

Implementación de la anisotropía sísmica
TTI en la migración RTM 2D usando
computación de alto desempeño.

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Autor:

Carlos Manuel Ocampo Ortiz



COLCIENCIAS
Ciencia, Tecnología e Innovación

**Programa de Física
Departamento de Física y Geología
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad de Pamplona**

Septiembre de 2017

Implementación de la anisotropía sísmica TTI en la migración RTM 2D usando computación de alto desempeño.

*Trabajo de investigación como requisito parcial
para optar al título de Físico*

Autor:

Carlos Manuel Ocampo Ortiz
Código: 1094267453

Dirigida por

Nestor Alonso Arias Hernandez

Codirigida por

Jairo Alberto Torres Peña



COLCIENCIAS
Ciencia, Tecnología e Innovación

Programa de Física
Departamento de Física y Geología
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad de Pamplona

Septiembre de 2017

*A mi mamá,
mi más valioso tesoro.*

*A mi papá y hermanos:
Pedro, Pablo y Cristian.*

*A toda mi familia...
Esta va para ustedes, los amo.*

Agradecimientos

Al profesor Jairo Alberto Torres Peña por su dirección, paciencia y confianza brindada durante el desarrollo de este proyecto. Al profesor Nestor Alonso Arias Hernandez, por sus consejos y apoyo durante mi estadía en la Universidad de Pamplona. Al grupo de investigación en Geología y Geofísica de la Universidad de Pamplona (PANGEA) por abrirme las puertas y brindarme la oportunidad de vincularme en su trabajo investigativo. A Ecopetrol y Colciencias, quienes cofinancian el programa RC 0266 de 2013, dentro del cual se desarrolló este trabajo. A RWTH Aachen University y al Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín (ITM) por permitir el acceso a su infraestructura tecnológica para la ejecución de los códigos. A Juan Guillermo Paniagua del ITM por suministrar el código base de RTM. A mis amigos, tíos y tías, primos y allegados quienes más de una vez me dieron ánimos para continuar cuando el camino se tornaba difícil. A Carolina, por todo, absolutamente todo.

A los que he nombrado, y a aquellos que se me escapan, muchas gracias por ayudarme a dar un paso más en lo que considero el camino hacia la mejor versión de mí.

Resumen

En este trabajo se presentan los principios básicos de la anisotropía sísmica, haciendo énfasis en los dos tipos de anisotropía más usada en exploración de hidrocarburos: la anisotropía VTI (*Vertical Transverse Isotropy*) y la anisotropía TTI (*Tilted Transverse Isotropy*). Se revisan las ecuaciones de onda que modelan el fenómeno de propagación de ondas en dichos medios, así como las aproximaciones acústicas definida por Alkhalifah y Zhang. Se presentan los algoritmos numéricos desarrollados que resuelven la ecuación de onda del medio acústico con anisotropía elíptica VTI y TTI con base en la técnica de FD (*Finite Differences*), haciendo uso de operadores temporales y espaciales de segundo y octavo orden, respectivamente. Dicho algoritmo numérico permite obtener el campo de onda y el sismograma sintético que contribuyen al análisis de la propagación de las ondas en modelos con estos tipos de anisotropía.

En una segunda parte del trabajo se exponen los métodos de migración sísmica más empleados, así como sus alcances y limitaciones para posteriormente profundizar en el método de RTM (*Reverse Time Migration*). Se comparan cualitativamente las imágenes migradas TTI, VTI e isotropas con datos modelados con anisotropía TTI, en ellas se observan las diferencias en cuanto a la resolución sísmica y posición de los eventos. Para el caso en el que la anisotropía TTI es tenida en cuenta en el algoritmo RTM, se evidenciaron imágenes bien posicionadas y con buena resolución. Dichas imágenes se obtienen a partir de datos sintéticos correspondientes a modelos con reflectores planos e inclinados (Fletcher et al., 2009) y también del modelo de BP creado por (Shah, 2007) (cortesía de *BP Exploration Operation Company Limited*).

Para finalizar, se considera el enfoque HPC (*High Performance Computing*) y se muestran datos del desempeño del algoritmo (escrito en lenguaje C) en diferentes arquitecturas CPU (*Central Processing Unit*) y GPU (*Graphics Processing Unit*). Para ello se exploraron las posibilidades que ofrece CUDA (*Compute Unified Device Architecture*) y se implementó en paralelo la propagación de ondas acústicas considerando anisotropía TTI elíptica,

obteniendo, en primer lugar, imágenes finales más fieles al modelo de entrada, además una reducción en el tiempo de ejecución del 98% en el mejor de los casos.

Índice

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
1. Introducción	1
2. Fundamentos de anisotropía sísmica	5
2.1. Introducción	5
2.2. Definición y algunas causas anisotropía sísmica	5
2.2.1. Anisotropía debida a la escala	5
2.2.2. Anisotropía debida a la estructura del mineral	6
2.2.3. Anisotropía debida a otros fenómenos	7
2.3. Anisotropía VTI y TTI	8
2.4. Tensor de elasticidad	9
2.5. Anisotropía débil	16
2.6. Velocidad de fase en un medio elástico VTI	16
2.7. Velocidad de fase en un medio elástico TTI	17
2.8. Velocidad de fase en un medio acústico VTI y TTI	18
2.9. Anisotropía elíptica	20
3. Ecuaciones de onda acústica y diferencias finitas	23
3.1. Introducción	23
3.2. Propagación de ondas acústicas	23
3.2.1. Ecuación de onda para un medio acústico isótropo	24
3.2.2. Ecuación de onda para un medio acústico con anisotropía transversal vertical (VTI)	26
3.2.3. Ecuación de onda para un medio acústico con anisotropía transversal inclinada (TTI)	29
3.3. Derivación de los operadores en FD	31
3.3.1. Tabla de Taylor	31
3.3.2. Algunas consideraciones	33
3.4. Solución en diferencias finitas de la Ecuación acústica VTI	33

3.5. Solución en diferencias finitas de la Ecuación acústica TTI . . .	36
4. Migración sísmica	41
4.1. Introducción	41
4.2. Relación entre migración y modelado	42
4.3. Métodos de migración	42
4.4. Migración Reversa en el Tiempo	45
4.4.1. Principio de Huygens	45
4.4.2. Principio de reversibilidad temporal	46
4.4.3. Principio de reciprocidad	46
4.4.4. Condición de imagen	47
4.4.5. Filtro Laplaciano	48
4.4.6. Implementación del algoritmo	48
5. Experimentos numéricos	53
5.1. Introducción	53
5.2. Modelo homogéneo	53
5.3. Modelo geológico complejo	55
5.4. Modelo BP	67
6. Análisis de resultados	73
6.1. Introducción	73
6.2. Modelado en CUDA	73
6.3. RTM en modelo geológico complejo	74
6.4. RTM en el modelo BP	76
Conclusiones	79
Recomendaciones	81
Bibliografía	83
Lista de acrónimos y siglas	86
Lista de símbolos	89

Índice de figuras

2.1. Diferentes sistemas cristalinos y sus parámetros. Tomada y modificada de CSIC (2017)	6
2.2. Isotropía transversal en rocas sedimentarias y esquema representativo.	9
2.3. Frente de onda esférico en un medio homogéneo isótropo (izquierda) y frente de onda no esférico en un medio homogéneo anisótropo (derecha) (Torres, 2010)	15
2.4. Velocidad de fase exacta (línea roja), aproximada (línea verde) y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda P en un medio TTI donde $\phi = 60^{\text{deg}} \approx 1.047$ rad (Torres, 2010).	19
2.5. Velocidad de fase exacta (línea roja), aproximada (línea verde) y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda P en un medio TTI donde $\phi = 90^{\text{deg}} \approx 1.571$ rad (Torres, 2010).	20
2.6. Valores de los parámetros de anisotropía δ y ε para ciertas rocas. Tomada y modificada de Thomsen (1986).	21
3.1. Captura del campo de onda P en el instante $t = 0.02$ s para un medio acústico, homogéneo e isótropo con velocidad $v_p = 5000$ m/s, obtenida por medio de FD. El modelo construido posee dimensiones $L_x = 400$ m y $L_z = 200$ m con paso de malla $dx = dz = 1$ m. La posición de la fuente es $(x_s, z_s) = (200, 100)$ m.	26
3.2. Captura del campo de onda P en el instante $t = 0.02$ s para un medio acústico y homogéneo con velocidad $v_p = 5000$ m/s, $\varepsilon = \delta = 0.25$ y $v_{nmo} \approx 599$ m/s, obtenida por medio de FD. El modelo construido posee dimensiones $L_x = 400$ m y $L_z = 200$ m con paso de malla $dx = dz = 1$ m. La posición de la fuente es $(x_s, z_s) = (200, 100)$ m. La flecha roja indica la dirección del eje de simetría.	29

3.3.	Captura del campo de onda qP en el instante $t = 0.02$ s para un medio homogéneo con anisotropía TTI, velocidad $v_p = 5000$ m/s, $\varepsilon = \delta = 0.25$, $v_{nmo} \approx 599$ m/s y $\phi \approx 40.1^{\text{deg}} = 0.7$ rad, obtenida por medio de FD. El modelo construido posee dimensiones $L_x = 400$ m y $L_z = 200$ m con paso de malla $dx = dz = 1$ m. La posición de la fuente es $(x_s, z_s) = (200, 100)$ m. La flecha roja indica la dirección del eje de simetría.	30
3.4.	Ondícula que simula la fuente del pulso con una frecuencia de $\omega_0 = 30$ Hz y un tiempo inicial de $t_0 = 0.05$ s . El eje horizontal representa el tiempo medido en segundos y el eje vertical la amplitud.	36
4.1.	Fases de ejecución del algoritmo RTM (SeismicCity, 2016). . .	43
4.2.	(a) Datos sintéticos migrados con un algoritmo OWWE. (b) Datos sintéticos migrados con un algoritmo RTM (Farmer et al., 2009)	44
4.3.	Calidad de la imagen Vs. exactitud en la velocidad. Tomada y modificada de Farmer et al. (2009)	44
4.4.	Diagrama de flujo para la implementación de un algoritmo RTM, basado en la ecuación de onda para medios isótropos. .	50
4.5.	Diagrama de flujo para la implementación de un algoritmo RTM, basado en la ecuación de onda para medios con anisotropía VTI elíptica.	51
4.6.	Diagrama de flujo para la implementación de un algoritmo RTM, basado en la ecuación de onda para medios con anisotropía TTI elíptica.	52
5.1.	Comparación del desempeño del modelado. Tiempo de ejecución: Algoritmo secuencial Vs. Algoritmo paralelizado usando CUDA-C.	54
5.2.	Tiempo de ejecución Vs. <i>Threads</i> por bloque.	55
5.3.	Modelo geológico complejo, tomado y modificado de Fletcher et al. (2009).	56
5.4.	Campo de onda P . Propagación en tiempo. Version 1 del modelo.	58
5.5.	Sismograma sintético. Fuente ubicada en $x_s = 250$ m y $z_s = 1$ m. Versión 1 del modelo.	58
5.6.	Campo de onda P . Retropropagación en tiempo. Version 1 del modelo.	59
5.7.	Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, previa a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).	60

5.8. Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, previa a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).	60
5.9. Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, previa a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).	61
5.10. <i>CPU time</i> para las tres versiones del algoritmo RTM. Modelo geológico complejo (ver Figura 5.3). Parámetros de ejecución: Tablas 5.2 y 5.3	62
5.11. Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).	62
5.12. Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).	63
5.13. Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).	63
5.14. Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 2 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.15$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3c).	64
5.15. Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 2 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.15$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3c).	64
5.16. Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 2 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.15$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3c).	65
5.17. Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 3 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.24$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3d).	65
5.18. Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 3 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.24$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3d).	66
5.19. Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 3 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.24$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3d).	66
5.20. Sección del modelo BP (Shah, 2007) usada para la ejecución de los algoritmos de RTM isótropo, VTI y TTI. Extensión 1801×2001 , $\Delta x = 6.25$ m, $\Delta z = 6.25$ m.	68
5.21. Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Modelo BP.	69
5.22. Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Modelo BP.	70

5.23. Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Modelo BP.	71
6.1. Detalle 1. <i>Imaging</i> del modelo geológico complejo. Versión 3. Nótese el evento horizontal, el cual se aplana de mejor manera para el algoritmo RTM TTI.	74
6.2. Detalle 2. <i>Imaging</i> del modelo geológico complejo. Versión 3. Nótese el evento vertical definido correctamente con menos cantidad de artefactos para el algoritmo RTM TTI. La línea azul representa la correcta posición de los eventos.	75
6.3. Detalle 3. <i>Imaging</i> del modelo geológico complejo. Versión 3. Nótese el evento inclinado, el cual se posiciona correctamente para el algoritmo RTM TTI. La línea roja representa la correcta posición de los eventos.	75
6.4. Detalle 1. <i>Imaging</i> del modelo BP. Nótese las capas de reflectores a la izquierda, las cuales se definen y ubican de mejor manera para el algoritmo RTM TTI.	76
6.5. Detalle 2. <i>Imaging</i> del modelo BP. Nótese la base de la zona salina, la cual sólo tiene continuidad para el algoritmo RTM TTI.	77
6.6. Detalle 3. <i>Imaging</i> del modelo BP. Nótese una mayor continuidad en los eventos para el algoritmo RTM TTI.	78

Índice de Tablas

2.1. Notación de Voigt para el cambio de índices del tensor/matriz de rigidez (Thomsen, 2001).	10
3.1. Método de Taylor para la obtención de esquemas en FD.	32
5.1. Parámetros para el modelado de la propagación en CPU y GPU.	54
5.2. Parámetros para la ejecución del algoritmo RTM en el modelo geológico complejo.	57
5.3. Coordenada x_s de las fuentes sísmicas para la ejecución del algoritmo RTM sobre el modelo geológico complejo.	57
5.4. Parámetros para la ejecución del algoritmo RTM en el modelo BP.	67
5.5. Coordenada x_s de las fuentes sísmicas para la ejecución del algoritmo RTM sobre el modelo BP.	68

Capítulo 1

Introducción

La sísmica de reflexión para exploración de hidrocarburos ha sido uno de los métodos geofísicos más desarrollados por su profundidad de penetración, su resolución y por el interés económico que representa. Los geofísicos han desarrollado ampliamente el modelo de la propagación de ondas sísmicas en el subsuelo y la migración sísmica con el fin de obtener imágenes del subsuelo con la mejor resolución y el mejor posicionamiento de los reflectores, de tal forma que contribuya a disminuir la incertidumbre de la interpretación sísmica.

Una de las propiedades del medio que debe tenerse en cuenta para mejorar la resolución y el posicionamiento de los reflectores es la anisotropía sísmica, la cual es definida en este contexto, como la variación de la velocidad con la dirección en la cual se propagan las ondas. Dicha propiedad es exhibida por ciertas rocas como las arcillas, entre otras (Thomsen, 1986).

La teoría de anisotropía está basada en las ecuaciones del medio elástico continuo con anisotropía y según el caso, es posible representar medios elásticos homogéneos VTI (*Vertical Transverse Isotropy*) y TTI (*Tilted Transverse Isotropy*) valiéndose de las simetrías del tensor elasticidad (Love, 1927). A partir de las ecuaciones de velocidad de fase para las ondas P y SV en medios de este tipo, se reescriben las diferentes expresiones para dichas velocidades en términos de los coeficientes elásticos de la matriz de Voigt (Daley y Hron, 1977) y en términos de los parámetros de Thomsen (Thomsen, 1986), además de su aproximación acústica (Alkhalifah y Tsvankin, 1995).

El modelado sísmico utiliza los métodos numéricos para resolver las ecuaciones que modelan la propagación de ondas. Entre los existentes se hace énfasis en el método de FD (*Finite Differences*). Dependiendo del tipo

de medio a modelar se deben considerar diferentes ecuaciones de onda. La ecuación acústica o ecuación de presión considera el caso en donde sólo se propaga un tipo de onda, la onda P . La ecuación de onda elástica isótropa considera dos tipos de onda, la onda P y la onda S , conocidas también como onda compresional y onda de corte. La ecuación de onda elástica con anisotropía considera tres tipos de ondas, la onda qP , la onda qSV y la onda qSH , estas dos últimas ondas se polarizan en un plano perpendicular al de la onda qp (cabe aclarar que en un medio elástico isótropo también existe polarización en la onda secundaria, sin embargo la velocidad de la onda SV es igual a la velocidad de la onda SH). Conociendo las ecuaciones que gobiernan la propagación de las ondas en el medio, el método de FD provee una solución aproximada de dichas ecuaciones y de esta forma, a través del modelado numérico, se pueden describir los diferentes fenómenos que se presentan en el subsuelo cuando las ondas sísmicas se propagan, tales como reflexión, refracción, difracción, dispersión geométrica, entre otros (Torres, 2010).

En el presente trabajo se considera una aproximación de la ecuación de onda elástica en dos dimensiones para un medio con anisotropía tipo VTI y TTI, en donde se considera nulo el valor de la componente de la velocidad para la onda SV en dirección paralela al eje de simetría del medio (Alkhalifah, 2000; Zhang y Hoversten, 2005). La ecuación se modela usando operadores discretos en FD con malla homogénea en un segundo orden de aproximación para las derivadas temporales y en un octavo orden de aproximación para las derivadas espaciales, este tipo de esquema computacional calcula las variables del medio en cada nodo de la malla (Alkhalifah, 2000).

En la industria se efectúan dos tipos de migración por extrapolación del campo de onda, la que se realiza en dirección del tiempo y aquella que se hace dirección de la profundidad, ambas pueden ser ejecutadas antes o después de apilar la información, conocidas como migración pre-apilado y migración pos-apilado, respectivamente. La extrapolación en dirección del tiempo es conocida como RTM (*Reverse Time Migration*) (Baysal et al., 1983) y trabaja con la ecuación de onda completa, solucionando la ecuación de onda acústica. La migración por extrapolación en la dirección de la profundidad está basada en las ecuaciones de onda unidireccionales o ecuaciones de sentido único OWWE (*One-Way Wave Equation*) (Gazdag, 1978).

En este trabajo se describe la solución de la ecuación de onda acústica, esta técnica de solución se basa en la propagación numérica de dos campos de onda, uno hacia adelante, el cual es modelado desde la fuente, y otro hacia

atrás, el cual corresponde al campo registrado en los receptores. Estos campos son correlacionados usando una condición de imagen tipo correlación propuesta por Claerbout (1966), la cual construye el reflector en el punto donde los dos campos coinciden en tiempo y espacio. Posteriormente, se extiende el método para considerar anisotropía tipo VTI y TTI al solucionar la ecuación de onda correspondiente a cada caso.

La estructura del documento está dada en capítulos; una vez finalizada esta introducción se presenta el tema de anisotropía sísmica: definiciones, causas, tipos de anisotropía y la teoría que permite modelar medios con anisotropía transversal. En el tercer capítulo se describe el efecto de la anisotropía en el modelado de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la propagación de onda en medios acústicos VTI y TTI. El cuarto capítulo expone algunos métodos de migración y profundiza en RTM, allí se muestra la metodología empleada y se detalla en cada uno de los pasos del algoritmo, desde la generación de datos sintéticos hasta la obtención de una imagen filtrada. En el quinto capítulo se muestran diferentes experimentos numéricos para modelos simples: homogéneos y con reflectores planos e inclinados, además de modelos complejos como el de BP (Shah, 2007); en el sexto se analizan los resultados, resaltando las diferencias entre los resultados obtenidos considerando los distintos tipos de anisotropía además de la implementación en paralelo del algoritmo, al comparar datos del desempeño del en diferentes arquitecturas. Finalmente un capítulo de conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

|

Capítulo 2

Fundamentos de anisotropía sísmica

2.1. Introducción

En los siguientes párrafos se presentan las definiciones y conceptos fundamentales de la anisotropía sísmica, sus causas, las ecuaciones y las expresiones en las cuales se basa, además se referencian los casos particulares que se tratarán posteriormente, junto con las consideraciones y aproximaciones hechas para simplificar las ecuaciones que describen este fenómeno.

2.2. Definición y algunas causas anisotropía sísmica

En principio, en la exploración sísmica se asumía que los estratos que componen el subsuelo a explorar son medios isótropos, es decir, cuyas velocidades sísmicas no varían con la dirección de propagación de las ondas, sin embargo el comportamiento real del subsuelo es diferente, este exhibe anisotropía. Se define la anisotropía sísmica como la variación de la velocidad con la dirección de propagación de las ondas y se presenta comúnmente en materiales como las arcillas, cristales y arenas, entre otros (Thomsen, 1986); así mismo en intercalación de estratos delgados y formaciones con alto grado de fracturamiento (Torres, 2010).

2.2.1. Anisotropía debida a la escala

En el contexto de la sísmica de prospección, se usa el término anisotropía para indicar la dependencia de la velocidad de propagación de las ondas sísmicas con la dirección del vector de onda y es causada por estructuras en una escala significativamente más pequeña que la longitud de onda utilizada, por ejemplo, un medio formado por diversas capas isótropas puede mostrarse

anisótropo si es censado con una longitud de onda (λ) mayor al espesor (ϵ) de las capas ($\lambda > 10\epsilon$) (Backus, 1962).

2.2.2. Anisotropía debida a la estructura del mineral

En teoría, la organización atómica de un material puede darse de 32 formas diferentes, estas pueden reunirse en siete grupos con parámetros característicos, como longitud, orientación y posición de los ejes de su celda unitaria¹, tal y como se aprecia en la Figura 2.1.

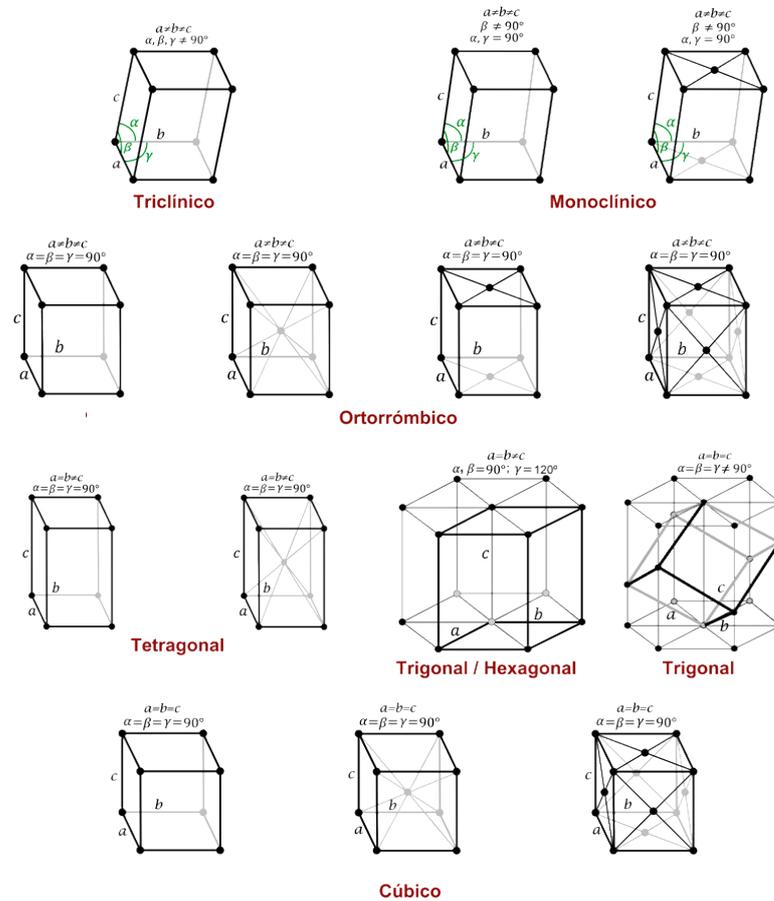


Figura 2.1: Diferentes sistemas cristalinos y sus parámetros. Tomada y modificada de CSIC (2017)

Si un material presenta una organización cúbica se considera isótropo, si se organiza en cualquier otro tipo de red (hexagonal, trigonal, tetragonal, rómbica, ortorrómbica, monoclínica o triclínica) presenta anisotropía.

¹Se define una celda unitaria como la subdivisión más pequeña posible del arreglo atómico propio de un material que continúa conservando las propiedades de este último.

2.2.3. Anisotropía debida a otros fenómenos

En la sísmica de prospección cualquier estructura al interior de la tierra que se repita durante cierta extensión puede causar anisotropía, dichas estructuras pueden ser inclusiones ², fracturas paralelas, granos (no esféricos) orientados e incluso estratos³ (Villamizar, 2013). Dado que en las rocas el ordenamiento de átomos, iones y moléculas encontrado en cristales rara vez persiste en distancias tan grandes como las típicas longitudes de onda sísmica, la anisotropía observada en los registros sísmicos se debe al ordenamiento de otros elementos. A continuación se listan unos cuantos:

- Flujo de rocas ígneas que produce la orientación de cristalitas elongadas.
- Arreglo preferencial de granos de arena (aproximadamente elipsoidales) con su eje largo sobre el plano horizontal.
- Compactación vertical bajo presión de sobrecarga que resulta en una posterior rotación de los ejes de los granos sobre el plano horizontal.
- Formación de fracturas orientadas bajo esfuerzos de tensión.
- Recristalización a gran escala debido al metamorfismo, causal de foliación o esquistosidad ⁴.
- Distorsiones horizontales u oblicuas debido a la compresión tectónica.
- Aperturas o cierres preferenciales de fallas compilantes y poros causadas por esfuerzos principales desiguales.

Cada uno de estos fenómenos presenta simetría axial y por lo tanto conduce a la llamada isotropía transversal, el tipo más simple de anisotropía, donde todas las direcciones que se alineen con el eje de simetría son equivalentes. La combinación de muchos de estos agentes orientados de distinta manera causa tipos más complicados de anisotropía. Por ejemplo, fracturas paralelas con un plano de simetría vertical dentro de un medio horizontalmente laminado causan simetría ortorrómbica (Helbig, 1994).

²Se conoce como inclusión a un cuerpo o sustancia encerrada por otra. Una diferencia significativa entre sus propiedades causa el fenómeno de anisotropía.

³En el contexto geológico, un estrato es sinónimo de capa. Cuando las rocas se disponen en sucesivos estratos se dice que están estratificadas.

⁴La esquistosidad es la propiedad que presentan algunas rocas de romperse a lo largo de superficies aproximadamente paralelas.

2.3. Anisotropía VTI y TTI

Como se estableció anteriormente, la anisotropía es causada por un alineamiento en la estructura del material a una escala más pequeña que la resolución del método sísmico. Mediante su observación es posible rastrear su causa y así recuperar información a una escala más fina que lo que limita la resolución. Entre los fenómenos de interés se encuentra la formación de capas finas, tectónica de granos, diaclasas⁵, fracturas y su orientación e intensidad; todos los anteriores son parámetros significativos para revelar la ubicación y el mejor camino hacia reservorios de petróleo y gas (Helbig, 1994). Tener en cuenta la anisotropía en el procesamiento de datos sísmicos mejora la calidad de las imágenes migradas ya que se aproxima en mayor medida el medio considerado al subsuelo real, de la misma forma sucede para cualquier parámetro que se determine de los mismos. Comúnmente, se consideran dos tipos de anisotropía en exploración de hidrocarburos: la anisotropía VTI y la anisotropía TTI. Generalmente este tipo de anisotropía es causado por una estratificación menor en escala que la longitud de onda sísmica. En cualquiera de los dos casos de anisotropía polar, existe un eje de simetría perpendicular a la dirección en la cual se depositan los sedimentos (normal a la estratificación), mientras las velocidades en el plano normal a este eje son idénticas. Si el eje de simetría es vertical, la anisotropía es llamada anisotropía transversal vertical, más conocida por sus siglas en inglés como VTI, en este caso la isotropía está limitada al plano horizontal. Si el eje de simetría no es vertical, esta recibe el nombre de anisotropía transversal inclinada o TTI, también por sus siglas en inglés (Torres, 2010). Este fenómeno se aprecia en la Figura 2.2.

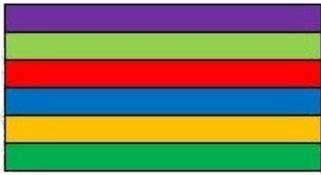
⁵Fractura o fisura en una masa rocosa en la que no se observa un movimiento relativo de sus lados.



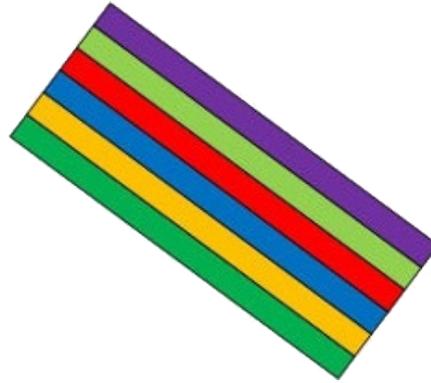
(a) Estratos con eje de simetría vertical (VTI) (Chacon, 2016).



(b) Afloramiento con estratos inclinados (Chacon, 2016).



(c) Esquema: Anisotropía VTI. Tomada y modificada de Ensiklopedi (2009).



(d) Esquema: Anisotropía TTI. Tomada y modificada de Ensiklopedi (2009).

Figura 2.2: Isotropía transversal en rocas sedimentarias y esquema representativo.

2.4. Tensor de elasticidad

Se denomina medio elástico a aquel que puede sufrir deformaciones debidas a fuerzas externas y recuperar su forma original cuando dichas fuerzas desaparecen. Una onda propagándose en dicho medio puede ser descrita tensorialmente en términos de su velocidad de propagación y las fuerzas presentes en el medio, como sigue

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

donde ρ es la densidad del medio, σ_{ij} es el tensor de esfuerzos, u_i los desplazamientos y x_j las coordenadas espaciales (Helbig, 1994). Similarmente, la ley de Hooke (Ecuación constitutiva de Lam-Hooke) puede escribirse como

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

donde ε_k es llamado tensor de deformación y es de segundo orden; mientras que c_{ijkl} corresponde al tensor de constantes elásticas (rigidez) del medio. En

general c tiene ochenta y un componentes (3^4), sin embargo, ambos tensores esfuerzo y deformación son simétricos, lo que resulta en

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk},$$

reduciéndose así el reduciéndose así el número de constantes elásticas a veintiún (Love, 1927). Este es el número más grande de constantes elásticas que podría necesitarse para describir particularmente a un material anisótropo. Un material que requiera todas las veintiuna constantes para su completa descripción pertenece a la clase de simetría triclinica. En contraste, el número más pequeño de constantes elásticas necesario para describir un material es dos. Un medio que requiera sólo dos constantes para su completa descripción recibe el nombre de isótropo, y las dos constantes elásticas pueden expresarse como los bien conocidos parámetros de Lamé, λ y μ (los cuales se relacionan físicamente con la rigidez e incompresibilidad del medio, respectivamente) (Slawinski, 2003).

En algunos casos la manera más conveniente de expresar el tensor de rigidez es por medio de una matriz 6×6 . Existe un método simple para traducir los índices entre la notación tensorial, c_{ijkl} y la notación matricial C_{mn} conocido como notación de Voigt (Thomsen, 2001):

Tensor	ij o kl	11	22	33	32=23	31=13	21=12
Matriz	m o n	1	2	3	5	6	7

Tabla 2.1: Notación de Voigt para el cambio de índices del tensor/matriz de rigidez (Thomsen, 2001).

Siguiendo la anterior regla, la Ecuación 2.1 puede expresarse de manera matricial como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ S & I & M & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix},$$

en la cual SIM denota simetría con respecto a la diagonal. Para el caso particular de un medio con anisotropía transversal son necesarias cinco constantes independientes C_{11} , C_{13} , C_{33} , C_{44} y C_{66} , quedando la matriz C

como sigue

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & & \\ & C_{11} & C_{13} & & & & \\ & & C_{33} & & & & \\ & & & C_{44} & & & \\ S & I & M & & C_{44} & & \\ & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

con

$$C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}).$$

En caso de presentarse un medio horizontalmente estratificado o un medio donde predominen esfuerzos con dirección vertical (el cual en un estudio geofísico puede ser asociado con el peso de una sobrecarga), la anisotropía VTI resulta particularmente conveniente. En este caso, la velocidad permanece constante en la dirección azimutal, pero varía con el ángulo de propagación en el plano vertical. La dependencia vertical de la velocidad es la misma en todos los planos verticales, es decir, tan sólo un plano a cualquier azimut representa al medio. Se podría decir que cualquier plano vertical es un plano de simetría (Slawinski, 2003).

En un medio isótropo la matriz dada por la Ecuación 2.2 depende de dos coeficientes elásticos C_{11} y C_{44} , los cuales se expresan en términos de los parámetros de Lamé, λ y μ definidos de la siguiente forma (Slawinski, 2003):

$$\begin{aligned} \lambda &:= C_{11} - 2C_{44}, \\ \mu &:= C_{44}, \end{aligned}$$

según lo anterior, la matriz queda expresada como

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & & \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & & & & \\ & & \lambda + 2\mu & & & & \\ & & & \mu & & & \\ S & I & M & & \mu & & \\ & & & & & & \mu \end{bmatrix}.$$

A partir de las ecuaciones de movimiento de Cauchy para un elemento infinitesimal del continuo (Aki y Richards, 2002):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3)$$

donde ρ es la densidad del medio, u_i son las componentes del vector desplazamiento, f_i son las fuerzas de cuerpo, t es el tiempo y x_i son las

coordenadas cartesianas; reemplazando la Ecuación 2.1 en la Ecuación 2.3 se obtiene

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial c_{ijkl} \varepsilon_{kl}}{\partial x_j} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.4)$$

donde el tensor deformación está definido por (Slawinski, 2003):

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Las fuerzas de cuerpo, como la gravitacional, juegan un papel importante en aplicaciones como la sismología, donde el interés es entender la estructura interna de la tierra en una escala de decenas y centenas de kilómetros. Sin embargo, para la sísmica, las profundidades consideradas son mucho menores (< 10 km). Por esta razón, dichas fuerzas pueden despreciarse ($f_i = 0$) en la Ecuación 2.4, obteniendo

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0. \quad (2.5)$$

Una onda plana de tipo armónica se usa para encontrar una solución de prueba de la Ecuación 2.5

$$u_k = U_k e^{i\omega \left(\frac{n_j x_j}{\nu} - t \right)}, \quad (2.6)$$

donde U_k son las componentes del vector polarización \vec{u} , ω es la frecuencia angular, ν es la velocidad de propagación de la onda (comúnmente llamada velocidad de fase), \vec{n} es el vector unidad, que es ortogonal al plano de frente de onda. Usando la expresión 2.6 en la Ecuación 2.5, se obtiene la Ecuación de Christoffel de la velocidad de fase ν y el vector polarización \vec{U} (Du, 2007):

$$\begin{bmatrix} G_{11} - \rho\nu^2 & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} - \rho\nu^2 & G_{23} \\ G_{13} & G_{32} & G_{33} - \rho\nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 0,$$

donde G_{ik} es la matriz de Christoffel, la cual depende de las propiedades elásticas del medio y de la dirección de propagación $G_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l$, utilizando estas relaciones en las ecuaciones de movimiento se obtiene una Ecuación de onda con tres soluciones independientes, una cuasi-longitudinal (qP), una cuasitransversal (qSV) y una transversal (SH), las tres ondas están polarizadas en direcciones mutuamente ortogonales, Daley y Hron (Daley y Hron, 1977) obtuvieron las relaciones de dispersión para estos tres tipos de onda, mostradas a continuación:

$$\rho\nu_P^2(\theta) = \frac{1}{2} [C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta + D(\theta)], \quad (2.7)$$

$$\rho\nu_{sv}^2(\theta) = \frac{1}{2} [C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta - D(\theta)], \quad (2.8)$$

$$\rho\nu_{sh}^2(\theta) = C_{66} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta, \quad (2.9)$$

donde ρ es la densidad y θ es el ángulo entre la normal al frente de onda y el eje vertical, $D(\theta)$ es una notación compacta para la combinación cuadrática

$$D(\theta) = \left\{ (C_{33} - C_{44})^2 + 2 \left[2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44}) \right] \sin^2 \theta + \left[(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44}) \right] \sin^4 \theta \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

Las Ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 denotan la velocidad de fase para la onda P , la onda SV y la onda SH , respectivamente. Cuando la onda se propaga en la dirección vertical, paralela al eje de simetría ($\theta = 0^\circ$), y en la dirección horizontal, perpendicular al eje de simetría ($\theta = 90^\circ$), la velocidad de fase para la onda P está dada por las expresiones

$$\begin{aligned} \nu_p(0^\circ) = v_{p0} &= \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \\ \nu_p(90^\circ) = v_{p90} &= \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde v_{p0} corresponde a la velocidad de la onda P medida paralela al eje de simetría de un medio VTI y v_{p90} es la velocidad de la onda P perpendicular al eje de simetría de un medio VTI, similarmente para la componente vertical de la onda S se obtiene

$$\begin{aligned} \nu_{sv}(0^\circ) = v_{s0} &= \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \\ \nu_{sv}(90^\circ) = v_{sv90} &= \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

en este caso, las velocidades paralela y perpendicular al eje de simetría poseen el mismo valor. Para la onda SH se obtiene

$$\begin{aligned} \nu_{sh}(0^\circ) = v_{s0} &= \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \\ \nu_{sh}(90^\circ) = v_{sh90} &= \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

la velocidad de la onda SH paralela al eje de simetría, v_{s0} , y perpendicular al eje de simetría, v_{sh90} , son diferentes. Para un medio isótropo, $C_{44} = C_{66}$ y $C_{11} = C_{33}$, por lo tanto las velocidades $v_{s0} = v_{sh90}$ y $v_{p0} = v_{p90}$.

Las Ecuaciones de la velocidad de fase fueron simplificadas por Thomsen (1986) quien definió tres parámetros, ε , γ y δ^* , los cuales describió adimensionalmente como combinaciones de los coeficientes elásticos del tensor y los definió de tal forma que se redujeran a cero en el caso isótropo. Algunos materiales son catalogados con valores pequeños ($\ll 0.2$) para cada parámetro, esto es llamado anisotropía débil (Thomsen, 1986). Los parámetros ε y γ son definidos en la forma:

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}},$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}},$$

estos dos parámetros, ε y γ , permiten describir diferencias entre la velocidad de la onda P y la onda SH en dirección paralela y en dirección perpendicular al eje de simetría del medio, respectivamente. El tercer parámetro, δ^* carece de significado físico y Thomsen lo definió como

$$\delta^* = \frac{2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{13} + C_{33} - 2C_{44})}{2C_{33}^2}.$$

Las relaciones de dispersión 2.7, 2.8 y 2.9 fueron escritas por Thomsen incluyendo los tres parámetros, ε , γ y δ^* en la forma

$$\nu_p^2(\theta) = \nu_{P0}^2 [1 + \varepsilon \sin^2 \theta + D^*(\theta)],$$

$$\nu_{sv}^2(\theta) = \nu_{SV0}^2 \left[1 + \frac{\nu_{P0}^2}{\nu_{SV0}^2} \varepsilon \sin^2 \theta - \left(\frac{\nu_{P0}^2}{\nu_{S0}^2} \right) D^*(\theta) \right],$$

$$\nu_{sh}^2(\theta) = \nu_{s0}^2 [1 + 2\gamma \sin^2 \theta],$$

donde el factor $D^*(\theta)$ está dado por la siguiente expresión:

$$D^*(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu_{s0}^2}{\nu_{p0}^2} \right) \left\{ \left[1 + \frac{4\delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(1 - \frac{\nu_{s0}^2}{\nu_{p0}^2} \right)^2} + \frac{4\varepsilon \sin^4 \theta \left(1 - \frac{\nu_{s0}^2}{\nu_{p0}^2} + \varepsilon \right)}{\left(1 - \frac{\nu_{s0}^2}{\nu_{p0}^2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}.$$

Es importante tener claridad y distinguir las diferencias entre el ángulo θ y el ángulo ϕ , el primero se refiere al ángulo entre la dirección de propagación, dada por el vector de onda (\vec{k}) y el eje de simetría, el segundo es el ángulo que forma el vector velocidad para el rayo, por donde la energía se propaga y el eje de simetría (véase Figura 2.3). El frente de onda, localmente, es perpendicular al vector de propagación (\vec{k}), ya que esta apunta en la dirección

de la tasa máxima de aumento de la fase, la velocidad de fase ν también se llama velocidad del frente de onda, ya que mide la velocidad del frente de onda a lo largo de \vec{k} . Para el caso isótropo ambos ángulos son iguales y por lo tanto se obtienen frentes de onda esféricos. Si existen diferencias entre la dirección de la velocidad normal (la misma del vector de onda) y la velocidad del rayo, se presentan frentes no esféricos.

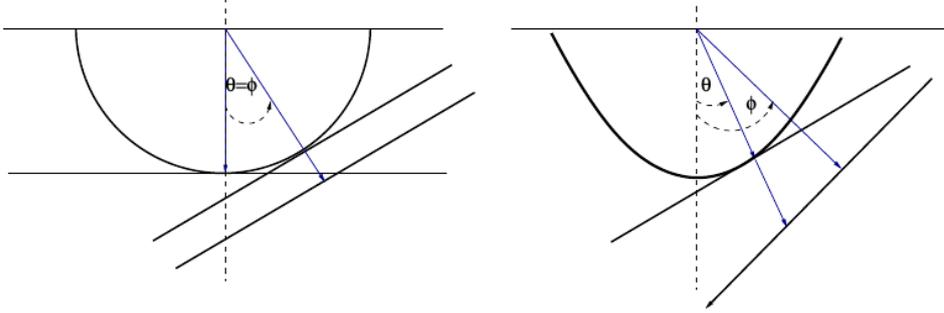


Figura 2.3: Frente de onda esférico en un medio homogéneo isótropo (izquierda) y frente de onda no esférico en un medio homogéneo anisótropo (derecha) (Torres, 2010)

En ciertas ocasiones se requiere expresar la relación de dispersión en términos de la frecuencia ω y el número de onda, para eso se introduce la siguiente notación. El vector número de onda \vec{k} se representa en 2D (al igual que todo lo desarrollado anteriormente) como

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$$

con sus componentes dadas por

$$k_x = k(\theta) \sin \theta \quad \text{y} \quad k_z = k(\theta) \cos(\theta),$$

con magnitud

$$k(\theta) = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{\nu(\theta)},$$

en donde ω determina la frecuencia angular de la onda y $\nu(\theta)$ la velocidad de fase. La velocidad de grupo para el medio dispersivo corresponde a

$$\vec{V} = \left(\frac{k \partial \nu}{\partial k_x}, 0, \frac{k \partial \nu}{\partial k_z} \right)$$

cuya magnitud, de acuerdo a Torres (2010), puede ser expresada en términos de la velocidad de fase ν en la forma

$$V^2(\psi(\theta)) = \nu^2(\theta) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right)^2,$$

para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$ el segundo término del miembro derecho de la anterior Ecuación desaparece, bajo estas condiciones la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase, característica de un medio no dispersivo.

2.5. Anisotropía débil

En su artículo de 1986, Thomsen realizó ciertas consideraciones para simplificar las expresiones 2.7-2.10, de acuerdo a los resultados experimentales. Él notó que las mediciones de sus parámetros en ciertas rocas sedimentarias estaban por debajo de 0.2 (véase Figura ??), a lo que llamó anisotropía débil, posteriormente linealizó las ecuaciones de velocidad de fase para valores pequeños de ε y δ mediante una expansión en serie de Taylor, obteniendo las siguientes expresiones

$$\nu_p(\theta) = v_{p0} (1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^4 \theta), \quad (2.14)$$

$$\nu_{sv}(\theta) = \left[1 \frac{v_{p0}^2}{v_{s0}^2} (\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right], \quad (2.15)$$

$$\nu_{sh}(\theta) = v_{s0} (1 + \gamma \sin^2 \theta),$$

donde δ se redefine como

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33} (C_{33} - C_{44})}.$$

La aproximación obedece a los términos truncados de la expansión en series de Taylor, estas expresiones posibilitan el análisis físico correspondiente a la propagación de la onda en el medio anisótropo. Para el caso en que $\theta = 0$, se obtiene

$$\nu_p(0) = v_{p0},$$

$$\nu_{sv}(0) = v_{s0},$$

$$\nu_{sh}(0) = v_{s0},$$

que son las velocidades de fase en la dirección paralela al eje de simetría y corresponden a las velocidades en un medio isótropo, de acuerdo a las Ecuaciones 2.11, 2.12 y 2.13.

2.6. Velocidad de fase en un medio elástico VTI

En 1996, Tsvankin (Tsvankin, 1996) reformuló la expresión para la velocidad de fase en un medio con anisotropía polar vertical en términos de

los parámetros de Thomsen:

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 \theta}{f} (2\delta \cos^2 \theta - \varepsilon \cos 2\theta) + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2}}, \quad (2.16)$$

donde f es

$$f = \left(1 - \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2}\right) = \left(1 - \frac{C_{44}}{C_{33}}\right), \quad (2.17)$$

y donde θ es el ángulo que forma la dirección de propagación con el eje de simetría vertical. En la Ecuación 2.16, el signo “+” está relacionado con la velocidad de fase para la onda P y el signo “-” corresponde a la velocidad de fase para la onda SV . Dicha Ecuación puede ser simplificada bajo la condición de anisotropía débil ($\varepsilon < 0.2$ y $\delta < 0.2$) al expandir el radical en una serie de Taylor, despreciando los términos cuadráticos en los parámetros ε y δ , se obtiene para la onda P :

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}} = 1 + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2\varepsilon \sin^4 \theta, \quad (2.18)$$

tomando la raíz cuadrada y linealizando la Ecuación 2.18 se obtiene la expresión dada anteriormente en la Ecuación 2.14. De la aproximación de anisotropía débil:

$$\frac{\nu_p(\theta)}{v_{p0}} = 1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^4 \theta. \quad (2.19)$$

Similarmente para la onda SV , se obtiene la velocidad de fase teniendo en cuenta la anisotropía débil, equivalente a la expresión 2.15:

$$\frac{\nu_{sv}(\theta)}{v_{s0}} = 1 - f + 2(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (2.20)$$

o

$$\frac{\nu_{sv}(\theta)}{v_{s0}} = 1 + 2\sigma \sin^2(\theta) \cos^2(\theta),$$

donde σ es una expresión que combina los parámetros de Thomsen y las componentes en dirección paralela al eje de simetría de las ondas P y S :

$$\sigma = \frac{v_{p0}^2}{v_{s0}^2} (\varepsilon - \delta).$$

2.7. Velocidad de fase en un medio elástico TTI

Para obtener la velocidad de fase en un medio con anisotropía transversal inclinada, se sustituye $\theta = \theta - \phi$, donde ϕ representa la inclinación de los

estratos al interior de una configuración con un eje de simetría inclinado TTI, de tal forma que de la Ecuación 2.16 (Du, 2007) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2(\theta, \phi)}{v_{p0}} = & 1 + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{f}{2} \\ & \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2(\theta - \phi)}{f} (2\delta \cos^2(\theta - \phi) - \varepsilon \cos 2(\theta - \phi)) + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4(\theta - \phi)}{f^2}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De la Ecuación 2.21 se obtienen las expresiones para la velocidad de fase de la ondas P y SV en un medio con anisotropía débil TTI, de la misma forma en que se obtuvieron las Ecuaciones 2.19 y 2.20:

$$\frac{\nu_p(\theta, \phi)}{v_{p0}} = 1 + \delta \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) + \varepsilon \sin^4(\theta - \phi)$$

y

$$\frac{\nu_{sv}(\theta)}{v_{s0}} = 1 - f + 2(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi),$$

donde f está relacionado con las velocidades v_{p0} y v_{s0} , θ es el ángulo entre la dirección de propagación y el eje de simetría inclinado y ϕ es el ángulo de inclinación del eje de simetría.

2.8. Velocidad de fase en un medio acústico VTI y TTI

La Ecuación 2.16 puede reescribirse considerando $v_{s0} = 0$ y de esta forma obtener la velocidad de fase de un medio acústico homogéneo con anisotropía VTI, en términos de los parámetros de Thomsen y la componente de la onda P en dirección paralela al eje de simetría vertical (Du, 2007):

$$\frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}} = \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta) - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}, \quad (2.22)$$

similarmente en un medio TTI, según la Ecuación 2.21 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2(\theta)}{v_{p0}} = & \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi)) - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

La Ecuación 2.23 está expresada en términos del ángulo θ , el ángulo de inclinación del eje de simetría ϕ , de los parámetros de anisotropía y de la velocidad de onda P en la dirección paralela al eje de simetría v_{p0} . Las

Figuras 2.4 y 2.5 muestran la validez de la Ecuación 2.23 al compararla con la velocidad de fase exacta en un medio TTI y una aproximación en series de Taylor de la misma, allí se aprecia cuan cerca se encuentra la expresión dada por Alkhalifah de representar a la Ecuación exacta, siendo incluso una mejor aproximación que una expansión en series de la misma (Torres, 2010).

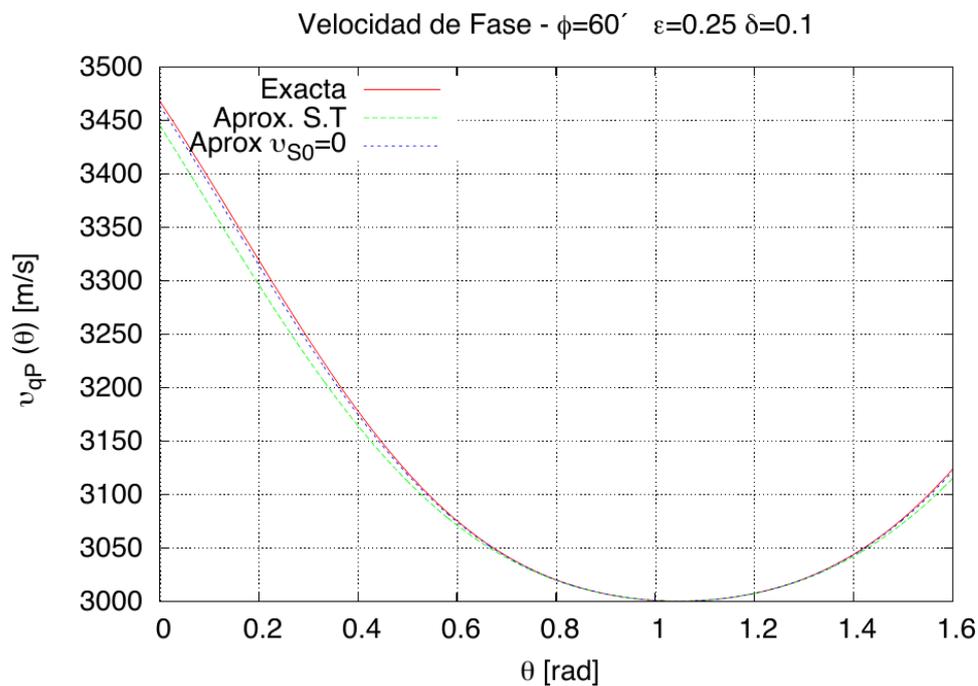


Figura 2.4: Velocidad de fase exacta (línea roja), aproximada (línea verde) y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda P en un medio TTI donde $\phi = 60^{\text{deg}} \approx 1.047$ rad (Torres, 2010).

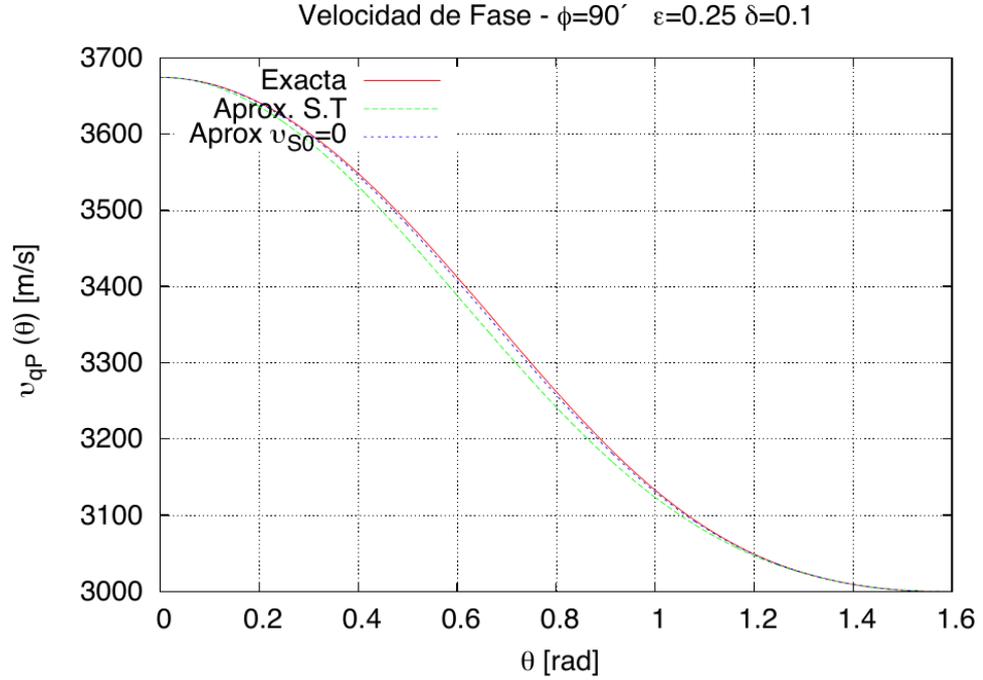


Figura 2.5: Velocidad de fase exacta (línea roja), aproximada (línea verde) y fórmula de Alkhalifah (línea azul) para la onda P en un medio TTI donde $\phi = 90^{\text{deg}} \approx 1.571$ rad (Torres, 2010).

2.9. Anisotropía elíptica

Bajo ciertas consideraciones puede obtenerse un frente de onda elíptico para la onda P y esférico para la onda SV , estas implican que los parámetros de anisotropía sean iguales en todo el medio ($\varepsilon = \delta$). Tal y como se aprecia en la Figura 2.6, la condición de elipticidad se cumple para algunos tipos de rocas sedimentarias, en ella se muestran los parámetros de anisotropía ε y δ para una cantidad considerable de muestras del subsuelo y los que se ajustan a la condición de elipticidad (Thomsen, 1986), la cual permite desacoplar las ecuaciones de onda que describen los fenómenos de propagación mientras se conserva la dependencia angular del modelo.

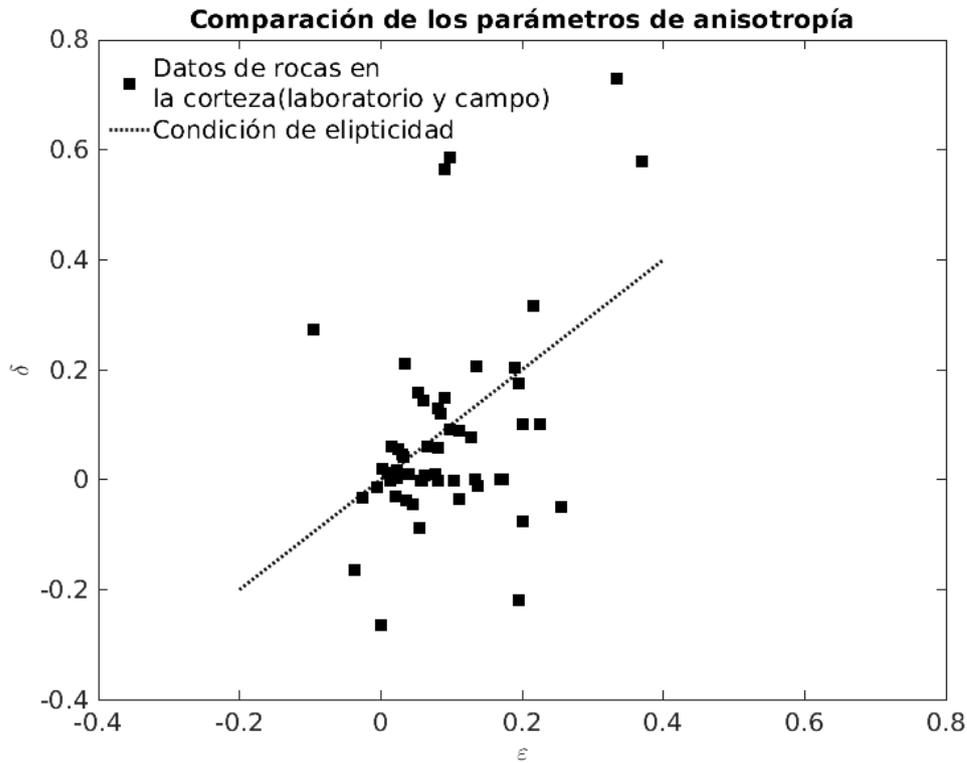


Figura 2.6: Valores de los parámetros de anisotropía δ y ε para ciertas rocas. Tomada y modificada de Thomsen (1986).

En las próximas páginas se muestra la derivación de las ecuaciones de onda para los medios acústicos VTI y TTI, partiendo de las velocidades de fase expuestas en las Ecuaciones 2.22 y 2.23, respectivamente. Posteriormente se expone su discretización y el proceso de solución numérica usando el método de FD, el cual hace uso de operadores diferenciales de segundo y octavo orden. Así mismo se tratan aspectos de suma importancia para la solución numérica, como lo son la dispersión y la estabilidad del método.

Capítulo 3

Ecuaciones de onda acústica y diferencias finitas

3.1. Introducción

El capítulo inicia con la deducción de la Ecuación de onda para un medio homogéneo e isotrópico, basada en el libro de Romanelli (Romanelli, 2010). A continuación se hace una revisión de la derivación de las Ecuaciones de onda para medios acústicos con anisotropía VTI y TTI; posteriormente se expone su solución, empleando el método de diferencias finitas para finalizar con los esquemas discretos que modelan el fenómeno de propagación, no sin antes hacer hincapié en detalles como la estabilidad y dispersión numérica, de importancia en todo esquema numérico basado en el método de diferencias finitas.

3.2. Propagación de ondas acústicas

Entre los fenómenos más comunes y fundamentales que se presencian en el universo se encuentra el movimiento ondulatorio. Al lanzar una piedra sobre la superficie de un lago el agua se perturba y se forman ondas que se desplazan radialmente hacia afuera; al golpear un diapazón, las ondas sonoras se propagan en todas las direcciones desde la fuente de sonido. Dichos fenómenos son modelados mediante la ecuación de onda, la cual proporciona una descripción de sistemas físicos vibratorios y oscilantes. Ésta misma juega un papel muy importante en el estudio de las ondas acústicas y elásticas que se propagan al interior de la tierra (subsuelo) y los diferentes fenómenos que al interior de ella suceden, tales como reflexión, refracción, transmisión, etc.

3.2.1. Ecuación de onda para un medio acústico isótropo

El fenómeno de propagación de una señal sísmica puede ser entendido considerando un medio puramente acústico, en el cual no viajan ondas transversales. Partiendo de ello, el significado de la Ecuación de onda es fundamental para un pleno entendimiento del método sísmico. Para un fluido la Ley de Hooke establece que

$$P = -K_f \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\delta V}{\Delta V}, \quad (3.1)$$

donde P es la presión ejercida por la onda, δV es la variación de volumen y ΔV es el volumen inicial del fluido. En realidad, P corresponde a una variación de la presión, la cual puede ser medida por un hidrófono, a diferencia de la presión atmosférica. Finalmente, K_f es el módulo de compresibilidad del fluido

$$K_f = v^2 \rho, \quad (3.2)$$

donde ρ y v son la densidad y velocidad del medio sin deformar, respectivamente. En la Ecuación 3.1 el volumen δV puede ser escrito como

$$\delta V = (\delta x + \delta u_x)(\delta y + \delta u_y)(\delta z + \delta u_z) - \Delta x \Delta y \Delta z,$$

donde (u_x, u_y, u_z) representa el desplazamiento del cuerpo en las tres componentes, provocado por la onda, mientras que el producto $\Delta x \Delta y \Delta z$ corresponde al volumen original ΔV . Despreciando los términos más pequeños, la variación de volumen puede expresarse como

$$\delta V \approx \delta u_x \Delta y \Delta z + \delta u_y \Delta x \Delta z + \delta u_z \Delta x \Delta y,$$

al dividir este resultado por el volumen ΔV , se tiene

$$\frac{\delta V}{\Delta V} \approx \frac{\delta u_x}{\Delta x} + \frac{\delta u_y}{\Delta y} + \frac{\delta u_z}{\Delta z},$$

calculando el límite $\lim_{\Delta V \rightarrow 0}$ y reemplazándolo en la Ecuación 3.1, se obtiene una nueva versión de la Ley de Hooke

$$P = -K_f \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

o en la forma vectorial,

$$P = -K_f \vec{\nabla} \cdot \vec{u},$$

donde “ \cdot ” indica el producto escalar, \vec{u} es el vector de desplazamiento del cuerpo, como ya se mencionó, y $\vec{\nabla}$ es el operador vectorial nabla, definido por

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}.$$

La aplicación de la Ley de Hooke en la propagación de ondas puede ilustrarse fácilmente para el caso unidimensional, en el cual se considera una onda plana viajando a lo largo del eje z , en ese caso la Ley de Hooke puede escribirse como

$$P = -K_f \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (3.3)$$

donde u_z representa el desplazamiento en esa dirección y el signo negativo indica que una variación positiva de la presión reduce el volumen del cuerpo. Por otra parte, la variación de presión introducida por la onda también se relaciona con el desplazamiento del cuerpo mediante la segunda Ley de Newton, recordando que la presión representa fuerza por unidad de área, se tiene que

$$\Delta PS = -\rho S \Delta z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

donde S es el área, ΔPS es la fuerza y $\rho S \Delta z$ es la masa desplazada, reordenando términos y haciendo que Δz tienda a cero se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

donde el signo menos indica que al reducir el volumen se efectúa una reducción local de la velocidad con la que el cuerpo se desplaza, es decir, la aceleración es negativa. Sustituyendo la Ecuación 3.5 en la Ecuación 3.4 se tiene

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K_f \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (3.6)$$

asumiendo K_f constante y sustituyendo la Ecuación 3.2 en la Ecuación 3.6 se tiene

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

para involucrar la presión, se deriva la Ecuación 3.6 con respecto a z asumiendo heterogeneidad en la densidad, lo cual resulta en

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_f \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

ahora, teniendo en cuenta la Ecuación 3.3 y notando que K_f es invariante en el tiempo, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{K_f} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

si se considera un medio con densidad constante se obtiene

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

la anterior expresión puede ser extendida para el caso bidimensional, resultando en

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Al ser modelada, la Ecuación 3.7 produce frentes de onda circulares, como el mostrado en la Figura 3.1.

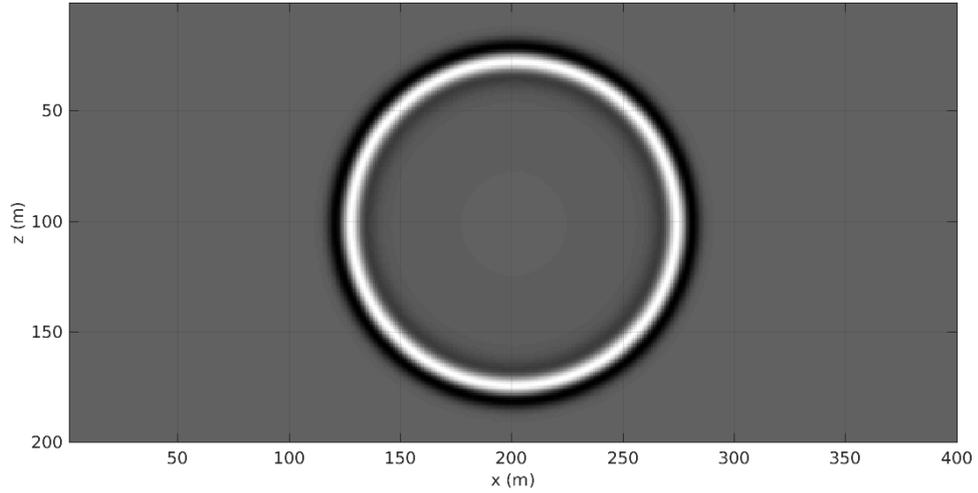


Figura 3.1: Captura del campo de onda P en el instante $t = 0.02$ s para un medio acústico, homogéneo e isótropo con velocidad $v_p = 5000$ m/s, obtenida por medio de FD. El modelo construido posee dimensiones $L_x = 400$ m y $L_z = 200$ m con paso de malla $dx = dz = 1$ m. La posición de la fuente es $(x_s, z_s) = (200, 100)$ m.

3.2.2. Ecuación de onda para un medio acústico con anisotropía transversal vertical (VTI)

Partiendo de la ya mencionada expresión que describe la velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio con anisotropía polar vertical (VTI) (Ecuaciones 2.16 y 2.17), la cual fue reformulada (Tsvankin, 1996) en términos de los parámetros de Thomsen, ε y δ (Thomsen, 1986), junto con las componentes de la velocidad en dirección paralela al eje de simetría, v_{p0}

y v_{s0} ; Alkhalifah y Tsvankin (Alkhalifah y Tsvankin, 1995) obtuvieron la relación de dispersión para el medio acústico VTI

$$k_z^2 = \frac{v_{nmo}^2}{v_{p0}^2} \left(\frac{\omega^2}{v_{nmo}^2} - \frac{\omega^2 (k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2 - 2v_{nmo}^2 \eta (k_x^2 + k_y^2)} \right), \quad (3.8)$$

donde k_x y k_z son las componentes del vector de onda \vec{k} , ω es la frecuencia, v_{p0} es la componente en la dirección paralela al eje de simetría de la onda P , v_{nmo} es la velocidad NMO (*Normal Moveout*) y

$$\eta = \frac{\epsilon - \delta}{1 + 2\delta}$$

es un parámetro de anisotropía, se profundizará sobre estos dos últimos más adelante. Multiplicando a ambos lados de la Ecuación 3.8 por el campo $F(k_x, k_y, k_z, \omega)$ en el dominio de Fourier y aplicando la transformada inversa de Fourier en el campo k_z ($k_z \rightarrow -i \frac{d}{dz}$) se obtiene (Alkhalifah, 2000)

$$\frac{d^2 F(k_x, k_y, k_z, \omega)}{dz^2} = -\frac{v_{nmo}^2}{v_{p0}^2} \left(\frac{\omega^2}{v_{nmo}^2} - \frac{\omega^2 (k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2 - 2v_{nmo}^2 \eta (k_x^2 + k_y^2)} \right) F(k_x, k_y, k_z, \omega),$$

efectuando una transformada inversa de Fourier en k_x y k_y ($k_x \rightarrow -i \frac{d}{dx}, k_y \rightarrow -i \frac{d}{dy}$), se obtiene (Alkhalifah, 2000)

$$\begin{aligned} & v_{p0}^2 \omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\eta v_{nmo}^2 v_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \\ & + (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \omega^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \omega^4 F(k_x, k_y, k_z, \omega) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la transformada inversa de Fourier en ω ($\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$), se obtiene la Ecuación de onda acústica homogénea de un medio VTI (Alkhalifah, 2000):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (1 + 2\eta) v_{nmo}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\eta v_{nmo}^2 v_{p0}^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2}, \quad (3.9)$$

donde

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = P. \quad (3.10)$$

La Ecuación 3.9 describe la propagación de una onda P en un medio acústico que presenta anisotropía transversal vertical o VTI, con la condición velocidad de propagación nula para ondas S , es decir, $v_{s0} = 0$

(Alkhalifah y Tsvankin, 1998). Cabe aclarar que el parámetro v_{nmo} (Alkhalifah y Tsvankin, 1995) es la velocidad NMO para un reflector horizontal, dada por la expresión

$$v_{nmo}(0) = v_{p0}\sqrt{1 + 2\delta}, \quad (3.11)$$

y el parámetro de anisotropía η puede expresarse como una combinación de los parámetros de Thomsen:

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{v_h^2}{v_{nmo}^2(0)} - 1 \right) = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta}. \quad (3.12)$$

La Ecuación 3.9 hace referencia a un hipotético medio acústico y anisótropo donde se considera un eje de simetría vertical (VTI), aunque es físicamente imposible es una buena aproximación cinemática a la Ecuación de onda elástica anisótropa (Alkhalifah y Tsvankin, 1998). Esta Ecuación es de cuarto orden y presenta dos conjuntos de soluciones complejas conjugadas, el primero es para la onda acústica y el segundo describe un tipo de onda que se progaga a una velocidad menor que la onda P , (onda SV), para un valor de η positivo; en contraste, para valores de η negativos, esta velocidad crece de manera exponencial, generando inestabilidades (Alkhalifah y Tsvankin, 1998). Afortunadamente, los valores correspondientes a η en la mayoría de rocas sedimentarias son positivos y ubicando la fuente en una capa isótropa, algo muy común en sísmica de exploración marina, se elimina la mayor parte de energía de este tipo de ondas (Alkhalifah y Tsvankin, 1998).

Si en la Ecuación 3.9 se fija $\eta = 0$ y $v_{nmo} \neq v_{p0}$ se obtiene la expresión para medios con anisotropía elíptica con eje de simetría vertical en 2D

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v_{nmo}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \quad (3.13)$$

la cual fue modelada por el método de FD y constituye la base para el algoritmo RTM VTI desarrollado en este trabajo. Si además se establece $v_{nmo} = v_{p0} = v$ la Ecuación 3.13 toma la forma, ya conocida, para un medio acústico homogéneo isótropo 2D (ver Ecuación 3.7). En la Figura 3.2 se aprecia una captura en tiempo del modelado de la propagación hacia adelante, usando la Ecuación 3.13, obsérvense los efectos de la anisotropía elíptica.

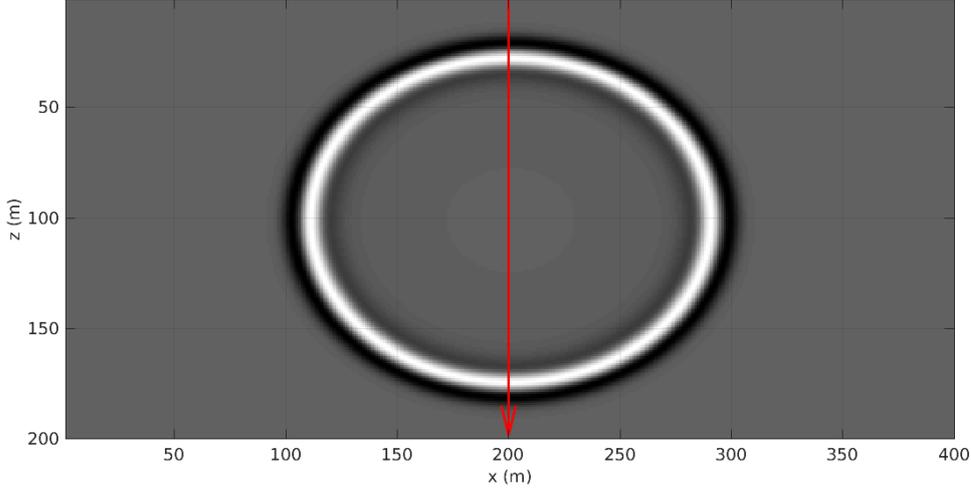


Figura 3.2: Captura del campo de onda P en el instante $t = 0.02$ s para un medio acústico y homogéneo con velocidad $v_p = 5000$ m/s, $\varepsilon = \delta = 0.25$ y $v_{nmo} \approx 599$ m/s, obtenida por medio de FD. El modelo construido posee dimensiones $L_x = 400$ m y $L_z = 200$ m con paso de malla $dx = dz = 1$ m. La posición de la fuente es $(x_s, z_s) = (200, 100)$ m. La flecha roja indica la dirección del eje de simetría.

3.2.3. Ecuación de onda para un medio acústico con anisotropía transversal inclinada (TTI)

La Ecuación diferencial en derivadas parciales para el medio acústico considerando anisotropía transversal con el eje de simetría inclinado en un ángulo ϕ (TTI) (Zhang y Hoversten, 2005), está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= [v_{p0}^2 \sin^2 \phi + (1 + 2\eta)v_{nmo}^2 \cos^2 \phi] v_{nmo}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\
&+ [v_{p0}^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\eta)v_{nmo}^2 \sin^2 \phi] \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\
&+ [v_{p0}^2 + (1 + 2\eta)v_{nmo}^2] \sin(2\phi) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \\
&- v_{p0}^2 v_{nmo}^2 \eta (2 - 3 \sin^2(2\phi)) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \\
&- \frac{1}{2} v_{p0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + v_{p0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z^3} \\
&- \frac{1}{2} v_{p0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - v_{p0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial z}, \quad (3.14)
\end{aligned}$$

y v_{p0} es la componente de la onda P en la dirección del eje de simetría del medio, v_{nmo} es la velocidad NMO (ver Ecuación 3.11), η es el parámetro de

anisotropía definido por Alkhalifah (ver Ecuación 3.12), ϕ es el ángulo de inclinación, θ es el ángulo que forma el eje de simetría con la dirección de propagación, F es un campo auxiliar (ver Ecuación 3.10), ε y δ son los parámetros de anisotropía de Thomsen (Thomsen, 1986).

De manera similar a la expuesta para el caso VTI, fijando $\eta = 0$ y $v_{nmo} \neq v_{p0}$ se obtiene la Ecuación para medios con anisotropía elíptica con eje de simetría inclinado en 2D:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = & [v_{p0}^2 \sin^2 \phi + v_{nmo}^2 \cos^2 \phi] v_{nmo}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\ & + [v_{p0}^2 \cos^2 \phi + v_{nmo}^2 \sin^2 \phi] \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\ & + [v_{p0}^2 + v_{nmo}^2] \sin(2\phi) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

expresión modelada usando FD y en la cual se basa el algoritmo RTM TTI desarrollado en este trabajo. La Figura 3.3 muestra una captura en tiempo de dicho modelado, a diferencia de la Figura 3.2, en esta puede apreciarse el efecto del buzamiento sobre la propagación de la onda en el medio acústico.

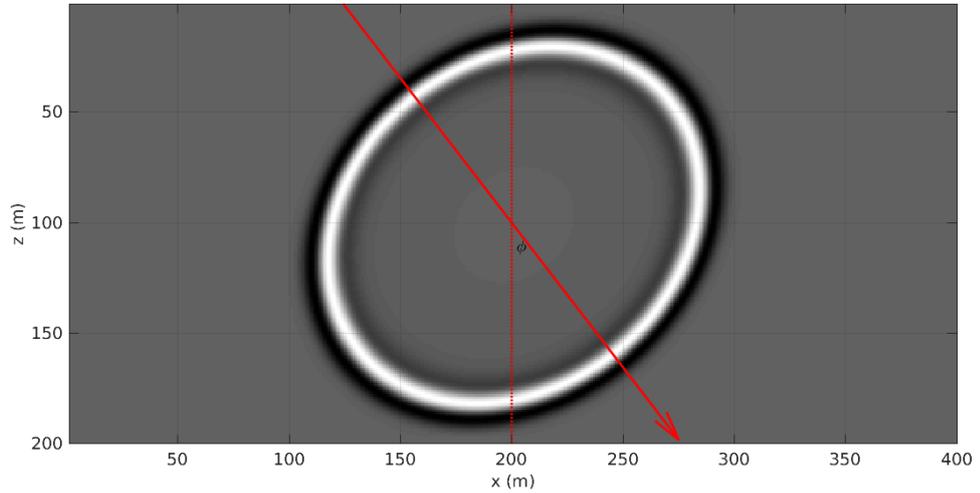


Figura 3.3: Captura del campo de onda qP en el instante $t = 0.02$ s para un medio homogéneo con anisotropía TTI, velocidad $v_p = 5000$ m/s, $\varepsilon = \delta = 0.25$, $v_{nmo} \approx 599$ m/s y $\phi \approx 40.1^{\text{deg}} = 0.7$ rad, obtenida por medio de FD. El modelo construido posee dimensiones $L_x = 400$ m y $L_z = 200$ m con paso de malla $dx = dz = 1$ m. La posición de la fuente es $(x_s, z_s) = (200, 100)$ m. La flecha roja indica la dirección del eje de simetría.

3.3. Derivación de los operadores en FD

Sea una función $x \mapsto g(x)$, y una aproximación en diferencias de la forma

$$g^{(m)}(x_i) = \sum_{k=-p}^q d_k g(x_{i+k}), \quad p, q \geq 0, \quad (3.16)$$

donde $g^{(m)}(x_i) \equiv g_i^{(m)}$ es la m^{th} derivada, y los puntos x_j se encuentran definidos en una malla

$$\mathcal{G}_h := \{jh : j \in \mathbb{Z}, h > 0\}.$$

Los valores de p , q y m son escogidos adecuadamente de tal forma que la derivada y el *stencil* requerido sean representados.

3.3.1. Tabla de Taylor

Si bien los operadores en diferencias son bastante conocidos para primer y segundo orden de aproximación, un operador de orden mayor puede derivarse sistemáticamente con el método de la tabla de Taylor (Gerald y Wheatley, 1998), por ejemplo, si se desea calcular una aproximación en diferencias centradas para la segunda derivada teniendo en cuenta tres puntos de malla, es decir $m = 2$ y $p = q = 1$, se requieren tres coeficientes d_k en (3.16). Reemplazando los anteriores valores en dicha Ecuación se tiene

$$g''(x_i) = d_{-1}g_{i-1} + d_0g_i + d_1g_{i+1} = ag_{i-1} + bg_i + cg_{i+1}, \quad (3.17)$$

los tres coeficientes se obtienen de manera sistemática expandiendo la función como una serie de potencias (expansión en series de Taylor). Teniendo en cuenta que

$$g(x_i + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(x_i),$$

es posible aproximar la función en cada punto de malla como sigue

$$\begin{aligned} g_{i-1} &= g(x - h) \approx g_i - hg'_i + \frac{h^2}{2}g''_i - \frac{h^3}{3}g'''_i + \frac{h^4}{4}g^{(4)}_i + \dots, \\ g_{i+1} &= g(x + h) \approx g_i + hg'_i + \frac{h^2}{2}g''_i + \frac{h^3}{3}g'''_i + \frac{h^4}{4}g^{(4)}_i + \dots, \end{aligned} \quad (3.18)$$

sustituyendo la expresión 3.18 en la Ecuación 3.17 se tiene

$$g''(x_i) = a \left[g_i - hg'_i + \frac{h^2}{2}g''_i - \frac{h^3}{3}g'''_i + \frac{h^4}{4}g^{(4)}_i \right] \\ + bg_i \\ + c \left[g_i + hg'_i + \frac{h^2}{2}g''_i + \frac{h^3}{3}g'''_i + \frac{h^4}{4}g^{(4)}_i \right].$$

La anterior Ecuación puede ser resumida en una tabla (ver Tabla 3.1), lo cual se hace conveniente para derivadas mayores y/o stencils más grandes. Nótese que cada expansión se ha truncado arbitrariamente después de la cuarta derivada.

Término en (3.17)	g_i	hg'_i	$h^2g''_i$	$h^3g'''_i$	$h^4g^{(4)}_i$
ag_{i-1}	a	$-a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{-a}{6}$	$\frac{a}{24}$
bg_i	b	0	0	0	0
cg_{i+1}	c	c	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{6}$	$\frac{c}{24}$
Σ	0	0	1	$?$	$?$

Tabla 3.1: Método de Taylor para la obtención de esquemas en FD.

De la anterior tabla se obtiene una ecuación lineal por cada incógnita

$$a + b + c = 0, \\ -a + c = 0, \\ \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 1,$$

cuya solución es

$$a = c = 1 \quad ; \quad b = -2, \quad (3.19)$$

sustituyendo (3.19) en (3.17) se tiene

$$g_{i-1} - 2g_i + g_{i+1} = h^2g''_i + \frac{h^4}{12}g^{(4)}_i,$$

que conduce directamente a la aproximación en diferencias

$$g''_i = \frac{g_{i-1} - 2g_i + g_{i+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}g^{(4)}_i,$$

donde

$$\mathcal{O}(h^r) = \mathcal{O}(h^2) = -\frac{h^2}{12}g_i^{(4)}$$

representa el error en la aproximación y r el grado de exactitud de la misma, para este caso una aproximación de segundo orden.

3.3.2. Algunas consideraciones

1. Se requieren al menos $m + 1$ puntos de malla para aproximar una m -ésima derivada (Gerald y Wheatley, 1998), lo anterior debe cumplirse para solucionar el sistema de Ecuaciones obtenido a partir de la tabla de Taylor, es decir

$$p + q \geq m$$

2. En términos generales, la exactitud de una aproximación para una derivada m -ésima está dada por

$$r = (p + q + 1) - m,$$

sin embargo, si se cumplen ciertas condiciones de simetría y paridad (tal como en el ejemplo), la exactitud de la aproximación se torna un orden mayor.

3.4. Solución en diferencias finitas de la Ecuación acústica VTI

La Ecuación que modela el campo de onda en un medio acústico 2D considerando anisotropía VTI (Ecuación 3.13), es resuelta usando la técnica numérica de diferencias finitas. Debido a las tres dimensiones que presenta la Ecuación a tratar (dos espaciales y una temporal), se emplea una notación de tres índices para el campo $P(x, z, t)$ de tal forma que

$$P(x = x_0 + i\Delta x, z = z_0 + j\Delta z, t = t_0 + n\Delta t) = P_{i,j}^n,$$

donde Δx , Δz y Δt son las separaciones entre los puntos de malla, tanto espacial como temporalmente; mientras que i , j y n , denotan el índice que identifica el punto de malla, ya sea en la coordenada x , z o t . La derivada temporal en la Ecuación 3.13 se aproxima por medio de un operador en diferencias finitas de segundo orden, dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx \frac{P_{i,j}^{n-1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n+1}}{\Delta t^2}, \quad (3.20)$$

mientras que las derivadas de segundo orden de P con respecto a x y z de la Ecuación 3.13 se aproximan con un operador de octavo orden con el fin de reducir la dispersión numérica (Amado et al., 2015)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left(-\frac{1}{560} P_{i-4,j}^n + \frac{8}{315} P_{i-3,j}^n - \frac{1}{5} P_{i-2,j}^n + \frac{8}{5} P_{i-1,j}^n - \frac{205}{72} P_{i,j}^n \right. \\ \left. + \frac{8}{5} P_{i+1,j}^n - \frac{1}{5} P_{i+2,j}^n + \frac{8}{315} P_{i+3,j}^n - \frac{1}{560} P_{i+4,j}^n \right), \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \approx \frac{1}{\Delta z^2} \left(-\frac{1}{560} P_{i,j-4}^n + \frac{8}{315} P_{i,j-3}^n - \frac{1}{5} P_{i,j-2}^n + \frac{8}{5} P_{i,j-1}^n - \frac{205}{72} P_{i,j}^n \right. \\ \left. + \frac{8}{5} P_{i,j+1}^n - \frac{1}{5} P_{i,j+2}^n + \frac{8}{315} P_{i,j+3}^n - \frac{1}{560} P_{i,j+4}^n \right). \quad (3.22) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los operadores diferenciales descritos por las Ecuaciones 3.20, 3.21 y 3.22, los cuales pueden ser obtenidos por el método ya expuesto y contrastados con los documentados por Fornberg (Fornberg, 1996), la Ecuación 3.13 que representa el medio acústico VTI 2D con anisotropía elíptica se expresa con el siguiente esquema discreto en diferencias finitas, en el cual se considera una malla cuadrada ($\Delta x = \Delta z = \Delta h$):

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{n+1} = a_1 C \left(-\frac{1}{560} P_{i-4,j}^n + \frac{8}{315} P_{i-3,j}^n - \frac{1}{5} P_{i-2,j}^n + \frac{8}{5} P_{i-1,j}^n - \frac{205}{72} P_{i,j}^n \right. \\ \left. + \frac{8}{5} P_{i+1,j}^n - \frac{1}{5} P_{i+2,j}^n + \frac{8}{315} P_{i+3,j}^n - \frac{1}{560} P_{i+4,j}^n \right) \\ + a_2 C \left(-\frac{1}{560} P_{i,j-4}^n + \frac{8}{315} P_{i,j-3}^n - \frac{1}{5} P_{i,j-2}^n + \frac{8}{5} P_{i,j-1}^n - \frac{205}{72} P_{i,j}^n \right. \\ \left. + \frac{8}{5} P_{i,j+1}^n - \frac{1}{5} P_{i,j+2}^n + \frac{8}{315} P_{i,j+3}^n - \frac{1}{560} P_{i,j+4}^n \right) \\ + 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= v_{nmo}^2, \\ a_2 &= v_{p0}^2, \end{aligned}$$

y

$$C = \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2. \quad (3.23)$$

El anterior esquema modela la propagación considerando condiciones de dispersión numérica (Zhang y Hoversten, 2005), en las cuales el paso de malla debe satisfacer

$$\Delta h \leq \frac{v_{min}}{\beta f_{max}}, \quad (3.24)$$

donde β es el número de muestras por la mínima longitud de onda, v_{min} es la velocidad mínima del modelo y f_{max} es la máxima frecuencia de la ondícula. Adicionalmente, se tiene en cuenta la condición de estabilidad numérica para el caso VTI (Jin et al., 2010) :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta h}{v_{max}} \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad (3.25)$$

donde

$$a = \frac{1}{3} \sum_{m=-M}^{m=M} (|W_{mx}| + |W_{mz}|) \left(2 + 4\varepsilon + \sqrt{1 + 2\delta} \right),$$

ε y δ son los parámetros de anisotropía de Thomsen, v_{max} es la velocidad de migración máxima, W_m es el m-ésimo coeficiente en diferencias finitas y M el orden de los operadores espaciales. Para los operadores de octavo orden ya mencionados

$$a = 6.5016 \left(2 + 4\varepsilon_{max} + \sqrt{1 + 2\delta_{max}} \right),$$

teniendo en cuenta que para el caso de anisotropía elíptica $\varepsilon = \delta$.

La ondícula que simula la fuente del pulso está dada por la expresión (Scales, 1997)

$$f_s(t) = \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_0(t-t_0)}{2} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{\omega_0(t-t_0)}{2} \right)^2},$$

donde ω_0 es la frecuencia y t_0 el tiempo inicial del pulso (véase Figura 3.4).

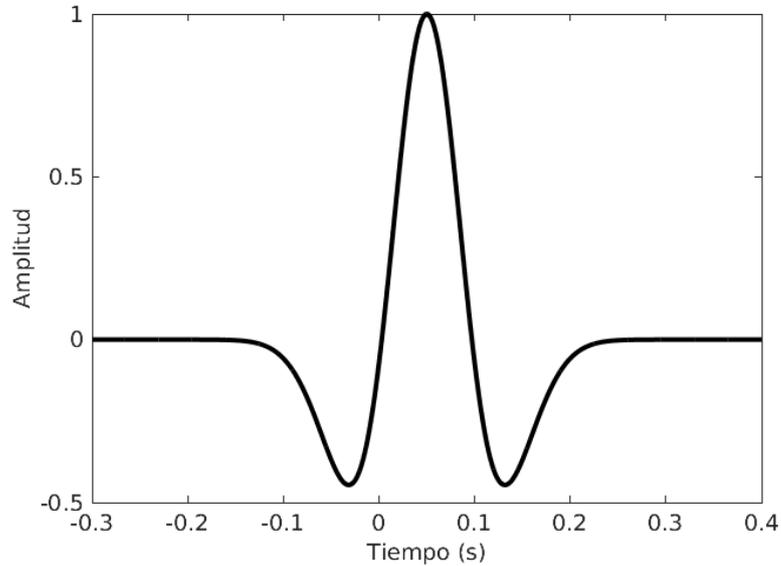


Figura 3.4: Ondícula que simula la fuente del pulso con una frecuencia de $\omega_0 = 30$ Hz y un tiempo inicial de $t_0 = 0.05$ s . El eje horizontal representa el tiempo medido en segundos y el eje vertical la amplitud.

A esta ondícula se le conoce como ondícula de Ricker o sombrero Mexicano (SEG, 2017).

3.5. Solución en diferencias finitas de la Ecuación acústica TTI

La Ecuación 3.15, la cual modela el campo de onda en un medio acústico 2D con anisotropía TTI, es resuelta por el método de FD al aplicar una metodología similar a la empleada en la Sección 3.4. Como se aprecia, la Ecuación 3.15 posee una estructura similar a la de la Ecuación 3.13, ya que los dos primeros términos cambian únicamente en sus coeficientes, es por eso que se hace uso de los operadores diferenciales ya mencionados (Ecuaciones 3.20, 3.21 y 3.22). Sin embargo, el tercer término del miembro derecho en la Ecuación 3.15 exhibe una derivada cruzada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \approx & \frac{1}{705600 \Delta x \Delta z} (9P_{i-4,j-4}^n - 96P_{i-4,j-3}^n + 504P_{i-4,j-2}^n - 2016P_{i-4,j-1}^n \\
& + 2016P_{i-4,j+1}^n - 504P_{i-4,j+2}^n + 96P_{i-4,j+3}^n - 9P_{i-4,j+4}^n \\
& - 96P_{i-3,j-4}^n + 1024P_{i-3,j-3}^n - 5376P_{i-3,j-2}^n \\
& + 21504P_{i-3,j-1}^n - 21504P_{i-3,j+1}^n + 5376P_{i-3,j+2}^n \\
& - 1024P_{i-3,j+3}^n + 96P_{i-3,j+4}^n + 504P_{i-2,j-4}^n \\
& - 5376P_{i-2,j-3}^n + 28224P_{i-2,j-2}^n - 112896P_{i-2,j-1}^n \\
& + 112896P_{i-2,j+1}^n - 28224P_{i-2,j+2}^n + 5376P_{i-2,j+3}^n \\
& - 504P_{i-2,j+4}^n - 2016P_{i-1,j-4}^n + 21504P_{i-1,j-3}^n \\
& - 112896P_{i-1,j-2}^n + 451584P_{i-1,j-1}^n - 451584P_{i-1,j+1}^n \\
& + 112896P_{i-1,j+2}^n - 21504P_{i-1,j+3}^n + 2016P_{i-1,j+4}^n \\
& + 2016P_{i+1,j-4}^n - 21504P_{i+1,j-3}^n + 112896P_{i+1,j-2}^n \\
& - 451584P_{i+1,j-1}^n + 451584P_{i+1,j+1}^n - 112896P_{i+1,j+2}^n \\
& + 21504P_{i+1,j+3}^n - 2016P_{i+1,j+4}^n - 504P_{i+2,j-4}^n \\
& + 5376P_{i+2,j-3}^n - 28224P_{i+2,j-2}^n + 112896P_{i+2,j-1}^n \\
& - 112896P_{i+2,j+1}^n + 28224P_{i+2,j+2}^n - 5376P_{i+2,j+3}^n \\
& + 504P_{i+2,j+4}^n + 96P_{i+3,j-4}^n - 1024P_{i+3,j-3}^n \\
& + 5376P_{i+3,j-2}^n - 21504P_{i+3,j-1}^n + 21504P_{i+3,j+1}^n \\
& - 5376P_{i+3,j+2}^n + 1024P_{i+3,j+3}^n - 96P_{i+3,j+4}^n \\
& - 9P_{i+4,j-4}^n + 96P_{i+4,j-3}^n - 504P_{i+4,j-2}^n + 2016P_{i+4,j-1}^n \\
& - 2016P_{i+4,j+1}^n + 504P_{i+4,j+2}^n - 96P_{i+4,j+3}^n + 9P_{i+4,j+4}^n), \quad (3.26)
\end{aligned}$$

la cual se obtiene aplicando consecutivamente dos operadores de primer orden. Similarmente, considerando una malla cuadrada, se obtiene un esquema discreto en diferencias finitas para la Ecuación 3.15 que representa el medio acústico TTI 2D con anisotropía elíptica:

$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{n+1} = & b_1 C \left(-\frac{1}{560} P_{i-4,j}^n + \frac{8}{315} P_{i-3,j}^n - \frac{1}{5} P_{i-2,j}^n + \frac{8}{5} P_{i-1,j}^n - \frac{205}{72} P_{i,j}^n \right. \\
& \left. + \frac{8}{5} P_{i+1,j}^n - \frac{1}{5} P_{i+2,j}^n + \frac{8}{315} P_{i+3,j}^n - \frac{1}{560} P_{i+4,j}^n \right) \\
& + b_2 C \left(-\frac{1}{560} P_{i,j-4}^n + \frac{8}{315} P_{i,j-3}^n - \frac{1}{5} P_{i,j-2}^n + \frac{8}{5} P_{i,j-1}^n - \frac{205}{72} P_{i,j}^n \right. \\
& \left. + \frac{8}{5} P_{i,j+1}^n - \frac{1}{5} P_{i,j+2}^n + \frac{8}{315} P_{i,j+3}^n - \frac{1}{560} P_{i,j+4}^n \right) \\
& + b_3 C (9P_{i-4,j-4}^n - 96P_{i-4,j-3}^n + 504P_{i-4,j-2}^n - 2016P_{i-4,j-1}^n \\
& + 2016P_{i-4,j+1}^n - 504P_{i-4,j+2}^n + 96P_{i-4,j+3}^n - 9P_{i-4,j+4}^n \\
& - 96P_{i-3,j-4}^n + 1024P_{i-3,j-3}^n - 5376P_{i-3,j-2}^n \\
& + 21504P_{i-3,j-1}^n - 21504P_{i-3,j+1}^n + 5376P_{i-3,j+2}^n \\
& - 1024P_{i-3,j+3}^n + 96P_{i-3,j+4}^n + 504P_{i-2,j-4}^n \\
& - 5376P_{i-2,j-3}^n + 28224P_{i-2,j-2}^n - 112896P_{i-2,j-1}^n \\
& + 112896P_{i-2,j+1}^n - 28224P_{i-2,j+2}^n + 5376P_{i-2,j+3}^n \\
& - 504P_{i-2,j+4}^n - 2016P_{i-1,j-4}^n + 21504P_{i-1,j-3}^n \\
& - 112896P_{i-1,j-2}^n + 451584P_{i-1,j-1}^n - 451584P_{i-1,j+1}^n \\
& + 112896P_{i-1,j+2}^n - 21504P_{i-1,j+3}^n + 2016P_{i-1,j+4}^n \\
& + 2016P_{i+1,j-4}^n - 21504P_{i+1,j-3}^n + 112896P_{i+1,j-2}^n \\
& - 451584P_{i+1,j-1}^n + 451584P_{i+1,j+1}^n - 112896P_{i+1,j+2}^n \\
& + 21504P_{i+1,j+3}^n - 2016P_{i+1,j+4}^n - 504P_{i+2,j-4}^n \\
& + 5376P_{i+2,j-3}^n - 28224P_{i+2,j-2}^n + 112896P_{i+2,j-1}^n \\
& - 112896P_{i+2,j+1}^n + 28224P_{i+2,j+2}^n - 5376P_{i+2,j+3}^n \\
& + 504P_{i+2,j+4}^n + 96P_{i+3,j-4}^n - 1024P_{i+3,j-3}^n \\
& + 5376P_{i+3,j-2}^n - 21504P_{i+3,j-1}^n + 21504P_{i+3,j+1}^n \\
& - 5376P_{i+3,j+2}^n + 1024P_{i+3,j+3}^n - 96P_{i+3,j+4}^n \\
& - 9P_{i+4,j-4}^n + 96P_{i+4,j-3}^n - 504P_{i+4,j-2}^n + 2016P_{i+4,j-1}^n \\
& - 2016P_{i+4,j+1}^n + 504P_{i+4,j+2}^n - 96P_{i+4,j+3}^n + 9P_{i+4,j+4}^n) \\
& + 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
b_1 &= [v_{p_0}^2 \sin^2 \phi + v_{nmo}^2 \cos^2 \phi] v_{nmo}^2, \\
b_2 &= [v_{p_0}^2 \cos^2 \phi + v_{nmo}^2 \sin^2 \phi], \\
b_3 &= \frac{1}{705600} [v_{p_0}^2 + v_{nmo}^2] \sin(2\phi),
\end{aligned}$$

y C está definido por la Ecuación 3.23. En cuanto a dispersión numérica, para el caso TTI debe cumplirse de igual manera con la desigualdad 3.24, mientras que para la estabilidad numérica (véase Ecuación 3.25) (Jin et al., 2010)

$$\begin{aligned}
a &= W (a_1 + a_2), \\
a_1 &= (1 + 2\varepsilon_{max}) (2 - b), \\
a_2 &= \sqrt{1 + 2\delta_{max}} (1 + b), \\
b &= \cos^2 \theta \sin 2\phi + \sin 2\theta (\sin \phi + \cos \phi),
\end{aligned}$$

una vez más, W es la suma de los valores absolutos de los coeficientes del esquema en diferencias finitas de octavo orden, esto es $W = 6.5016$, mientras que θ y ϕ son los ángulos de acimut y buzamiento para el medio TTI. Para implementar el pulso que simula la propagación, se utiliza la ondícula ya mencionada (véase Ecuación 3.4).

En el próximo capítulo se expone el método de migración sísmica mientras se comparan brevemente algunas de las metodologías empleadas para dicho proceso. Se hace énfasis en el algoritmo de RTM, el cual se basa en las Ecuaciones de onda 3.7, 3.13 y 3.15 y se muestran algunos ejemplos de su aplicación, así como sus alcances y limitaciones, además de los retos que presenta actualmente.

Capítulo 4

Migración sísmica

4.1. Introducción

La migración sísmica es un proceso que tiene como objetivo transformar el campo de onda registrado, en una imagen que represente fielmente a una estructura geológica. A grandes rasgos existen dos técnicas de migración, la basada en la Ecuación Eikonal, llamada migración Kirchhoff (Schneider, 1978), y las basadas en la Ecuación de onda. Estas últimas se conocen como métodos de migración de un camino (*one-way*) y de dos caminos (*two-way*). La migración *one-way*, como PS (*Phase-Shift*) y PSPI (*Phase-Shift Plus Interpolation*), está basada en las ecuaciones de sentido único o ecuaciones de onda unidireccionales (OWWE) (Gazdag, 1978) mientras que las técnicas *two-way* se conocen como Migración Reversa en el Tiempo (RTM) (Baysal et al., 1983). Mediante este método se obtienen dos campos propagados en el tiempo, uno hacia adelante (*forward*) y uno hacia atrás (*backward*) o retropropagado, dicha propagación se basa en la Ecuación de onda completa (para el caso isótropo se emplea la Ecuación 3.7) y trae ventajas considerables ya que registra todos los posibles arribos del campo de onda sin limitaciones en cuanto a la inclinación de los estratos o a la variación lateral de la velocidad del medio, produciendo así mejores imágenes que otros métodos. A pesar de las ventajas ya mencionadas, los principales obstáculos en la aplicación de tal técnica son el ruido de baja frecuencia y, principalmente, su alto costo computacional (dos Santos, 2015), aunque este último puede ser subsanado con HPC (*High-Performace Computing*), programación paralelo y el uso de *clusters* de CPU (*Central Processing Unit*)s y GPU (*Graphics Processing Unit*)s.

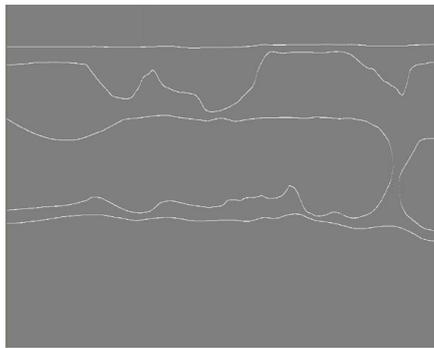
4.2. Relación entre migración y modelado

El modelado sísmico y la migración son, de cierta forma, procesos inversos. El modelado describe el proceso de propagación de onda hacia adelante: desde las fuentes, a través de los reflectores hasta los receptores, generando así datos sísmicos. La migración apunta a deshacer los efectos de propagación de la onda para producir una imagen del subsuelo. El modelado por diferencias finitas usando la ecuación de onda completa no tiene limitaciones de buzamiento y puede recrear todos los efectos relacionados con la ecuación de onda (por ejemplo múltiples reflexiones, frentes de onda, anisotropía y conversiones de modo), por lo tanto es la manera ideal para obtener datos sísmicos realistas a partir de un modelo de la Tierra que conocido en detalle, en contraste con los datos de campo, los cuales vienen de una Tierra real pero desconocida. Aunque el objetivo de la migración es construir imágenes de la Tierra a partir de datos de campo, resulta difícil probar la exactitud de los métodos de migración cuando el resultado deseado, la imagen correcta, no se conoce (Gray et al., 2001).

4.3. Métodos de migración

Existen diversas formulaciones para la migración sísmica. Realizar una evaluación o documentación de cada una de ellas se escapa al alcance de este documento, no obstante se exponen a continuación las generalidades de los métodos más empleados: las técnicas basadas en rayos o técnicas integrales propagan los campos de onda de la fuente y del receptor hacia cada potencial receptor en el subsuelo usando aproximaciones de alta frecuencia, conocida como migración Kirchhoff. Los métodos basados en diferencias finitas propagan los campos de onda de la fuente y del receptor usando técnicas recursivas. Particularmente, RTM calcula el campo incidente en cada receptor usando la ecuación de onda e introduciendo el registro de la fuente en el modelo, desde la posición de la fuente. Este proceso es un modelado estandar en el cual se obtiene el campo propagado, donde los instantes posteriores se determinan a partir de los anteriores. Posteriormente, se calcula el campo retropropagado, determinando instantes anteriores con base en los posteriores. Esto hace posible estimar el campo de onda reflejado en cada punto del subsuelo. En este caso, el campo de onda registrado se introduce dentro del modelo en las ubicaciones de los receptores, comenzando por el tiempo final y terminando por el inicial. Para obtener la reflectividad en cada posición, se correlacionan los campos de onda incidentes y reflejados en la totalidad del dominio espacial y se suman para cada disparo en una imagen de salida. Lo expuesto anteriormente puede apreciarse en la Figura 4.1, allí se observa, además de la estructura del subsuelo (4.1a) una captura en tiempo para la

fase de propagación (4.1b) y retropropagación (4.1c), así como la aplicación de la condición de imagen tipo correlación cruzada para dicho instante (4.1d). La clave de esta técnica se encuentra en que, una vez que la energía se introduce en la malla de propagación, no existe aproximación en la amplitud. El campo de onda se propaga acústicamente y no hay limitaciones en la propagación con la dirección. Los métodos OWWE estándar usan una técnica similar para predecir los campos de onda de la fuente y del receptor en el subsuelo, pero el lugar de propagar el campo de onda en el tiempo, usan el dominio mixto $((\vec{k}, \omega), (x, \omega))$. El campo de onda de la fuente se propaga recursivamente en el subsuelo bajo la suposición de que este se propaga en una sola dirección. (Farmer et al., 2009).



(a) Estructura del subsuelo.

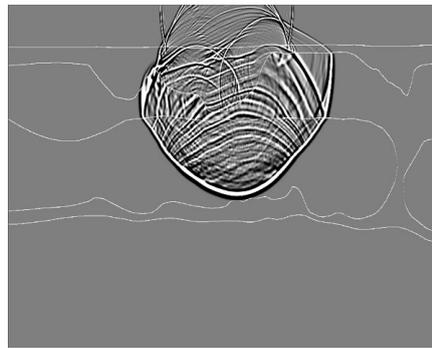
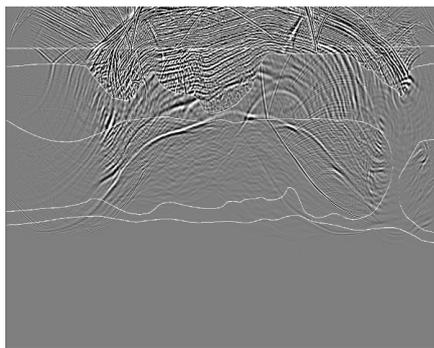
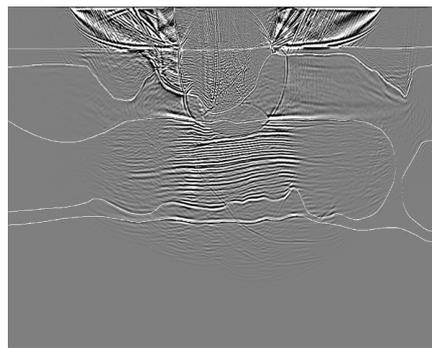
(b) Propagación del campo de onda (*forward*) en el tiempo $t = 4.0$ s.(c) Propagación del campo de onda (*backward*) en el tiempo $t = 4.0$ s.(d) Correlación cruzada entre los campos de onda propagado y retropropagado en el tiempo $t = 4.0$ s.

Figura 4.1: Fases de ejecución del algoritmo RTM (SeismicCity, 2016).

Para demostrar el potencial de RTM en comparación con los métodos OWWE se presenta el resultado de migrar datos sintéticos con ambos

algoritmos, la Figura 4.2 muestra una migración con un algoritmo OWWE y una RTM. En la imagen OWWE, debido a limitaciones en el buzamiento del algoritmo, no se iluminan correctamente algunas zonas del diapiro de sal. En contraste, los buzamientos pronunciados y la energía de las *turning waves* son procesadas de mejor manera por el algoritmo RTM, produciendo una imagen más clara (Farmer et al., 2009).

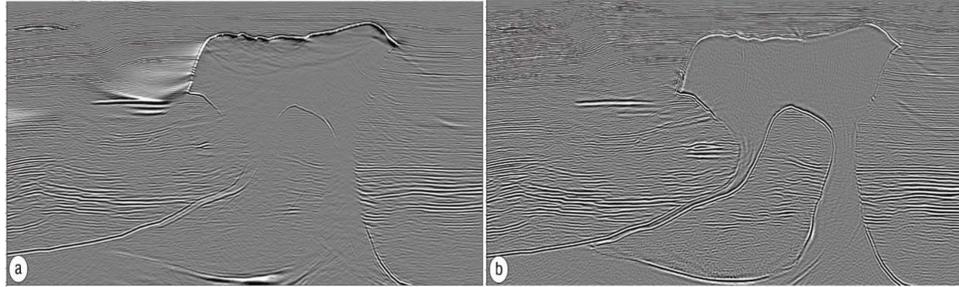


Figura 4.2: (a) Datos sintéticos migrados con un algoritmo OWWE. (b) Datos sintéticos migrados con un algoritmo RTM (Farmer et al., 2009)

La Figura 4.3 muestra el desempeño de los algoritmos mencionados en un proyecto de *imaging* donde no se conoce el modelo en su totalidad, RTM no mejora significativamente la imagen en comparación con los otros métodos; pero incluso con un modelo pobre, iluminará buzamientos pronunciados. Sin embargo, conforme el modelo se conoce con más detalle, la imagen RTM mejora considerablemente (Farmer et al., 2009).

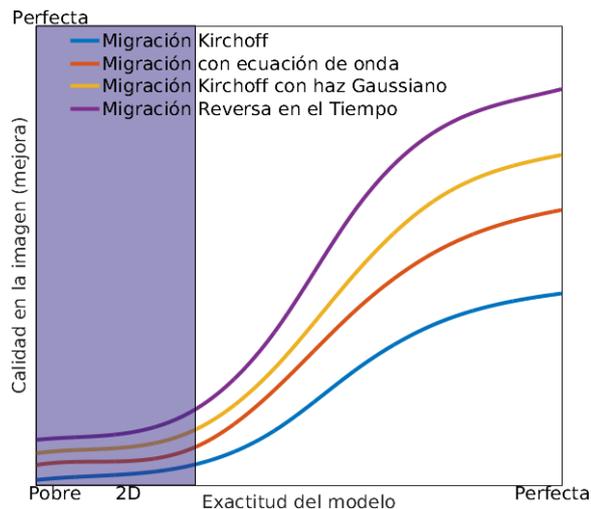


Figura 4.3: Calidad de la imagen Vs. exactitud en la velocidad. Tomada y modificada de Farmer et al. (2009)

4.4. Migración Reversa en el Tiempo

RTM usa diferencias finitas para solucionar la ecuación de onda completa (*two-way*), ya sea acústica o elástica, mediante extrapolación en el tiempo, permitiéndole así a las ondas propagarse en todas las direcciones. El concepto es simple y se relaciona con lo ya descrito en la Sección 4.2: RTM modela la ecuación de onda mediante diferencias finitas, propagando hacia atrás en el tiempo. Sus ventajas, entre otras, permiten obtener imágenes sin límite en el buzamiento y con gran fidelidad del modelo empleado (Gray et al., 2001).

RTM posee los mismos problemas con estabilidad y dispersión numérica que el modelado por diferencias finitas, lo cual es fácil (pero costoso) de controlar. Su costo computacional es proporcional al producto $N_t \cdot N_x \cdot N_z \cdot N_{fd}$, donde N_t es el número de pasos en el tiempo, $N_x \cdot N_z$ es el número de puntos de malla en los cuales se resuelve la ecuación de onda y N_{fd} es el número de puntos usados localmente por los operadores en diferencias finitas. Para muestrear adecuadamente el campo de onda, el tamaño de las celdas de la malla debe disminuir conforme la máxima frecuencia de los datos incrementa. Por razones de estabilidad, el tamaño de paso en tiempo debe decrecer mientras el tamaño de la celda decrece. Debido a esto, el costo computacional se incrementa, sin embargo RTM es potencialmente el método más exacto en el sentido que sigue fielmente la ecuación de onda (Gray et al., 2001).

En las próximas secciones se presentarán los principios en los que se basa el algoritmo de RTM, tales como el principio de Huygens, el de reversibilidad temporal y de reciprocidad. Estos muestran que la ecuación de onda puede ser utilizada también en el sentido inverso en el tiempo y que, además de usar un único punto de malla para introducir la señal sísmica (fuente), es posible utilizar cada una de las posiciones de los receptores para introducir un sismograma (sintético o real). Posteriormente se presentan la condición de imagen necesaria para obtener una sección migrada junto con el filtro implementado para remover los efectos de bajas frecuencias (Filtro Laplaciano).

4.4.1. Principio de Huygens

Christian Huygens propuso un método de representación de frentes de onda, donde cada punto en ellos se comporta como una nueva fuente de ondas elementales, propagándose en la misma dirección que la onda original y con igual frecuencia. Formalmente, el enunciado del principio de Huygens es el siguiente: *Todos los puntos de un frente de onda deben ser considerados como fuentes puntuales de ondas esféricas secundarias. Después de un cierto*

tiempo t , una nueva posición del frente de onda es la superficie tangencial a todas esas ondas secundarias. Entonces, cada punto sobre una superficie reflectora puede ser considerado como una fuente secundaria de radiación con su propia superficie de onda (dos Santos, 2015).

4.4.2. Principio de reversibilidad temporal

RTM se basa en la ecuación de onda en el dominio espacio temporal. El concepto es simple, se propagan los datos sísmicos de reflexión obtenidos, hacia atrás en el tiempo (Becerra, 2011). Si $P(x, z, t)$ representa el campo propagado hacia adelante, $\tilde{P}(x, z, \tau)$ denota el campo propagado hacia atrás, donde

$$\tau = T - t \quad (4.1)$$

y T es el tiempo total de observación. Considerando la transformación 4.1, aplicando regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial \tau},$$

derivando nuevamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial P}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2}. \end{aligned}$$

En la Ecuación 4.1 se aprecia que

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1.$$

Con lo anterior se demuestra que el procedimiento RTM es posible, dado que el operador de la ecuación de onda es invariante bajo traslación e inversión de la coordenada temporal (Becerra, 2011). Un procedimiento análogo puede ser realizado para el caso VTI y TTI, con el fin de garantizar su invarianza temporal (dos Santos, 2015).

4.4.3. Principio de reciprocidad

Considere un par fuente-receptor ubicada en una ubicación dada. El principio de reciprocidad afirma que la solución de la ecuación de onda no

se altera si se intercambian las posiciones entre fuente y receptor. Prueba de ello puede encontrarse en dos Santos (2015), válida para medios acústicos VTI y TTI.

4.4.4. Condición de imagen

El principio de imagen de Claerbout (1966) afirma que: *Un reflector existe en puntos del subsuelo donde la primera llegada de onda descendente coincide en el tiempo (t_d) y espacio (x, z), con la onda ascendente.* Esta afirmación se representa matemáticamente como:

$$I(x, z) = \frac{P_A(x, z, t_d)}{P_D(x, z, t_d)},$$

donde P_A es la onda ascendente, P_D la onda descendente e I la ubicación de los reflectores. El tiempo t_d no se conoce de antemano, por lo que se hace necesario un esquema práctico que permita localizar la posición del reflector y estimar un valor de la amplitud proporcional a la reflectividad. Claerbout (1966) mostró que la amplitud y posición del reflector corresponden al pico de correlación cruzada en la dimensión temporal de los campos ascendente y descendente, lo cual se puede expresar en el dominio frecuencial mediante:

$$\begin{aligned} I(x, z) &= \int \frac{P_A(x, z, t_d)}{P_D(x, z, t_d)} d\omega \\ &= \int \frac{P_A(x, z, t_d) P_D^*(x, z, t_d)}{P_D^*(x, z, t_d) P_D(x, z, t_d)} d\omega, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde P_D^* representa el complejo conjugado del campo de onda P_D . La Ecuación 4.2 se conoce como condición de imagen por deconvolución. El espectro $P_D(x, z, t_d) P_D^*(x, z, t_d)$ posee un valor real y, por tanto, no contiene información acerca de la fase. Una implementación natural de la condición de imagen, sin tener en cuenta la amplitud, es omitir el denominador de la Ecuación 4.2, con ello:

$$I(x, z) = \int P_A(x, z, t_d) P_D^*(x, z, t_d) d\omega, \quad (4.3)$$

la cual es conocida como condición de imagen por correlación. En el presente trabajo se implementa una condición de imagen en el dominio del tiempo, de esta forma la Ecuación 4.3 puede reescribirse como:

$$I(x, z) = \int P_A(x, z, t_d) P_D(x, z, t_d) dt.$$

Al aplicar la condición de imagen tipo correlación en un dominio discreto, la imagen en cada punto se forma con la sumatoria del producto entre los

campos ascendente P_A y descendente P_D para todas las fuentes y todos los instantes de tiempo, siendo diferente de cero sólo en los puntos sobre el reflector. En otros puntos, la sumatoria resultará en un valor nulo, o casi nulo, debido al ruido y al espectro limitado de la ondícula (dos Santos, 2015):

$$I(x, z) = \sum_{S_i} \sum_t P_A(x, z, t_d) P_D(x, z, t_d). \quad (4.4)$$

4.4.5. Filtro Laplaciano

El ruido de baja frecuencia es uno de los principales obstáculos en la aplicación de RTM. Este efecto surge debido a la presencia de energía de extrapolación de la fuente después de una reflexión con la extrapolación del reflector, lo cual produce coeficientes de correlación diferentes no nulos. Con el fin de remover o atenuar tal efecto en la sección migrada, un filtro pasa alto puede ser aplicado a la imagen final. De esta forma, si $I(x, z)$ es la imagen migrada final, el filtro Laplaciano para el caso 2-D tiene la siguiente forma (dos Santos, 2015):

$$I_f(x, z) = \left(\frac{\partial^2 I(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I(x, z)}{\partial z^2} \right).$$

Además de su fácil implementación, la principal ventaja de este tipo de filtros es que preservan la información de los reflectores más inclinados, al contrario de lo que podría acontecer con un filtro pasa bajo (dos Santos, 2015).

4.4.6. Implementación del algoritmo

Con el fin ilustrar el algoritmo se expone a continuación un *walkthrough* del método de RTM, el cual se basa en la Ecuación de onda completa. En este caso se parte de la Ecuación de onda para un medio isótropo (ver Ecuación 3.7), la cual puede reescribirse como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 P.$$

La anterior expresión se soluciona mediante FD utilizando operadores espaciales de segundo orden (ver Ecuación 3.20), obteniendo:

$$\frac{P_{i,j}^{n-1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n+1}}{\Delta t^2} = v^2 \left(\frac{P_{i-1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j-1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} \right),$$

asumiendo una malla cuadrada, es decir $\Delta x = \Delta z = \Delta h$, se obtiene

$$P_{i,j}^{n-1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n+1} = \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta h^2} (P_{i-1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i+1,j}^n + P_{i,j-1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j+1}^n),$$

haciendo $v^2\Delta t^2/\Delta h^2 = G$, se determina el campo futuro $P_{i,j}^{n+1}$ como sigue

$$P_{i,j}^{n+1} = G (P_{i-1,j}^n + P_{i+1,j}^n + P_{i,j-1}^n + P_{i,j+1}^n) + 2(1 - 2G) P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1}. \quad (4.5)$$

De la anterior expresión se obtiene el parámetro de estabilidad inherente al esquema numérico implementado, al notar que $1 - 2G$ debe ser un término positivo, lo cual implica

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{2}\Delta h}{2v}.$$

El primer paso en el algoritmo implementado es el modelado, del cual se obtienen los sismogramas sintéticos esenciales para su las subsecuentes etapas. Para ello se propaga hacia adelante en el tiempo (desde el tiempo inicial hasta el tiempo final) un pulso de onda, el cual consecuencia se añade a la Ecuación 4.5 un término extra que modela dicha fuente:

$$P_{f,i,j}^{n+1} = G (P_{f,i-1,j}^n + P_{f,i+1,j}^n + P_{f,i,j-1}^n + P_{f,i,j+1}^n) + 2(1 - 2G) P_{f,i,j}^n - P_{f,i,j}^{n-1} + src(x, z, t \rightarrow T), \quad (4.6)$$

donde P_f representa el campo propagado desde la fuente. La anterior expresión permite registrar el campo en los receptores (comúnmente ubicados en la superficie) y con ello las trazas sísmicas que se introducen en la segunda fase del algoritmo: la retropropagación. En ella se propaga hacia atrás en el tiempo (desde el tiempo final hasta el tiempo inicial) el campo de onda en la superficie, es decir, se determina el campo de onda pasado en términos del presente y futuro:

$$P_{b,i,j}^{n-1} = G (P_{b,i-1,j}^n + P_{b,i+1,j}^n + P_{b,i,j-1}^n + P_{b,i,j+1}^n) + 2(1 - 2G) P_{b,i,j}^n - P_{b,i,j}^{n+1} + trc(x, z, T \rightarrow t), \quad (4.7)$$

donde P_b representa el campo retropropagado desde los receptores y $trc(x, z, T \rightarrow t)$ corresponde a las trazas sísmicas. Si bien la Ecuación 4.7 es válida, es posible reescribirla de manera similar a la Ecuación 4.6, lo cual facilita su implementación computacional. Para ello se invierte la traza sísmica y se modela en tiempo hacia adelante, obteniendo

$$P_{b,i,j}^{n+1} = G (P_{b,i-1,j}^n + P_{b,i+1,j}^n + P_{b,i,j-1}^n + P_{b,i,j+1}^n) + 2(1 - 2G) P_{b,i,j}^n - P_{b,i,j}^{n-1} + trc(x, z, t \rightarrow T).$$

Una vez determinados los campos P_f y P_b se implementa la condición de imagen tipo correlación dada por la Ecuación 4.4, resultando en

$$I_{i,j} = \sum_{s_i} \sum_n P_{f_{i,j}}^n P_{b_{i,j}}^n,$$

donde s_i representa la i -ésima fuente sísmica. La Figura 4.4 resume lo expuesto en las anteriores líneas y lo expone a manera de diagrama de flujo, allí se aprecia a grandes rasgos las fases de la implementación del algoritmo RTM.

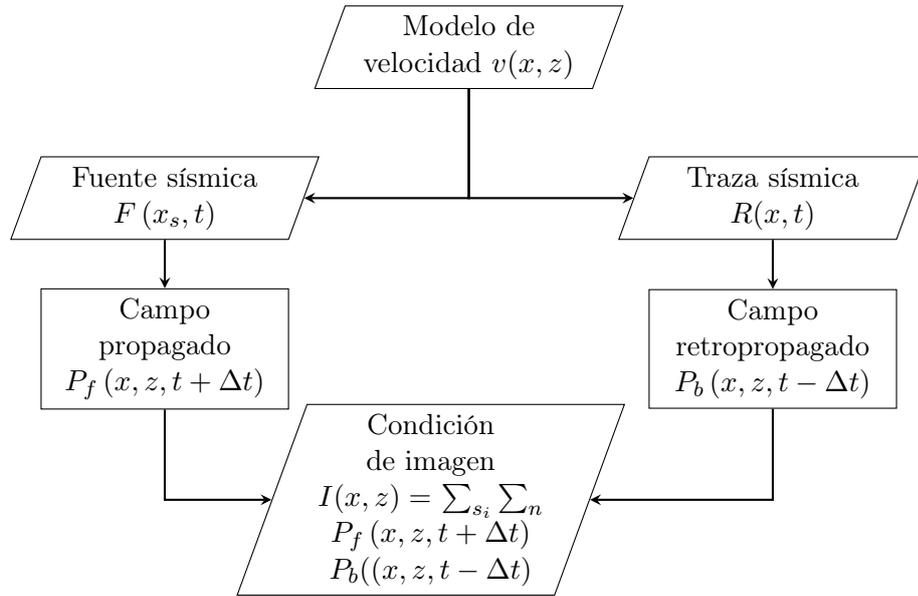


Figura 4.4: Diagrama de flujo para la implementación de un algoritmo RTM, basado en la ecuación de onda para medios isótropos.

De manera similar, La Figura muestra el algoritmo para el caso VTI elíptico, en el cual debe añadirse como parámetro de entrada el modelo de anisotropía

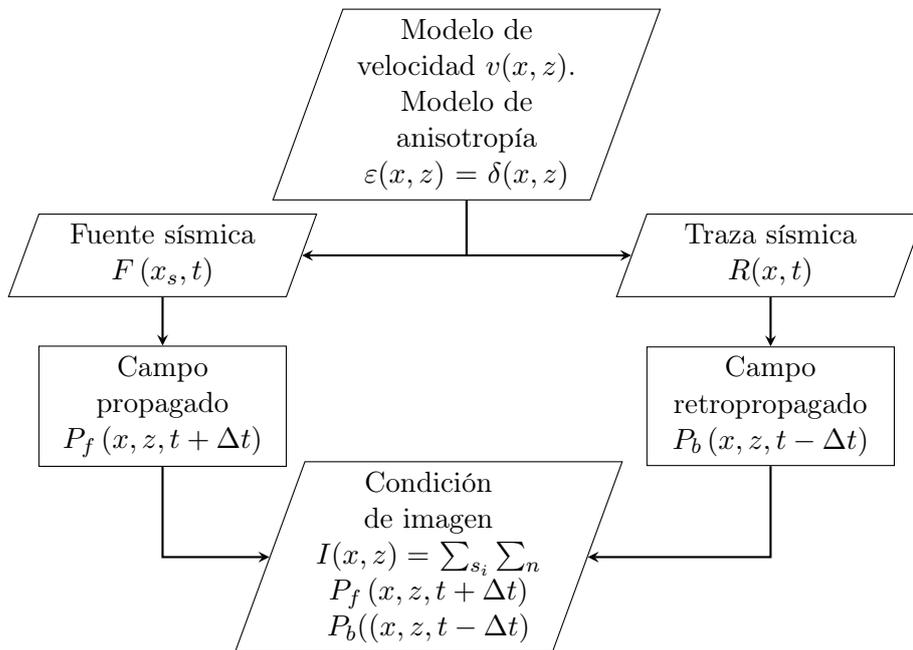


Figura 4.5: Diagrama de flujo para la implementación de un algoritmo RTM, basado en la ecuación de onda para medios con anisotropía VTI elíptica.

Por último, la Figura 4.6 muestra el algoritmo para RTM considerando anisotropía TTI elíptica en el cual, además de considerarse el parámetro de anisotropía, debe tenerse en cuenta la inclinación de los reflectores.

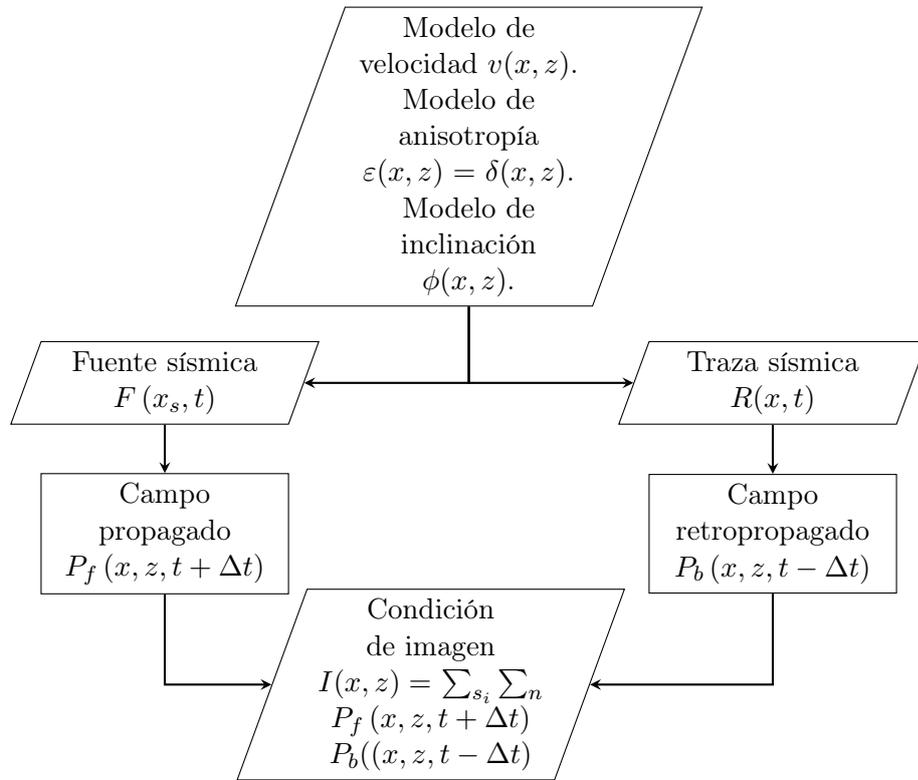


Figura 4.6: Diagrama de flujo para la implementación de un algoritmo RTM, basado en la ecuación de onda para medios con anisotropía TTI elíptica.

Basado en la metodología expuesta para el algoritmo RTM que considera medios isótropos, se realiza una implementación análoga para los medios con anisotropía de tipo VTI y TTI. En el próximo capítulo se exponen los modelos sintéticos construidos para probar y evaluar el desempeño del método en cada uno de los tres casos. Se muestran las imágenes obtenidas y se comparan datos de tiempo de ejecución en diferentes arquitecturas. En adición se muestran los resultados obtenidos aplicar el algoritmo RTM en un modelo complejo, como lo es el de BP (Shah, 2007).

Capítulo 5

Experimentos numéricos

5.1. Introducción

En los siguientes párrafos se exponen los experimentos numéricos realizados en la ejecución del algoritmo RTM mientras se detallan cada una de las fases del proceso, desde la construcción de los modelos sintéticos hasta la obtención de una imagen migrada. En primer lugar se muestra el caso de un modelo homogéneo, sobre el cual se evalúa el desempeño del modelado de la propagación de ondas en medios acústicos con anisotropía elíptica TTI, comparando su implementación en CPU y GPU. Posteriormente se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo RTM al considerar anisotropía elíptica VTI y TTI sobre un modelo geológico complejo, el cual se compone de capas planas e inclinadas con diferentes valores de $\varepsilon = \delta$. Finalmente, se aplica el algoritmo RTM (en sus tres versiones) a una porción del modelo de BP, el cual se usa con fines de *benchmark* en procesos de migración sísmica.

5.2. Modelo homogéneo

Debido al alto costo computacional del algoritmo RTM, cualquier implementación que permita reducir el tiempo de ejecución del mismo resulta valiosa (dos Santos, 2015), debido a lo anterior se emplea HPC. En primera instancia se hizo uso de MPI (*Message Passing Interface*) para paralelizar el algoritmo empleando una arquitectura de disparo donde un proceso modela independientemente la propagación (hacia adelante y atrás) de una fuente. Con el fin de explotar el potencial del algoritmo, se implementó una paralelización a nivel local empleando computación en GPU, y no en CPU como es usual, desarrollando un código para el modelado de la propagación TTI usando CUDA (*Compute Unified Device Architecture*)-C.

Con el fin de probar el desempeño se construyó un modelo de velocidad, anisotropía e inclinación constante, donde la velocidad vertical posee un valor de $v_{p0} = 5000$ m/s, los parámetros de anisotropía $\varepsilon = \delta = 0.25$ y el ángulo de inclinación $\phi \approx 40.1^\circ$. Sobre dicho modelo se modeló la propagación de ondas acústicas en medios con anisotropía elíptica TTI, en ambas arquitecturas. Los detalles de este proceso se aprecian en la Tabla 5.1:

Puntos de malla en la horizontal	400
Puntos de malla en la vertical	200
Intervalos de tiempo	5000
Δx	0.01 m
Δz	0.01 m
Δt	0.0005 s
ω_0	30 Hz
Número de disparos	1

Tabla 5.1: Parámetros para el modelado de la propagación en CPU y GPU.

Los resultados de la comparación entre el algoritmo estrictamente secuencial y el paralelizado usando CUDA se muestran en la Figura 5.1. Allí se evidencian las diferencias entre los tiempos de ejecución para la implementación en CPU y GPU (Sanders y Kandrot, 2010), la cual se realizó en dos diferentes plataformas, ambas con procesadores Intel a 2.0 GHz, 6 Gb de RAM, HDD y una GPU NVIDIA.

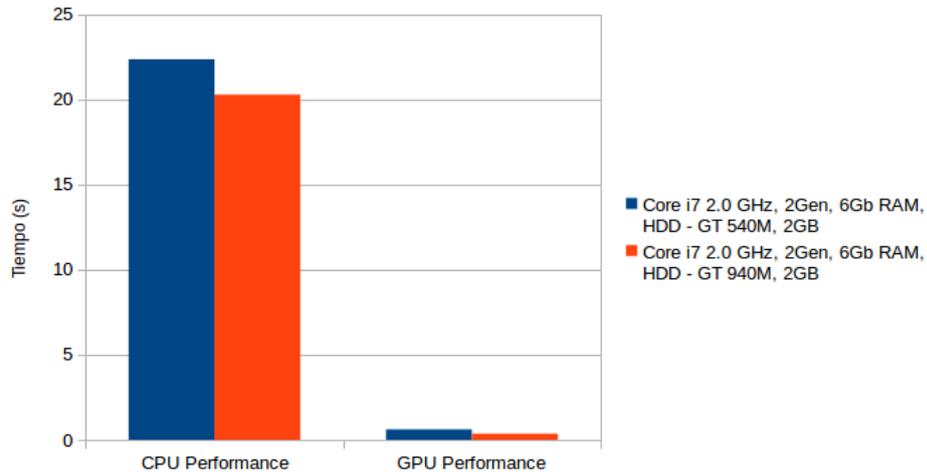


Figura 5.1: Comparación del desempeño del modelado. Tiempo de ejecución: Algoritmo secuencial Vs. Algoritmo paralelizado usando CUDA-C.

Así mismo se realizó un estudio de granularidad (Amado et al., 2015), el cual consiste en variar el tamaño del bloque (número de *threads* por bloque

y dimensiones del mismo), con el fin de encontrar la mejor distribución de trabajo en cada arquitectura GPU (Cheng et al., 2014). Estos resultados se aprecian en la Figura 5.2, en ella se evidencia como el tamaño del bloque ($threads\ per\ block\ in\ X\ direction \times threads\ per\ block\ in\ Y\ direction$) afecta el rendimiento

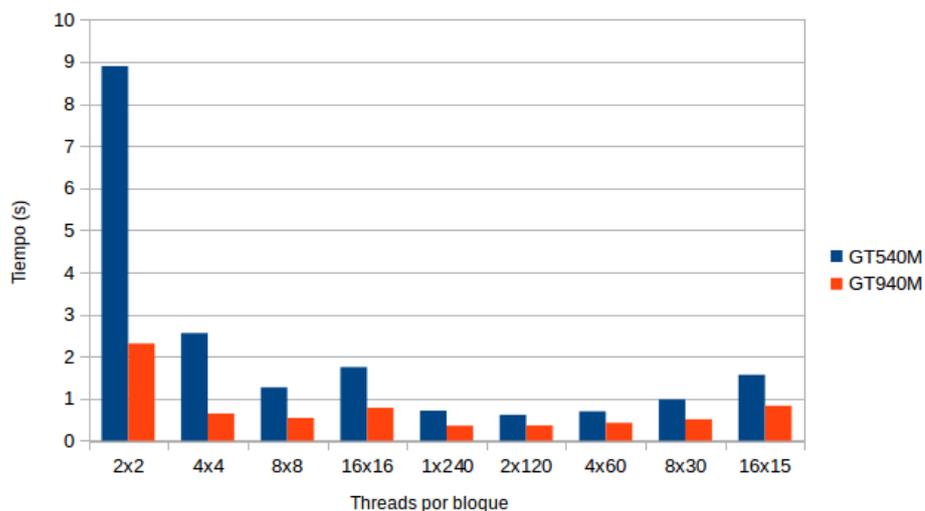


Figura 5.2: Tiempo de ejecución Vs. *Threads* por bloque.

5.3. Modelo geológico complejo

Fletcher et al. (2009) en su artículo proponen un modelo sintético, el cual fue tomado y modificado con el fin de probar el algoritmo RTM desarrollado. Usando las rutinas `trimodel` y `tri2uni` de SU (*Seismic Unix*) (Cohen y Stockwell, 2008), se construyó un modelo de velocidad con diferentes parámetros de anisotropía e inclinación. La Figura 5.3a muestra la velocidad de la onda P (v_{p0}) para el modelo construido, la cual varía desde 2500 m/s en la capa somera, hasta 6500 m/s en la zona más profunda. Con el fin de observar la influencia de la anisotropía sobre la imagen final, se construyeron tres diferentes modelos para el parámetro ε , en ellos varía dicho valor al interior de las zonas inclinadas, tal y como se aprecia en la Figura 5.3b, dicho parámetro posee un valor casi nulo ($\varepsilon = 0.01$), lo cual contrasta con los valores de $\varepsilon = 0.15$ y $\varepsilon = 0.24$ utilizados para los otros dos modelos (ver Figura 5.3c y Figura 5.3d). Finalmente, el modelo de inclinación indica el ángulo que forma el eje de simetría de los reflectores con la vertical, para el modelo construido este va desde $\phi = 0^\circ$ hasta $\phi = 60^\circ$, aproximadamente. Dicho parámetro se aprecia en la Figura 5.3e

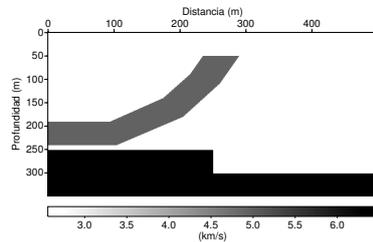
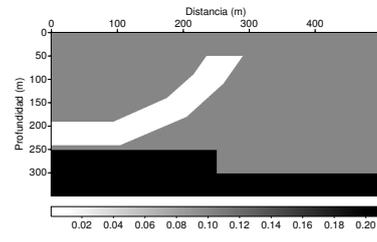
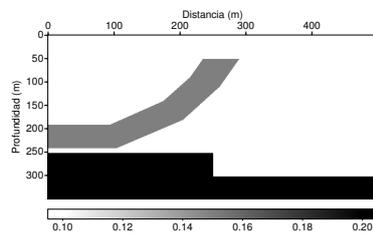
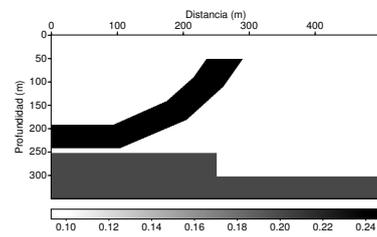
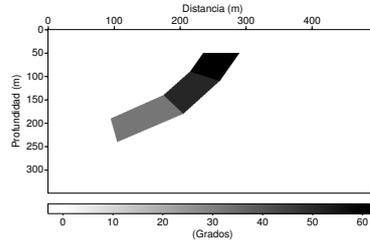
(a) Modelo de velocidad (v_{p0}).(b) Modelo de anisotropía (δ y ε). Versión 1: Valores de anisotropía bajos en la zona de capas inclinadas.(c) Modelo de anisotropía (δ y ε). Versión 2: Valores de anisotropía moderados en la zona de capas inclinadas.(d) Modelo de anisotropía (δ y ε). Versión 3: Valores de anisotropía altos en la zona de capas inclinadas.(e) Modelo de inclinación (ϕ).

Figura 5.3: Modelo geológico complejo, tomado y modificado de Fletcher et al. (2009).

En resumen, existen tres versiones del modelo en las cuales cambia el parámetro de anisotropía ($\varepsilon = \delta$) en la zona de estratos inclinados, mientras que se mantiene una única versión para la velocidad vertical paralela al eje de simetría (v_{p0}) e inclinación (ϕ), es decir, existen tres juegos de datos de entrada para los cuales se corren las tres versiones del algoritmo de RTM: el clásico algoritmo isótropo y aquellos que consideran anisotropía elíptica VTI y TTI. En la Tabla 5.2 se exponen los parámetros empleados para la ejecución del algoritmo:

Parámetro	Valor
Puntos de malla en la horizontal	500
Puntos de malla en la vertical	350
Intervalos de tiempo	5000
Δx	1 m
Δz	1 m
Δt	0.05 s
ω_0	0.1 Hz
Número de disparos	13

Tabla 5.2: Parámetros para la ejecución del algoritmo RTM en el modelo geológico complejo.

Las fuentes sísmicas se ubicaron a una profundidad de $z_s = 1$ m y se distribuyeron horizontalmente tal y como se indica en la Tabla 5.3:

x_s (m)												
40	75	110	145	180	215	250	285	320	355	390	425	460

Tabla 5.3: Coordenada x_s de las fuentes sísmicas para la ejecución del algoritmo RTM sobre el modelo geológico complejo.

La metodología para la obtención de resultados es bastante directa, primero se ejecutó el algoritmo RTM TTI, el cual genera en su fase de modelado un sismograma sintético, utilizado posteriormente como entrada para la fase de retropropagación en los algoritmos RTM VTI e isotrópico. Lo anterior se lleva a cabo propagando el pulso de onda, proveniente de la fuente sísmica, sobre el dominio computacional. La Figura 5.4 muestra cuatro *snapshots* del campo de onda P para distintos instantes de tiempo

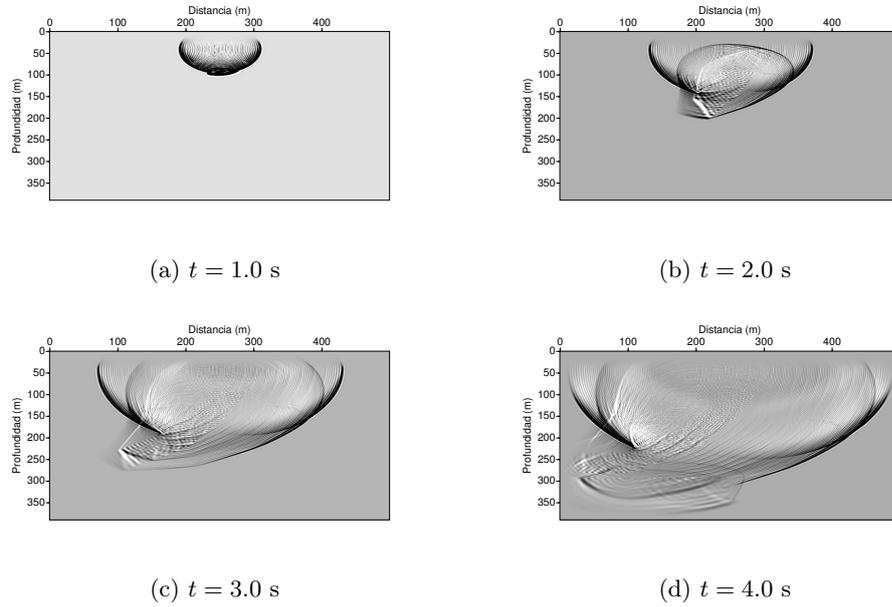


Figura 5.4: Campo de onda P . Propagación en tiempo. Version 1 del modelo.

Conforme se propaga el campo de onda, las trazas sísmicas registradas en la superficie son almacenadas en un archivo, el cual constituye el ya mencionado sismograma sintético y se aprecia en la Figura 5.5.

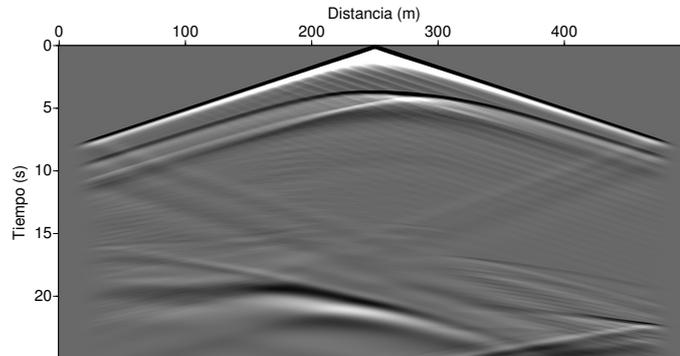


Figura 5.5: Sismograma sintético. Fuente ubicada en $x_s = 250$ m y $z_s = 1$ m. Versión 1 del modelo.

Una vez obtenido el registro sísmico, este se inyecta en la fase de retropropagación, sustituyendo a la fuente sísmica. De esta forma se generan los campos retropropagados, mostrados en la Figura 5.6, los cuales son comparados uno a uno con los propagados hacia adelante (mostrados

en la Figura 5.4) por medio de la condición de imagen tipo correlación cruzada.

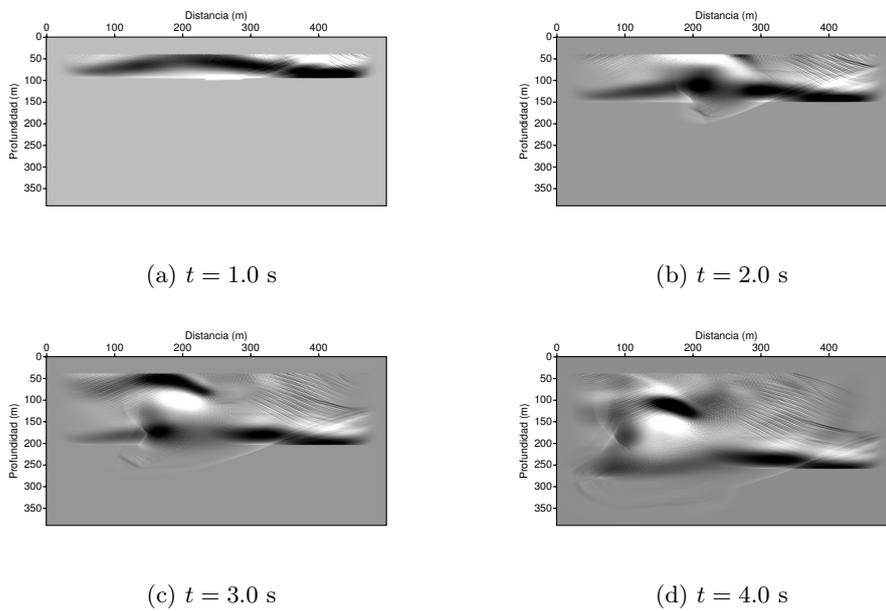


Figura 5.6: Campo de onda P . Retropropagación en tiempo. Version 1 del modelo.

Los algoritmos RTM isótropo y VTI, utilizan el dato sísmico generado al considerar anisotropía TTI. La aplicación de la condición de imagen para todas las fuentes y un posterior apilado, da como resultado la imagen final. En la Figura 5.7 se muestra la imagen migrada para el algoritmo isótropo:

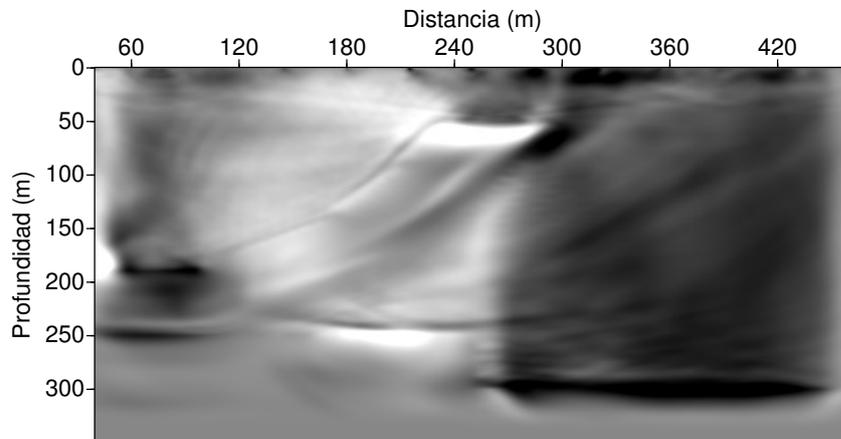


Figura 5.7: Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, previa a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).

De manera similar, la Figura 5.8 muestra la imagen migrada con el algoritmo RTM VTI

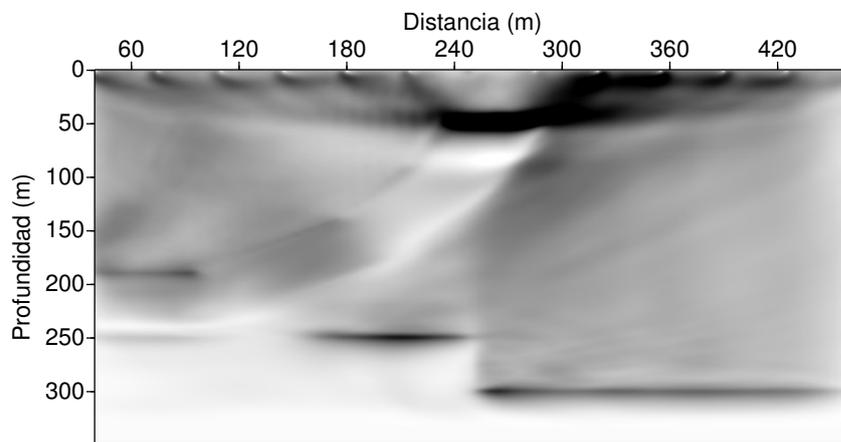


Figura 5.8: Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, previa a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).

Finalmente, en la Figura 5.9 se aprecia el resultado de la ejecución del

algoritmo RTM TTI. Como es notable, conforme se consideran más parámetros del modelo, la calidad de la imagen mejora.

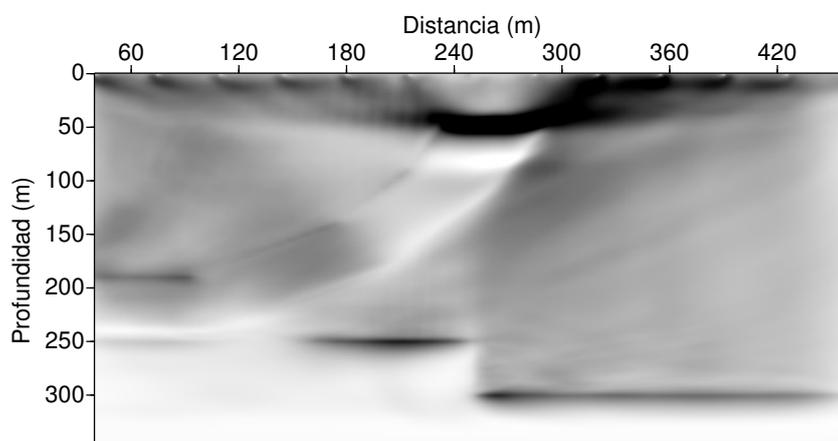


Figura 5.9: Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, previa a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).

La Figura 5.10 muestra el *CPU time* para los algoritmos RTM isótropo, VTI y TTI, los cuales arrojaron como resultados las imágenes migradas para el modelo geológico complejo tratado en esta sección. Una vez obtenidas las secciones migradas finales, se procede a la aplicación de un filtro Laplaciano el cual, como se indicó en el capítulo pasado, permite eliminar el ruido de baja frecuencia, uno de los mayores problemas del algoritmo RTM. En la Figura 5.11 se muestra la imagen filtrada correspondiente a la ejecución del algoritmo isótropo para la Versión 1 del modelo, de manera análoga las Figuras 5.12 y 5.13 lo hacen para los algoritmos VTI y TTI, respectivamente

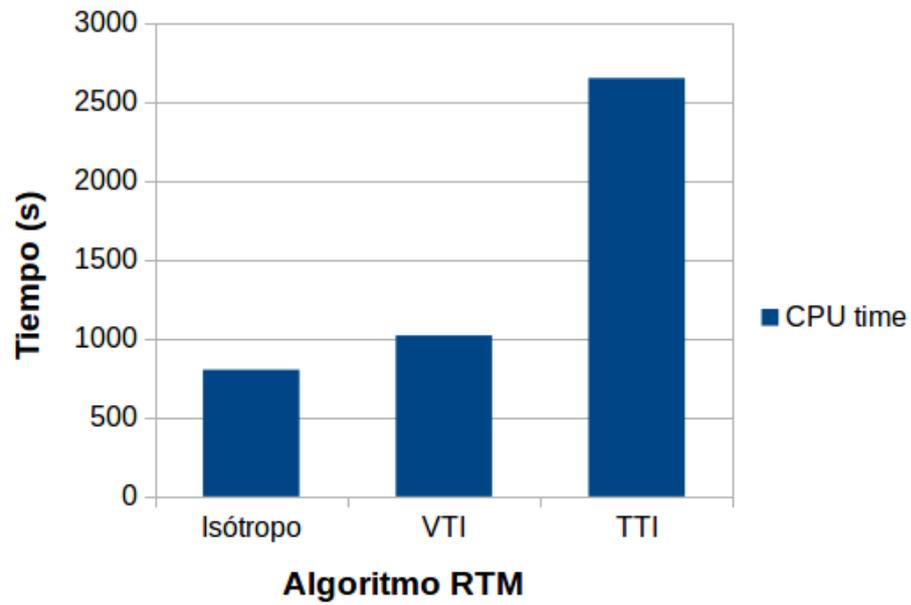


Figura 5.10: *CPU time* para las tres versiones del algoritmo RTM. Modelo geológico complejo (ver Figura 5.3). Parámetros de ejecución: Tablas 5.2 y 5.3

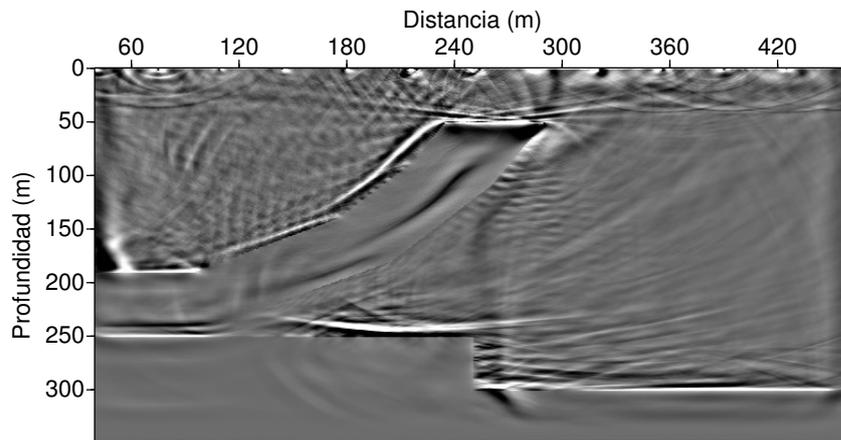


Figura 5.11: Imagen migrada con algoritmo RTM isótopo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).

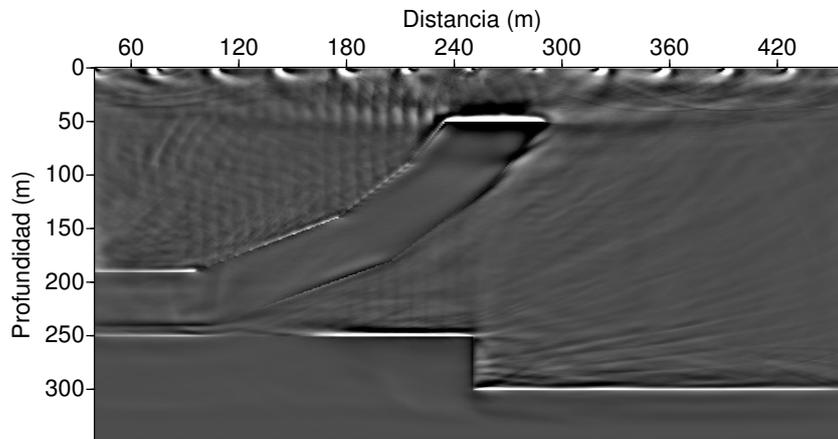


Figura 5.12: Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).

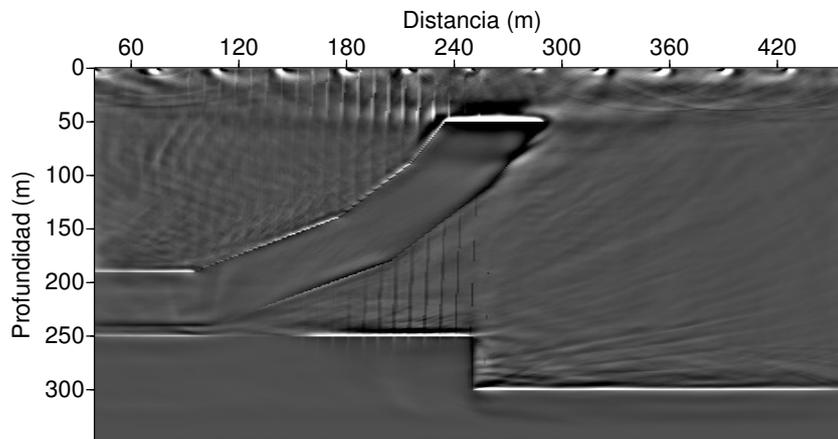


Figura 5.13: Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 1 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.01$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3b).

A continuación se muestran los resultados para la Versión 2 del modelo, de ahora en adelante sólo se exponen las imágenes filtradas, puesto que el procedimiento anterior se repite sistemáticamente para todos los casos. La

Figura 5.14 corresponde al caso isótropo, mientras que la Figura 5.15 muestra el resultado para el caso VTI y la Figura 5.16 hace lo propio para el caso TTI.

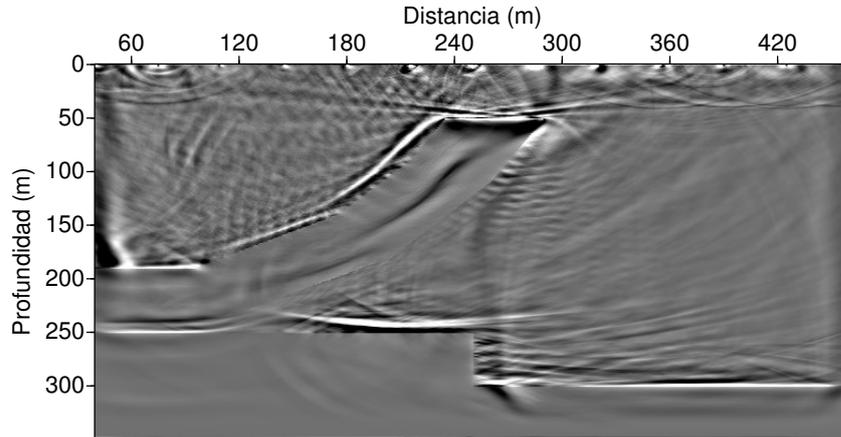


Figura 5.14: Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 2 del modelo, $\delta = \epsilon = 0.15$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3c).

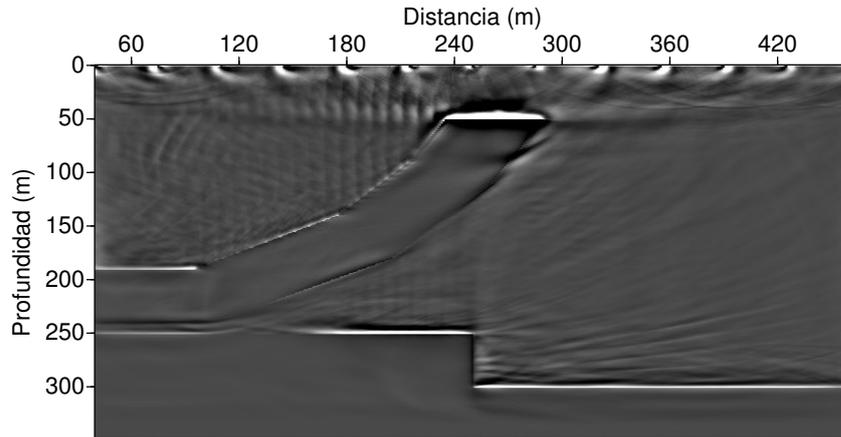


Figura 5.15: Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 2 del modelo, $\delta = \epsilon = 0.15$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3c).

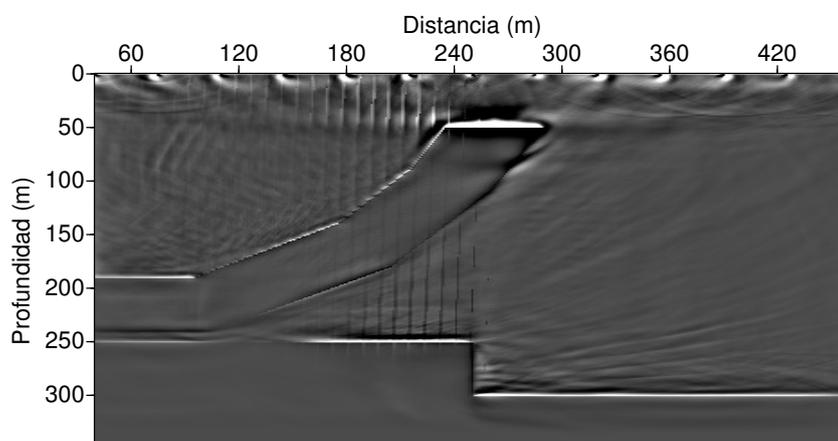


Figura 5.16: Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 2 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.15$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3c).

Por último, para la Versión 3 del modelo, se muestran de manera análoga los resultados obtenidos para la ejecución de cada uno de los algoritmos RTM (isótropo: Figura 5.17; VTI: Figura 5.18; TTI: Figura 5.19):

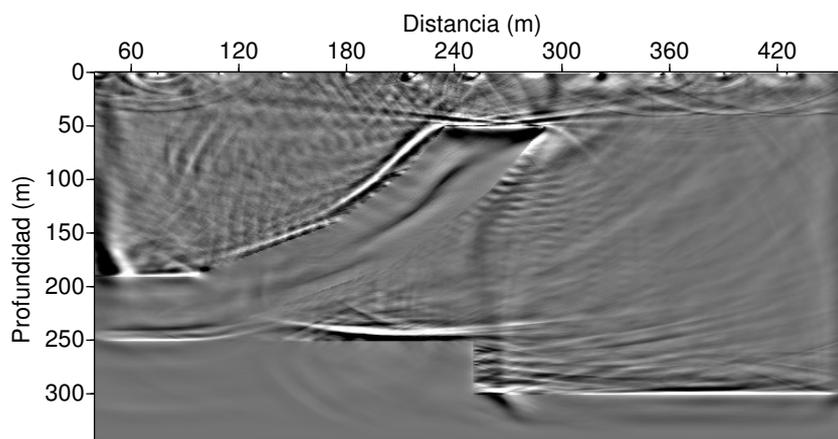


Figura 5.17: Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 3 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.24$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3d).

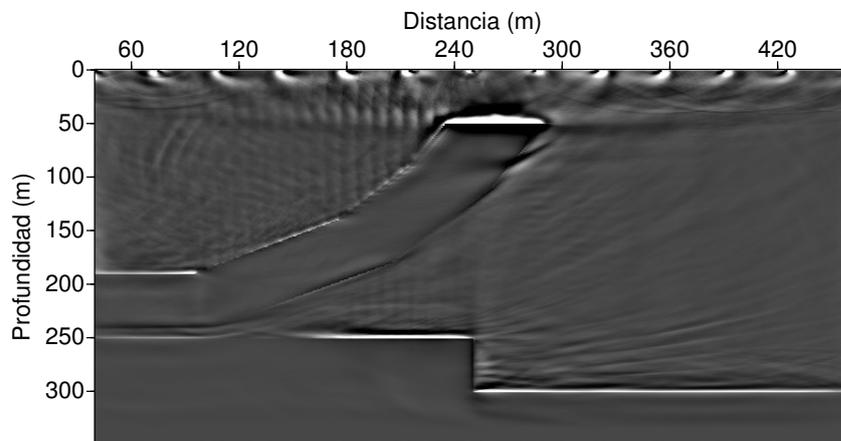


Figura 5.18: Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 3 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.24$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3d).

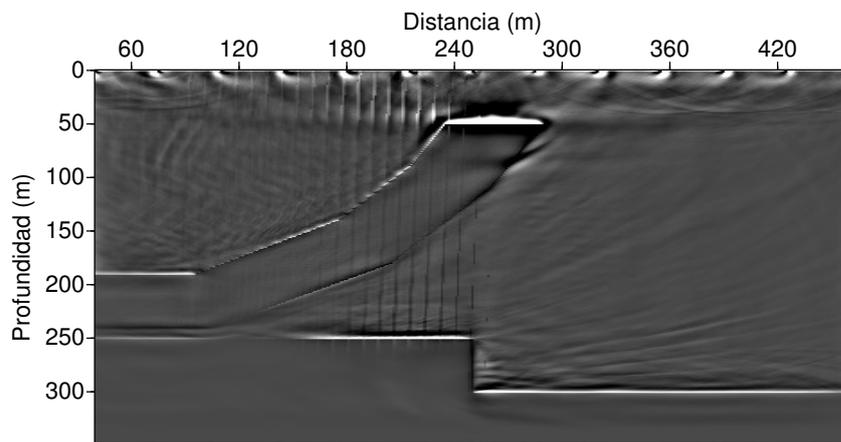


Figura 5.19: Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Versión 3 del modelo, $\delta = \varepsilon = 0.24$ en la zona inclinada (ver Figura 5.3d).

5.4. Modelo BP

El modelo BP fue creado por Shah (2007) (cortesía de *BP Exploration Operation Company Limited*) con el fin de evaluar procesos de migración sísmica en medios con anisotropía TTI 2D. Debido a su extensión (1801 x 12596), sólo una sección del mismo fue usada para probar los algoritmos implementados. La Figura 5.20a muestra la velocidad v_{p0} de la sección empleada, en ella se aprecia una region salina, en medio de distintas capas con valores de velocidad que van desde los 1200 m/s hasta los 4500 m/s, aproximadamente. Debido a la aproximación de anisotropía elíptica realizada, sólo se toma en cuenta un valor de anisotropía, en este caso ε . La Figura 5.20b muestra zonas donde dicho valor es casi nulo, en contraste con otras donde el valor de anisotropía alcanza casi $\varepsilon = 0.25$. Por último, el modelo de inclinación se puede apreciar en la Figura 5.20c, donde se muestran valores negativos y positivos del ángulo ϕ , que van desde -45° hasta 45° , aproximadamente.

Siguiendo una metodología similar a la expuesta en la sección anterior, se ejecutó el algoritmo RTM sobre el modelo BP, usando los parámetros mostrados en la Tabla 5.4

Parámetro	Valor
Puntos de malla en la horizontal	2001
Puntos de malla en la vertical	1801
Intervalos de tiempo	16000
Δx	6.25 m
Δz	6.25 m
Δt	0.0005 s
ω_0	10 Hz
Número de disparos	19

Tabla 5.4: Parámetros para la ejecución del algoritmo RTM en el modelo BP.

Los disparos se ubicaron a una profundidad de $z_s = 1$ m en las siguientes coordenadas horizontales mostradas en la Tabla 5.5

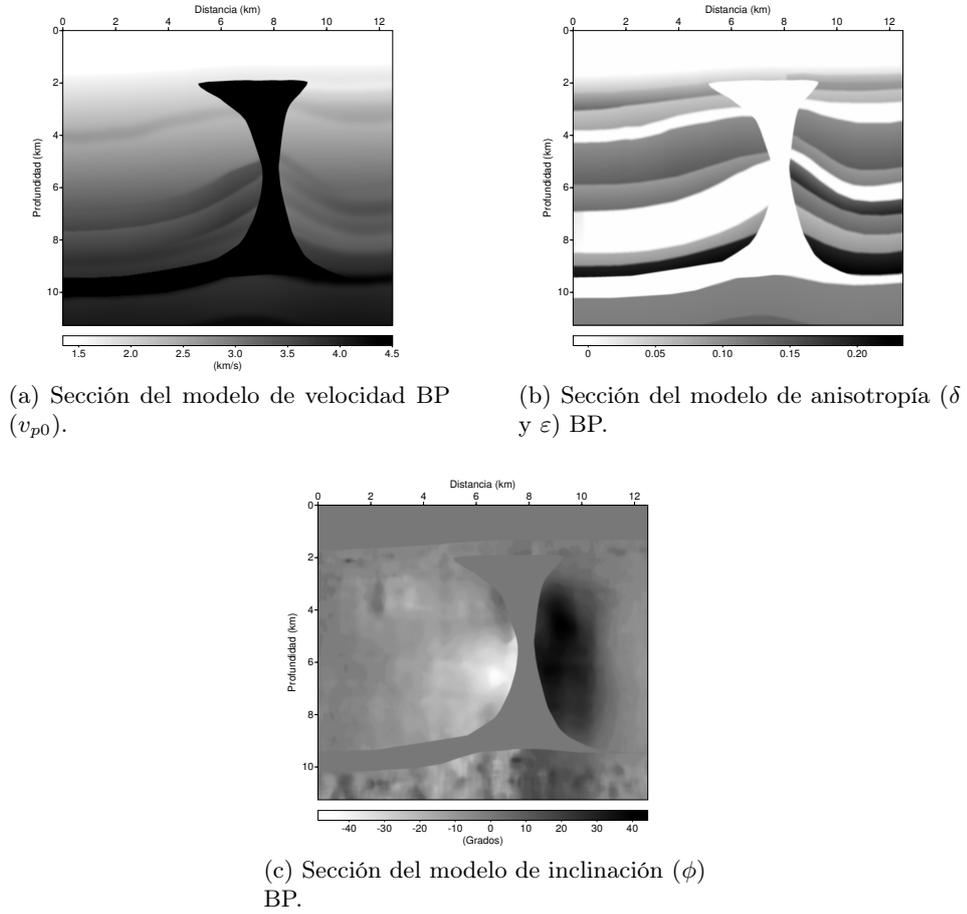


Figura 5.20: Sección del modelo BP (Shah, 2007) usada para la ejecución de los algoritmos de RTM isótropo, VTI y TTI. Extensión 1801×2001 , $\Delta x = 6.25$ m, $\Delta z = 6.25$ m.

x_s (m)				
631.25	1256.25	1881.25	2506.25	3131.25
3756.25	4381.25	5006.25	5631.25	6256.25
6881.25	7506.25	8131.25	8756.25	9381.25
10006.25	10631.25	11256.25	11881.25	

Tabla 5.5: Coordenada x_s de las fuentes sísmicas para la ejecución del algoritmo RTM sobre el modelo BP.

Con el fin de mantener la estabilidad y la dispersión numérica para la ejecución del algoritmo RTM, se escogieron el intervalo de tiempo y frecuencia de muestreo de acuerdo a las Ecuaciones 3.25 y 3.24 para el caso

TTI

$$\Delta t \leq 0.00079 \text{ s} \quad (5.1)$$

$$\omega_{max} \leq 23.720 \text{ Hz} \quad (5.2)$$

Siguiendo la metodología ya expuesta en la sección anterior, a continuación se presentan los resultados finales de la ejecución de cada algoritmo sobre el modelo BP. La Figura 5.21 muestra el resultado obtenido para el algoritmo RTM isótropo.

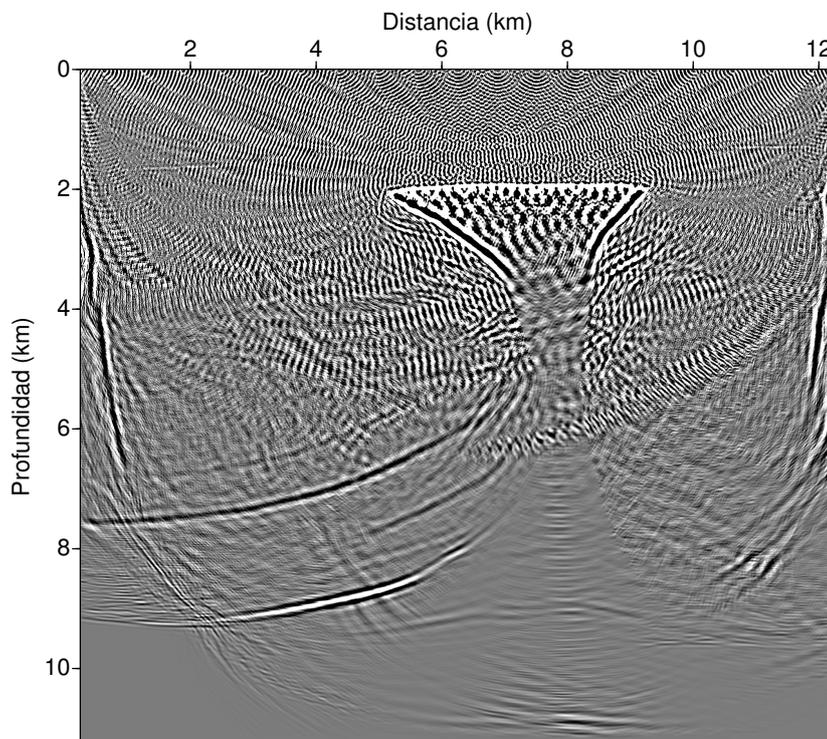


Figura 5.21: Imagen migrada con algoritmo RTM isótropo, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Modelo BP.

En la Figura 5.22 se aprecia la imagen obtenida para la ejecución del algoritmo RTM VTI,

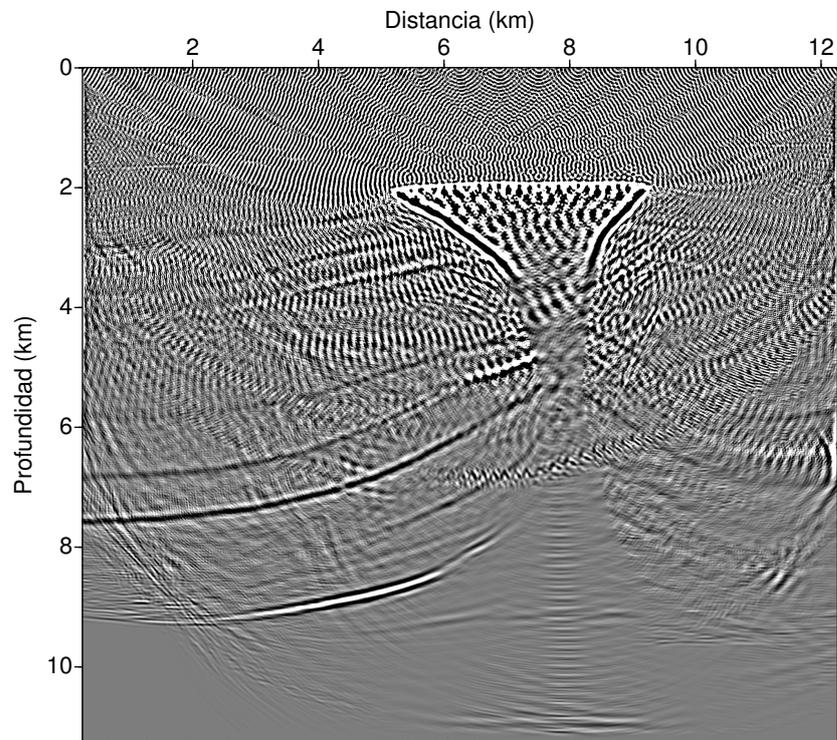


Figura 5.22: Imagen migrada con algoritmo RTM VTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Modelo BP.

Finalmente, la Figura 5.23 muestra el resultado para el algoritmo RTM que considera anisotropía TTI, una vez más, sólo se han aprecian las imágenes después de la aplicación del filtro Laplaciano

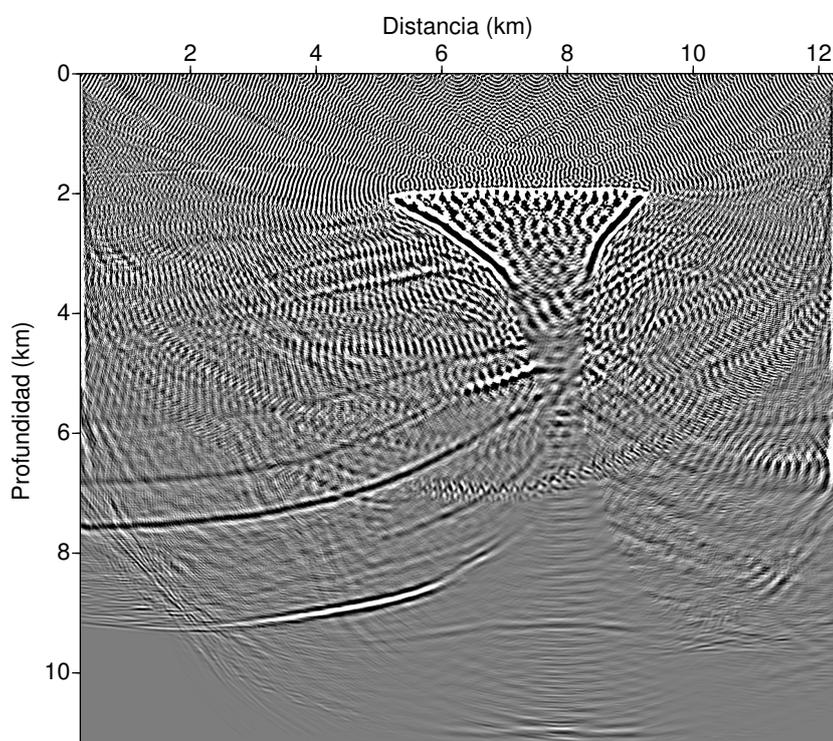


Figura 5.23: Imagen migrada con algoritmo RTM TTI, posterior a la aplicación de un filtro Laplaciano. Modelo BP.

En las siguientes páginas se realiza el análisis de los resultados expuestos anteriormente. Para ello se cuantifica la disminución en tiempos de ejecución para la implementación secuencial y en paralelo. Así mismo, se muestran detalles de las imágenes migradas y filtradas, haciendo énfasis en las zonas en las que se evidencian mejoras en el proceso de *imaging*, analizando parámetros como correcto posicionamiento de los reflectores y continuidad de los mismos, entre otros.

Capítulo 6

Análisis de resultados

6.1. Introducción

A continuación se analizan los resultados expuestos en el capítulo anterior. Se comparan los tiempos para la ejecución de los algoritmos RTM isótropo, VTI y TTI en CPU. Se cuantifica la disminución de tiempo de ejecución obtenida en la fase de modelado, en el mejor de los casos, usando CUDA-C. Posteriormente se muestran detalles de las zonas donde el algoritmo RTM TTI presenta mejoras sobre las otras dos versiones, teniendo en cuenta parámetros como el correcto posicionamiento de los reflectores y la continuidad de los mismos.

6.2. Modelado en CUDA

Debido a la gran cantidad de operaciones flotantes que se ejecutan al calcular la propagación de ondas acústicas en medios con anisotropía elíptica TTI y a las posibilidades de paralelización que presenta el método de FD, se implementó dicha fase del algoritmo RTM usando CUDA. Los tiempos de ejecución del modelado para el código estrictamente secuencial y su versión en paralelo se muestran en la Figura 5.1, allí se aprecia una notable disminución de dicho tiempo, siendo del 97.25 % (22.33 s Vs. 0.61 s) y del 98.23 % (20.26 s Vs. 0.35 s) en las dos plataformas disponibles. Lo anterior resulta alentador, pues la propagación (y retropropagación) del campo de onda constituye la base para el algoritmo RTM y, en adición, la inclusión de derivadas cruzadas para el cálculo de Ecuaciones de onda más complejas implica un número considerablemente mayor de operaciones flotantes, lo cual conlleva a un incremento significativo del tiempo de ejecución. Lo anterior se puede apreciar en la Figura 5.10, donde la ejecución del algoritmo de modelado TTI, el cual calcula derivadas con 99 términos (Ecuaciones 3.21, 3.22 y 3.26), tarda más del doble que las versiones VTI e isótropa, las cuales calculan derivadas con 18 términos. Si

bien este crecimiento parece no lineal, se requiere del uso de un *profiler* y de la medición del desempeño de los algoritmos sobre modelos más grandes antes de apresurarse a alguna conclusión.

La Figura 5.2 muestra la influencia del tamaño del bloque y, en consecuencia, del número de *threads* que se invocan en ambas direcciones. Como allí se aprecia, el desempeño del algoritmo se ve gravemente afectado por dicho parámetro, en consecuencia existe un caso óptimo, siendo un bloque de 2×120 la mejor opción para la ejecución del algoritmo de modelado TTI usando CUDA-C, en las GPUs disponibles. Una vez más, este enfoque no es determinista, por lo que se requiere indagar más a profundidad acerca del tipo (jerarquía) (Amado et al., 2015) y tamaño de *cache line* de cada tarjeta, así como de otros aspectos del hardware, antes de concluir sobre el impacto de la granularidad en el desempeño.

6.3. RTM en modelo geológico complejo

Las imágenes migradas y filtradas, resultado de la aplicación de los algoritmos RTM isótropo, VTI y TTI, sobre el modelo mostrado en la Figura 5.3, presentan diferencias notables. Dichas diferencias constatan las ventajas que se obtienen al incluir más información al modelo de entrada. En primer lugar, la Figura 6.1, muestra el reflector plano bajo las zonas inclinadas, en este detalle se aprecia la influencia de las capas con anisotropía sobre dicho reflector (se muestran los resultados para la Versión 3 del modelo, ver Figura 5.3d), pues para el algoritmo isótropo difícilmente se aprecia un evento horizontal, en contraste, el algoritmo VTI define dicho evento de mejor manera, mientras que el TTI se acerca aún más a la realidad, al aplanarlo casi en su totalidad.

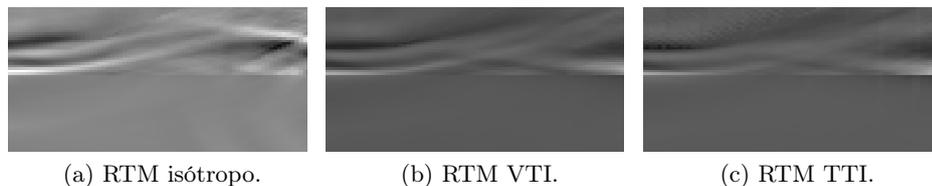


Figura 6.1: Detalle 1. *Imaging* del modelo geológico complejo. Versión 3. Nótese el evento horizontal, el cual se aplanar de mejor manera para el algoritmo RTM TTI.

La Figura 6.2 muestra uno de los eventos más difíciles de iluminar para diversos metodos de migración sísmica, debido al pronunciado buzamiento que presenta. Sin embargo, tal y como se aprecia, el algoritmo RTM lo define y posiciona correctamente, con mayor cantidad de artefactos para la versión

isótropa, la cual disminuye para las versiones VTI y TTI.

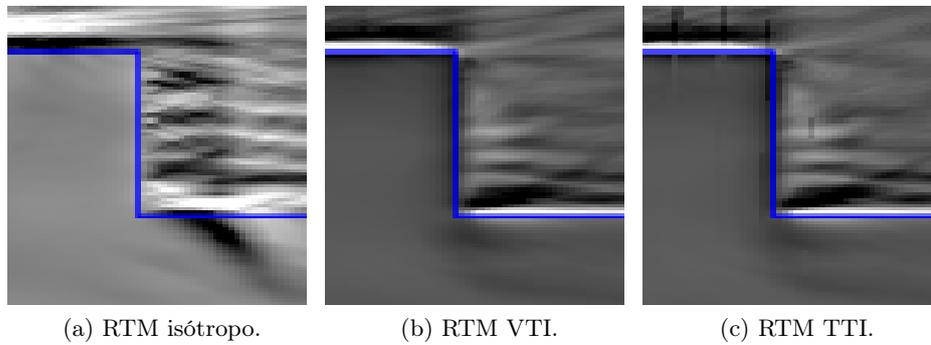


Figura 6.2: Detalle 2. *Imaging* del modelo geológico complejo. Versión 3. Nótese el evento vertical definido correctamente con menos cantidad de artefactos para el algoritmo RTM TTI. La línea azul representa la correcta posición de los eventos.

En la Figura 6.3 se aprecia uno de los reflectores inclinados como el evento se desplaza hacia su correcta ubicación conforme se usa un algoritmo más complejo, siendo la migración RTM TTI la que mejor lo posiciona. Como referencia se muestran las posiciones reales por medio de una línea roja, obsérvese como el reflector aparece por debajo de dicha línea para el algoritmo VTI, mientras que para la versión TTI se encuentra totalmente cubierto por ella.

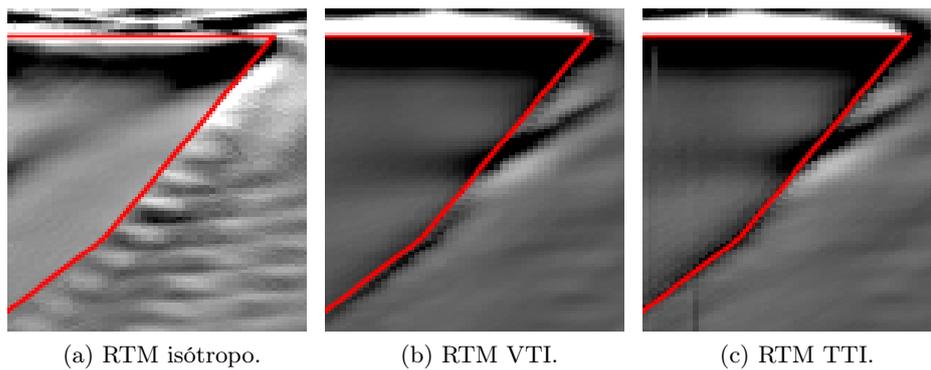


Figura 6.3: Detalle 3. *Imaging* del modelo geológico complejo. Versión 3. Nótese el evento inclinado, el cual se posiciona correctamente para el algoritmo RTM TTI. La línea roja representa la correcta posición de los eventos.

6.4. RTM en el modelo BP

A continuación se muestran detalles de las imágenes migradas y filtradas obtenidas al aplicar los algoritmos RTM isótropo, VTI y TTI sobre el modelo BP (ver Figura 5.20). A diferencia de la sección anterior, la complejidad del modelo imposibilita el señalar sobre las imágenes la correcta posición de los reflectores, debido a esto se añade una captura del modelo de velocidad (v_{p0}) para su comparación. En primer lugar, en la Figura 6.4 se aprecia el flanco izquierdo de la zona salina presente en el modelo, allí se evidencia como las capas a la izquierda no se definen para el caso isótropo, mientras que los algoritmos VTI y TTI logran iluminarlas, siendo este último el que mejor los posiciona.

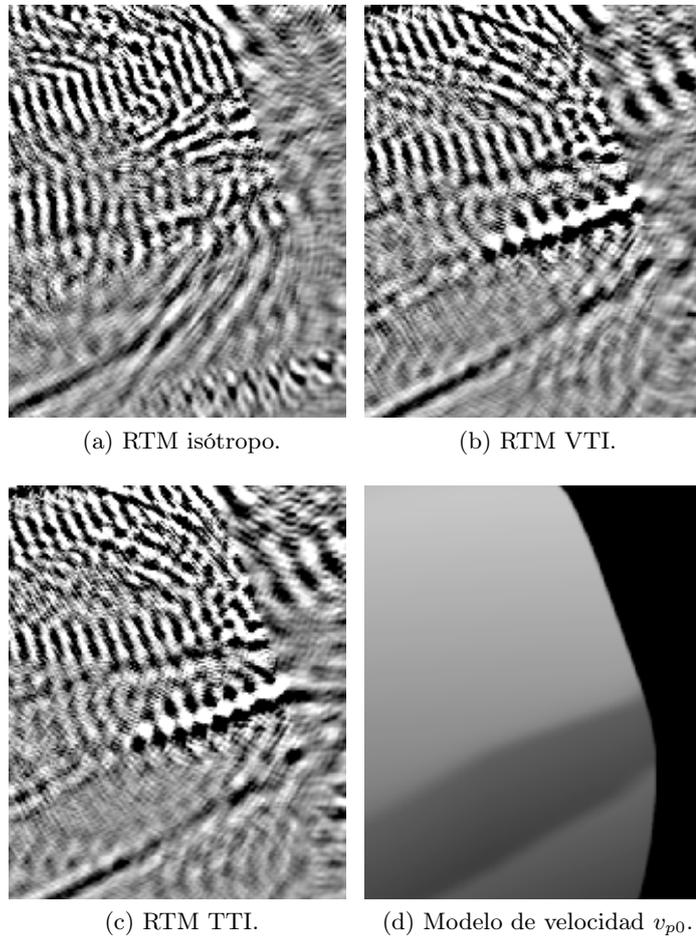


Figura 6.4: Detalle 1. *Imaging* del modelo BP. Nótese las capas de reflectores a la izquierda, las cuales se definen y ubican de mejor manera para el algoritmo RTM TTI.

La Figura 6.5 muestra la base de la zona salina. La cual logra iluminarse correcta y completamente únicamente para el algoritmo RTM TTI. Para los otros dos, dicho reflector pierde continuidad y es ubicado de manera errónea.

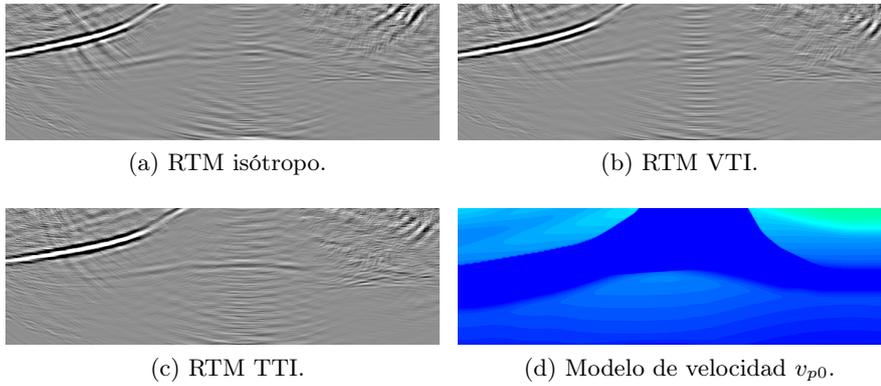


Figura 6.5: Detalle 2. *Imaging* del modelo BP. Nótese la base de la zona salina, la cual sólo tiene continuidad para el algoritmo RTM TTI.

Finalmente, la Figura 6.6 muestra una zona donde los tres algoritmos definen los eventos, sin embargo, las discontinuidades que presentan las versiones isotrópica y VTI son mucho mayores que las presentadas por la migración TTI.

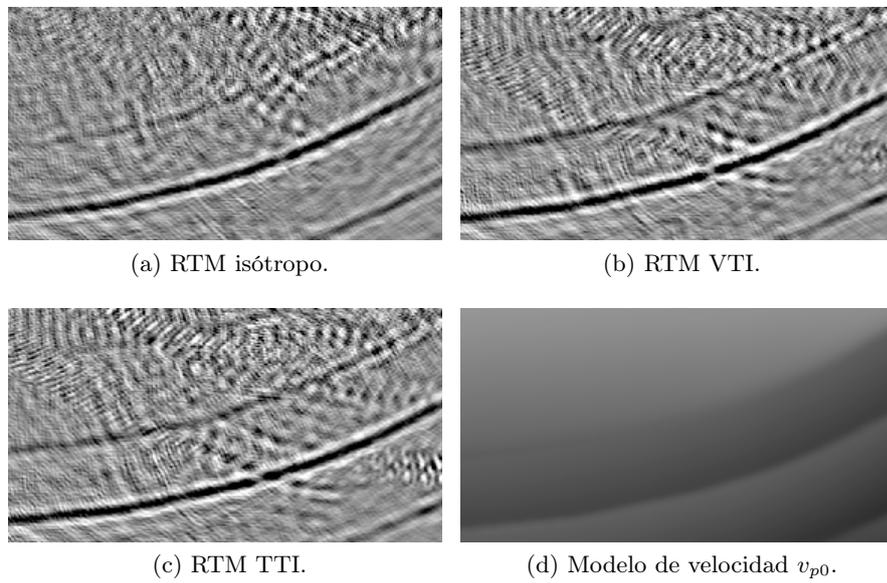


Figura 6.6: Detalle 3. *Imaging* del modelo BP. Nótese una mayor continuidad en los eventos para el algoritmo RTM TTI.

Conclusiones

Se revisó la teoría de anisotropía sísmica en medios continuos, incluyendo sus causas, definiciones y aproximaciones.

Se obtuvo un algoritmo para el modelado de ondas acústicas propagándose en medios con anisotropía elíptica VTI y TTI, el cual resultó estable y arrojó resultados satisfactorios, comparables con los disponibles en la bibliografía..

Se obtuvo un algoritmo RTM-TTI para anisotropía elíptica 2D estable y con buenos resultados en los modelos sintéticos usados, tanto en el modelo geológico complejo como en el modelo BP, el cual arrojó imágenes con buena resolución y eventos correctamente posicionados en el caso donde se migra considerando anisotropía elíptica TTI.

Se observaron las deficiencias de los algoritmos convencionales isótropo y VTI al recibir como entrada un sismograma modelado considerando anisotropía TTI, tales la pobre iluminación de los eventos, su poca continuidad y erróneo posicionamiento. Lo anterior se extrapola a los datos reales, los cuales contienen toda la información acerca del subsuelo, mientras que el algoritmo RTM que los recibe, por completo que sea, considera únicamente una parte de la información disponible.

Se compararon los tiempos de ejecución para la implementación secuencial y en paralelo usando CUDA-C, así como la influencia de la granularidad en el desempeño, obteniendo disminuciones de hasta el 98 % para el mejor de los casos.

Recomendaciones

Considerar el caso no elíptico, $\varepsilon \neq \delta$, y usar versiones de las ecuaciones diferenciales parciales pseudo acústicas, acopladas y desacopladas

Implementar la retropropagación en CUDA-C y así realizar un algoritmo RTM-TTI en dicho lenguaje.

Realizar pruebas con otros modelos sintéticos complejos 2D, como HESS-VTI.

Extender los algoritmos propuestos a 3D.

Considerar otro tipo de anisotropía como la ortorrómbica y monoclinica, 2D y 3D.

Comparar los algoritmos implementados con los tradicionales, como Kirchhoff y los basados en las Ecuaciones de sentido único (OWWE) como PSPI-TTI.

Llevar estos algoritmos a software comercial como *SeisSpace/Promax* y realizar pruebas con datos reales.

Bibliografía

- AKI, K. y RICHARDS, P. *Quantitative seismology*. University Science Books, 2 edición, 2002.
- ALKHALIFAH, T. An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, vol. 65(4), páginas 1239–1250, 2000.
- ALKHALIFAH, T. y TSVANKIN, I. Velocity analysis for approximations for transversely isotropic media. *Geophysics*, vol. 60(5), páginas 623–631, 1995.
- ALKHALIFAH, T. y TSVANKIN, I. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media. *Geophysics*, vol. 63(2), páginas 1550–1556, 1998.
- AMADO, J., SALAMANCA, W., VIBAS, F. y RAMIREZ, A. A gpu implementation of the reverse time migration algorithm. *14th International Congress of the Brazilian Geophysical Society & EXPOGEF, Rio de Janeiro, Brazil.*, 2015.
- BACKUS, G. Long wave elastic anisotropy produce by horizontal layering. *Journal of geophysical research*, vol. 66(11), páginas 4427–4440, 1962.
- BAYSAL, E., KOSLOFF, D. D. y SHERWOOD, J. W. Reverse time migration. *Geophysics*, vol. 48(11), páginas 1514–1524, 1983.
- BECERRA, S. *Propagación de ondas sísmicas y migración*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Bogotá D.C., Colombia, 2011.
- CHACON, E. *Modelado numérico 2-D en medios acústicos anisótropos basado en ecuaciones diferenciales parciales acopladas y desacopladas*. Trabajo de investigación a nivel de Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2016.
- CHENG, J., GROSSMAN, M. y MCKERCHER, T. *Professional CUDA C Programming*. John Wiley & Sons, 2014.

- CLAERBOUT, J. F. *Fundamentals of Geophysical Data Processing*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1966.
- COHEN, J. K. y STOCKWELL, J. W. The new su user manual. 2008.
- CSIC. Redes de bravais. 2017. Disponible en http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03_4.html (último acceso, 04-07-2017).
- DALEY, P. y HRON, F. Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media. *Geophysics*, vol. 67(3), páginas 661–675, 1977.
- DU, X. *Prestack depth migration methods for isotropic and polar anisotropic media*. Tesis Doctoral, University of Calgary, Calgary, 2007.
- ENSIKLOPEDI. Anisotropy classification. 2009. Disponible en <http://ensiklopediseismik.blogspot.com.co/2009/06/anisotropy-classification.html> (último acceso, 25-09-2017).
- FARMER, P., ZHOU, Z. y JONES, D. The role of reverse time migration in imaging and model estimation. *The Leading Edge*, vol. 28(4), páginas 436–441, 2009.
- FLETCHER, R. P., DU, X. y FOWLER, P. J. Reverse time migration in tilted transversely isotropic (tti) media. *Geophysics*, vol. 74(6), páginas WCA179–WCA187, 2009.
- FORNBERG, B. *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge Press, Cambridge, 1996.
- GAZDAG, J. Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, vol. 43(7), páginas 1342–1351, 1978.
- GERALD, C. y WHEATLEY, P. *Applied Numerical Analysis*. Pearson Addison Wesley, 6 edición, 1998.
- GRAY, S., ETGEN, J., DELLINGER, J. y WHITMORE, D. Seismic migration problems and solutions. *Geophysics*, vol. 66(5), páginas 1622–1640, 2001.
- HELBIG, K. *Foundations of anisotropy for exploration seismics*. Pergamon, 1994.
- JIN, S., FAN, J. y REN, Y. Comparison of isotropic, VTI and TTI reverse time migration: an experiment on BP anisotropic benchmark dataset. *SEG Annual Meeting*, 2010.
- LOVE, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, 1927.

- ROMANELLI, A. *Análise do Sinal Sísmico*. Sociedade Brasileira de Geofísica (SBGf), Rio de Janeiro, 1 edición, 2010.
- SANDERS, J. y KANDROT, E. *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming, Portable Documents*. Addison-Wesley Professional, 2010.
- DOS SANTOS, C. *Migração reversa no tempo em meios transversalmente isotrópicos*. Trabajo de investigación a nivel de Maestría, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- SCALES, J. *Theory of seismic imaging*. 10. Samizdat Press, Department of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden Colorado, 1997.
- SCHNEIDER, W. A. Integral formulation for migration in two and three dimensions. *Geophysics*, vol. 43(1), páginas 49–76, 1978.
- SEG. Dictionary:ricker wavelet. 2017. Disponible en http://wiki.seg.org/wiki/Dictionary:Ricker_wavelet (último acceso, 20-09-2017).
- SEISMICCITY. Reverse time migration (rtm) technology. 2016. Disponible en <http://www.seismiccity.com/RTM.html> (último acceso, 7-09-2017).
- SHAH, H. The 2007 bp anisotropic velocity-analysis benchmark. *2007 EAGE meeting in Barcelona, Spain*, 2007. Disponible en http://www.freeusp.org/2007_BP_An_Vel_Benchmark/listing.html (último acceso, 6-09-2017).
- SLAWINSKI, M. *Seismic wave rays in elastic media*, vol. 34. Pergamon, 2003.
- THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, vol. 51(10), páginas 1954–1966, 1986.
- THOMSEN, L. Entendimiento de la anisotropía sísmica en exploración y explotación. *SEG-EAGE*, vol. 41(4), 2001.
- TORRES, J. *Modelado acústico y migración PSPI en medios con anisotropía polar*. Trabajo de investigación a nivel de Maestría, Universidad EAFIT, 2010.
- TSVANKIN, I. P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview. *Geophysics*, vol. 61(2), páginas 467–483, 1996.
- VILLAMIZAR, M. *Propagación de ondas sísmicas en medios continuos con anisotropía tipo VTI*. Trabajo de investigación a nivel de Pregrado, Universidad de Pamplona, 2013.
- ZHANG, J., L. RECTOR y HOVERSTEN, G. Finite difference modelling of wave propagation in acoustic tilted ti media. Informe técnico, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkely, USA, 2005.

Lista de acrónimos y siglas

CPU	<i>Central Processing Unit</i>
CUDA	<i>Compute Unified Device Architecture</i>
FD	<i>Finite Differences</i>
GPU	<i>Graphics Processing Unit</i>
HPC	<i>High-Performace Computing</i>
MPI	<i>Message Passing Interface</i>
NMO	<i>Normal Moveout</i>
OWWE	<i>One-Way Wave Equation</i>
PS	<i>Phase-Shift</i>
PSPI	<i>Phase-Shift Plus Interpolation</i>
RTM	<i>Reverse Time Migration</i>
SU	<i>Seismic Unix</i>
TTI	<i>Tilted Transverse Isotropy</i>
VTI	<i>Vertical Transverse Isotropy</i>

Lista de símbolos

σ_{ijkl}	Tensor esfuerzo
ε_{kl}	Tensor deformación
ω	Frecuencia angular
ν	Velocidad de fase
ρ	Densidad de masa
θ	Ángulo medido desde el eje de simetría al vector número de onda
ϕ	Ángulo de inclinación en un medio TTI
λ	Parámetro de Lamé
μ	Parámetro de Lamé, también conocido como módulo de rigidez
ε	Parámetro de anisotropía definido por Thomsen
δ	Parámetro de anisotropía definido por Thomsen
γ	Parámetro de anisotropía definido por Thomsen
η	Parámetro de anisotropía definido por Tsvankin
v_{p0}	Velocidad de onda P paralela al eje de simetría
v_{nmo}	Velocidad NMO
c_{ijkl}	Tensor de elasticidad
C_{mn}	Matriz de elasticidad y parámetros de elasticidad
G_{ik}	Matriz de Christoffel

u_i	Desplazamiento
x_j	Coordenada espacial
P	Campo de onda principal
F	Campo de onda auxiliar
$P_{i,j}^n$	Campo de onda principal discretizado en tiempo y espacio
Δt	Intervalo de muestreo en tiempo
Δx	Intervalo de muestreo en la dirección horizontal
Δz	Intervalo de muestreo en la dirección vertical

*...eres el sueño que sueño cuando sonrío,
la vida sin ti es un concierto en un teatro vacío...*

Nach

