Estudio de la Eficiencia de Difracción en Cristales Silenitas

Astrid Lorena Villamizar Amado

Trabajo presentado para optar al Título de Física

GRUPO DE ÓPTICA MODERNA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
PAMPLONA
2017

Estudio de la Eficiencia de Difracción en Cristales Silenitas

Astrid Lorena Villamizar Amado

Trabajo presentado para optar al Título de Física

Directores: Dra. Martha Lucia Molina Prado
Dr. Nestor Alonso Arias Hernández

Directora en el Exterior: Dra. Myrian Tebaldi

GRUPO DE ÓPTICA MODERNA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
PAMPLONA
2017

Dedicatoria

A mi madre...
“El amor de Madre es el impulso que le permite al ser humano llegar a lo imposible”
Marion C. Garretty

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por su apoyo, ayuda, acompañamiento, a mi familia y amigos por ser la voz de aliento en momentos difíciles.
Agradezco de manera especial a la Dra. Martha Lucia Molina Prado por toda su colaboración, paciencia, ayuda y guía, de igual manera a la Dra. Myrian Tebaldi por toda su colaboración.
Agradezco a la Universidad de Pamplona, a los docentes del departamento y a mis compañeros que hicieron parte de mi proceso académico.

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio de la eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal, en redes no móviles de transmisión bajo el regimen on-Bragg. Para ello fue estudiada la propagación en medios periódicos. Además se calculó el conjunto de ecuaciones acopladas para el mezclado de dos ondas en un cristal BTO en configuración longitudinal y transversal.
Palabras claves— Cristales fotorrefractivos, Eficiencia de difracción.

Índice general

1 Introducción **2**

2 Efecto Fotorrefractivo **5**

2.1 Historia del Efecto fotorrefractivo 6

2.2 Modelo transporte de Bandas 7

2.2.1 Ecuaciones del Material 7

2.2.2 Campo de cargas espaciales 9

2.2.3 Registro holográfico 16

2.3 Propiedades electro-ópticas del BTO 17

2.3.1 Birrefringencia 17

2.3.2 Tensor dieléctrico 21

2.3.3 Elipsoide de índices 22

2.3.4 Efecto eléctro-óptico 23

2.3.5 Actividad óptica 25

2.4 Configuraciones holográficas 26

2.4.1 Configuración longitudinal 27

2.4.2 Configuración transversal 31

3 Estudio Fisicomatemático y Análisis de la eficiencia de difracción bajo configuración longitudinal **35**

3.1 Derivación de las ecuaciones acopladas 35

3.1.1 Ecuación de Onda 35

3.1.2 Campo eléctrico 36

3.1.3 Ecuaciones de onda acopladas 38

3.2 Análisis de la Eficiencia de Difracción 42

3.2.1 En términos del E_0 43

3.2.2 En términos del periodo Λ 44

3.2.3 En términos de la modulación 45

4 Estudio Fisico-matemático y Análisis de la eficiencia de difracción bajo la configuración transversal **46**
4.1 Derivación de las ecuaciones acopladas 46
4.1.1 Ecuaciones de onda acopladas 46
4.2 Análisis de la Eficiencia de Difracción 51
4.2.1 En términos del E_0 51
4.2.2 En términos del periodo Λ 51
4.2.3 En términos de la modulación 52

5 Conclusiones y Perspectivas **54**
5.1 Conclusiones 54
5.2 Perspectivas 55

Bibliografía **55**

A Anexo **60**
A.1 Eficiencia de difracción 60
A.1.1 Propagación en medios periódicos 60
A.2 Tensor Electro-óptico en términos de los sistemas de propagación 71
A.2.1 Configuración Longitudinal 71
A.2.2 Configuración Transversal 73

Índice de tablas

Tabla 2.0.1 Clasificación de materiales fotorrefractivos 5

Tabla 3.2.1 Parámetros del BTO para nuestros cálculos [1] 43

Índice de figuras

Figura 2.2.1 Esquema del transporte de bandas en el efecto fotorrefractivo [2] 7
Figura 2.2.2 Incidencia de los haces en el registro holográfico [3] 16
Figura 2.3.1 Método de elipsoide de índice [2] 22
Figura 2.4.1 Configuración longitudinal $K_G \parallel < 001 >$ [4] 27
Figura 2.4.2 Cristal bajo los dos sistemas coordenados 27
Figura 2.4.3 Primera rotación de 135^o alrededor del eje z. 28
Figura 2.4.4 Segunda rotación alrededor del eje y'. 29
Figura 2.4.5 Configuración transversal $K_G \perp < 001 >$ [4] 31
Figura 2.4.6 Cristal bajo los dos sistemas coordenados 31
Figura 2.4.7 Primera rotación alrededor del eje x 32
Figura 2.4.8 Segunda rotación alrededor del eje y' 32

Figura 3.1.1 Separación angular y vector de onda 36
Figura 3.1.2 Polarización del haz de prueba. R_E y R_M estados de polarización del haz R, θ_R ángulo de incidencia del haz R 37
Figura 3.2.1 Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes campos externos aplicados para redes con periodos de: (a)$\Lambda = 1\mu m$, (b)$\lambda = 10\mu m$ 43
Figura 3.2.2 Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes periodos con $E_0 = 10kV/cm$. (a)$m = 0{,}3$, (b)$m = 0{,}9$. 44
Figura 3.2.3 Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes periodos con $E_0 = 0kV/cm$, $m = 0{,}9$. 44
Figura 3.2.4 Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes modulaciones con $E_0 = 10kV/cm$. (a)$\Lambda = 1\mu m$, (b)$\Lambda = 10\mu m$ 45

Figura 4.2.1 Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes campos aplicados y $m = 0{,}9$. (a)$F = 170mm^{-1}$, (b)$F = 540mm^{-1}$ . . 51
Figura 4.2.2 Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes periodos para $m = 0{,}9$, $E_0 = 5kV/cm$ 52
Figura 4.2.3 Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes modulaciones con $E_0 = 5kV/cm$. (a)$F = 170mm^{-1}$, (b)$F = 540mm^{-1}$ 52

Figura A.1.1 Dispersión de una onda plana monocromática [2] 61
Figura A.1.2 Configuraciones a) Redes de transmisión. b) Redes de reflexión [2] . . . 62
Figura A.1.3 Geometría de los haces. $\alpha_{1,2}$ son las componentes x, $\beta_{1,2}$ son las componentes z de los vectores de onda $k_{1,2}$ y $\theta_{1,2}$ son los ángulos de incidencia 66
Figura A.1.4 (a)Regimen on-Bragg, (b)Regimen off-Bragg [2] 69

Capítulo 1

Introducción

Hasta mitad del siglo XX muchas propiedades ópticas no lineales eran desconocidas, ya que las investigaciones realizadas mostraban que la transmisión, reflexión y refracción de luz en materiales transparentes no se veían afectadas por la intensidad de la luz ni por la presencia de otro haz. Ashkin y sus colaboradores en los laboratorios Bell observaron por primera vez que cuando el haz de un láser de alta intensidad incidía sobre un cristal de niobato de litio se producía, al cabo de un cierto tiempo una distorsión del haz transmitido. El objetivo de los experimentos de Ashkin era generar el segundo armónico y por ese motivo inicialmente este efecto fue conocido como daño óptico ya que limitaba la utilidad de estos materiales para la generación del segundo armónico. Estos autores dedujeron que el haz incidente al atravesar el cristal alteraba el índice de refracción extraordinario del medio. Posteriormente se denomino efecto fotorrefractivo al mencionado comportamiento [5] .

El fenómeno fotorrefractivo [6–8], consiste en el cambio de índice de refracción debido a la variación espacial de la intensidad de la luz en un material fotoconductor, electro-óptico y con impurezas donadoras y aceptoras de carga. Dicho efecto ha sido observado en muchos cristales electro-ópticos como:$LiNbO_3$, $LiTaO_3$, $BaTiO_3$,BSO, BGO, BTO SBN, $GaAs$, InP, etc. También en los últimos años, los estudios se extendieron a materiales fotorrefractivos orgánicos tales como los polímeros, polímeros dopados y vidrios fotosensibles [9, 10] . Los materiales fotorrefractivos cumplen un papel importante en el procesamiento óptico [11]. Recientemente se han desarrollado aplicaciones en algunas áreas como la seguridad de información [12, 13].

Una de las clases más interesantes de los medios fotorrefractivos es la de los cristales silenitas, las cuales incluyen el óxido de bismuto de silicio BSO, óxido de bismuto de germanio BGO y el óxido de bismuto de titanio BTO. Estos materiales tienen una estructura cúbica centrada en el cuerpo, grupo 23 [14], con coeficiente electro-óptico no nulo r_{41} y ópticamente activos. Estos cristales exhiben alta sensibilidad fotorrefractiva en la formación de una red holográfica de volumen [15], rápida respuesta, tiempos largos de almacenamiento bajo condiciones de oscuridad

y reciclabilidad esencialmente ilimitada. Tales cristales son potencialmente útiles para dinámica en tiempo real [16] e interferometría de tiempo promediado, procesamiento óptico no-lineal de señales, interconexiones ópticas, swicheo espacial óptico, resonadores láseres de auto bombeo y amplificación de señales [7, 8].

Entre las técnicas que se han utilizado para caracterizar y estudiar el efecto fotorrefractivo se encuentra la holografía. La técnica holográfica consiste en iluminar el cristal fotorrefractivo con la figura de interferencia generado por dos haces coherentes. La distribución de iluminación sinusoidal no homogénea en el cristal genera una red de índice de refracción. Un haz de lectura al atravesar el cristal se difracta en la red de índices almacenada obteniéndose así la reconstrucción del holograma. El parámetro fundamental a ser analizado es la eficiencia de difracción. La eficiencia de difracción es un parámetro importante de caracterización del desempeño de las redes y nos permite evaluar el desempeño de los cristales fotorrefractivos como memoria. La eficiencia de difracción está definida como la razón entre la intensidad del haz difractado $(I_S = L)$ y la intensidad del haz de lectura $(I_R = 0)$, $\eta = \frac{I_S(L)}{I_R(0)}$. La eficiencia de difracción de una red de volumen con modulación de índice uniforme es descrita por la formula de Kogelnik [17]:

$$\eta = \sin^2\left(\frac{\pi \Delta n L}{\lambda \cos\theta}\right) \tag{1.1}$$

donde Δn es la amplitud de modulación del índice, L es el espesor del cristal, θ es el ángulo de Bragg de lectura, λ es la longitud de onda del haz de lectura. La formula (1.1) es válida para redes uniformes, sin embargo la red fotorrefractiva no es uniforme en amplitud y fase debido al acoplamiento del par de haces de escritura. La eficiencia de difracción ha sido calculada para diversas investigaciones con el fin de realizar diferentes estudios teniendo en cuenta redes fotorrefractivas, incluyendo la influencia de parámetros propios del registro y de los materiales utilizados [1, 3, 4, 18–23].

En este documento se realiza un estudio teórico de la eficiencia de difracción en un cristal BTO, bajo el régimen de Bragg en las configuraciones holográficas longitudinal y transversal. Asimismo se consideran redes no móviles, parámetros propios del material como el coeficiente electro-óptico, el poder rotatorio y parámetros externos tales como el campo aplicado, la intensidad de los haces a la entrada. La periodicidad de la red y la modulación entre otras.

En el capítulo 2, se presenta las generalidades de efecto fotorrefractivo; una explicación del modelo de transporte de bandas con las ecuaciones del material y el campo de cargas espaciales; las propiedades físicas del cristal BTO como la birrefringencia y la actividad óptica y el acoplamiento electro-óptico; Además se presentan las dos configuraciones holográficas principales.

En el capítulo 3, se presenta los cálculos de la eficiencia de difracción en cristales fotorrefractivos, donde se obtienen el conjunto de ecuaciones acopladas y un análisis de la eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para la configuración holográfica longitudinal.

En el capítulo 4, se estudia la eficiencia de difracción para la configuración transversal, donde

se obtiene el conjunto de ecuaciones acopladas y se realiza un análisis de la eficiencia de difracción en términos del espesor de cristal, la variación del campo aplicado, el periodo de red y la modulación a la entrada.
Por último, en el capítulo 5 se enuncian las conclusiones y perspectivas del trabajo.

Capítulo 2

Efecto Fotorrefractivo

El efecto fotorrefractivo es el fenómeno en el cual el índice de refracción presenta un cambio local, debido a la incidencia de luz no uniforme en materiales electro-ópticos y fotoconductores. El fenomeno se percibe cuando se incide en el material dos haces de luz coherente que forman un patrón de interferencia. Para que el efecto se lleve a cabo el material debe presentar impurezas donadoras y aceptoras de carga, así cuando los haces inciden los centros donadores se fotoionizan, al excitarse la carga esta se desplazara por algún mecanismo de transporte, que pueden ser de tres tipos:

- Difusión, al iluminarse el material con luz no uniforme aparecen gradientes de carga fotoexcitada.
- Arrastre o ”Drift”, al aplicarse campo eléctrico externo.
- Efecto fotovoltaico de volumen, presente en cristales con simetría no cubica como el niobato de litio.

Los materiales fotorrefractivos se pueden clasificar en cinco grupos, de la siguiente manera [24–26]:

Tabla 2.0.1: Clasificación de materiales fotorrefractivos

Grupo	Materiales
Ferroeléctricos	$LiNbO_3$,$LiTaO_3$, $BaTiO_3$, $KNbO_3$, SBN
Paraeléctricos	Silenitas: $Bi_{12}SiO_{20}$, $Bi_{12}GeO_{20}$, $Bi_{12}TiO_{20}$
Semiconductores	$GaAs:Cr$, $InP:Fe$, $CdTe$
Orgánicos	$poly(N-vinylcarbazole)$ o $PVK, poly(silane)$
Cerámicas Piezoeléctricas	$(Pb.La)(Zr.Ti)O_3$

Es de nuestro interés la familia de las silenitas, estos cristales se crecen en laboratorios a partir de una muestra estequiométrica de Bi_2O_3 y XO_2, donde X representa a Si, Ge o Ti [27]. Estos cristales presentan una estructura cúbica centrada en el cuerpo (BCC), de grupo $I23$,son isotrópicos pero además del efecto fotorrefractivo presentan birrefringencia y actividad óptica bajo propagación de la luz [14]. Una característica de estos cristales es que en la oscuridad se comportan como aislantes, pero pueden ser conductores al ser iluminados con luz en el rango visible o infrarrojo cercano. Para cada cristal existe un rango óptimo de longitudes de onda de registro para la sensibilidad del cristal y por lo tanto el tiempo de respuesta es óptimo. Mientras los cristales BSO-BGO tienen una alta sensibilidad en al región azul verde del espectro, los BTO tienen su máxima sensibilidad en la región roja del espectro. [28].

2.1. Historia del Efecto fotorrefractivo

Como se menciona en la introducción, en 1966 el efecto fotorrefractivo fue observado por Arthur Ashkin y sus colaboradores por primera vez, los cuales se encontraban trabajando con cristales de niobato de litio y tantanato de litio, incidiendo en los materiales un haz focalizado, notaron una distorsión del rayo transmitido que perturbaba la generación del segundo armónico. El efecto para ese momento fue llamado ”daño óptico”.
Años después Chen propone el primer modelo físico de migración de cargas, que explica la presencia de un campo eléctrico generado por la migración de cargas eléctricas debido a la incidencia de un haz [29].
En la década siguiente Amodei muestra que los efectos de difusión generan campos eléctricos fuertes, que son importantes en la grabación de hologramas de fase y en la mejora de su permanencia en materiales fotocrómicos [30].
En la segunda mitad de la década del 70 se desarrollaron estudios sobre las características de los hologramas de volumen registrados en medios fotorrefractivos. El grupo de Huignard estudió los cristales BSO y el BGO para aplicaciones de interferometría holográfica en tiempo real, aprovechando la reversibilidad debido a la ausencia de fatiga que presentan estos medios [31–33].
Finalizando la década se da el aporte teórico más solido propuesto por Kukhtarev, donde se describe un modelo de transporte de banda. Este modelo tiene encuenta el efecto fotovoltaico, la aplicación de un campo eléctrico al material y el campo de cargas espaciales. Desde entonces ha sido el modelo más utilizado por los investigadores para la descripción y estudio del fenomeno [34].
En 1980 Feinberg propone un nuevo modelo teórico donde cargas idénticas migran saltando entre sitios adyacentes, que depende de la intensidad de luz y del campo eléctrico [35].
Estos dos modelos describen adecuadamente el fenómeno y son aceptados para dar explicación

del efecto fotorrefractivo.

2.2. Modelo transporte de Bandas

El modelo teórico de transporte de bandas considera dos tipos de impurezas: donores y aceptores. Por simplicidad se asumen que los donores son idénticos y tienen el mismo estado energético el cual ocupa un lugar intermedio entre la banda de valencia y la banda de conducción como se observa en la figura 2.2.1.
Estas impurezas donoras pueden ser ionizadas por la absorción de fotones, se generan electrones en la banda de conducción como resultado de la ionización, así se dejan vacancias. Los electrones son recapturados por donores ionizados. Los aceptores no participan en el proceso pero garantizan la neutralidad de la carga. A este modelo haremos referencia de ahora en adelante.

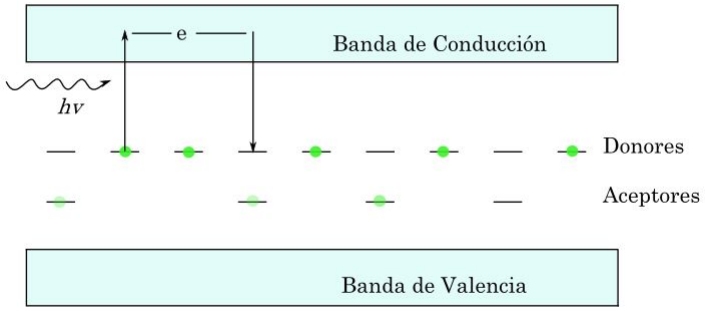

Figura 2.2.1: Esquema del transporte de bandas en el efecto fotorrefractivo [2]

2.2.1. Ecuaciones del Material

Las ecuaciones que describen el modelo y que gobierna la evolución temporal de la concentración de portadores, de donadores y aceptores, se puede escribir como sigue: [2, 36]:

- Ecuación de generación de centros ionizados
  Sea N_D, N_D', N_A y N las densidades de donadores, donadores ionizados, aceptores y portadores de carga (electrones) respectivamente. Entonces $N_D - N_D'$ representa la densidad de donadores neutros. N_D y N_A son constantes.
  La densidad de donores ionizados aumenta por excitación de electrones hacia la banda de

conducción a partir de centros neutros, disminuye por recombinación de estos electrones en sitios donores ionizados. Estos procesos se describen según:

$$\frac{\partial N'_D}{\partial t} = (N_D - N'_D)(sI + \beta) - \gamma N N'_D \tag{2.1}$$

donde $s = \frac{\alpha\xi}{N_D \hbar w}$ es la sección eficaz de fotoionización a la banda de conducción que depende del coeficiente de absorción α, la eficiencia cuántica ξ y de la energía del fotón $\hbar w$. I es la intensidad luminosa incidente, β es el coeficiente asociado a la probabilidad de termoionización.

- Ecuación de continuidad
  La razón de generación de electrones es la misma que la razón de ionización de donadores, sin embargo los electrones en la banda de conducción son cargas móviles en tanto las impurezas ionizadas permanecen en una posición fija respecto a la red cristalina. En consecuencia, el flujo de electrones afecta localmente la densidad de carga, si $\vec{J}$ representa la densidad de corriente y $-q$ es la carga del electrón, entonces la ecuación de continuidad sera:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial N'_D}{\partial t} = \frac{1}{q}\nabla \cdot \vec{J} \tag{2.2}$$

- Ecuación de conductividad
  En la banda de conducción los electrones pueden desplazarse libremente. En los cristales silenitas dos procesos de migración son considerados:

✓ Difusión: es debida a la agitación térmica. Ellos conduce a una densidad de corriente de difusión isotrópica

$$\vec{J} = \mu k_B T \nabla N \tag{2.3}$$

donde μ es el valor absoluto de la movilidad de la carga q, T la temperatura absoluta, k_B la constante de Boltzmann, N la densidad electrónica fotoinducida.

✓ Arrastre: transporte de cargas debido a un campo eléctrico E que produce una densidad de corriente de arrastre:

$$\vec{J} = \mu N q E \tag{2.4}$$

El campo eléctrico microscópico interno del material tiene dos componentes, una proviene del campo de cargas espaciales E_{SC} fotoinducido en el material, la otra componente se origina del campo aplicado en el material E_0.
Así la ecuación de conductividad se expresa:

$$\vec{J} = \mu N q \vec{E} + \mu k_B T \vec{\nabla} N \tag{2.5}$$

- Ecuación de Poisson
  La ecuación de Poisson relaciona el campo eléctrico con la redistribución de carga en el cristal. Teniendo en cuenta que la densidad de carga local es: $-q\left(N+N_A+N'_D\right)$, se puede expresar:

$$\vec{\nabla}\cdot\varepsilon\vec{E}=-q\left(N+N_A-N'_D\right)=\rho\left(r\right) \tag{2.6}$$

  Estas cuatro ecuaciones son conocidas como ecuaciones del material o ecuaciones de Kukhtarev y describen el modelo de transporte de banda en un material fotorrefractivo.

2.2.2. Campo de cargas espaciales

Consideremos la incidencia de dos haces de láser en un medio fotorrefractivo. El campo eléctrico se puede escribir como [2, 37, 38]:

$$E=E_a e^{iwt-i\vec{k_a}\cdot\vec{r}}+E_b e^{iwt-i\vec{k_b}\cdot\vec{r}} \tag{2.7}$$

Asumiremos la misma frecuencia, E_a y E_b son amplitudes, $\vec{k_a}$ y $\vec{k_b}$ son los vectores de onda. Si el estado de polarización de estas dos ondas no es ortogonal, ellos formaran un patrón de interferencia con una intensidad escrita:

$$I\left(r\right)=\left|E\right|^2=\left|E_a\right|^2+\left|E_b\right|^2=I_0+Re\left(I_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \tag{2.8}$$

donde

$$I_0=\left|E_a\right|^2+\left|E_b\right|^2 \tag{2.9}$$

$$I_1=2E_b\cdot E_a^* \tag{2.10}$$

y $\vec{k}$ es el vector de onda de red, definido:

$$\vec{k}=\vec{k_b}-\vec{k_a} \tag{2.11}$$

la magnitud de $\vec{k}$ está relacionado con el periodo del patrón de interferencia Λ

$$\left|\vec{k}\right|=\frac{2\pi}{\Lambda} \tag{2.12}$$

La máxima visibilidad de franjas ocurre cuando las dos ondas están polarizadas a lo largo de la misma dirección y tiene la misma magnitud. La intensidad para este caso es dada como:

$$I=I_0\left(1+\cos\vec{k}\cdot\vec{r}\right) \tag{2.13}$$

Considerar la iluminación dentro de un medio fotorrefractivo tal que en las regiones brillantes $\cos \vec{k} \cdot \vec{r} = 1$ e $I = 2I_0$, las cargas fotoionizadas se generan por la absorción de fotones. Estas cargas pueden difundirse fuera de las regiones brillantes dejando atrás las impurezas donadoras ionizadas con carga positiva. Si estas cargas están atrapadas en las regiones oscuras, permanecerán allí porque no hay luz que las excite. Esto conduce a una separación de carga. Como resultado de la iluminación con intensidad periódica en el medio fotorrefractivo, las regiones oscuras están cargadas negativamente y las regiones brillantes están cargadas positivamente. La acumulación de carga espacial continúa hasta que la corriente de difusión es contrarrestada por la corriente de arrastre.
Se desea obtener la solución del campo de cargas espaciales para el caso estado estacionario, por lo que las derivadas con respecto al tiempo son cero. Usando las ecuaciones del material (2.1), (2.2), (2.5) y (2.6), se obtiene:

$$\begin{aligned} sI\left(N_D - N_D'\right) - \gamma_R N N_D' &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} = k_B T \mu \vec{\nabla} N + qN\mu\vec{E} & \\ \vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = -q\left(N + N_A - N_D'\right) &= \rho\left(r\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Así se podrá resolver $\vec{E}$ en términos de la intensidad $I\left(r\right)$. Para el caso cuando la modulación de intensidad es pequeña $|I_1| <<< I_0$ [39]. La solución para el estado estacionario se puede escribir:

$$N\left(r\right) = N_0 + Re\left(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \tag{2.15}$$

$$N_D'\left(r\right) = N_{D_0}' + Re\left(N_{D_1}' e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \tag{2.16}$$

$$J\left(r\right) = J_0 + Re\left(J_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \tag{2.17}$$

$$E\left(r\right) = E_0 + Re\left(E_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \tag{2.18}$$

donde N_0, N_1, N_{D_0}', N_{D_1}' J_0, J_1 E_0, E_1 son constantes. Siendo E_0 el campo eléctrico aplicado y E_1 el campo de cargas espaciales

Iluminación uniforme $I_1 = 0$

En este caso no hay variación de todas las cantidades físicas. El cambio de la densidad de carga se relaciona por:

$$sI\left(N_D - N_D'\right) = \gamma_R N N_D' \tag{2.19}$$

$$(N + N_A - N'_D) = 0 \tag{2.20}$$

De la ecuación (2.19) se puede obtener la densidad para impurezas donadoras ionizadas:

$$\begin{aligned} sIN_D - sIN'_D &= \gamma_R N N'_D \\ sIN_D &= \gamma_R N N'_D + sIN'_D \\ sIN_D &= N'_D\left(\gamma_R N + sI\right) \\ N'_D &= \frac{sIN_D}{(\gamma_R N + sI)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Esta es la densidad para las impurezas donadoras ionizadas dentro de una iluminación uniforme la ecuación (2.21) se sustituye en la expresión (2.20) y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para N:

$$\begin{aligned} N + N_A - \frac{sIN_D}{(\gamma_R N + sI)} &= 0 \\ N + N_A &= \frac{sIN_D}{(\gamma_R N + sI)} \\ (N + N_A)\left(\gamma_R N + sI\right) &= sIN_D \\ \gamma_R N^2 + sIN + \gamma_R N N_A + sIN_A - sIN_D &= 0 \\ \gamma_R N^2 + N\left(sI + \gamma_R N_A\right) + sI\left(N_A - N_D\right) &= 0 \\ \gamma_R N_A N + sI\left(N_A - N_D\right) &= 0 \\ \gamma_R N_A N &= sI\left(N_D - N_A\right) \\ N &= \frac{sI\left(N_D - N_A\right)}{\gamma_R N_A} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Esta es la densidad del electrón debido a una iluminación uniforme de intensidad I_0 donde se ha asumido que $N <<< N_A$ y $sI <<< \gamma_R N_A$.
La densidad para las impurezas donadoras ionizadas se pueden escribir como:

$$N'_D = N + N_A$$

Reemplazando en (2.22):

$$N'_D = \frac{sI\left(N_D - N_A\right)}{\gamma_R N_A} + N_A \tag{2.23}$$

Iluminación Periódica $(I_1 \neq 0)$

Consideramos el caso de iluminación periódica, esto ocurre cuando dos haces coherentes interfieren dentro del medio.

Las expresiones (2.8), (2.15) y (2.16) se reemplazan en la ecuación (2.1):

$$\frac{\partial\left(N'_{D_0}+Re\left(N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)}{\partial t}=s\left(I_0+Re\left(I_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)\left[N_D-\left(N'_{D_0}+Re\left(N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)\right]$$
$$-\gamma_R\left(N_0+Re\left(N_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)\left(N'_{D_0}+Re\left(N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)=0$$

Realizando los productos, resulta:

$$sI_0N_D-sI_0\left(N'_{D_0}+ReN'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)+sI_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}N_D-sI_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left(N'_{D_0}+Re\left(N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)$$
$$-\gamma_R\left[N_0N'_{D_0}+N_0N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}+N_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}N'_{D_0}+N_1N'_{D_1}e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]=0$$

$$sI_0N_D-sI_0N'_{D_0}-sI_0N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}+sI_1N_De^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-sI_1N'_{D_0}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-sI_1N'_{D_1}e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
$$-\gamma_RN_0N'_{D_0}-\gamma_RN_0N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-\gamma_RN_1N'_{D_0}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-\gamma_RN_1N'_{D_1}e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}=0$$

$$sI_0N_D-sI_0N'_{D_0}-sI_0N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}+sI_1N_De^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-sI_1N'_{D_0}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-sI_1N'_{D_1}e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
$$-\gamma_RN_0N'_{D_0}-\gamma_RN_0N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-\gamma_RN_1N'_{D_0}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}-\gamma_RN_1N'_{D_1}e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}=0$$

Agrupando los términos que cuentan con el exponencial: $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ y si los demás se desprecian:

$$\left[-sI_0N'_{D_1}+sI_1N_D-sI_1N'_{D_0}-\gamma_RN_0N'_{D_1}-\gamma_RN_1N'_{D_0}\right]e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}=0$$

Agrupando términos semejantes y dejando el exponencial al otro lado de la igualdad, se obtiene:

$$sI_0\left(-N'_{D_1}\right)+sI_1\left(N_D-N'_{D_0}\right)-\gamma_RN_0N'_{D_1}-\gamma_RN_1N'_{D_0}=0 \tag{2.24}$$

Ahora sustituiremos la expresión (2.5) en (2.2)

$$\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial N'_D}{\partial t}=\frac{1}{q}\vec{\nabla}\cdot\left(\mu Nq\vec{E}+\mu k_BT\vec{\nabla}N\right)$$

Reemplazando en la expresión anterior las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.18):

$$\frac{\partial\left(N_0+Re\left(N_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)}{\partial t}-\frac{\partial\left(N'_{D_0}+Re\left(N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)}{\partial t}$$
$$=\frac{1}{q}\vec{\nabla}\cdot\left(\mu\left(N_0+Re\left(N_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)q\left(\vec{E_0}+Re\left(\vec{E_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)+\mu k_BT\vec{\nabla}\left(N_0+Re\left(N_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right)\right)$$

Conociendo que $\vec{k}\cdot\vec{r}=kx$ entonces se puede expresar $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\frac{\partial J}{\partial x}$:

$$\frac{1}{q}\vec{\nabla}\cdot\Big(qN_0\mu\vec{E_0}+qN_0\mu\vec{E_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}+q\mu\vec{E_0}N_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}+q\mu\vec{E_1}N_1e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
$$+k_BT\mu\vec{\nabla}N_0+k_BT\mu\vec{\nabla}N_1e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Big)=0$$

Se realiza la derivada con respecto a x y se simplifica términos:

$$-i\vec{k}\cdot N_0\mu\vec{E_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - i\vec{k}\cdot\vec{E_0}\mu N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \left(-2i\vec{k}\right)\mu\vec{E_1}N_1 e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}} + (-i)^2\,\vec{k}\cdot\vec{k}\frac{k_B T\mu N_1}{q}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0$$

Despreciando el termino $e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\left(-i\vec{k}\cdot N_0\mu\vec{E_1} - i\vec{k}\cdot\vec{E_0}\mu N_1 - \vec{k}\cdot\vec{k}\frac{k_B T\mu N_1}{q}\right)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0$$

Dejando el exponencial al otro lado de la igualdad y multiplicando toda la expresión por i, se obtiene:

$$\vec{k}\cdot N_0\mu\vec{E_1} + \vec{k}\cdot\vec{E_0}\mu N_1 - i\vec{k}\cdot\vec{k}\frac{k_B T\mu N_1}{q} = 0 \tag{2.25}$$

Ahora se reemplaza (2.15), (2.16) y (2.18) en la expresión (2.6)

$$\vec{\nabla}\cdot\epsilon\left(\vec{E_0} + Re\left(\vec{E_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\right) = -q\left(N_0 + Re\left(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) + N_A - N'_{D_0} - ReN'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)$$

igualando términos que incluyen el exponencial se obtiene:

$$\vec{\nabla}\cdot\epsilon\vec{E_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -q\left(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - N'_{D_1}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)$$

luego desarrollando la derivada, resulta:

$$-i\vec{k}\cdot\epsilon\vec{E_1} = -q\left(N_1 - N'_{D_1}\right) \tag{2.26}$$

Si

$$\frac{\partial N'_{D_0}}{\partial t} = sI_0\left(N_D - N'_{D_0}\right) - \gamma_R N_0 N'_{D_0}$$

y

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E_0} = -q\left(N_0 + N_A - N'_{D_0}\right)$$

Podemos expresar:

$$sI_0\left(N_D - N'_{D_0}\right) - \gamma_R N_0 N'_{D_0} = 0 \tag{2.27}$$

$$\left(N_0 + N_A - N'_{D_0}\right) = 0 \tag{2.28}$$

En estas ecuaciones podemos recalcar que N_A, N_D y $\vec{E_0}$ son constantes. N_D y N'_{D_0} se pueden obtener resolviendo las ecuaciones (2.27) y (2.28). El resultado es similar al de las expresiones

(2.21) y (2.22).
Tomando la ecuación (2.27) y resolviendo el producto:

$$sI_0N_D - sI_0N'_{D_0} - \gamma_R N_0 N'_{D_0} = 0$$

Despejamos el termino N'_{D_0}:

$$\begin{aligned} sI_0N_D &= N'_{D_0}\left(sI_0 + \gamma_R N_0\right) \\ N'_{D_0} &= \frac{sI_0N_D}{sI_0 + \gamma_R N_0} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Sustituyendo la anterior ecuación en la expresión (2.28)

$$\left(N_0 + N_A - \frac{sI_0N_D}{sI_0 + \gamma_R N_0}\right) = 0$$

$$N_0 + N_A = \frac{sI_0N_D}{sI_0 + \gamma_R N_0}$$

$$\left(N_0 + N_A\right)\left(sI_0 + \gamma_R N_0\right) = sI_0N_D = sI_0N_0 + \gamma_R N_0^2 + sI_0N_A + \gamma_R N_0 N_A$$

asumimos que $N_0 << N_A$ y $sI_0 << \gamma_R N_A$

$$sI_0\left(N_A - N_D\right) + \gamma_R N_A N_0 = 0$$

$$sI_0\left(N_D - N_A\right) = \gamma_R N_A N_0$$

Despejando a N_0:

$$N_0 = \frac{sI_0\left(N_D - N_A\right)}{\gamma_R N_A} \tag{2.30}$$

Las ecuaciones (2.24), (2.25) y (2.26) se usaran para solucionar N_1, N'_{D_1} y $\vec{E}_0$.
Reemplazando la ecuación (2.26) en (2.25):

$$-i\frac{q}{\epsilon}\left(N_1 - N'_{D_1}\right)N_0\mu + \vec{k}\cdot\vec{E}_0\mu N_1 - i\vec{k}\cdot\vec{k}\frac{k_BT\mu N_1}{q} = 0$$

Resolviendo el producto:

$$-i\frac{q}{\epsilon}N_1N_0\mu + i\frac{q}{\epsilon}N'_{D_1}N_0\mu + \vec{k}\cdot\vec{E}_0\mu N_1 - i\vec{k}\cdot\vec{k}\frac{k_BT\mu N_1}{q} = 0$$

re escribiendo la ecuación anterior resulta:

$$i\frac{q}{\epsilon}N'_{D_1}N_0\mu = i\frac{q}{\epsilon}N_1N_0\mu - \vec{k}\cdot\vec{E}_0\mu N_1 + i\vec{k}\cdot\vec{k}\frac{k_BT\mu N_1}{q}$$
$$N'_{D_1} = \frac{-i\epsilon}{qN_0\mu}\left[i\frac{q}{\epsilon}N_1N_0\mu - \vec{k}\cdot\vec{E}_0\mu N_1 + i\vec{k}\cdot\vec{k}\frac{k_BT\mu N_1}{q}\right] \tag{2.31}$$

Tomando la expresión (2.24) y despejando el termino N_1:

$$-N'_{D_1}\left(sI_0 + \gamma_R N_0\right) + sI_1\left(N_D - N'_{D_0}\right) - \gamma_R N_1 N'_{D_0} = 0$$
$$-N'_{D_1}\left(sI_0 + \gamma_R N_0\right) + sI_1\left(N_D - N'_{D_0}\right) = \gamma_R N_1 N'_{D_0}$$

finalmente, se obtiene:

$$N_1 = \frac{-N'_{D_1}\left(sI_0 + \gamma_R N_0\right) + sI_1\left(N_D - N'_{D_0}\right)}{\gamma_R N'_{D_0}} \tag{2.32}$$

Despejando $\vec{E_1}$ de la ecuación (2.26) y reemplazando los valores de N_1 y N'_{D_1} que obtenemos en las ecuaciones (2.31), (2.32), se obtiene:

$$E_1 = \frac{iE_d}{1+\frac{E_d}{E_q}}\left[\frac{1+i\frac{E_0}{E_d}}{1+i\frac{E_0}{E_d+E_q}}\right]\frac{I_1}{I_0}$$

Sabemos que E_1 representa el campo de cargas espaciales, por notación lo escribiremos como E_{sc}. Cuando el campo aplicado E_0 es paralelo al vector de red K, el campo de cargas espaciales se puede expresar:

$$E_{sc} = iE_q\left[\frac{E_d + iE_0}{E_d + E_q + iE_0}\right]\frac{I_1}{I_0} \tag{2.33}$$

donde E_q es el campo de saturación, definido por:

$$E_q = \frac{N_A q}{\epsilon\epsilon_0 K_G} \tag{2.34}$$

donde N_A es la densidad de aceptores de carga, ϵ es la constante dielectrica, ϵ_0 es la permitividad en el espacio libre. El campo de difusión E_d está definido por:

$$E_d = \frac{K_G k_B T}{q} \tag{2.35}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, T es la temperatura, q es la carga del electrón y K_G la magnitud del vector de onda.

2.2.3. Registro holográfico

Para registrar un holograma se hace incidir dos haces coherentes y linealmente polarizados en un material fotorrefractivo. La información de una onda objeto se almacena al registrar el patrón de interferencia producido por el haz objeto y el haz referencia.
Si se considera dos haces con intensidades I_1 e I_2, la intensidad resultante por la interferencia es:

$$I(x) = I_m \cdot (1 + M\cos(Kx)) \tag{2.36}$$

donde $I_m = I_1 + I_2$, K es la frecuencia espacial de las franjas de interferencia y la modulación se describe como:

$$M = 2\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_m} \tag{2.37}$$

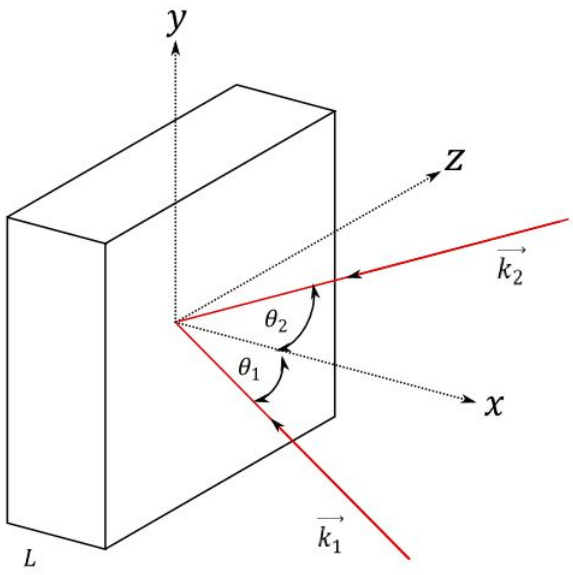

Figura 2.2.2: Incidencia de los haces en el registro holográfico [3]

El módulo del vector $\vec{K_G}$ viene dado por:

$$\left|\vec{K_G}\right| = \frac{2\pi}{\Lambda} \tag{2.38}$$

y el espaciado de franjas Λ dado por:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2n\sin\theta} \tag{2.39}$$

donde λ es la longitud de onda de registro, n es el índice de refracción ordinario del material y θ es el ángulo de registro.

2.3. Propiedades electro-ópticas del BTO

El BTO es naturalmente isotrópico, sin embargo a la existencia de un campo eléctrico en el material crea una anisotropía e induce en el material una birrefringencia lineal proporcional a la intensidad del campo. A continuación analizaremos el efecto de la birrefringencia.

2.3.1. Birrefringencia

Para calcular la birrefringencia inducida, tomamos la ecuación del elipsoide de índices:

$$\begin{aligned}\sum \left(\eta + \Delta\eta_{ij}\right) \varepsilon_i \varepsilon_j = \left(\eta + \Delta\eta_1\right) x^2 + \left(\eta + \Delta\eta_2\right) y^2 \\ + \left(\eta + \Delta\eta_3\right) z^2 + 2\Delta\eta_4 yz + 2\Delta\eta_5 xz + 2\Delta\eta_6 xy = 1\end{aligned} \tag{2.40}$$

Teniendo en cuenta el campo eléctrico con tres componentes y el tensor electro-óptico en el sistema de propagación de luz en configuración transversal, tenemos:

$$\begin{bmatrix}\Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}E_x \\ E_y \\ E_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r_{41}E_y \\ 0 \\ r_{41}E_y \\ r_{41}E_z \\ 0 \\ -r_{41}E_x\end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Reemplazando el tensor de impermeabilidad en la ecuación (2.40)

$$\sum \left(\eta + \Delta\eta_{ij}\right) \varepsilon_i \varepsilon_j = \left(\eta + \Delta\eta_1\right) x^2 + \eta y^2 + 2\Delta\eta_6 xy = 1 \tag{2.42}$$

La propagación de la onda es en z, por lo que la birrefringencia será causada en x y y.

$$\left(\eta - r_{41}E_y\right) x^2 + \eta y^2 + 2\left(-r_{41}E_x\right) xy = 1 \tag{2.43}$$

Haciendo una rotación de ángulo θ:

$$\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \tag{2.45}$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \tag{2.46}$$

reemplazando

$$\begin{aligned}&(\eta - r_{41}E_y)\left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)^2 + \eta\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)^2 \\ &+2\left(-r_{41}E_x\right)\left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right) = 1\end{aligned} \tag{2.47}$$

Operando:

$$\begin{aligned}&(\eta - r_{41}E_y)\left(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\sin^2\theta\right) + \eta\left(x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\cos^2\theta\right) \\ &- 2r_{41}E_x\left(x'^2\cos\theta\sin\theta + x'y'\cos^2\theta - x'y'\sin^2\theta - y'\sin\theta\cos\theta\right) = 1\end{aligned} \tag{2.48}$$

Agrupando:

$$\begin{aligned}&x'^2\left[(\eta - r_{41}E_y)\cos^2\theta + \eta\sin^2\theta - 2r_{41}E_x\cos\theta\sin\theta\right] \\ &+ y'^2\left[(\eta - r_{41}E_y)\sin^2\theta + \eta\cos^2\theta + 2r_{41}E_x\sin\theta\cos\theta\right] \\ &+ x'y'\left[(\eta - r_{41}E_y)\left(-2\cos\sin\theta\right) + 2\eta\cos\sin - 2r_{41}E_x\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right] = 1\end{aligned} \tag{2.49}$$

reduciendo términos:

$$\begin{aligned}&x'^2\left(\eta - r_{41}E_y\cos^2\theta - 2r_{41}E_x\cos\theta\sin\theta\right) + y'^2\left(\eta - r_{41}E_y\sin^2\theta + 2r_{41}E_x\sin\cos\theta\right) \\ &+ x'y'\left(r_{41}E_y 2\cos\theta\sin\theta - 2r_{41}E_x\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right) = 1\end{aligned} \tag{2.50}$$

usando las igualdades:

$$\begin{aligned}2\sin\theta\cos\theta &= \sin 2\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta &= \cos 2\theta\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}&x'^2\left(\eta - r_{41}E_y\cos^2\theta - r_{41}E_x\sin 2\theta\right) + y'^2\left(\eta - r_{41}E_y\sin^2\theta + r_{41}E_x\sin 2\theta\right) \\ &+ x'y'\left(r_{41}E_y\sin 2\theta - 2r_{41}E_x\cos 2\theta\right) = 1\end{aligned} \tag{2.52}$$

tomando el último término:

$$\begin{aligned}x'y'\left(r_{41}E_y\sin 2\theta - 2r_{41}E_x\cos 2\theta\right) &= 0 \\ r_{41}E_y\sin 2\theta = 2r_{41}E_x\cos 2\theta \Longrightarrow \tan 2\theta &= \frac{2E_x}{E_y}\end{aligned} \tag{2.53}$$

y

$$\sin 2\theta = \frac{2E_x}{\sqrt{4E_x^2 + E_y^2}} \tag{2.54}$$

$$\cos 2\theta = \frac{E_y}{\sqrt{4E_x^2 + E_y^2}} \tag{2.55}$$

de las expresiones (2.51) podemos encontrar $\cos^2\theta$ y $\sin^2\theta$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{2.56}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{2.57}$$

Reemplazando las expresiones (2.56) y (2.57) en la ecuación (2.52)

$$\begin{aligned} x'^2\left(\eta - r_{41}E_y\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - r_{41}E_x\sin 2\theta\right) \\ +y'^2\left(\eta - r_{41}E_y\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + r_{41}E_x\sin 2\theta\right) = 1 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Reemplazando $\sin 2\theta$ y $\cos 2\theta$, tenemos:

$$\begin{aligned} x'^2\left(\eta - \frac{r_{41}E_y}{2}\left(1+\frac{E_y}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right) - r_{41}E_x\left(\frac{2E_x}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right)\right) \\ +y'^2\left(\eta - \frac{r_{41}E_y}{2}\left(1-\frac{E_y}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right) + r_{41}E_x\left(\frac{2E_x}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right)\right) = 1 \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned} x'^2\left(\eta - \frac{r_{41}E_y}{2}\left(\frac{E_y+\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right) - r_{41}E_x\left(\frac{2E_x}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right)\right) \\ +y'^2\left(\eta - \frac{r_{41}E_y}{2}\left(\frac{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}-E_y}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right) + r_{41}E_x\left(\frac{2E_x}{\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}\right)\right) = 1 \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} x'^2\left[\eta + \left(\frac{E_y\left(4E_x^2+E_y^2\right)+E_y^2\sqrt{4E_x^2+E_y^2}+4E_x^2\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}{2\left(4E_x^2+E_y^2\right)}\right) - r_{41}\right] \\ y'^2\left[\eta + \left(\frac{4E_x^2\sqrt{4E_x^2+E_y^2}+E_y^2\sqrt{4E_x^2+E_y^2}+E_y\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}{2\left(4E_x^2+E_y^2\right)}\right) - r_{41}\right] = 1 \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$x'^2\left[\eta - \frac{r_{41}E_y}{2} - \frac{r_{41}\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}{2}\right] + y'^2\left[\eta + \frac{r_{41}\sqrt{4E_x^2+E_y^2}}{2} - \frac{r_{41E_y}}{2}\right] = 1 \tag{2.62}$$

$$x'^2\left[\eta - \frac{1}{2}r_{41}E_y - \frac{1}{2}r_{41}\sqrt{4E_x^2+E_y^2}\right] + y'^2\left[\eta + \frac{1}{2}r_{41}\sqrt{4E_x^2+E_y^2} - \frac{1}{2}r_{41}E_y\right] = 1 \tag{2.63}$$

Los índices principales son n_1 y n_2, $\left(\eta = \frac{1}{n^2}\right)$.

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}r_{41}E_y - \frac{1}{2}r_{41}\sqrt{4E_x^2+E_y^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}r_{41}\left(E_y+\sqrt{4E_x^2+E_y^2}\right) \tag{2.64}$$

$$\frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} r_{41} E_y + \frac{1}{2} r_{41} \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} r_{41} \left(E_y - \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \tag{2.65}$$

Experimentalmente se obtiene que las diferencias $\delta n_1 = |n_1 - n|$ y $\delta n_2 = |n_2 - n|$ son pequeñas frente a n, entonces se puede determinar un valor aproximado:

$$\begin{aligned} n_1 &= n - \delta n_1 \\ n_2 &= n - \delta n_2 \end{aligned} \tag{2.66}$$

por lo que podemos expresar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} r_{41} \left(E_y - \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) &= \frac{1}{(n - \delta n_2)^2} - \frac{1}{n^2} \\ \frac{n^2 - (n - \delta n_2)^2}{n^2 \left(n^2 - 2n\delta n_2 + \delta n_2^2 \right)} = \frac{2n\delta n_2}{n^2 (n - 2\delta n_2)} &= \frac{2\delta n_2}{n^3} \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\delta n_2}{n^3} &= -\frac{1}{2} r_{41} \left(E_y - \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \\ 2\delta n_2 &= -\frac{1}{2} r_{41} n^3 \left(E_y - \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \\ \delta n_2 = -\frac{1}{4} r_{41} n^3 \left(E_y - \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) &= n_2 - n \\ n_2 = n - \frac{1}{4} n^3 r_{41} \left(E_y - \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) & \end{aligned} \tag{2.68}$$

Para el otro índice de refracción:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} r_{41} \left(E_y + \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) &= \frac{1}{(n - \delta n_1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ \frac{n^2 - (n - \delta n_1)^2}{n^2 \left(n^2 - 2n\delta n_1 + \delta n_1^2 \right)} = \frac{2n\delta n_1}{n^2 (n - 2\delta n_1)} &= \frac{2\delta n_1}{n^3} \end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\delta n_1}{n^3} &= -\frac{1}{2} r_{41} \left(E_y + \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \\ 2\delta n_1 &= -\frac{1}{2} r_{41} n^3 \left(E_y + \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \\ \delta n_1 = -\frac{1}{4} r_{41} n^3 \left(E_y + \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) &= n_1 - n \\ n_1 = n - \frac{1}{4} n^3 r_{41} \left(E_y + \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) & \end{aligned} \tag{2.70}$$

La expresión de birrefringencia es:

$$\begin{aligned} \Delta_n = |n_1 - n_2| = \Bigg| \left(n - \frac{1}{4} n^3 r_{41} \left(E_y + \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \right) \\ - \left(n - \frac{1}{4} n^3 r_{41} \left(E_y - \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \right) \Bigg| \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\Delta_n = \left| 2\left(-\frac{1}{4} n^3 r_{41} \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \right) \right| = \frac{1}{2} n^3 r_{41} \sqrt{4E_x^2 + E_y^2} \tag{2.72}$$

Esta expresión es valida para describir la birrefringencia en la configuración $TRANSVERSAL$ del modulador.
Para un modulador con configuración $PROM$ y asumiendo que la dirección de propagación es paralela al eje x, el campo eléctrico solo tendrá componentes en esta dirección y las componentes E_y y E_z serán nulas. Por lo que la birrefringencia se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Delta n = \frac{1}{2} n^3 r_{41} E_x \tag{2.73}$$

2.3.2. Tensor dieléctrico

La propagación de una onda electromagnética está descrita por las cuatro ecuaciones de Maxwell y las siguientes ecuaciones materiales:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{2.74}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \tag{2.75}$$

donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad eléctrica y la permeabilidad mágnetica del vacio, $\vec{P}$ es la polarización eléctrica, $\vec{M}$ es la polarización mágnetica del medio, $\vec{E}$ y $\vec{D}$ son los vectores de campo eléctrico y desplazamiento eléctrico, $\vec{H}$ y $\vec{B}$ representan los vectores de campo mágnetico e inducción mágnetica.
Si se considera un material homogéneo, que además sea no magnético ($M = 0$) y si se asume que los campos eléctricos son pequeños en comparación con los campos intra-atómicos. Se puede escribir la ecuación (2.74) de la siguiente manera:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \tag{2.76}$$

donde ϵ es el tensor dieléctrico, siendo un tensor de rango dos. En el sistema de coordenadas principales (ejes cristalográficos) este tensor diagonalizado se expresa:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

2.3.3. Elipsoide de índices

El elipsoide de índice es una superficie en tres dimensiones espaciales, definida como:

$$\sum \eta_{ij}\xi_i\xi_j = 0 \tag{2.78}$$

donde ξ_i es la componente i-ésima de un sistema de coordenadas, η_{ij} son las componentes del tensor de impermeabilidad, definido como el inverso del tensor dieléctrico:

$$\eta\epsilon = \epsilon_0 \tag{2.79}$$

En notación tensorial, la ecuación anterior se puede escribir como $\eta_{ij}\epsilon_{jk} = \epsilon_0\delta_{ik}$. En las coordenadas principales el tensor de impermeabilidad se puede escribir como:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \tag{2.80}$$

donde n_x, n_y y n_z son los índices de refracción principales.
Con el elipsoide de índices es posible describir las variaciones del índice de refracción en un medio transparente cuando se somete a un campo eléctrico.

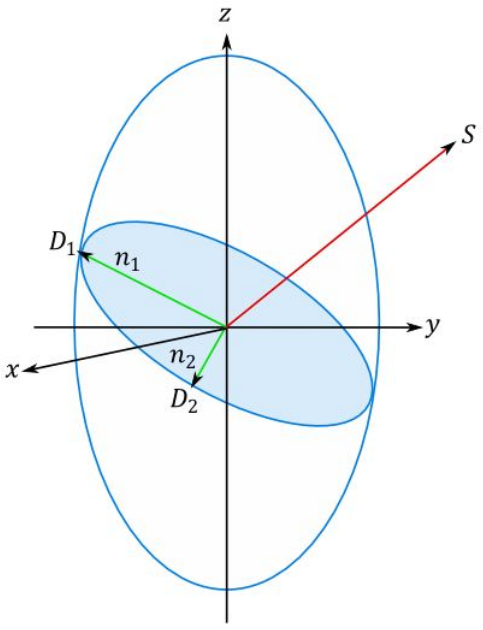

Figura 2.3.1: Método de elipsoide de índice [2]

.

Este método puede mostrar la equivalencia entre el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico.

$$\vec{E_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\eta\vec{D_0} \tag{2.81}$$

donde $\vec{E_0}$ y $\vec{D_0}$ son las amplitudes del campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico respectivamente.

2.3.4. Efecto eléctro-óptico

Consideramos la propagación de radiación electromagnética en cristales con presencia de campo eléctrico aplicado. La aplicación de un campo eléctrico da como resultado un cambio en el tensor de permitividad ó equivalentemente una modificación del elipsoide de indices. Esto es conocido como el efecto eléctro-óptico.
Este efecto es definido tradicionalmente en términos del cambio del tensor de impermeabilidad:

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{ij} = r_{ijk}E_k + s_{ijkm}E_kE_m \tag{2.82}$$

Donde E_k y E_m son componentes del campo aplicado, r_{ijk} y s_{ijkm} son los coeficientes eléctro-ópticos Pockels y Kerr respectivamente [40, 41].
Recordando la expresión (2.79) $\eta\epsilon = \epsilon_0$, el cambio del tensor dieléctrico $\Delta\epsilon$ en relación con el tensor de cambio de impermeabilidad $\Delta\eta$, se puede expresar [42]:

$$\begin{aligned}
(\epsilon + \Delta\epsilon)(\eta + \Delta\eta) &= \epsilon_0 I_0 \\
\epsilon\eta + \epsilon\Delta\eta + \eta\Delta\epsilon + \Delta\eta\Delta\epsilon &= \epsilon_0 I_0 \\
\epsilon\frac{\epsilon_0}{\epsilon} + \epsilon\Delta\eta + \eta\Delta\epsilon &= \epsilon_0 I_0 \\
\epsilon\Delta\eta + \eta\Delta\epsilon &= 0 \\
\Delta\epsilon\eta &= -\epsilon\Delta\eta \\
\Delta\epsilon &= -\frac{\epsilon\Delta\eta}{\eta} \\
\Delta\epsilon &= -\frac{\epsilon\Delta\eta\epsilon}{\epsilon_0}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

En el sistema de coordenadas principales, el tensor es diagonal y se puede expresar como:

$$\Delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_0 n_i^2 n_j^2 \Delta\eta_{ij} \tag{2.84}$$

donde n_i y n_j son los índices principales de refracción.
Nuestro interés en este análisis se debe a que el efecto electro-óptico es responsable de la mayoría de los fenómenos en los cristales fotorrefractivos. Los coeficientes electro-ópticos lineales r_{ijk} son componentes de un tensor de rango 3, compuesto por 27 componentes pero las propiedades de simetría de ϵ y η se reduce a las 18 componentes independientes. La simetría permite el intercambio de los dos primeros índices, es decir:

$$r_{ijk} = r_{jik} \tag{2.85}$$

Por resultado de la simetría es conveniente introducir la contracción de índices y la abreviación de notación:

$$\begin{aligned} 1 =&(11) = (xx) \\ 2 =&(22) = (yy) \\ 3 =&(33) = (zz) \\ 4 =&(23) = (32) = (yz) = (zy) \\ 5 =&(31) = (13) = (zx) = (xz) \\ 6 =&(12) = (21) = (xy) = (yx) \end{aligned} \tag{2.86}$$

usando la contracción de índices podemos escribir:

$$\begin{aligned} r_{1k} =& r_{11k} \\ r_{2k} =& r_{22k} \\ r_{3k} =& r_{33k} \\ r_{4k} =& r_{23k} = r_{32k} \\ r_{5k} =& r_{31k} = r_{13k} \\ r_{6k} =& r_{12k} = r_{21k} \end{aligned} \tag{2.87}$$

Retomando la ecuación (2.83):

$$\Delta\epsilon = -\epsilon_0 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \Delta\eta \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Esto es igual:

$$\Delta\epsilon = -\epsilon_0 \begin{bmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta_{11} & \Delta\eta_{12} & \Delta\eta_{13} \\ \Delta\eta_{21} & \Delta\eta_{22} & \Delta\eta_{23} \\ \Delta\eta_{31} & \Delta\eta_{32} & \Delta\eta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

$$\begin{bmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta_{11} & \Delta\eta_{12} & \Delta\eta_{13} \\ \Delta\eta_{21} & \Delta\eta_{22} & \Delta\eta_{23} \\ \Delta\eta_{31} & \Delta\eta_{32} & \Delta\eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0^2\Delta\eta_{11} & n_0^2\Delta\eta_{12} & n_0^2\Delta\eta_{13} \\ n_0^2\Delta\eta_{21} & n_0^2\Delta\eta_{22} & n_0^2\Delta\eta_{23} \\ n_0^2\Delta\eta_{31} & n_0^2\Delta\eta_{32} & n_0^2\Delta\eta_{33} \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

$$\begin{bmatrix} n_0^2\Delta\eta_{11} & n_0^2\Delta\eta_{12} & n_0^2\Delta\eta_{13} \\ n_0^2\Delta\eta_{21} & n_0^2\Delta\eta_{22} & n_0^2\Delta\eta_{23} \\ n_0^2\Delta\eta_{31} & n_0^2\Delta\eta_{32} & n_0^2\Delta\eta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0^4\Delta\eta_{11} & n_0^4\Delta\eta_{12} & n_0^4\Delta\eta_{13} \\ n_0^4\Delta\eta_{21} & n_0^4\Delta\eta_{22} & n_0^4\Delta\eta_{23} \\ n_0^4\Delta\eta_{31} & n_0^4\Delta\eta_{32} & n_0^4\Delta\eta_{33} \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

por lo que el tensor se expresa:

$$\Delta\epsilon = -\epsilon_0 n_0^4 \begin{bmatrix} \Delta\eta_{11} & \Delta\eta_{12} & \Delta\eta_{13} \\ \Delta\eta_{21} & \Delta\eta_{22} & \Delta\eta_{23} \\ \Delta\eta_{31} & \Delta\eta_{32} & \Delta\eta_{33} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

Conocemos que el tensor del cambio de impermeabilidad es:

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk} E_k \tag{2.92}$$

Por lo que las componentes de este tensor será:

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{11} =& r_{11i} E_i = r_{1i} E_i \\ \Delta\eta_{22} =& r_{22i} E_i = r_{2i} E_i \\ \Delta\eta_{33} =& r_{33i} E_i = r_{3i} E_i \\ \Delta\eta_{23} =& \Delta\eta_{32} = r_{23i} E_i = r_{32i} E_i = r_{4i} E_i \\ \Delta\eta_{13} =& \Delta\eta_{31} = r_{13i} E_i = r_{31i} E_i = r_{5i} E_i \\ \Delta\eta_{12} =& \Delta\eta_{21} = r_{12i} E_i = r_{21i} E_i = r_{6i} E_i \end{aligned} \tag{2.93}$$

Considerando la contracción de índices, el tensor del cambio de impermeabilidad se puede expresar como un tensor de rango 1 y recordando que para cristales cúbicos como el BTO con simetría 23 los únicos coeficientes electro-ópticos no nulos son: $r_{41} = r_{52} = r_{63}$, entonces se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

2.3.5. Actividad óptica

Cuando una onda luminosa monocromática, se propaga en ciertos medios isotrópos, se comprueba que su plano de polarización sufre una rotación proporcional al espesor atravesado. Este fenómeno se conoce como actividad óptica y se presenta en cristales como los silenitas.
Para la propagación de una onda plana en un medio homogéneo, la ecuación para un material ópticamente activo se puede escribir como:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} + i\epsilon_0 \vec{G} \times \vec{E} \Rightarrow D_i = \epsilon_0 \left(\epsilon_{ij} + G_{ij}\right) E_j \tag{2.95}$$

donde ϵ es el tensor dieléctrico en ausencia de actividad óptica, $\vec{G}$ es un vector paralelo a la dirección de propagación. El vector producido por $\vec{G} \times \vec{E}$ siempre se puede representar como un producto del tensor antisimétrico $[G]$ con $\vec{E}$. Los elementos del tensor antisimétrico $[G]$ son dados por:

$$\begin{aligned} G_{23} &= -G_{32} = -G_x \\ G_{31} &= -G_{13} = -G_y \\ G_{12} &= -G_{21} = -G_z \end{aligned} \tag{2.96}$$

por lo que se puede escribir:

$$\vec{D} = (\epsilon + i\epsilon_0 G)\,\vec{E} \tag{2.97}$$

y G se expresa:

$$G = \frac{2n_0\rho}{k_0} \tag{2.98}$$

donde ρ es el poder rotatorio, n_0 índice de refracción del material y k_0 el número de onda.

2.4. Configuraciones holográficas

Debemos destacar que la orientación de las caras externas de los cristales fotorrefractivos respecto a sus direcciones cristalográficas es de gran importancia para las aplicaciones fotorrefractivas dado el carácter tensorial del efecto electro-óptico lineal. La orientación del cristal BTO a ser utilizado tiene sus caras paralelas a los planos (001), (110) y $(1-10)$, como se observa en las figuras 2.4.1 y 2.4.5. Existen dos configuraciones posibles en este tipo de cristales BTO como son la configuración longitudinal y la transversal que se presentara a continuación.
Se definirá un sistema coordenado de propagación de luz, donde el eje x es paralelo al vector de onda de red K_G, el eje z es ortogonal a la cara de entrada del cristal y es aproximadamente paralelo a la dirección de propagación del haz incidente, el eje y completa el sistema coordenado [43].
Para esto haremos dos rotaciones de los ejes cristalográficos con respecto a los ejes de propagación.

$$X_i \cong a_{ij} X_j \tag{2.99}$$

donde a_{ij} es la matriz de transformación, X_j representa el sistema cristalográfico y X_i el sistema coordenado de propagación.

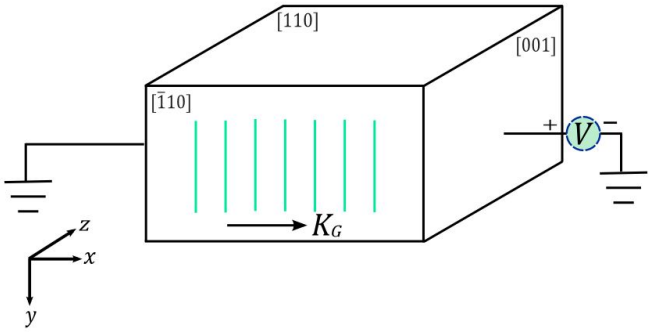

Figura 2.4.1: Configuración longitudinal $K_G \| < 001 >$ [4]

2.4.1. Configuración longitudinal

Esta configuración tiene como orientación el vector de onda de red K_G paralelo al eje cristalográfico $< 001 >$ y al eje x del sistema de propagación o laboratorio. Esta configuración también es llamada de transferencia de energía.

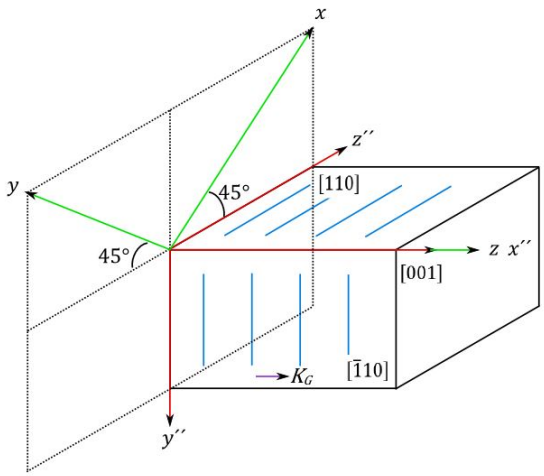

Figura 2.4.2: Cristal bajo los dos sistemas coordenados

Como se observa en la figura 2.4.2 los ejes cristalográficos (de color verde), estos serán rotados y el nuevo sistema de coordenado lo llamaremos de propagación (de color rojo). La primera rotación de los ejes cristalográficos es de 135^{o} alrededor del eje z.

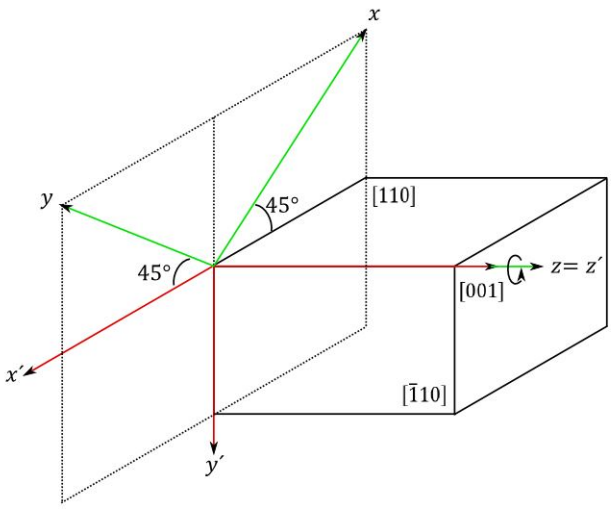

Figura 2.4.3: Primera rotación de 135^{o} alrededor del eje z.

$$A = \begin{bmatrix} \cos 135 & \cos 45 & \cos 90 \\ \cos 225 & \cos 135 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

La segunda rotación es de 90^{o} alrededor del eje y'

$$B = \begin{bmatrix} \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \\ \cos 90 & \cos 0 & \cos 90 \\ \cos 180 & \cos 90 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.101}$$

Para calcular la matriz de trasnformación, multiplicaremos $B \times A$

$$T = B \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

La orientación del cristal en el sistema de propagación, respecto a los ejes cristalográficos condicionaran la birrefringencia inducida. Es así ya que el tensor electro-óptico cambiara en términos

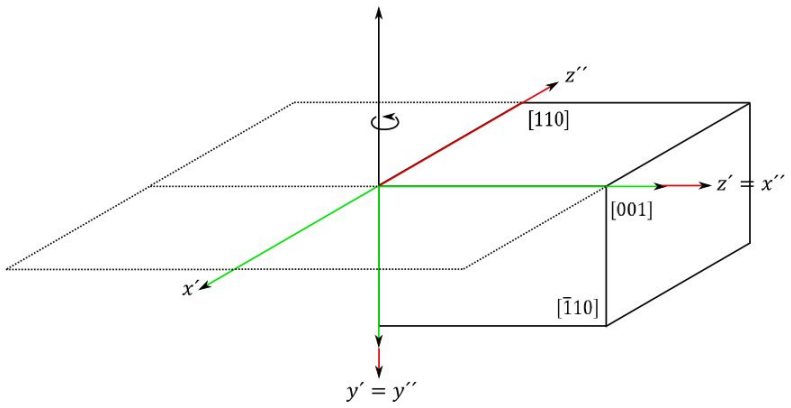

Figura 2.4.4: Segunda rotación alrededor del eje y'.

de dicha dirección, por lo que es necesario calcular el nuevo tensor de coeficientes electro-ópticos mediante:

$$r_{ijk} = \sum_{l}\sum_{m}\sum_{n} a_{il}a_{jm}a_{kn}r_{lmn} \tag{2.103}$$

donde a_{il}, a_{jm} y a_{kn} son los cosenos directores de pasar del sistema cristalográfico al de propagación y r_{ijk}, r_{lmn} representan los elementos electro-ópticos tensoriales en notación no reducida. Expandiendo la sumatoria, tenemos:

$$\begin{aligned} r_{ijk} =& a_{i1}a_{j1}a_{k1}r_{111} + a_{i1}a_{j1}a_{k2}r_{112} + a_{i1}a_{j1}a_{k3}r_{113} + a_{i1}a_{j2}a_{k1}r_{121} + a_{i1}a_{j2}a_{k2}r_{122} \\ & a_{i1}a_{j2}a_{k3}r_{123} + a_{i1}a_{j3}a_{k1}r_{131} + a_{i1}a_{j3}a_{k2}r_{132} + a_{i1}a_{j3}a_{k3}r_{133} + a_{i2}a_{j1}a_{k1}r_{211} \\ & a_{i2}a_{j1}a_{k2}r_{212} + a_{i2}a_{j1}a_{k3}r_{213} + a_{i2}a_{j2}a_{k1}r_{221} + a_{i2}a_{j2}a_{k2}r_{222} + a_{i2}a_{j2}a_{k3}r_{223} \\ & a_{i2}a_{j3}a_{k1}r_{231} + a_{i2}a_{j3}a_{k2}r_{232} + a_{i2}a_{j3}a_{k3}r_{233} + a_{i3}a_{j1}a_{k1}r_{311} + a_{i3}a_{j1}a_{k2}r_{312} \\ & a_{i3}a_{j1}a_{k3}r_{313} + a_{i3}a_{j2}a_{k1}r_{321} + a_{i3}a_{j2}a_{k2}r_{322} + a_{i3}a_{j2}a_{k3}r_{323} + a_{i3}a_{j3}a_{k1}r_{331} \\ & a_{i3}a_{j3}a_{k}r_{332} + a_{i3}a_{j3}a_{k3}r_{333} \end{aligned} \tag{2.104}$$

Para los cristales cúbicos como el BTO las componentes que no son cero:

$$\begin{aligned} r_{41} &= r_{231} = r_{321} \\ r_{52} &= r_{312} = r_{132} \\ r_{63} &= r_{123} = r_{213} \end{aligned} \tag{2.105}$$

Por lo que la sumatoria quedará:

$$r_{ijk} = \left(a_{i1}a_{j2}a_{k3} + a_{i1}a_{j3}a_{k2} + a_{i2}a_{j1}a_{k3} + a_{i2}a_{j3}a_{k1} + a_{i3}a_{j1}a_{k2} + a_{i3}a_{j2}a_{k1}\right) r_{41} \tag{2.106}$$

El tensor de coeficientes electro-ópticos con contracción de índices en el sistema coordenado de propagación de luz, (A.62) es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{41} \\ 0 & r_{41} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

Si asumimos que el campo eléctrico tiene solo componentes en el eje x, el cambio en el tensor de impermeabilidad será:

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{41} \\ 0 & r_{41} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{41}E_x \\ -r_{41}E_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.108}$$

Teniendo en cuenta la contracción de índices del tensor electro-óptico que se ha hecho podemos decir que $\Delta\eta_2 = \Delta\eta_{22}$ y $\Delta\eta_3 = \Delta\eta_{33}$, así el cambio del tensor de impermeabilidad en el sistema coordenado de propagación se puede expresar:

$$\Delta\eta_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41}E_x & 0 \\ 0 & 0 & -r_{41}E_x \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

y recordando la expresión (2.91) , podemos escribir:

$$\Delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_0 n_0^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41}E_x & 0 \\ 0 & 0 & -r_{41}E_x \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

Si $\Delta\epsilon = n_0^4 r_{41} E_x$, entonces:

$$\Delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta\epsilon \end{bmatrix} \tag{2.111}$$

El tensor de permitividad en el sistema coordenado de propagación de luz, excluyendo la actividad óptica es:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & \\ 0 & \epsilon + \Delta\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon - \Delta\epsilon \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

2.4.2. Configuración transversal

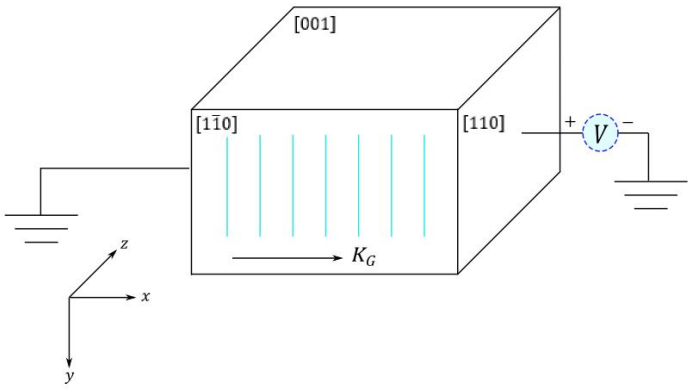

Figura 2.4.5: Configuración transversal $K_G \perp < 001 >$ [4]

Esta configuración tiene como orientación el vector de onda de red K_G perpendicular al eje cristalográfico $< 001 >$y al eje propagación x. Es también llamada configuración de eficiencia de difracción.

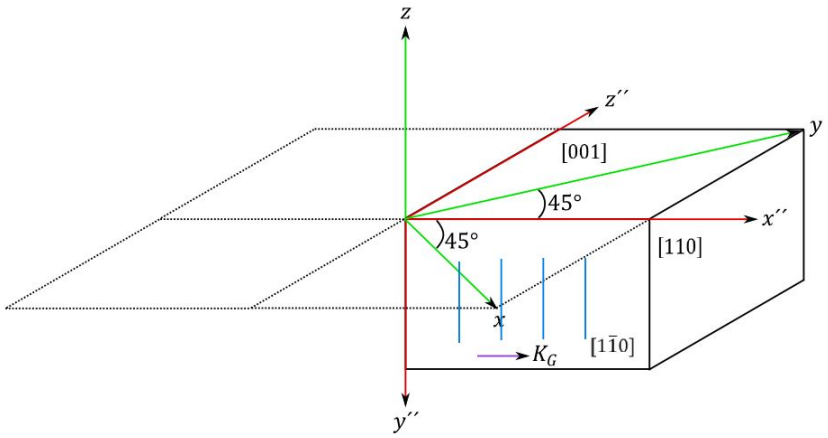

Figura 2.4.6: Cristal bajo los dos sistemas coordenados

En la figura 2.4.6 se puede observar el sistema cristalográfico (de color verde), estos serán rotados y llamaremos al nuevo sistema coordenado: de propagación (de color rojo). Para esto, la primera rotación de los ejes cristalográficos es de 90^o alrededor del eje x.

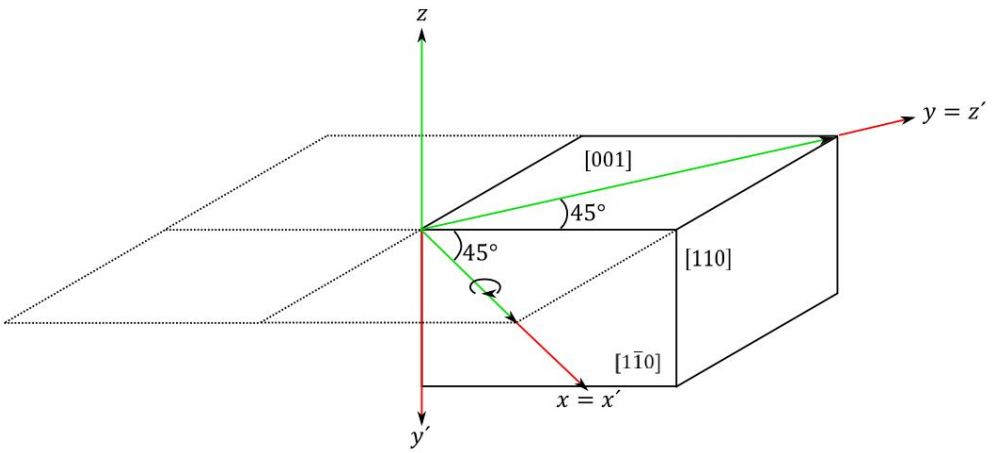

Figura 2.4.7: Primera rotación alrededor del eje x

$$D = \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos 90 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 180 \\ \cos 90 & \cos 0 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

La segunda rotación es de 45^{o} alrededor del eje y'

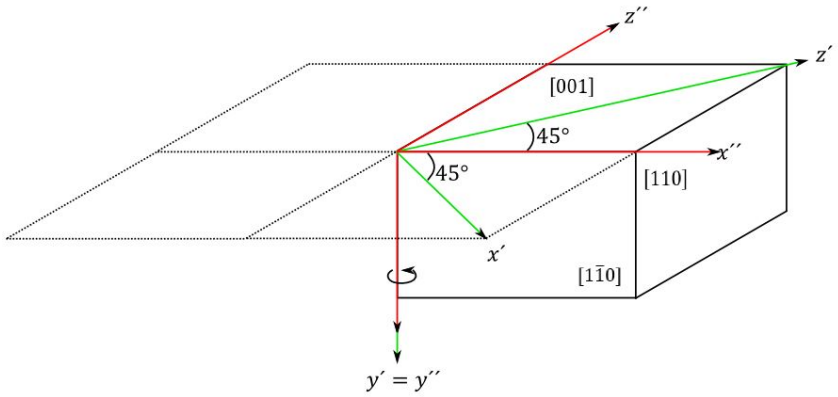

Figura 2.4.8: Segunda rotación alrededor del eje y'

$$F = \begin{bmatrix} \cos 45 & \cos 90 & \cos 45 \\ \cos 90 & \cos 0 & \cos 90 \\ \cos 135 & \cos 90 & \cos 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

Para calcular la matriz de trasnformación, multiplicaremos $F \times D = t$

$$t = F \times D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.115}$$

La orientación del cristal en el sistema de propagación, respecto a los ejes cristalográficos condicionaran la birrefringencia inducida. Es así ya que el tensor electro-óptico cambiara en términos de dicha dirección, por lo que es necesario calcular el nuevo tensor mediante la ecuación (2.103). Como ya sabemos que para cristales cúbicos como el BTO con simetría 23 los coeficientes no nulos son: $r_{41} = r_{52} = r_{63}$, por lo que se realiza la sumatoria de la expresión (2.106).
El tensor de coeficientes electro-ópticos con contracción de índices en el sistema coordenado de propagación de luz (A.64) es:

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

Recordando que el campo eléctrico tiene solo componentes en el eje x, el cambio en el tensor de impermeabilidad será:

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{41}E_x \end{bmatrix} \tag{2.117}$$

Teniendo en cuenta la contracción de índices del tensor electro-óptico que se ha hecho podemos decir que $\Delta\eta_6 = \Delta\eta_{12} = \Delta\eta_{21}$, así el cambio del tensor de impermeabilidad en el sistema coordenado de propagación se puede expresar:

$$\Delta\eta_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{41}E_x & 0 \\ -r_{41}E_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

y recordando la expresión (2.91), podemos escribir:

$$\Delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_0 n_0^4 \begin{bmatrix} 0 & -r_{41}E_x & 0 \\ -r_{41}E_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.119}$$

Si $\Delta\epsilon = n_0^4 r_{41} E_x$, entonces:

$$\Delta\epsilon_{ij} = -\epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\epsilon & 0 \\ -\Delta\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

El tensor de permitividad en el sistema coordenado de propagación de luz, excluyendo la actividad óptica es:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon & -\Delta\epsilon & 0 \\ -\Delta\epsilon & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

Capítulo 3

Estudio Fisicomatemático y Análisis de la eficiencia de difracción bajo configuración longitudinal

Para encontrar las ecuaciones acopladas de onda es necesario seguir tres pasos, el primero sera identificar la ecuación de onda que se deriva de las ecuaciones de Maxwell. Después se especifica la relación relativa a los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ para un medio birrefringente y ópticamente activo, en este proceso es necesario especificar el campo eléctrico de cargas espaciales. Por ultimo postular una función que describa los haces y teniendo en cuenta la aproximación de la envolvente lentamente variable obtener las ecuaciones de onda acopladas.

3.1. Derivación de las ecuaciones acopladas

3.1.1. Ecuación de Onda

La ecuación de onda para un medio como el BTO es:

$$\nabla^2\mathbf{E} + \frac{k_0^2}{\epsilon_0}\mathbf{D} = 0 \tag{3.1}$$

donde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ es la magnitud del vector de onda, λ es la longitud de onda y ϵ_0 es la permitividad en el espacio libre, definida en el vacío. Se asume un haz con una sola longitud de onda que se propaga en un medio no magnético. Los cristales silenitas (BSO, BTO, BGO) presentan actividad óptica, además de ser un medio birrefringente y tener acoplamiento electro-óptico, la

relación para las componentes del desplazamiento eléctrico se puede expresar:

$$D_i = \epsilon_0 \left(\epsilon_{ij} + G_{ij} + \Delta\epsilon_{ij}\right) E_j \tag{3.2}$$

donde ϵ_{ij} es el tensor simétrico de permitividad óptica en ausencia de actividad óptica y acoplamiento electro-óptico expresado en la ecuación (2.77), G_{ij} es el tensor anti-simétrico de la actividad óptica se puede ver en la ecuación (2.96) y $\Delta\epsilon_{ij}$ es el cambio en el tensor de permitividad óptica inducido por el efecto electro-óptico lineal expresado por la ecuación (2.91).

3.1.2. Campo eléctrico

Campo eléctrico de los haces

El haz de prueba R se supone que está colimado e incide en el medio fotorrefractivo formando un pequeño ángulo θ_R con respecto al eje z. El haz de señal S también colimado (con una sola frecuencia de la red) formara un pequeño ángulo de propagación θ_S con respecto al eje z como se observa en la figura 3.1.1. Los ángulos de propagación obtenidos por rotación en dirección x en la figura 3.1.1, se define como positivos, mientras que los ángulos obtenidos por una rotación hacia la dirección $-x$ se define como negativo. Así, el haz de prueba R tiene un ángulo de propagación negativo mientras que el haz señal difractado S tiene un ángulo positivo.

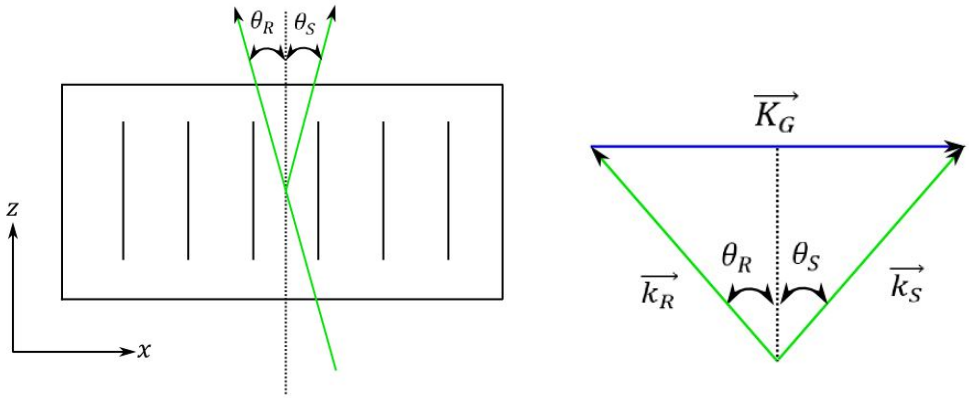

Figura 3.1.1: Separación angular y vector de onda

El campo óptico total $\tilde{E}$ se puede expresar como la suma de estas dos componentes, el campo del haz de prueba y el campo del haz señal, es decir:

$$\tilde{E}\left(x,y,z\right) = \vec{R}\left(z\right) e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + \vec{S}\left(z\right) e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} \tag{3.3}$$

donde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.
Los vectores de onda son:

$$\begin{aligned} \vec{k_R} &= \left|\vec{k_R}\right| \sin\theta_R\hat{x} + \left|\vec{k_R}\right| \cos\theta_R\hat{z} = n_0k_0\left(\sin\theta_R\hat{x} + \cos\theta_R\hat{z}\right) \\ \vec{k_S} &= \left|\vec{k_S}\right| \sin\theta_S\hat{x} + \left|\vec{k_S}\right| \cos\theta_S\hat{z} = n_0k_0\left(\sin\theta_S\hat{x} + \cos\theta_S\hat{z}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

el vector de onda de la red está definido como:

$$\vec{K_G} = \vec{k_S} - \vec{k_R} \tag{3.5}$$

Los estados de polarización del haz incidente R y el haz difractado S pueden especificarse completamente como dos componentes ortogonales de polarización lineal. Estas dos componentes se pueden denotar como E y M identificando la componente paralela y perpendicular al plano de incidencia respectivamente.

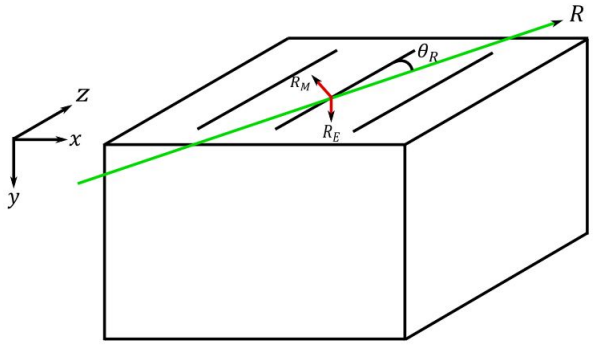

Figura 3.1.2: Polarización del haz de prueba. R_E y R_M estados de polarización del haz R, θ_R ángulo de incidencia del haz R

Analizando los estados de polarización, podemos expresar:

$$\vec{R_E} = R_E\hat{y} \tag{3.6}$$

$$\vec{R_M} = R_M\sin\left(-\theta_R\hat{z}\right) + R_M\cos\left(-\theta_R\hat{x}\right) = R_M\left(\cos\theta_R\hat{x} - \sin\theta_R\hat{z}\right) \tag{3.7}$$

De igual manera para el haz señal:

$$\vec{S_E} = S_E\hat{y} \tag{3.8}$$

$$\vec{S_M} = S_M\left(\cos\theta_S\hat{x} - \sin\theta_S\hat{z}\right) \tag{3.9}$$

Campo eléctrico y formación de las rejillas

El campo eléctrico E_x tiene dos componentes: una componente es el campo eléctrico externo aplicado al cristal y la segunda componente es producido por el campo de cargas espaciales que es generado por la distribución de intensidad producida por los haces de registro. Los haces se interfieren y forman un patrón de franjas con una dependencia espacial de la forma $\cos K_G \cdot x$. El campo eléctrico se puede escribir:

$$E_x = E_0 + E_{sc} \cos\left(K_G x + \phi\right) \tag{3.10}$$

donde ϕ es el cambio de fase resultante del campo de cargas espaciales con respecto al patrón de interferencia producido por los dos haces y K_G es definido en la ecuación (3.5).
El campo de cargas espaciales es definido por la expresión (2.33), que depende del campo aplicado E_0, el campo de saturación está definido en la ecuación (2.34) y el campo de difusión E_d definido en la ecuación (2.35).

3.1.3. Ecuaciones de onda acopladas

Se calcula el conjunto de ecuaciones acopladas, para esto lo primero que haremos será hallar el vector desplazamiento en términos del campo eléctrico.
Teniendo en cuenta los estados de polarización a la expresión (2.112) le añadiremos el tensor antisimétrico correspondiente a la actividad óptica, resultando:

$$\begin{bmatrix} D_M \\ D_E \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon & ia \\ -ia & \epsilon + \Delta\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_M \\ E_E \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Las componentes del vector desplazamiento eléctrico se pueden expresar:

$$\frac{D_M}{\epsilon_0}\hat{x} = \left(\epsilon E_M + iGE_E\right)\hat{x} \tag{3.12}$$

$$\frac{D_E}{\epsilon_0}\hat{y} = \left(-iGE_M + \epsilon E_E + \Delta\epsilon E_E\right)\hat{y} \tag{3.13}$$

Para resolver la ecuación de onda es necesario hallar el laplaciano del campo eléctrico definido en la ecuación (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= in_0 k_0 sin\theta_R R\left(z\right) e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + in_0 k_0 \sin\theta_S S\left(z\right) e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} \\ \frac{d^2E}{dx^2} &= -\left(n_0 k_0 \sin\theta_R\right)^2 R\left(z\right) e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} - \left(n_0 k_0 \sin\theta_S\right)^2 S\left(z\right) e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dz} =& in_0k_0\cos\theta_R R\left(z\right)e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\frac{dR}{dz} \\ &+ in_0k_0\cos\theta_S S\left(z\right)e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\frac{dS}{dz} \\ \frac{d^2E}{dz^2} =& -\left(n_0k_0\cos\theta_R\right)^2 R\left(z\right)e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} \\ &+ e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\frac{d^2R}{dz^2} - \left(n_0k_0\cos\theta_S\right)^2 S\left(z\right)e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} \\ &+ i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\frac{d^2S}{dz^2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Retomando el vector desplazamiento, recordando $\vec{D} = D_M\hat{x} + D_E\hat{y}$. Reemplazamos los términos G, $\Delta\epsilon$, ϵ y $E_M\hat{x} = R_M\hat{x} + S_M\hat{x}$, $E_E = R_E\hat{y} + S_E\hat{y}$

$$\begin{aligned}\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} =& \Big[n_0^2\left(R_M + S_M\right)\hat{x} + i\frac{2n_0\rho}{k_0}\left(R_E + S_E\right)\hat{x} - i\frac{2n_0\rho}{k_0}\left(S_M + R_M\right)\hat{y} + n_0^2\left(R_E + S_E\right)\hat{y} \\ &+ n_0^4 r_{41}E_x\left(R_E + S_E\right)\hat{y}\Big] \end{aligned} \tag{3.16}$$

Reemplazando las expresiones (3.14), (3.15) y (3.16) en la ecuación de onda (3.1)

$$\begin{aligned}&\underbrace{-\left(n_0k_0\right)^2 R\left(z\right)e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} - \left(n_0k_0\right)^2 S\left(z\right)e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}} + i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\frac{d^2R}{dz^2} \\ &+ e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\frac{d^2S}{dz^2} + i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} + k_0^2\Big[\underbrace{n_0^2\left(R_M + S_M\right)\hat{x}} + i\frac{2n_0\rho}{k_0}\left(R_E + S_E\right)\hat{x} \\ &- i\frac{2n_0\rho}{k_0}\left(S_M + R_M\right)\hat{y} + \underbrace{n_0^2\left(R_E + S_E\right)\hat{y}} + n_0^4 r_{41}E_x\left(R_E + S_E\right)\hat{y}\Big] = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Considerando la aproximación de la envolvente lentamente variable despreciamos las derivadas de segundo orden y anulando los términos indicados en la expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned}&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} + i2n_0k_0\rho\left(R_E + S_E\right)\hat{x} \\ &-i2n_0k_0\rho\left(S_M + R_M\right)\hat{y} + k_0^2n_0^4r_{41}E_x\left(R_E + S_E\right)\hat{y} = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ahora analizaremos el término E_x:

$$E_x = E_0 + E_{sc}\cos\left(\vec{K_G}\cdot\vec{r} + \phi\right) \tag{3.19}$$

donde E_0 es el campo eléctrico aplicado, E_{SC} es el campo de cargas espaciales.
$\cos\left(\vec{K_G}\cdot\vec{r} + \phi\right)$ se puede expresar:

$$\cos\left(\vec{K_G}\cdot\vec{r} + \phi\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi} + e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right) \tag{3.20}$$

Reemplazando las expresiones (3.19) y (3.20) en la ecuación (3.18)

$$i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\rho\left(R_E+S_E\right)\hat{x}-i2n_0k_0\rho\left(S_M+R_M\right)\hat{y}$$
$$+k_0^2n_0^4r_{41}\left(E_0+E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)\right)\left(R_E+S_E\right)\hat{y}=0 \tag{3.21}$$

Resolviendo los productos:

$$\begin{aligned}i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\rho R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\+i2n_0k_0\rho S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}-i2n_0k_0\rho S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}-i2n_0k_0\rho R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\+k_0^2n_0^4r_{41}\left(E_0+E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)\right)R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\+k_0^2n_0^4r_{41}\left(E_0+E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)\right)S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}=0\end{aligned} \tag{3.22}$$

Desarrollando el producto:

$$\begin{aligned}&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\rho R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}+i2n_0k_0\rho S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\&-i2n_0k_0\rho S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}-i2n_0k_0\rho R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\&+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\&+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}=0\end{aligned} \tag{3.23}$$

Operando resulta:

$$\begin{aligned}&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\rho R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}+i2n_0k_0\rho S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\&-i2n_0k_0\rho S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}-i2n_0k_0\rho R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\&+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+\underbrace{e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i2\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}}\right)R_E\hat{y}\\&+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{i2\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}}+e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)S_E\hat{y}=0\end{aligned} \tag{3.24}$$

Los términos señalados representan ondas que viajan en otras direcciones, por lo que serán despreciadas.

$$\begin{aligned}&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\rho R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}+i2n_0k_0\rho S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\&-i2n_0k_0\rho S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}-i2n_0k_0\rho R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\&+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}\right)R_E\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)S_E\hat{y}=0\end{aligned} \tag{3.25}$$

Agrupando términos semejantes, obtenemos:

$$\begin{aligned} i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} = e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\,[&-i2n_0k_0\rho S_E\hat{x} \\ &+i2n_0k_0\rho S_M\hat{y} - k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_E\hat{y} - k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}R_Ee^{i\phi}\hat{y}\Big] \\ +e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\Big[-i2n_0k_0\rho R_E\hat{x} + i2n_0k_0\rho R_M\hat{y} - k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_E\hat{y} &- k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}S_Ee^{-i\phi}\hat{y}\Big] \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz} =& -i2n_0k_0\rho R_E\hat{x} + i2n_0k_0\rho R_M\hat{y} - k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_E\hat{y} \\ &- k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}S_Ee^{-i\phi}\hat{y} \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz} =& -i2n_0k_0\rho S_E\hat{x} + i2n_0k_0\rho S_M\hat{y} - k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_E\hat{y} \\ &- k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}R_Ee^{i\phi}\hat{y} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Recordando que $R = R_E\hat{y} + R_M\hat{x}$ y $S = S_E\hat{y} + S_M\hat{x}$, se puede expresar:

$$\begin{aligned} i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{d\left(R_M\hat{x} + R_E\hat{y}\right)}{dz} =& -i2n_0k_0\rho R_E\hat{x} + i2n_0k_0\rho R_M\hat{y} - k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_E\hat{y} \\ &- k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}S_Ee^{-i\phi}\hat{y} \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{d\left(S_M\hat{x} + S_E\hat{y}\right)}{dz} =& -i2n_0k_0\rho S_E\hat{x} + i2n_0k_0\rho S_M\hat{y} - k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_E\hat{y} \\ &- k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}R_Ee^{i\phi}\hat{y} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dR_E}{dz} =& i2n_0k_0\rho R_M - k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_E - k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}S_Ee^{-i\phi} \\ i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dR_M}{dz} =& -i2n_0k_0\rho R_E \\ i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS_E}{dz} =& i2n_0k_0\rho S_M - k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_E - k_0^2n_0^4r_{41}E_{SC}\frac{1}{2}R_Ee^{i\phi} \\ i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS_M}{dz} =& -i2n_0k_0\rho S_E \end{aligned} \tag{3.31}$$

teniendo en cuenta la figura 3.1.1 podemos obtener que $\theta_S = -\theta_R$ y simplificando términos en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_E}{dz} =& \frac{\rho}{\cos\theta} R_M + i\frac{1}{2}\frac{k_0 n_0^3 r_{41} E_0}{\cos\theta} R_E + i\frac{1}{2}\frac{k_0 n_0^3 r_{41} E_{SC}}{\cos\theta}\frac{1}{2} S_E e^{-i\phi} \\
\frac{dR_M}{dz} =& -\frac{\rho}{\cos\theta} R_E \\
\frac{dS_E}{dz} =& \frac{\rho}{\cos\theta} S_M + i\frac{1}{2}\frac{k_0 n_0^3 r_{41} E_0}{\cos\theta} S_E + i\frac{1}{2}\frac{k_0 n_0^3 r_{41} E_{SC}}{\cos\theta}\frac{1}{2} R_E e^{i\phi} \\
\frac{dS_M}{dz} =& -\frac{\rho}{\cos\theta} S_E
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Reemplazando la magnitud del vector de onda $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_E}{dz} =& \frac{\rho}{\cos\theta} R_M + i\frac{\pi}{\lambda}\frac{n_0^3 r_{41} E_0}{\cos\theta} R_E + i\frac{\pi}{\lambda}\frac{n_0^3 r_{41} E_{SC}}{\cos\theta}\frac{1}{2} S_E e^{-i\phi} \\
\frac{dR_M}{dz} =& -\frac{\rho}{\cos\theta} R_E \\
\frac{dS_E}{dz} =& \frac{\rho}{\cos\theta} S_M + i\frac{\pi}{\lambda}\frac{n_0^3 r_{41} E_0}{\cos\theta} S_E + i\frac{\pi}{\lambda}\frac{n_0^3 r_{41} E_{SC}}{\cos\theta}\frac{1}{2} R_E e^{i\phi} \\
\frac{dS_M}{dz} =& -\frac{\rho}{\cos\theta} S_E
\end{aligned} \tag{3.33}$$

si definimos:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{41} E_0 \\
C_{SC} &= \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{41} E_{SC}\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

entonces obtenemos el conjunto de ecuaciones acopladas [1,4,44]:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_E}{dz} =& \frac{\rho}{\cos\theta} R_M + i\frac{C_0}{\cos\theta} R_E + i\frac{C_{SC}}{\cos\theta} S_E e^{-i\phi} \\
\frac{dR_M}{dz} =& -\frac{\rho}{\cos\theta} R_E \\
\frac{dS_E}{dz} =& \frac{\rho}{\cos\theta} S_M + i\frac{C_0}{\cos\theta} S_E + i\frac{C_{SC}}{\cos\theta} R_E e^{i\phi} \\
\frac{dS_M}{dz} =& -\frac{\rho}{\cos\theta} S_E
\end{aligned} \tag{3.35}$$

3.2. Análisis de la Eficiencia de Difracción

Este análisis se hace al hallar la eficiencia de difracción a través de la solución de las ecuaciones acopladas usando el método de Runge-Kutta implementado en Matlab.

En la Tabla 3.2.1 encontramos los parámetros utilizados para nuestros cálculos teóricos en un cristal BTO.

Tabla 3.2.1: Parámetros del BTO para nuestros cálculos [1]

Parámetro	BTO
ϵ constante dielectrica	47
n_0 índice de refracción	2,58
r_{41} coeficiente electro-óptico (mV^{-1})	$5{,}1 \times 10^{-12}$
N_A densidad de aceptores (m^{-1})	4×10^{-22}
ρ poder rotatorio ($^{o}cm^{-1}$)	65

3.2.1. En términos del E_0

Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes campos aplicados E_0.

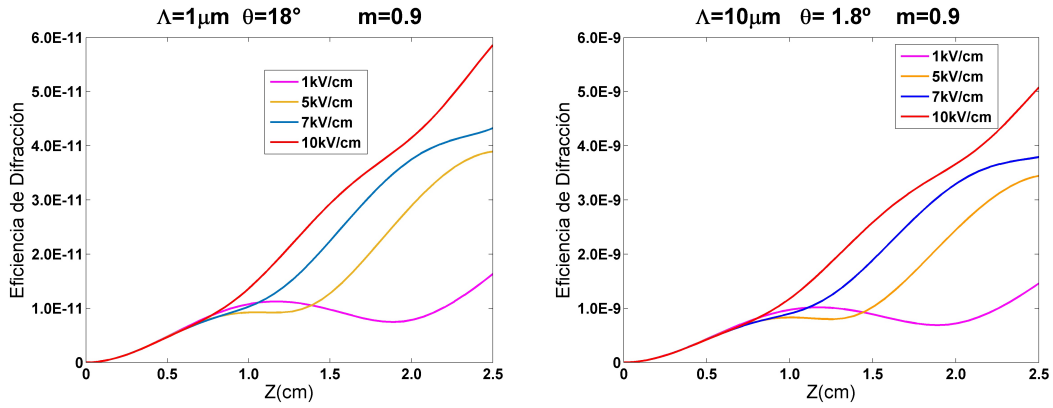

Figura 3.2.1: Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes campos externos aplicados para redes con periodos de: (a)$\Lambda = 1\mu m$, (b)$\lambda = 10\mu m$

En la figura 3.2.1 mostramos la dependencia de la eficiencia de difracción para diferentes campos aplicados en el material BTO cuando se utiliza un haz de lectura de $632{,}8nm$. Los cálculos fueron realizados considerando una red con una modulacion $m = 0{,}9$, periodos de red de $\Lambda = 1\mu m$ y $\Lambda = 10\mu m$. El valor mas grande para ambos periodos de red se observo con un campo de $10kV/cm$ y la menor eficiencia para un campo aplicado de $1kV/cm$, ademas se obtiene un espesor optimo de $2{,}5cm$.

3.2.2. En términos del periodo Λ

Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes periodos Λ.

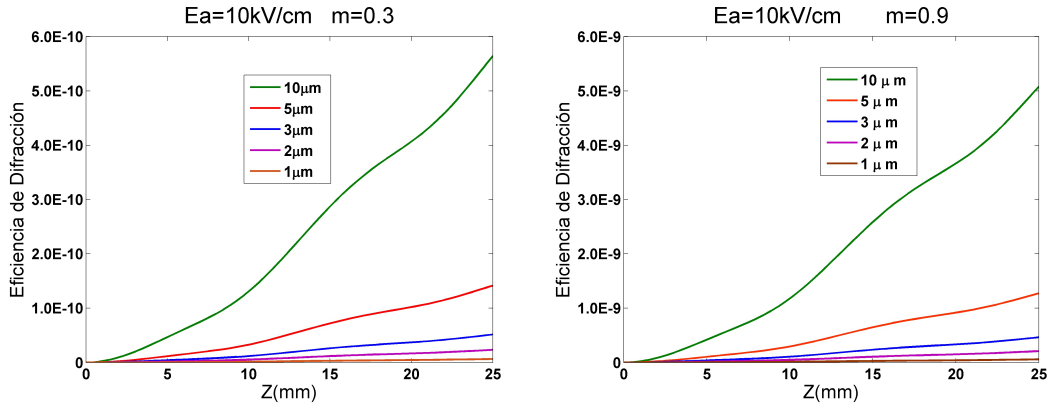

Figura 3.2.2: Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes periodos con $E_0 = 10kV/cm$. (a)$m = 0{,}3$, (b)$m = 0{,}9$.

En la figura 3.2.2 se observa el comportamiento de la eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes periodos de red. Se utiliza un haz de lectura con una longitud de onda de $632{,}8nm$. Los cálculos fueron realizados considerando un campo eléctrico aplicado de $E_0 = 10kV/cm$ y modulaciones de $m = 0{,}3$ y $m = 0{,}9$. En todas las curvas el mayor valor de la eficiencia de difracción ocurrió para periodos de red de $10\mu m$ y el valor más pequeño ocurrió para periodos de red de $1\mu m$, se obtiene mayor eficiencia para un espesor de $25mm$.

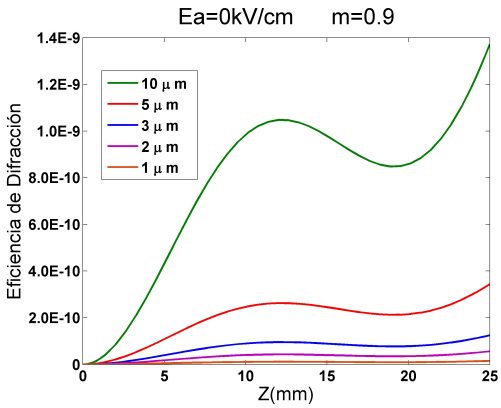

Figura 3.2.3: Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes periodos con $E_0 = 0kV/cm$, $m = 0{,}9$.

En la figura 3.2.3 se observa un comportamiento de la eficiencia de difracción en términos del

espesor del cristal para diferentes periodos de red, con un campo aplicado de $E_0 = 0kV/cm$, una modulacion de $m = 0{,}9$ y utilizando una longitud de onda de $632{,}8nm$. El mayor valor de eficiencia de difracción se obtiene al incrementar el periodo de red.

3.2.3. En términos de la modulación

Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes modulaciones m.

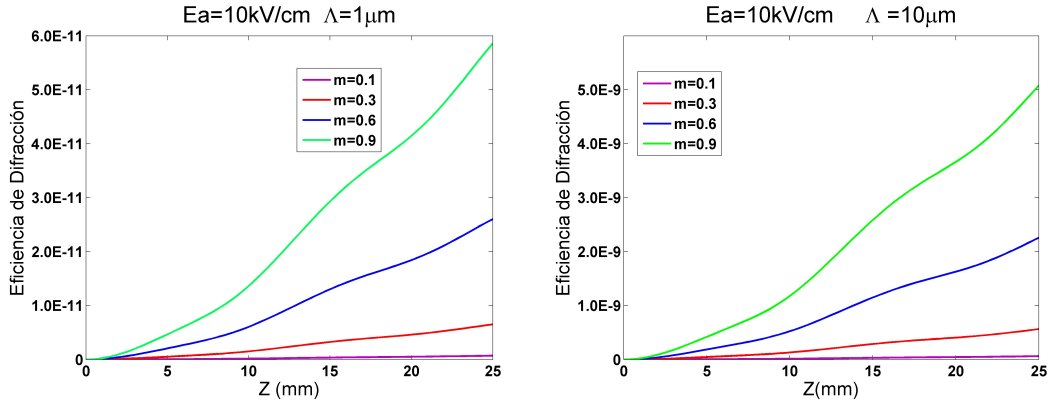

Figura 3.2.4: Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes modulaciones con $E_0 = 10kV/cm$. (a)$\Lambda = 1\mu m$, (b)$\Lambda = 10\mu m$

.

En la figura 3.2.4 mostramos la eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes modulaciones usando un haz de lectura con longitud de onda de $632{,}8nm$. Los cálculos se realizaron considerando periodos de $\Lambda = 1\mu m$ y $\Lambda = 10\mu m$, un campo eléctrico de $E_0 = 10kV/cm$. El valor más grande se observo con una modulacion de $m = 0{,}9$ y a su vez para el periodo más grande si comparamos las curvas (a) y (b).

Capítulo 4

Estudio Fisico-matemático y Análisis de la eficiencia de difracción bajo la configuración transversal

Para encontrar las ecuaciones acopladas de onda para la configuración transversal se realiza un proceso similar al hecho en la configuración longitudinal, ya identificada la ecuación de onda, la relación constitutiva para el medio birrefringente y ópticamente activo y además postulada la función que describe los haces, se obtendrá el conjunto de ecuaciones acopladas con un procedimiento similar.

4.1. Derivación de las ecuaciones acopladas

4.1.1. Ecuaciones de onda acopladas

Se calcula el conjunto de ecuaciones acopladas, para esto lo primero que haremos será hallar el vector desplazamiento en términos del campo eléctrico.
Teniendo en cuenta los estados de polarización a la expresión (2.112) le añadiremos el tensor antisimétrico de la actividad óptica, por lo que se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} D_M \\ D_E \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon & iG - \Delta\epsilon \\ -iG - \Delta\epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_M \\ E_E \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Las componentes del vector desplazamiento eléctrico se pueden expresar:

$$\frac{D_M}{\epsilon_0}\hat{x} = \left(\epsilon E_M + \left(iG - \Delta\epsilon\right) E_E\right)\hat{x} \tag{4.2}$$

$$\frac{D_E}{\epsilon_0}\hat{y} = \left(\left(-\Delta\epsilon - iG\right) E_M + \epsilon E_E\right)\hat{y} \tag{4.3}$$

Reemplazamos los términos G, $\Delta\epsilon$, ϵ, $E_M\hat{x} = R_M\hat{x} + S_M\hat{x}$, $E_E = R_E\hat{y} + S_E\hat{y}$ en el vector desplazamiento, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \Bigg[&n_0^2\left(R_M + S_M\right)\hat{x} + \left(i\frac{2n_0\rho}{k_0} - n_0^4 r_{41}E_x\right)\left(R_E + S_E\right)\hat{x} \\ &- \left(i\frac{2n_0\rho}{k_0} + n_0^4 r_{41}E_x\right)\left(S_M + R_M\right)\hat{y} + n_0^2\left(R_E + S_E\right)\hat{y}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.4}$$

Reemplazando la expresión anterior y el Laplaciano calculado en las ecuaciones (3.14) y (3.15), en la ecuación de onda (3.1), resulta:

$$\begin{aligned}&\underbrace{-\left(n_0k_0\sin\theta_R\right)^2 R\left(z\right)e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}}_{} \underbrace{-\left(n_0k_0\sin\theta_S\right)^2 S\left(z\right)e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}}_{} \underbrace{-\left(n_0k_0\cos\theta_R\right)^2 R\left(z\right)e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}}_{} \\ &+i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\frac{d^2R}{dz^2} \underbrace{-\left(n_0k_0\cos\theta_S\right)^2 S\left(z\right)e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}}_{} \\ &+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\frac{d^2S}{dz^2} + k_0^2\Bigg[\underbrace{n_0^2E_M\hat{x}}_{} + i\frac{2n_0\rho}{k_0}E_E\hat{x} - n_0^4r_{41}E_xE_E\hat{x} \\ &-n_0^4r_{41}E_xE_M\hat{y} - i\frac{2n_0\rho}{k_0}E_M\hat{y} + \underbrace{n_0^2E_E\hat{y}}_{}\Bigg] = 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

Considerando la aproximación de la envolvente lentamente variable despreciamos las derivadas de segundo orden, cancelamos los términos indicados en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} + i2n_0\rho k_0E_E\hat{x} \\ &-k_0^2n_0^4r_{41}E_xE_E\hat{x} - k_0^2n_0^4r_{41}E_xE_M\hat{y} - i2n_0\rho k_0E_M\hat{y} = 0\end{aligned} \tag{4.6}$$

Reemplazando las componentes de los haces:

$$\begin{aligned}&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}} + i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}} + i2n_0\rho k_0\left(R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y} + S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}\right)\hat{x} \\ &-k_0^2n_0^4r_{41}E_x\left(R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y} + S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}\right)\hat{x} - k_0^2n_0^4r_{41}E_x\left(R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x} + S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\right)\hat{y} \\ &-i2n_0\rho k_0\left(R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x} + S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\right)\hat{y} = 0\end{aligned} \tag{4.7}$$

Reemplazando el campo eléctrico inducido de la expresión (3.19) y el $\cos\left(\vec{K_G}\cdot\vec{r}+\phi\right)$ de la expresión (3.20) en la expresión anterior, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0\rho k_0\left(R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\right)\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}\left(E_0+E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)\right)\left(R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\right)\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}\left(E_0+E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)\right)\left(R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\right)\hat{y}\\
&-i2n_0\rho k_0\left(R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\right)\hat{y}=0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Resolviendo el producto, resulta:

$$
\begin{aligned}
&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0\rho k_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}+i2n_0\rho k_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}+e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}\\
&-i2n_0\rho k_0R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}-i2n_0\rho k_0S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}=0
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Operando obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0\rho k_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}+i2n_0\rho k_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{i\phi}+\underbrace{e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i2\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}}\right)R_E\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{i2k_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}}+e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)S_E\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(e^{ik_S\vec{\cdot r}}e^{i\phi}+\underbrace{e^{-i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i2\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}}\right)R_M\hat{y}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{i2k_S\vec{\cdot r}}e^{-i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}}+e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}\right)S_M\hat{y}\\
&-i2n_0\rho k_0R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}-i2n_0\rho k_0S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}=0
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Los términos señalados se desprecian ya que representan ondas que viajan en otras direcciones, por lo que se puede escribir:

$$
\begin{aligned}
&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}+i2n_0\rho k_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}+i2n_0\rho k_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Ee^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{x}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}R_E\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Ee^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{x}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}S_E\hat{x}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}e^{i\phi}R_M\hat{y}\\
&-k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}-k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}e^{-i\phi}S_M\hat{y}\\
&-i2n_0\rho k_0R_Me^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\hat{y}-i2n_0\rho k_0S_Me^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\hat{y}=0
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Agrupando términos semejantes resulta:

$$
\begin{aligned}
&i2n_0k_0\cos\theta_R\frac{dR}{dz}e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}+i2n_0k_0\cos\theta_S\frac{dS}{dz}e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}=e^{i\vec{k_R}\cdot\vec{r}}\left[-i2n_0\rho k_0R_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_E\hat{x}\right.\\
&\left.+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_M\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_M\hat{y}+i2n_0\rho k_0R_M\hat{y}\right]\\
&+e^{i\vec{k_S}\cdot\vec{r}}\left[-i2n_0\rho k_0S_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_M\hat{y}\right.\\
&\left.+k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_M\hat{y}+i2n_0\rho k_0S_M\hat{y}\right]
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Recordando que $R(z)=R_M\hat{x}+R_E\hat{y}$, $S(z)=S_M\hat{x}+S_E\hat{y}$ y que la magnitud de los cosenos son iguales ya que $\theta_S=-\theta_R$, la ecuación se puede expresar como:

$$
\begin{aligned}
i2n_0k_0\cos\theta\frac{d\left(R_M\hat{x}+R_E\hat{y}\right)}{dz}&=-i2n_0\rho k_0R_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_E\hat{x}\\
&+k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_M\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_M\hat{y}+i2n_0\rho k_0R_M\hat{y}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

$$
\begin{aligned}
i2n_0k_0\cos\theta\frac{d\left(S_M\hat{x}+S_E\hat{y}\right)}{dz}&=-i2n_0\rho k_0S_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_E\hat{x}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_E\hat{x}\\
&+k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_M\hat{y}+k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_M\hat{y}+i2n_0\rho k_0S_M\hat{y}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}
i2n_0k_0\cos\theta\frac{dR_M}{dz} &= -i2n_0\rho k_0R_E + k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_E + k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_E \\
i2n_0k_0\cos\theta\frac{dR_E}{dz} &= k_0^2n_0^4r_{41}E_0R_M + k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_M + i2n_0\rho k_0R_M \\
i2n_0k_0\cos\theta\frac{dS_M}{dz} &= -i2n_0\rho k_0S_E + k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_E + k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_E \\
i2n_0k_0\cos\theta\frac{dS_E}{dz} &= k_0^2n_0^4r_{41}E_{sc}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_M + k_0^2n_0^4r_{41}E_0S_M + i2n_0\rho k_0S_M
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Simplificando términos, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_M}{dz} &= -\frac{\rho}{\cos\theta}R_E - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_0}{\cos\theta}R_E - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_{sc}}{\cos\theta}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_E \\
\frac{dR_E}{dz} &= \frac{\rho}{\cos\theta}R_M - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_0}{\cos\theta}R_M - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_{sc}}{\cos\theta}\frac{1}{2}e^{-i\phi}S_M \\
\frac{dS_M}{dz} &= -\frac{\rho}{\cos\theta}S_E - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_0}{\cos\theta}S_E - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_{sc}}{\cos\theta}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_E \\
\frac{dS_E}{dz} &= \frac{\rho}{\cos\theta}S_M - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_0}{\cos\theta}S_M - i\frac{1}{2}\frac{k_0n_0^3r_{41}E_{sc}}{\cos\theta}\frac{1}{2}e^{i\phi}R_M
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Reemplazando $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ y recordando los valores de las expresiones (3.34), nuestro conjunto de ecuaciones acopladas se puede expresar [1, 4, 45]:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_M}{dz} &= -\frac{\rho}{\cos\theta}R_E - i\frac{C_0}{\cos\theta}R_E - i\frac{C_{SC}}{\cos\theta}S_Ee^{-i\phi} \\
\frac{dR_E}{dz} &= \frac{\rho}{\cos\theta}R_M - i\frac{C_0}{\cos\theta}R_M - i\frac{C_{SC}}{\cos\theta}S_Me^{-i\phi} \\
\frac{dS_M}{dz} &= -\frac{\rho}{\cos\theta}S_E - i\frac{C_0}{\cos\theta}S_E - i\frac{C_{SC}}{\cos\theta}R_Ee^{i\phi} \\
\frac{dS_E}{dz} &= \frac{\rho}{\cos\theta}S_M - i\frac{C_0}{\cos\theta}S_M - i\frac{C_{SC}}{\cos\theta}R_Me^{i\phi}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2. Análisis de la Eficiencia de Difracción

El análisis de la eficiencia de difracción se realiza al solucionar el conjunto de ecuaciones acopladas, para esto se usa el método de Runge-Kutta implementado en Matlab, además los parámetros para los cálculos que se encuentran en la tabla 3.2.1.

4.2.1. En términos del E_0

Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes campos aplicados E_0.

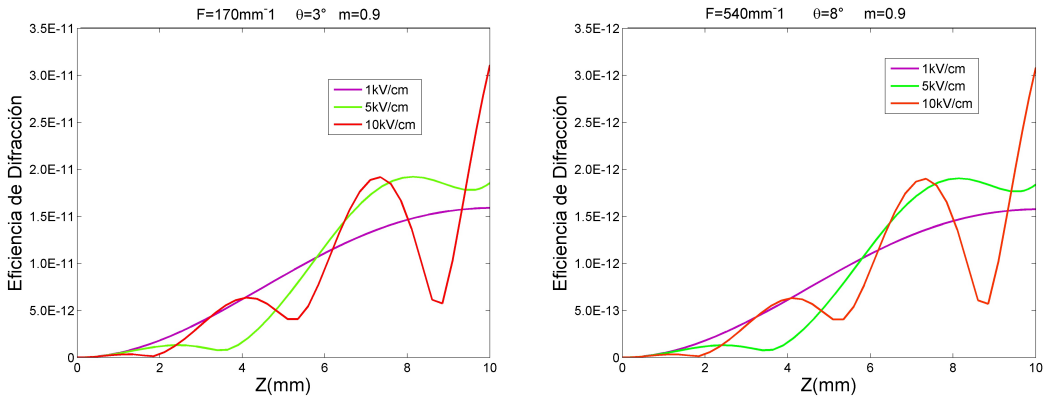

Figura 4.2.1: Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes campos aplicados y $m = 0{,}9$. (a)$F = 170mm^{-1}$, (b)$F = 540mm^{-1}$

En la figura 4.2.1 mostramos el comportamiento de la eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes campos aplicados en un cristal BTO empleando un haz de lectura con una longitud de onda de $632{,}8nm$. En los cálculos consideramos una modulación de $m = 0{,}9$ con frecuencias de $F = 170mm^{-1}$ y $F = 540mm^{-1}$. El valor mas grande se observo con un campo de $10kV/cm$, aunque esta eficiencia presenta un comportamiento fluctuante, la menor eficiencia se obtiene para un campo aplicado de $1kV/cm$ para los dos periodos de red, se puede observar una eficiencia de difracción estable con un campo aplicado de $5kV/cm$.

4.2.2. En términos del periodo Λ

Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes periodos Λ.

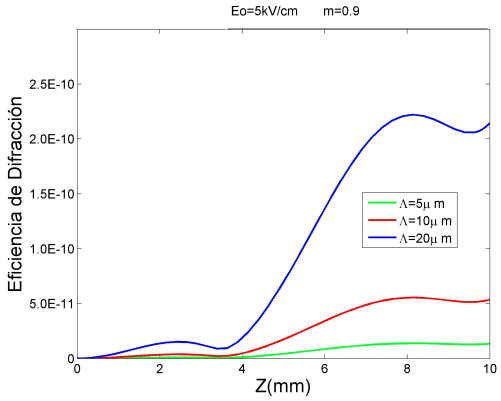

Figura 4.2.2: Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes periodos para $m = 0{,}9$, $E_0 = 5kV/cm$

En la figura 4.2.2 se observa la eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes periodos de red. Se utiliza un haz de lectura con una longitud de onda de $632{,}8nm$. En los cálculos se consideró una modulación de $m = 0{,}9$ y un campo eléctrico aplicado de $E_0 = 5kV/cm$. El mayor valor de la eficiencia de difracción ocurrió para periodos de red de $20\mu m$ y el valor mas pequeño ocurrió para periodos de red de $5\mu m$. El espesor óptimo es de $8mm$ donde presenta la mayor eficiencia de difracción en los tres periodos de red.

4.2.3. En términos de la modulación

Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes modulaciones m.

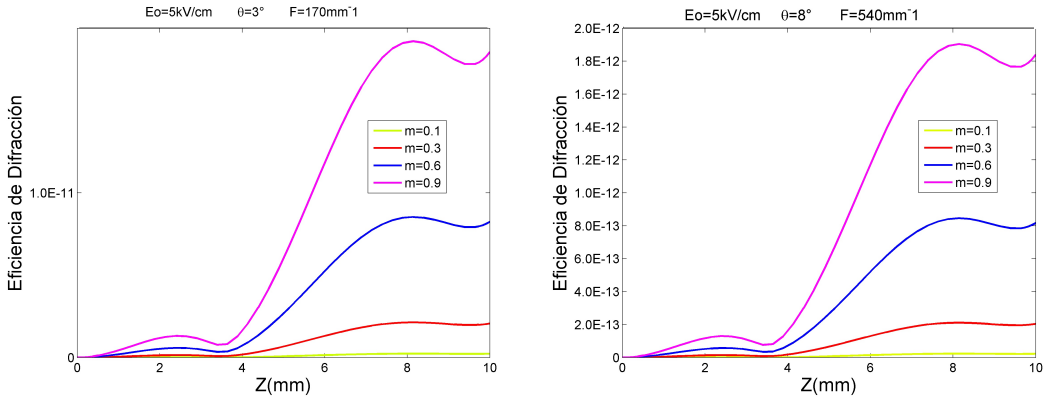

Figura 4.2.3: Eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal con diferentes modulaciones con $E_0 = 5kV/cm$. (a)$F = 170mm^{-1}$, (b)$F = 540mm^{-1}$

En la figura 4.2.3 se observa la eficiencia de difracción en términos del espesor del cristal para diferentes modulaciones. Se utiliza un haz de lectura con una longitud de onda de $632{,}8nm$.

Los cálculos se realizaron considerando frecuencias de $F = 170mm^{-1}$ y $F = 540mm^{-1}$ con un campo eléctrico de $E_0 = 5kV/cm$ el valor más grande se observó en una modulación de $m = 0{,}9$ en las dos curvas y se obtiene un espesor óptimo de $8mm$.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

5.1. Conclusiones

El análisis de la eficiencia de difracción fue realizada para un cristal BTO en las configuraciones holografías longitudinal y transversal, teniendo en cuenta las propiedades del material como la birrefringencia, la actividad óptica, el acoplamiento electro-óptico y parámetros externos tales como: el campo aplicado, ángulo de lectura y la modulación de la luz a la entrada.

- Bajo la configuración longitudinal $K_G \parallel < 001 >$ con un campo aplicado de $10kV/cm$, modulación de $0{,}9$ y un periodo de $10\mu m$ encontramos la mayor eficiencia de difracción en un cristal de $25mm$ de espesor.
- Bajo la configuración transversal $K_G \perp < 001 >$ para un campo aplicado de $5kV/cm$, con modulación de $0{,}9$, es notable que la eficiencia de difracción es mayor para un periodo de $20\mu m$ en un cristal de $8mm$ de espesor .
- En la configuración transversal cuando se varia el campo aplicado, es notable como la eficiencia de difracción es fluctuante para un campo externo aplicado de $10kV/cm$.
- La eficiencia de difracción en las dos configuraciones holográficas aumenta a medida que el campo eléctrico aplicado es mayor, estos resultados eran de esperar debido al mecanismo de transporte de las cargas.

5.2. Perspectivas

- Los resultados obtenidos sugieren continuar con el estudio y revisar el comportamiento de manera experimental, además de realizar una comparación entre las dos configuraciones.
- Otro de los estudios proyectados es un análisis teórico de la eficiencia de difracción en el caso cuasi-degenerado de dos ondas.

Bibliografía

[1] G González, A Zúñiga, and F Magaña. Optimization of the diffraction efficiency in non-uniform gratings in sillenite crystals (bi12sio20 and bi12tio2) considering the variation of fringe period, optical activity and polarization angles in a strong non-linear regime. *Revista mexicana de física*, 55(1):25–31, 2009. VII, 3, 42, 43, 50

[2] P Yeh. *Introduction to photorefractive nonlinear optics*, volume 14. Wiley-Interscience, 1993. VIII, VIII, 1, 7, 9, 22, 60, 61, 62, 69

[3] ML Molina. *Análisis de vibraciones utilizando speckles modulados en cristales fotorrefractivos*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander, 2010. VIII, 3, 16

[4] A Marrakchi, Richard V Johnson, and AR Tanguay. Polarization properties of photorefractive diffraction in electrooptic and optically active sillenite crystals (bragg regime). *JOSA B*, 3(2):321–336, 1986. VIII, VIII, 3, 27, 31, 42, 50

[5] D Pepper, J Feinberg, and N Kukhtarev. The photorefractive effect. *Scientific American*, 263(4):34–40, 1990. 2

[6] Photorefractive Effects. Materials, edited by dd nolte, 1995. 2

[7] P Günter and JP Huignard. Photorefractive effects and materials. In *Photorefractive Materials and their applications I*, pages 7–73. Springer, 1988. 2, 3

[8] P Günter, JP Huignard, and AM Glass. *Photorefractive materials and their applications*, volume 2. Springer, 1989. 2, 3

[9] K Sutter and P Günter. Photorefractive gratings in the organic crystal 2-cyclooctylamino-5-nitropyridine doped with 7, 7, 8, 8-tetracyanoquinodimethane. *JOSA B*, 7(12):2274–2278, 1990. 2

[10] S Ducharme, JC Scott, RJ Twieg, and WE Moerner. Observation of the photorefractive effect in a polymer. *Physical review letters*, 66(14):1846, 1991. 2

[11] C Gu, Y Xu, Y Liu, JJ Pan, F Zhou, and H He. Applications of photorefractive materials in information storage, processing and communication. *Optical Materials*, 23(1):219–227, 2003. 2

[12] G Unnikrishnan, J Joseph, and K Singh. Optical encryption system that uses phase conjugation in a photorefractive crystal. *Applied Optics*, 37(35):8181–8186, 1998. 2

[13] M Singh, A Kumar, and K Singh. Secure optical system that uses fully phase-based encryption and lithium niobate crystal as phase contrast filter for decryption. *Optics & Laser Technology*, 40(4):619–624, 2008. 2

[14] V Jerez. *Grabado de hologramas fotorrefractivos a altas temperaturas*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander, 2011. 2, 6

[15] LF Magana, I Casar, and JG Murillo. Beam energy exchange in sillenite crystals (bi 12 sio 20 and bi 12 tio 20), considering the variation of light modulation along sample thickness in a strong non-linear regime. *Optical Materials*, 30(6):979–986, 2008. 2

[16] MR Gesualdi, M Muramatsu, and EA Barbosa. Light-induced lens analysis in photorefractive crystals employing phase-shifting real-time holographic interferometry. *Optics Communications*, 281(23):5739–5744, 2008. 3

[17] H Kogelnik. Coupled wave theory for thick hologram gratings. *Bell System Technical Journal*, 48(9):2909–2947, 1969. 3

[18] JH Hong and R Saxena. Diffraction efficiency of volume holograms written by coupled beams. *Optics letters*, 16(3):180–182, 1991. 3

[19] ML Molina, V Jerez, and MC Lasprilla. Medida de la eficiencia de difracción fotorrefractiva como función del vector onda de la red en un cristal bi 12 tio 20. *Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas*, 9(2), 2011. 3

[20] ML Hsieh, WC Chen, HY Chen, and SY Lin. Optimization of light diffraction efficiency and its enhancement from a doped-pmma volume holographic material. *Optics Communications*, 308:121–124, 2013. 3

[21] L Sahu, JS Achary, and SK Tripathy. Optimization of diffraction efficiency and polarization dependence loss in photopolymer grating for use in multichip module. 2012. 3

[22] ML Molina, M Tebaldi, and N Bolognini. Eficiencia de difracción del registro de speckle modulados generados a partir de superficies reflecto-difusoras. *Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas*, 10(2), 2013. 3

[23] L.M. Castro J. Rueda, L. Guerra. Eficiencia en difracción en redes fotorrefractivas en bi12sio20, en términos de tres casos de manipulación del plano de polarización de los haces de registro. *Bistua*, 2010. 3

[24] JE Parada. Óptica no lineal fotorrefractiva en el reconocimiento de patrones. 5

[25] G Ramos. *Materiales híbridos orgánicos-inorgánicos preparados por el método Sol-Gel para aplicaciones holográficas*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 2010. 5

[26] F Fernández and A Sastre-Santos. Materiales fotorrefractivos orgánicos. In *Anales de la Real Sociedad Española de Química*, number 1, pages 5–13. Real Sociedad Española de Química, 2002. 5

[27] GF Forte. *Estudio de generación de autoimágenes a partir de redes de volumen*. PhD thesis, Facultad de Ciencias Exactas, 2014. 6

[28] D Gulich. www. damiangulich. com. ar. 6

[29] FS Chen. Optically induced change of refractive indices in linbo3 and litao3. *Journal of applied physics*, 40(8):3389–3396, 1969. 6

[30] JJ Amodei. Electron diffusion effects during hologram recording in crystals. *Applied Physics Letters*, 18(1):22–24, 1971. 6

[31] D Von der Linde, AM Glass, and KF Rodgers. High- sensitivity optical recording in ktn by two- photon absorption. *Applied Physics Letters*, 26(1):22–24, 1975. 6

[32] MP Petrov, AV Khomenko, VI Berezkin, and MV Krasinkova. Optical information recording in bi12sio20. *Ferroelectrics*, 22(1):651–652, 1978. 6

[33] JP Herriau, JP Huignard, and P Aubourg. Some polarization properties of volume holograms in bi 12 sio 20 crystals and applications. *Applied optics*, 17(12):1851–1852, 1978. 6

[34] NV Kukhtarev, VB Markov, SG Odulov, MS Soskin, and VL Vinetskii. Holographic storage in electrooptic crystals. i. steady state. *Ferroelectrics*, 22(1):949–960, 1978. 6

[35] J Feinberg, D Heiman, AR Tanguay Jr, and RW Hellwarth. Photorefractive effects and light-induced charge migration in barium titanate. *Journal of Applied Physics*, 51(3):1297–1305, 1980. 6

[36] MC Lasprilla. *Registros en cristales fotorrefractivos BSO*. PhD thesis, Facultad de Ciencias Exactas, 1996. 7

[37] J Mendoza. Mezcla de ondas en materiales fotorrefractivos. Master's thesis, Universidad de Pamplona. 9

[38] LM. Castro. Estudio de condiciones experimentales para la mezcla de ondas en cristales fotorrefractivos. Master's thesis, Universidad de Pamplona. 9

[39] GS He and SH Liu. *Physics of nonlinear optics*, volume 216. World Scientific, 1999. 10

[40] J Casas. Optica. librería general. *Zaragoza*, 1994. 23

[41] BY Martinez. Modulación de coherencia óptica con dispositivos electro-ópticos con aplicaciones en detección de campos eléctricos. 2012. 23

[42] L Solymar, DJ Webb, and A Grunnet-Jepsen. *The physics and applications of photorefractive materials*, volume 11. Clarendon Press, 1996. 23

[43] J Frejlich. *Photorefractive materials: fundamental concepts, holographic recording and materials characterization*. John Wiley & Sons, 2007. 26

[44] G Velazquez. Efecto del ángulo de polarización en la ganancia y eficiencia de difracción en el cristal de bso (caso paralelo), 2013. 42

[45] IR Corrales. Efecto del ángulo de polarización en la eficiencia de difracción en un cristal bso (caso perpendicular), 2013. 50

Apéndice A

Anexo

A.1. Eficiencia de difracción

A.1.1. Propagación en medios periódicos

Mucho de los fenómenos importantes y útiles asociados con efectos fotorrefractivos involucran la dispersión de la luz desde redes u hologramas formados en cristales fotorrefractivos. Esto incluye mezclados de ondas, conjugación de fase u holografía dinámica, etc. Las redes u hologramas en estos medios son manifestados como una variación en el índice de refracción [2].

Medio Periódico

Generalmente hablando, los medios periódicos son cualquier estructura cuya constante dieléctrica reflejando la simetría translacional, son funciones periódicas de posición.

$$\epsilon\left(\vec{x}\right) = \epsilon\left(\vec{x} + \vec{a}\right) \tag{A.1}$$

Donde $\vec{a}$ es un vector constante. En el caso de un medio periódico unidimensional, la ecuación (A.1) llega a ser:

$$\epsilon\left(z\right) = \epsilon\left(z + \Lambda\right) \tag{A.2}$$

O escrita de otra forma:

$$n^2\left(z\right) = n^2\left(z + \Lambda\right) \tag{A.3}$$

donde z es la medida de la posición y Λ es la periodicidad.
Un material fotorrefractivo puede a ser un medio periódico tal que el índice de refracción es

modulado periódicamente. Esto puede ser alcanzado con la iluminación de luz con un patrón de intensidad periódico espacialmente. El índice de refracción del medio es a menudo escrito como:

$$n(z) = n_0 + n_1 p(z) \tag{A.4}$$

donde n_0 es el índice de refracción del material sin modulación espacial, n_1 la amplitud de modulación del índice y $p(z)$ en una función de periodicidad en z.
Consideremos la dispersión de una onda plana monocromática, donde el índice de modulación es un arreglo de planos equidistantes como el dibujado en la figura A.1.1.
Asumamos que estos planos son infinitos tal que la reflexión de estos, es especular. Cada uno de los planos refleja solamente una pequeña fracción de la onda plana incidente.
Los haces difractados se encuentran cuando todas estas ondas planas reflejadas se adicionan

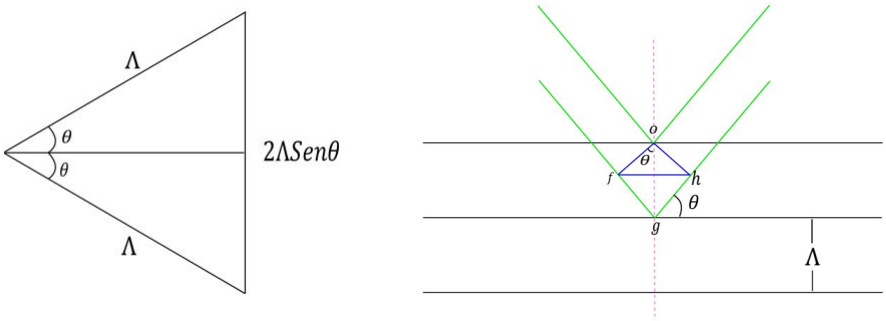

Figura A.1.1: Dispersión de una onda plana monocromática [2]

constructivamente.
La diferencia de trayectoria de los rayos reflejados desde dos planos adyacentes es $2\Lambda \sin\theta$, donde θ es el ángulo entre los rayos y los planos.
La interferencia constructiva ocurre cuando la diferencia de camino es un número entero de longitudes de onda $\frac{\lambda}{n}$ en el medio

$$2\Lambda \sin\theta = N\frac{\lambda}{n} \tag{A.5}$$

cuando n es el índice de refracción promediado espacialmente del medio y N es un número entero.
Esto es conocido como la Ley de Bragg. Aunque la reflexión de cada plano es especular, la difracción de los haces ocurre solamente para ciertos valores de θ los cuales obedecen la ley de Bragg tal que las reflexiones de todos los planos se adicionen en fase.
La ecuación (A.5) puede ser escrita como:

$$2\frac{n}{\lambda}\sin\theta = \frac{N}{\Lambda}$$

$$2\frac{2\pi n}{\lambda}\sin\theta = N\frac{2\pi}{\Lambda}$$
$$2k\sin\theta = N\frac{2\pi}{\Lambda} \tag{A.6}$$

donde k es el número de onda en el medio, $\frac{2\pi}{\Lambda}$ es el número de onda de la red y es a menudo conocido como K.
En el lado izquierdo de nuestra ecuación $2k\sin\theta$,es el cambio del vector de onda en la difracción del medio periódico. Esta ley de Bragg puede ser interpretada como simplemente la conservación del momentum.
En la difracción del medio periódico, el cambio del vector de onda es exactamente un número entero del vector de onda de la red.

Teoría de modos acoplados

Consideremos un medio periódico con índice de refracción dado por:

$$n = n_0 + n_1\cos Kz \tag{A.7}$$

donde n_0 y n_1 son constantes y K es el número de onda de red. Asumimos que la variación de los índices es puramente sinusoidal.
Sea el campo eléctrico de las ondas incidentes y difractadas escritas como:

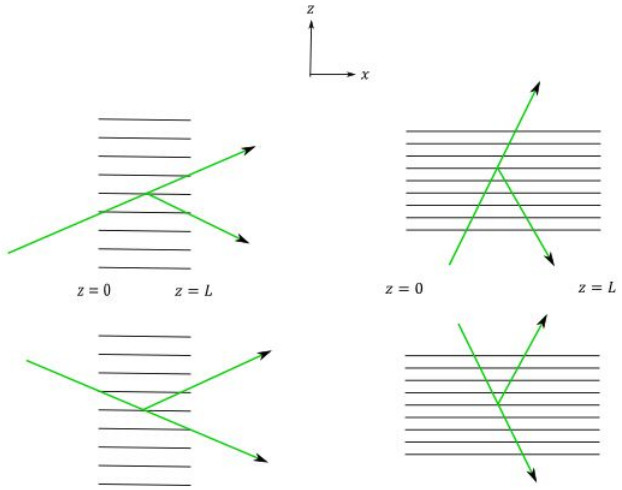

Figura A.1.2: Configuraciones a) Redes de transmisión. b) Redes de reflexión [2]

.

$$E = A_1\exp\left[i\left(wt - \vec{k}_1\cdot\vec{r}\right)\right] + A_2\exp\left[i\left(wt - \vec{k}_2\cdot\vec{r}\right)\right] \tag{A.8}$$

donde w es la frecuencia de las ondas de luz, A_1 y A_2 son las amplitudes de las ondas, $\vec{k}_1$ y $\vec{k}_2$ son los vectores de onda.
Aquí asumiremos que los campos eléctricos son polarizados a lo largo del eje y. Ellos son llamados ondas transversales eléctricas debido a que los vectores campo eléctrico son perpendiculares al plano de incidencia (plano xz).
Los vectores de onda están relacionados a la frecuencia angular por:

$$|k_1| = |k_2| = n_0 \frac{w}{c} \tag{A.9}$$

En la presencia de una variación periódica de índice de refracción, las dos ondas son acopladas y las amplitudes A_1 y A_2 son funciones de posición.
Sea el plano xz, el plano de incidencia. La conservación de k_2 deba estar en este plano. El campo eléctrico está escrito por:

$$E = A_1 \exp\left[i\left(wt - \alpha_1 x - \beta_1 z\right)\right] + A_2 \exp\left[i\left(wt - \alpha_2 x - \beta_2 z\right)\right] \tag{A.10}$$

donde α_1 y α_2 son componentes del vector onda, k_1 y k_2 en x, así mismo β_1 y β_2 son las componentes en z.

Redes de Transmisión

La condición de Bragg necesaria para acoplamiento fuerte requiere que el ángulo entre el haz de lectura y el frente de onda de la red sea pequeña.
Por simplicidad en el análisis de acoplamiento, asumiremos que la red es infinita en la dirección z, tal que las amplitudes A_1 y A_2 son funciones de x como es requerido por las condiciones de límites.
Ahora sustituiremos la ecuación (A.10) en la siguiente ecuación de onda:

$$\left(\nabla^2 + n^2 \frac{w^2}{c^2}\right) E = 0 \tag{A.11}$$

donde n es el índice de refracción de la ecuación A.7.
Reemplazando la ecuación (A.10) y (A.7) en la ecuación de onda, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\nabla^2 + \left(n_0 + n_1 \cos Kz\right)^2 \frac{w^2}{c^2}\right) \\ &A_1 \exp\left[i\left(wt - \alpha_1 x - \beta_1 z\right)\right] + A_2 \exp\left[i\left(wt - \alpha_2 x - \beta_2 z\right)\right] \end{aligned} \tag{A.12}$$

Se calcula el Laplaciano, derivando con respecto a x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} = &\exp -i\left(\alpha_1 x + \beta_1 z\right) \frac{dA_1}{dx} - iA_1\alpha_1 \exp -i\left(\alpha_1 x + \beta_1 z\right) \\ &+ \exp -i\left(\alpha_2 x + \beta_2 z\right) \frac{dA_2}{dx} - iA_2\alpha_2 \exp -i\left(\alpha_2 x + \beta_2 z\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)\\ =& e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)}\frac{d^2A_1}{dx^2} - iA_1\alpha_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)}\\ & - iA_1\alpha_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + (-i\alpha_1)^2 A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)}\\ & e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\frac{d^2A_2}{dx^2} - iA_2\alpha_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\\ & - iA_2\alpha_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)} + (-i\alpha_2)^2 A_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\end{aligned} \tag{A.13}$$

Ahora calcularemos la derivada de E con respecto a z:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = A_1\left(-i\beta_1\right)e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + A_2\left(-i\beta_2\right)e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} =& \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)\\ =& A_1\left(-i\beta_1\right)^2 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + A_2\left(-i\beta_2\right)^2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\end{aligned} \tag{A.14}$$

Desarrollando el binomio cuadrado del término de el índice de refracción:

$$\left(n_0 + n_1\cos Kz\right)^2 = n_0^2 + 2n_0n_1\cos Kz + n_1^2\cos^2 Kz \tag{A.15}$$

Reemplazando las ecuaciones (A.13), (A.14) y (A.15) en la ecuación (A.12), obtenemos:

$$\begin{aligned}0 =& e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)}\frac{d^2A_1}{dx^2} - i2\frac{dA_1}{dx}\alpha_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + (-i\alpha_1)^2 A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)}\\ & + e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\frac{d^2A_2}{dx^2} - i2\frac{dA_2}{dx}\alpha_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)} + (-i\alpha_2)^2 A_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\\ & + A_1\left(-i\beta_1\right)^2 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + A_2\left(-i\beta_2\right)^2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\\ & + \left((n_0^2 + 2n_0n_1\cos Kz + n_1^2\cos^2 Kz)\frac{w^2}{c^2}\right)\left[A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\right]\end{aligned} \tag{A.16}$$

Reordenando la expresión:

$$\begin{aligned}& - \left((n_0^2 + 2n_0n_1\cos Kz + n_1^2\cos^2 Kz)\frac{w^2}{c^2}\right)\left[A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\right]\\ =& e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)}\left[\frac{d^2A_1}{dx^2} - i2\alpha_1\frac{dA_1}{dx} - A_1\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{k^2n_0^2}\right]\\ & + e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\left[\frac{d^2A_2}{dx^2} - i2\alpha_2\frac{dA_2}{dx} - A_2\frac{\alpha_2^2+\beta_2^2}{k^2n_0^2}\right]\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1,2}\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2i\alpha_j\frac{d}{dx}\right)A_j\right]e^{-i(\alpha_j x+\beta_j z)} =& -2n_0n_1\cos Kz\\ & \frac{w^2}{c^2}\sum_{j=1,2}A_j e^{-i(\alpha_j x+\beta_j z)}\end{aligned} \tag{A.18}$$

Omitimos el término de segundo orden de $n_1^2 \cos^2 Ks$ el cual es del orden de 10^{-4} comparado con $n_0 n_1$. Las derivadas de segundo orden pueden también omitirse por la misma razón, por lo que nos queda:

$$-2i\alpha_1 \frac{dA_1}{dx} e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} - 2i\alpha_2 \frac{dA_2}{dx} e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)} = -2n_0 n_1 \cos Kz \frac{w^2}{c^2} \left[A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\right] \quad \text{(A.19)}$$

Reemplazamos el coseno en valores de Euler:

$$-2i\alpha_1 \frac{dA_1}{dx} e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} - 2i\alpha_2 \frac{dA_2}{dx} e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)} = -n_0 n_1 \left[e^{iKz} + e^{-iKz}\right] \frac{w^2}{c^2} \left[A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}\right] \quad \text{(A.20)}$$

Desarrollando el producto de la parte derecha y multiplicando la ecuación anterior por el término $e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)}$, resulta:

$$\begin{aligned} -2i\alpha_1 \frac{dA_1}{dx} e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z)} - 2i\alpha_2 \frac{dA_2}{dx} e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)} = &-\frac{w^2}{c^2} n_0 n_1 \left[A_1 e^{-i(2\alpha_1 x+2\beta_1 z+Kz)}\right. \\ &+A_1 e^{-i(2\alpha_1 x+2\beta_1 z-Kz)} + A_2 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z+\alpha_2 x+\beta_2 z+Kz)} \\ &\left.+A_2 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z+\alpha_2 x+\beta_2 z-Kz)}\right] \end{aligned} \quad \text{(A.21)}$$

Integrando con respecto a z y reemplazando $\beta_2 = K + \beta_1$ en el término derecho de la igualdad:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{dA_1}{dx} e^{-i2(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + \frac{2\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\frac{dA_2}{dx} e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z+\alpha_2 x+\beta_2 z)} = -\frac{w^2}{c^2} n_0 n_1 \left[\frac{A_1}{\beta_1+\beta_2} e^{-i(2\alpha_1 x+\beta_1 z+\beta_2 z)} \frac{A_2}{\beta_2} e^{-i(\alpha_1 x+\alpha_2 x+2\beta_2 z)}\right] \quad \text{(A.22)}$$

Organizando la expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = &\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{dA_1}{dx} + i\frac{w^2}{c^2} n_0 n_1 \frac{A_2}{\beta_2} e^{-i(\alpha_2 x-\alpha_1 x-2\beta_1 z+2\beta_2 z)}\right] e^{-i2(\alpha_1 x+\beta_1 z)} + \left[\frac{2\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\frac{dA_2}{dx}\right. \\ &\left.+i\frac{w^2}{c^2} n_0 n_1 \frac{A_1}{\beta_1+\beta_2} e^{-i(\alpha_1 x-\alpha_2 x)}\right] e^{-i(\alpha_1 x+\alpha_2 x+\beta_1 z+\beta_2 z)} \end{aligned} \quad \text{(A.23)}$$

El término izquierdo de la igualdad se desprecia por ser una onda que viaja en otra dirección, reemplazando la ecuación A.9 y $\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha$, resulta:

$$\alpha_2 \frac{dA_2}{dx} = -i\frac{k^2}{n_0}\frac{n_1}{2} A_1 e^{\Delta\alpha x} \quad \text{(A.24)}$$

Para continuar con el calculo de las ecuaciones acopladas se necesita saber el valor de $\Delta\alpha$, que se conoce por geometría.

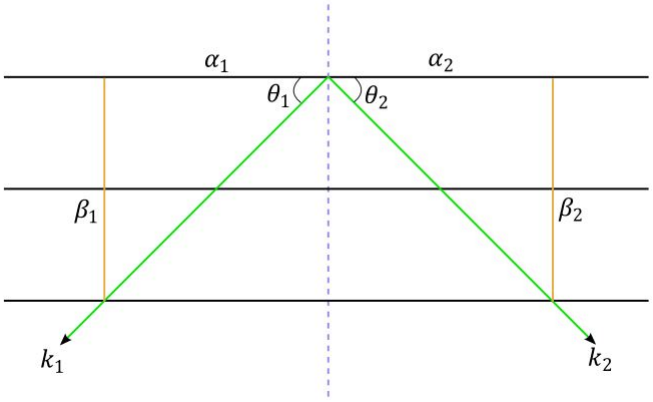

Figura A.1.3: Geometría de los haces. $\alpha_{1,2}$ son las componentes x, $\beta_{1,2}$ son las componentes z de los vectores de onda $k_{1,2}$ y $\theta_{1,2}$ son los ángulos de incidencia

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \cos\theta_1 \\ \alpha_2 &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \cos\theta_2 \\ \beta_1 &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \sin\theta_1 \\ \beta_2 &= \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \sin\theta_2\end{aligned} \tag{A.25}$$

Reemplazando el valor de k, α_2 y simplificando, obtenemos:

$$\frac{dA_2}{dx} = -i\frac{\pi n_1}{\lambda \cos_{\theta_2}} A_1 e^{i\Delta\alpha x} \tag{A.26}$$

Recordando la ecuación (A.20), desarrollando el producto de la parte derecha de la igualdad y multiplicando por $e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2 z)}$, resulta:

$$\begin{aligned}-2i\alpha_1\frac{dA_1}{dx}e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z+\alpha_2 x+\beta_2 z)} - 2i\alpha_2\frac{dA_2}{dx}e^{-i(2\alpha_2 x+\beta_2 z)} = -\frac{w^2}{c^2}n_0 n_1 \big[A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z+\alpha_2 x+\beta_2 z+Kz)} \\ +A_1 e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z+\alpha_2 x+\beta_{2z}-Kz)} + A_2 e^{-i(2\alpha_2 x+2\beta_2 z+Kz)} + A_2 e^{-i(2\alpha_2 x+2\beta_2 z-Kz)}\big]\end{aligned} \tag{A.27}$$

Integrando esta expresión con respecto a z y reemplazando $K = \beta_1 - \beta_2$:

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha_1}{\beta_1+\beta_2}\frac{dA_1}{dx}e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1 z+\alpha_2 x+\beta_2 z)} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{dA_2}{dx}e^{-i(2\alpha_2 x+\beta_2 z)} = -i\frac{w^2}{c^2}n_0 n_1 \left[\frac{A_1}{2\beta_1}e^{-i(\alpha_1 x+\alpha_2 x+\beta_1 z)}\right. \\ \left.\frac{A_2}{\beta_1+\beta_2}e^{-i(2\alpha_2 x+\beta_1 z+\beta_2 z)}\right]\end{aligned} \tag{A.28}$$

Organizando la ecuación anterior, obtenemos:

$$0 = \left[\frac{2\alpha_1}{\beta_1+\beta_2}\frac{dA_1}{dx} + i\frac{w^2}{c^2}n_0 n_1 \frac{A_2}{\beta_1+\beta_2}e^{-i(\alpha_2 x-\alpha_1 x)}\right] e^{-i(\alpha_1 x+\alpha_2 x+\beta_1 z+\beta_2 z)} + \left[\frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{dA_2}{dx} + i\frac{w^2}{c^2}n_0 n_1 \frac{A_1}{2\beta_1}e^{-i(\alpha_2 x-\alpha_1 x-\beta_1 z+2\beta_2 z)}\right] e^{-2i(\alpha_2 x+\beta_2 z)} \tag{A.29}$$

El término derecho de la igualdad se desprecia por ser una onda que viaja en otra dirección, reemplazando la ecuación (A.9) y $\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha$, resulta:

$$2\frac{dA_1}{dx} = -i\frac{k^2}{n_0}\frac{n_1}{\alpha_1}A_2 e^{-i\Delta\alpha x} \tag{A.30}$$

Reemplazando el valor de k, α_1 y simplificando, obtenemos:

$$\frac{dA_1}{dx} = -i\frac{\pi n_1}{\lambda\cos\theta_1}A_2 e^{-i\Delta\alpha x} \tag{A.31}$$

Las expresiones (A.26) y (A.31) son las ecuaciones acopladas, de ellas resulta:

$$\begin{aligned} k_{12} &= \frac{\pi n_1}{\lambda\cos\theta_1} \\ k_{21} &= \frac{\pi n_1}{\lambda\cos\theta_2} \end{aligned} \tag{A.32}$$

Además el término $e^{-i\Delta\alpha x}$ es el desajuste de momemtum. De la relación $\beta_2 = \beta_1 \pm K$ se puede obtener:

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_1 \pm \frac{\lambda}{\Lambda n_0} \tag{A.33}$$

A partir de las ecuaciones (A.26) y (A.31) se estudiaran dos casos para $\Delta\alpha$

Primer caso donde $\Delta\alpha = 0$

$$\Delta\alpha = 0 \rightarrow \theta_1 = -\theta_2 \tag{A.34}$$

De la ecuación A.33 se puede obtener el ángulo de Bragg:

$$\theta_B = \theta_1 = -\theta_2 = \sin^{-1}\frac{\lambda}{2\Lambda n_0} \tag{A.35}$$

Observando las ecuaciones acopladas quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} &= -ikA_2 \\ \frac{dA_2}{dx} &= -ikA_1 \end{aligned} \tag{A.36}$$

Se resolverá las ecuaciones diferenciales, se utiliza el método de separación de variables, se toma la segunda expresión y despejamos el término A_1, la primera expresión es integrada, así igualamos estas dos:

$$\begin{aligned} A_1 =& \frac{i}{k}\frac{dA_2}{dx} \\ \frac{dA_1}{dx} = -ikA_2 \rightarrow & \int dA_1 = -\int ikA_2 dx \\ A_1 =& \frac{i}{k}\frac{dA_2}{dx} = -ikA_2 x \\ \int \frac{dA_2}{A_2} =& (-ik)^2 \int x dx \\ Ln\left(A_2\right) = (-ik)^2 \frac{x^2}{2} \rightarrow & 2Ln\left(A_2\right) = (-ik)^2 x^2 \\ A_2 =& e^{-ikx} \\ A_2\left(x\right) =& C_1 \cos kx - iC_2 \sin kx \\ A_2\left(0\right) =& C_1 \end{aligned} \tag{A.37}$$

De la misma forma se encuentra la solución para A_1, que es:

$$\begin{aligned} A_1\left(x\right) =& C_2 \cos kx - iC_1 \sin kx \\ A_1\left(0\right) =& C_2 \end{aligned} \tag{A.38}$$

En el caso especial donde $x = 0$ y $A_2\left(0\right) = 0$, las soluciones son:

$$\begin{aligned} A_1\left(x\right) &= A_1\left(0\right)\cos kx \\ A_2\left(x\right) &= -iA_1\left(0\right)\sin kx \end{aligned} \tag{A.39}$$

Por lo que se podrá calcular:

$$\left|A_1\left(x\right)\right|^2 + \left|A_2\left(x\right)\right|^2 = \left|A_1\left(0\right)\cos kx\right|^2 + \left|-iA_1\left(0\right)\sin kx\right|^2 = \left|A_1\left(0\right)\right|^2 \tag{A.40}$$

La transferencia de energía se mide con una cantidad denominada eficiencia de difracción.

$$\eta = \frac{I_{dif}}{I_{inc}} = \frac{\left|A_2\left(L\right)\right|^2}{\left|A_1\left(0\right)\right|^2} \tag{A.41}$$

Reemplazando las amplitudes de las ecuaciones (A.39), obtenemos:

$$\eta = \frac{A_1^2\left(0\right)\sin^2 kL}{A_1^2\left(0\right)} = \sin^2 kL = \sin^2 \frac{\pi n_1}{\lambda \cos\theta_B} L \tag{A.42}$$

donde n_1 es la amplitud de modulación del índice, θ_B es el ángulo de Bragg, α es la longitud de onda y L es el espesor del cristal.

Segundo caso donde $\Delta\alpha \neq 0$

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{2n_0\pi}{\lambda}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) \tag{A.43}$$

Se puede encontrar los valores del ángulo de Bragg:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\theta_B + \Delta\theta \\ \theta_2 &= \theta_B + \Delta\theta\end{aligned} \tag{A.44}$$

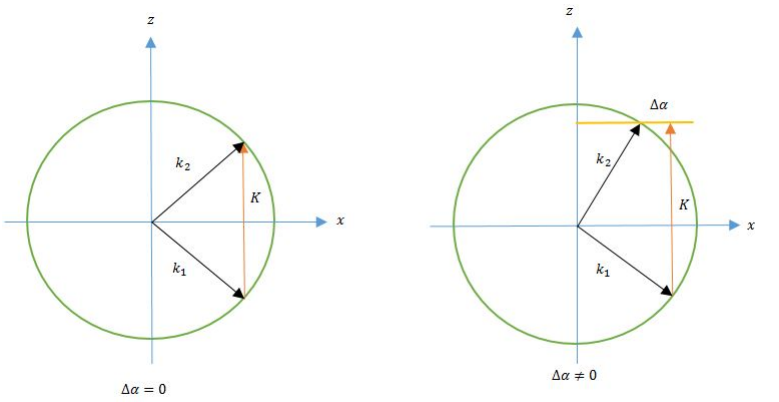

Figura A.1.4: (a)Regimen on-Bragg, (b)Regimen off-Bragg [2]

$$\Delta\alpha = -2\left(\frac{2\pi n_0}{\lambda}\right)\Delta\theta\sin\theta_B = -K\Delta\theta \tag{A.45}$$

Tomando las ecuaciones acopladas (A.26) y (A.31) con las expresiones (A.32), obtenemos:

$$\frac{dA_1}{dx} = -ik_{12}A_2e^{-i\Delta\alpha x} \tag{A.46}$$

$$\frac{dA_2}{dx} = -ik_{21}A_1e^{i\Delta\alpha x} \tag{A.47}$$

De la ecuación (A.46) despejamos A_2, se deriva con respecto a x e igualamos con la ecuación (A.47)

$$-k_{21}A_1 = \frac{1}{k_{12}}\frac{d^2A_1}{dx^2} + i\frac{\Delta\alpha}{k_{12}}\frac{dA_1}{dx} \tag{A.48}$$

Esta expresión es multiplicada por k_{12} e igualada a cero.

$$\frac{d^2A_1}{dx^2} + i\Delta\alpha\frac{dA_1}{dx} + KA_1 = 0 \tag{A.49}$$

Donde:

$$K = k_{12}k_{21} = \left[\frac{\pi n_1}{\lambda}\right]^2 \frac{1}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} \tag{A.50}$$

Una solución general para la ecuación A.49 es:

$$A_1(x) = e^{i\frac{\Delta\alpha x}{2}} \left[C_1 \sin sx + C_2 \cos sx\right] \tag{A.51}$$

donde C_1 y C_2 son constantes y $s^2 = K^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)^2$. Para A_2 la solución es:

$$A_2(x) = e^{i\frac{\Delta\alpha x}{2}} \left\{ \left[\frac{\Delta\alpha}{2k_{12}} C_1 - \frac{is}{k_{12}} C_2\right] \sin sx + \left[\frac{is}{k_{12}} C_1 + \frac{\Delta\alpha}{2k_{12}} C_2\right] \cos sx \right\} \tag{A.52}$$

Con el objetivo de obtener los valores de C_1 y C_2, se toma la ecuación (A.51) y se deriva con respecto a x, ese resultado es reemplazado en la expresión (A.46), obtenemos:

$$\begin{aligned} -ik_{12}A_2 =& e^{i\Delta\alpha x} \left\{ e^{-i\frac{\Delta\alpha x}{2}} \left[-i\frac{\Delta\alpha}{2} C_1 \sin sx - sC_1 \cos sx \right.\right. \\ & \left.\left. -i\frac{\Delta\alpha}{2} C_2 \cos sx - sC_2 \sin sx \right] \right\} \end{aligned} \tag{A.53}$$

Por lo que se tiene la expresión de A_2 en función de x:

$$A_2(x) = e^{i\frac{\Delta\alpha x}{2}} \left[\sin sx \left(\frac{\Delta\alpha}{2k_{12}} C_1 - \frac{is}{k_{12}} C_2\right) + \cos sx \left(\frac{is}{k_{12}} C_1 + \frac{\Delta\alpha}{2k_{12}} C_2\right)\right] \tag{A.54}$$

Se hallaran los valores para C_1 y C_2.

$$\begin{aligned} A_1(0) &= C_2 \\ \frac{i\Delta\alpha}{2s} A_1(0) &= C_1 \end{aligned} \tag{A.55}$$

Introducimos los valores de C_1 y C_2, para $A_1(x)$ y $A_2(x)$

$$A_1(x) = A_1(0)\, e^{-i\frac{\Delta\alpha x}{2}} \left[i\frac{\Delta\alpha}{2s} \sin sx + \cos sx\right] \tag{A.56}$$

$$A_2(x) = -iA_1(0)\, e^{i\frac{\Delta\alpha x}{2}} \frac{k_{21}}{s} \sin sx \tag{A.57}$$

La eficiencia de difracción para este caso esta definida por:

$$\eta = \frac{|A_2(L)|^2 \cos\theta_2}{|A_1(0)|^2 \cos\theta_1} \tag{A.58}$$

$$\eta = \frac{-i^2 \left|A_1\left(0\right)\right|^2 e^{i\Delta\alpha L} k_{21}^2 \sin^2 Ls \cos\theta_2}{\left|A_1\left(0\right)\right|^2 s^2 \cos\theta_1} = \frac{K^2}{K^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{2}^2\right)} \sin^2 \left[LK \left(1 + \left(\frac{\Delta\alpha}{sK} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tag{A.59}$$

Se muestra que la transferencia de la eficiencia de difracción nunca puede ser completa. Este es un resultado que surge de la falta de ajuste en el impulso η_{max} se puede escribir:

$$\eta_{max} = \frac{K^2}{K^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{2}^2\right)} \tag{A.60}$$

A.2. Tensor Electro-óptico en términos de los sistemas de propagación

A.2.1. Configuración Longitudinal

Tomando la sumatoria de la ecuación (2.106) y hallando las componentes del tensor electro-óptico en el sistema coordenado de propagación:

$$\begin{aligned}
r_{11} = r_{111} =& r_{41} \left(a_{11}a_{12}a_{13} + a_{11}a_{13}a_{22} + a_{12}a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + a_{13}a_{11}a_{22} \right. \\
&\left. + a_{13}a_{12}a_{21}\right) = 0 \\
r_{12} = r_{112} =& r_{41} \left(a_{11}a_{12}a_{23} + a_{11}a_{13}a_{22} + a_{12}a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + a_{13}a_{11}a_{22} \right. \\
&\left. + a_{13}a_{12}a_{21}\right) = 0 \\
r_{13} = r_{113} =& r_{41} \left(a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32} \right. \\
&\left. + a_{13}a_{12}a_{31}\right) = 0 \\
r_{21} = r_{221} =& r_{41} \left(a_{21}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{23}a_{12} + a_{22}a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23}a_{11} + a_{23}a_{21}a_{12} \right. \\
&\left. + a_{23}a_{22}a_{11}\right) = r_{41} \\
r_{22} = r_{222} =& r_{41} \left(a_{21}a_{22}a_{23} + a_{21}a_{23}a_{22} + a_{22}a_{21}a_{23} + a_{22}a_{23}a_{21} + a_{23}a_{21}a_{22} \right. \\
&\left. + a_{23}a_{22}a_{21}\right) = 0 \\
r_{23} = r_{223} =& r_{41} \left(a_{21}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{21}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32} \right. \\
&\left. + a_{23}a_{22}a_{31}\right) = 0 \\
r_{31} = r_{331} =& r_{41} \left(a_{31}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{33}a_{12} + a_{32}a_{31}a_{13} + a_{32}a_{33}a_{11} + a_{33}a_{31}a_{12} \right. \\
&\left. + a_{33}a_{32}a_{11}\right) = -r_{41}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{32} = r_{332} =& r_{41}\left(a_{31}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{33}a_{22} + a_{32}a_{31}a_{23} + a_{32}a_{33}a_{21} + a_{33}a_{31}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{33}a_{32}a_{21}\right) = 0\\
r_{33} = r_{333} =& r_{41}\left(a_{31}a_{32}a_{33} + a_{31}a_{33}a_{32} + a_{32}a_{31}a_{33} + a_{32}a_{33}a_{31} + a_{33}a_{31}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{33}a_{32}a_{31}\right) = 0\\
r_{41} = r_{231} =& r_{41}\left(a_{21}a_{32}a_{13} + a_{21}a_{33}a_{12} + a_{22}a_{31}a_{13} + a_{22}a_{33}a_{11} + a_{23}a_{31}a_{12}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{32}a_{11}\right) = 0\\
r_{42} = r_{232} =& r_{41}\left(a_{21}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{33}a_{22} + a_{22}a_{31}a_{23} + a_{22}a_{33}a_{21} + a_{23}a_{31}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{32}a_{21}\right) = 0\\
r_{43} = r_{233} =& r_{41}\left(a_{21}a_{32}a_{33} + a_{21}a_{33}a_{32} + a_{22}a_{31}a_{33} + a_{22}a_{33}a_{31} + a_{23}a_{31}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{32}a_{31}\right) = 0\\
r_{51} = r_{131} =& r_{41}\left(a_{11}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{33}a_{12} + a_{12}a_{31}a_{13} + a_{12}a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31}a_{12}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{32}a_{11}\right) = 0\\
r_{52} = r_{132} =& r_{41}\left(a_{11}a_{32}a_{23} + a_{11}a_{33}a_{22} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{12}a_{33}a_{21} + a_{13}a_{31}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{32}a_{21}\right) = 0\\
r_{53} = r_{133} =& r_{41}\left(a_{11}a_{32}a_{33} + a_{11}a_{33}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{33} + a_{12}a_{33}a_{31} + a_{13}a_{31}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{32}a_{31}\right) = -r_{41}\\
r_{61} = r_{121} =& r_{41}\left(a_{11}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{12} + a_{12}a_{21}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{22}a_{11}\right) = 0\\
r_{62} = r_{122} =& r_{41}\left(a_{11}a_{22}a_{23} + a_{11}a_{23}a_{22} + a_{12}a_{21}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{22}a_{21}\right) = r_{41}\\
r_{63} = r_{123} =& r_{41}\left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{22}a_{31}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{A.61}
$$

Por lo que el tensor se expresa:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0\\
r_{41} & 0 & 0\\
-r_{41} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -r_{41}\\
0 & r_{41} & 0
\end{bmatrix}
\tag{A.62}
$$

A.2.2. Configuración Transversal

Tomando la sumatoria de la ecuación (2.106) y hallando las componentes del tensor electro-óptico en el sistema coordenado de propagación en la configuración transversal:

$$
\begin{aligned}
r_{11} = r_{111} =& r_{41}\left(a_{11}a_{12}a_{13} + a_{11}a_{13}a_{22} + a_{12}a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + a_{13}a_{11}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{12}a_{21}\right) = 0\\
r_{12} = r_{112} =& r_{41}\left(a_{11}a_{12}a_{23} + a_{11}a_{13}a_{22} + a_{12}a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + a_{13}a_{11}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{12}a_{21}\right) = -r_{41}\\
r_{13} = r_{113} =& r_{41}\left(a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{12}a_{31}\right) = 0\\
r_{21} = r_{221} =& r_{41}\left(a_{21}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{23}a_{12} + a_{22}a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23}a_{11} + a_{23}a_{21}a_{12}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{22}a_{11}\right) = 0\\
r_{22} = r_{222} =& r_{41}\left(a_{21}a_{22}a_{23} + a_{21}a_{23}a_{22} + a_{22}a_{21}a_{23} + a_{22}a_{23}a_{21} + a_{23}a_{21}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{22}a_{21}\right) = 0\\
r_{23} = r_{223} =& r_{41}\left(a_{21}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{21}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{22}a_{31}\right) = 0\\
r_{31} = r_{331} =& r_{41}\left(a_{31}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{33}a_{12} + a_{32}a_{31}a_{13} + a_{32}a_{33}a_{11} + a_{33}a_{31}a_{12}\right.\\
&\left. + a_{33}a_{32}a_{11}\right) = 0\\
r_{32} = r_{332} =& r_{41}\left(a_{31}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{33}a_{22} + a_{32}a_{31}a_{23} + a_{32}a_{33}a_{21} + a_{33}a_{31}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{33}a_{32}a_{21}\right) = r_{41}\\
r_{33} = r_{333} =& r_{41}\left(a_{31}a_{32}a_{33} + a_{31}a_{33}a_{32} + a_{32}a_{31}a_{33} + a_{32}a_{33}a_{31} + a_{33}a_{31}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{33}a_{32}a_{31}\right) = 0\\
r_{41} = r_{231} =& r_{41}\left(a_{21}a_{32}a_{13} + a_{21}a_{33}a_{12} + a_{22}a_{31}a_{13} + a_{22}a_{33}a_{11} + a_{23}a_{31}a_{12}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{32}a_{11}\right) = 0\\
r_{42} = r_{232} =& r_{41}\left(a_{21}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{33}a_{22} + a_{22}a_{31}a_{23} + a_{22}a_{33}a_{21} + a_{23}a_{31}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{32}a_{21}\right) = 0\\
r_{43} = r_{233} =& r_{41}\left(a_{21}a_{32}a_{33} + a_{21}a_{33}a_{32} + a_{22}a_{31}a_{33} + a_{22}a_{33}a_{31} + a_{23}a_{31}a_{32}\right.\\
&\left. + a_{23}a_{32}a_{31}\right) = r_{41}\\
r_{51} = r_{131} =& r_{41}\left(a_{11}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{33}a_{12} + a_{12}a_{31}a_{13} + a_{12}a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31}a_{12}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{32}a_{11}\right) = 0\\
r_{52} = r_{132} =& r_{41}\left(a_{11}a_{32}a_{23} + a_{11}a_{33}a_{22} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{12}a_{33}a_{21} + a_{13}a_{31}a_{22}\right.\\
&\left. + a_{13}a_{32}a_{21}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{53} = r_{133} =& r_{41}\left(a_{11}a_{32}a_{33} + a_{11}a_{33}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{33} + a_{12}a_{33}a_{31} + a_{13}a_{31}a_{32}\right. \\
&\left. + a_{13}a_{32}a_{31}\right) = 0 \\
r_{61} = r_{121} =& r_{41}\left(a_{11}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{12} + a_{12}a_{21}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12}\right. \\
&\left. + a_{13}a_{22}a_{11}\right) = -r_{41} \\
r_{62} = r_{122} =& r_{41}\left(a_{11}a_{22}a_{23} + a_{11}a_{23}a_{22} + a_{12}a_{21}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{22}\right. \\
&\left. + a_{13}a_{22}a_{21}\right) = 0 \\
r_{63} = r_{123} =& r_{41}\left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right. \\
&\left. + a_{13}a_{22}a_{31}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{A.63}
$$

Por lo que el tensor electro-óptico se puede expresar:

$$
\begin{bmatrix}
0 & -r_{41} & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & r_{41} & 0 \\
0 & 0 & r_{41} \\
0 & 0 & 0 \\
-r_{41} & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{A.64}
$$