

$$\omega(V) = \omega_\mu dx^\mu(V^\nu \partial_\nu) = \omega_\mu V^\nu dx^\mu(\partial_\nu) = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

donde  $V^\mu$ ,  $\omega_\mu$  son las componentes del vector y vector dual respectivamente. En algunas ocasiones, los elementos que pertenecen al espacio  $T_p$  (respecto a vectores) son referidos como vectores contravariantes, y los elementos de  $T_p^*$  (vectores duales o covectores) como vectores covariantes.

### 2.1.3. Tensores

Es posible agrupar vectores y vectores duales dentro de una clase más general de objetos geométricos denominada tensor.

**Definición 2.1.4** *Un tensor de tipo  $(q, r)$  es un objeto multilineal el cual mapea  $q$  elementos de  $T_p^*\mathcal{M}$  y  $r$  elementos de  $T_p\mathcal{M}$  a números reales*

$$T : \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \times \dots \times T_p^*\mathcal{M}}_{q \text{ veces}} \times \underbrace{T_p\mathcal{M} \times \dots \times T_p\mathcal{M}}_{r \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

La propiedad de multilinealidad significa que un tensor actúa linealmente en cada uno de sus argumentos

$$T(w + V) = T(w) + T(V), \quad (2.14)$$

$$T(aw + bV) = aT(w) + bT(V), \quad (2.15)$$

para  $a, b$  escalares y  $V, w$ , vector y vector dual respectivamente. Considérese el siguiente ejemplo: sea  $T \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{M})$ , de esta manera obtenemos

$$T : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

al evaluar  $T$  con  $\omega \in \Omega_p^1(\mathcal{M})$  y  $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  ( $\Omega_p^r(\mathcal{M})$  hace referencia al espacio de  $r$ -formas y  $\mathcal{X}(\mathcal{M})$  hace referencia al espacio de vectores), se encuentra que:

$$\begin{aligned} T(\omega, V) &= T(\omega_\mu \hat{\theta}^\mu, V^\nu \hat{e}_\nu), \\ &= \omega_\mu T(\hat{\theta}^\mu, V^\nu \hat{e}_\nu), \quad \text{primera entrada lineal} \\ &= \omega_\mu V^\nu T(\hat{\theta}^\mu, \hat{e}_\nu), \quad \text{segunda entrada lineal.} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Definiendo a  $T^\mu_\nu := T(\hat{\theta}^\mu, \hat{e}_\nu)$  como las componentes asociadas a la base, se obtiene

$$T(\omega, V) = \omega_\mu V^\nu T^\mu_\nu, \quad (2.18)$$

recordando que  $V^\nu = \hat{\theta}^\nu(V)$  y  $\omega_\mu = \hat{e}_\mu(\omega)$ , obtenemos que:

$$T(\omega, V) = \hat{e}_\mu(\omega) \hat{\theta}^\nu(V) T^\mu_\nu, \quad (2.19)$$

$$= T^\mu_\nu \hat{e}_\mu \otimes \hat{\theta}^\nu(\omega, V); \quad (2.20)$$

en la ecuación (2.19), se introduce el producto tensorial teniendo presente respetar el orden de aplicación. Por lo tanto

$$T = T^\mu_\nu \hat{e}_\mu \otimes \hat{\theta}^\nu. \quad (2.21)$$

De forma general, para un tensor de tipo  $(q, r)$  se encuentra la forma (2.22). Así, desde este punto de vista, una función escalar es un tensor de tipo  $(0,0)$ , un vector es un tensor de tipo  $(1,0)$  y un vector dual es un tensor de tipo  $(0,1)$ .

El espacio de todos los tensores de tipo  $(q, r)$  constituyen un espacio vectorial llamado espacio tensorial, donde  $\mathcal{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$  denota el conjunto de tensores de tipo  $(q, r)$  en un punto  $p \in \mathcal{M}$ . Un elemento de  $\mathcal{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$  en términos de su base es escrito como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \hat{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{\mu_q} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \dots \otimes \hat{\theta}^{\nu_r}, \quad (2.22)$$

donde  $T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} = T(\hat{\theta}^{\mu_1}, \dots, \hat{\theta}^{\mu_q}, \hat{e}_{\nu_1}, \dots, \hat{e}_{\nu_r})$  y  $\otimes$  denota el producto tensorial usual<sup>4</sup>, la cual satisface las siguientes propiedades:

$$T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3, \quad (2.24)$$

$$(T_1 + T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes T_3 + T_2 \otimes T_3, \quad (2.25)$$

$$T_1 \otimes (T_2 + T_3) = T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes T_3, \quad (2.26)$$

$$(\alpha T_1) \otimes T_2 = T_1 \otimes (\alpha T_2) = \alpha(T_1 \otimes T_2), \quad (2.27)$$

para  $T_1, T_2$  y  $T_3$ , tensores de tipo arbitrario. Bajo un cambio general de coordenadas las componentes de los tensores satisfacen la siguiente ley de transformación

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_q}_{\nu'_1 \dots \nu'_r} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_q}}{\partial x^{\mu_q}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial x^{\nu'_r}} T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r}. \quad (2.28)$$

Esta ley de transformación de hecho constituye la forma clásica en la que se define un tensor, es decir, como un objeto que satisface dicha ley de transformación. Sin embargo, sobre una variedad también se pueden definir objetos que no cumplen con la ley de transformación tensorial y que juegan un papel relevante en la descripción geométrica de la misma. En dicho caso es posible agregar unas credenciales extra (ver (2.31)) con el fin de dotar de carácter tensorial al objeto. De esta manera, obtenemos a las densidades tensoriales, el cual no son los únicos objetos que requieren cosas adicionales para definir tensores, son solo un ejemplo los cuales transforman como

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_q}_{\nu'_1 \dots \nu'_r} = \left| \det \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right) \right|^{-w} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_q}}{\partial x^{\mu_q}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial x^{\nu'_r}} T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r}, \quad (2.29)$$

donde  $w$  es denominado peso. Estos objetos, contienen una etiqueta extra (en algunos casos el autor asume que se entiende al objeto como una densidad tensorial)  $\sim$  encima o debajo dependiendo si su peso es  $w = +1$  o  $w = -1$ , respectivamente. Note que el determinante de la transformación está encerrado dentro de un valor absoluto, esto tiene que ver con el hecho de que ante un cambio de coordenadas se puede o no preservar la orientación. Es importante resaltar, que el determinante del tensor métrico (un tensor del cual hablaremos con más detalle en la sección (2.2)) está relacionado con el determinante de la transformación como sigue

$$|g'| = \left| \det \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right) \right|^{-2} |g|, \quad (2.30)$$

<sup>4</sup>Sea  $T_1 \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$  y  $T_2 \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(\mathcal{M})$ , el producto tensorial  $(T_1 \otimes T_2) \in \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'}$ , esta definido por:

$$(T_1 \otimes T_2)(\omega^1, \dots, \omega^{r+r'}, V_1, \dots, V_{s+s'}) := T_1(\omega^1, \dots, \omega^r, V_1, \dots, V_s) T_2(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}, V_{s+1}, \dots, V_{s+s'}). \quad (2.23)$$

para  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , el cual evidencia que  $g$  es de peso  $w = +2$ . Por ende (2.29) toma la forma

$$|g'|^{-w/2} T^{\mu'_1 \dots \mu'_q}_{\nu'_1 \dots \nu'_r} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_q}}{\partial x^{\mu_q}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial x^{\nu'_r}} |g|^{-w/2} T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r}, \quad (2.31)$$

la cual muestra que multiplicando una densidad tensorial por una potencia adecuada del determinante del tensor métrico se puede obtener un tensor bien definido.

Por otro lado, es importante ahora definir un campo tensorial, para ello es necesario definir un fibrado tangente.

**Definición 2.1.5** Sea  $\mathcal{M}$  una  $m$ -variedad diferenciable y  $T\mathcal{M}$  el conjunto

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p \mathcal{M}, \quad (2.32)$$

entonces  $T\mathcal{M}$  recibe el nombre de haz fibrado tangente de  $\mathcal{M}$ . De igual manera, el conjunto  $T^*\mathcal{M}$  definido como

$$T^*\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^* \mathcal{M}, \quad (2.33)$$

recibe el nombre de haz fibrado co-tangente de  $\mathcal{M}$ .  $T^*\mathcal{M}$  y  $T\mathcal{M}$  son variedades diferenciables de dimensión  $2m$ <sup>5</sup>.

Una de las ideas detrás de un haz fibrado es dejar de estar anclados a un punto fijo y movernos por la variedad. Este espacio está dotado de la estructura de fibrado con la proyección  $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , que asocia a cada vector el punto sobre el cual está sujeto siendo la base  $\mathcal{M}$  y  $T_p \mathcal{M} = \pi^{-1}(p)$  la fibra en cada punto.

Con base en lo anterior, tomemos una  $m$ -variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  y  $T\mathcal{M}$  su fibrado tangente. Un campo vectorial  $X$  sobre  $\mathcal{M}$  es un objeto que asigna suavemente un vector a cada punto de  $\mathcal{M}$  (una sección desde el punto de vista del haz tangente). El conjunto de campos vectoriales sobre  $\mathcal{M}$  es denotado como  $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ <sup>6</sup>. Si consideramos una carta  $(U, \phi)$  sobre  $\mathcal{M}$ , el campo vectorial  $X$  sobre la carta es escrito de la forma

$$X(p) = x_p^\mu \partial_\mu, \quad (2.34)$$

---

<sup>5</sup>La dimensión es  $2m$ , debido a que se considera dimensiones tanto de las posiciones en la variedad, así como de las direcciones tangentes. Cabe resaltar que, cuando  $\mathcal{M}$  es el espacio de configuración de algún sistema mecánico, el lagrangiano asociado es una función diferenciable  $\mathcal{L} : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  [42, 43]

<sup>6</sup>El mapeo  $X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ , es diferenciable

donde todo el objeto  $X(p)$  es un elemento del espacio tangente en  $p$ , no solo sus componentes, que en realidad son funciones. De manera análoga, un campo tensorial de tipo  $(q, r)$  es definido como una asignación suave de un elemento de  $\mathcal{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$  en cada punto  $p$  sobre  $\mathcal{M}$ . El haz tensorial está definido como:

$$\mathcal{T}_r^q(\mathcal{M}) := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \otimes^r T_p^*(\mathcal{M}) \otimes^q T_p(\mathcal{M}), \quad (2.35)$$

con ello, un campo tensorial es una sección de este haz. De esta manera, un campo tensorial de tipo  $\mathcal{T}_1^0(\mathcal{M})$  es el campo vectorial dual, denotado dentro del contexto de las formas diferenciables como  $\Omega^1(\mathcal{M})$ . Además  $\mathcal{T}_0^0(\mathcal{M}) = \mathcal{F}(\mathcal{M})$  es también denotado como  $\Omega^0(\mathcal{M})$ .

Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  variedades de igual dimensión. Un difeomorfismo  $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  induce un mapeo (ver figura 2.4)

$$\zeta^* : \mathcal{T}_{r, \zeta(p)}^q(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{T}_{r,p}^q(\mathcal{M}), \quad (2.36)$$

denominado pullback. Si tomamos  $T \in \mathcal{T}_r^q(\mathcal{N})$ ,  $V_i \in T_p\mathcal{M}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) y  $\omega_i \in T_p^*\mathcal{M}$  ( $1 \leq i \leq q$ ), el pullback de  $T$  en  $p$  por  $\zeta^*$  es definido como

$$\begin{aligned} (\zeta^*T)_p(V_{1p}, \dots, V_{rp}; \omega_{1p}, \dots, \omega_{qp}) = \\ T_{\zeta(p)}(\zeta_{*p}V_{1p}, \dots, \zeta_{*p}V_{rp}; (\zeta^{-1})^*\omega_{1p}, \dots, (\zeta^{-1})^*\omega_{qp}), \end{aligned} \quad (2.37)$$

a través de este mapeo inducido se pueden definir tensores sobre  $\mathcal{M}$  a partir de tensores definidos sobre  $\mathcal{N}$ . En particular, los vectores en  $\mathcal{N}$  son enviados a  $\mathcal{M}$  vía el inverso del pushforward  $[\zeta^{-1}]_*$ , el cual está bien definido porque  $\zeta$  es un difeomorfismo.

## 2.2. Tensor métrico

El cálculo sobre una variedad es asegurado por la existencia de diferenciabilidad del sistema coordenado. Además, una variedad puede contener más estructuras si esta se encuentra dotada de un tensor métrico, el cual es una generalización del producto interno entre dos vectores de  $\mathbb{R}^m$  a una variedad arbitraria. Dentro de la geometría elemental, el producto interno se encuentra definido entre dos vectores  $U, V$  por  $U \cdot V = \sum_{i=1}^m U_i V_i$ , donde  $U_i$  y  $V_i$  son las componentes de los vectores definidos en  $\mathbb{R}^m$ .

Sobre una variedad el producto interno se encuentra definido entre un elemento del espacio co-tangente  $T_p^*\mathcal{M}$  y del tangente  $T_p\mathcal{M}$ .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.38)$$

tomando un vector  $V \in T_p\mathcal{M}$  y un vector dual  $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\mu \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \omega_\mu V^\mu, \quad (2.39)$$

siendo este definido entre vectores y vectores duales, no entre dos vectores o dos vectores duales. Esta definición está relacionada con el tensor métrico como sigue.

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. Cada punto  $p$  de  $\mathcal{M}$  es etiquetado con las coordenadas locales  $x^\alpha$  en una carta  $U$  sobre la variedad. Una métrica  $\mathbf{g}$  sobre  $\mathcal{M}$  es un campo tensorial  $\mathbf{g} : T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$  de tipo  $(0, 2)$ , bilineal, simétrico  $\mathbf{g}_p(U, V) = \mathbf{g}_p(V, U)$ , no degenerado, el cual puede ser expandido en términos de  $dx^\mu \otimes dx^\nu$  sobre una carta  $(U, \phi)$  en  $\mathcal{M}$  como

$$\mathbf{g}_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.40)$$

Si  $g_{\mu\nu}(p)$  es no degenerada entonces existe su inversa y esta se encuentra denotada por  $g^{\mu\nu}$ , acorde a la tradición  $g_{\mu\nu}(p)g^{\mu\rho}(p) = \delta_\nu^\rho$ . Su determinante es denotado por  $g := \det(g_{\mu\nu}(p))$ . Si existe una métrica  $\mathbf{g}$  el producto interno entre dos vectores  $U, V \in T_p\mathcal{M}$  esta dado por

$$\mathbf{g}(U, V) = U_\mu V^\mu, \quad (2.41)$$

lo anteriormente expuesto conlleva a encontrarnos con la definición de métrica como distancia cuadrática infinitesimal. Evaluando a  $\mathbf{g}$ , en un desplazamiento infinitesimal  $dx^\mu \partial / \partial x^\mu \in T_p\mathcal{M}$ , tenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathbf{g}(dx^\mu \partial / \partial x^\mu, dx^\nu \partial / \partial x^\nu), \\ &= \mathbf{g}(\partial / \partial x^\mu, \partial / \partial x^\nu) dx^\mu dx^\nu, \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde  $g_{\mu\nu} := \mathbf{g}(\partial / \partial x^\mu, \partial / \partial x^\nu)$  (pensado en las componentes del tensor métrico como funciones diferenciables en cada punto,  $p$  es usualmente omitido), resultado de evaluar (2.40) con las bases  $\hat{e}_\mu \in T_p\mathcal{M}$ .

Ya que  $g_{\mu\nu}$  es simétrica, sus autovalores son reales. Los signos de los autovalores correspondientes a  $g_{\mu\nu}$  ordenados dentro de un objeto  $(n, p)$  se denomina signatura métrica, donde  $n$  representa la cantidad de signos negativos y  $p$  los signos positivos. Si los autovalores de  $g_{\mu\nu}$  son todos estrictamente positivos, se denomina métrica riemanniana. Un ejemplo de ello es la métrica euclidiana  $\delta_{\mu\nu}$ ,

su signatura métrica es  $(0, m)$ , la cual es definida positiva para  $m$  la cantidad de valores positivos. Por otro lado, es métrica pseudo-riemanniana, si alguno de ellos es negativo, como ejemplo la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  con signatura métrica  $(1, m - 1)$ ; en el caso de que la métrica contenga autovalores cero ésta es degenerada y su inversa no existe. A menudo se suele definir la signatura métrica como una colección de signos de la forma:  $(+, +, \dots, +)$  para métricas riemannianas, y  $(-, -, \dots, -, +, +, \dots, +)$  para métricas pseudo-riemannianas. Por lo tanto, la signatura métrica es el identificador de los signos en los elementos sobre la forma diagonal de la métrica.

Ahora, el par  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  da un carácter especial para definir una variedad. Si la variedad  $\mathcal{M}$  admite una métrica riemanniana  $\mathbf{g}$ , el par  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  es llamada variedad riemanniana. Si  $\mathbf{g}$  es pseudo-riemanniana, el par  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  es llamado variedad pseudo-riemanniana.

La relatividad general hace uso de las métricas pseudo-riemannianas debido al principio de equivalencia de Einstein, y por ende, este trabajo estará basado sobre este tipo de métricas. Por ejemplo, si el par  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  es lorentziano ( $\mathbf{g}$  es definido con firma métrica  $(-, +, \dots, +)$ ), luego los elementos de  $T_p\mathcal{M}$  son divididos en tres clases

- (i)  $\mathbf{g}(V, V) > 0 \rightarrow V$  es tipo-espacio,
- (ii)  $\mathbf{g}(V, V) = 0 \rightarrow V$  es tipo-luz (o nulo),
- (iii)  $\mathbf{g}(V, V) < 0 \rightarrow V$  es tipo-tiempo.

Esto muestra el carácter de la relatividad especial para regiones locales. Por último, es importante resaltar que la forma del mapeo de la métrica  $\mathbf{g} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , permite definir un mapeo lineal de la forma

$$\mathbf{g}(U, \cdot) : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad V \rightarrow \mathbf{g}(U, V). \quad (2.43)$$

Por lo tanto,  $\mathbf{g}(U, \cdot)$  es identificado como una 1-forma  $\omega_U \in T_p^*\mathcal{M}$  (recordar que  $U, V \in T_p\mathcal{M}$ ). De forma similar,  $\omega$  induce un mapeo  $V_\omega \in T_p\mathcal{M}$  por  $\langle \omega, U \rangle = \mathbf{g}(V_\omega, U)$ ; de esta manera, la métrica permite establecer un isomorfismo entre  $T_p^*\mathcal{M}$  y  $T_p\mathcal{M}$ , el cual es ahora expresado como

$$V^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu, \quad \omega_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu. \quad (2.44)$$

## 2.3. Formas diferenciales

Existe una clase de tensor especial, conocido como forma diferencial (o  $r$ -formas). Una  $r$ -forma es simplemente un tensor de tipo  $(0, r)$  que es completamente antisimétrico. Así, se define una función escalar como una 0-forma y un vector dual como una 1-forma.

Dentro del espacio tensorial, un tensor de tipo  $(q, r)$  puede descomponerse en sus partes simétrica y antisimétrica. Tomando a  $T \in T_{2,p}^0(\mathcal{M})$ , su parte simétrica y antisimétrica están definidas como

$$\text{Parte simétrica } T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2!} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad (2.45)$$

$$\text{Parte antisimétrica } T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2!} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}), \quad (2.46)$$

siendo  $T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}$  (ver [44] para más detalles). Note que las partes simétrica y antisimétrica vienen de permutar los índices en una posición definida.

El espacio vectorial de  $r$ -formas en  $p \in \mathcal{M}$  se denota por  $\Omega_p^r(\mathcal{M})$ . Un elemento  $\omega \in \Omega_p^r(\mathcal{M})$  es expandido como

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (2.47)$$

donde  $\wedge$  representa el producto tensorial totalmente antisimétrico conocido como producto exterior, definido de la forma:

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} := \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}, \quad (2.48)$$

para  $P^7$  un elemento de  $S_r$ , el grupo simétrico de orden  $r$ , siendo  $\text{sgn}(P) = +1$  para permutaciones pares y  $-1$ , para permutaciones impares. Por ejemplo:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu. \quad (2.50)$$

Además, cabe resaltar que el producto exterior satisface:

- $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ , si algún índice  $\mu$  se repite.

---

<sup>7</sup>La operación de simetría sobre un tensor  $\omega \in \mathcal{T}_{r,p}^0(\mathcal{M})$ , esta definido por:

$$P\omega(V_1, \dots, V_r) := \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(r)}), \quad (2.49)$$

donde  $V_i \in T_p\mathcal{M}$  [5, 45].

- $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$ , es lineal en cada  $dx^\mu$ .

El término  $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$  dentro del espacio vectorial de  $r$ -formas en  $p \in \mathcal{M}$ , es un elemento de la base para el espacio de formas, cuya dimensión está determinada por la combinatoria

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}, \quad (2.51)$$

esto muestra la cantidad de elementos independientes formados por la base  $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$ , donde  $m$  es la dimensión de  $\mathcal{M}$ . Por otro lado, dadas una  $q$ -forma  $A$  y una  $r$ -forma  $B$ , podemos formar una  $(q+r)$ -forma mediante el producto exterior [5,42].

$$A \wedge B = \frac{1}{q!r!} A_{\mu_1 \dots \mu_q} B_{\nu_1 \dots \nu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_r}. \quad (2.52)$$

El que una  $r$ -forma  $\omega$  sea diferenciable implica que sus componentes sean funciones diferenciables y viceversa. Adicionalmente, las formas diferenciables nos permiten diferenciar e integrar sobre una variedad sin la necesidad de introducir estructuras geométricas adicionales.

### 2.3.1. Derivada exterior

La derivada exterior denotada como  $d$ , nos permite derivar campos de  $r$ -formas para obtener un  $(r+1)$ -formas.

**Definición 2.3.1** *La derivada exterior  $d$  es un mapeo  $d : \Omega_p^r(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_p^{r+1}(\mathcal{M})$  cuya acción sobre una  $r$ -forma  $\omega$  está definida por:*

$$d\omega := \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (2.53)$$

En el caso tridimensional la acción de la derivada exterior sobre una  $r$ -forma está relacionada con el gradiente, el rotacional y la divergencia del cálculo vectorial usual [5]. Además, cabe resaltar que el operador  $d$  es nilpotente,  $d^2 = 0$ , lo cual se debe a que las derivadas parciales usuales actuando sobre funciones diferenciables conmutan. Tomando

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (2.54)$$

la acción de  $d^2$  sobre  $\omega$ , es:

$$d(dw) = \frac{1}{r!} \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (2.55)$$

esta expresión se anula dado que  $\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} / \partial x^\lambda \partial x^\nu$  es simétrico en  $\lambda$  y  $\nu$ , mientras que  $dx^\lambda \wedge dx^\nu$  es antisimétrico en  $\lambda$  y  $\nu$ .

Sea  $A$  una  $r$ -forma. Se dice que  $A$  es cerrada si  $dA = 0$  y es exacta si  $A = dB$  para alguna  $(r-1)$ -forma  $B$ . Toda forma exacta es cerrada, pero no toda forma cerrada es exacta. Las relaciones entre formas exactas y cerradas de una variedad permiten definir lo que se conoce como grupos de cohomología [5].

La derivada exterior contiene una modificación a la regla de Leibniz. Si tomamos una  $r$ -forma  $\omega$  y una  $q$ -forma  $\eta$ , la derivada del producto exterior de estas dos formas está dada por

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta. \quad (2.56)$$

La importancia de la derivada exterior radica en que sigue la ley de transformación de un tensor, lo que muestra que  $d$  es un operador tensorial bien definido.

Existe una función uno-a-uno que lleva  $p$ -formas a  $(m-p)$ -formas. Si la  $m$ -variedad diferencial es dotada con una métrica  $\mathbf{g}$ , este isomorfismo es llamado el operador dual de Hodge o estrella ( $\star$ ) de Hodge

$$\star : \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{m-p}(\mathcal{M}), \quad (2.57)$$

cuya acción sobre la base de  $\Omega^p(\mathcal{M})$  está definida como

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(m-p)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_{p+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}, \quad (2.58)$$

donde  $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_{p+1} \dots \nu_m}$  son las componentes de un tensor que está relacionado con el tensor métrico a través de la relación

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_r} = \sqrt{|g|} \underline{\eta}_{\mu_1 \dots \mu_r}, \quad (2.59)$$

para  $\underline{\eta}_{\mu_1 \dots \mu_r}$  el símbolo de Levi-Civita

$$\underline{\eta}_{\mu_1 \dots \mu_r} = \tilde{\eta}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \begin{cases} 0 & \text{si existe algún índice repetido,} \\ +1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_m) \text{ es una permutación} \\ & \text{par de } (01 \dots m-1), \\ -1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_m) \text{ es una permutación} \\ & \text{impar de } (01 \dots m-1). \end{cases}$$

El producto de símbolos de Levi-Civita da como resultado un producto antisimetrizado de deltas de Kronecker como

$$\tilde{\eta}^{\mu_1 \dots \mu_r \gamma_1 \dots \gamma_{m-r}} \underline{\eta}_{\mu_1 \dots \mu_r \rho_1 \dots \rho_{m-r}} = r!(m-r)! \delta_{\rho_1}^{[\gamma_1} \dots \delta_{\rho_{m-r}}^{\gamma_{m-r}]}, \quad (2.60)$$

donde  $m$  es la dimensión de la variedad.

Considérese el siguiente ejemplo, tomemos las ecuaciones de Maxwell para la electrodinámica (por simplicidad las constantes de permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y velocidad de la luz, se ajustaran a la unidad, es decir,  $\varepsilon = \mu = c = 1$ )

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (2.62)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{J}. \quad (2.64)$$

En componentes, estas ecuaciones son escritas como:

$$\partial_i B^i = 0, \quad (2.65)$$

$$\partial_0 B^i + \epsilon^{ijk} \partial_j E_k = 0, \quad (2.66)$$

$$\partial_i E^i = J^0, \quad (2.67)$$

$$\partial_0 E^i - \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = -J^i, \quad (2.68)$$

donde  $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ , representa el 4-vector corriente. Si definimos a  $F^{0i} := E^i$  y  $F^{ij} := \epsilon^{ijk} B_k$ , en representación del campo eléctrico y magnético, nos encontramos con el tensor de campo del electromagnetismo  $F^{\mu\nu}$ , escrito de forma explicita como sigue

$$F^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

De esta manera, la ecuación (2.67) toma la forma  $\partial_i F^{0i} = J^0$  y la ecuación (2.68) es ahora  $\partial_j F^{ij} - \partial_0 F^{0i} = J^i$ . Dado que el tensor  $F^{\mu\nu}$  es antisimétrico, es posible unir estas dos ecuaciones en una sola expresión, como sigue

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu. \quad (2.70)$$

Mientras que las dos restantes pueden ser escritas como

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0, \quad (2.71)$$

la cual une las expresiones

$$\epsilon^{ijk} \partial_i F_{jk} = 0, \quad (2.72)$$

$$\partial_i F_{0j} + \partial_j F_{i0} + \partial_0 F_{ji} = 0. \quad (2.73)$$

Así, las cuatro ecuaciones de Maxwell son reemplazadas por dos, mostrando la simplicidad que involucra la notación tensorial.

El campo eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$ , pueden ser expresados en términos del 4-vector potencial  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  como sigue

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad (2.74)$$

mostrando que las ecuaciones de Maxwell tienen invarianza manifiesta bajo la transformación de norma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (2.75)$$

para  $\lambda$  una función escalar. Como consecuencia de reescribir al campo eléctrico y magnético en términos del 4-vector potencial  $A^\mu$ , se encuentra que el tensor de campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  puede reescribirse como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.76)$$

involucrando la métrica de Minkowski ( $\eta_{\mu\nu}$ ), con signatura  $(-, +, +, +)$ . Además, bajo el contexto de formas diferenciales, para  $A = \eta_{\mu\nu} A^\mu dx^\nu$  y  $J = \eta_{\mu\nu} J^\mu dx^\nu$ , el potencial 1-forma y la corriente 1-forma respectivamente. El tensor de campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  puede ser representado como una 2-forma de la siguiente manera:

$$F = dA, \quad (2.77)$$

debido a sus propiedades de antisimetría y su relación con el el 4-vector potencial, encontrando de forma natural la expresión (2.76)

$$\begin{aligned} F &= dA \\ &= \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dentro de este contexto, las ecuaciones de Maxwell surgen de la siguiente manera, por un lado, la aplicación de la derivada exterior a la ecuación (2.77)

$$dF = 0 = \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]}, \quad (2.79)$$

representa a (2.61) y (2.62), mientras que

$$d \star F = \star J, \quad (2.80)$$

representa a las ecuaciones (2.63) y (2.64). Además, cabe resaltar que la aplicación de la derivada exterior a (2.80)

$$d(d \star F) = d \star J = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (2.81)$$

nos muestra la ecuación de continuidad. Por lo tanto, el enfoque de formas diferenciales ha reducido las ecuaciones de Maxwell a las dos fórmulas simples [5, 46]

$$dF = 0, \quad d \star F = \star J. \quad (2.82)$$

### 2.3.2. Integración de formas

La integración sobre variedades está restringida a variedades orientables. Si para una variedad  $\mathcal{M}$  de dimensión  $m$  existe una  $m$ -forma  $\epsilon$  que no se anule para cualquier punto  $p \in \mathcal{M}$ , se dice que la variedad es orientable ( $\epsilon$  es conocida como la forma de volumen).

**Definición 2.3.2** *Una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  es orientable, si para cualquier par de cartas  $(U_i, \phi_i)$ ,  $(U_j, \phi_j)$  con coordenadas locales  $x^\mu$  y  $y^\alpha$  respectivamente, las cuales cubren a  $\mathcal{M}$  ( $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ), el jacobiano de la transformación  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  tiene determinante positivo ( $\det(\partial x^\mu / \partial y^\alpha) > 0$ ).*

Si  $\mathcal{M}$  no es orientable, en cada intersección de cartas el determinante de la transformación de coordenadas no es positivo para todas las intersecciones. Un ejemplo de ello es la banda de Möbius (ver figura 2.5).

Sea  $\epsilon$  un elemento de  $\Omega_p^m(\mathcal{M})$ . Para una carta coordenada  $(U, \phi; x^\mu)$ , la forma de volumen  $\epsilon$  sobre  $\mathcal{M}$  es escrita como

$$\epsilon = \frac{1}{m!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m}. \quad (2.83)$$

Ahora, sean  $\mathcal{M}$  una variedad  $m$ -dimensional orientada y  $(U, \phi; x^\mu)$  una carta orientada positiva en  $\mathcal{M}$ . Si una  $m$ -forma  $\alpha$  tiene soporte compacto contenido en  $U$  [47] y  $\alpha = f\epsilon$  sobre  $U$ , se define la integral sobre  $\mathcal{M}$  como

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha = \int_{\phi(U)} f(x^1, \dots, x^m) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m, \quad (2.84)$$

donde  $f(x^1, \dots, x^m)$  es un reemplazo de  $f \circ \phi^{-1}$ . Para  $\alpha$  arbitrario y un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  asumido finito localmente, la integral sobre  $\mathcal{M}$  es definida con ayuda de

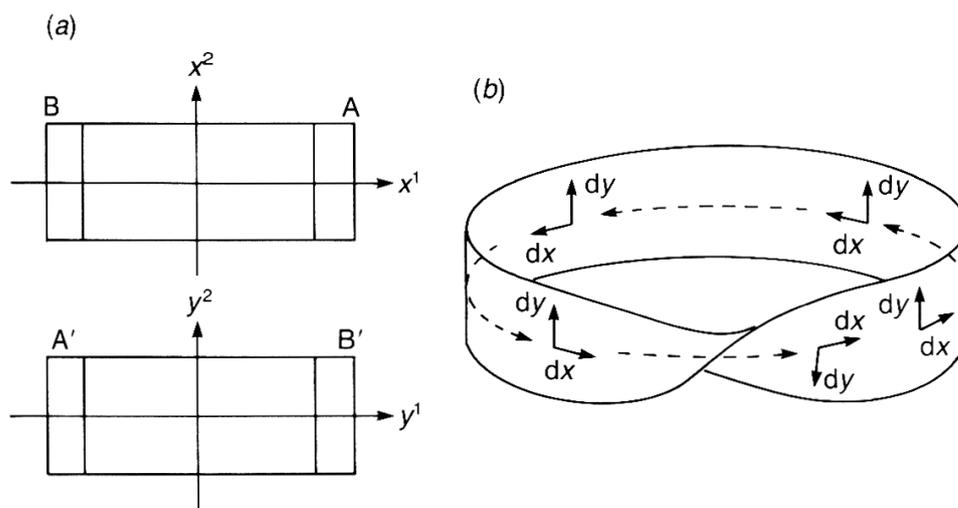


Figura 2.5: La parte (a), muestra la tira de Möbius obtenida de girar  $\pi$  veces la parte B de la segunda tira antes de pegar A con A' y B con B'. El cambio de coordenadas en B es  $y^1 = x^1$ ,  $y^2 = -x^2$  y el jacobiano es  $-1$ . La parte (b), muestra los marcos base en la banda de Möbius. Tomado de [5]

la partición de la unidad [5, 47]. Tal que, para  $\{\epsilon_i\}$  una familia de particiones de la unidad, subordinada al recubrimiento  $\{U_i\}$ , se tiene entonces que

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha = \sum_i \int_{U_i} \epsilon_i \alpha. \quad (2.85)$$

Este operador es una función lineal  $\int_{\mathcal{M}} : \Omega^m(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ , independiente del sistema coordenado elegido.

Si una variedad tiene bordes [21, 47] surge el teorema de Stokes. Sea  $\mathcal{M}$  una variedad de dimensión  $m$  con borde (o frontera)  $\partial\mathcal{M}$ . Si  $\omega$  es una  $(m-1)$ -forma sobre  $\mathcal{M}$  incluyendo su borde, se tiene

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega. \quad (2.86)$$

Diferentes casos especiales de este teorema en tres dimensiones incluyen no solo al teorema fundamental de cálculo, sino también a los teoremas de Green, Gauss y Stokes convencionales.

## 2.4. Derivada de Lie

Si consideramos un campo vectorial  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , sus curvas integrales definen un grupo uni-paramétrico de difeomorfismos dado por

$$\frac{d}{dt}(x^\mu \circ \phi_t) = X^\mu(x^\mu \circ \phi_t), \quad (2.87)$$

donde  $(x^\mu \circ \phi_t)$  son las coordenadas del punto  $\phi_t(p)$ , siendo  $\phi_t(p)|_{t=0} = p$  una condición inicial. El punto  $\phi_t(p)$  está a una distancia  $\varepsilon$  del punto  $p$  sobre la curva integral de  $X$  que pasa por  $p$ .

Se define la derivada de Lie del campo tensorial  $T \in \mathcal{T}_r^q(\mathcal{M})$  en  $p$  a lo largo de  $X$  como

$$\mathcal{L}_X T(p) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\phi_\varepsilon^* T)_p - T_p}{\varepsilon}. \quad (2.88)$$

$(\phi_\varepsilon^* T)_p$  (ver 2.37) y  $T_p$  son tensores en  $p$ , por lo que su resta está bien definida.

De esta manera, la derivada de Lie contiene la información de cómo cambian los tensores a lo largo de las curvas integrales de un campo vectorial  $X$ . Tomando coordenadas locales  $x^\mu$  sobre una carta  $U$  de  $\mathcal{M}$ , la derivada de Lie a lo largo de  $X$  de un elemento  $T \in \mathcal{T}_r^q(\mathcal{M})$  es escrita como

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} &= X^\rho \partial_\rho T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} \\ &- (\partial_\rho X^{\mu_1}) T^{\rho \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} \\ &- (\partial_\rho X^{\mu_2}) T^{\mu_1 \rho \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} \\ &- \dots - (\partial_\rho X^{\mu_q}) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \rho}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} \\ &+ (\partial_{\nu_1} X^\rho) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\rho \nu_2 \dots \nu_{r-1} \nu_r} \\ &+ (\partial_{\nu_2} X^\rho) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{q-1} \mu_q}_{\nu_1 \rho \dots \nu_{r-1} \nu_r} \\ &+ \dots + (\partial_{\nu_r} X^\rho) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1} \rho}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Esta derivada tiene algunas propiedades interesantes. Tomando  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ ,  $T \in \mathcal{T}_r^q(\mathcal{M})$  y  $f$  una función arbitraria, se tiene que

- $\mathcal{L}_X f = X[f]$ ,

\*Demostración: bajo la definición en la expresión (2.88), la derivada de Lie de una función  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$  a lo largo de un flujo  $\sigma_\varepsilon$  (con coordenadas  $x^\mu +$

$\varepsilon X^\mu(x)$  generado por un campo vectorial  $X$  es [5]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X f &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(\sigma_\varepsilon(x)) - f(x)] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)) - f(x)], \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x^\mu) + \varepsilon X^\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - f(x)], \\
&= X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \\
&= X[f].
\end{aligned} \tag{2.90}$$

■  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ ,

\*Demostración: sea  $(U, \phi)$  una carta con coordenadas  $x$ , y  $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ ,  $Y = Y^\mu \partial / \partial x^\mu$  campos vectoriales definidos en  $U$  a lo largo del flujo  $\sigma_\varepsilon(x)$  con coordenadas  $x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$ . La derivada de Lie de  $Y$  a lo largo de  $X$  es:

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - Y|_x], \tag{2.91}$$

por un lado

$$\begin{aligned}
Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} &= Y^\mu(x^\nu + \varepsilon X^\nu(x)) e_\mu|_{x+\varepsilon X}, \\
&= [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\mu(x) \partial_\nu Y^\nu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] e_\mu|_{x+\varepsilon X}.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Mapeando este vector a  $x$  mediante  $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
&[Y^\mu(x) + \varepsilon X^\mu(x) \partial_\nu Y^\nu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \partial_\mu [x^\nu - \varepsilon X^\nu(x)] e_\nu|_x, \\
&= [Y^\mu(x) + \varepsilon X^\mu(x) \partial_\nu Y^\nu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] [\delta_\mu^\nu - \varepsilon \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x, \\
&= Y^\mu(x) e_\mu|_x + \varepsilon [X^\mu(x) \partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x) \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Reemplazando (2.93) dentro de (2.91), se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [Y^\mu(x) e_\mu|_x + \varepsilon [X^\mu(x) \partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x) \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - Y^\mu e_\mu|_x], \\
&= (X^\mu(x) \partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x) \partial_\mu X^\nu(x)) e_\nu|_x.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Cabe resaltar que el corchete de Lie, es definido como:

$$[X, Y]f := X[Y[f]] - Y[X[f]], \tag{2.95}$$

donde  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ . Note, que el corchete de Lie  $[X, Y]$ , es un campo vectorial de la forma

$$[X, Y] = ((X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) e_\nu), \quad (2.96)$$

de esta manera, (2.94) es escrito como:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]. \quad (2.97)$$

- $[\mathcal{L}_X, d] = 0$
- $\mathcal{L}_{fX} Y = f[X, Y] - Y[f]X$
- $\mathcal{L}_X fY = f[X, Y] + X[f]Y$
- $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] T = \mathcal{L}_{[X, Y]} T,$

donde  $X[f]$  es la abreviación de  $X^\mu \partial f / \partial x^\mu$  y  $[X, Y]$  es conocido como el corchete de Lie, el cual satisface la identidad de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0. \quad (2.98)$$

## 2.5. Curvatura y torsión

Una derivada puede interpretarse intuitivamente como una forma de cuantificar la rapidez con la que cambia algo. Para el caso de tensores, existe una pregunta y es, “¿cambiar con respecto a qué?”. Una función cualquiera define un número en cada punto dentro del espacio-tiempo, y resulta trivial comparar dos números diferentes. Pero un tensor es un mapa de vectores y vectores duales a números reales, y no queda muy claro cómo comparar dichos mapas en diferentes puntos en el espacio-tiempo.

En una variedad cada punto definido en ella contiene asociado un espacio tangente, y por ende, dos puntos  $p$  y  $q$  contienen espacios tangentes diferentes. Dado que objetos definidos en diferentes puntos no pueden ser comparados (restar) de forma tradicional, no hay una manera natural de hacerlo a priori. Por lo tanto, la aplicación de operadores de derivación tiene cambios en su estructura.

El traslado de un espacio plano a uno curvo, requiere de generalizar el concepto del operador derivada. Por un lado, tenemos la derivada exterior, un operador que está restringido a  $r$ -formas, por otro lado, la derivada de Lie, la cual depende de un campo vectorial; estos operadores son tensores bien definidos. Sin embargo, la derivada parcial como un operador, no es un objeto bien definido,

puesto que su aplicación a tensores no devuelve de forma general un tensor correcto. Dado que es necesario preservar los objetos definidos sobre  $\mathcal{M}$ , es necesario involucrar un operador derivada que haga las veces de derivada parcial el cual convierta tensores en tensores bien definidos. Para ello se introduce un nuevo objeto llamado conexión afín, un nombre que hace alusión al transporte de vectores de un espacio tangente a otro.

### 2.5.1. Conexión afín

Una conexión afín  $\nabla$  es un mapeo  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , el cual satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
- (ii)  $\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ ,
- (iii)  $\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$ ,
- (iv)  $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$ ,

donde  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$  y  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ . Tomando una carta  $(U, \phi; x^\mu)$ , la acción de  $\nabla$  sobre cualquier par de vectores arbitrarios  $V = V^\mu \hat{e}_\mu$ ,  $W = W^\nu \hat{e}_\nu \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  es escrita como

$$\nabla_V W = V^\mu \nabla_{\hat{e}_\mu} (W^\nu \hat{e}_\nu) = V^\mu \left( \frac{\partial W^\nu}{\partial x^\mu} + W^\lambda \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \right) \hat{e}_\nu, \quad (2.99)$$

donde se ha definido a  $\nabla_{\hat{e}_\mu} \hat{e}_\nu := \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \hat{e}_\lambda$ . Los coeficientes  $\Gamma$  se denominan componentes de conexión y especifican cómo cambia la base vectorial de un punto a otro. Por definición,  $\nabla$  mapea dos vectores  $V$  y  $W$  a un nuevo vector dado por (2.99), cuya  $\nu$ -ésima componente es  $V^\mu \nabla_\mu W^\nu$ , donde

$$\nabla_\mu W^\nu := \frac{\partial W^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} W^\lambda. \quad (2.100)$$

Esta expresión no es la derivada covariante de  $W^\nu$ , dado que  $\nabla_\mu W^\nu$  es la  $\nu$ -ésima componente de un vector  $\nabla_\mu W = \nabla_\mu W^\nu e_\nu$ .

### 2.5.2. Derivada covariante

La derivada covariante es una generalización propia de la derivada direccional de una función a tensores. Ya que  $\nabla_X$  tiene el aspecto de una derivada, es natural

definir a partir de ella la derivada covariante de una función  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ , por la derivada direccional ordinaria [5]

$$\nabla_X f = X[f]. \quad (2.101)$$

Imponiendo que la conexión satisfaga la regla de Leibniz, para cualquier tipo de tensores, se obtiene que:

$$\nabla_X (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2), \quad (2.102)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$ , son campos de tensores de tipo arbitrario. Con este requerimiento, la aplicación de la derivada covariante sobre una 1-forma  $w$ , es de la forma:

$$(\nabla_X w)_\mu = X^\sigma e_\sigma[w_\mu] - X^\sigma \Gamma^\rho_{\sigma\mu} w_\rho, \quad (2.103)$$

esto surge de hacer uso de  $\langle w, Y \rangle \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$  para  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , que implica

$$X[\langle w, Y \rangle] = \nabla_X[\langle w, Y \rangle] = \langle \nabla_X w, Y \rangle + \langle w, \nabla_X Y \rangle. \quad (2.104)$$

Dentro de la expresión (2.103), en particular para  $X = e_\mu$ , se tiene que

$$(\nabla_\sigma w)_\mu = e_\sigma[w_\mu] - \Gamma^\rho_{\sigma\mu} w_\rho, \quad (2.105)$$

de esta manera, si  $w = dx^\mu$ , se obtiene  $\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\lambda} dx^\lambda$ . Así, generalizando este resultado sobre tensores de tipo  $(q, r)$ , se encuentra

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} &= \frac{\partial T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\lambda} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} + \dots + \Gamma^{\mu_q}_{\rho\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_{q-1} \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_r} \\ &\quad - \Gamma^\lambda_{\rho\nu_1} T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_r} - \dots - \Gamma^\lambda_{\rho\nu_r} T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_{r-1} \lambda}, \end{aligned} \quad (2.106)$$

nótese, que asociado a cada término de los coeficientes de conexión, hay un signo mas (+) por cada índice superior y un signo menos (-) por cada índice inferior. Por lo tanto, una conexión  $\nabla$  sobre  $\mathcal{M}$  es una regla para calcular la derivada direccional del campo tensorial sobre  $\mathcal{M}$ . La derivada covariante mapea tensores de tipo  $(q, r)$  a tensores de tipo  $(q, r + 1)$ , los cuales siguen la ley de transformación tensorial. No obstante, los coeficientes de la conexión no transforman como un tensor

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}, \quad (2.107)$$

y por ende se denotan como símbolos, aunque la diferencia (resta) entre dos coeficientes de conexión es un tensor que transforma correctamente. Sobre una variedad existe una gran cantidad de conexiones y cada una de ellas implica una noción distinta de diferenciación covariante.

Sea una variedad diferenciable dotada con una métrica  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ . Postulamos que la métrica sea covariantemente constante, es decir, para cualesquiera dos vectores covariantemente constantes  $X$  y  $Y$  transportados paralelamente a lo largo de una curva, el producto interno entre los mismos permanece constante bajo transporte paralelo (la idea detrás de transporte paralelo se analizará a más detalle en la sección 2.5.3). Consideremos un vector  $V$  tangente a una curva arbitraria sobre  $\mathcal{M}$ , para el cual los vectores  $X, Y$ , son transportados paralelamente. Luego se obtiene

$$\nabla_V[\mathbf{g}(X, Y)] = V^\alpha[(\nabla_\alpha \mathbf{g})(X, Y) + \mathbf{g}(\nabla_\alpha X, Y) + \mathbf{g}(X, \nabla_\alpha Y)]. \quad (2.108)$$

La condición de compatibilidad métrica es reflejada bajo la condición de transporte paralelo como  $\nabla \mathbf{g} := 0$ , esto significa que  $(\nabla_V \mathbf{g})(X, Y) = 0$ , para todo  $V, X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ . Por lo tanto

$$0 = V^\alpha[(\nabla_\alpha \mathbf{g})(X, Y) + \mathbf{g}(\nabla_\alpha X, Y) + \mathbf{g}(X, \nabla_\alpha Y)]. \quad (2.109)$$

Notar que  $\nabla_\alpha X = \nabla_\alpha Y = 0$ , y por ende

$$0 = V^\alpha[(\nabla_\alpha \mathbf{g})(X, Y)] = V^\alpha X^\mu Y^\nu (\nabla_\alpha \mathbf{g})_{\mu\nu}. \quad (2.110)$$

Ya que es verdadero para cualquier curva y vector, se obtiene

$$(\nabla_\alpha \mathbf{g})_{\mu\nu} = 0, \quad (2.111)$$

bajo esta condición, la conexión  $\nabla$  se denomina métrica compatible o simplemente conexión métrica<sup>8</sup>. Este tipo de conexión<sup>9</sup> es escrita como

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (T_{\nu\mu}^\lambda + T_{\mu\nu}^\lambda + T^\lambda_{\mu\nu}), \quad (2.112)$$

donde  $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$  es conocido como el símbolo de Christoffel y  $T^\lambda_{\mu\nu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$  como el tensor de torsión. El segundo término en la conexión métrica es conocido como la contorsión y es usualmente denotado por

$$K^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\nu\mu}^\lambda + T_{\mu\nu}^\lambda + T^\lambda_{\mu\nu}), \quad (2.113)$$

si la torsión es cero sobre una variedad, la conexión métrica  $\nabla$  es llamada conexión de Levi-Civita. Además, si el espacio es plano, los coeficientes de la conexión son todos cero y se retoma la derivada parcial usual.

<sup>8</sup>De ahora en adelante vamos a suponer que la conexión es compatible con la métrica, aunque no necesariamente sin torsión.

<sup>9</sup>El nombre de conexión es algunas veces referido a  $\nabla$  y otras veces a los coeficientes  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ .

### 2.5.3. Transporte paralelo

El transporte paralelo consiste en la acción de mover un tensor sobre un camino en  $\mathcal{M}$  manteniéndolo constante. Imaginemos un campo vectorial que vive en un espacio plano; bajo una traslación “paralela”, la variación del campo es nula, dado que el campo vectorial comparado con el trasladado es equivalente, y su producto interno permanece constante. Para el espacio curvo la noción de transporte paralelo cambia, dado que un vector es formado por los elementos del espacio tangente, y comparar paralelamente no es posible, puesto que los elementos del espacio tangente dependen de la posición. Por lo tanto, la idea de mantener constante el vector transportado paralelamente, recae en proyectar y comparar a lo largo de un campo vectorial.

La derivada covariante muestra la razón de cambio de un campo tensorial en comparación con lo que sería el tensor si se "transportara paralelamente". Dada una curva en  $\mathcal{M}$ , podemos definir el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva  $c : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ , para una carta  $(U, \phi, x^\mu)$  que cubre toda su imagen. Si  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  definido sobre la curva  $c(t)$  satisface que

$$\nabla_V X = 0, \quad \text{para todo } t \in (a, b) \quad (2.114)$$

se dice ser transportado paralelo a lo largo de la curva  $c(t)$ , donde  $V = d/dt$  es el vector tangente a  $c(t)$ . Así, una conexión define una forma específica de mantener un tensor constante (a lo largo de algún camino), pudiendo así comparar tensores cercanos. En el espacio plano no es necesario tener mucho cuidado con el hecho de que los vectores son elementos de espacios tangentes definidos en puntos individuales; en realidad, es muy natural comparar vectores en diferentes puntos. La razón por la cual es natural, es porque en el espacio plano tiene sentido mover vectores de un punto a otro manteniéndolos iguales a sí mismos.

Por lo tanto, la diferencia entre espacio curvo y plano, radica principalmente en el comportamiento del transporte paralelo a lo largo de una curva, dado que en el espacio curvo el transporte paralelo de un vector podría depender del camino elegido entre dos puntos. Esto nos muestra que el transporte paralelo es la generalización al espacio curvo para el concepto de “mantener constante el vector” a medida que lo movemos a lo largo de un camino; de manera similar se generaliza para un tensor de rango arbitrario. Dada una curva  $c(\lambda)$  sobre  $\mathcal{M}$ , el requerimiento de que un tensor  $T \in \mathcal{T}_r^q(\mathcal{M})$  sea constante a lo largo de la curva es

$$\frac{D}{d\lambda} T^{\mu_1 \cdots \mu_q}_{\nu_1 \cdots \nu_r} = 0, \quad (2.115)$$

donde  $\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu$  denota la derivada a lo largo del vector tangente a la curva.

Consideremos la variedad  $S^2$  con coordenadas esféricas usuales  $(\theta, \phi)$  y tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.116)$$

Podemos definir sobre ella la curva  $c(\lambda)$  tal que  $\theta$  permanece constante mientras que  $\phi = \lambda$  toma los valores  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ . Para un vector tangente escrito de la forma  $V = V^\theta \hat{e}_\theta + V^\phi \hat{e}_\phi$ , su transporte paralelo a lo largo de  $c(\lambda)$  bajo la conexión de Christoffel, cuyos coeficientes diferentes de cero son  $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin(\theta) \cos(\theta)$  y  $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cos(\theta)/\sin(\theta)$ , se produce las ecuaciones

$$\partial_\phi V^\theta - \sin(\theta) \cos(\theta) V^\phi = 0, \quad (2.117)$$

$$\partial_\phi V^\phi + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} V^\theta = 0. \quad (2.118)$$

Tomando la condición inicial  $V(\phi = 0) = -\hat{e}_\theta + 0\hat{e}_\phi$ , se tiene como solución

$$V = -\cos(\cos(\theta)\phi) \hat{e}_\theta + \frac{\sin(\cos(\theta)\phi)}{\sin(\theta)} \hat{e}_\phi. \quad (2.119)$$

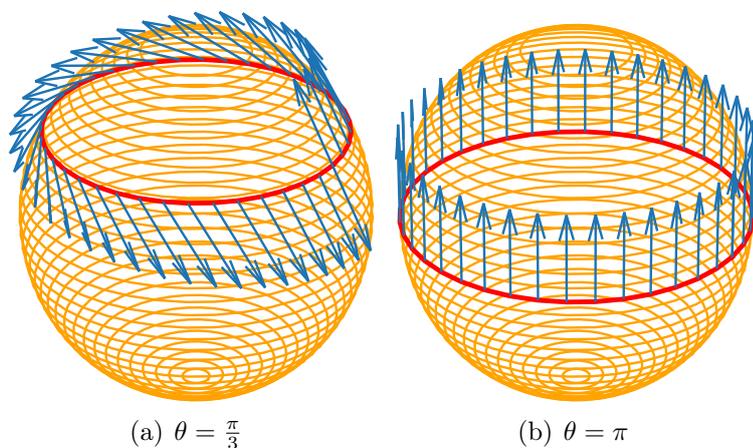


Figura 2.6: Un vector  $V$  es transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada  $c(\lambda)$  sobre  $S^2$ ; el transporte paralelo depende de la trayectoria escogida. Ver apéndice B.

La figura 2.6 muestra el comportamiento del vector  $V$  transportado paralelamente a lo largo de  $c(\lambda)$  para  $\theta$  constante.

Si el vector tangente a  $x(\lambda)$  es  $dx^\mu/d\lambda$ , la condición de ser transportado paralelamente a lo largo de la curva,  $D(dx^\mu/d\lambda)/d\lambda = 0$ , toma la forma

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (2.120)$$

la cual constituye la ecuación de las geodésicas en este contexto. Por lo tanto, la definición de geodésica es ahora escrita como:

**Definición 2.5.1** *Una geodésica es una curva a lo largo de la cual su vector tangente es paralelamente transportado a lo largo de ella.*

$$\nabla_V V = 0 \quad (2.121)$$

#### 2.5.4. Tensor de curvatura y torsión

Hasta el momento el tensor métrico es uno de los objetos que nos da un indicio de curvatura sobre una variedad; aunque la conexión puede verse como una corrección ante transporte paralelo, éste no es un tensor (dado que no satisface la ley de transformación (2.28); ver ecuación (2.107)) y no contiene un significado geométrico intrínseco de cómo una variedad se curva. Sin embargo, en el contexto del espacio plano, se tienen propiedades como invarianza bajo transporte paralelo, conmutación en la derivada covariante y que inicialmente geodésicas paralelas finalizan paralelas; al realizar un traslado hacia un contexto más general, surgen el tensor de Riemann o de curvatura y el tensor de torsión como una manifestación de la alteración de estas propiedades.

Los tensores de torsión y de Riemann están definidos como los mapeos

$$T : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M}) \quad (\text{Tensor de torsión}), \quad (2.122)$$

$$R : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{X}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M}) \quad (\text{Tensor de Riemann}), \quad (2.123)$$

dados por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (2.124)$$

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.125)$$

Es común escribir  $R(X, Y)Z$  en vez de  $R(X, Y, Z)$ , dado que esta notación muestra el carácter de  $R$  como un operador actuando sobre  $Z$ . Estos tensores satisfacen

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \quad (2.126)$$

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z. \quad (2.127)$$

Con respecto a una base coordenada  $\{\hat{e}_\mu\}$  y una base dual  $\{dx^\mu\}$ , las componentes de estos tensores están dadas por

$$\begin{aligned} T^\lambda_{\mu\nu} &= \langle dx^\lambda, T(\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu) \rangle, \\ &= 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}, \end{aligned} \quad (2.128)$$

y

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\rho\mu\nu} &= \langle dx^\lambda, R(\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu) \hat{e}_\rho \rangle, \\ &= \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\gamma_{\nu\rho} \Gamma^\lambda_{\mu\gamma} - \Gamma^\gamma_{\mu\rho} \Gamma^\lambda_{\nu\gamma}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

El tensor de Riemann surge de considerar el conmutador de dos transportes paralelos sucesivos a lo largo de dos direcciones que componen los lados de un camino infinitesimal cerrado en  $\mathcal{M}$ . Por otro lado, la torsión indica la falla en la cerradura de un paralelogramo infinitesimal construido a partir de dos vectores infinitesimales paralelamente transportados uno a lo largo del otro, ver figura 2.7.

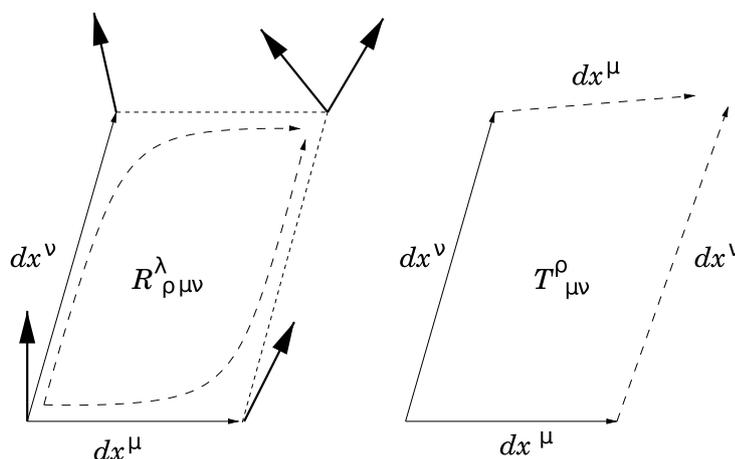


Figura 2.7: Transporte paralelo a lo largo de un paralelogramo infinitesimal. El tensor de Riemann mide la diferencia en el transporte paralelo a lo largo de un lazo en una dirección y luego en la otra, mientras que la torsión mide qué tan cerrado es el paralelogramo. Tomado de [48]

Si consideramos un campo vectorial  $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  y la acción del conmutador de derivadas covariantes sobre él, se encuentra que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\lambda\mu\nu} V^\lambda - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho. \quad (2.130)$$

El tensor de Riemann mide la parte de este conmutador que es proporcional al campo vectorial, cuantificando la diferencia en el transporte paralelo de un

vector a lo largo de un camino cerrado infinitesimal, lo cual corresponde a la curvatura encerrada por este. Mientras tanto, la torsión mide la parte que es proporcional a la derivada covariante del campo vectorial, el cual corresponde a la parte antisimétrica de la conexión y determina hasta qué punto se puede formar un paralelogramo a partir de vectores infinitesimales paralelamente transportados uno sobre el otro.

La acción del conmutador se puede extender a tensores de tipo  $(q, r)$ , dando como resultado

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] X^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} &= -T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda X^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \\ &+ R^{\mu_1}_{\lambda\mu\nu} X^{\lambda\mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} + \dots \\ &- R^\lambda_{\nu_1\mu\nu} X^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_r} - \dots \end{aligned} \quad (2.131)$$

El tensor de Riemann tiene las siguientes propiedades, con respecto a la conexión de Levi-Civita:

- Antisimetría en cada par de índices  $R_{[\mu\nu][\rho\gamma]}$

$$R_{\mu\nu\rho\gamma} = -R_{\nu\mu\rho\gamma} = -R_{\mu\nu\gamma\rho} = R_{\nu\mu\gamma\rho}. \quad (2.132)$$

- Además, satisface que:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X &= 0 \\ \text{Primera identidad de Bianchi.} \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V &= 0 \\ \text{Segunda identidad de Bianchi.} \end{aligned} \quad (2.134)$$

En componentes, estas cantidades son escritas como

$$R_{\rho[\lambda\mu\nu]} = 0 \quad (\text{Primera identidad de Bianchi}). \quad (2.135)$$

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\gamma]\mu\nu} = 0 \quad (\text{Segunda identidad de Bianchi}). \quad (2.136)$$

- Simetría en índices por pares

$$R_{\sigma\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad (2.137)$$

resultado de combinar (2.132) y (2.133).

- Bajo contracción de índices, el tensor de Riemann pasa a ser el tensor de Ricci:  $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ .
- La traza del tensor de Ricci es denotada como la curvatura escalar o escalar de Ricci:  $R = R^{\mu}_{\mu}$ .

Si contraemos los índices en la segunda identidad de Bianchi, a excepción de uno, como se muestra a continuación

$$g^{\nu\gamma} g^{\mu\lambda} \nabla_{[\lambda} R_{\rho\gamma]\mu\nu} = \nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.138)$$

se obtiene el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.139)$$

el cual resulta importante dentro del contexto de relatividad general.

## 2.6. Base no coordenada

Anteriormente las bases de  $T_p\mathcal{M}$  era generada por  $\{\hat{e}_{\mu}\}$  y la de  $T_p^*\mathcal{M}$  por  $\{dx^{\mu}\}$ , las cuales se adaptan al sistema coordenado. Sin embargo, para una variedad  $\mathcal{M}$  dotada con una métrica  $\mathbf{g}$  puede tomarse una elección alternativa, considerando una combinación lineal de la forma

$$\hat{e}_I(p) := e^{\mu}_I \hat{e}_{\mu}(p), \quad (2.140)$$

la cual es ortonormal respecto a  $\mathbf{g}$ . Esto implica que el producto interno de estos vectores base está dado por

$$\mathbf{g}(\hat{e}_I, \hat{e}_J) = \eta_{IJ}, \quad (2.141)$$

siendo  $\eta_{IJ}$  las componentes del tensor métrico en la base no-coordenada. Los índices  $I, J, \dots$  toman los valores  $0, \dots, m-1$ , siendo  $m$  la dimensión de la variedad. Si el determinante de  $e^{\mu}_I$  es diferente de cero, entonces existe su inversa siendo esta denotada por  $e_{\mu}^I$  (cabe resaltar, que el determinante del marco estará definido sobre la inversa, es decir  $e := \det(e_{\mu}^I)$ ).  $\{\hat{e}_I\}$  es el marco de una base vectorial la cual es obtenida por una  $GL(m, \mathbb{R})$ -rotación de la base  $\{\hat{e}_{\mu}\}$  preservando la orientación [5].

La inversa  $e_{\mu}^I$  de  $e^{\mu}_I$  satisface  $e_{\mu}^I e^{\nu}_I = \delta_{\mu}^{\nu}$ ,  $e_{\mu}^I e^{\mu}_J = \delta^I_J$ . El inverso del producto interno (2.141) dado en componentes es escrito como

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^I e_{\nu}^J \eta_{IJ}. \quad (2.142)$$

Además, sabiendo que un vector es independiente de una base elegida, se tiene

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu = V^I \hat{e}_I; \quad (2.143)$$

luego  $V^\mu = e^\mu_I V^I$  y  $V^I = e_\mu^I V^\mu$ . De forma análoga, podemos establecer una base ortonormal para 1-formas en  $T_p^* \mathcal{M}$  la cual es denotada como  $\theta^{I10}$ , tal que  $\langle \hat{\theta}^I, \hat{e}_J \rangle = \delta_J^I$ , donde  $\theta^I$  es denotada como

$$\hat{\theta}^I = e_\mu^I dx^\mu. \quad (2.144)$$

En este contexto, el tensor métrico toma el siguiente aspecto

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{IJ} \hat{\theta}^I \otimes \hat{\theta}^J. \quad (2.145)$$

Las bases  $\{\hat{e}_I\}$  y  $\{\hat{\theta}^J\}$  son llamadas bases no-coordenadas y a menudo denotadas como el marco y co-marco respectivamente. Además  $e_\mu^I$  es también conocido como el vielbein; los índices involucrados difieren en símbolos, por un lado los símbolos griegos se mantienen para describir componentes de tensores en la base coordinada, mientras que los símbolos latinos en mayúscula denotan componentes de tensores en la base no-coordenada.

El dual de Hodge dentro del contexto de bases no-coordenadas es escrito como

$$\star(\hat{e}_{I_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{I_r}) = \frac{1}{(m-r)!} \epsilon_{I_1 \cdots I_r J_{r+1} \cdots J_m} \hat{\theta}^{J_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \hat{\theta}^{J_m}, \quad (2.146)$$

donde  $\epsilon$  es un tensor de  $SO(n-1, 1)$  [o  $SO(n)$ ] (la métrica en  $SO(n-1, 1)$  es definida como  $\eta_{IJ} := \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  y la métrica de  $SO(n)$   $\eta_{IJ} := \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ ). Haciendo un cambio de marco con un elemento de  $SO(n-1, 1)$  [o  $SO(n)$ ], tenemos que

$$\epsilon_{I_1 \cdots I_{m-1}} \Lambda^{I_1}_{J_1} \cdots \Lambda^{I_{m-1}}_{J_{m-1}} = \det(\Lambda^I_J) \epsilon_{J_1 \cdots J_{m-1}} = \epsilon_{J_1 \cdots J_{m-1}}. \quad (2.147)$$

donde  $\det(\Lambda^I_J) = 1$ . Por lo tanto  $\epsilon_{I_1 \cdots I_{m-1}}$  es un tensor invariante bajo transformación de  $SO(n-1, 1)$  [o  $SO(n)$ ], y por ende, es posible usar la métrica  $\eta_{IJ}$  para subir y bajar índices

$$\epsilon^{I_1 \cdots I_{m-1}} = \eta^{I_1 J_1} \cdots \eta^{I_{m-1} J_{m-1}} \epsilon_{J_1 \cdots J_{m-1}}, \quad (2.148)$$

nótese que

$$\epsilon^{01 \cdots (m-1)} = \eta^{0I} \eta^{1I_1} \cdots \eta^{(m-1)I_{m-1}} \epsilon_{II_1 \cdots I_{m-1}} = \det(\eta) = \pm 1. \quad (2.149)$$

---

<sup>10</sup>En el capítulo 4, las bases  $\hat{\theta}^I$  son denotadas por la 1-forma  $e^I$ .

De esta manera, para  $\eta_{IJ} = \text{diag}(\pm 1, 1, 1, \dots, 1)$  se obtiene que:

$$\epsilon^{I_0 I_1 \dots I_{m-1}} \epsilon_{I_0 I_1 \dots I_{m-1}} = \pm m!, \quad (2.150)$$

el cual difiere del producto de símbolos de Levi-Civita definido en (2.60)

$$\tilde{\eta}^{\mu_1 \dots \mu_m} \tilde{\eta}_{\mu_1 \dots \mu_m} = m!. \quad (2.151)$$

### 2.6.1. Ecuaciones de Cartan

A diferencia de la base coordenada, la base no-coordenada no conmuta, es decir,  $[\hat{e}_I, \hat{e}_J]$  es diferente de cero:

$$[\hat{e}_I, \hat{e}_J] = C_{IJ}{}^K \hat{e}_K, \quad (2.152)$$

donde  $C_{IJ}{}^K = e_\nu{}^K [e^\mu{}_I \partial_\mu e^\nu{}_J - e^\mu{}_J \partial_\mu e^\nu{}_I]$ . Utilizando esta base, el tensor de Riemann y de torsión cambian ligeramente. Además, los coeficientes de la conexión son expresados como

$$\begin{aligned} \Gamma^K{}_{IJ} &= \langle \hat{\theta}^K, \nabla_{\hat{e}_I} \hat{e}_J \rangle, \\ &= e_\nu{}^K e^\mu{}_I (\partial_\mu e^\nu{}_J + e^\lambda{}_J \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}). \end{aligned} \quad (2.153)$$

Surge ahora una nueva derivada covariante  $\nabla_\mu$ , la cual actúa sobre ambos índices ( $\mu, \nu, \dots$  y  $I, J, \dots$ ) y aniquila al vielbein:  $\nabla_\nu e^\mu{}_I = 0$ . Este es un postulado que siempre es válido independientemente de la compatibilidad métrica o del valor de la torsión [4]. De esta manera, las conexiones involucradas definidas de forma independiente ahora están ligadas con el fin de hacer una misma descripción geométrica y por lo tanto sus curvaturas son equivalentes (es decir que la curvatura escalar asociada a cada conexión es congruente con la otra  $R^{\Gamma_1} \stackrel{(PV)}{=} R^{\Gamma_2}$ , con  $PV :=$  postulado del vielbein). Con esto, bajo esta base se tiene que

- Componentes del tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R^I{}_{JKL} &= \langle \hat{\theta}^I, R(\hat{e}_K, \hat{e}_L) \hat{e}_J \rangle, \\ &= \hat{e}_K [\Gamma^I{}_{LJ}] - \hat{e}_L [\Gamma^I{}_{KJ}] \\ &\quad + \Gamma^N{}_{LJ} \Gamma^I{}_{KN} - \Gamma^N{}_{KJ} \Gamma^I{}_{LN} - C_{KL}{}^N \Gamma^I{}_{NJ}, \end{aligned} \quad (2.154)$$

- Componentes del tensor de torsión

$$\begin{aligned} T^I{}_{JK} &= \langle \hat{\theta}^I, T(\hat{e}_J, \hat{e}_K) \rangle, \\ &= 2\Gamma^I{}_{[JK]} - C_{JK}{}^I. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Por otra parte, tomando la antisimetría de estos tensores, es posible hacer una descripción de los mismos dentro del contexto de formas. Así, para el tensor de Riemann se obtiene una 2-forma:

$$\begin{aligned} R^I_J &= \frac{1}{2!} R^I_{JKL} \hat{\theta}^K \wedge \hat{\theta}^L, \\ &= d\Gamma^I_J + \Gamma^I_K \wedge \Gamma^K_J, \end{aligned} \quad (2.156)$$

y de manera análoga, el tensor de torsión una 2-forma:

$$\begin{aligned} T^I &= \frac{1}{2!} T^I_{JK} \hat{\theta}^J \wedge \hat{\theta}^K, \\ &= \Gamma^I_J \wedge \hat{\theta}^J + d\hat{\theta}^I, \end{aligned} \quad (2.157)$$

donde  $\Gamma^I_J = \gamma^I_{JK} \hat{\theta}^K$ , es denominada la conexión 1-forma. Las ecuaciones (2.157) y (2.156) son denominadas la primera y segunda ecuación de estructura de Cartan, respectivamente. Si se toma la derivada exterior a cada una de ellas se encuentra que

$$dT^I + \Gamma^I_J \wedge T^J = R^I_J \wedge \hat{\theta}^J, \quad (2.158)$$

$$dR^I_J + \Gamma^I_K \wedge R^K_J - R^I_K \wedge \Gamma^K_J = 0, \quad (2.159)$$

una versión de la primera y segunda identidad de Bianchi dentro de la bases no-coordenadas.

# Capítulo 3

## Relatividad General

A mediados del siglo XVII, Isaac Newton postuló una ley de gravitación universal. El establecimiento newtoniano convencional se encuentra en términos de fuerzas entre partículas; la fuerza entre dos objetos de masa  $M$  y  $m$  respectivamente, separados por una distancia  $r$ , está dada por la famosa ley de inverso del cuadrado.

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{e}(r). \quad (3.1)$$

Esta ecuación muestra que un objeto de masa  $m$  influenciado por esta fuerza obtiene una aceleración acorde a la segunda ley de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ , siendo  $\vec{a} := (GM/r^2)\hat{e}(r)$ , aunque las masas en cada una de las dos ecuaciones hacen referencia a la masa gravitacional e inercial respectivamente, debido al principio de equivalencia débil, estas se consideran iguales, debido a que en regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, no es posible diferir entre masa inercial y masa gravitacional.

Dentro de la mecánica clásica la ley de inverso del cuadrado juega un rol importante, dado que puede verse como una fuerza conservativa que puede expresarse en términos del gradiente de un campo potencial (potencial gravitacional  $\phi$ ), donde la aceleración toma la forma

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (3.2)$$

siendo  $\phi = -GM/r$ . De esta manera, el campo potencial está relacionado con la densidad de masa  $\rho$  por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (3.3)$$

en donde se evidencia una ecuación para el campo gravitacional influenciado por la materia. Esta descripción de lo que denominamos gravedad, nos ha dado una

basta información del comportamiento del mundo macroscópico generalizando las leyes de Kepler para el movimiento planetario y mostrando que la dinámica de los cuerpos celestes se encuentra bajo las tres leyes fundamentales de Newton.

A inicios del siglo XX, en un artículo publicado por Albert Einstein titulado: “sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento”, se muestra que el espacio y el tiempo están relacionados resolviendo el conflicto existente entre las ecuaciones de Newton y las ecuaciones de Maxwell, dado que estas últimas no son invariantes bajo transformaciones de Galileo; Einstein postula una teoría denominada teoría especial de la relatividad, la cual se basa en los siguientes principios: las leyes de la física son independientes de cualquier sistema de referencia inercial, y la velocidad de la luz en el vacío (denotada como  $c$ ) es una constante universal, independiente de todo movimiento relativo entre la fuente y el observador. Con ello, las transformaciones apropiadas para describir las relaciones entre marcos inerciales resultan ser las transformaciones de Lorentz, bajo las cuales las ecuaciones de Maxwell son invariantes.

Aceptar esta premisa hasta sus últimas consecuencias, implica abandonar los conceptos tradicionales del espacio y del tiempo, para admitir que hay correcciones “relativistas” importantes en la física newtoniana. La relatividad especial no sólo ofrece una nueva manera de ver la física, sino incluso implica una visión nueva de la estructura del espacio y el tiempo, combinados en una sola entidad quadri-dimensional, llamado espacio-tiempo, o espacio de Minkowski.

La relatividad especial trae consigo varias consecuencias las cuales se han verificado experimentalmente. Estas incluyen la relatividad de la simultaneidad, contracción de longitud, dilatación del tiempo, adición de velocidades relativistas, entre otros. Además, los dos postulados de la relatividad especial combinados con otras leyes de la física, predicen la equivalencia de masa y energía, expresada en la fórmula de equivalencia masa-energía  $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $p$  el momento lineal y  $m$  la masa del objeto.

Aunque las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, la ecuación para gravedad de Newton no era compatible con esta teoría. Es por ello que más adelante Einstein desarrolló la relatividad general [49], introduciendo un espacio-tiempo curvo para incorporar la gravedad; no fue hasta entonces que se utilizó la frase “relatividad especial”, refiriéndose a la teoría como un caso especial de la teoría general de la relatividad. La teoría es “especial” en el sentido de que solo se aplica en el caso especial donde el espacio-tiempo es “plano”, es decir, donde la curvatura del espacio-tiempo, la cual es generada por la

distribución de energía-momento y es responsable de la interacción gravitacional, es despreciable.

La relatividad general también incluye geometría no euclidiana para representar los efectos gravitacionales como la curvatura geométrica del espacio-tiempo. Así, para regiones locales y bajo el límite de campo débil, la relatividad especial está restringida al espacio-tiempo plano conocido como espacio de Minkowski. Siempre que el universo pueda modelarse como una variedad pseudo-riemanniana, un marco invariante de Lorentz que se rige por la relatividad especial se puede definir para una vecindad suficientemente pequeña de cada punto en este espacio-tiempo curvo.

Esta teoría es una de las teorías más bellas y exitosas de la física clásica. No hay desacuerdo entre la teoría y las observaciones astrofísicas y cosmológicas hasta el momento, como las pruebas del sistema solar dentro del perihelio de mercurio, la radiación gravitacional, los corrimientos gravitacionales al rojo, el efecto de lente gravitacional, los agujeros negros, etc.

Einstein dentro de su teoría propuso los siguientes principios (postulados) para construir la teoría general de la relatividad:

- (I) Principio de covarianza generalizado: las leyes de la física deben ser las mismas para cualquier observador en estado de movimiento arbitrario.
  
- (II) Principio de equivalencia: las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial, en regiones lo suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, en las cuales es imposible discernir entre la existencia de un campo gravitacional y un marco uniformemente acelerado mediante experimentos locales. (Un observador en un ascensor que cae libremente no siente la gravedad hasta que choca).

En este capítulo nos adentraremos dentro de los conceptos que subyacen a la relatividad general, para lo cual es necesario hacer uso del lenguaje tensorial descrito en el capítulo anterior. Este lenguaje contiene objetos definidos sobre cada punto de una variedad diferenciable (modelo de espacio-tiempo) que poseen ciertas reglas de transformación bien definidas ante cambios arbitrarios de coordenadas, los cuales a su vez determinan propiedades geométricas y físicas de la variedad diferenciable.

### 3.1. Ecuaciones de Campo

La ecuación de Poisson para la gravitación es el punto de partida de la relatividad general, dado que muestra cómo varía el potencial gravitacional en presencia de materia. El principio de equivalencia de Einstein establece que las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial en regiones lo suficientemente pequeñas como para no distinguir entre gravedad y movimiento acelerado.

Sean Carroll en su libro “Space time and Geometry, An introduction to General Relativity” [4], menciona que existe un principio con el cual es posible generalizar las leyes de la física al contexto del espacio-tiempo curvo. Esta herramienta es llamada el principio de acoplamiento mínimo, expresado de la siguiente manera:

- “Tome una ley de la física, válida en coordenadas inerciales en el espacio-tiempo plano.
- Escríbalo en forma coordenada invariante (tensorial).
- Afirme que la ley resultante sigue siendo cierta en el espacio-tiempo curvo.” [4].

Dentro del contexto de este principio, desde el punto de vista operativo es equivalente a tomar una ley acordada en un espacio plano y reemplazar la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  por la métrica más general  $g_{\mu\nu}$ , y reemplazar las derivadas parciales  $\partial_\mu$  por las derivadas covariantes  $\nabla_\mu$ . Si consideramos la caída libre de una partícula de prueba dentro del espacio plano, esta partícula se mueve en línea recta y está representado por

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0, \quad (3.4)$$

donde la curva está parametrizada por  $x(\lambda)$ . Aunque  $dx^\mu/d\lambda$  es un vector, (3.4) no es un tensor bien definido debido a las segundas derivadas de las componentes de  $x^\mu(\lambda)$ . Su aspecto tensorial resulta de tomar la regla de la cadena

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (3.5)$$

donde se evidencia una derivada parcial. Es claro ahora que para generalizar esta relación al espacio-tiempo curvo, simplemente se reemplaza la derivada parcial por la derivada covariante

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\gamma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda}. \quad (3.6)$$

La ecuación resultante es la ecuación geodésica. Por lo tanto, sumerge a la relatividad general dentro de un contexto donde una partícula libre se mueve a lo largo de geodésicas. Miremos ahora, como la gravedad newtoniana encaja dentro de esta imagen, para ello, consideremos el límite newtoniano teniendo en cuenta tres requisitos: velocidades clásicas (las partículas se mueven lentamente con respecto a la velocidad de la luz, es decir mucho menor que  $c$ ), el campo gravitacional es débil (por lo que puede considerarse como una perturbación del espacio plano) y el campo también es estático (constante en el tiempo). Escrito de otra forma

- Velocidad clásica  $\frac{dt}{d\tau} \gg \frac{dx^i}{d\tau}$ .
- Campo estático  $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ .
- Campo gravitacional débil  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , para  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

Para incorporar estos requerimientos a la ecuación geodésica, miremos el comportamiento de los coeficientes de conexión de Levi-Civita, teniendo en cuenta que la inversa a primer orden en  $h$  es dada por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

por ende se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}), \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} h_{\rho\nu} + \partial_{\nu} h_{\rho\mu} - \partial_{\rho} h_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

a primer orden en  $h$ . Sin embargo, dadas las condiciones anteriormente mencionadas, se encuentra que los coeficientes de conexión involucrados  $\Gamma^{\lambda}_{00}$  son las más relevantes

$$\Gamma^{\lambda}_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \partial_{\rho} h_{00}. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, al incorporar estos requerimientos dentro de la ecuación geodésica [4], se encuentra que

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} h_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (3.10)$$

Por un lado, para  $\mu = 0$  se tiene que  $dt/d\tau$  es constante, y por otro, las componentes tipo-espacio muestran que (teniendo en cuenta que  $\eta_{ij}$  es una matriz 3x3)

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \partial_i h_{00}. \quad (3.11)$$

Bajo la división de  $(dt/d\tau)^2$ , el cual proporciona el efecto de pasar  $\tau$  a  $t$ , se obtiene:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}, \quad (3.12)$$

esta expresión tiene un símil con (3.2), siendo las mismas para  $h_{00} = -2(\phi + \text{cte})$ . Por lo tanto, se encuentra que

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (3.13)$$

Esto nos muestra, que el tensor métrico está relacionado con el potencial gravitacional, dando a conocer que la métrica del espacio-tiempo es suficiente para describir gravedad en el límite newtoniano, posicionando al tensor métrico, como uno de los objetos más importantes dentro de la relatividad general. Dado que:

- Aporta una noción de causalidad (pasado, futuro y posiciones nulas).
- Permite calcular la distancia entre dos puntos, vía la definición métrica como distancia cuadrática.
- Es posible reemplazarlo por el campo gravitacional newtoniano  $\phi$ .
- Reemplaza el producto interno euclidiano tradicional de la mecánica newtoniana.

Entre otras cosas no menos importantes, esto refleja un poco la importancia de este objeto dentro de la teoría.

Con esto en mente es posible construir, aunque de forma informal, las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein. Pensando en una relación tensorial como una analogía a la ecuación de Poisson (3.3), se postula la forma

$$[\nabla^2 \mathbf{g}]_{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

una ecuación que involucra segundas derivadas del tensor métrico (potencial gravitacional) igual a una distribución de materia;  $T_{\mu\nu}$  es el tensor responsable de la distribución de materia, conocido como el tensor de energía-momento. Llevar esta relación a una ecuación tensorial más precisa, necesita de dos postulados adicionales, torsión cero  $T^\lambda_{\mu\nu} = 0$  y compatibilidad métrica  $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ , incorporados por Einstein para construir su teoría de la gravedad. Esto muestra que la conexión afín involucrada es la determinada por los símbolos de Christoffel, vistos en el capítulo 2.5.2. El tensor de Ricci definido en el capítulo 2.5.4 contiene segundas derivadas del tensor métrico, con una cantidad de índices correctos con respecto a (3.14), lo que sugiere que las ecuaciones de campo sean descritas como

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

para  $k$  alguna constante de proporcionalidad. Esta ecuación fue postulada por Einstein inicialmente, aunque no es correcta debido a que si queremos preservar la conservación de la energía, el tensor de energía-momento debe satisfacer que

$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ . Esto sugiere que al tomar la derivada covariante del tensor de Ricci  $\nabla^\nu R_{\mu\nu}$  sea igual a cero, pero ello no es cierto dado que bajo la segunda identidad de Bianchi (2.136) aplicada al tensor de Riemann se tiene que  $\nabla^\nu R_{\mu\nu} = (1/2)\nabla_\mu R$ , que difiere en general de cero. Bajo esta corrección se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

que satisface varios de los requerimientos establecidos. Al incorporar el límite newtoniano, se encuentra que la constante de proporcionalidad está dada por  $k = 8\pi G$  para  $G$  la constante de gravitación universal de Newton [4], y con ello se presentan las ecuaciones de campo correctas para gravedad propuestas por Albert Einstein para la relatividad general

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.17)$$

Esta ecuación nos muestra como el espacio-tiempo reacciona bajo la presencia de energía y momento. Si el espacio-tiempo es 4-dimensional, las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein se reducen a diez ecuaciones independientes. Además, bajo las cuatro constricciones dadas por la identidad de Bianchi

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad (3.18)$$

el sistema de ecuaciones se reduce a 6 ecuaciones independientes no lineales. La no linealidad presente en las ecuaciones de campo de Einstein, hace que el número de soluciones exactas sea casi nula y sea necesario recurrir a métodos numéricos, cuyas soluciones son más complejas pero que están a la orden del día, en áreas como las ondas gravitacionales. Sin embargo, existen soluciones exactas para condiciones específicas que satisfacen las ecuaciones de campo de Einstein. Un ejemplo de ello es la métrica de Schwarzschild [13]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.19)$$

para  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ ,  $G$  la constante universal de Newton y  $M$  la masa del objeto gravitando. Esta métrica es una solución general (según el teorema de Birkhoff [50]) para las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, la cual describe el campo gravitatorio fuera de un objeto masivo con simetría esférica. Cabe resaltar, que la métrica contiene una singularidad física (de curvatura intrínseca) en  $r = 0$  y una singularidad de coordenadas en  $r = r_s := 2GM$  ( $r_s$  es definido como el radio de Schwarzschild), esta última singularidad representa el horizonte de sucesos.

Un rasgo característico de la relatividad general es que la fuente del campo gravitacional es todo el tensor de energía-momento. Estas ecuaciones no predicen un universo estático. La gravedad hace que un universo que inicialmente está en equilibrio se contraiga o expanda. Para contrarrestar esta posibilidad, Einstein agregó la constante cosmológica. Sin embargo, poco después de que Einstein desarrollara su teoría estática, las observaciones de Edwin Hubble indicaron que el universo parece estar expandiéndose.

La constante cosmológica introducida en las ecuaciones de campo, está dada como un factor de proporcionalidad hacia la métrica, el cual satisface la ley de conservación requerida. Este elemento puede trasladarse de un lugar a otro dentro de la ecuación, reescribiendo el tensor de energía-momento; este término pasa a ser una energía denotada como energía de vacío.

El concepto de energía de vacío surge naturalmente en mecánica cuántica debido al principio de incertidumbre, puesto que este no permite estados de energía base los cuales sean exactamente cero. La energía de vacío en relatividad general debería ser pensada no como cualquier proceso participativo, calor de disipación o viscosidad, sino más bien como un fluido perfecto descrito por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.20)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía en reposo,  $p$  es la presión isotrópica y  $U^\mu$  es el campo cuatro-vector de velocidad o cuadrivelocidad. Con el fin de mantener la invarianza Lorentz, la energía de vacío no debería tener una dirección preferida, por lo que el primer término de la ecuación de fluido perfecto debería ser cero requiriendo que  $T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$ , y así el vacío se describiría como un fluido perfecto con una presión isotrópica opuesta en signo a la densidad de energía  $p_{vac} = -\rho_{vac}$ . Esta densidad de energía debería ser constante a través del espacio-tiempo debido a que un gradiente no puede ser un invariante de Lorentz. Podemos dividir el tensor de energía-momento en un término de materia y energía, y un término que describa el vacío  $T = T_{mat} + T_{vac}$ . Esto conlleva a que  $\rho_{vac} = \Lambda/8\pi G$  para mantener la forma en la que la constante cosmológica entra en las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein [4, 51],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

## 3.2. Formulación lagrangiana

Una versión más elegante para encontrar las ecuaciones de campo de Einstein se obtiene a través del principio de mínima acción.

Consideremos un sistema cuyo estado es descrito por un conjunto de  $N$  parámetros  $\{q^i\}$  con  $(1 \leq i \leq N)$ ; los parámetros son coordenadas que rotulan al espacio  $\mathcal{M}$  (Una variedad diferenciable  $m$ -dimensional), luego  $\mathcal{M}$  es llamado el espacio de configuración y  $\{q^i\}$  las coordenadas generalizadas. Suponemos que el sistema tiene una cantidad de grados de libertad finitos, cuya dinámica es derivada de la acción

$$S = \int_{t_0}^{t_f} L(q^i, \dot{q}^i; t) dt, \quad (3.22)$$

donde  $L$  es el lagrangiano, el cual depende de las coordenadas generalizadas de tal forma que  $L : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable. Los movimientos clásicos del sistema son aquellos que hacen que la acción sea estacionaria bajo variaciones  $\delta q^i(t)$  tal que  $\delta q^i(t_0) = \delta q^i(t_f) = 0$ , lo cual lleva a las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $(t_0 < t < t_f)$

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0. \quad (3.23)$$

Para un número infinito de grados de libertad, las variables dinámicas son un conjunto de campos  $\phi^i(x^\mu)$  sobre el espacio-tiempo, donde la etiqueta  $i$  representa los campos de forma individual. Ahora, la función de las coordenadas  $f(q)$  pasa a ser una funcional  $F[\phi]$ , la cual es continua en  $\phi(x)$  si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F[\phi^i + \varepsilon \xi^i] = F[\phi^i], \quad (3.24)$$

para cualquier función  $\xi^i$ .  $F[\phi]$  es diferenciable en  $\phi(x)$  si

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F[\phi + \varepsilon \xi] \right|_{\varepsilon=0} = \int d^m x \xi^i(x) \frac{\delta F}{\delta \phi^i(x)}, \quad (3.25)$$

existe como una función lineal en  $\xi^i(x)$ . Esto es una definición implícita de la derivada funcional  $\delta F / \delta \phi^i(x)$  de  $F$  respecto a  $\phi^i$  [5, 44]. Así, la acción es ahora una funcional de estos campos, escrita como

$$S[\phi^i] = \int L dt, \quad (3.26)$$

donde  $L$  es el lagrangiano, entendido como una integral sobre el espacio de una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  de la forma

$$L = \int d^{m-1}x \mathcal{L}(\phi^i, \nabla_\mu \phi^i, \dots). \quad (3.27)$$

Este objeto es comprendido como una funcional que depende de los campos y sus derivadas covariantes, las cuales son apropiadas en el contexto de un espacio-tiempo curvo. Como consecuencia, la acción es:

$$S[\phi^i] = \int d^m x \mathcal{L}(\phi^i, \nabla_\mu \phi^i, \dots). \quad (3.28)$$

El término  $d^m x$  es una densidad tensorial visto como un elemento de volumen invariante, y además  $\mathcal{L}$  es también una densidad tensorial; por lo tanto es necesario que su producto sea un escalar bien definido, dado que la integral es definida sobre formas. Así, si dotamos con credencial tensorial (definido en (2.1.3)) ambos términos  $d^m x$  y  $\mathcal{L}$  tendremos un tensor bien definido. De esta manera, es común denotar al lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} := \sqrt{|g|} \hat{\mathcal{L}}, \quad (3.29)$$

y por ende las ecuaciones de Euler-Lagrange toman la forma [52],

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \phi^i} - \nabla_\mu \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \phi^i)} \right) = 0. \quad (3.30)$$

En el contexto del formalismo lagrangiano, la construcción de una acción para la relatividad general viene de promover al tensor métrico  $\mathbf{g}$  (mencionado en el capítulo 2.2) como variable dinámica. Esta idea fue introducida por el matemático David Hilbert en 1915 [53], la cual involucra al escalar de curvatura ( $R(g)$ ) y posee al tensor métrico como única variable independiente. Dicha acción está dada por:

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{|g|} R d^m x, \quad (3.31)$$

donde  $d^m x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m-1}$ . Para puntos estacionarios de la acción de Einstein-Hilbert (3.31) respecto al tensor métrico (el símbolo delta ( $\delta$ ) representa la variación funcional, ver (3.25))

$$\delta S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} \left[ \delta \left( \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \right) R_{\mu\nu}(g) + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}(g) \right] = 0, \quad (3.32)$$

con

$$\delta(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{\sigma\rho} \delta g^{\sigma\rho} g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

$$\delta R_{\mu\nu}(g) = \nabla_\lambda (\delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}). \quad (3.34)$$

Además, renombrando índices mudos y despreciando los términos de frontera (debido a que  $\partial\mathcal{M} = 0$ ), (3.32) lleva a las ecuaciones de campo de Einstein para gravedad en el vacío [4, 51, 54]

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.35)$$

Debido a que solo se ha incluido la parte gravitacional, nos encontramos con las ecuaciones de vacío; sin embargo, la inclusión de materia viene de adicionar un término dentro de la acción, obteniendo

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M, \quad (3.36)$$

donde  $S_M$  es la acción para la materia. Esta acción es consistente con las ecuaciones (3.17) para la gravedad en presencia de materia. De hecho, para puntos estacionarias de (3.36) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (3.37)$$

donde el último término es identificado como el tensor de energía-momento, el cual lleva a la definición

$$T_{\mu\nu} := -2 \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.38)$$

dando como resultado la ecuación (3.17). Por último, bajo adición del lagrangiano de vacío  $\hat{\mathcal{L}}_{vac} = -\rho_{vac}$ , se encuentra la acción modificada de (3.31)

$$S = \int d^m x \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \hat{\mathcal{L}}_{Mat} \right] \quad (3.39)$$

### 3.3. Formulación Hamiltoniana

Dentro del formalismo lagrangiano, las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser escritas en la forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}. \quad (3.40)$$

Esta ecuación nos muestra que si  $W := \det(\partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) \neq 0$ , entonces es posible conocer la dinámica del sistema en función de las posiciones y velocidades. Sin embargo, si  $W = 0$  la aceleración no está únicamente determinada por las posiciones y velocidades, dando origen a relaciones entre posiciones y velocidades

que se denominan constricciones.

Los sistemas singulares ( $W = 0$ ) son de gran importancia dentro del estudio de la dinámica de la relatividad general, teorías de norma y otras teorías singulares. El estudio de sistemas con constricciones, intenta determinar cómo el formalismo lagrangiano se puede colocar en forma hamiltoniana y como generalizar el formalismo hamiltoniano para que puede aplicarse a sistemas singulares. En otras palabras, se intenta desarrollar un método estándar que permita hamiltonianizar un lagrangiano singular.

En esta sección no se mostrará el análisis para sistemas con constricciones (éste será mostrado en el apéndice (A)), pero se seguirá de cerca el método Hamiltoniano propuesto por Paúl M. Dirac [55], además de versiones más modernas propuestas por Sundermeyer [52] y Teitelboim [56, 57]. Con el fin de aplicarlo a la formulación Hamiltoniana de la relatividad general.

### 3.3.1. Formalismo ADM

EL formalismo ADM [20], nombrado por sus autores Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W. Misner, sugiere que el espacio-tiempo está foliado por un conjunto de hipersuperficies tipo-espacio, con coordenadas en cada sección; esta familia de hipersuperficies cubre todo el espacio-tiempo. Con esta división surgen nuevas variables, la función lapse  $N$  y el vector shift  $N^a$ , las cuales permiten expresar la métrica del espacio-tiempo de manera apropiada a la foliación construida. Las variables dinámicas de esta teoría son el tensor métrico inducido en cada hipersuperficie y sus respectivos momentos conjugados. Así, bajo el uso de estas variables, es posible definir un hamiltoniano, y a partir de este, escribir las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein derivadas de las ecuaciones de Hamilton.

Hasta el momento nos hemos encontrado que la relatividad general está resumida en una acción manifiestamente covariante (denominada acción de Einstein-Hilbert (EH)), de la siguiente forma:

$$S_{EH}[g] := k \int_{\mathcal{M}} \sqrt{|g|} R d^m x. \quad (3.41)$$

Con el fin de realizar un análisis canónico de (3.41), se supone lo siguiente:

- Sea  $\mathcal{M}$  una variedad  $m$ -dimensional lorentziana o riemanniana (con  $m > 2$ ), formada a partir de  $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ , para  $\Sigma$  una variedad  $(m - 1)$ -dimensional (fija) orientable y sin bordes  $\partial\mathcal{M} = 0$ .
- $\mathcal{M}$  puede ser foliada con hojas de tipo espacio (hipersuperficies <sup>1</sup>), esto es, para cada  $t \in \mathbb{R}$  tenemos un embebimiento  $X_t : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$  definido por  $X_t(x) := X(t, x)$ . Aquí,  $x^a$  ( $a, b, c, \dots = 1, 2, 3, \dots, m - 1$ ), son las coordenadas locales de  $\Sigma$ .
- $X : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$  es un difeomorfismo (2.1.3).

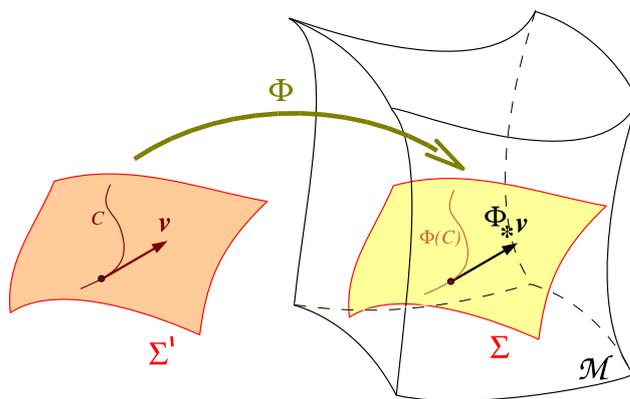


Figura 3.1: Una hipersuperficie  $\Sigma = \Phi(\Sigma')$ , es un embebimiento  $\Phi$  de una variedad  $(m - 1)$ -dimensional  $\Sigma'$  dentro de una variedad  $m$ -dimensional  $\mathcal{M}$ . Tomado de [58].

Una hipersuperficie  $\Sigma$  de  $\mathcal{M}$  es la imagen de una variedad  $(m - 1)$ -dimensional por un embebimiento  $\Phi : \Sigma' \rightarrow \mathcal{M}$ , ver figura 3.1. Es importante notar, que el embebimiento<sup>2</sup>  $\Phi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$  es un mapeo uno a uno, tal que ambos  $\Phi$  y  $\Phi^{-1}$  son continuos, es decir, un homeomorfismo; el carácter uno a uno de  $\Sigma$  impide la intersección consigo misma.

Usamos estas foliaciones con el fin de obtener una descomposición del espacio-tiempo en espacio y tiempo de la acción definida en (3.41). Esto se debe a que no es posible definir velocidades como la variación de la posición respecto del tiempo; una posible solución está en darle privilegio a una coordenada (en este caso el tiempo), llevando al formalismo  $(m - 1) + 1$ .

<sup>1</sup>Una hipersuperficie  $\Sigma = \Sigma_{(n)}$  es un sub-espacio  $(m - 1)$ -dimensional (sub-variedad) de una variedad  $m$ -dimensional  $\mathcal{M}$  (se dice que  $\Sigma$  tiene co-dimensión 1).

<sup>2</sup>La imagen  $\Phi(\Sigma')$  es una subvariedad de  $\mathcal{M}$ . Cabe resaltar que  $\Phi$  es un embebimiento si  $\Phi$  es uno-a-uno (inyectiva) y es una inmersión (un mapeo  $\Phi$  es llamado inmersión de  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  si  $\Phi_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\Phi(p)}\mathcal{N}$  es inyectiva y el rango de  $\Phi_* = \dim \mathcal{M}$ ) [5].

Denotemos las coordenadas de la variedad  $\mathcal{M}$  como  $x^\alpha = X^\alpha(t, y^a)$ . Si consideramos un elemento de línea restringido a  $\Sigma$ , la métrica sobre  $\mathcal{M}$  induce una métrica sobre  $\Sigma$

$$\begin{aligned} ds^2|_\Sigma &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu|_\Sigma, \\ &= \left[ g_{\mu\nu}(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial y^b} \right] dy^a \otimes dy^b, \\ &= q_{ab}(y) dy^a \otimes dy^b, \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde  $q_{ab}(y) := g_{\mu\nu}(x(y)) \frac{\partial X^\mu}{\partial y^a}(y) \frac{\partial X^\nu}{\partial y^b}(y)$  es la métrica inducida. Las curvas  $x_{y_0}^\mu(t) = X^\mu(t, y_0^a)$  conectan puntos sobre hipersuperficies diferentes con los mismos valores de las coordenadas espaciales  $y^a = y_0^a$ ; esto proporciona una noción de evolución temporal de una hipersuperficie a la siguiente.

Para nuestros propósitos, la consecuencia más importante de esta definición es que la imagen sobre  $\mathcal{M}$  del vector tangente  $\partial/\partial y^a$  a  $\Sigma$ , define el campo vectorial

$$\frac{\partial}{\partial y^a} \rightarrow \partial_a := \hat{e}_a = E_a^\mu \partial_\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \partial_\mu, \quad (3.43)$$

la base  $\hat{e}_a$  es linealmente independiente, tangente a la imagen  $\Phi(\Sigma)$ . Aquí,  $E_a^\mu$  es el jacobiano de  $\Phi$  mostrando la  $\mu$ -ésima componente de la coordenada  $x^\mu$  del  $a$ -ésimo vector, el cual es una matriz  $(m-1) \times (m)$  cuyo máximo rango es  $m$ . Los vectores  $\hat{e}_a$  forman una base para el espacio tangente a  $\Sigma$  denotado como  $T_p\Sigma$ , el cual es a su vez un sub-espacio de  $T_p\mathcal{M}$ . Para completar el espacio  $T_p\mathcal{M}$ , se construye un complemento ortogonal a  $T_p\Sigma$ . El nuevo sub-espacio es generado por el vector ortogonal a  $\hat{e}_a$ , denotado como  $n$ . El vector  $n$  es definido como  $n := n^\mu \partial_\mu$ , el cual satisface

$$n(\partial_a) = g_{\mu\nu} E_a^\mu n^\nu = 0. \quad (3.44)$$

Podemos además solicitar que este vector esté normalizado, si la hipersuperficie no es nula

$$n^\mu n_\mu = \sigma = \pm 1. \quad (3.45)$$

Estas condiciones determinan la forma del vector normal unitario  $n$ , y por ende, el conjunto de vectores  $(e_a, n)$  forman la base de  $T_p\mathcal{M}$  para cada punto  $p$  en  $\mathcal{M}$ . Así, un vector  $A$  de  $T_p\mathcal{M}$  es escrito de la forma

$$(A)^\mu = A^a E_a^\mu + A^\perp n^\mu, \quad (3.46)$$

donde  $A^\perp$  es la proyección de  $A$  sobre  $n$ . Con esto en mente, sabemos ya, que una proyección a la hipersuperficie  $\Sigma$  de un vector en  $\mathcal{M}$ , está dado en términos de la base ambiente (la base sobre  $T_p\Sigma$ )  $\left[ V^a = V(\hat{\theta}^a), \text{ ver [22]} \right]$ , siendo  $\hat{\theta}^a$  la base dual

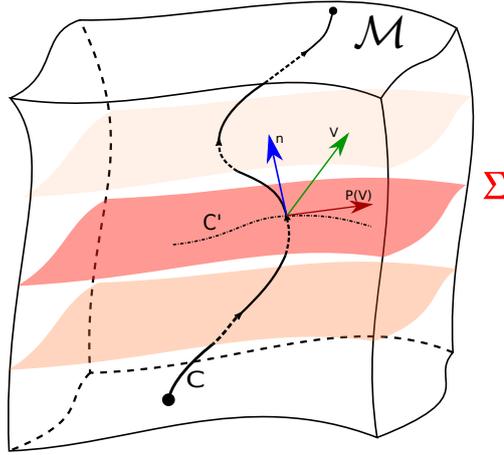


Figura 3.2: Para una curva sobre  $C$  en  $\mathcal{M}$ , el operador de proyección tangencial de un vector  $V$  sobre una hipersuperficie  $\Sigma$  a lo largo de una curva  $C'$ , elimina la componente normal a la hipersuperficie  $\Sigma$ .

a  $\hat{e}_a$ , el cual satisface ortonormalidad respecto a la métrica inducida  $\gamma_{ab}$ .

Existe una relación que expresa esta misma proyección, pero esta vez en términos de  $\hat{e}_\mu$ . Haciendo uso de (3.46)

$$A^a E_a^\mu = (\delta_\nu^\mu - \sigma n^\mu n_\nu) A^\nu, \quad (3.47)$$

se define el operador de proyección tangencial como  $q^\mu{}_\nu := \delta^\mu{}_\nu - \sigma n^\mu n_\nu$ . Este proyector envía un vector de  $\mathcal{M}$  a uno sobre  $\Sigma$  escrito en términos de  $\hat{e}_\mu \in T_p\mathcal{M}$ , ver figura 3.2.

Las hipersuperficies están restringidas, puesto que una manera de interpretar la dinámica de las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein, viene de ver a estas como un problema de Cauchy, restringiendo las hipersuperficies  $\Sigma$  a ser superficies de Cauchy. “Una superficie de Cauchy es una hipersuperficie similar a un espacio  $\Sigma$  en  $\mathcal{M}$ , tal que cada curva causal (es decir, temporal o nula) sin punto final, intersecta  $\Sigma$  una vez y solo una vez” [58]. Cabe resaltar que los espacio-tiempos con curvas temporales cerradas no admiten una superficie de Cauchy. Por lo tanto, un espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, g)$  que admite una superficie de Cauchy  $\Sigma$  se dice que es globalmente hiperbólico.

La estructura de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico es de la forma  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es la superficie de Cauchy. Cualquier espacio-tiempo globalmente hiperbólico  $(\mathcal{M}, g)$  puede ser foliado por una familia de hipersuperficies  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  (ver figura 3.3).

Suponemos que todos los  $\Sigma_t$  son tipo-espacio y además que la foliación cubre  $\mathcal{M}$

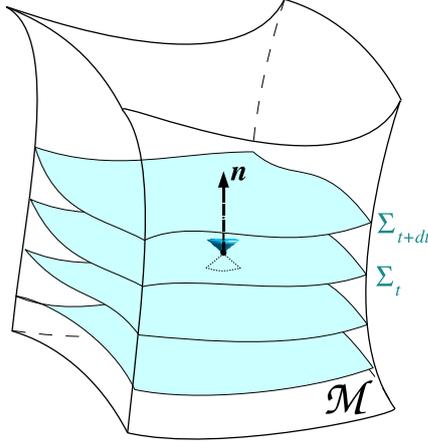


Figura 3.3: Foliación de una variedad  $\mathcal{M}$  por una familia de hipersuperficies tipo-espacio  $\Sigma_t$ ;  $n$  es un vector unitario tipo-tiempo normal a  $\Sigma$ . Tomado de [58].

( $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$ ). La condición de que no se intersequen está reflejada en  $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$ , para  $t \neq t'$ . La métrica inducida sobre  $\Sigma$  es no degenerada y asociada a esta métrica inducida, existe una única conexión  $\nabla^{(q)}$  (la de Levi-Civita) sobre  $\Sigma$ , la cual es torsión cero y satisface compatibilidad métrica  $\nabla^{(q)}q = 0$ . Esta conexión de Levi-Civita permite definir la derivada covariante de tensores sobre  $\Sigma$ , denotada por  $\nabla^{(q)}$  como una derivada intrínseca, de modo que

$$\nabla_a^{(q)}v^b = \partial_a v^b + \Gamma_{ac}^{(q)b}v^c, \quad (3.48)$$

donde

$$\Gamma_{ac}^{(q)b} = \frac{1}{2}q^{bd}(\partial_c q_{ad} + \partial_a q_{cd} - \partial_d q_{ac}). \quad (3.49)$$

El tensor de Riemann asociado a esta conexión representa la llamada curvatura intrínseca de  $(\Sigma, q)$ .

Además de la curvatura intrínseca mencionada anteriormente, se puede considerar otro tipo de “curvatura” con respecto a las hipersuperficies, la cual está relacionada con la forma en la que se realiza el embebimiento dentro del espacio ambiente  $\mathcal{M}$ , es decir, cómo se curva  $\Sigma$  dentro de  $\mathcal{M}$ . Para saber que existe una incrustación en  $\mathcal{M}$  es necesario poder salir de  $\Sigma$ ; este aspecto de la geometría es algo que no puede ser capturado por mediciones intrínsecas en  $\Sigma$  solamente, y por lo tanto se conoce como la geometría extrínseca de  $\Sigma$  [51, 58].

Este aspecto extrínseco de la geometría en general, involucra la definición de curvatura extrínseca de  $\Sigma$  en  $\mathcal{M}$  dada por

$$K_{\mu\nu} := q^\alpha{}_\mu q^\beta{}_\nu \nabla_\alpha n_\beta, \quad (3.50)$$

la cual involucra la derivada covariante espacio-tiempo  $\nabla$ , o de otra manera, bajo la aplicación de la derivada de Lie a lo largo de la normal y la condición de compatibilidad métrica, la curvatura extrínseca obtiene la forma<sup>3</sup>

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}q^\alpha{}_\mu q^\beta{}_\nu \mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}, \quad (3.51)$$

Este tensor presenta simetría en índices  $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$  y además es proyectado sobre  $\Sigma$ , es decir, definido de forma espacial. Si la superficie es parametrizada de la forma  $x^\mu(t, y^a)$ , se puede pensar en el tensor de curvatura extrínseca como

$$K_{ab} = E_a^\alpha E_b^\beta K_{\alpha\beta}, \quad (3.52)$$

el cual mantiene simetría en índices [51]. El operador de proyección y la curvatura extrínseca, son a menudo conocidos como primera y segunda forma fundamental respectivamente [22, 51, 58, 59]. Por otro lado, y en última instancia, definimos la derivada covariante proyectada a lo largo de  $\Sigma$  tomando la derivada covariante y luego proyectándola en  $\Sigma$ , denotando esta derivada como  $\bar{\nabla}$ ; en componentes

$$\bar{\nabla}_\mu v_\nu = q^\alpha{}_\mu q^\beta{}_\nu \nabla_\alpha v_\beta, \quad (3.53)$$

donde  $v^\nu$  son las componentes de un vector que pertenece a  $T_p\mathcal{M}$  tangente a  $\Sigma$ , el cual satisface  $v^\mu = q^\mu{}_\nu V^\nu = V^\mu$ , además  $V^\mu = E_a^\mu v^a$ . Estas dos nociones de diferenciación de campos tensoriales sobre  $\Sigma$  [51], están relacionadas entre si, de la forma

$$E_a^\alpha E_b^\beta \bar{\nabla}_\alpha v_\beta = \nabla_a^{(q)} v_b = \bar{\nabla}_a v_b. \quad (3.54)$$

Todos estos objetos nos llevan a explorar la descomposición ADM métrica. Consideremos la función coordenada  $x^\mu = X^\mu(t, y^a)$ , el vector que conecta los puntos de dos hipersuperficies es denotado por  $\partial_t$ , escrito en base de  $T_p\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \partial_\mu, \\ &= t^\mu \partial_\mu, \end{aligned} \quad (3.55)$$

cuyas componentes están definidas como  $t^\mu := \partial X^\mu / \partial t$ ; en general  $t^\mu$  puede descomponerse en su parte normal y tangencial de la forma

$$\begin{aligned} t^\mu &= E_a^\mu t^a + \sigma(t^\nu n_\nu) n^\mu \\ &= N^a E_a^\mu + N n^\mu. \end{aligned} \quad (3.56)$$

---

<sup>3</sup>la derivada de lie aplicada a la métrica a lo largo de la normal  $n$ , está dada por:  $\mathcal{L}_n g_{\mu\nu} = n^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \nabla_\mu n^\rho + g_{\mu\rho} \nabla_\nu n^\rho$

Por un lado, se tiene que  $N^a := q^{ab}g_{\nu\beta}E_b^\beta t^\nu$  es denominado el vector shift, un vector de desplazamiento que relaciona el movimiento de un punto al pasar a la siguiente hipersuperficie, mientras que  $N := \sigma(t^\nu n_\nu)$  es la función lapse, la cual muestra la separación entre dos hipersuperficies, ver figura 3.4. Estas funciones son esenciales para describir la fusión de las hipersuperficies para formar la foliación; tales variables junto con la métrica inducida  $q_{ab}$  son conocidas como las variables ADM.

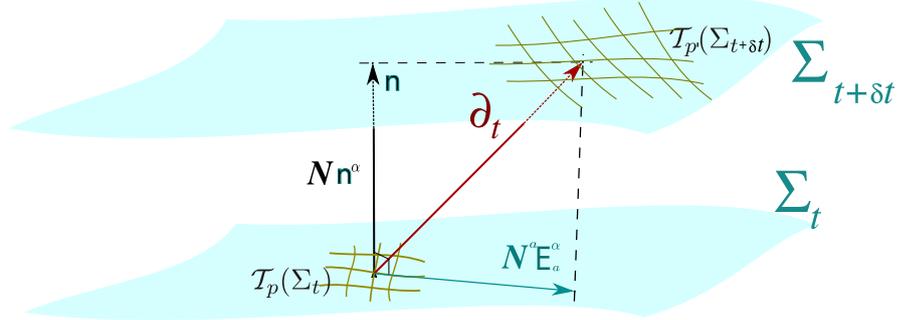


Figura 3.4: Las proyecciones del vector tangente  $\partial_t$  sobre la hipersuperficie  $\Sigma$  y sobre la normal  $n$ , son identificadas con las funciones  $N^a E_a^\alpha$  y  $Nn^\alpha$ , el vector shift y la función lapse, respectivamente.

Con estos preliminares, podemos ahora centrar nuestra atención en la acción gravitacional, pero con las variables ADM ( $q_{ab}$ ,  $N$ ,  $N^a$ ). Primero, notemos que el tensor de curvatura extrínseca satisface

- El escalar de curvatura extrínseca es independiente de la base usada:  $K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = q^{ab} K_{ab}$ .
- La contracción de índices en las dos bases es equivalente:  $K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = K^{ab} K_{ab}$ .

Además, la base de 1-formas puede escribirse como

$$dx^\alpha = (Nn^\alpha + N^a E_a^\alpha)dt + E_a^\alpha dy^a. \quad (3.57)$$

La métrica del espacio-tiempo toma entonces la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \\ &= (\sigma N^2 + N_a N^a) dt \otimes dt + N_a (dt \otimes dy^a + dy^a \otimes dt) + q_{ab} dy^a \otimes dy^b, \end{aligned} \quad (3.58)$$

la cual establece la descomposición ADM de la métrica. Ahora, es necesario analizar el comportamiento de los tensores y operadores involucrados bajo la descomposición  $(m-1)+1$ . Consideremos en primera instancia el operador de proyección  $P^\alpha_\beta$ , dado que:

- Es ortogonal a  $n^\alpha$

$$\begin{aligned} q_{\alpha\beta}n^\alpha &= g_{\alpha\beta}n^\alpha - \sigma n_\alpha n_\beta n^\alpha, \\ &= n_\beta - \sigma^2 n_\beta, \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

- El producto escalar entre la normal  $n^\alpha$  y vectores tangentes ( $V^\alpha$ ) a  $\Sigma$  respecto a  $q_{\alpha\beta}$ , es idéntico a  $g_{\alpha\beta}$

$$V^\alpha q^\beta{}_\alpha n_\beta \equiv V^\alpha g_{\alpha\beta} n^\beta = 0. \tag{3.60}$$

Así, para un vector tangente  $V^\alpha$  a  $\Sigma$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} q_{\alpha\beta}V^\beta &= g_{\alpha\beta}V^\beta - \sigma n_\alpha n_\beta V^\beta, \\ &= g_{\alpha\beta}V^\beta, \end{aligned} \tag{3.61}$$

esto implica que  $q_{\alpha\beta}$  es la métrica inducida sobre  $\Sigma$  por  $g_{\alpha\beta}$ .

Con esto, se obtiene que:

$$\begin{aligned} q_{ab} &= g_{\alpha\beta} E_a^\alpha E_b^\beta, \\ &= (q_{\alpha\beta} + \sigma n_\alpha n_\beta) E_a^\alpha E_b^\beta, \\ &= q_{\alpha\beta} E_a^\alpha E_b^\beta. \end{aligned} \tag{3.62}$$

La diferencia entre  $q_{ab}$  y  $q_{\alpha\beta}$  radica en que  $q_{ab}$  no es degenerada, mientras que  $q_{\alpha\beta}$  sí lo es. Cabe resaltar que (3.62) tiene una relación dual, dada por

$$q^{\alpha\beta} = q^{ab} E_a^\alpha E_b^\beta. \tag{3.63}$$

Con todo esto, podemos obtener el tensor de curvatura de Riemann sobre  $\Sigma$  y su relación con el tensor de curvatura extrínseca. Sea  $V^\alpha$  tangente a  $\Sigma$ , luego el tensor de Riemann estará definido como:

$$[\bar{\nabla}_\alpha, \bar{\nabla}_\beta] V^\gamma := \bar{R}^\gamma{}_{\delta\alpha\beta} V^\delta. \tag{3.64}$$

Por otro lado, se tiene que

$$[\bar{\nabla}_\alpha, \bar{\nabla}_\beta] V^\gamma = \sigma (K_\alpha{}^\gamma K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\gamma K_{\alpha\delta}) V^\delta + q^\mu{}_\alpha q^\nu{}_\beta q^{\sigma\gamma} q^\rho{}_\delta R_{\sigma\rho\mu\nu} V^\delta. \tag{3.65}$$

Por lo tanto, se obtiene la relación

$$\bar{R}_{\gamma\delta\alpha\beta} = q^\mu{}_\alpha q^\nu{}_\beta q^\sigma{}_\gamma q^\rho{}_\delta R_{\sigma\rho\mu\nu} + \sigma (K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} - K_{\beta\gamma} K_{\alpha\delta}), \tag{3.66}$$

luego, el escalar de Ricci, pasa a ser de la forma:

$$R = \bar{R} + \sigma (K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^2) + 2\sigma n^\gamma n^\delta R_{\delta\gamma}. \quad (3.67)$$

Existe la posibilidad de obtener una expresión que no involucre al tensor de Ricci, usando la siguiente relación

$$\nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta) = n^\alpha n^\beta R_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^2, \quad (3.68)$$

de esta manera, se obtiene que

$$R = \bar{R} + \sigma (K^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}) + 2\sigma \nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta), \quad (3.69)$$

por lo que la acción (3.41), en estos nuevos términos es de la forma

$$\begin{aligned} S_{ADM} [q_{ab}, N, N^a] &= k \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} dt d^{m-1} x \sqrt{q} N [(\bar{R} + \sigma(K^2 - K^{ab}K_{ab})) \\ &\quad + 2\sigma \nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta)], \\ &= k \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} dt d^{m-1} x \sqrt{q} N (\bar{R} + \sigma(K^2 - K^{ab}K_{ab})). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Esta expresión hace uso de la curvatura intrínseca, medida en la RG por el tensor de curvatura de Riemann  $R^a{}_{bcd}$ . A su vez, también está descrita en función de  $q_{ab}$ ,  $N$  y  $N^a$ , las cuales dan origen a las llamadas ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci, que surgen de realizar proyecciones sobre la hipersuperficie (ver [51, 58, 60]). Además, cabe resaltar que la expresión (3.70) se obtiene despreciando el término  $2\sigma \nabla_\alpha (N^\beta \nabla_\beta N^\alpha - N^\alpha \nabla_\beta N^\beta)$  (este término es precisamente el término de Gibbons-Hawking-York, ver [51]), debido a las condiciones sobre la variedad  $\mathcal{M}$ . La acción (3.70) es denominada la acción ADM [61], donde  $\bar{R}$  es el escalar de curvatura sobre  $\Sigma$  [51, 52].

Las ecuaciones de campo surgen de variar la acción respecto a las variables independientes involucradas. Sin embargo, cabe resaltar que las variaciones respecto a lapse y shift son en realidad constricciones. Así, algunas de las ecuaciones de Einstein son en realidad constricciones [21].

Para pasar a la formulación Hamiltoniana de la manera estándar es necesario definir los momentos canónicos involucrados (los momentos canónicos definidos aquí son densidades tensoriales de peso 1, además se considera de forma particular  $\sigma = -1$ )

$$\pi^{ab} := \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial (\partial_0 q_{ab})} = \sqrt{q} (K^{ab} - q^{ab}K), \quad (3.71)$$

$$p_N := \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial(\partial_0 N)} = 0, \quad (3.72)$$

$$p_a := \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial(\partial_0 N^a)} = 0. \quad (3.73)$$

Donde  $\mathcal{L}_{ADM} = k\sqrt{q}N(\bar{R} + K^{ab}K_{ab} - K^2)$ . Las variables  $N$  y  $N^a$  dentro de la acción no contienen una dependencia absoluta de sus derivadas en el tiempo, ya que la curvatura escalar intrínseca  $\bar{R}$  es completamente independiente de estas variables mientras que la curvatura extrínseca involucra solo  $N$  y la derivada covariante espacial de  $N^a$ , por lo tanto, ellas actúan como multiplicadores arbitrarios. Con esto tenemos que la densidad hamiltoniana es escrita como

$$\mathcal{H}_{ADM} = \pi^{ab}\dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_{ADM}, \quad (3.74)$$

la evolución temporal de la métrica inducida  $\dot{q}_{ab}$ , esta relacionada con la curvatura extrínseca y la derivada de Lie a lo largo de la función lapse, denotada como

$$\dot{q}_{ab} = 2NK_{ab} + \mathcal{L}_N q_{ab}, \quad (3.75)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ADM} &= 2N\pi^{ab}K_{ab} + \pi^{ab}\mathcal{L}_N q_{ab} - \mathcal{L}_{ADM}, \\ &= N\mathcal{H} + N^a\mathcal{H}_a, \end{aligned} \quad (3.76)$$

para  $\mathcal{H} = (\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2)/\sqrt{q} - \sqrt{q}\bar{R}$  y bajo integración por partes  $\mathcal{H}^b = -2(\bar{\nabla}_a\pi^{ab})$ , ver [51]. Por ende el hamiltoniano total se manifiesta de la forma

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma} d^{m-1}x (N\mathcal{H} + N^a\mathcal{H}_a + u^\mu\phi_\mu), \quad (3.77)$$

siendo

$$\phi_0 := p_N, \quad \phi_a := p_a. \quad (3.78)$$

Por condición de consistencia [55], es decir, que (3.78) se preserven bajo variación temporal, las constricciones primarias de la acción ADM muestran que existen constricciones secundarias dadas por

$$\mathcal{X}_0 := \mathcal{H} = 0 \quad (3.79)$$

y

$$\mathcal{X}_a := \mathcal{H}_a = 0, \quad (3.80)$$

Estas constricciones nuevamente bajo condición de consistencia no dan lugar a más constricciones dentro de la teoría, es por ello, que el hamiltoniano extendido (una combinación lineal del hamiltoniano total con las constricciones involucradas) es escrito como

$$(H_E)_{ADM} = H_{ADM}. \quad (3.81)$$

El desarrollo mostrado en [21], indica que el conjunto de constricciones del hamiltoniano ADM, contiene  $2m$  constricciones de primera clase independientes. Por otro lado, el espacio de fase involucra  $2 \times m(m+1)/2 + 2m$ , y por lo tanto, la cantidad de grados de libertad (DOF) físicos (ver apéndice A) del sistema son

$$\begin{aligned} DOF &= \frac{1}{2} \left[ 2 \left( \frac{m(m+1)}{2} + m \right) - 2(2m) \right], \\ &= \frac{m(m-3)}{2}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Este resultado nos muestra que, en el caso 4-dimensional, se encuentran dos grados de libertad por punto del espacio, que es la cantidad de DOF físicos locales para la relatividad general en el vacío.

Por otro lado, bajo el uso de las bases no coordenadas dentro de del formalismo ADM, el marco pasa a ser la variable dinámica de la teoría. Hasta el momento no hemos restringido al análisis de las ecuaciones de campo para gravedad a una dimensión baja o alta, debido a la forma general en la que este formalismo se manifiesta. Sin embargo, en la literatura es común ver el análisis en 4 dimensiones, un ejemplo de ello es mostrado en la Ref. [31]. En ella, se muestra un análisis canónico de la acción de Einstein-Hilbert en  $(3+1)$ -dimensiones, tomando como punto de partida el lagrangiano de Einstein-Hilbert escrito en términos del marco ortonormal

$$\mathcal{L}_{EH} = e (R(e_\alpha^I) - 2\Lambda), \quad (3.83)$$

donde  $g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}$  para  $\eta_{IJ}$  la métrica de la variedad Lorentziana dotada con el grupo interno  $SO(1,3)$ , además  $e := \det(e_\mu^I)$ . El marco  $e_I$  otorga una nueva derivada covariante denotada como  $\mathcal{D}_\mu$ , la cual es covariante bajo transformación general de coordenadas y transformaciones locales de Lorentz sobre el espacio plano indexado, además de la derivada covariante  $\nabla_\mu$  que solo es covariante bajo transformaciones generales de coordenadas.  $\mathcal{D}_\mu$  es comúnmente mencionada como un objeto que actúa sobre ambos índices, mientras que  $\nabla_\mu$  actúa sobre los índices espacio-tiempo.

$$\mathcal{D}_\mu \Pi^{\alpha I} = \partial_\mu \Pi^{\alpha I} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Pi^{\nu I} + \omega_\mu^I{}_J \Pi^{\alpha J}, \quad (3.84)$$

$$\nabla_\mu \Pi^{\alpha I} = \partial_\mu \Pi^{\alpha I} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Pi^{\nu I}, \quad (3.85)$$

donde  $\omega_{\mu}^I{}_J$  es conocida como la conexión espín. Bajo el requerimiento de compatibilidad métrica,  $\nabla_{\mu}g_{\nu\rho} = \mathcal{D}_{\mu}g_{\nu\rho} = 0$ , y torsión nula  $\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} = 0$ , es posible determinar a los símbolos de Christoffel y la de espín como función de las tétradas.

De esta manera, la tétrada es ahora la variable sobre la que se realiza la descomposición (3 + 1), obteniendo las siguientes relaciones

$$e_0^I = Nn^I + N^a e_a^I, \quad (3.86)$$

$$n_I e_a^I = 0, \quad (3.87)$$

$$n^I n_I = -1. \quad (3.88)$$

Esta descomposición lleva al Hamiltoniano ADM (3.77), para

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2^{(3)}e} \left( \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^i{}_i)^2 - 2^{(3)}e^2 {}^{(3)}R + 4^{(3)}e^2 \Lambda \right) \quad (3.89)$$

$$\mathcal{H}_a = -e_a^{i(3)} \mathcal{D}_b \pi^b{}_i, \quad (3.90)$$

siendo  $\pi^{ij} := \pi^{ai} e_a^j$  y  $\pi^{ai} = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{e}_{ai}$  y  $\mathcal{L}$  el lagrangiano (3 + 1)-descompuesto despreciando los términos de frontera

$$\mathcal{L} = N^{(3)}e \left( -\frac{1}{2} \Omega^{0(kl)} \Omega_{0kl} + \Omega^0{}_k{}^k \Omega_{0j}{}^j + {}^{(3)}R - 2\Lambda \right), \quad (3.91)$$

con  $\Omega^{KIJ} := e^{\alpha K} e^{\beta I} \partial_{[\alpha} e_{\beta]}^J$ . Los demás términos son definidos como:  ${}^{(3)}e := \det(e_a^i)$ ,  ${}^{(3)}\mathcal{D}_a$  la derivada covariante sobre  $\Sigma$  y  ${}^{(3)}R$  el escalar de curvatura de Ricci sobre  $\Sigma$ . Esta formulación no es covariante de Lorentz debido al rompimiento parcial de la invarianza de Lorentz manifiesta con la elección de Gauge  $n_I = (1, 0, 0, 0)$ . La única diferencia en el nivel hamiltoniano es que la invarianza de Lorentz se reduce a la invarianza  $SO(3)$ .

# Capítulo 4

## Formalismo de primer orden

Un hamiltoniano consistente y completo está sujeto al análisis de constricciones de la teoría, mostrando el comportamiento de las constricciones bajo evolución temporal, denotada como condición de consistencia y la identificación de la cantidad de constricciones de primera y segunda clase involucrados. Las de primera clase conducen a los generadores de las simetrías de norma de la teoría, mientras que las de segunda clase eliminan los grados de libertad extra involucrados y pueden ser resueltas de forma explícita o introduciendo el paréntesis de Dirac [55]. Hasta ahora, el hamiltoniano involucrado por la formulación ADM es una combinación lineal de constricciones de primera clase [21, 31]. Sin embargo con el traslado de la conexión como nueva variable dinámica, el hamiltoniano resultante consta de constricciones de segunda clase [62].

Luego de la formulación lagrangiana de la relatividad general con la métrica como variable independiente, surgió una propuesta hecha por Palatini (1919) [63], el cual postula a la conexión como variable independiente dentro de la acción de EH, conociéndose luego como la acción de Einstein-Palatini. Este método permite calcular las ecuaciones de campo para una conexión afín métrica más general, en lugar de la conexión Levi-Civita. Así, el formalismo de Einstein-Palatini nos brinda una herramienta más amplia para las teorías de la gravitación dentro del enfoque geométrico de Riemann-Cartan. En esta sección, vamos a presentar la formulación de la acción de Einstein-Palatini, la derivación de las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein y su formulación hamiltoniana, este último a partir del enfoque mostrado en [1].

## 4.1. Lagrangiano de Hilbert-Palatini

Al considerar la conexión afín y la métrica como variables independientes en el principio de acción de EH, la acción pasa a ser una formulación de primer orden ya que solo primeras derivadas de las variables son involucradas, y por lo tanto, no complican demasiado las ecuaciones de Euler-Lagrange. Dicha acción fue considerada por Attilio Palatini y fue denominada la acción de Hilbert-Palatini (HP).

Hasta el momento la relatividad general propuesta por A. Einstein, hace uso de la compatibilidad métrica y torsión cero, las cuales restringen la conexión a la de Levi-Civita. Sin embargo, es posible considerar ahora la acción de EH con la conexión afín arbitraria ( $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ )

$$S[g_{\mu\nu}, \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^m x \sqrt{|g|} R(\tilde{\Gamma}), \quad (4.1)$$

para  $\mathcal{M}$ , una variedad  $m$ -dimensional  $\mathcal{M}$  y sin bordes  $\partial\mathcal{M} = 0$ . El lagrangiano involucrado [ $\mathcal{L}_{HP} := \sqrt{|g|}R(\tilde{\Gamma})$ ] pasa a ser una función que depende de dos variables, la métrica y la conexión, por ende, se obtienen nuevas ecuaciones propias como resultado de la variación respecto a cada una de las variables. Por un lado, la variación respecto a la métrica da como resultado

$$\delta S[g_{\mu\nu}, \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^m x \sqrt{|g|} \left( R_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) - \frac{1}{2} R(\tilde{\Gamma}) g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

cuya condición de estacionariedad lleva a las ecuaciones de movimiento

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S[g_{\mu\nu}, \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) - \frac{1}{2} R(\tilde{\Gamma}) g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.3)$$

Aquí, sin embargo, no se obtienen las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein en el vacío, porque la conexión independiente  $\tilde{\Gamma}$  no es la conexión de Levi-Civita. De forma análoga, bajo variación respecto a la conexión e imponiendo las condiciones de estacionariedad, se obtiene

$$\delta_{\Gamma} S [g_{\mu\nu}, \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^m x \sqrt{|g|} \delta R(\tilde{\Gamma}) = 0. \quad (4.4)$$

Para una geometría arbitraria, la conexión  $\tilde{\Gamma}$  está definida como

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + C^\lambda_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

con  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  la conexión de Levi-Civita y  $C^\lambda_{\mu\nu}$  un tensor de tipo (1, 2) [51]. La derivada covariante asociada a  $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$  es denotada como  $\tilde{\nabla}_\mu$ ; aplicada a un campo escalar  $\phi$ , se obtiene

$$\left[ \tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu \right] \phi = T^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi, \quad (4.6)$$

el tensor de torsión. Por otro lado, dado que la conexión no es métrica compatible debido a su forma general, se define el tensor de no metricidad como:

$$Q_{\nu\lambda\mu} := -\tilde{\nabla}_\mu g_{\nu\lambda}, \quad (4.7)$$

Cabe resaltar, que es posible reescribir estas dos cantidades, el tensor de torsión y el tensor de no-metricidad, en términos de  $C^\lambda_{\mu\nu}$ , de la siguiente forma:

$$T_{\lambda\mu\nu} = 2C_{\lambda[\mu\nu]}, \quad (4.8)$$

$$Q_{\nu\lambda\mu} = 2C_{(\nu\lambda)\mu}. \quad (4.9)$$

Esta forma de escribir la conexión es una estrategia para resolver las ecuaciones resultantes. Resulta que bajo la elección de torsión cero la conexión es forzada a ser métrica compatible, determinando de forma única la conexión es la de Levi-Civita. Intercambiando la elección por compatibilidad métrica, luego la conexión es forzada a ser libre de torsión y así la conexión resultante es determinada nuevamente de forma única por la conexión de Levi-Civita [51].

$$T_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \quad \text{y} \quad \delta_{\tilde{\Gamma}} S[g, \tilde{\Gamma}] = 0 \Rightarrow Q_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \Rightarrow \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

$$Q_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \quad \text{y} \quad \delta_{\tilde{\Gamma}} S[g, \tilde{\Gamma}] = 0 \Rightarrow T_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \Rightarrow \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Luego la ecuación (4.3) pasa a ser la ecuación de campo para gravedad de Einstein.

Por otro lado, introduciendo la noción de tétradas (conjunto de vectores que comprende una base ortonormal) la acción de HP contiene como variables independientes al marco ortonormal y a la conexión de Lorentz, las cuales son esenciales en la formulación de una acción fermiónica generalmente covariante [33].

#### 4.1.1. Formulación desde las bases ortonormales

Consideremos ahora una descripción alternativa de la acción (4.1), expresando esta en términos del vielbein y de una conexión arbitraria; descritos en la sección 2.6. De esta manera, denotando el grupo interno por  $SO(\sigma)$  en representación general de  $SO(n)$  (o  $SO(n-1, 1)$ ) siendo  $\sigma = \pm 1$ , el cual representa de forma general una variedad euclidiana (+1) y lorentziana (-1) respectivamente; con esto, la signatura métrica es definida como  $(\sigma, +1, \dots, +1)$ . Así, la acción HP sobre una variedad

$n$ -dimensional  $\mathcal{M}$  sin bordes  $\partial\mathcal{M} = 0$ , en términos de las nuevas variables es de la forma

$$S[e, w] := k \int_{\mathcal{M}} \star(e_I \wedge e_J) \wedge R^{IJ}[w], \quad (4.12)$$

donde  $R^{IJ}[w] := dw^I{}_J + w^I{}_K \wedge w^K{}_J$ , es la curvatura 2-forma  $\mathfrak{so}(\sigma)$ -valuada ( $\mathfrak{so}(\sigma)$  representa el álgebra de Lie del grupo  $SO(\sigma)$ ) en términos de la conexión  $w^I{}_J$  1-forma  $\mathfrak{so}(\sigma)$ -valuada. La acción HP devuelve la acción EH (si la conexión es Levi-Civita) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S &= k \int_{\mathcal{M}} \star(e_I \wedge e_J) \wedge R^{IJ}, \\ &= \frac{k}{2!} (-1)^{2(n-2)} \int_{\mathcal{M}} R_{KL}{}^{IJ} e^K \wedge e^L \wedge \star(e_I \wedge e_J) \\ &= \frac{k}{2!} \int_{\mathcal{M}} R_{KL}{}^{IJ} e^K \wedge e^L \wedge \left( \frac{1}{(n-2)!} \epsilon_{IJK_3 \dots K_n} e^{K_3} \wedge \dots \wedge e^{K_n} \right) \\ &= \frac{k}{2!(n-2)!} \int_{\mathcal{M}} R_{KL}{}^{IJ} \epsilon_{IJK_3 \dots K_n} e^K \wedge e^L \wedge e^{K_3} \wedge \dots \wedge e^{K_n} \\ &= \frac{\sigma k}{2!(n-2)!} \int_{\mathcal{M}} R_{K_1 K_2}{}^{IJ} \epsilon_{IJK_3 \dots K_n} \epsilon^{K_1 \dots K_n} \star 1 \\ &= \frac{\sigma k}{2!(n-2)!} \int_{\mathcal{M}} R_{K_1 K_2}{}^{IJ} \sigma 2!(n-2)! \delta_I^{[K_1} \delta_J^{K_2]} \star 1 \\ &= k \int_{\mathcal{M}} R \star 1 \implies \mathbf{Acción EH}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

para  $R = R_{IJ}{}^{IJ}$ . Recordar que

$$\star 1 = \sqrt{|g|} d^1 x \wedge d^2 x \wedge \dots \wedge d^n x = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n. \quad (4.14)$$

Bajo variación funcional respecto a cada una de las variables independientes de la acción (4.12), se tiene que:

$$\delta S := \delta_e S + \delta_w S. \quad (4.15)$$

$$\delta_e S = \frac{d}{d\varepsilon} [S[e_I + \varepsilon \delta e_I, w^{IJ}]]|_{\varepsilon=0}. \quad (4.16)$$

$$\delta_w S = \frac{d}{d\varepsilon} [S[e_I, w^{IJ} + \varepsilon \delta w^{IJ}]]|_{\varepsilon=0}. \quad (4.17)$$

Así, la variación respecto a la conexión  $w^I{}_J$ ,  $\delta_w S$

$$\begin{aligned}
\delta_w S &= \frac{d}{d\varepsilon} [S[e_I, w^{IJ} + \varepsilon \delta w^{IJ}]]|_{\varepsilon=0}, \\
&= k \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\mathcal{M}} \star(e_I \wedge e_J) \wedge [d(w^{IJ} + \varepsilon \delta w^{IJ}) \\
&\quad + (w^I{}_A + \varepsilon \delta w^I{}_A) \wedge (w^{AJ} + \varepsilon \delta w^{AJ})] |_{\varepsilon=0} \\
&= k \int_{\mathcal{M}} \star(e_I \wedge e_J) \wedge D(\delta w^{IJ}), \tag{4.18}
\end{aligned}$$

para  $D$  la derivada covariante exterior usual<sup>1</sup>, la cual actúa sobre  $n$ -formas  $\mathfrak{so}(\sigma)$ -valuadas. El término  $\star(e_I \wedge e_J) \wedge \delta w^{IJ}$  forma un escalar bajo el grupo  $\mathfrak{so}(\sigma)$  (dado que un escalar de  $\mathfrak{so}(\sigma)$  es una expresión formada a partir de elementos de la teoría, que se evalúa como un escalar, invariante bajo cualquier transformación de  $\mathfrak{so}(\sigma)$ ), por ende, es posible hacer uso de la regla de Leibniz para formas

$$\begin{aligned}
D[\star(e_I \wedge e_J) \wedge \delta w^{IJ}] &= D[\star(e_I \wedge e_J)] \wedge \delta w^{IJ} + (-1)^{n-2} \star(e_I \wedge e_J) \wedge D(\delta w^{IJ}), \\
&= d[\star(e_I \wedge e_J) \wedge \delta w^{IJ}]. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Luego el término involucrado en (4.18), pasa a ser

$$\begin{aligned}
\delta_w S &= k \int_{\mathcal{M}} (-1)^{n-2} d[\star(e_I \wedge e_J) \wedge \delta w^{IJ}] + (-1)^{n-1} D[\star(e_I \wedge e_J)] \wedge \delta w^{IJ}, \\
&= k \int_{\mathcal{M}} (-1)^{n-1} D[\star(e_I \wedge e_J)] \wedge \delta w^{IJ}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

esta expresión, usa el hecho de que los términos de frontera (por el teorema de Stokes) se desprecian, debido a que no hay frontera. De forma similar se obtiene

---

<sup>1</sup> $D(\delta w^{IJ}) = d(\delta w^{IJ}) + w^I{}_K \wedge \delta w^{KJ} + w^J{}_K \wedge \delta w^{IK}$

que la variación (4.16) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\delta_e S &= \frac{d}{d\varepsilon} [S[e_I + \varepsilon \delta e_I, w^{IJ}]]|_{\varepsilon=0}, \\
&= k \int_{\mathcal{M}} [\delta_e \star (e_I \wedge e_J)] \wedge R^{IJ}|_{\varepsilon=0} \\
&= k \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{(n-2)!} \epsilon_{IJK_3 \dots K_n} [(e^{K_3} + \varepsilon \delta e^{K_3}) \wedge \dots \wedge (e^{K_n} + \varepsilon \delta e^{K_n})] \wedge R^{IJ}|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{k}{(n-2)!} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJK_3 \dots K_{n-i} \dots K_{n-1} K_n} [e^{K_3} \wedge \dots \wedge e^{K_{n-i}} \wedge \dots \wedge e^{K_{n-1}} \wedge \delta e^{K_n} \\
&\quad + e^{K_3} \wedge \dots \wedge e^{K_{n-i}} \wedge \dots \wedge \delta e^{K_{n-1}} \wedge e^{K_n} \\
&\quad + \dots + e^{K_3} \wedge \dots \wedge \delta e^{K_{n-i}} \wedge \dots \wedge e^{K_{n-1}} \wedge e^{K_n} \\
&= \frac{k(n-2)}{(n-2)!} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJK_3 \dots K_{n-i} \dots K_{n-1} K_n} \left[ \frac{(-1)^{3(n-3)+1}}{3!} e^{K_3 \dots K_{n-i} \dots K_{n-1} L_1 L_2 L_3} \times \right. \\
&\quad \times \left. \eta_{L_1 m_1} \eta_{L_2 m_2} \eta_{L_3 m_3} \star (e^{m_1} \wedge e^{m_2} \wedge e^{m_3}) \right] \wedge \delta e^{K_n} \wedge R^{IJ} \\
&= (-1)^{n-1} k \int_{\mathcal{M}} \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{IJ} \wedge \delta e^K. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Con esto se obtiene que la variación de la acción (4.12) deja como resultado:

$$\begin{aligned}
\delta S &= (-1)^{n-1} k \int_{\mathcal{M}} \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{IJ} \wedge \delta e^K \\
&\quad + k \int_{\mathcal{M}} (-1)^{n-1} D[\star (e_I \wedge e_J)] \wedge \delta w^{IJ} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

El requisito de estacionariedad es, por lo tanto, equivalente a (primero con respecto a la conexión):

$$\delta_w S = 0 \Leftrightarrow (-1)^{n-1} D \star (e_I \wedge e_J) = 0. \tag{4.23}$$

Esta ecuación muestra que:

$$\begin{aligned}
0 &= (-1)^{n-1} D \star (e_I \wedge e_J), \\
&= (-1)^{n-1} (T^K_{JK} \eta_{DI} + T^K_{IJ} \eta_{DK} + T^K_{KI} \eta_{DJ}) \star e^D, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

para  $T^K = de^K + w^K_L \wedge e^L$ <sup>2</sup>. Dado que  $\star e^D$  es una base del espacio  $\Omega_P^{n-1}(\mathcal{M})$ , se tiene que:

$$0 = T^K_{JK} \eta_{DI} + T^K_{IJ} \eta_{DK} + T^K_{K_3 I} \eta_{DJ}. \tag{4.25}$$

---

<sup>2</sup>La primera ecuación de estructura de Cartan con  $e^I$  una base no-coordenada (marco) y  $w^I_J$  la conexión 1-forma  $\mathfrak{so}(\sigma)$ -valuada.

Si multiplicamos a (4.25) por  $\eta^{JD}$  obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{JD} T^K_{JK} \eta_{DI} + \eta^{JD} T^K_{IJ} \eta_{DK} + \eta^{JD} T^K_{KI} \eta_{DJ}, \\ &= (2 - n) T^K_{IK}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

La traza de las componentes del tensor de torsión es cero para  $n$  diferente de dos ( $n \neq 2$ ), por lo tanto, introduciendo el resultado obtenido en (4.26) dentro de (4.25), se encuentra que:

$$\begin{aligned} 0 &= T^K_{JK} \eta_{DI} + T^K_{IJ} \eta_{DK} + T^K_{KI} \eta_{DJ}, \\ 0 &= T_{DIJ}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Esto implica que cada una de las componentes del tensor de torsión son cero. De forma análoga, realizando la variación respecto al marco se tiene

$$\delta_e S = 0 \Leftrightarrow (-1)^{n-1} \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{IJ} = 0, \quad (4.28)$$

que implica

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{n-1} \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{IJ}, \\ &= (-1)^{n-2} \left( R_{DK} - \frac{1}{2} R \eta_{DK} \right) \star e^D, \end{aligned} \quad (4.29)$$

recordando que  $\star e^D$  es una base del espacio  $\Omega_P^{n-1}(\mathcal{M})$  y  $(-1)^{n-2} \neq 0$ , se obtiene que:

$$R_{DK} - \frac{1}{2} R \eta_{DK} = 0, \quad (4.30)$$

son las ecuaciones de campo de Einstein en la base ortonormal (dado que la conexión involucrada es la de Levi-Civita, por ende, (4.30) pasa a ser la ecuación de campo de Einstein para gravedad en el vacío), con  $R_{DK} = R^{IJ}_{KJ} \eta_{DI}$  denotando las componentes del tensor de Ricci y  $R = R^{IJ}_{IJ}$  el escalar de curvatura. Realizando un cambio a la base coordenada, la ecuación (4.30) toma la forma familiar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.31)$$

## 4.2. Formulación hamiltoniana de la acción de Hilbert-Palatini (HP)

Las ecuaciones de movimiento obtenidas del lagrangiano de HP reducen la dificultad en los cálculos en comparación con el lagrangiano de EH, aunque a la

hora de hacer un análisis canónico del lagrangiano HP, la dificultad se incrementa. Enfoques desarrollados en [31, 41, 62, 64], muestran la alta no trivialidad en la solución de las constricciones de segunda clase involucradas. Cabe preguntarse entonces, si existe un análisis canónico que solo involucre constricciones de primera clase para el Lagrangiano de HP. La respuesta es afirmativa. El tratamiento establecido en [1, 65, 66] muestra que las constricciones de segunda clase pueden omitirse, siguiendo un camino alternativo dentro del análisis canónico. De esta manera, siguiendo de cerca el enfoque mostrado en [1], se desarrolla el análisis canónico de la acción de Palatini  $n$ -dimensional en este capítulo.

Consideremos una variedad  $n$ -dimensional lorentziana o riemanniana  $\mathcal{M}$  (con  $n > 2$ ), para  $\mathcal{M}$  difeomorfa a  $\mathbb{R} \times \Sigma$ .  $\Sigma$  es una variedad  $(n - 1)$ -dimensional tipo-espacio, orientable y sin bordes ( $\partial\Sigma = 0$ ). Puntos sobre  $\mathcal{M}$  son etiquetados con  $x^\mu$ , las coordenadas locales adaptadas a esta foliación están determinadas por  $x^\mu = x^\mu(t, y^a)$  donde  $t$  y  $y^a$  ( $a, b, \dots = 1, 2, \dots, n - 1$ ) etiquetan a  $\mathbb{R}$  y  $\Sigma$  respectivamente. Con el objetivo de mantener la simetría de Lorentz manifiesta, se involucra el formalismo mostrado en la sección 4.1.1, donde las variables fundamentales son el marco  $\{e^I\}$  y la conexión 1-forma  $\omega^I_J$  (conocida como conexión de Lorentz  $\omega^I_J = \omega_\mu^I_J dx^\mu$ ) compatible con la métrica

$$d\eta_{IJ} - \omega^K_I \eta_{KJ} - \omega^K_J \eta_{IK} = 0, \quad (4.32)$$

con  $\eta_{IJ} = \text{diag}(\sigma, +1, \dots, +1)$  definida como la métrica del espacio indexado, el cual se usa para subir y bajar índices internos  $I, J, \dots = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Consideremos además  $SO(\sigma) := SO(n)$  [o  $SO(n - 1, 1)$ ] como el grupo interno de rotaciones del marco, para  $\sigma = +1$  representa el grupo Euclidiano  $SO(n)$  y  $\sigma = -1$  denota el grupo de Lorentz  $SO(n - 1, 1)$ . De este modo, dentro del formalismo de primer orden con una constante cosmológica, la acción de Palatini (o de Einstein-Cartan) está dada por

$$S[e, \omega] := k \int_{\mathcal{M}} [\star(e^I \wedge e^J) \wedge F_{IJ} - 2\Lambda\rho], \quad (4.33)$$

donde  $k$  es una constante relacionada con la constante de Newton,  $\rho$  es la forma de volumen de  $\mathcal{M}$ , y  $F^I_J$ <sup>3</sup> es la curvatura de la conexión 1-forma  $\omega^I_J$

$$\rho := \frac{1}{n!} \epsilon_{I_1 \dots I_n} e^{I_1} \wedge \dots \wedge e^{I_n}, \quad (4.34)$$

$$F^I_J := d\omega^I_J + \omega^I_K \wedge \omega^K_J. \quad (4.35)$$

---

<sup>3</sup>Es importante resaltar que el tensor  $F^I_J$  toma valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(\sigma)$ , y es descrito de forma apropiada dentro del contexto de la teoría de haces fibrados (ver [5]), sin embargo, tal tema no se ahondará en esta tesis.

En la sección 3.3.1, el análisis canónico involucra una descomposición, la cual muestra una distinción entre espacio y tiempo; así, para cada hipersuperficie de la foliación existe un vector normal, tal que la unión de las bases involucradas forma una base para  $T_p\mathcal{M}$ . De esta manera, para desarrollar un análisis canónico de la acción (4.33), primero se realiza una descomposición  $(n - 1) + 1$ , expresando el marco y la conexión de la forma

$$e^I = e_t^I dt + e_a^I dy^a, \quad (4.36)$$

$$\omega^I{}_J = \omega_t^I{}_J dt + \omega_a^I{}_J dy^a, \quad (4.37)$$

luego el tensor métrico está dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{IJ} e^I \otimes e^J, \\ &= \eta_{IJ} e_t^J e_t^J dt \otimes dt + \eta_{IJ} e_t^I e_a^J (dt \otimes dx^a + dx^a \otimes dt) \\ &\quad + \eta_{IJ} e_a^I e_b^J dx^a \otimes dx^b, \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nótese, que (4.38) es la misma expresión encontrada en (3.58), de forma que cada una de las componentes que acompañan a la base pueden ser escritas como:

$$\sigma N^2 + N_a N^a = \eta_{IJ} e_t^J e_t^J, \quad (4.39)$$

$$N_a = \eta_{IJ} e_t^I e_a^J, \quad (4.40)$$

$$q_{ab} = \eta_{IJ} e_a^I e_b^J. \quad (4.41)$$

$q_{ab}$  es la métrica inducida sobre  $\Sigma$ , cuya inversa es denotada por  $q^{ab}$ . Sobre cada hoja  $\Sigma_t$ , se define una 1-forma  $n$ , como  $n = n_I e^I$  que satisface  $n^I n_I = \sigma$  y  $n(\partial_a) = 0$ . Las componentes de la 1-forma  $n$  pueden ser escritas explícitamente de la forma

$$n^I = \frac{1}{(n-1)! \sqrt{q}} \epsilon^{II_1 \dots I_{n-1}} \tilde{\eta}^{t a_1 \dots a_{n-1}} e_{a_1 I_1} \dots e_{a_{n-1} I_{n-1}}, \quad (4.42)$$

Cabe resaltar, que la letra  $t$  no es tomada como un índice, sino que es entendido como la posición 0 del índice espacio-tiempo (la posición cero dentro de los índices de Lorentz, es denotado por 0) y  $q = \det(q_{ab}) > 0$ , es el determinante de la métrica inducida sobre  $\Sigma$ . La forma explícita de la 1-forma  $n$ , nos permite introducir un

nuevo objeto

$$\begin{aligned}
\sigma n^I n_J &= \frac{1}{(n-1)! \sqrt{q}} \frac{\sigma}{(n-1)! \sqrt{q}} \epsilon^{II_1 \dots I_{n-1}} \epsilon_{JJ_1 \dots J_{n-1}} \tilde{\eta}^{ta_1 \dots a_{n-1}} \tilde{\eta}^{tb_1 \dots b_{n-1}} \times \\
&\quad \times e_{a_1 I_1} \dots e_{a_{n-1} I_{n-1}} e_{b_1}^{J_1} \dots e_{b_{n-1}}^{J_{n-1}}, \\
&= \frac{1}{(n-1)! \sqrt{q}} \frac{\sigma^2}{(n-1)! \sqrt{q}} \left[ \frac{(n-1)!}{n!} \delta_J^I \tilde{\eta}^{ta_1 \dots a_{n-1}} \tilde{\eta}^{tb_1 \dots b_{n-1}} \times \right. \\
&\quad \times e_{a_1 I_1} \dots e_{a_{n-1} I_{n-1}} e_{b_1}^{I_1} \dots e_{b_{n-1}}^{I_{n-1}} \\
&\quad \left. - \frac{(n-1)! (n-1)!}{n!} e_{aJ} e_b^I \tilde{\eta}^{ta_1 \dots a_{n-1}} \tilde{\eta}^{tb_1 \dots b_{n-1}} \times \right. \\
&\quad \left. \times e_{a_1 I_1} \dots e_{a_{n-1} I_{n-1}} e_{b_1}^{I_1} \dots e_{b_{n-1}}^{I_{n-1}} \right], \\
&= \delta_J^I - e_{aJ} e_b^I q^{ab}, \tag{4.43}
\end{aligned}$$

donde se usó la forma explícita del determinante

$$\det(q_{ab}) = \frac{1}{(n-1)!} \tilde{\eta}^{ta_1 \dots a_{n-1}} \tilde{\eta}^{tb_1 \dots b_{n-1}} q_{a_1 b_1} \dots q_{a_{n-1} b_{n-1}}, \tag{4.44}$$

y la ecuación (2.60). La expresión obtenida en (4.43) nos permite definir

$$\delta_J^I - \sigma n^I n_J = e_{aJ} e_b^I q^{ab} := q^I_J, \tag{4.45}$$

el proyector sobre el plano ortogonal a  $n^I$ , el cual satisface  $q^I_K q^K_J = q^I_J$  (condición de un operador de proyección). Bajo estas premisas, la descomposición de la acción (4.33) pasa a ser

$$\begin{aligned}
S[e, \omega] &= k \int_{\mathcal{M}} \left[ -2\sqrt{q} q^{ac} e_c^K n^L F_{LKta} \right. \\
&\quad \left. + e_{tK} \sqrt{q} q^{bd} q^{ca} (2n^I e_d^J e_a^K + n^K e_d^I e_a^J) F_{IJbc} - 2\Lambda \sqrt{q} e_t n^I \right] dt d^{n-1} x. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

De la ecuación (4.35), la curvatura  $F^I_J$  es además escrita como

$$F_{\mu\nu}^I_J = \partial_\mu \omega_\nu^I_J - \partial_\nu \omega_\mu^I_J + \omega_\mu^I_K \omega_\nu^K_J - \omega_\nu^I_K \omega_\mu^K_J. \tag{4.47}$$

Reemplazando (4.47) dentro de (4.46) se obtiene

$$\begin{aligned}
S[e, \omega] &= k \int_{\mathcal{M}} \left[ -2\sqrt{q} q^{ac} e_c^I n^J \partial_t \omega_{aIJ} + 2\partial_a (\sqrt{q} q^{ac} e_c^I n^J \omega_{tIJ}) \right. \\
&\quad - 2\omega_{tIJ} \partial_a (\sqrt{q} q^{ac} e_c^I n^J) - 2\sqrt{q} q^{ac} e_c^I n^J \omega_{tIK} \omega_a^K_J \\
&\quad + 2\sqrt{q} q^{ac} e_c^I n^J \omega_{aIK} \omega_t^K_J + 2e_{tK} \sqrt{q} q^{bd} q^{ca} n^I e_d^J e_a^K F_{bcIJ} \\
&\quad \left. + e_{tK} \sqrt{q} n^K (q^{bd} q^{ca} e_d^J e_a^J F_{bcIJ} - 2\Lambda) \right] dt d^{n-1} x. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Definiendo

$$\tilde{\Pi}^{aI} := \sqrt{q} q^{ab} e_b^I, \quad (4.49)$$

e introduciendo (4.49) dentro de (4.48) se obtiene

$$\begin{aligned} S[e, \omega] = k \int_{\mathcal{M}} & \left[ -2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \partial_t \omega_{aIJ} + 2\partial_a \left( \tilde{\Pi}^{aI} n^J \omega_{tIJ} \right) - 2\omega_{tIJ} \partial_a \left( \tilde{\Pi}^{aI} n^J \right) \right. \\ & - 2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \omega_{tIK} \omega_a^K{}_J + 2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \omega_{aIK} \omega_t^K{}_J + \frac{2}{\sqrt{q}} e_{tK} \tilde{\Pi}^{bJ} \tilde{\Pi}^{cK} n^I F_{bcIJ} \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{q}} e_{tK} n^K \left( \tilde{\Pi}^{bI} \tilde{\Pi}^{cJ} F_{bcIJ} - 2\Lambda q \right) \right] dt d^{n-1}x, \end{aligned} \quad (4.50)$$

que muestra que  $\omega_{tIJ}$  y  $e_{tI}$  aparecen de forma lineal. Reagrupando algunos términos se obtiene

$$\begin{aligned} S = k \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} & dt d^{n-1}x \left( -2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \partial_t \omega_{aIJ} + \omega_{tIJ} \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} + e_{tI} \tilde{\mathcal{C}}^I \right) \\ & + 2k \int_{\mathcal{M}} \partial_a \left( \sqrt{q} \tilde{\Pi}^{aI} n^J \omega_{tIJ} \right) dt d^{n-1}x, \end{aligned} \quad (4.51)$$

la cual involucra las definiciones siguientes

$$\tilde{\mathcal{G}}^{IJ} := -2\delta_M^I \delta_N^J \left[ \partial_a (\tilde{\Pi}^{aM} n^N) + 2\omega_a^N{}_K \tilde{\Pi}^{a[M} n^{K]} \right]. \quad (4.52)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}^I := \frac{1}{\sqrt{q}} \left[ 2\tilde{\Pi}^{bJ} \tilde{\Pi}^{cI} n^K F_{bcKJ} + n^I \left( \tilde{\Pi}^{bK} \tilde{\Pi}^{cJ} F_{bcKJ} - 2\Lambda q \right) \right]. \quad (4.53)$$

La expresión (4.51) muestra en su último término la contribución del comportamiento en la frontera, pero ya que  $\partial\mathcal{M} = 0$ , los términos no se tendrán en cuenta para el presente análisis.

No es posible decir que la acción (4.51) es de la forma  $p\dot{q} - H$ , dado que las variables  $n^I$  y  $e_{aI}$  dependen explícitamente de  $\tilde{\Pi}^{aI}$ . Sin embargo, involucrando objetos con su inversa bien definida se tiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{q} q^{ab} e_b^I &= \tilde{\Pi}^{aI}, \\ \frac{1}{\sqrt{q}} \tilde{\Pi}^{aJ} \tilde{\Pi}^b{}_J e_b^I &= \tilde{\Pi}^{aI}, \\ e_b^I &= h^{\frac{1}{2(n-2)}} \underset{\approx}{h}_{ab} \tilde{\Pi}^{aI}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde  $q^{n-2} = h$  y  $\underset{\approx}{h}_{ab}$  es definida como la inversa de  $\tilde{h}^{ab} := \tilde{\Pi}^{aJ} \tilde{\Pi}^b{}_J$ . Nótese que bajo ley de transformación tensorial descrita en la sección 2.1.3,  $q$  es de peso  $w = +2$ , mientras que  $h$  es de peso  $w = +2(n-2)$ . Dado que la ecuación (4.54) se

encuentra en términos de  $\tilde{\Pi}^{aI}$ , por ende, las componentes de la 1-forma  $n$  mostrada en la ecuación (4.42), dependen explícitamente de  $\tilde{\Pi}^{aI}$  como sigue

$$n^I = \frac{1}{(n-1)!\sqrt{h}} \epsilon^{II_1 \dots I_{n-1}} \eta_{t a_1 \dots a_{n-1}} \tilde{\Pi}^{a_1 I_1} \dots \tilde{\Pi}^{a_{n-1} I_{n-1}}. \quad (4.55)$$

Por otro lado, dado que es posible descomponer  $e_t^I$  en términos de la función lapse  $N$  y el vector shift  $N^a$  (variables ADM) de la forma

$$e_t^I = N n^I + N^a e_a^I, \quad (4.56)$$

esto nos muestra que  $e_t^I$  y  $e_a^I$  definen un mapeo uno-a-uno y sobreyectivo de  $n^2$  variables  $N$ ,  $N^a$ ,  $\tilde{\Pi}^{aI}$  a las  $n^2$  variables originales del marco  $e_\alpha^I$ . Así, el mapeo inverso viene dado por (4.49) junto con

$$N = \sigma e_t^I n_I, \quad (4.57)$$

$$N^a = q^{ab} e_t^I e_{bI}. \quad (4.58)$$

Por lo tanto, bajo el mapeo a las nuevas variables la acción toma el aspecto

$$S = k \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} dt d^{n-1} x \left( -2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \partial_t \omega_{aIJ} + \omega_{tIJ} \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} - N^a \tilde{\mathcal{V}}_a - N \tilde{\mathcal{C}} \right), \quad (4.59)$$

bajo las definiciones

$$\tilde{\mathcal{C}} := -\sigma \tilde{\Pi}^{aI} \tilde{\Pi}^{bJ} F_{abIJ} + 2\sigma h^{1/(n-2)} \Lambda. \quad (4.60)$$

$$\tilde{N} := h^{-1/2(n-2)} N. \quad (4.61)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_a := -2\tilde{\Pi}^{bJ} n^J F_{abIJ}. \quad (4.62)$$

Cabe resaltar que el primer término de (4.59) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} -2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \partial_t \omega_{aIJ} &= 2\tilde{\Pi}^{aI} [\omega_{aIJ} \partial_t n^J - \partial_t (\omega_{aIJ} n^J)], \\ &= 2\tilde{\Pi}^{aI} \partial_t [ -(\delta_a^b \eta_{I[J} n_{K]} + n_I \underline{h}_{ac} \tilde{\Pi}^b_{[J} \tilde{\Pi}^c_{K]}) \omega_b^{JK} ], \\ &= 2\tilde{\Pi}^{aI} \partial_t [ W^b_{aIJK} \omega_b^{JK} ], \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde  $W^b_{aIJK} := -(\delta_a^b \eta_{I[J} n_{K]} + n_I \underline{h}_{ac} \tilde{\Pi}^b_{[J} \tilde{\Pi}^c_{K]})$ , el cual muestra antisimetría en los dos últimos índices  $W^b_{aIJK} = -W^b_{aIKJ}$ . La ecuación (4.63) sugiere definir  $n(n-1)$  variables de configuración

$$\mathcal{Q}_{aI} := W^b_{aIJK} \omega_b^{JK}, \quad (4.64)$$

las cuales son canónicamente conjugadas a  $\tilde{\Pi}^{aI}$ .  $\mathcal{Q}_{aI}$  incorpora  $n(n-1)$  ecuaciones que involucran  $n(n-1)^2/2$  variables desconocidas de  $\omega_{aIJ}$ , esto conlleva a encontrar

$n(n-1)(n-3)/2$  variables para dar solución a  $\omega_{aIJ}$ . Denotemos estas variables como  $\underline{\lambda}_{abc}$ , las cuales satisfacen que  $\underline{\lambda}_{abc} = -\underline{\lambda}_{acb}$  y la condición de traza cero  $\underline{\lambda}_{abc}\tilde{h}^{ab} = 0$ ; ambas condiciones son suficiente para garantizar la cantidad correcta de variables independientes dentro de  $\underline{\lambda}_{abc}$ . La solución para  $\omega_{aIJ}$  puede ser expresada como

$$\omega_{aIJ} = M_a^b{}_{IJK} \mathcal{Q}_b^K + \tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ} \underline{\lambda}_{bcd}, \quad (4.65)$$

resultado de dividir el espacio de  $\omega$  en un conjunto equivalente de nuevas variables, tal que no halla pérdida de información, con esto, el espacio de conexiones se divide en dos sub-espacios ortogonales.  $\tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ}$  es un vector nulo de  $W_a^b{}_{IJK}$ ,  $\underline{\lambda}_{abc}$  son los coeficientes de la expansión en vectores nulos de  $\tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ}$  tomando  $\lambda N$  como una combinación lineal. Así, la conexión es pensada como la combinación de una solución particular y una homogénea  $\omega = \omega_p + \omega_h$

$$(\omega_p)_{aIJ} := M_a^b{}_{IJK} \mathcal{Q}_b^K \quad (\omega_h)_{aIJ} := \tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ} \underline{\lambda}_{bcd}, \quad (4.66)$$

con

$$M_a^b{}_{IJK} = \frac{2\sigma}{(n-2)} \left[ (n-2)\delta_a^b n_{[I} n_{J]K} + h_{ae} \tilde{\Pi}^b{}_{[I} \tilde{\Pi}^b{}_{J]} n_K \right], \quad (4.67)$$

$$\tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ} = \left( \delta_a^b \delta_e^{[c} \delta_f^{d]} - \frac{2}{(n-2)} h_{ae} \tilde{h}^{b[c} \delta_f^{d]} \right) \tilde{\Pi}^e{}_{[I} \tilde{\Pi}^f{}_{J]}. \quad (4.68)$$

En aras de completitud, se define la densidad tensorial  $\underline{U}_{abc}{}^{dIJ}$  con las propiedades  $\underline{U}_{abc}{}^{dIJ} = -\underline{U}_{acb}{}^{dIJ} = -\underline{U}_{abc}{}^{dJI}$  y  $\tilde{h}^{ab} \underline{U}_{abc}{}^{dIJ} = 0$ , por

$$\underline{U}_{abc}{}^{dIJ} := \left( \delta_a^d h_e^{[b} h_{c]f} - \frac{2}{n-2} h_{a[b} h_{c]f} \delta_e^d \right) \tilde{\Pi}^{e[I} \tilde{\Pi}^{f]J]}. \quad (4.69)$$

la cual está relacionada con  $\tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ}$  por

$$\tilde{h}^{ea} \tilde{h}^{gb} \tilde{h}^{hc} h_{fd} \underline{U}_{abc}{}^{dIJ} = \tilde{N}_f{}^{efgIJ}. \quad (4.70)$$

Todos estos objetos cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$W_a{}^{cIKL} M_c^b{}_{KLJ} = \delta_a^b \delta_J^I, \quad (4.71)$$

$$\underline{U}_{cde}{}^{gIJ} \tilde{N}_g{}^{fab}{}_{IJ} = \delta_c^f \delta_d^{[a} \delta_e^{b]} - \frac{1}{n-2} \left( h_{cd} \tilde{h}^{f[a} \delta_e^{b]} - h_{ce} \tilde{h}^{f[a} \delta_d^{b]} \right), \quad (4.72)$$

$$W_{aIJK} \tilde{N}_f{}^{bcdJK} = 0, \quad (4.73)$$

$$\underline{U}_{abc}{}^{dIJ} M_d^e{}_{IJK} = 0, \quad (4.74)$$

$$M_a^c{}_{IKM} W_c{}^{bMKL} + \tilde{N}_a{}^{cdf}{}_{IJ} \underline{U}_{cdf}{}^{bKL} = \delta_a^b \delta_{[I}^K \delta_{J]}^L. \quad (4.75)$$

Además, de estas relaciones se obtiene que

$$\lambda_{abc} = \underset{\sim}{U}_{abc}{}^{dIJ} \omega_{dIJ}, \quad (4.76)$$

la cual muestra que  $Q_{aI}$  y  $\lambda_{abc}$  son variables independientes. Reemplazando  $\omega_{aIJ}$  en términos de estas variables  $Q_{aI}$  y  $\lambda_{abc}$  dentro de la acción (4.59), lleva a constricciones de segunda clase. Por otro lado, con aras de simplificar la forma de las constricciones que resultan, se realiza una transformación canónica que deja el momento  $\tilde{\Pi}^{aI}$  invariante, de la forma  $(Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI}) \rightarrow (Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI})$ . De esta manera las variables de configuración están relacionadas una respecto a la otra, como sigue

$$Q_{aI} = \mathcal{Q}_{aI} - W_a{}^b{}_{IJK} \Gamma_b{}^{JK}. \quad (4.77)$$

Los coeficientes de conexión  $\Gamma_b{}^{JK}$  son conocidos como la conexión híbrida asociada a la derivada covariante  $\nabla_a$  definida sobre cada hoja  $\Sigma_t$ , la cual actúa sobre índices de Lorentz e índices espacio-tiempo; además, aniquila a  $e_a{}^I$  a través de

$$\nabla_a e_b{}^I := \partial_a e_b{}^I + \Gamma_a{}^I{}_J e_b{}^J - \Gamma_{ab}{}^c e_c{}^I = 0, \quad (4.78)$$

con  $\Gamma_{aIJ} = -\Gamma_{aJI}$  y  $\Gamma_{bc}{}^a = \Gamma_{cb}{}^a$ . La expresión en (4.78) expone  $n(n-1)^2$  ecuaciones lineales inhomogéneas, para  $\Gamma_{aIJ}$  ( $n(n-1)^2/2$  variables desconocidas) y  $\Gamma_{bc}{}^a$  ( $n(n-1)^2/2$  variables desconocidas) esto nos muestra que la solución es única.

A partir de (4.78) es posible obtener la solución para cada uno de los coeficientes; por un lado, se obtiene que  $\Gamma_{bc}{}^a$  son los símbolos de Christoffel asociados con la métrica inducida  $q_{ab}$  sobre  $\Sigma_t$ ; por otro lado, la solución para  $\Gamma_{aIJ}$ , se obtiene haciendo uso del operador de proyección (4.45), obteniendo que

$$\Gamma_{aIJ} = \Gamma_{aKL} q^L{}_I q^K{}_J + 2\sigma n^K n_{[I} \Gamma_{|aK|J]}, \quad (4.79)$$

esto muestra que la solución es dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{aIJ} = & q^{bc} e_{b[I} (\partial_a e_{c|J]} - \partial_c e_{a|J]) + \sigma q^{bc} e_{b[I} n_J n_K (\partial_a e_c{}^K + \partial_c e_a{}^K) \\ & + q^{bc} q^{df} e_{aK} e_{b[I} e_{|d|J]} \partial_f e_c{}^K. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Es importante resaltar que involucrando a (4.49), tenemos que la derivada covariante  $\nabla$  aniquila a  $\tilde{\Pi}^{aI}$

$$\nabla_a \tilde{\Pi}^{bI} = \partial_a \tilde{\Pi}^{bI} + \Gamma_a{}^I{}_J \tilde{\Pi}^{bJ} + \Gamma_{ac}{}^b \tilde{\Pi}^{cI} - \Gamma_{ac}{}^c \tilde{\Pi}^{bI} = 0. \quad (4.81)$$

Así, la conexión híbrida y los símbolos de Christoffel describen las mismas propiedades geométricas de la sub-variedad y están dados además en términos de  $\tilde{\Pi}^{aI}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{aIJ} = & \underline{h}_{ad} \tilde{\Pi}_{[I}^c \partial_{|c|} \tilde{\Pi}_{J]}^d + \underline{h}_{ad} \underline{h}_{ce} \tilde{\Pi}_L^c \tilde{\Pi}_{[I}^d \tilde{\Pi}_{J]}^f \partial_f \tilde{\Pi}^{eL} + \underline{h}_{dc} \tilde{\Pi}_{[I}^d \partial_{|a|} \tilde{\Pi}_{J]}^c \\ & - \underline{h}_{ad} \underline{h}_{ce} \tilde{\Pi}_L^d \tilde{\Pi}_{[I}^c \tilde{\Pi}_{J]}^f \partial_f \tilde{\Pi}^{eL} - \sigma \underline{h}_{ad} \tilde{\Pi}_{[I}^c n_J n_L \partial_c \tilde{\Pi}^{dL} + \sigma \underline{h}_{dc} \tilde{\Pi}_{[I}^d n_J n_L \partial_a \tilde{\Pi}^{cL}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

La transformación (4.77) surge de una modificación al término cinético de la acción (4.59) de la forma

$$\begin{aligned} -2\tilde{\Pi}^{aI}n^J\partial_t\omega_{aIJ} &= -2\tilde{\Pi}^{aI}n^J\partial_t(\omega_{aIJ} - \Gamma_{aIJ} + \Gamma_{aIJ}), \\ &= 2\tilde{\Pi}^{aI}\partial_t[W_a^b{}_{IJK}(\omega_b^{JK} - \Gamma_b^{JK})] - 2\partial_a(n_I\partial_t\tilde{\Pi}^{aI}). \end{aligned} \quad (4.83)$$

el término  $\partial_a(n_I\partial_t\tilde{\Pi}^{aI})$ , no contribuye dentro de la acción debido a que la integral no contribuye porque  $\Sigma$  no tiene bordes. El término de frontera está definido sobre  $\Sigma$ . La razón por la cual se mantiene el signo menos dentro de (4.83) es debido a que  $\omega_a^{IJ} - \Gamma_a^{IJ}$  es un tensor de  $SO(\sigma)$ . Con esto se definen las variables de configuración

$$Q_{aI} := W_a^b{}_{IJK}(\omega_b^{JK} - \Gamma_b^{JK}). \quad (4.84)$$

La solución para  $\omega_{aIJ}$  toma la forma

$$\omega_{aIJ} = \Gamma_{aIJ} + M_a^b{}_{IJK}Q_b^K + \tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ}\underline{y}_{bcd}, \quad (4.85)$$

las variables  $\underline{y}_{bcd}$  satisfacen  $\underline{y}_{bcd} = -\underline{y}_{bdc}$  y condición de traza cero  $\underline{y}_{bcd}\tilde{h}^{bc} = 0$ .

Reemplazando (4.85) dentro de (4.59), cada una de las cantidades involucradas toman la forma

$$\tilde{\mathcal{G}}^{IJ} = 2\tilde{\Pi}^{a[I}Q_a^{J]}. \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_a &= 2\left(2\tilde{\Pi}^{bI}\partial_{[a}Q_{b]I} - Q_{aI}\partial_b\tilde{\Pi}^{bI}\right) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{G}}_{IJ}\left(\Gamma_a^{IJ} + M_a^{bIJK}Q_{bK} + \tilde{N}_a{}^{bcdIJ}\underline{y}_{bcd}\right). \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}} &= -\sigma\tilde{\Pi}^{aI}\tilde{\Pi}^{bJ}R_{abIJ} + 2\tilde{\Pi}^{a[I}\tilde{\Pi}^{b|J]}Q_{aI}Q_{bJ} + 2\sigma\Lambda h^{\frac{1}{(n-2)}} \\ &\quad + 2\tilde{\Pi}^{aI}n^J\nabla_a\tilde{\mathcal{G}}_{IJ} - \frac{(n-3)}{(n-2)}\sigma n^I\tilde{\mathcal{G}}^J{}_K n^K\tilde{\mathcal{G}}_{IJ} + \sigma\tilde{h}^{db}\tilde{h}^{cf}\tilde{h}^{ea}\underline{y}_{abc}\underline{y}_{dfe}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

con  $R_{ab}{}^I{}_J$  el tensor de curvatura definido para la conexión  $\Gamma_{aIJ}$ , obteniendo

$$S = k \int_{\mathbb{R}\times\Sigma} dt d^{n-1}x \left( 2\tilde{\Pi}^{aI}\partial_t Q_{aI} + \omega_{tIJ}\tilde{\mathcal{G}}^{IJ} - N^a\tilde{\mathcal{V}}_a - N\tilde{\mathcal{C}} \right), \quad (4.89)$$

Bajo las siguientes definiciones se obtiene

$$\tilde{\mathcal{D}}_a := 2\tilde{\Pi}^{bI}\partial_{[a}Q_{b]I} - Q_{aI}\partial_b\tilde{\Pi}^{bI}. \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} &:= -\sigma\tilde{\Pi}^{aI}\tilde{\Pi}^{bJ}R_{abIJ} + 2\tilde{\Pi}^{a[I}\tilde{\Pi}^{b|J]}Q_{aI}Q_{bJ} + 2\sigma\Lambda h^{\frac{1}{(n-2)}} \\ &\quad + \sigma\tilde{h}^{db}\tilde{h}^{cf}\tilde{h}^{ea}\underline{y}_{abc}\underline{y}_{dfe}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

para formar

$$S = k \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} dt d^{n-1}x \left( 2\tilde{\Pi}^{aI} \partial_t Q_{aI} - \lambda_{IJ} \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} - 2N^a \tilde{\mathcal{D}}_a - \underline{N} \tilde{\mathcal{S}} \right), \quad (4.92)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_{IJ} := & -\omega_{tIJ} + N^a \left( \Gamma_{aIJ} + M_a^b{}_{IJK} Q_b^K + \tilde{N}_a{}^{bcd}{}_{IJ} \underline{u}_{bcd} \right) \\ & - 2\tilde{\Pi}^a{}_{[I} n_{J]} \nabla_a \underline{N} - \sigma \frac{(n-3)}{(n-2)} \underline{N} n_{[I} \mathcal{G}_{J]K} n^K. \end{aligned} \quad (4.93)$$

La acción (4.92) depende de las variables del espacio de fase  $(Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI})$  de una forma más familiar. Además, involucra los multiplicadores de Lagrange  $(\lambda_{IJ}, N^a, \underline{N})$  y a los campos auxiliares  $\underline{u}_{abc}$ . Estos últimos pueden fijarse usando sus propias ecuaciones de movimiento,

$$\delta_{\underline{u}_{abc}} S = \frac{d}{d\epsilon} S[Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI}, \lambda_{IJ}, N^a, \underline{N}, \underline{u}_{abc} + \epsilon \delta \underline{u}_{abc}] \Big|_{\epsilon=0} = 0, \quad (4.94)$$

obteniendo

$$2\sigma \underline{N} \tilde{h}^{db} \tilde{h}^{c[e} \tilde{h}^{f]a} \underline{u}_{abc} = 0. \quad (4.95)$$

Dado que  $\underline{N} \neq 0^4$ , se obtiene como solución para  $\underline{u}_{abc}$

$$\underline{u}_{abc} = 0. \quad (4.97)$$

Por lo tanto, sustituyendo en cada uno de los términos involucrados en (4.92) se obtiene

$$S = k \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} dt d^{n-1}x \left( 2\tilde{\Pi}^{aI} \partial_t Q_{aI} - \lambda_{IJ} \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} - 2N^a \tilde{\mathcal{D}}_a - \underline{N} \tilde{\mathcal{S}} \right), \quad (4.98)$$

con

$$\tilde{\mathcal{S}} = -\sigma \tilde{\Pi}^{aI} \tilde{\Pi}^{bJ} R_{abIJ} + 2\tilde{\Pi}^{a[I} \tilde{\Pi}^{b|J]} Q_{aI} Q_{bJ} + 2\sigma \Lambda h^{\frac{1}{(n-2)}}. \quad (4.99)$$

La expresión encontrada en (4.98), fue obtenida en primer lugar en [1] y adopta la forma  $p\dot{q} - H$ , por lo tanto, se obtiene una formulación hamiltoniana manifiestamente covariante de la acción de Palatini (4.33). Esta forma hamiltoniana emerge de la parametrización original de las variables  $e_a^I$  en términos de las variables de momentos  $\tilde{\Pi}^{aI}$ , la función lapse  $N$  y el vector shift  $N^a$ .

<sup>4</sup> $\underline{N}$  es proporcional al determinante de la métrica espacio-tiempo, dado que  $g$  es no degenerada luego  $\underline{N}$  no puede ser cero

$$g = \sigma N^2 q^2. \quad (4.96)$$

Nótese que no hay dependencia explícita de las derivadas temporales de las variables  $\lambda_{IJ}$ ,  $N^a$  y  $N$ . En consecuencia, las variaciones respecto a cada una de ellas imponen las siguientes constricciones primarias

$$\text{Constricción de Gauss } SO(n-1, 1) [\text{ó } SO(n)] \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} \approx 0, \quad (4.100)$$

$$\text{constricción de difeomorfismos (espaciales)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_a \approx 0, \quad (4.101)$$

$$\text{constricción escalar} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}} \approx 0. \quad (4.102)$$

El símbolo  $\approx$  representa una igualdad débil, con el fin de resaltar que cada una de las constricciones se encuentran sobre la superficie de constricción  $\mathcal{O}_1$  definida por las mismas, con  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}$  el espacio de fase. El hamiltoniano definido en (4.98) es un hamiltoniano total, debido a que es construido como una combinación lineal de constricciones

$$-H = k \int_{\Sigma} d^{n-1}x \left( -\lambda_{IJ} \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} - 2N^a \tilde{\mathcal{D}}_a - N \tilde{\mathcal{S}} \right), \quad (4.103)$$

el cual es débilmente cero porque no involucra un hamiltoniano canónico ( $H_c = 0$ ). Este hamiltoniano evidencia justamente que  $\lambda_{IJ}$ ,  $N^a$  y  $N$  juegan el rol de multiplicadores arbitrarios (multiplicadores de Lagrange). Cabe resaltar, que un hamiltoniano cero es la marca distintiva de un sistema generalmente covariante [57].

Con esto en mente y en aras de verificar que el hamiltoniano involucrado en la acción (4.98) es consistente y completo, es necesario mirar el comportamiento de las constricciones involucradas (ver A). Tomando la condición de consistencia dentro de las constricciones primarias (4.100, 4.101, 4.102), nos lleva a calcular los corchetes de Poisson (PB) del conjunto de constricciones. Para ello es necesario tener en cuenta que para dos funcionales del espacio de fase ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ), el PB bajo las variables del espacio de fase ( $Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI}$ ) es ahora dado de la forma

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \frac{1}{2k} \int_{\Sigma} d^{n-1}x \left[ \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta Q_a^I(x)} \frac{\delta \mathcal{B}}{\delta \tilde{\Pi}^a_I(x)} - \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \tilde{\Pi}^a_I(x)} \frac{\delta \mathcal{B}}{\delta Q_a^I(x)} \right], \quad (4.104)$$

el cual es una generalización al continuo de la forma usual del PB. Tomando la definición de derivada funcional [21]

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F[Q_{aI} + \varepsilon \delta Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI}] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Sigma} d^{n-1}x \frac{\delta F[Q, \Pi]}{\delta Q_{bJ}(x)} \delta Q_{bJ}(x), \quad (4.105)$$

la cual implica

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{aI}(x)}{\delta \mathcal{A}_{bJ}(y)} = \delta_a^b \delta_I^J \delta^{(n-1)}(x-y), \quad (4.106)$$

para las variables del espacio de fase  $(Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI})$  se tiene que su PB es

$$\left\{ Q_a^I(x), \tilde{\Pi}^b_J(y) \right\} = \frac{1}{2k} \delta_a^b \delta_J^I \delta^{(n-1)}(x-y), \quad (4.107)$$

calculado en el mismo instante de tiempo (porque estamos sobre la misma hoja  $\Sigma$ ). Resulta un poco más familiar definir funciones de peso apropiadas para las constricciones, con el fin de calcular los PB's entre ellas. Así, cada restricción toma la forma

$$\mathcal{D}[N] := \int_{\Sigma} d^{n-1}x N^a(x) \tilde{\mathcal{D}}_a(x), \quad (4.108)$$

$$\mathcal{G}[M] := \int_{\Sigma} d^{n-1}x M_{IJ}(x) \tilde{\mathcal{G}}^{IJ}(x), \quad (4.109)$$

$$\mathcal{S}[L] := \int_{\Sigma} d^{n-1}x L(x) \tilde{\mathcal{S}}(x). \quad (4.110)$$

Además, si consideramos a (4.109) como el generador de una transformación no física de una trayectoria dinámica, entonces bajo una pequeña variación de las variables del espacio de fase se tiene que

$$\delta^{\mathcal{G}} Q_{aI}(x) = \{Q_{aI}(x), \mathcal{G}[M]\} = \frac{1}{k} Q_a^J(x) M_{IJ}(x), \quad (4.111)$$

$$\delta^{\mathcal{G}} \tilde{\Pi}^{aI}(x) = \left\{ \tilde{\Pi}^{aI}(x), \mathcal{G}[M] \right\} = \frac{1}{k} \tilde{\Pi}^{aJ}(x) M^I_J(x). \quad (4.112)$$

por lo tanto  $\mathcal{G}[M]$  es el generador de rotaciones locales de  $SO(\sigma)$ . De manera análoga, ahora con (4.108) las transformaciones generadas están dadas por

$$\delta^{\mathcal{D}} Q_{aI}(x) = \{Q_{aI}(x), \mathcal{D}[N]\} = \frac{1}{2k} \mathcal{L}_N Q_{aI}(x), \quad (4.113)$$

$$\delta^{\mathcal{D}} \tilde{\Pi}^{aI}(x) = \left\{ \tilde{\Pi}^{aI}(x), \mathcal{D}[N] \right\} = \frac{1}{2k} \mathcal{L}_N \tilde{\Pi}^{aI}(x), \quad (4.114)$$

donde  $\mathcal{L}_N$  denota la derivada de Lie a lo largo de la dirección  $N^a$  (cabe resaltar que la derivada de Lie no actúa sobre índices Lorentz), lo que muestra que  $\mathcal{D}[N]$  es un generador de difeomorfismos espaciales. De esta manera, los PB's entre los

pares de constricciones resultan un poco más sencillos, obteniendo

$$\{\mathcal{D}[N_1], \mathcal{D}[N_2]\} = \frac{1}{2k} \mathcal{D}[\mathcal{L}_{N_1} N_2]. \quad (4.115)$$

$$\{\mathcal{G}[M], \mathcal{D}[N]\} = \frac{1}{2k} \mathcal{G}[-\mathcal{L}_N M_{IJ}]. \quad (4.116)$$

$$\{\mathcal{G}[M_1], \mathcal{G}[M_2]\} = \frac{2}{k} \mathcal{G}[M_{1[L I] \eta}{}^{LK} M_{2[JK]}]. \quad (4.117)$$

$$\{\mathcal{G}[M], \mathcal{S}[L]\} = 0. \quad (4.118)$$

$$\{\mathcal{D}[N], \mathcal{S}[L]\} = \frac{1}{2k} \mathcal{S}[\mathcal{L}_N L]. \quad (4.119)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{S}[L_1], \mathcal{S}[L_2]\} &= -\frac{2\sigma}{k} \int_{\Sigma} d^{n-1} x \tilde{h}^{ab} (\underline{L}_1 \partial_a \underline{L}_2 - \underline{L}_2 \partial_a \underline{L}_1) \times \\ &\times \left( \tilde{\mathcal{D}}_b + \frac{1}{2} \Gamma_{bIJ} \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} + \frac{1}{2} \tilde{h}_{bc} \tilde{\Pi}^c{}_I \tilde{\Pi}^d{}_J \nabla_d \tilde{\mathcal{G}}^{IJ} \right). \end{aligned} \quad (4.120)$$

Esta álgebra de constricciones es cerrada dado que cada uno de los PB's involucrados son cero o débilmente cero. Además, la evolución de las constricciones vía el hamiltoniano total (4.103) satisface las condiciones de consistencia, las cuales se reducen a la identidad  $0 \approx 0$  al imponer las constricciones primarias. Por lo tanto, (4.108), (4.109) y (4.110) no generan nuevas constricciones ni restricciones a los multiplicadores de Lagrange.

De esta manera, el hamiltoniano total (4.103) es un hamiltoniano completo y consistente, dotado solo con constricciones primarias de primera clase, las cuales  $n(n+1)/2$  son independientes. La cantidad de grados de libertad (DOF) físicos del sistema, para  $2n(n-1)$  variables independientes del espacio de fase, da como resultado

$$\begin{aligned} DOF &= \frac{1}{2} \left[ 2(n(n-1)) - 2 \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) \right], \\ &= \frac{n(n-3)}{2}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

El resultado obtenido está en concordancia con los DOF físicos involucrados en la formulación ADM. Por ende, obtenemos nuevamente que, para el caso 4-dimensional, existen 2 grados de libertad por punto del espacio.

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

El desarrollo de la teoría general de la relatividad nos ha mostrado hasta el momento, que existen diferentes formulaciones lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones de campo introducidas por Einstein (3.17), consistentes con la formulación newtoniana dentro del límite de campo débil. Entre ellas se pueden resaltar el formalismo lagrangiano introducido por Hilbert (4.13), el cual implementa la covarianza general debido a su carácter escalar, el lagrangiano de Palatini (4.12), el cual muestra que bajo una sola condición dentro de torsión cero o compatibilidad métrica cero, la conexión resultante es la de Levi-Civita, la conexión que subyace a la relatividad general de Einstein.

La formulación clásica de la gravedad dentro del formalismo hamiltoniano tomado desde el punto de vista de la relatividad general, impone una división entre espacio y tiempo de forma arbitraria, llevando a la descomposición ADM expuesta en la sección 3.3.1. El paso de las variables de configuración a las de espacio de fase involucra relaciones entre ellas llamadas constricciones. Estas constricciones pueden clasificarse en constricciones de primera y segunda clase, donde las simetrías involucradas de la teoría están relacionadas con la presencia de constricciones de primera clase, mientras que la de segunda clase significa que hay grados dinámicos de libertad en la teoría que pueden eliminarse. Para poder eliminar estas variables, es necesario configurar un nuevo PB que se refiera solo a grados de libertad dinámicamente importantes [67]. Sin embargo, no toda formulación hamiltoniana tiene solo constricciones de primera clase; es bien sabido que el análisis canónico covariante de Lorentz de la acción de Holst para la relatividad general [38] contiene restricciones de segunda clase (esto también es cierto para la acción de Palatini [31]).

La formulación ADM se caracteriza por contener constricciones de primera clase solamente. Sin embargo, la formulación manifiestamente covariante de Lorentz de la acción de Palatini contiene constricciones de segunda clase. Dado que es posible encontrar la solución de estas constricciones, los enfoques expuestos en [31, 41, 64] muestran la alta no trivialidad en el proceso. No obstante, el enfoque realizado en [65, 66] y [1], este último presentado explícitamente en la sección 4.2, anuncia un hamiltoniano consistente y completo, involucrando solo constricciones de primera clase. Por lo tanto, podemos concluir que el procedimiento seguido en la tesis simplifica el análisis, dado que se obtiene una formulación hamiltoniana de la acción de Palatini en  $n$  dimensiones, que no involucra constricciones de segunda clase, lo cual se logra a partir de una elección apropiada de las variables que definen la acción, separando la parte dinámica de la no dinámica.

Aunque en la presente tesis no se logró el objetivo principal (establecer una relación directa con la formulación ADM), debido a la dificultad del mismo, dicho objetivo se dejará como incentivo para trabajos futuros. Sin embargo, ya que la cantidad de grados de libertad por punto del espacio involucrados en la teoría están en concordancia con los obtenidos por la formulación ADM, es factible encontrar una relación entre las mismas (más precisamente una relación entre la constricción escalar y la de difeomorfismos espaciales, con las que surgen en el formalismo ADM). Con el fin de efectuar esta relación, se propone definir nuevas variables a partir de las ya establecidas en la sección 4.2, de forma que sean escalares bajo  $SO(\sigma)$  (dado que las variables ADM presentan esta condición), para luego reescribir todo en términos de estas nuevas variables, reduciendo el espacio de fases. De este modo, se pretende hacer contacto con la formulación ADM sin realizar una fijación de norma temporal “time gauge” (en las siguientes Ref’s. [1, 31], se expone la aplicación de este método), puesto que, al involucrar una fijación de norma temporal se rompe la covarianza manifiesta, debido a la reducción del grupo  $SO(\sigma)$  a  $SO(n - 1)$  (el grupo de rotaciones) y se introducen constricciones de segunda clase.

# Apéndice A

## Sistemas hamiltonianos con constricciones

El punto de partida del formalismo hamiltoniano es la definición de los momentos canónicos

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}, \quad (\text{A.1})$$

con  $(i = 1, \dots, N)$  y  $N$  la cantidad de grados de libertad de la teoría, la cual lleva a la definición del hamiltoniano canónico

$$H_c = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (\text{A.2})$$

Bajo variación respecto de las coordenadas  $q$  y las velocidades  $\dot{q}$

$$\begin{aligned} \delta H_c &= \delta \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right), \\ &= \sum_i \left( \delta p_i \dot{q}_i - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

vemos que la variación de esta cantidad involucra solo variaciones de  $q$ 's y de  $p$ 's, más no de las velocidades. Esto muestra que el hamiltoniano canónico  $H_c$  es una función de  $q$ 's y  $p$ 's, sin dependencia explícita en las velocidades. Sin embargo, mientras que para un lagrangiano regular el mapeo  $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$  es invertible, para uno singular dicho mapeo no será invertible y existirán localmente relaciones no triviales entre las variables del espacio de fase. Estas relaciones son denominadas constricciones primarias y están caracterizadas por ecuaciones de la forma

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad (\text{A.4})$$

donde  $m$  etiqueta la cantidad de constricciones primarias ( $m = 1, \dots, M$ ), las cuales reducen la dimensión del espacio de fase de  $2N$  a  $2N - M$  para  $M$  la cantidad de constricciones primarias. Denotando a  $\Gamma$  (el espacio de fase) como una variedad de dimensión  $2N$ , las constricciones (A.4) definen una sub-variedad de dimensión  $2N - M$  denominada superficie de restricción primaria  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_1 \subset \Gamma$ ). La estructura geométrica de  $\Gamma_1$  puede ser complicada; suponemos por simplicidad que el rango de la matriz  $\partial\phi_m/\partial(q, p)$  es constante sobre  $\Gamma_1$  y además que todas las constricciones  $\phi_m$  son independientes, es decir, el jacobiano  $\mathcal{J} := \partial\phi_m/\partial(q, p)$  es de rango  $M$  sobre  $\Gamma_1$ .

Una igualdad sobre la superficie de restricción primaria  $\Gamma_1$  puede no ser válida para puntos fuera de  $\Gamma_1$ . Es por esto que es necesario diferenciar igualdades válidas para todo el espacio de fase  $\Gamma$ , de igualdades válidas para  $\Gamma_1$ . De esta manera, diremos que una función que se anule sobre  $\Gamma_1$ , ( $F(q, p) = 0$ ), es débilmente cero y usaremos el símbolo  $\approx$  para representar dicha relación, es decir,

$$F(q, p) \approx 0 \iff F(q, p)|_{\Gamma_1} = 0, \quad (\text{A.5})$$

la cual no es idénticamente cero sobre  $\Gamma$ . Por otro lado, si  $F(q, p)$  es una función que se anula sobre todo el espacio de fase y no justamente sobre la superficie de restricción primaria, la función es llamada fuerte y el símbolo usual es  $=$  para este caso

$$F(q, p) = 0 \iff F, \partial F/\partial q, \partial F/\partial p|_{\Gamma_1} = 0. \quad (\text{A.6})$$

En este sentido la ecuación (A.4) pasa a ser

$$\phi_m(q, p) \approx 0. \quad (\text{A.7})$$

Aunque ahora tenemos definida una forma de diferenciar una igualdad débil de una fuerte, es importante resaltar que ambas están relacionadas. Así, si dos funciones coinciden débilmente  $F \approx G$ , luego

$$F - G = \lambda^m \phi_m, \quad (\text{A.8})$$

lo que significa que su diferencia es fuertemente igual a una combinación lineal de las constricciones que definen la superficie de restricción  $\Gamma_1$ , con  $\lambda^m$  funciones arbitrarias [57].

Ahora, el hamiltoniano definido en (A.2) no es determinado de forma única como función de los  $p$ 's y los  $q$ 's, dado que  $\delta p_i$  en (A.3) no son todos independientes sino que están restringidos a satisfacer las constricciones  $\phi_m$ . Por lo tanto, para tratar apropiadamente las constricciones, es conveniente introducirlas a través de multiplicadores arbitrarios (funciones auxiliares), de la siguiente manera

$$H \rightarrow H_c + u^m \phi_m, \quad (\text{A.9})$$

donde  $u^m$  representa los multiplicadores arbitrarios. Esto nos permite definir a (A.9) como el hamiltoniano total  $H_T$ , responsable de la evolución del sistema con constricciones cuyas ecuaciones dinámicas toman la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \quad (\text{A.10})$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, \quad (\text{A.11})$$

$$\phi_m(q, p) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Aunque estas ecuaciones describen la dinámica del sistema en cuestión, involucran a las funciones arbitrarias  $u^m$ . Es conveniente ahora introducir los corchetes de Poisson (PB) definidos por

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}, \quad (\text{A.13})$$

para dos funciones arbitrarias  $f$  y  $g$  del espacio de fase, el cual satisface

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (\text{anticonmutatividad}). \quad (\text{A.14})$$

$$\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\} \quad (\text{bilinealidad}). \quad (\text{A.15})$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad (\text{regla de Leibniz}). \quad (\text{A.16})$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \quad (\text{identidad de Jacobi}). \quad (\text{A.17})$$

Esto nos permitirá ver de una forma más familiar las ecuaciones de movimiento obtenidas anteriormente. Si consideramos una variable dinámica  $g(q, p)$ , su evolución temporal es

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u^m \{g, \phi_m\} \approx \{g, H_T\}; \quad (\text{A.18})$$

de esta manera, (A.18) describe la evolución temporal de las variables dinámicas sobre la superficie de restricción  $\Gamma_1$ .

La aplicación de (A.18) a las constricciones involucradas, nos otorga un conjunto de condiciones de consistencia básica de la teoría, donde será exigido que las constricciones primarias sean conservadas durante la evolución dinámica del sistema; así, (A.18) aplicado a (A.7) muestra que

$$\frac{d}{dt} \phi_m(q, p) := \dot{\phi}_m \approx \{\phi_m, H_T\} \approx 0, \quad (\text{A.19})$$

para  $\{\phi_m, H_T\}$  dado por

$$\{\phi_m, H_T\} = \{\phi_m, \phi_n\} u^n + \{\phi_m, u^n\} \phi_n. \quad (\text{A.20})$$

donde  $n$  es otro índice de conteo que muestra la cantidad de constricciones independientes involucradas; el término  $\{\phi_m, u^n\} \phi_n$  puede despreciarse debido a que este se anula débilmente.

A partir de aquí puede obtenerse uno de tres siguientes casos:

- El primer tipo de condición se reduce a una identidad,  $0 = 0$ , es decir, se satisface automáticamente después de utilizar las restricciones primarias.
- Ecuaciones independientes de las  $u$ 's que llevan a nuevas constricciones entre  $q$ 's y  $p$ 's, denotadas por  $\mathcal{X}(q, p) \approx 0$  (constricciones secundarias).
- Por ultimo, una ecuación en (A.20) puede imponer restricciones sobre las  $u$ 's.

Este algoritmo es cíclico y continúa hasta que al final se termine con un cierto número de constricciones secundarias y de condiciones sobre los multiplicadores. Denotando a  $\varphi_s(\phi_m, \mathcal{X}_r) \approx 0$  como el conjunto total de constricciones de la teoría, siendo  $s = 1, \dots, M, M + 1, \dots, M + P$  donde  $P$  muestra la cantidad de constricciones secundarias que surgen. Estas constricciones forman un sub-espacio  $\Gamma_2$  del espacio de fase  $\Gamma$  siendo  $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$ ; ahora las igualdades fuertes y débiles son referidas a  $\Gamma_2$ .

Aplicando las condiciones de consistencia a las constricciones  $\varphi_s$  se obtendrá en general, un sistema inhomogéneo de ecuaciones lineales para los multiplicadores arbitrarios desconocidos. Puede derivarse una solución de la forma  $u^m = U^m + v^a V_a^m$ , la cual es una combinación lineal de la solución particular  $U^m$  y la solución homogénea  $v^a V_a^m$  ( $V_a^m$  ( $a = 1, \dots, W$ )<sup>1</sup> son todas las soluciones independientes de la ecuación homogénea  $V_a^m \{\varphi_s, \phi_m\} \approx 0$ ), donde  $v^a = v^a(t)$  son coeficientes arbitrarios dependientes del tiempo [57].

Con esto, el hamiltoniano total pasa a ser de la forma

$$H_T = H' + v^a \phi_a, \quad (\text{A.21})$$

con  $H' = H_c + U^m \phi_m$  y  $\phi_a = V_a^m \phi_m$ . Con esto vemos que aun con las condiciones de consistencia satisfechas, quedan funciones arbitrarias del tiempo en el hamiltoniano y por lo tanto, las variables dinámicas del sistema no estarán determinadas de forma única por las condiciones iniciales para tiempos futuros, manifestándose la existencia de transformaciones de norma dentro de la teoría.

La presencia de multiplicadores arbitrarios en las ecuaciones de movimiento

<sup>1</sup>La etiqueta  $W$  hace referencia a la dimensión del espacio nulo de la matriz  $\{\varphi, \phi\}$

(y su solución) implica que las variables  $(q(t), p(t))$  no puedan ser determinadas de forma única, a partir de valores iniciales  $(q(0), p(0))$ ; por lo tanto, ellas no tienen un significado físico. Para extraer información física del sistema se hace necesaria la introducción de funciones  $A(q, p)$  denominadas observables clásicos, los cuales serán independientes de las  $v$ 's. El estado del sistema queda entonces determinado a un tiempo  $t$  por el conjunto completo de observables físicos en ese tiempo.

Así, para una variable dinámica  $g(t)$  en  $t = 0$ , el valor de  $g(t)$  en un intervalo  $\delta t$  puede ser calculado de las ecuaciones de movimiento, con  $g(0)$  el valor inicial determinado por  $(q(0), p(0))$

$$g(\delta t) = g(0) + \delta \dot{g} = g(0) + \delta t \{g, H_T\}. \quad (\text{A.22})$$

Ya que los coeficientes  $v^a(t)$  son completamente arbitrarios, es posible tomar valores diferentes para estos coeficientes y obtener valores diferentes para  $g(\delta t)$ ; así, usando la diferencia de dos valores  $g_1$  y  $g_2$  se encuentra

$$\Delta g = \varepsilon^a \{g, \phi_a\} \approx \{g, \varepsilon^a \phi_a\}, \quad (\text{A.23})$$

donde  $\varepsilon^a = \delta t(v_2^a - v_1^a)$ . Ya que este cambio no tiene significado físico, tanto  $g_1(\delta t)$  como  $g_2(\delta t)$  corresponden al mismo estado físico del sistema. Consideremos ahora una variable dinámica  $F(q, p)$  de primera clase (FC), si su PB con todas las constricciones  $\varphi_s$  son débilmente cero  $\{F, \varphi_s\} \approx 0$ ;  $F$  es de segunda clase si lo anterior no se cumple. Hemos visto que una igualdad que se anula débilmente es fuertemente igual a una combinación lineal de constricciones, por lo tanto, si  $F$  es de FC éste satisface la igualdad fuerte

$$\{F, \varphi_s\} = \lambda_s^r \varphi_r. \quad (\text{A.24})$$

De esta manera, llegamos a la conclusión de que las constricciones FC generan transformaciones que no cambian el estado físico del sistema y que son conocidas como transformaciones de norma (gauge).

Las transformaciones no-físicas de variables dinámicas son a menudo referidas como transformaciones locales o de gauge. Considerando un hamiltoniano de la forma (A.21) y un conjunto completo de constricciones  $\varphi_s \approx 0$ ; para una trayectoria  $T(t) = (q(t), p(t))$  que inicia de  $T_0 = (q(0), p(0))$ , sobre la superficie  $\Gamma_2$  las ecuaciones de movimiento para algún valor de  $v^a(t)$  son dadas por

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}, \\ -\dot{p}_i &= \frac{\partial H'}{\partial q_i} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}, \\ \varphi_s(q, p) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Consideremos una nueva trayectoria  $T' = (q(t) + \delta_0 q(t), p(t) + \delta_0 p(t))$  la cual inicia desde el mismo punto  $T_0$  y satisface las ecuaciones de movimiento para  $v^a(t) + \delta_0 v^a(t)$ . Expandiendo a primer orden estas ecuaciones en las pequeñas variaciones  $\delta_0 q$ ,  $\delta_0 p$ ,  $\delta_0 v^a$  y usando (A.25) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta_0 \dot{q}_i &= \left( \delta_0 q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \delta_0 p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \frac{\partial H_T}{\partial p_i} + \delta_0 v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}, \\ \delta_0 \dot{p}_i &= \left( \delta_0 q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \delta_0 p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \frac{\partial H_T}{\partial q_i} + \delta_0 v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}, \\ &\quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_i} \delta_0 q_i + \frac{\partial \varphi_s}{\partial p_i} \delta_0 p_i = 0.\end{aligned}\tag{A.26}$$

estas ecuaciones conllevan a dar condiciones suficientes para que las trayectorias puedan ser referidas como trayectorias dinámicas y la transición de una trayectoria a otra a un mismo instante de tiempo, represente una transformación de gauge [67].

Por otro lado, si se asume que las variaciones de las variables dinámicas son determinadas por

$$\begin{aligned}\delta_0 q_i(t) &= \varepsilon(t) \{q_i, G\} = \varepsilon(t) \frac{\partial G}{\partial p_i}, \\ \delta_0 p_i(t) &= \varepsilon(t) \{p_i, G\} = -\varepsilon(t) \frac{\partial G}{\partial q_i},\end{aligned}\tag{A.27}$$

donde  $G(q, p)$  es el generador de esta transformación. Realizando una derivada temporal en (A.27) y relacionándola con (A.26) se obtiene que bajo condiciones de solución respecto a  $\delta_0 v^a$  el generador se reduce a ser de la forma (ver [67])

$$G = \lambda^a \phi_a \quad \{G, H_T\} = \gamma^a \phi_a,\tag{A.28}$$

donde  $\lambda^a$  y  $\gamma^a$  son funciones arbitrarias dependientes de las  $q$ 's y de las  $p$ 's. Esto muestra que el generador de transformación involucrado es fuertemente igual a una combinación lineal de constricciones de FC.

La expresión (A.23) tiene también la forma de una transformación canónica infinitesimal [57] y es por esto que las transformaciones de norma son a su vez transformaciones canónicas. La ecuación (A.23) nos permite además introducir una definición más precisa para los observables clásicos: estos serán cantidades dinámicas que sobre la superficie de restricción son invariantes de norma, es decir, si  $G$  es un observable clásico, entonces  $\{G, \phi_a\} \approx 0$  para todas las constricciones FC.

Esto sugiere ahora, la generalización de las ecuaciones de movimiento para cualquier cambio en las variables dinámicas del sistema, con ello surge la idea de una extensión al hamiltoniano de la forma

$$H_E = H' + v^{1a}\phi_{1a} + v^{2a}\phi_{2a}, \quad (\text{A.29})$$

la cual contiene ambas constricciones primarias FC ( $\phi_{1a}$ ) y secundarias ( $\phi_{2a}$ ) multiplicadas por funciones arbitrarias de tiempo. La adición de constricciones secundarias surge dado que los PB's de las constricciones FC, son fuertemente una combinación lineal de constricciones FC, por lo que no solo aparecen constricciones de primera, sino que también pueden haber productos de las de segunda clase, por lo que estas, son entendidas además como generadores de transformaciones de gauge. Esta es la conjetura de Dirac [55], aunque pueden construirse contra ejemplos [56], se postula que en general, todas las constricciones FC, primarias o secundarias son generadores de transformaciones de gauge. De esta manera, dentro de este hamiltoniano extendido ( $H_E$ ), todos los grados de libertad de gauge son manifiestamente presentes en la dinámica involucrada.

Aunque se tenían inicialmente un espacio de fase con dimensión  $2N$ , las existencia de restricciones de primera y segunda clase lo reducen a un determinado subespacio. Sin embargo, la presencia de constricciones FC está asociada con la existencia de transformaciones de norma, con lo que a un solo estado físico le corresponde un conjunto de puntos del espacio de fase. Para establecer una relación unívoca entre puntos del espacio fase y estados físicos, se hace necesario fijar la libertad de norma presente. Esto se consigue imponiendo ciertas condiciones de norma adicionales  $C_a(q, p) \approx 0$ , cuyo número debe ser igual al número de constricciones FC para fijar la norma completamente. Las constricciones FC son generadoras de las transformaciones de norma, por lo que las condiciones de norma, se imponen para que el conjunto resultante de constricciones más condiciones de norma sea de segunda clase, y así no quede libertad de norma remanente. Teniendo esto en cuenta, el número de grados de libertad físicos del sistema es

$$\begin{aligned} 2 \times \left( \# \text{ grados de libertad físicos} \right) &= (\# \text{ de variables canónicas independientes}), \\ &= (\# \text{ total de variables canónicas } (q, p), 2N) \\ &\quad - (\# \text{ de constricciones FC independientes, } N_1) \\ &\quad - (\# \text{ de constricciones de segunda clase, } N_2) \\ &\quad - (\# \text{ condiciones de norma, } N_1), \\ &= 2N - 2N_1 - N_2. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Lo que implica

$$DOF = \frac{1}{2}(2N - 2N_1 - N_2). \quad (\text{A.31})$$

Lo anterior se ha desarrollado para un número de grados de libertad finito, sin embargo, en el caso de una teoría de campos descrita en  $(n + 1)$ - dimensiones con constricciones, debe hablarse en términos de estas cantidades (constricciones a un tiempo fijo definidas para cada punto del espacio) pero por punto del espacio; de esta manera, el formalismo desarrollado en la sección anterior podría ser aplicado, tomando el límite continuo.

## Apéndice B

# Simulación del transporte paralelo sobre una esfera.

La simulación aquí presentada, fue realizada en Python (versión 3.6.9) y muestra el comportamiento de un vector bajo transporte paralelo sobre una esfera.

```
import numpy as np
from numpy import arange
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D, get_test_data

fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')
fig.set_size_inches(8,8)

for j in arange (np.pi/10,np.pi,np.pi/40):
    theta=j
    z_circle = np.ones(len(x_circle))*np.cos(theta)
    ax.plot(np.sin(theta)*x_circle,np.sin(theta)*y_circle,z_circle,'orange')

theta = np.pi*60/180
z_circle = np.ones(len(x_circle))*np.cos(theta)
ax.plot(np.sin(theta)*x_circle,np.sin(theta)*y_circle,
        z_circle,'red',linewidth=3,label="60°")
fig.set_size_inches(8,8)
theta = 60*np.pi/180
```

```
for i in arange(0,np.pi*2+np.pi/20,np.pi/20):

    x_pos = [np.sin(theta)*np.cos(i)]
    y_pos = [np.sin(theta)*np.sin(i)]
    z_pos = [np.cos(theta)]

    x_direct = [-np.cos(np.cos(theta)*i)*np.cos(theta)*
                np.cos(i)-(1/np.sin(theta))
                *sin(np.cos(theta)*i)*np.sin(i)]
    y_direct = [-np.cos(np.cos(theta)*i)*np.cos(theta)*
                np.sin(i)+(1/np.sin(theta))
                *np.sin(np.cos(theta)*i)*np.cos(i)]
    z_direct = [np.cos(np.cos(theta)*i)*np.sin(theta)]

    ax.quiver(x_pos,y_pos,z_pos,x_direct,
              y_direct,z_direct, length=0.5)

    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('Y')
    ax.set_zlabel('Z')
    ax.legend()
    disp.clear_output(wait=True)
    disp.display(plt.gcf())
```

# Bibliografía

- [1] Merced Montesinos, Ricardo Escobedo, Jorge Romero, and Mariano Celada. Canonical analysis of  $n$ -dimensional palatini action without second-class constraints. *Phys. Rev. D*, 101:024042, Jan 2020.
- [2] A. Einstein. Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In *Albert Einstein: Akademie-Vorträge*, pages 8–64. Wiley, dec 2006.
- [3] A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. In *Albert Einstein: Akademie-Vorträge*, pages 88–92. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, FRG, sep 2006.
- [4] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. [arXiv:gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019), dec 1997.
- [5] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate student series in physics. Taylor & Francis, 2003.
- [6] A. Einstein. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. In *Albert Einstein: Akademie-Vorträge*, pages 78–87. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, FRG, sep 2006.
- [7] JJ O’Connor and EF Robertson. General relativity. may 1996.
- [8] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, Fausto Acernese, Kendall Ackley, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addresso, RX Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102, 2016.
- [9] B P Abbott. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger.
- [10] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, et al. [arXiv:1602.03840](https://arxiv.org/abs/1602.03840), feb.

- [11] Adrian Cho. Gravitational waves, Einstein's ripples in spacetime, spotted for first time. *Science*, feb 2016.
- [12] Dieter Simon. *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914-1932*. John Wiley & Sons, 2012.
- [13] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1916, Seite 189-196, 1916.
- [14] Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 875(1):L1, apr 2019.
- [15] Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 875(1):L6, apr 2019.
- [16] Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring. *The Astrophysical Journal*, 875(1):L5, apr 2019.
- [17] Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration. *The Astrophysical Journal*, 875(1):L3, apr 2019.
- [18] Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation. *The Astrophysical Journal*, 875(1):L2, apr 2019.
- [19] Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 875(1):L4, apr 2019.
- [20] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *Gen. Relativ. Gravit.*, 40(9):1997, 2008.
- [21] Thomas Thiemann. *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity*. [arXiv:gr-qc/0110034](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0110034), 2008.
- [22] Darío Núñez et al. Introducción al formalismo adm. *Revista Mexicana de Física*, 37(4):720–747, 1990.
- [23] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [24] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Quantum theory of geometry: I. area operators. *Classical and Quantum Gravity*, 14(1A):A55, 1997.

- [25] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys. B*, 442(3):593, 1995.
- [26] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity: The first 25 years. 28(15), aug 2011.
- [27] J. Fernando Barbero G. Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times. *Phys. Rev. D*, 51(10):5507–5510, 1995.
- [28] Giorgio Immirzi. Real and complex connections for canonical gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 14(10):L177–L181, oct 1997.
- [29] S. Alexandrov and D. Vassilevich. Area spectrum in lorentz covariant loop gravity. *Phys. Rev. D*, 64:044023, 2001.
- [30] Marc Geiller, Marc Lachièze-Rey, Karim Noui, and Francesco Sardelli. A lorentz-covariant connection for canonical gravity. *SIGMA*, 7:83, 2011.
- [31] Peter Peldán. Actions for gravity, with generalizations: A title. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):1087–1132, 1994.
- [32] Merced Montesinos, Diego González, Mariano Celada, and Bogar Díaz. Reformulation of the symmetries of first-order general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 34(20):205002, 2017.
- [33] Merced Montesinos, Diego Gonzalez, and Mariano Celada. The gauge symmetries of first-order general relativity with matter fields. *Classical and Quantum Gravity*, 35, 9 2018.
- [34] Mariano Celada, Diego González, and Merced Montesinos. BF gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 33(21):213001, 2016.
- [35] Ted Jacobson and Lee Smolin. The left-handed spin connection as a variable for canonical gravity. *Phys. Lett. B*, 196(1):39, 1987.
- [36] T Jacobson and L Smolin. Covariant action for ashtekar’s form of canonical gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 5(4):583, 1988.
- [37] Joseph Samuel. A lagrangian basis for ashtekar’s reformulation of canonical gravity. *Pramana*, 28(4):L429, 1987.
- [38] Sören Holst. Barbero’s Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 53(10):5966–5969, 1996.
- [39] S Alexandrov. So(4,c)-covariant ashtekar-barbero gravity and the immirzi parameter. *Classical and Quantum Gravity*, (20):4255–4268, oct.

- [40] Nuno Barros E Sá. Hamiltonian analysis of general relativity with the immirzi parameter. *International Journal of Modern Physics D*, 10(03):261–272, jun 2001.
- [41] Merced Montesinos, Jorge Romero, and Mariano Celada. Revisiting the solution of the second-class constraints of the holst action. *Phys. Rev. D*, 99:064029, Mar 2019.
- [42] GF Torres del Castillo. Differentiable manifolds. *A Theoretical Physics Approach (Birkhäuser, Boston, 2012)*, 2012.
- [43] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60. Springer New York, 1989.
- [44] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [45] Sadri Hassani. *Mathematical physics: A modern introduction to its foundations, second edition*. Springer International Publishing, 2013.
- [46] George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. Chapter 4 - Tensors and Differential Forms. In George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris, editors, *Mathematical Methods for Physicists (Seventh Edition)*, pages 205–249. Academic Press, Boston, seventh ed edition, 2013.
- [47] Peter Szekeres. *A course in modern mathematical physics: groups, Hilbert space and differential geometry*. Cambridge University Press, 2004.
- [48] Bert Janssen. Teoría de la relatividad general. *Granada: Universidad de Granada*, 2013.
- [49] Albert Einstein. The Formal Foundation of the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, 1914:1030–1085, 1914.
- [50] George David Birkhoff and Rudolph Ernest Langer. *Relativity and modern physics*. Harvard University Press, 1923.
- [51] Matthias Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics, 2011.
- [52] Kurt Sundermeyer. Constrained dynamics (lecture notes in physics 169). *Sprlnger-Verlag, Berlin*, 1982.
- [53] D. Hilbert. Die grundlagen der physik . (erste mitteilung.). *Nachrichten von der Gesellaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1915:395–408, 1915.

- [54] Kurt Sundermeyer. *Symmetries in fundamental physics*, volume 176. Springer, 2014.
- [55] Paul Adrien Maurice Dirac. *Lectures on quantum mechanics*, volume 2. Courier Corporation, 2001.
- [56] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1994.
- [57] Andrew Hanson, Tullio Regge, and Claudio Teitelboim. *Constrained hamiltonian systems*. Accademia nazionale dei Lincei : Contributi del centro linceo interdisciplinare di scienze matematiche e loro applicazioni. [Accademia Nazionale dei Lincei](#), 1976.
- [58] Ericourgoulhon. 3+1 formalism and bases of numerical relativity. [arXiv](#), 3 2007.
- [59] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [60] Larry Smarr and James W. York. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D*, 17:2529–2551, May 1978.
- [61] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Physical Review*, 116(5):1322, 1959.
- [62] Merced Montesinos, Jorge Romero, and Mariano Celada. Manifestly Lorentz-covariant variables for the phase space of general relativity. *Phy. Rev. D*, 97(2), nov 2018.
- [63] Attilio Palatini. Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di hamilton. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 43:203–212, 12 1919.
- [64] N Bodendorfer, T Thiemann, and A Thurn. New variables for classical and quantum gravity in all dimensions: {II}. Lagrangian analysis. *Classical and Quantum Gravity*, 30(4):45002, 2013.
- [65] Merced Montesinos and Mariano Celada. Canonical analysis with no second-class constraints of  $BF$  gravity with immirzi parameter. *Phys. Rev. D*, 101:084043, Apr 2020.

- [66] Merced Montesinos, Jorge Romero, and Mariano Celada. Canonical analysis of holst action without second-class constraints. *Phys. Rev. D*, 101:084003, Apr 2020.
- [67] M. Blagojević. *Gravitation and Gauge Symmetries*. Series in high energy physics, cosmology, and gravitation. [Institute of Physics Pub.](#), 2002.