

*DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA*

*FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS*

*UNIVERSIDAD DE PAMPLONA*

---

*“ Fuerza de Casimir en el espacio-tiempo de Sitter, una posible aplicación para un hipotético universo nanométrico ”*

---



*TRABAJO DE MAESTRÍA*

*Presentado por:*

*Fís. ALEXÁNDER CONTRERAS ROA*

*Dirigida por:*

*Ph.D. JAIRO ALONSO MENDOZA SUÁREZ*

*Pamplona, semestre II, 2015.*



*Título*

*“ Fuerza de Casimir en el espacio-tiempo de Sitter, una posible aplicación para un hipotético universo nanométrico ”*

*Autor*

*Jorge Alexander Contreras Roa\**

*Director*

*Dr: Jairo Alonso Mendoza Suárez*

*Universidad de Pamplona*

*Facultad de Ciencias Básicas*

*Departamento de Física*

*Colombia 2015*

---

*\* Electronic address: [alexandercr007@gmail.com](mailto:alexandercr007@gmail.com)*



## *AGRADECIMIENTOS*

---

Antes que cualquier cosa, primero quiero dar a conocer mis más sinceros agradecimientos a todas las personas y entidades, sin las que nunca hubiese sido posible realizar y concluir mis estudios de segundo ciclo, en breve, alcanzar el título de Magister en Física. En especial deseo expresar mi gratitud al Dr: Jairo Alonso Mendoza Suárez quien fue mi formador de pregrado y maestría; hoy es mi director de tesis, aceptando de una manera desinteresada guiarme durante todo el proceso de mi investigación, también fue quien me apoyó en la decisión de tomar el presente reto como trabajo de maestría.

Agradezco a mi querida Universidad de Pamplona, no sólo por brindarme la oportunidad de llevar a cabo mis estudios de pregrado y postgrado, sino también por apoyar y creer en programas tan fundamentales como lo son las ciencias básicas. Expreso mi gratitud a todos los docentes que además de aportarme sus experiencias académicas me aportaron su riqueza personal, la cual hoy en día no se toma en cuenta, pero sí que es muy importante. En especial quiero agradecerle a todos los docentes del Departamento de Física y Geología, a quienes les debo mis conocimientos. Para iniciar en el mundo una aventura como esta, se debe traer consigo un proceso, una motivación, por lo cual considero justo y necesario agradecer el legado que me dejó mi segunda casa académica, el Colegio Universitario José Rafael Faría Bermúdez, el cual junto con su valiosa nómina de profesores me inculcó gran parte de mi formación como persona.

También quiero agradecer, en general, a toda mi familia que siempre se preocupó por mi bienestar, quienes me apoyaron y confiaron ciegamente en mí. Agradezco a todos mis compañeros con los cuales viví esta aventura y a todas las personas que de una u otra forma me ofrecieron su colaboración. Agradezco a Dios por tan importante éxito personal. Por último, quiero que sepan que este triunfo no es mío, es de todos ustedes gracias a sus bondadosos actos, esto jamás se olvida, en mi memoria prevalecerán, tal vez no será suficiente pero es mi deber decirles humildemente, mil y mil gracias.

*Diciembre del 2015,    Alexánder Contreras*

*“De la nada surgen personitas que con su existir alegran y hallan sentido a nuestra propia vida y a la de las personas cercanas”. El Dios absoluto y Universo te bendigan hija:*

*Kimslyht Alescía*



## *RESUMEN*

---

A partir de la investigación sobre el efecto Casimir, se halló hipotéticamente la posibilidad de obtener una extensión de la fuerza de fluctuación estándar del vacío. Esencialmente, al interior de la cavidad nanométrica, se insertó un dominio máximamente simétrico promovido por el espacio-tiempo de Sitter; idealmente, ello proporcionó condiciones óptimas para la simulación de un universo justo y compatible a las dimensiones del vacío de Casimir. Puesto que éste último, mantuvo su naturalidad y a su vez permitió modificar su geometría plana por un contorno curvilíneo constante.

A parte de la consideración nanométrica sobre las dimensiones del contorno del universo, otra característica fundamental en el trabajo, fue la preferencia de un universo no masivo al interior del vacío de Casimir. Bajo las anteriores circunstancias, el acoplé o ligadura del efecto Casimir y el espacio-tiempo de Sitter se hizo a través de la regularización del tensor energía-esfuerzos. Finalmente, el respectivo proceso condujo a obtener una fuerza de Casimir-Sitter efectiva de significado dual, atractiva para condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann y repulsiva para condiciones mixtas de Dirichlet-Neumann.

# ÍNDICE GENERAL

---

---

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>EFFECTO CASIMIR</b>	<b>7</b>
2.1	Energía del punto cero (ZPE) . . . . .	8
2.2	Cálculo de Casimir, Fuerza Entre Dos Placas . . . . .	9
2.3	Evidencia Experimental del Efecto Casimir . . . . .	20
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTOS DE RELATIVIDAD GENERAL</b>	<b>25</b>
3.1	Álgebra Tensorial en Coordenadas Polares . . . . .	25
3.1.1	Bases de coordenadas polares y vectoriales . . . . .	26
3.1.2	Derivadas de vectores base . . . . .	28
3.2	Símbolos de Christoffel . . . . .	28
3.2.1	Derivada covariante . . . . .	29
3.2.2	Implicaciones de los Símbolos de Christoffel sobre el tensor métrico . . . . .	31
3.2.3	Cálculo de los Símbolos de Christoffel desde la Métrica . . . . .	33
3.3	Tensor Curvatura de Riemann . . . . .	34

3.3.1	<i>Transporte Paralelo</i> . . . . .	34
3.3.2	<i>Geodésicas</i> . . . . .	35
3.3.3	<i>Tensor Curvatura</i> . . . . .	36
3.3.4	<i>Tensor Curvatura y la métrica</i> . . . . .	39
3.4	<i>Identidades de Bianchi, Tensor y Escalar de Ricci</i> . . . . .	41
3.5	<i>Tensor y ecuación de campo de Einstein</i> . . . . .	42
3.6	<i>Métrica y su determinante</i> . . . . .	44
<b>4</b>	<b><i>ESPACIO-TIEMPO DE SITTER</i></b>	<b>49</b>
4.1	<i>Dimensiones extras tipo Kaluza-Klein</i> . . . . .	51
4.2	<i>Espacios Máximamente Simétricos</i> . . . . .	55
4.2.1	<i>Simetrías y Vectores de Killing</i> . . . . .	56
4.3	<i>Homogeneidad e Isotropía de un espacio máximamente simétrico</i> . . . . .	60
4.4	<i>Espacios de curvatura constante</i> . . . . .	61
4.4.1	<i>Espacio euclídeo <math>\mathbb{R}^n</math></i> . . . . .	61
4.4.2	<i>Esfera <math>n</math> dimensional <math>S^n</math></i> . . . . .	65
4.4.3	<i>Espacio de Minkowski <math>n</math>-dimensional <math>\mathbb{M}_n</math></i> . . . . .	69
4.4.4	<i>Espacios hiperbólicos <math>n</math>-dimensionales <math>\mathbb{H}_n</math></i> . . . . .	73
4.5	<i>Espacio-tiempo de Sitter (<math>dS</math>)</i> . . . . .	78
<b>5</b>	<b><i>FUERZA DE CASIMIR EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SITTER</i></b>	<b>86</b>
5.1	<i>Tensor energía-esfuerzos en el vacío de Casimir</i> . . . . .	87

5.1.1	<i>Regularización del tensor <math>T^{\mu\nu}</math></i>	87
5.2	<i>Efecto Casimir como una estructura variacional, campo escalar no masivo</i>	90
5.3	<i>Principio de conservación del tensor energía-esfuerzos</i>	91
5.4	<i>Métrica de Sitter evaluada en el Tensor energía-esfuerzos</i>	93
5.5	<i>Fuerza de Casimir en el espacio-tiempo de Sitter</i>	94
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO</b>	<b>105</b>
A.1	<i>Hamiltoniano electromagnético para el vacío clásico</i>	105
A.2	<i>Hamiltoniano Electromagnético para el vacío cuántico</i>	111
A.3	<i>Estado Vacío, Energía del Punto Cero</i>	117
	<b>APÉNDICES</b>	<b>105</b>
<b>B</b>	<b>POZO DE POTENCIAL, NORMALIZACIÓN DE FUNCIONES Y FÓRMULA DE EULER-MACLAURIN</b>	<b>119</b>
B.1	<i>Pozo de potencial</i>	119
B.2	<i>Normalización de funciones</i>	122
B.3	<i>Fórmula de Euler-Maclaurin</i>	123
<b>C</b>	<b>CINEMÁTICA RELATIVISTA</b>	<b>126</b>
C.1	<i>Derivación General de las Transformaciones de Lorentz</i>	126
C.2	<i>Regla de adición de velocidades de Einstein</i>	130

---

C.3	<i>Cuadri-Vectores Posición y Velocidad . . . . .</i>	133
C.4	<i>Cuadri-vectores Momentum y Fuerza . . . . .</i>	136
C.5	<i>Electrodinámica Relativista . . . . .</i>	139
C.5.1	<i>Antecedentes de la electrodinámica . . . . .</i>	139
C.5.2	<i>Campo Electromagnético Relativista . . . . .</i>	140
C.5.3	<i>Tensor electromagnético . . . . .</i>	151
<b>D</b>	<b><i>ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON</i></b>	<b>153</b>
<b>E</b>	<b><i>ESCALAR DE CURVATURA DE LA ESFERA <math>S^2</math></i></b>	<b>155</b>
	<b><i>REFERENCIAS</i></b>	<b>157</b>



---

# INTRODUCCIÓN

---

Observaciones astronómicas recientes de radiación cósmica de fondo han indicado claramente que nuestro Universo se acelera (con constante cosmológica positiva  $\Lambda$ )[1][2][3]. Ahora, si el universo, como así lo parece, está siendo acelerado continuamente, la cosmología conllevará al modelo asintótico “Universo de Sitter” ( $dS$ )[4][5][6][7]. Al respecto, la intriga en la comunidad científica es conocer el por qué el Universo se expande y/o ¿cuál es la fuente de interacción?. Sin duda alguna la complejidad del Universo implica que éste siempre sea un tema abierto; particularmente, siendo selectivos sobre las innumerables teorías que puedan existir para solvencia de ello, resulta compatible aplicar a la mencionada *Energía Oscura*[8][9][10], puesto que bajo su constante perseverancia, ésta última pareciera ser la más indicada.

Brevemente, la Energía Oscura es una forma de materia invisible (oscura) o energía que estaría presente en todo el espacio-tiempo, produciendo una presión que tiende a acelerar al Universo y le aleja de su centro de gravedad, hecho producido por una fuerza gravitacional (aparentemente) repulsiva. Considerar la existencia de la energía oscura es la manera más frecuente de explicar las observaciones recientes, concluyendo así que el Universo parece estar en expansión acelerada. Aclarando además, que en el modelo estándar de la cosmología, la energía oscura aporta casi tres cuartas partes de la masa y/o energía total del Universo.[9][10]

Por otra parte, y en correspondencia, un descubrimiento propio e interesante de la física cuántica aconteció en el año 1948 en los laboratorios Philips y fue reconocido como el *Efecto Casimir*[11]. El simple hecho de concederse inestabilizar el vacío electromagnético (generar fluctuaciones en la energía del punto cero, que estén habilitadas por el principio de incertidumbre de Heissemberg), puede conducir a hallar una nueva clase de fenómenos físicos[8][12]. El Efecto Casimir ha estado siempre rodeado de un halo

de misterio porque designa una fuerza del vacío, de la nada; y sin embargo, es medible experimentalmente[8][11][13][14]. A grandes rasgos, la versión estándar del hallazgo asegura la atracción de dos placas conductoras paralelas separadas nanométricamente.[8]

Ahora, sin duda alguna el efecto Casimir compete a una escala microscópica; sin embargo, hipotéticamente, pareciera que dicho fenómeno pudiese extenderse a nivel macroscópico[8], induciendo importantes implicaciones en todas las escalas, desde sub-nucleares hasta cosmológicas. Por consiguiente, el Efecto Casimir, sin importar que sea aplicado microscópicamente, pero igual de forma apropiada (por lo menos para la presente memoria) quizás dé, así sea mínimamente, contribuciones fundamentales a la solución hipotética del problema relacionado con la expansión del Universo.

No obstante, el objetivo del presente trabajo no es muy ambicioso, simplemente se pretende involucrar al efecto Casimir de naturalidad cuántica a un dominio espacio-temporal propio de la teoría de la relatividad y observar posibles implicaciones. En beneficio de ello, un rasgo particular de la fuerza de Casimir en el vacío, depende de la naturaleza del campo, sobre el tipo de variedad espacio-tiempo, la geometría del contorno, y las condiciones iniciales impuestas sobre el campo. Luego, para satisfacer ésta premisa, en breve, tan sólo bastaría involucrar al tensor energía-esfuerzos ( $T^{\mu\nu}$ ) e insertar en él la variación energética del vacío de Casimir ( $\pi^2\hbar cA/720d^3$ ) y fuerza de Casimir ( $\pi^2\hbar cA/240d^4$ ).[13][14]

En otras palabras, éste último párrafo refiere a la obtención de un resultado más general, que bajo ciertas condiciones específicas (acople en el espacio-tiempo asintótico de Sitter, adopción de curvatura para espacios máximamente simétricos, ingreso del radio  $a$  del universo, uso de los contornos de Dirichlet-Neumann, entre otros) desprenda en definitiva otro tipo de fuerza (atractiva o repulsiva), pero que a su vez reúna parámetros estándar propios del efecto Casimir[4][7]. Quizás, hipotéticamente, bajo la mayor simpleza que exista (o circunstancias ideales), teóricamente se simule un primer modelo no riguroso de un universo de radio  $a$  y de particularidad nanométrica; de esa forma se anhela que la hipótesis quede abierta y en siguientes trabajos relacionados sea corroborada y generalizada aún más, ello basta con el ingresar el sin fin de variables y parámetros que la complejidad de un universo exige, y a primera vista, la fundamental de ellas será aplicarlo a nivel macroscópico y aún así el efecto Casimir funcione.

*“La verdad del universo no estoy muy seguro, pero a través de Einstein puedo escuchar pensar a Dios”... (Eddington)*





*“La verdad es algo que se puede intentar dudar, y entonces,  
quizás, después de mucho esfuerzo, descubrir  
que parte de la duda es injustificada”.*  
*Niel's Bohr*



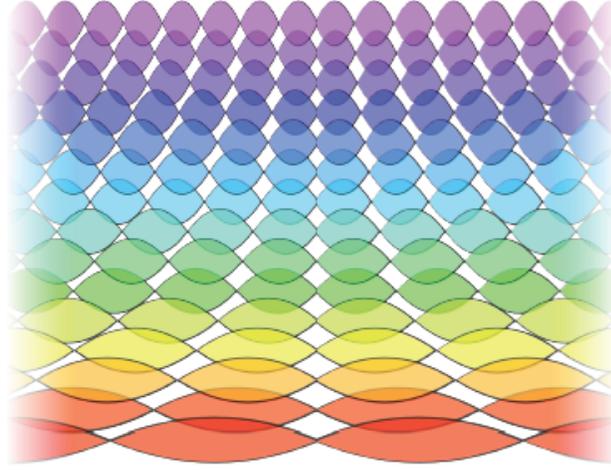
---

## *EFEECTO CASIMIR*

---

El Efecto Casimir es la manifestación más palpable que se conoce de las fluctuaciones de energía que se producen en el estado vacío de un sistema cuántico por acción de condiciones externas[8]. A priori, Feynman y Bohr predijeron que el vacío cuántico puede generar fluctuaciones de energía (habilitadas por el principio de incertidumbre de Heisenberg) que en determinadas circunstancias actúan sobre objetos materiales ordinarios. Así lo corroboró Hendrik Casimir en 1948 para dos placas metálicas paralelas separadas nanométricamente, a las que las fluctuaciones del vacío, por la diferencia de presión que ejerce sobre su adverso y reverso, tienden a acercar entre sí.[8][14]

En el presente capítulo se evidencia en detalle el efecto Casimir, bajo un soporte teórico que define la versión básica originalmente propuesta por Hendrik, en la cual se requiere como anticipo, hallar la respectiva cuantización del campo electromagnético y la energía del punto cero, tal que el propósito sea obtener la “Variación de la Energía del Punto Cero” y en inferencia obtener la interesante “Fuerza de Casimir”. Finalmente, se cierra el capítulo con una sección dedicada a la evidencia experimental del efecto, donde se cita en específico el experimento de Lamoreaux y otros importantes experimentos que comprueban rotundamente la existencia del fenómeno como tal. *Véase a continuación el Efecto Casimir: “La Fuerza de la Nada”...*



**Figura 2.1:** Concepto de vacío desde una perspectiva de la física cuántica. Representación de modos de vibración para cada frecuencia electromagnética en el espacio; todos los osciladores cuánticos están acoplados y generan isotropía, homogeneidad y estabilidad en la distribución del campo electromagnético.[13]

## 2.1 Energía del punto cero (ZPE)

De acuerdo a la deducción del Apéndice A, se observa que formalmente el campo electromagnético puede ser considerado como una colección de osciladores armónicos independientes; cuales, incluso, pueden presentarse bajo el uso de mínima energía posible, así como se muestra en la Figura 2.1. En ese enfoque, la densidad de energía electromagnética es determinada como un número de modos (osciladores) en un rango de frecuencia específico multiplicado por un promedio de energía. Particularmente, para el vacío cuántico, la expresión de mínima energía que define al espacio o universo a contener un número infinito de modos de radiación (cada uno con una energía finita  $\hbar\omega/2$ ) se conoce como la *Energía del punto cero* (ZPE):[19]

$$\langle E \rangle_{ZPE} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_k \hbar\omega \quad (2.1)$$

Luego, si la energía  $\langle E \rangle_{ZPE}$  representa el valor esperado del Hamiltoniano  $\hat{H}$  aplicado sobre el estado vacío  $|0\rangle$ , y a su vez éste resultado define el estado de mínima energía posible (véase Apéndice A), entonces, ¿habría posibilidad de que dicho valor energético varíe?. Al respecto, cabe resaltar que probables fluctuaciones del vacío siempre estarán habilitadas por el *Principio de Incertidumbre de Heisemberg* ( $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$ ),[19] que

establece la imposibilidad intrínseca de determinar simultáneamente dos magnitudes físicas complementarias del sistema, tal como lo son las parejas posición-momentum y energía-tiempo. La compatibilidad del principio de incertidumbre de Heisenberg con la energía  $E_{ZPE}$ , se observa cuando ésta energía mínima es proporcional a la mitad de la frecuencia (para  $\hat{N}|0\rangle = 0$ ) y no nula como se supone en la filosofía del vacío clásico, estableciendo de esta manera el límite universal de la indeterminación. En la siguiente sección se justificará la posible existencia de fluctuaciones energéticas del vacío presentadas bajo ciertas condiciones físicas, repercusión que ha sido medible experimentalmente.

## 2.2 Cálculo de Casimir, Fuerza Entre Dos Placas

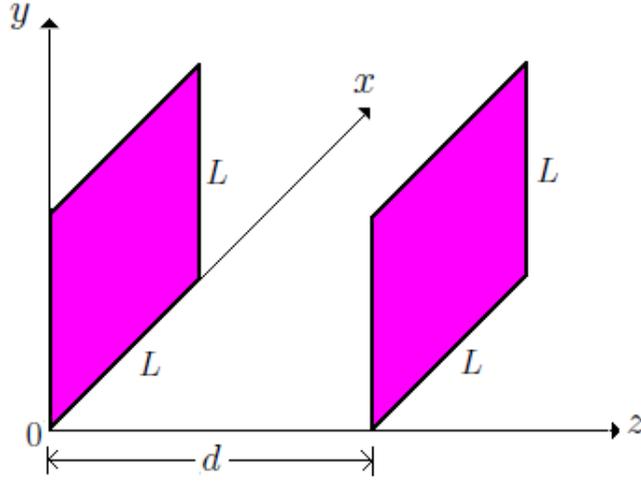
El 29 de mayo de 1948 Hendrick Casimir presentó un manuscrito “*Sobre la atracción de dos placas perfectamente conductoras*” a la sesión de la Real Academia Holandesa de Artes y Ciencias[8]. Al respecto, se presentará a continuación un análisis teórico básico que defina la versión original del Efecto Casimir, donde se derive la energía y fuerza de interacción desde una perspectiva de la física cuántica.

Tomando como referencia la energía del punto cero (2.1), Casimir propuso comparar dos situaciones: *la energía del vacío* con la correspondiente a la *del vacío en presencia de unas “condiciones de contorno”*; puesto que cuando el vacío está sometido a ciertos límites, donde las magnitudes físicas han de tomar valores determinados; la diferencia entre ambas energías tiene un valor intrínseco, independiente de donde se halla colocado el origen de energías.

Para comprender y justificar lo precedente, considérese dos placas metálicas perfectamente conductoras paralelas entre sí; el área para ellas es  $L \times L \equiv A$  y distancia perpendicular de separación es “ $d$ ” proyectada sobre el eje  $z$ , tal como puede observarse en la Figura 2.2. Las paredes de la cavidad (placas paralelas) son conductoras e imponen las condiciones de frontera de Dirichlet sobre todos los posibles modos electromagnéticos al interior de ella<sup>1</sup>. Resolviendo la ecuación de Schrödinger con ayuda de

<sup>1</sup>En matemáticas, la condición de frontera de Dirichlet (ó de primer tipo) es una clase de condición de contorno y se aplica en una ecuación diferencial ordinaria o parcial, donde se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. En cuanto al presente problema se ajustarían las condiciones

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(d) = 0 \end{cases}$$



**Figura 2.2:** Ilustración del sistema básico del Efecto Casimir. Consiste de dos placas conductoras idénticas ubicadas paralelamente y separadas una distancia  $d$ . Este sistema de geometría rectangular, también se conoce como cavidad resonante.

las respectivas condiciones de contorno, se logra cuantizar las componentes del vector de onda de la forma: (véase el Apéndice B)

$$k_x = \frac{\pi}{L}n_x; \quad k_y = \frac{\pi}{L}n_y; \quad k_z = \frac{\pi}{d}n_z \quad (2.2)$$

donde  $n_x, n_y, n_z \equiv 1, 2, 3, \dots$ . Físicamente, lo anterior traduce que las placas metálicas, además de ser frontera de la caja rectangular, se han convertido en nodos de los armónicos, definiendo de esta manera frecuencias de ondas estacionarias al interior de la cavidad, conocidas como oscilaciones electromagnéticas. En otras palabras, para el ejemplo de la cuerda vibrante, cada punto de la misma describe en el tiempo un movimiento constituido por la superposición de una infinidad de movimientos, cada uno equivalente a un oscilador armónico de distinta frecuencia y amplitud. A su vez, en cada punto de la cuerda será diferente la amplitud de las componentes armónicas de igual frecuencia; en los puntos donde la cuerda se ata a las clavijas del instrumento la amplitud será nula, convirtiéndose de esta manera en los principales nodos de oscilación. De forma similar, en cada punto del espacio vacío el campo electromagnético es una superposición de oscilaciones armónicas (ahora espaciales en vez de unidimen-

---

el objetivo es hallar la solución de las respectivas ecuaciones con el uso de estas condiciones de frontera.[17]

sionales), de frecuencia distinta y poseedoras de todas las posibles energías para cada frecuencia[8].

De las expresiones (2.2), se tiene:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (2.3)$$

en el vacío, la velocidad de la luz  $c$  relaciona a la frecuencia angular  $\omega$  con el número de onda  $k$ , es decir:

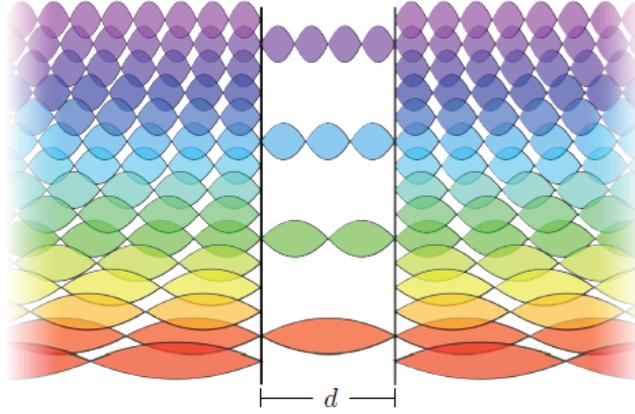
$$\begin{aligned} \omega &= c(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \\ &= c \left( \frac{\pi^2 n_x^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n_z^2}{d^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Lo que significa que el valor esperado de la *energía del punto cero* (2.1), adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{ZPE} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda}^2 \sum_k^{\infty} \hbar c k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda}^2 \sum_n^{\infty} \hbar c \left( \frac{\pi^2 (n_x^2 + n_y^2)}{L^2} + \frac{\pi^2 n_z^2}{d^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como se había comentado en la sección anterior, del resultado (2.5) se observa que la frecuencia  $\omega$  (ó el número de onda  $k$ ), ahora representada por el número cuántico  $n := n(n_x, n_y, n_z)$ , varía desde cierta base hasta infinito, luego en principio la frecuencia es infinita. Además, para cada frecuencia presente existe en general dos direcciones de polarización  $\lambda$  (la polarización transversal y la longitudinal). Una excepción al respecto se da cuando un número de onda desaparece, para este caso allí sólo existirá una única dirección de polarización. Esta situación es muy importante para la evaluación del Efecto Casimir[14].

Hendrik consideró el caso de dos placas livianas, ideales, perfectamente conductoras y de extensión infinita (todo en aras de simplificar los cálculos), ubicadas en el vacío del campo electromagnético. En consecuencia, se supondrá que el área de las placas es infinita en comparación con la separación “ $d$ ” de ellas, lo que significa que  $d \ll L$  y en efecto los números cuánticos  $n_x$  y  $n_y$  que representan a sus respectivos modos, se saturan y aproximan a ser continuos. En otras palabras, esto refiere a que en las direcciones ortogonales a la dirección de  $d$  (al eje  $z$ ), los modos son infinitos, cubriendo de esta manera la estabilidad y continuidad del campo electromagnético en las direcciones  $x$  y



**Figura 2.3:** Variación de la densidad de modos al interior de la cavidad resonante. Fuera de la cavidad, todas las frecuencias del vacío son emitidas y estables. Dentro de la cavidad, sin embargo, los modos aceptados por el vacío son discretos. Al variar la distancia “d” (que separa las placas), cambia respectivamente la densidad de los modos en relación al espacio libre, los cuales generan una diferencia de energía[13].

y dentro de la cavidad. En inferencia, las sumatorias que definen a  $n_x$  y  $n_y$  se convierten en integrales; luego, la energía del punto cero al interior de la caja resonante se da por:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle_{ZPE}^{box} &= \frac{\hbar c}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{n_z=0}^\infty \left( \frac{(n_x^2 + n_y^2)\pi^2}{L^2} + \frac{n_z^2\pi^2}{d^2} \right)^{1/2} dn_x dn_y \\
 &= \frac{\hbar c \pi}{2d} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{n_z=0}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \left( \frac{d}{L} n_x \right)^2 + \left( \frac{d}{L} n_y \right)^2 + n_z^2 \right)^{1/2} dn_x dn_y \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Luego, los modos de oscilación sobresalen, en contraste, únicamente en la dirección  $z$ . Detrás de todos los ajustes precedentes, se halla el significado físico propuesto por Casimir, el cual se ilustra en la Figura 2.3. Las frecuencias que “caben” perfectamente dentro de la cavidad son aquellas en que la distancia entre las placas es un múltiplo entero de media longitud de onda (las placas han de ser nodos de oscilación), allí amplificadas, constituyen las frecuencias propias ó los “modos resonantes de vibración”. Para las demás longitudes de onda el campo correspondiente queda atenuado, luego, modos de las más altas frecuencias se convierten en corrientes efímeras que se propagan sobre la superficie de las placas conductoras. En inferencia, las fluctuaciones del vacío resultan ser forzadas y contribuyen de manera diversa a la “presión de radiación” del campo electromagnético[8].

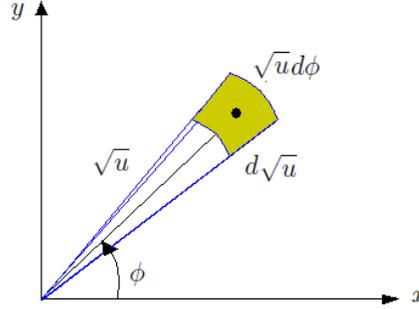


Figura 2.4: Transformación a coordenadas polares.

Considérese el siguiente cambio de notación:[14]

$$x = \frac{d}{L}n_x \ ; \ y = \frac{d}{L}n_y \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{d}{L}dn_x \ ; \ dy = \frac{d}{L}dn_y \quad (2.7)$$

e introduciéndole en la ecuación (2.6), se obtiene:

$$\langle E \rangle_{ZPE}^{box} = \frac{\hbar c \pi L^2}{2d^3} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{n_z=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x^2 + y^2 + n_z^2)^{1/2} dx dy \quad (2.8)$$

Para garantizar la convergencia de por lo menos un grado de libertad de la ecuación (2.8) es necesario transformar el sistema de coordenadas. Para este caso basta con utilizar las coordenadas polares sobre las variables  $x$  y  $y$ . Por lo tanto, un conveniente ajuste apunta cuando el radio  $\rho \equiv \sqrt{u}$  (véase la Figura 2.4)[14], y así hallar una cómoda transformación dada por:[14][17]

$$\begin{cases} x \equiv \rho \cos \phi = \sqrt{u} \cos \phi, \\ y \equiv \rho \sin \phi = \sqrt{u} \sin \phi \end{cases}$$

De la Figura 2.4, el área infinitesimal satisface que sus respectivas componentes diferenciales en coordenadas polares para la expresión (2.8) se definan como:[17]

$$dxdy \equiv \rho d\rho d\phi = \sqrt{u}d(\sqrt{u})d\phi = \sqrt{u} \frac{1}{2\sqrt{u}} du d\phi \quad (2.9)$$

en efecto, las integrales de (2.8) se convierten en:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dx dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} du d\phi \quad (2.10)$$

donde

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = (\sqrt{u})^2 = u \quad ; \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

tal que los modos sean positivos. Por lo tanto, la expresión (2.8) adquiere la forma:

$$\langle E \rangle_{ZPE}^{box} = \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{8d^3} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{n_z=0}^\infty \int_0^\infty (u + n_z^2)^{1/2} du \quad (2.11)$$

Al separar el término  $n_z = 0$  de la sumatoria de (2.11), se obtiene

$$\langle E \rangle_{ZPE}^{box} = \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{8d^3} \sum_{\lambda=1}^2 \left( \int_0^\infty \sqrt{u} du + \sum_{n_z=1}^\infty \int_0^\infty \sqrt{u + n_z^2} du \right) \quad (2.12)$$

Del resultado (2.12), se observa que el término  $\int_0^\infty \sqrt{u} du$  depende exclusivamente de dos coordenadas  $u = u(x, y)$ ; lo que significa que el término posee tan sólo una componente de polarización, para este caso sería la componente transversal, puesto que la polarización longitudinal es nula. Por consiguiente, al evaluar la sumatoria sobre  $\lambda$  (abarcando dos polaridades) en la expresión (2.12), se obtiene en definitiva *una relación del valor esperado de la energía del punto cero dentro de la “cavidad resonante”*: [13]

$$\langle E \rangle_{ZPE}^{box} = \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{8d^3} \left( \int_0^\infty \sqrt{u} du + 2 \sum_{n_z=1}^\infty \int_0^\infty \sqrt{u + n_z^2} du \right) \quad (2.13)$$

donde el primer término depende de la geometría que genera el uso de las coordenadas polares y el segundo término es divergente (a causa de la sumatoria que evalúa la respectiva integral infinitad de veces), ambos términos con polaridades ya evaluadas. La deducción (2.13) es conocida como la energía del punto cero del “vacío de Casimir”, refiriéndose al concepto de vacío cuántico al interior de las placas paralelas [13].

En segunda instancia, análogamente, considérese el valor esperado de la energía ZPE en el vacío cuántico (sin placas metálicas). Para obtener explícitamente ésta energía

debe recordarse la expresión (2.5), de ella resolviendo se deduce que:

$$\begin{aligned}\langle E \rangle_{ZPE}^{vacuum} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda}^2 \sum_{n_x, n_y, n_z}^{\infty} \hbar c \left( \left( \frac{\pi}{L} n_x \right)^2 + \left( \frac{\pi}{L} n_y \right)^2 + \left( \frac{\pi}{d} n_z \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \hbar c \sum_{\lambda=1}^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{\pi}{L} n_x \right)^2 + \left( \frac{\pi}{L} n_y \right)^2 + \left( \frac{\pi}{d} n_z \right)^2 \right)^{1/2} dn_x dn_y dn_z\end{aligned}$$

puesto que para la presente situación no existen ejes de preferencia, manteniéndose de esta forma la estabilidad del campo electromagnético en aquella región del universo. Al tener en cuenta nuevamente el cambio de notación (2.7), la expresión precedente adquiere la forma:

$$\begin{aligned}\langle E \rangle_{ZPE}^{vacuum} &= \frac{\hbar c \pi L^2}{2d^3} \sum_{\lambda=1}^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x^2 + y^2 + n_z^2)^{1/2} dx dy dn_z \\ &= \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{8d^3} \left( 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u + n_z^2} du dn_z \right)\end{aligned}\quad (2.14)$$

donde se realizó un proceso idéntico al usado en el análisis de la energía del punto cero en la caja rectangular, adoptando una vez más que  $u \equiv x^2 + y^2$ . La expresión (2.14), define la *energía del punto cero en el vacío de Minkowski* “sin condiciones de contorno” (sin cavidad resonante), donde se ha incluido sus dos componentes de polarización.

Ahora, al comparar las deducciones (2.13) y (2.14), se observa que la integral sobre la variable  $u$  correspondiente a los modos en las direcciones  $x$  y  $y$ , aparece en ambas expresiones. Al respecto, individualmente, la energía del punto cero en la cavidad (2.13) y la energía del punto cero en el vacío (2.14), son infinitas; sin embargo, la diferencia entre éstas energías no lo es:[14]

$$\begin{aligned}\delta E_{ZPE} &= \langle E \rangle_{ZPE}^{box} - \langle E \rangle_{ZPE}^{vacuum} \\ &= \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{8d^3} \left( \int_0^{\infty} \sqrt{u} du + 2 \sum_{n_z=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u + n_z^2} du - 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u + n_z^2} du dn_z \right) \\ &= 2 \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{8d^3} \left( \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{u} du + \sum_{n_z=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u + n_z^2} du - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{u + n_z^2} du dn_z \right) \\ &= \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{4d^3} \tilde{I}\end{aligned}\quad (2.15)$$

cuya divergencia se expresa en la infinidad de las integrales:

$$\begin{aligned}\tilde{I} &\equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty \sqrt{u} \, du + \sum_{n_z=1}^\infty \int_0^\infty \sqrt{u + n_z^2} \, du - \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{u + n_z^2} \, dudn_z \\ &= \frac{1}{2} I(0) + \sum_{n_z=1}^\infty I(n_z) - \int_0^\infty I(n_z) dn_z\end{aligned}\quad (2.16)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} I(0) \equiv \int_0^\infty \sqrt{u} \, du \\ I(n_z) \equiv \int_0^\infty \sqrt{u + n_z^2} \, du \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Como se habrá observado hasta el momento, físicamente, parte del problema de Casimir ya ha sido solucionado como tal, sin embargo, la finalización del mismo depende de un procedimiento matemático que conlleve a la convergencia de las integrales (2.16).

Afortunadamente, existe la fórmula de integración de Euler-Maclaurin expresada en el Apéndice B3. Sobre la definición (B.24), al ajustar  $I(n_z)$  en lugar de  $f(z)$ , se obtiene:[17]

$$\begin{aligned}\int_0^m I(n_z) dn_z &= \frac{1}{2} I(0) + I(1) + I(2) + \dots + \frac{1}{2} I(m) \\ &\quad - \frac{B_2}{2!} \left[ \frac{dI(m)}{dn_z} - \frac{dI(0)}{dn_z} \right] - \frac{B_4}{4!} \left[ \frac{d^3 I(m)}{dn_z^3} - \frac{d^3 I(0)}{dn_z^3} \right] - \dots\end{aligned}$$

Si  $m \rightarrow \infty$ , una buena aproximación sería  $\frac{1}{2} I(m) \simeq I(m)$ . En efecto, puede reducirse los primeros términos a una simple sumatoria:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty I(n_z) dn_z &= \frac{1}{2} I(0) + \sum_{n_z=1}^\infty I(n_z) - \frac{B_2}{2!} \left[ \frac{dI(\infty)}{dn_z} - \frac{dI(0)}{dn_z} \right] \\ &\quad - \frac{B_4}{4!} \left[ \frac{d^3 I(\infty)}{dn_z^3} - \frac{d^3 I(0)}{dn_z^3} \right] - \dots\end{aligned}\quad (2.18)$$

Por otra parte, para obtener de la integral (2.16) un resultado finito, se necesita de alguna manera desechar (al menos temporalmente) los modos de energía más alta para poder realizar la resta de energías  $\delta E_{ZPE}$ , ésta idea también favorece la eliminación

de problemas de saturación y resonancia generados por altas frecuencias<sup>2</sup>. Lo anterior fue adoptado por Casimir como corte de frecuencias. Para llevar a cabo esto basta con hacer  $\frac{dI(\infty)}{dn_z} = \frac{d^3I(\infty)}{dn_z^3} = \dots \rightarrow 0$  sobre la expresión (2.18), luego ella se reduce a:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty I(n_z)dn_z &\simeq \frac{1}{2}I(0) + \sum_{n_z=1}^\infty I(n_z) + \frac{1}{2!}B_2\frac{dI(0)}{dn_z} + \frac{1}{4!}B_4\frac{d^3I(0)}{dn_z^3} + \dots \\ &\implies \\ \tilde{I} &= \frac{1}{2}I(0) + \sum_{n_z=1}^\infty I(n_z) - \int_0^\infty I(n_z)dn_z = -\frac{B_2}{2!}\frac{dI(0)}{dn_z} - \frac{B_4}{4!}\frac{d^3I(0)}{dn_z^3} - \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como se ha observado, se logró expresar la integral (2.16) en términos de una serie infinita que depende de los números de Bernoulli; no obstante, tal sumatoria no es del todo divergente. Al respecto, estímesese la segunda ecuación del par (2.17), expresión que resulta ser la más general de este par. De la misma al realizar el simple cambio de variable  $v \equiv u + n_z^2$  y resolverle se obtiene:[13][14]

$$I(n_z) = \int_{n_z^2}^\infty v^{1/2}dv = \infty - \frac{2}{3}n_z^3 \quad (2.20)$$

por lo tanto

$$\frac{dI(n_z)}{dn_z} = -2n_z^2 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dI(n_z)}{dn_z} \right|_{n_z=0} = \frac{dI(0)}{dn_z} = 0$$

Sucesivamente, se halla:

$$\left. \frac{d^3I(n_z)}{dn_z^3} \right|_{n_z=0} = -4$$

---

<sup>2</sup>Todo campo, incluso en su estado vacío, ejerce una presión de radiación que es proporcional a la energía o frecuencia de los distintos modos de vibración. En una cavidad resonante, la presión de radiación es mayor en el interior que en el exterior, por cuya razón las placas tenderían a separarse. Para los modos fuera de resonancia, en cambio, la presión de radiación en el interior es más baja que en el exterior y las placas experimentarán una fuerza de atracción[8]. De acuerdo a lo evidenciado en sus experimentos como trabajador para la compañía Philips, Casimir tomó la segunda opción como explicación al fenómeno; puesto que resultó, en el caso de las placas, que los modos que contribuyen a la fuerza atractiva dominan ligeramente sobre los modos resonantes que tienden a separar las placas. En otras palabras, las altas frecuencias, por decirlo así, se atenúan; en inferencia, se eliminarán los modos de las más altas frecuencias que generan efectos de resonancia.

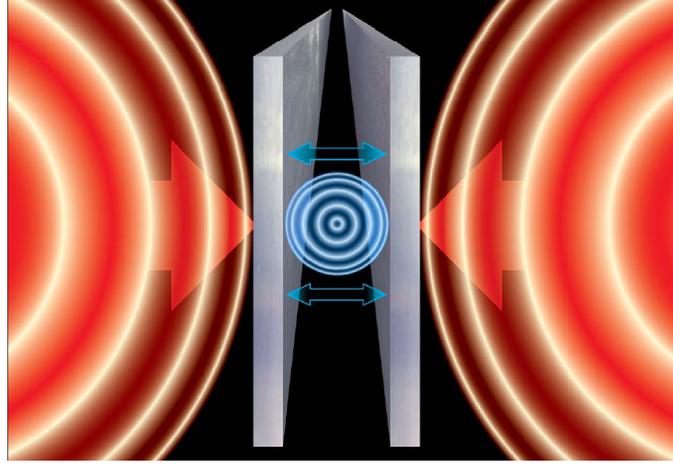


Figura 2.5: El vacío interactúa con la materia. Acercará dos placas metálicas paralelas que estén muy próximas entre sí. Así se resume el Efecto Casimir[8].

y

$$\left. \frac{d^j I(n_z)}{dn_z^j} \right|_{n_z=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad j \geq 4$$

Al sustituir todos éstos últimos resultados dentro de la integral (2.19) y tomando el hecho que  $B_4 = -1/30$ , [17] se deduce que

$$\tilde{I} = -0 - \frac{1}{4!} \left(-\frac{1}{30}\right) (-4) - 0 = -\frac{1}{180} \quad (2.21)$$

tal que al tratar cantidades divergentes emerjan resultados finitos.<sup>3</sup> Para concluir este capítulo, el resultado (2.21) debe ser sustituido en la expresión (2.15), hallándose de esta manera el valor de “La Variación de la Energía del Punto Cero predicho por Niels Bohr”:[13]

$$\delta E_{ZPE} \simeq -\frac{\hbar\pi^2 c}{720d^3} L^2 \quad (2.22)$$

<sup>3</sup>Del anterior procedimiento puede comentarse que existe un cálculo alternativo que otorga la misma conclusión al dado por el resultado (2.21). Esta derivación es conocida como la Función Zeta de Riemann  $\zeta(s)$ , la cual está definida por la serie  $1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$  donde  $s$  refiere al plano complejo. Éste cálculo se presenta en las citas [8] y [13].

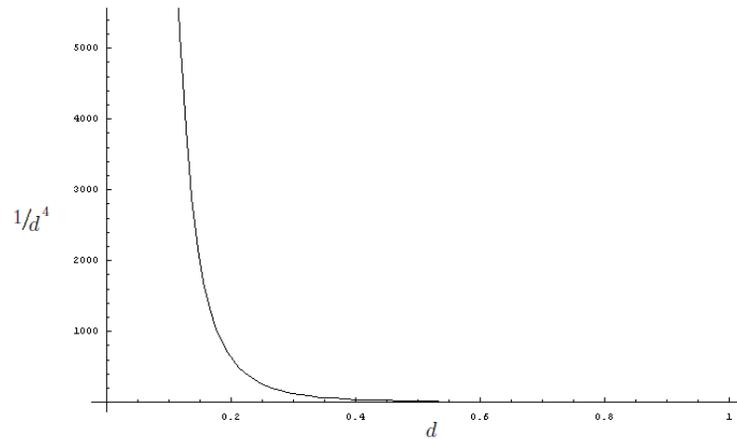
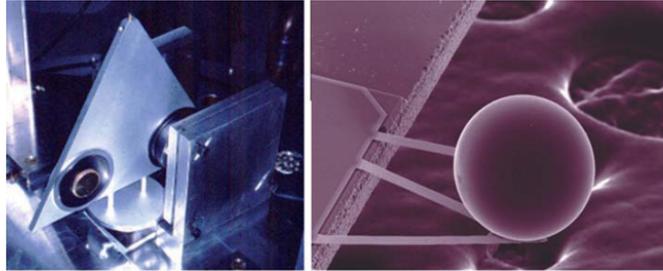


Figura 2.6: Comportamiento de la fuerza de Casimir,  $F_C \propto 1/d^4$ .

donde “ $d$ ” (en nanómetros) define la separación entre placas y  $L^2$  refiere al área de ellas. Es interesante observar que la variación de energía dependa de las constantes fundamentales  $\hbar$  y  $c$ . Del resultado (2.22), al aplicar la muy conocida definición de fuerza  $F \equiv -dV/dz$  (donde  $V$  refiere a un potencial), se obtiene la “Fuerza de Casimir”:

$$F_C = -\frac{\hbar\pi^2c}{240d^4}L^2 \quad (2.23)$$

fuerza que es atractiva, luego en efecto, si las placas metálicas se encuentran lo suficientemente cerca, se unirán. Es decir, el vacío cuántico posee fluctuaciones de energía, que en determinadas circunstancias actúan sobre objetos materiales ordinarios. Así ocurre en el Efecto Casimir: dos placas metálicas paralelas, a las que las fluctuaciones del vacío, por la diferencia de presión que ejercen sobre su adverso y su reverso, tienden a acercarse entre sí. Véase la Figura 2.5. Para hacerse una idea de las magnitudes del efecto como tal, teóricamente al situar dos placas de superficie de  $1\text{cm}^2$  cada una, a una distancia de  $1\mu\text{m}$ , las mismas se atraen con una  $F_C \simeq 0,013\text{dinas} \simeq 10^{-7}\text{N}$ . [8] Véase la Figura 2.6.



**Figura 2.7:** *Imágenes de la evidencia experimental del Efecto Casimir. Sobre la izquierda se muestra el dispositivo empleado por Lamoreaux en su experimento, el cual dio inicio a verdaderas evidencias del efecto como tal. Sobre la derecha se muestra el dispositivo utilizado por Umar Mohideen y colaboradores. Ambos experimentos comprobaron concluyentemente la existencia de la fuerza predicha por Casimir[8].*

### 2.3 Evidencia Experimental del Efecto Casimir

Casimir en sus primeras hipótesis acerca del fenómeno, le relacionó a una simple interacción entre moléculas dieléctricas de Van der Waals. Sin embargo, Casimir con un estudio más profundo del fenómeno, evidenció que la interacción entre las partículas intermoleculares (para la estabilidad de las suspensiones de polvo de cuarzo) debía decaer más rápidamente, con una potencia de  $r^{-7}$  en lugar de  $r^{-6}$  (la fuerza de Van der Waals  $F_V \equiv -6A/r^7$ , donde  $A$  refiere a una constante)[15][16]. Intrigado por el resultado, Casimir logró conversar al respecto con Niels Bohr en otoño de 1947, de allí el danés se percató de la novedad del fenómeno y le relacionó a una posible fluctuación de la energía del punto cero[8]. En consecuencia, gracias a la valiosa pista, Casimir logró deducir todo lo que se argumentó en el presente capítulo, concluyendo además que la fuerza de Casimir era la última tras una serie de interacciones, donde incluso logró demostrar teóricamente que el radio de acción de la misma era aún mayor que el citado anteriormente (proporcional a  $r^{-4}$  en vez de  $r^{-6}$ ).

En la década de los 40, al interior de los laboratorios Philips se comprobó la interpretación presentada por Casimir[8]. Años después, a manos de Marcus Sparnaay se ejecutó nuevamente la prueba experimental del efecto[20]. Su resultado halló un velo de duda del 100%; sin embargo, Sparnaay reconoció que su experimento alcanzó a obtener un corto rango de atracción entre los objetos. Posteriormente, en los siguientes años se llevaron a cabo nuevas pruebas dirigidas por Derjaguin et al, Sabisky y Charles Anderson[20], entre otros; experimentos que favorecían cada vez más la existencia del fenómeno[20]. En los años 1994 - 1997 a manos de Lamoreaux y su grupo de trabajo, se halló una solución definitiva al asunto[11].

No es fácil llevar a cabo en el laboratorio un experimento de tal magnitud, ya que las placas nunca tendrán extensión infinita ni tampoco serán perfectamente conductoras. También es claro que intervienen efectos de temperatura, ásperosidad de las superficies, polvo y otros. Un obstáculo que se presenta de entrada es la extremada dificultad para posicionar las placas perfectamente paralelas; por tal razón Lamoreaux, a diferencia de Sparnaay, prefirió usar una lente esférica de cuatro centímetros de diámetro y una placa de cuarzo óptico de dos centímetros y medio de diagonal, ambas con un recubrimiento de oro y cobre, conectadas a un péndulo de torsión en el vacío. Véase la Figura 2.7 (imagen izquierda). En aquel entonces, la esperanza de Lamoreaux le conllevó a implementar precisión experimental, extender las mediciones a longitudes más distantes y medir los efectos de temperatura no nula. La sensibilidad de su experimento logró obtener un rango de acción entre  $0,6\mu m$  y  $6\mu m$  de separación entre ambos objetos. Al acercar los objetos a unas cuantas micras de distancia, Lamoreaux observó que ellos se atraían con la fuerza predicha. La medición efectuada con el péndulo de torsión reprodujo el resultado de Casimir para esta configuración, estimándose el error en un 5 % [11].

El experimento de Lamoreaux se convirtió en el punto de partida de experimentos posteriores que lograron disminuir el error a un 1%. Uno de ellos fue el experimento de Umar Mohideen y sus compañeros de la Universidad de California en Riverside, EE.UU. [20]; ellos sujetaron una esfera de poliestireno de  $200\mu m$  de diámetro a la punta de medición de un microscopio de fuerza atómica, véase la Figura 2.7 (imagen derecha). En una serie de experimentos acercaron la esfera, cubierta algunas veces de aluminio y otras de oro, a alrededor de  $0,1\mu m$  de un disco plano, también cubierto de esos metales. La atracción entre la esfera y el disco fue monitorizada por la desviación de un láser. El resultado del mismo concordaba completamente con la teoría. Cabe resaltar que en otros experimentos muy recientes se ha logrado obtener distancias nanométricas entre los objetos, tal como sucedió en el experimento realizado por Thomas Ederth, alcanzando límites cerca de los 20 nanómetros de separación e igualmente, en consecuencia, adquiriendo resultados demasiado compatibles con la teoría. La situación actual de la teoría y el experimento han sido revisados en editoriales especiales de la *New Journal of Physics*. Hoy en día no cabe la menor duda que los cálculos de Casimir son correctos, y como se ha estado comentando durante todo el capítulo:

*“El mérito de Casimir estriba en haber descubierto que la energía del vacío, en determinadas circunstancias, sí tiene, pese a todo, consecuencias físicas discernibles” [8][11][20].*





*Es un milagro que a pesar de la sorprendente complejidad del universo, se pueda descubrir en sus fenómenos determinada irregularidad.*  
*Edwin Schrödinger*



---

## *FUNDAMENTOS DE RELATIVIDAD GENERAL*

---

El presente capítulo pretende demostrar algunas ecuaciones fundamentales de la Teoría General de la Relatividad, las cuales son necesarias para llevar a cabo los objetivos de la memoria. Inicialmente, se realizará una pequeña transición de coordenadas euclídeas a curvilíneas (coordenadas polares); a través de diferenciales, ello conducirá a la obtención de Símbolos de Christoffel; de allí se relacionará con el tensor métrico y sus respectivas propiedades. Sucesivamente, se demostrará el tensor curvatura de Riemann y a través de las identidades de Bianchi, se deducirá el tensor y escalar de Ricci. Finalmente, se definirá la ecuación de campo de Einstein.

### 3.1 *Álgebra Tensorial en Coordenadas Polares*

Por simplicidad, considérese un sistema coordenado generalizado a 2D, denotado por las funciones  $\xi = \xi(x, y)$  y  $\eta = \eta(x, y)$  con incrementos a primer orden:[17]

$$\Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y \quad y \quad \Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y$$

A su vez, dicho par puede ser acoplado matricial o tensorialmente:

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$V^{\alpha'} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} V^{\beta} \tag{3.1}$$

donde los índices no primados corresponden a  $(\Delta x, \Delta y)$ , mientras que los primados corresponden a  $(\Delta \xi, \Delta \eta)$ . También, se observa la asignación simbólica para la matriz de transformación:

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha'} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Adicionalmente, para éste caso, considérese un campo escalar  $\phi$ . En inferencia, dadas las coordenadas  $(\xi, \eta)$ , es siempre posible hallar las derivadas  $\partial\phi/\partial\xi$  y  $\partial\phi/\partial\eta$ , para lo cual agregando las variables  $x$  y  $y$  por regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi} \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = \frac{\partial x}{\partial\eta} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\eta} \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Luego, acoplando en forma de matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$V^{\alpha} = \Lambda_{\beta'}^{\alpha} V^{\beta'} \quad (3.3)$$

cuya matriz de transformación es:

$$\Lambda_{\beta'}^{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Por último, es de notar que bajo la anterior estrategia se halla inversión de una matriz de transformación con respecto a otra (véase las expresiones (3.2) y (3.4)).

### 3.1.1. Bases de coordenadas polares y vectoriales

A través de la Figura 3.1.1 (a), recuérdese la relación entre coordenadas cartesianas y polares:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta, \\ y = r \sin\theta. \end{cases} \quad (3.5)$$

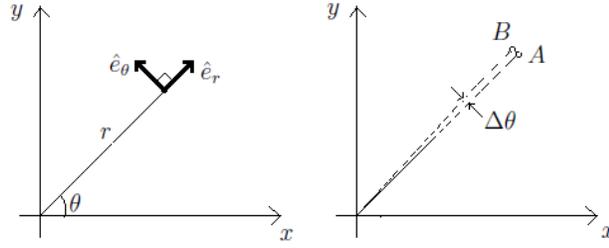


Figura 3.1: (a) Relación coordenadas cartesianas y polares, (b) Cambio en  $\hat{e}_r$ , cuando  $\theta$  cambia por  $\Delta\theta$ .

Ahora, opcionalmente al típico proceso, una forma elegante de hallar los vectores base radica en el uso de la ecuación general (3.3): (vectores polares base en términos de vectores cartesianos base)

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda_{\alpha'}^{\beta} \vec{e}_{\beta}$$

donde las componentes de la matriz de transformación se obtengan aplicando las derivadas a las correspondientes ecuaciones (3.5):

$$\Lambda_{\alpha'}^{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Lambda_r^x & \Lambda_r^y \\ \Lambda_{\theta}^x & \Lambda_{\theta}^y \end{pmatrix}$$

En inferencia, cuando  $\alpha = r$ , al expandir se tiene el vector unitario radial en dependencia cartesiana:

$$\vec{e}_r = \Lambda_r^x \vec{e}_x + \Lambda_r^y \vec{e}_y = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \quad (3.6)$$

Similarmente, cuando  $\alpha = \theta$  se tiene:

$$\vec{e}_{\theta} = \Lambda_{\theta}^x \vec{e}_x + \Lambda_{\theta}^y \vec{e}_y = -r\sin\theta \vec{e}_x + r\cos\theta \vec{e}_y \quad (3.7)$$

En conclusión, las expresiones (3.6) y (3.7) representan vectores unitarios polares variantes en términos de vectores unitarios cartesianos fijos.

### 3.1.2. Derivadas de vectores base

Siempre que  $\vec{e}_x$  y  $\vec{e}_y$  sean constantes, se demuestra fácilmente:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y] = \vec{0}$$

y

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y] = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta$$

de acuerdo a la ecuación 3.7. Lo cual implica una visión geométrica simple, véase la Figura 3.1.1 (b); la derivada de  $\vec{e}_r$  con respecto a  $\theta$  es justamente un corrimiento tangencial (sobre la dirección angular) con radio de curvatura constante.

Análogamente, las respectivas derivadas de  $\vec{e}_\theta$  resultan:

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [-r \sin\theta \vec{e}_x + r \cos\theta \vec{e}_y] = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta$$

y

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [-r \sin\theta \vec{e}_x + r \cos\theta \vec{e}_y] = -r \cos\theta \vec{e}_x - r \sin\theta \vec{e}_y = -r \vec{e}_r$$

He aquí la relación entre vectores base (por ejemplo: las componentes base tangencial y normal de la aceleración para el movimiento curvilíneo).

## 3.2 Símbolos de Christoffel

Considérese el plano  $x^\beta = (x^1, x^2)$ , al cual pertenezca el vector  $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ , donde  $\vec{e}_\alpha$  refiere al vector base. Ahora, realizando sobre éste último variaciones con respecto a las dimensiones del plano:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (3.8)$$

donde el término  $\partial \vec{e}_\alpha / \partial x^\beta$  es un vector propio; el cual, a manera de coeficientes de conexión, puede escribirse como una combinación lineal de vectores base también cono-

cidos como *Símbolos de Christoffel*: [21]

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu} \quad (3.9)$$

tal que los símbolos de Christoffel sean coeficientes de geometría que ligan la variación de una dirección con respecto al sistema coordenado y lo relaciona a nuevas dimensiones direccionales (e incluso puede relacionarle a la misma dirección implicada). En otras palabras, la interpretación del símbolo  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  define la  $\mu$ -ésima componente de  $\partial \vec{e}_\alpha / \partial x^\beta$ . Para ello se requiere dichos tres índices: el primero ( $\alpha$ ) define el vector base, el cual es diferenciado; el segundo ( $\beta$ ) define la coordenada con respecto a la cual se está diferenciando; y el tercero ( $\mu$ ) denota la componente vectorial de la derivada resultante.<sup>1</sup> Para finalizar, retornando a la dependencia particular sobre el plano  $x^\mu = (x^1, x^2)$ , la expansión de los símbolos de Christoffel traduce  $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu = \Gamma_{\alpha\beta}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \vec{e}_2$ , quedando abierta la combinación de índices.

En inferencia, puede sistematizarse el tratamiento realizado en la subsección 3.1.2: “Derivadas de vectores base” a través de los símbolos de Christoffel: (sobre las expresiones (3.6) y (3.7))

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \Rightarrow \Gamma_{rr}^\mu = 0 \text{ para todo } \mu \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \Rightarrow \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \Gamma_{r\theta}^r = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{r} \vec{e}_r \Rightarrow \Gamma_{\theta r}^\theta = -\frac{1}{r}, \Gamma_{\theta r}^r = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -r \vec{e}_r \Rightarrow \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0 \end{array} \right.$$

la importancia de los símbolos de Christoffel es su generalidad, pues permite expresar cualquier tipo de derivada direccional.

### 3.2.1. Derivada covariante

Antes de iniciar con el objetivo del apartado, considérese una de las propiedades de los símbolos de Christoffel: se sabe que  $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$  relaciona derivadas de los vectores base, para

<sup>1</sup>Nuevamente, un ejemplo, a menor escala, podría ser la esencia de la obtención de las coordenadas tangencial y normal de la aceleración para el movimiento curvilíneo básico

ello sería razonable que si existe una permutación de índices mudos entonces, habría posibilidad de hallar cambios de signo  $-\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  (análogo a la esencia del producto vectorial entre vectores unitarios).[21] Luego, concluyendo:

$$\boxed{\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Rightarrow -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}} \quad \text{Pero, hay simetría cuando} \quad \boxed{\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}} \quad (3.10)$$

A continuación, considérese el uso de los símbolos de Christoffel (3.9) sobre la ecuación (3.8)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + V^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \vec{e}_{\mu}$$

del término anterior, obsérvese la presencia de la sumatorias sobre los índices  $\alpha$  y  $\mu$  cuando se ajusta un valor sobre  $\beta$ . Al respecto, será de gran utilidad reubicar índices mudos (es decir, cambiando  $\mu$  por  $\alpha$  y  $\alpha$  por  $\mu$  en el segundo término del miembro derecho de la dicha expresión):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} &= \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} &= \left( \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \right) \vec{e}_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.11)$$

de tal forma que el vector campo  $\partial \vec{V} / \partial x^{\beta}$  tenga componente:

$$\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$$

Se permite ahora la adopción de las siguientes equivalencias:[21]

$$\boxed{\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \equiv V^{\alpha}_{;\beta}} \quad \left( \text{análogamente} \quad \boxed{\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \equiv V_{\alpha;\beta}} \right) \quad (3.12)$$

y comparando con el factor de la ecuación (3.11) pueden también realizarse la equivalencia: (las relaciones del paréntesis se obtienen fácilmente utilizando la propiedad (3.10))

$$\boxed{V^{\alpha}_{;\beta} \equiv V^{\alpha}_{,\beta} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}} \quad \left( \text{en correspondencia} \quad \boxed{V_{\alpha;\beta} \equiv V_{\alpha,\beta} - V_{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}} \right) \quad (3.13)$$

Lo que significa que, en últimas, la ecuación (3.8), puede escribirse como:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \left( \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \vec{e}_\alpha = V_{;\beta}^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (3.14)$$

Nótese que el vector  $\vec{e}_\beta$  dentro de  $\partial \vec{V} / \partial x^\beta$  es un tensor de  $\binom{1}{1}$  y es llamado *derivada covariante* de  $\vec{V}$ , denotado naturalmente como  $\nabla \vec{V}$ , y generalizado bajo el uso de índices:

$$(\nabla \vec{V})_\beta^\alpha = (\nabla_\beta \vec{V})^\alpha = V_{;\beta}^\alpha \quad (3.15)$$

siendo coherente con la ecuación (3.14).

Ahora, obsérvese nuevamente la definición (3.13) la cual representa una derivada covariante para un tensor de primer orden, para lo cual se observa que existe lógicamente un único símbolo de Christoffel puesto que la derivada sólo aplica a un índice. Pero dichos símbolos de Christoffel son proporcionales al número de índices al cual aplique la derivada covariante. Por ejemplo:[21][22]

$$\boxed{\nabla_\beta V^{\mu\nu} = V_{;\beta}^{\mu\nu} \equiv V_{,\beta}^{\mu\nu} + V^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + V^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu} \quad (3.16)$$

$$\left( \text{análogamente } \boxed{\nabla_\beta V_{\mu\nu} = V_{\mu\nu;\beta} \equiv V_{\mu\nu,\beta} - V_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - V^{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha} \right) \quad (3.17)$$

### 3.2.2. Implicaciones de los Símbolos de Christoffel sobre el tensor métrico

Por simplicidad, considérese el tensor métrico en coordenadas cartesianas y la libertad que acarrea dicho hecho para la contravarianza y covarianza de índices en las componentes: (se permite el uso de los índices mudos  $\alpha, \beta, \mu, \dots$  para denotar coordenadas cartesianas, y se permite el uso de índices mudos  $\alpha', \beta', \mu', \dots$  para denotar coordenadas arbitrarias)

$$g_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu} = \text{diag}(1, 1, 1) \quad \Rightarrow \quad V_\alpha = V^\alpha \quad (3.18)$$

Ello también implica que si los vectores unitarios cartesianos son constantes, entonces los símbolos de Christoffel son nulos (puesto que  $\partial \vec{e}_\alpha / \partial x^\beta = 0 \quad \forall \quad \vec{e}_\alpha = \vec{e}_x \equiv \text{constante}$ ). En efecto, las ecuaciones (3.13) se reducen a:

$$V_{;\beta}^\alpha = V_{,\beta}^\alpha \quad \text{y} \quad V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} \quad (3.19)$$

Además, utilizando (3.18) se puede concluir que

$$V_{\alpha;\beta} = V_{;\beta}^{\alpha} \quad (3.20)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.19) en (3.20) y agregándole los respectivos ceros, bajo cierto tratamiento resulta: (utilizando (3.10), (3.13) y (3.18))

$$\begin{aligned} V_{\alpha,\beta} &= V_{,\beta}^{\alpha} \\ V_{\alpha,\beta} - V_{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} &= V_{,\beta}^{\alpha} - V_{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \\ V_{\alpha,\beta} - V_{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} &= V_{,\beta}^{\alpha} + V^{\sigma}\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \\ V_{\alpha,\beta} - V_{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} &= g_{\alpha\mu}(V_{,\beta}^{\mu} + V^{\sigma}\Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}) \end{aligned}$$

$$\boxed{V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu}V_{;\beta}^{\mu}} \quad (3.21)$$

Incluso desde la ecuación (3.19)

$$\boxed{V_{\alpha,\beta} = g_{\alpha\mu}V_{,\beta}^{\mu}} \quad (3.22)$$

Las anteriores expresiones tensoriales son válidas para dicho sistema coordenado; sin embargo, deben soportar validéz en todos los sistemas coordenados. En efecto, su validez se extenderá a cualquier sistema coordenado de la siguiente forma: (desde la ecuación (3.22))

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu'}V_{;\beta'}^{\mu'} \quad (3.23)$$

Sucesivamente, considérese la relación de tensores de primer orden:[22]

$$V_{\alpha'} \equiv g_{\alpha'\mu'}V^{\mu'} \quad (3.24)$$

sobre ésta última si se considera la derivada covariante  $\beta$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}}(V_{\alpha'}) &= \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}}(g_{\alpha'\mu'}V^{\mu'}) \\ \frac{\partial V_{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} &= \frac{\partial g_{\alpha'\mu'}}{\partial x^{\beta'}}V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'}\frac{\partial V^{\mu'}}{\partial x^{\beta'}} \\ V_{\alpha';\beta'} &= g_{\alpha'\mu';\beta'}V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'}V_{;\beta'}^{\mu'} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Luego, comparando éste último resultado con la expresión (3.23), siempre que  $\vec{V}$  sea un

vector arbitrario, se observa que para que exista compatibilidad debe cumplirse que:

$$g_{\alpha'\mu';\beta'} \equiv 0 \text{ en cualquier base o sistema coordenado} \quad (3.26)$$

Finalmente, de acuerdo al tratamiento de la sección, puede utilizarse la definición (3.17) aplicada sobre la métrica (3.26): (ahora los índices no primados son generales)

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^{\nu}g_{\alpha\nu} \quad (3.27)$$

### 3.2.3. Cálculo de los Símbolos de Christoffel desde la Métrica

A través de cierto proceso, puede demostrarse que los símbolos de Christoffel pueden ser expresados en términos de  $g_{\alpha\beta,\mu}$ . Considérese la sustitución de la ecuación (3.26) en la expresión (3.27), el resultado puede escribirse en tres permutaciones simétricas de índices (3.10) diferentes:

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}g_{\nu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\nu}g_{\alpha\nu} \\ g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu}g_{\alpha\nu} \\ g_{\beta\mu,\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu}g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}g_{\beta\nu} \end{cases} \Rightarrow -g_{\beta\mu,\alpha} = -\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu}g_{\nu\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}g_{\beta\nu} \quad (3.28)$$

Sumando ecuaciones y agrupando términos: (se utilizará la simetría de la métrica  $g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$ )

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = (\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu})g_{\nu\beta} + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu})g_{\nu\mu} + (\Gamma_{\beta\mu}^{\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu})g_{\alpha\nu}$$

De acuerdo a la simetría reflejada por la ecuación (3.10), los dos primeros términos del miembro derecho de la última expresión, desaparecen. Luego:

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\nu}$$

sucesivamente, dividiendo por 2 y multiplicando por  $g^{\alpha\gamma}$ : (considérese la sumatoria sobre  $\alpha$  y téngase presente que  $g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\gamma}$ )[22]

$$\boxed{\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma_{\beta\mu}^{\gamma}} \quad (3.29)$$

Por último, obsérvese que la expresión (3.29) puede reducirse aún más; es decir,

considérese la siguiente agrupación: (nuevo cambio de índices)

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta}) + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}$$

se observa que ella tiene una preferencia de índices ajustados a cierta conveniencia con el fin de simplificarla; es decir, considérese el término del paréntesis, nótese que existe asimetría en los índices  $\alpha$  y  $\beta$ , mientras es contraído sobre  $\alpha$  y  $\beta$  con  $g^{\alpha\beta}$  cual es simétrico. En definitiva, el primer término (paréntesis) desvanece y se halla la relación:

$$\boxed{\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \quad \text{ó} \quad -\Gamma_{\alpha\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}g_{\alpha\alpha,\mu}} \quad (3.30)$$

donde se utilizó la expresión (3.10), a éstos términos se les conoce como Símbolos de Christoffel de primer género.

### 3.3 Tensor Curvatura de Riemann

En geometría diferencial, el tensor de curvatura de Riemann, supone una generalización del concepto de curvatura de Gauss, definido para superficies y/o variedades de dimensiones arbitrarias. Representa una medida de separación de la métrica de la variedad con respecto de la métrica euclídea.

#### 3.3.1. Transporte Paralelo

El *Transporte Paralelo* es una variedad minkowskiana  $\mathcal{M}$  con conexión específica, es un modo de transportar vectores sobre curvas diferenciables de manera que permanezcan “paralelos” respecto a la conexión dada.

La filosofía natural sobre curvatura cita dos conceptos referentes: *curvatura intrínseca* y *curvatura extrínseca*, ambos expuestos en la Figura 3.3.1. Un observador ubicado sobre la superficie de la esfera contempla las trayectorias A-P y B-P, él asegura que ambas trayectorias son paralelas y se dirigen siempre en línea recta hacia el destino final; es decir, *intrínsecamente* el espacio es plano. En contraparte, si se realiza nuevamente el seguimiento de dichas trayectorias, pero vistas por un observador fuera de la esfera, él *extrínsecamente* afirmará que las mismas son curvas y que existe un tercer factor que desplaza ligeramente a los observadores superficiales que hace que terminen coincidiendo. No obstante, la curvatura que interesa es la *intrínseca*, puesto que la extrínseca

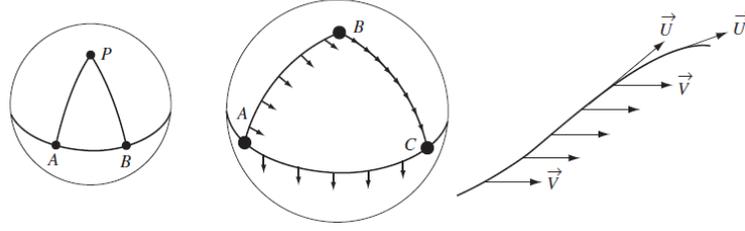


Figura 3.2: (a) Triángulo esférico, (b) Transporte paralelo alrededor de un triángulo esférico, (c) Transporte paralelo de  $\vec{V}$  a lo largo de  $\vec{U}$ . [21]

implica el salir del Espacio-Tiempo.

Siendo así, el vector desplazamiento  $\vec{V}$  se transporta paralelamente en toda la trayectoria (véase la Figura 3.3.1 (c)), ello implica invarianza del mismo:

$$\delta\vec{V} = \vec{V}' - \vec{V} := \begin{cases} 0, & \text{en un espacio plano} \\ \neq 0, & \text{en un espacio curvo} \end{cases}$$

donde el vector tangente  $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$  con  $\lambda$  siendo un parámetro a lo largo de la curva (el tiempo por ejemplo). En efecto, localmente, en un sistema coordenado inercial, las componentes a lo largo de la trayectoria son constantes: (*Transporte paralelo*)

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V_{,\beta}^\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0} \quad (3.31)$$

En definitiva, la ecuación (3.31) define la conservación del vector desplazamiento  $\vec{V}$  con respecto al vector tangencial  $\vec{U}$ , siendo la condición fundamental del transporte paralelo.

### 3.3.2. Geodésicas

En geometría, la línea geodésica se define como la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, que a su vez está contenida en dicha superficie. Las geodésicas de una superficie son las líneas “más rectas” posibles (con menor curvatura) fijado un punto y una dirección dada sobre dicha superficie. En términos generales, se puede hablar de geodésicas en “espacios curvados” de dimensión superior llamados variedades riemannianas; para lo cual, si el espacio contiene una métrica natural, entonces

las geodésicas son (localmente) la distancia más corta entre dos puntos en el espacio.

De acuerdo al apartado anterior, si a lo largo de la curva el vector tangente permanece constante, entonces implica que el mismo es transportado paralelamente. Al respecto, considérese la expansión de la ecuación (3.31):

$$\begin{aligned}
 U^\alpha U_{;\alpha}^\beta &= 0 \\
 U^\alpha \left[ \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha} + U^\mu \frac{\partial \vec{e}_U}{\partial x^\alpha} \right] &= 0 \\
 U^\alpha [U_{;\alpha}^\beta + U^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta] &= 0 \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

$$U^\alpha U_{;\alpha}^\beta + U^\alpha U^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta = 0 \tag{3.33}$$

La expresión (3.33) se conoce como la ecuación de la geodésica, la cual, si se sabe que  $U^\alpha = \partial x^\alpha / \partial \lambda$  (además  $U^\beta \partial / \partial x^\beta = d/d\lambda$ ), también puede escribirse:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

resultando una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. En conclusión, de acuerdo a la doble derivada con respecto al término  $\lambda$ , *las geodésicas son las curvas que transportan paralelamente su propio vector tangente.*[21]

### 3.3.3. Tensor Curvatura

Regresando a la idea del tensor curvatura, considérese una variedad de un lazo o trayectoria cerrada muy pequeña, en la cual se exponga un vector  $V^\alpha$ , así como se observa en la Figura 3.3.3. Bajo el concepto de transporte paralelo, tomando el segundo factor de la ecuación (3.32) e igualado a cero, puede aplicarse a las cuatro trayectorias mostradas. En primera lugar, aplicando a la trayectoria  $A-B$  ( $x^2 = b$ ) existe variación de la coordenada  $\alpha = 1$  (es decir, transición de  $x^1 = a$  hasta  $x^1 = a + \delta a$ ):

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu \tag{3.34}$$

Al realizar dicha transición, la variación en *transporte paralelo* desde  $A-B$  de dicho vector es: (en la dirección  $\vec{e}_1$ )

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(B) - V^\alpha(A) \Rightarrow V^\alpha(B) = V^\alpha(A) + \delta V^\alpha$$

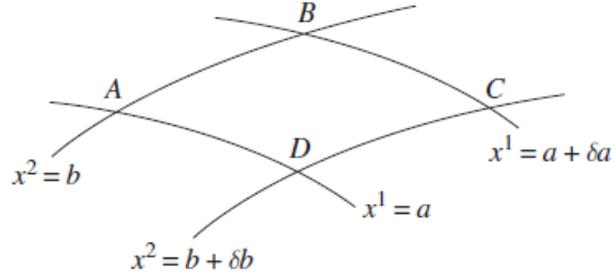


Figura 3.3: Sección infinitesimal de una grilla coordenada; sus cuatro lados son coordenadas lineales.[21]

Utilizando la regla de la cadena sobre el punto inicial  $a$ :

$$V^\alpha(B) = V^\alpha(A) + \delta(a) \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 \Big|_a$$

haciendo continua la variación y sustituyendo la relación (3.34):

$$\begin{aligned} V^\alpha(B) &= V^\alpha(A) + \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 \\ &= V^\alpha(A) - \int_a^{a+\delta a} [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu]_{x^2=b} dx^1 \end{aligned}$$

Análogamente, para las demás trayectorias del laso: (para las trayectorias  $B-C$  y  $D-A$  se utilizará la dirección  $\vec{e}_2$ )

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_b^{b+\delta b} [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu]_{x^1=a+\delta a} dx^2$$

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) + \int_{a+\delta a}^a [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu]_{x^2=b+\delta b} dx^1$$

$$V^\alpha(A_{\text{final}}) = V^\alpha(D) + \int_{b+\delta b}^b [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu]_{x^1=a} dx^2$$

Por lo tanto, coleccionando los anteriores resultados, el cambio neto en  $V^\alpha$  después de

realizar el trayecto completo, es:

$$\begin{aligned}
 \delta V^\alpha &= V^\alpha(A_{\text{final}}) - V^\alpha(A_{\text{inicial}}) \\
 &= V^\alpha(A) - \int_a^{a+\delta a} [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu]_{x^2=b} dx^1 - \int_b^{b+\delta b} [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu]_{x^1=a+\delta a} dx^2 \\
 &\quad + \int_{a+\delta a}^a [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu]_{x^2=b+\delta b} dx^1 + \int_{b+\delta b}^b [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu]_{x^1=a} dx^2 - V^\alpha(A)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Nótese que las anteriores podrían cancelarse sí y sólo sí  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  y  $V^\mu$  fuesen constantes, pero ellos son curvos, así que para el más bajo orden, se tiene la aproximación:

$$\begin{aligned}
 \delta V^\alpha &= \int_a^{a+\delta a} \{[\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu]_{x^2=b+\delta b} - [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu]_{x^2=b}\} dx^1 \\
 &\quad - \int_b^{b+\delta b} \{[\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu]_{x^1=a+\delta a} - [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu]_{x^1=a}\} dx^2 \\
 &\simeq \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu] dx^1 - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu] dx^2 \\
 &\simeq \delta a \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu] - \delta b \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu] \\
 &\simeq \left( -\frac{\partial}{\partial x^1} [\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu] + \frac{\partial}{\partial x^2} [\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu] \right)
 \end{aligned}$$

El resultado precedente involucra las derivadas de los símbolos de Christoffel y de  $V^\alpha$ ; sin embargo, dichas derivadas de  $V^\alpha$  pueden ser eliminadas usando nuevamente la relación (3.34):

$$\begin{aligned}
 \delta V^\alpha &\simeq \delta a \delta b \left( -\left[ \frac{\partial \Gamma_{\mu 2}^\alpha}{\partial x^1} \right] V^\mu - \Gamma_{\mu 2}^\alpha \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} + \left[ \frac{\partial \Gamma_{\mu 1}^\alpha}{\partial x^2} \right] V^\mu + \Gamma_{\mu 1}^\alpha \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \right) \\
 &\simeq \delta a \delta b \left( -\Gamma_{\mu 2,1}^\alpha V^\mu - \Gamma_{\mu 2}^\alpha [-\Gamma_{\mu 1}^\nu V^\mu] + \Gamma_{\mu 1,2}^\alpha V^\mu + \Gamma_{\mu 1}^\alpha [-\Gamma_{\mu 2}^\nu V^\mu] \right) \\
 &\simeq \delta a \delta b \left( \Gamma_{\mu 1,2}^\alpha - \Gamma_{\mu 2,1}^\alpha + \Gamma_{\nu 2}^\alpha \Gamma_{\mu 1}^\nu - \Gamma_{\nu 1}^\alpha \Gamma_{\mu 2}^\nu \right) V^\mu
 \end{aligned}$$

Obsérvese que se ha introducido índices mudos nuevos. Ahora, recuérdese que los índices 1 y 2 están presentes de acuerdo a que las trayectorias fueron escogidas a lo largo de esas coordenadas. Debe aclararse que dicho sentido de la trayectoria es asimétrico en 1 y 2; puesto que el cambio  $\delta V^\alpha$  podría haber sido de signo contrario si se hubiese considerado el movimiento en dirección opuesta (es decir, intercambiando los roles de

1 y 2). Más allá de ésto, si se usa líneas coordenadas generales  $x^\sigma$  y  $x^\lambda$  (dimensiones extras), entonces:

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha &= \text{cambio en } V^\alpha \text{ debido al transporte por: } \delta a \vec{e}_\sigma, \delta b \vec{e}_\lambda, -\delta a \vec{e}_\sigma \text{ y } -\delta b \vec{e}_\lambda. \\ &= \delta a \delta b (\Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) V^\mu\end{aligned}\quad (3.36)$$

De ésta última expresión obsérvese que  $\delta V^\alpha$  depende de  $\delta a \delta b$ , que refiere a la coordenada “área” encerrada por el laso. Así queda claro que si la longitud del laso en una dirección es doblada,  $\delta V^\alpha$  es doblada. Ésto significa que  $\delta V^\alpha$  depende linealmente de  $\delta a \vec{e}_\sigma$  y  $\delta b \vec{e}_\lambda$ , indicando que también existe dependencia lineal de la ecuación (3.36) sobre  $V^\alpha$ .

En definitiva, el término (operador) al interior del paréntesis puede definirse como: *Tensor de Curvatura de Riemann*

$$\boxed{R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha \equiv \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu}\quad (3.37)$$

De tal manera que  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$  sean las componentes de un tensor  $\binom{1}{3}$ , cual supla con los argumentos de  $\vec{V}$ ,  $\delta a \vec{e}_\mu$  y  $\delta b \vec{e}_\nu$ , construyendo en definitiva  $\delta V^\alpha$ , la componente del cambio en  $\vec{V}$  sobre el transporte paralelo alrededor de un laso dado por  $\delta a \vec{e}_\mu$  y  $\delta b \vec{e}_\nu$ .

### 3.3.4. *Tensor Curvatura y la métrica*

#### [[ *Planitud Local*

En breve, se pueden encontrar unas coordenadas localmente lorentzianas o localmente inerciales:

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longrightarrow x'^\alpha = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

Cuando existe:

$$g_{\alpha'\beta'}(x'^\mu) = \eta_{\alpha'\beta'} + \sigma((x'^\mu)^2)$$

ello implica que en un punto  $P$  se puede presentar lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1.) \quad & g_{\alpha\beta}(P) = \eta_{\alpha\beta} \\ 2.) \quad & \frac{\partial g_{\alpha\beta}(P)}{\partial x^\gamma} = 0 \\ 3.) \quad & \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}(P)}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} \neq 0 \end{aligned}$$

Por ejemplo, la función  $f(x) = x^2$ , cuando se evalúa sus derivadas en el punto  $P = x = 0$ . Por otra parte, aplicando el concepto de planitud local a los símbolos de Christoffel y tensor métrico, se tiene:

$$\begin{cases} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha = 0 & : \quad \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha \neq 0 \\ g_{\alpha\beta,\nu} = 0 & : \quad g_{\alpha\beta,\mu\nu} \neq 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

.]]

Considérese la aplicación del criterio  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$  de la ecuación (3.38) sobre el tensor curvatura (3.37):

$$R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha = \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha \quad (3.39)$$

Análogamente, utilizando la filosofía de la expresión (3.38), considérese la derivada covariante sobre el símbolo de Christoffel (3.29)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\beta\mu}^\gamma &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^\lambda} \right) (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) \\ \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\gamma &= \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu\lambda} + g_{\alpha\mu,\beta\lambda} - g_{\beta\mu,\alpha\lambda}) \\ \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\gamma &= \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu\lambda} + g_{\alpha\mu,\beta\lambda} - g_{\beta\mu,\alpha\lambda}) \end{aligned}$$

luego, reemplazando en (3.39), se obtiene en un punto  $P$ : (por comodidad, se cambiará la combinación de índices mudos)

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\beta,\mu\nu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu}) \quad (3.40)$$

Ahora, si la simetría de  $g_{\alpha\beta}$  para con derivadas mixtas concede

$$g_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\beta,\nu\mu} \quad (3.41)$$

entonces, aplicando sobre la expresión (3.40):

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \quad (3.42)$$

Por otra parte, el índice contravariante  $\alpha$  de la expresión (3.42) puede escribirse, por definición, como: (recuérdese  $\delta_{\alpha}^{\sigma}$ )

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}R_{\beta\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (3.43)$$

Además, la anterior expresión cumple las siguientes identidades:[21]

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

en conclusión, el tensor  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  es asimétrico sobre los primeros pares y segundos pares de índices; y es simétrico sobre la permutación de éstos dos pares.

Finalmente, si se refiere a una variedad plana ella posee una definición global de paralelismo: un vector puede ser movido paralelamente alrededor de si mismo sobre una curva arbitraria y regresar a su punto de partida sin cambio alguno. Luego:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = 0 \quad (3.45)$$

### 3.4 Identidades de Bianchi, Tensor y Escalar de Ricci

Permítase regresar a la ecuación (3.43); de allí, diferenciando parcialmente con respecto a  $x^{\lambda}$  y evaluando el resultado en coordenadas localmente inerciales:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \quad (3.46)$$

análogamente, como sucedió con las ecuaciones (3.43) y (3.44), para la ecuación (3.46) existe: (obsérvese que se presenta la simetría  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$  y conmutación de derivadas parciales)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0 \quad (3.47)$$

En inferencia, bajo la filosofía de la sección 3.2.2, (ecuación (3.19)) con  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$  se obtiene: (traslación a cualquier sistema ,  $\rightarrow$  ;)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} = R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} \quad (3.48)$$

implicando que la expresión (3.47) sea equivalente a:

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0} \quad (3.49)$$

ésta última ecuación tensorial es válida en cualquier sistema y se conoce como *Identidades de Bianchi*.

Además, si se tiene un tensor  $\binom{m}{n}$  por contracción resulta  $\binom{m-1}{n-1}$ . En efecto, si se tiene el tensor de Riemann que  $\epsilon \binom{1}{3}$ , su respectiva contracción hará que  $\epsilon \binom{0}{2}$ . Por consiguiente, se obtiene el *Tensor de Ricci*: [21]

$$\boxed{R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}} \quad (3.50)$$

El tensor de Ricci es un tensor simétrico bivalente obtenido como una traza del tensor de curvatura, que, como aquel, puede definirse en cualquier variedad dotada de una conexión afín. El tensor de Ricci determina totalmente al tensor de curvatura, si la variedad de Riemann correspondiente tiene dimensión  $n < 4$ . Por lo tanto, el tensor de Ricci es esencialmente la única contracción del tensor de Riemann.

Finalmente, si se aplica la métrica al tensor (3.50), se obtiene el escalar de curvatura de Ricci: [21]

$$\boxed{R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}} \quad (3.51)$$

### 3.5 Tensor y ecuación de campo de Einstein

Obsérvese el tercer miembro de la ecuación (3.51), implica que puede obtenerse la contracción de Ricci si se aplica la métrica  $g^{\alpha\beta}$  a las identidades de Bianchi (3.49):

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] &= 0 \\ g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + (-R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu}) + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] &= 0 \\ R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\lambda;\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

para derivar éste resultado se requiere dos hechos. Primero, recuérdese la ecuación (3.26) para cualquier sistema:

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \quad (3.53)$$

y siempre que  $g^{\alpha\mu}$  sea una función de sólo de  $g_{\alpha\beta}$ , se cumple que: (recuérdese también (3.20))

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0 \quad (3.54)$$

Por lo tanto, un primer hecho es que  $g^{\alpha\mu}$  y  $g_{\beta\nu}$  pueden ser tomados dentro y fuera de las derivadas covariantes (índices superiores e inferiores conmutan con diferenciación covariante). Y un segundo hecho radica en la condición:

$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} = -R_{\beta\lambda;\nu}$$

lo cual concuerda con el segundo término de la ecuación (3.52), conocido como la contracción de las identidades de Bianchi.

Ahora, una ecuación más útil se obtiene de una nueva contracción sobre los índices  $\beta$  y  $\nu$ : (aplicando la métrica y utilizando la asimetría de  $R$ )

$$\begin{aligned} g^{\beta\nu} [R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu}] &= 0 \\ R_{;\lambda} - R_{\lambda;\mu}^{\mu} + (-R_{\lambda;\mu}^{\mu}) &= 0 \\ R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\mu}^{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

siempre que  $R$  sea un escalar,  $R_{;\lambda} \equiv R$  en todas las coordenadas. Adicionalmente, ésta última ecuación (3.55) puede escribirse de la forma:

$$(2R_{\lambda}^{\mu} - \delta_{\lambda}^{\mu} R)_{;\mu} = 0 \quad (3.55)$$

ello define las identidades de Bianchi dos veces contraídas. En efecto, si se define el tensor simétrico:[21]

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = G^{\beta\alpha} \quad (3.56)$$

entonces se observa que en la ecuación (3.55) se cumple:

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (3.57)$$

El tensor  $G^{\alpha\beta}$  es obtenido únicamente desde el tensor de Riemann y la métrica, y

se conoce como tensor de Einstein. Aquí, para las ecuaciones de campo de Einstein, se sabe que:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$$

donde  $T^{\alpha\beta}$  define el tensor energía-esfuerzos. Cuyas identidades de Bianchi, implican:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

cual es la ecuación de la conservación local de la energía y momentum.

En conclusión, resultando la ecuación de campo de Einstein como:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = 8\pi T^{\alpha\beta}$$

donde  $c^4 \equiv 1$ . No obstante, dicha ecuación suele escribirse de una forma generalizada:[32]

$$\boxed{R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}} \quad (3.58)$$

donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $G$  es la constante gravitacional de Newton,  $c$  la velocidad de la luz.

### 3.6 Métrica y su determinante

Finalmente, para culminar el presente capítulo, se hace necesario analizar la obtención del determinante de la métrica. Por ejemplo, cuando se posee un intervalo espacio-tiempo de la forma:

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

cuya métrica es

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu; \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = i, j = 1, 2, 3; \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que si dos eventos son simultáneos en un sistema de coordenadas  $x_\mu$ , implica que su incremento infinitesimal  $dx_0 = 0$  (puntos adyacentes por ejemplo); en

efecto, ellos no deberían ser conectados por una señal alguna, luego es evidente que:

$$g^{ij} dx_i dx_j > 0$$

ó

$$g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu > 0 \Leftrightarrow dx_0 = 0$$

ésta desigualdad particular, ahora ha de mantener arbitrariedad en  $dx_\mu$ , mostrando que su norma al cuadrado se define como positiva. La necesidad y condición suficiente para que ésto sea cierto es que todos sus subdeterminantes  $g^{\mu\nu}$  sean positivos. Sin embargo, ello ocurre para un tratamiento netamente espacial, puesto que:

$$g^{ii} > 0, \quad \begin{vmatrix} g^{ii} & g^{ij} \\ g^{ji} & g^{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} > 0, \quad g^{00} < 0$$

siendo así, al agregar propiamente incrementos temporales (para descripciones causales razonables), el determinante de la métrica será:

$$g = |g^{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} < 0 \tag{3.59}$$

Nota: Por tal motivo, en algunas ecuaciones relativistas, bajo la necesidad de extraer la norma del determinante de la métrica ( $g$ ), ella se suele escribir como  $\sqrt{-g}$ .





*La Geometría es el arte de pensar bien, y dibujar mal  
(Poincare)*



---

*ESPACIO-TIEMPO DE SITTER*

---

Teóricamente, se ha mantenido el interrogante acerca de qué ideales e hipótesis puedan ser compatibles con las limitadas observaciones experimentales que describen de alguna manera el comportamiento del Universo. De la experiencia, se han descartado modelamientos desde un punto de vista clásico; insertando ahora curiosos e interesantes tratamientos modernos, que ya no aplican sólo a tres dimensiones espaciales y a una dimensión excluyente temporal como solía ser; a partir de los años de 1900 aproximadamente, se han adoptado cuatro y hasta  $n$  dimensiones acopladas como un todo para lograr modelar algunas características que presenta el Universo.

Es evidente que el objetivo de la Física siempre será resolver enigmas detrás de la complejidad del Universo. Actualmente, gran número de grupos trabajan incansablemente bajo éste propósito; sin embargo, más allá de que quizás existan teorías aceptables, también se presenta para ellas cierto grado de incertidumbre, puesto que el Universo es, y pareciera que siempre será, un tema abierto y lo es más aún cuando no existen argumentos de tipo absoluto. No obstante, más allá de lo complejo que pueda ser, tanto la Teoría de la Relatividad como la Mecánica Cuántica son y serán un firme puente para conectar con dichos y tan anhelados modelamientos del Universo. De acuerdo a ello, como consecuencia de la intensa actividad de investigación en éste campo, surgen tratamientos teóricos como lo son: la teoría de cuerdas, membranas, dimensiones extras, compactificaciones, orbifolios, teorías antrópicas, universos paralelos, multiverso, etc. Elementos emergentes que brindan la posibilidad de aproximarnos a conocimientos más amplios simulados por el Universo. No obstante, de acuerdo a la ausencia del experimento, es importante tener claro que quizás todos éstos modelos presentan aspectos y resultados incompletos, por lo que siempre existirá la motivación para nuevos ideales a futuro.

Ahora, particularmente, considérese un fenómeno en específico o curiosidad del Universo: Desde hace algunos años e incluso actualmente, a través de observaciones astronómicas, se halló y se confirmó que el Universo se está expandiendo de forma acelerada[2][3]. Al respecto, la Física ha tratado de explicar dicho fenómeno con algunas hipótesis, entre ellas resalta la de la *Energía Oscura*. La realidad del Universo supera toda lógica desde un punto de vista clásico y de allí el por qué se debe recurrir a otro tipo de pensamientos. No obstante, la razón fuente desde la cual se explique la expansión del Universo resulta ser aún un delirio; pero más allá de esto, existen modelos físico-matemáticos que describen a su manera la mecánica o comportamiento del Universo sin necesidad de especificar una razón puntual del origen o fuente de ello. Pareciera que así sucede con el modelo del Universo o *Espacio-tiempo de Sitter*.

El presente capítulo desea realizar un estudio del Espacio-tiempo de Sitter, en el cual se logren cubrir algunas características (e interpretación), concebidas del tratamiento físico-matemático de un particular espacio-tiempo, el cual consiste, en breve, de un acople del espacio-tiempo de Minkowski de geometría  $dS_4$  en un nuevo espacio-tiempo  $dS_5$  de curvatura constante. Para ello, paso a paso, se irá insertando trabajos teóricos a priori (únicamente los necesarios) que dieron fruto en definitiva a la obtención del Espacio-tiempo de Sitter.

## 4.1 Dimensiones extras tipo Kaluza-Klein

Actualmente, incluso, se percibe un Universo en dependencia de tres dimensiones espaciales y excluyentemente, se detecta una cuarta dimensión abstracta que es la temporal. En antaño, ni el propio Newton, más allá de sus aproximaciones a nivel micro, logró dar respuestas convincentes a los tantos interrogantes a nivel macro del Universo. Sin embargo, después de la impresionante publicación de 1905 de la Teoría Especial de la Relatividad por Einstein, la mentalidad en la comunidad científica cambió considerablemente, tanto así que surgieron de inmediato dos problemas relevantes en Física:

- i).* Construir una teoría de la gravitación consistente con la relatividad especial;
- ii).* Construir una teoría unificada de la gravitación y la electrodinámica.

Entre algunos,<sup>1</sup> el propio Einstein trabajó en cuerpo y alma para la obtención de la solución al primer problema con su publicación de la Teoría General de la Relatividad en 1916, la cual describe la interacción gravitacional de manera muy precisa a través de un tensor métrico.

Ahora, en cuanto al segundo problema, Theodor Kaluza en 1919 y Oskar Klein en 1926, propusieron una manera de unificar los campos electromagnéticos y gravitacionales, considerándolos en un campo gravitatorio de 5 dimensiones. En breve, Kaluza y Klein consideraron una topología Espacio-tiempo 5D cual está descrita por el producto directo:

$$\mathbb{M} \otimes S^1 \quad (4.1)$$

donde  $\mathbb{M}$  es el Espacio-tiempo de Minkowski y define una variedad pseudo-Riemanniana 4D;<sup>2</sup>  $S^1$  es una circunferencia de radio  $R$ . Es decir, las coordenadas del espacio-tiempo 5D pueden expresarse de la forma:

$$x^M = (x^\mu, R\theta) \quad (4.2)$$

luego,  $x^M$  define el acople 5D con  $M \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $x^\mu$  define las coordenadas 4D con  $\mu \equiv 0, 1, 2, 3$ ; para la quinta dimensión surge la coordenada angular  $\theta$  de  $S^1$ , cuya

<sup>1</sup> Gunnar Nordstrom trabajó arduamente en el primer problema; sin embargo, no logró resolverle puesto que trabajó clásicamente al igual que Newton, obteniendo únicamente una teoría escalar de la gravitación

<sup>2</sup> En geometría diferencial, una variedad pseudo-Riemanniana es una cantidad diferenciable equipada con un tensor métrico  $(0,2)$ , cantidad simétrica que es  $\mathcal{N}(\mathcal{O})$  DEGENERADA en cada punto de la variedad.

condición de periodicidad es  $\theta = \theta + 2\pi$ .

Al respecto, Oskar Klein partió de la siguiente hipótesis: Si para 4D existe un campo escalar de la forma

$$\phi = \phi(x^\mu) = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (4.3)$$

entonces para 5D puede considerarse el campo escalar:

$$\Phi = \Phi(x^\mu, y) \quad (4.4)$$

donde  $y = S^1 = R\theta$  y refiere a la quinta dimensión.

Sucesivamente, a la ecuación (4.4) puede aplicársele una expansión de Fourier:

$$\begin{aligned} \Phi(x^\mu, y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi(x^\mu) e^{iny/R} \\ &= \sum_n \phi(x^\mu) e^{in\theta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

siendo  $n \in \mathbb{Z}$ .

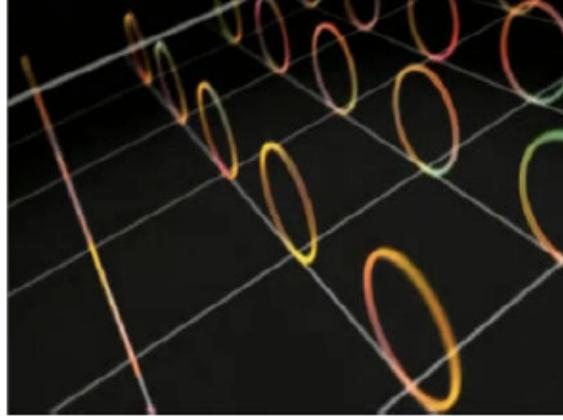
La representación topológica de Kaluza-Klein (ecuación (4.5)) define una red 5D, en la cual a cada nodo de ella no sólo se le asocia un reloj, sino también se le ajusta una curvatura de la forma  $S^1$ . Véase la Figura 4.1. En efecto, a través de la técnica de mapeo de Fourier, se hace la transición de un espacio-tiempo de 4D a 5D.

Por otra parte, es claro que si  $n \in \mathbb{Z}$ , implica que existe un número infinito de campos. En efecto, para los modos  $n \neq 0$  están asociados con campos masivos; mientras que aquellos que estén asociados con  $n = 0$  son no masivos.[5] Bajo ésta última idea, a continuación, considérese la densidad lagrangiana del muelle másico en 4D:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^2) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde se aplicó la condición  $n = 0 \Rightarrow m = 0$ . En inferencia, la densidad lagrangiana 5D de un campo no masivo es:

$$\mathcal{L}_{(5D)} = \frac{1}{2} \partial_M \Phi \partial^M \Phi^* \quad (4.7)$$



**Figura 4.1:** *Hipótesis de un Espacio-tiempo 5D según Kaluza-Klein. La red representa el espacio-tiempo de Minkowski 4D (3 dimensiones espaciales y relojes), donde en cada nodo de la misma se agrega la quinta dimensión  $S^1$ , la cual representa la cuarta dimensión espacial (curvatura).[5]*

Por consiguiente, considérese la integral de acción del campo escalar anterior:

$$\begin{aligned}
 S_{(5D)} &= \int_{(5)} \mathcal{L}_{(5D)} d^5x \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(5)} \partial_M \Phi \partial^M \Phi^* d^4x dS^1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(4)} \partial_M \Phi \partial^M \Phi^* d^4x R d\theta
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ahora, la signatura que utilizó Kaluza-Klein fue  $- , + , + , \dots +$  (además, la velocidad de la luz se ha naturalizado  $c = 1$ ). En inferencia, el elemento de línea o el intervalo espacio-tiempo 5D para la situación es:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + R^2 d\theta^2 \tag{4.9}$$

Recuérdese la ecuación de Klein-Gordon, aplicada en éste caso a 5D:<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Véase en el Apéndice **D**, la demostración de la ecuación de Klein-Gordon, la cual se halla a partir de la ecuación de Schrodinger.

$$(\partial^M \partial_M + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \Phi(x^\mu, y) = 0 \quad (4.10)$$

sobre ella, considerando nuevamente el caso de campos no masivos:

$$\partial^M \partial_M \Phi(x^\mu, y) = 0 \quad (4.11)$$

donde el término:

$$\begin{aligned} \partial_M \partial^M &\equiv \square^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \square^2 + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= \partial_\mu \partial^\mu + \frac{1}{R^2} \partial_\theta^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sucesivamente, considérese el reemplazo de (4.12) en (4.11), de tal manera que en definitiva, dicho resultado se aplique al campo escalar (4.5):

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + \frac{1}{R^2} \partial_\theta^2) \phi_n(x^\mu) e^{in\theta} &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + (in)(in) \frac{1}{R^2}) \phi_n(x^\mu) e^{in\theta} &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu - \frac{n^2}{R^2}) \phi_n(x^\mu) &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Del resultado precedente, en comparación a la ecuación de Klein-Gordon (4.10), se observa que cada modo de Kaluza-Klein (KK) se puede interpretar como un campo escalar 4D de masa fuente  $m_n = |n|/R$ , (recuérdese que  $c = 1$  y  $\hbar = 1$ ). Técnicamente, al anterior procedimiento de hacer la transición de una teoría de mayor dimensión a una de menor se le conoce como “compactificación”.<sup>4</sup> Finalmente, recuérdese de nuevo la densidad lagrangiana del muelle másico, cuya fuente ahora será sustituida por el

---

<sup>4</sup>En efecto, es claro entonces, que al compactificar una teoría de campo escalar  $\mathcal{N}(0)$  Masivo 5D, se obtiene una teoría de un campo escalar no masivo 4D asociado al modo cero del desarrollo de Fourier y un número infinito de campos escalares masivos conocidos como la torre de Kaluza-Klein, asociados a los modos restantes en el desarrollo de las series Fourier.

resultado obtenido previamente por la compactificación de Kaluza-Klein:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_n (\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n^* - m_n^2 \phi_n^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n (\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n^* - \frac{|n|^2}{R^2} \phi_n^2)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

En contraste a la ecuación (4.8), la nueva integral de acción será:

$$\begin{aligned}
 S_{(5D)} &= \int_{(5)} \mathcal{L}_{(5D)} d^5x \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n \int_{(5)} (\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n^* - \frac{|n|^2}{R^2} \phi_n^2) d^4x R d\theta \\
 &= \frac{1}{2} (2\pi R) \sum_n \int_{(4)} (\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n^* - \frac{|n|^2}{R^2} \phi_n^2) d^4x
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

donde el factor  $2\pi R$  en la acción proviene de integrar en la coordenada  $R\theta$  y corresponde al volumen de la dimensión extra. Adicionalmente, es posible truncar de manera consistente en éste caso la torre de Kaluza-Klein, y obtener únicamente con el modo cero del campo, técnicamente a éste procedimiento se le conoce como *reducción dimensional*.

## 4.2 Espacios Máximamente Simétricos

Las ecuaciones de Einstein definen de la forma más acertada posible el origen y comportamiento del Universo; he ahí el por qué surgen teorías que intentan resolver, a su manera, dichas ecuaciones. No obstante, éstas soluciones algebraicas exactas se caracterizan por su alto grado de simetría. A continuación, bajo la anterior filosofía, se pretende ajustar nociones de los espacios máximamente simétricos, cuales se caracterizan por tener curvatura constante (así como lo hace el espacio-tiempo de Sitter).

### 4.2.1. Simetrías y Vectores de Killing

“Toda simetría de un sistema físico da lugar a una cantidad o ley de conservación ” ... (Teorema de Noether).<sup>5</sup>

De acuerdo a la anterior filosofía, surge un interrogante: ¿cómo hallar las simetrías en la teoría de la relatividad general?. En efecto, se podría decir, por ejemplo, que la métrica estándar de una  $S^2$  esfera o  $S^3$  esfera tiene simetría de rotación, ya que son invariantes bajo rotaciones de la esfera. Por lo tanto, las simetrías puede ser entendida como una invarianza de la métrica en una familia particular de las transformaciones de coordenadas. No obstante, más allá de ésto, existe una forma sistemática de hallar dichas simetrías a través de vectores, conocidos como vectores de Killing.

En concreto, considérese una métrica que define a su correspondiente sistema coordenado:

$$g_{\mu\nu} \leftrightarrow \{x^\mu\}$$

En efecto, su respectiva transformación de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\nu$$

obedece a la transformación de la métrica:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma g'_{\rho\sigma}(x') \\ &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x') \end{aligned} \quad (4.16)$$

La anterior métrica es “isométrica” cuando resulta invariante bajo una transformación de coordenadas; es decir, cuando:

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x') \quad \forall x \quad (4.17)$$

---

<sup>5</sup> A cada simetría (continua) le corresponde una ley de conservación y viceversa. Por ejemplo: i) La invarianza con respecto a la (dirección del eje de) rotación, otorga la ley de conservación del momento angular; ii) La invarianza de sistemas físicos con respecto a la traslación (dicho simplemente, las leyes de la física no varían con la localización en el espacio), otorga la ley de conservación del momento lineal; iii) La invarianza con respecto a (la traslación) el tiempo, otorga la ley de conservación de la energía.

En inferencia, se hace paso a la obtención de las isometrías de la métrica. Considérese una transformación de coordenadas infinitesimal:<sup>6</sup>

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x) \quad (4.18)$$

donde  $|\epsilon| \ll 1$  y  $\xi^\mu$  es un campo vectorial denominado vector de Killing (generador de isometría). Ahora, a continuación considérese:

### [ *Derivada de Lie* ]

Define lo que en topología diferencial se denomina: “derivación tensorial”, una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal sobre el conjunto de tensores tipo (r,s) (índice superior, índice inferior), que preserva el tipo tensorial (incluyendo conmutaciones y reglas). Para especificar el concepto de derivada de Lie, en primer lugar, considérese la transformación que conecta los puntos  $p$  y  $q$ , (véase la Figura 4.2.1). Es decir, tensorialmente, sean los puntos de evaluación:

$$x_{(p)}^\mu \rightarrow \text{coordenada en el punto } p$$

$$x_{(q)}^\mu \rightarrow \text{coordenada en el punto } q$$

donde  $\mu$  define la dimensión. El corrimiento o traslación de un punto a otro satisface la ecuación (4.18), a la cual podría agregársele los subíndices para ser más pedagógicos:

$$x_{(q)}'^\mu = x_{(p)}^\mu + \epsilon \xi^\mu(x_p) \quad (4.19)$$

De tal forma que  $\xi^\mu$  mantenga su función como campo vectorial, de modo que todo punto de la variedad sea arrastrado en la dirección local de  $\xi$  una cantidad  $\epsilon$ . En inferencia, la expresión (4.19) induce una transformación que lleva a todo objeto geométrico ubicado en  $p$ , por ejemplo, un tensor general  $T_{(p)}$ , a su nueva imagen en  $q$ ,  $T_q^{nuevo}$ . Por lo tanto, puede definirse la derivada de Lie como:

$$\mathcal{L}_\xi T_{(p)} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{T_{(p)} - T_q^{nuevo}}{\epsilon} \right) \quad (4.20)$$

donde  $T_q^{nuevo}$  es el término al cual se le ha hecho el corrimiento infinitesimal. ]

---

<sup>6</sup> La transformación que se presenta en (4.18) surge de la simplicidad de variación, por ejemplo, de campos escalares:  $\delta\phi = \phi' - \phi$  y/o vectores  $\delta x = x' - x$ .

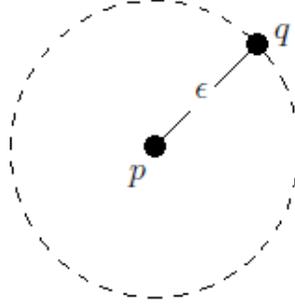


Figura 4.2: *Traslación de punto de evaluación. El punto q se encuentra en la vecindad del punto p a una distancia infinitesimal  $\epsilon$  en la dirección  $\xi^\mu$ .*

En inferencia, regresando a la ecuación (4.16), surgen dos transformaciones infinitesimales (4.18) con el respectivo índice, es decir, para el primer factor de (4.16) se tiene:

$$x'^\rho = x^\rho + \epsilon \xi^\rho(x) \quad (4.21)$$

derivando ésta última con respecto a  $x^\mu$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\mu} + \epsilon \frac{\partial \xi^\rho(x)}{\partial x^\mu} \\ \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} &= \delta_\mu^\rho + \epsilon \xi_{,\mu}^\rho(x) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Análogamente, para el segundo factor de (4.16) se tiene:

$$\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\sigma + \epsilon \xi_{,\nu}^\sigma(x) \quad (4.23)$$

A continuación, puede considerarse una variación sobre un tensor de segundo orden (la métrica por ejemplo), en la cual se pueda aplicar la ecuación (4.18). Es decir:

$$\begin{aligned} g'_{\rho\sigma}(x') &= g_{\rho\sigma} + \delta g_{\rho\sigma} \\ &= g_{\rho\sigma} + \delta x^\mu \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \\ &= g_{\rho\sigma} + (x'^\mu - x^\mu) \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \\ &= g_{\rho\sigma} + \epsilon \xi^\mu g_{\rho\sigma,\mu} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Reemplazando (4.22), (4.23) y (4.24) en (4.16) se halla una nueva métrica bajo transformaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}^{(nueva)} &= (\delta_{\mu}^{\rho} + \epsilon \xi_{,\mu}^{\rho}(x))(\delta_{\nu}^{\sigma} + \epsilon \xi_{,\nu}^{\sigma}(x))(g_{\rho\sigma} + \epsilon \xi^{\mu} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}}) \\
 &= (\delta_{\mu}^{\rho} + \epsilon \xi_{,\mu}^{\rho})(g_{\rho\nu} + \epsilon \xi^{\mu} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \epsilon g_{\rho\sigma} \xi_{,\nu}^{\sigma} + 0) \\
 &= g_{\mu\nu} + \epsilon \xi^{\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} + \epsilon g_{\mu\sigma} \xi_{,\nu}^{\sigma} + \epsilon g_{\rho\nu} \xi_{,\mu}^{\rho} + 0 + 0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Aplicando la derivada de Lie:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\xi} g_{\mu\nu} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(nuevo)}}{\epsilon} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} - \epsilon \xi^{\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} - \epsilon g_{\mu\sigma} \xi_{,\nu}^{\sigma} - \epsilon g_{\rho\nu} \xi_{,\mu}^{\rho}}{\epsilon} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{-\epsilon \xi^{\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} - \epsilon g_{\mu\sigma} \xi_{,\nu}^{\sigma} - \epsilon g_{\rho\nu} \xi_{,\mu}^{\rho}}{\epsilon} \right) \\
 0 &= \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\sigma} + \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\nu} + \xi^{\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde se aplicó la “Isometría”  $\mathcal{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = 0$ . Sumando y restando algunos términos; en segunda instancia agrupando:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\sigma} + \xi^{\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} g_{\rho\nu} + \xi^{\rho} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \xi^{\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} - \xi^{\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} - \xi^{\rho} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (g_{\mu\sigma} \xi^{\sigma}) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (g_{\rho\nu} \xi^{\rho}) + \xi^{\alpha} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} \right] &= 0 \\
 \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \xi^{\alpha} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde se aplicó  $\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma} \xi^{\mu}$ . [24][25]

La ecuación (4.27) es ya un resultado final; no obstante, teniendo en cuenta el apartado de los símbolos de Christoffel (ecuación (3.29)), el tercer término de dicha ecuación puede escribirse como  $\xi^{\alpha} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} \right] = -2\xi_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ . E incluso, utilizando la notación otorgada por la ecuación (3.13) se obtiene  $\xi_{\mu;\nu}(x) = \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \xi_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ .

En efecto, la ecuación (4.27) puede escribirse en definitiva de forma más compacta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - 2\xi_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= 0 \\ \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} &= 0\end{aligned}\quad (4.28)$$

A ésta última expresión se le conoce como la ecuación de Killing y cualquier campo de vectores  $\xi_\sigma(x)$  que se satisfacen en dicha ecuación, se dice que forma un vector de Killing de la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

### [[ *Propiedades de los vectores de Killing*

i) Cualquier combinación lineal de los vectores de Killing  $\xi^{(1)}$  y  $\xi^{(2)}$ , con coeficientes constantes  $a$  y  $b$ ,  $a\xi^{(1)} + b\xi^{(2)}$  es un vector de Killing.

ii) El conmutador  $[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}]$  es un vector de Killing. Éste es el álgebra de Lie del grupo de Isometría.

iii) En general, si las componentes de la métrica son todas independientes de una coordenada particular, por ejemplo,  $ds^2 = -d\tau^2 + r f(\theta) dr^2 + d\theta^2$ , entonces,  $\xi_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}$  es un vector de Killing, es decir, de la ecuación (4.28) se observa:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g_{\mu\nu} = 0, \quad \forall \quad \mu, \nu \quad \Rightarrow \quad \vec{\xi}_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (4.29)$$

es un vector de Killing.]].

## 4.3 *Homogeneidad e Isotropía de un espacio máximamente simétrico*

Si un espacio  $n$ -dimensional es máximamente simétrico, entonces la curvatura es la misma en todas las partes; esto quiere decir que el espacio admite  $n$  vectores de Killing de traslación y es la misma en cualquier dirección; a su vez, esto quiere decir que admite  $n(n-1)/2$  vectores de Killing de rotación; en otras palabras, un espacio máximamente simétrico debe ser homogéneo e isotrópico sobre todos los puntos del espacio. Por consiguiente, un espacio máximamente simétrico admite  $n(n+1)/2$  vectores de Killing. El hecho de tener una variedad  $n$ -dimensional máximamente simétrica implicará tener las siguientes relaciones:[31]

1. Los espacios máximamente simétricos son los únicos que son especificados por un

escalar de curvatura constante  $R_{(n)}$  (escalar de Ricci). Es decir, si se conoce la curvatura en un punto, entonces se conoce en todas las partes:

$$R_{(n)} \equiv kn(n-1), \quad k = \text{cte.} \quad (4.30)$$

2. El tensor de Ricci es proporcional al tensor métrico:

$$R_{\alpha\beta} \equiv \frac{R_{(n)}}{n} g_{\alpha\beta} \quad (4.31)$$

3. Y/o el tensor de Riemann está dado por:

$${}^{(n)}R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{n(n-1)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) R_{(n)} \quad (4.32)$$

4. Finalmente, la constante cosmológica depende de:

$$\Lambda_n \equiv \frac{(n-1)(n-2)}{2l^2} \quad (4.33)$$

#### 4.4 Espacios de curvatura constante

A continuación, se estudiará espacios máximamente simétricos con una métrica de Riemann,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  y  $\mathbb{H}^n$ . El de mayor interés es el espacio hiperbólico; sin embargo, para llegar de la mejor forma a él, se hace necesario, a manera introductoria y pedagógica, iniciar con el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

##### 4.4.1. Espacio euclideo $\mathbb{R}^n$

Recuérdese el intervalo espacio-tiempo euclideo aplicado a  $n$  dimensiones cuya métrica se relaciona de la forma:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (4.34)$$

donde los índices latinos  $i, j, \dots$ , corren de 1 hasta  $n$ . De acuerdo al apartado anterior, éste es un espacio máximamente simétrico, en consecuencia tiene  $n(n+1)/2$  vectores de Killing linealmente independientes; es decir, soluciones linealmente independientes que satisfacen la ecuación (4.28). Dichas soluciones son de la forma: (vector de Killing)

$$\vec{\xi}_{(a)} = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (4.35)$$

que corresponden a  $n$  *traslaciones espaciales*.

Sin embargo, también existen soluciones de la forma:[5][31]

$$\vec{\xi}_{(ab)} \equiv x^b \frac{\partial}{\partial x^a} - x^a \frac{\partial}{\partial x^b} \quad (4.36)$$

cuales corresponden a  $n(n-1)/2$  *rotaciones espaciales* independientes, (las ecuaciones (4.35) y (4.36) se comprenderán de la mejor manera en el futuro ejemplo). Las soluciones  $\vec{\xi}_{(ab)}$  son asimétricas en los índices. De tal forma que todas las soluciones  $n+n(n-1)/2 = n(n+1)/2$  son soluciones linealmente independientes sobre la ecuación de Killing (4.28). En conclusión, los espacios euclídeos admiten  $n(n+1)/2$  vectores de Killing linealmente independientes y por lo tanto son espacios máximamente simétricos. Debe aclararse que éste espacio tiene escalar de curvatura  $R = 0$ .

**Ejemplo:** *espacio euclídeo*  $\mathbb{R}^3$

Considérese los vectores de Killing de un espacio plano tridimensional cuyo intervalo espacio-tiempo en coordenadas cartesianas se escribe:

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (4.37)$$

En segunda instancia, recuérdese la ecuación de Killing aplicada a coordenadas

cartesianas:  $(\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x^i} = 0)$ <sup>7</sup>

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{i;j} + \xi_{j;i} \\ 0 &= \frac{\partial \xi_{x^i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_{x^j}}{\partial x^i} - 2\xi_k \Gamma_{ji}^k \\ 0 &= \frac{\partial \xi_{x^i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_{x^j}}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Si  $i, j \equiv x^1, x^2, x^3$  con  $i \neq j$ , a primera vista se observa que para que la ecuación (4.38) se satisfaga debe cumplirse que sus términos sean nulos:

$$\frac{\partial \xi_{x^i}}{\partial x^j} = 0 = \frac{\partial \xi_{x^j}}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial \xi_{x^1}}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi_{x^2}}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi_{x^3}}{\partial x^3} = 0 \quad (4.39)$$

Sin embargo, para las ecuaciones (4.38) y (4.39) se producen la siguientes soluciones definidas en primera instancia como:

$$\begin{cases} \xi_{x^1} = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_4 = \xi^{x^1} \\ \xi_{x^2} = b_1 x^1 + b_2 x^3 + a_5 = \xi^{x^2} \\ \xi_{x^3} = c_1 x^1 + c_2 x^2 + a_6 = \xi^{x^3} \end{cases} \quad (4.40)$$

Luego, sustituyendo en (4.38) las dos primeras ecuaciones del trio (4.40)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{x^1}}{\partial x^2} &= -\frac{\partial \xi_{x^2}}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2}(a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_4) &= -\frac{\partial}{\partial x^1}(b_1 x^1 + b_2 x^3 + a_5) \\ a_1 &= -b_1 \Rightarrow b_1 = -a_1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Análogamente, para las demás combinaciones:

$$\frac{\partial \xi_{x^1}}{\partial x^3} = -\frac{\partial \xi_{x^3}}{\partial x^1} \Rightarrow c_1 = -a_2 \quad (4.42)$$

---

<sup>7</sup>De acuerdo a la particularidad de manejar inicialmente un espacio plano, implica que los símbolos de Christoffel son todos cero, acarreado incluso que el tensor de Riemman, Ricci y escalar de curvatura de éste espacio sean nulos. Por lo tanto, en la presente sección no se observa la necesidad de calcular dichos parámetros; no obstante, éstos cálculos se realizarán en el ejemplo de la siguiente sección (esfera  $S^2$  incrustada en  $\mathbb{R}^3$ ).

y

$$\frac{\partial \xi_{x^2}}{\partial x^3} = -\frac{\partial \xi_{x^3}}{\partial x^2} \Rightarrow c_2 = -b_2 \equiv -a_3 \quad (4.43)$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones resultan

$$\begin{cases} \xi_{x^1} = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_4 = \xi^{x^1} \\ \xi_{x^2} = -a_1 x^1 + a_3 x^3 + a_5 = \xi^{x^2} \\ \xi_{x^3} = -a_2 x^1 - a_3 x^2 + a_6 = \xi^{x^3} \end{cases} \quad (4.44)$$

donde  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  son constantes.

El vector de Killing más general es: (recuérdese la filosofía  $\vec{V} = V\hat{v}$ )

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \xi^{x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^{x^3} \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= a_1 \left( x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + a_2 \left( x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + a_3 \left( x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &\quad + a_4 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_5 \frac{\partial}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Entonces la correspondiente base de vectores de Killing es:

*Traslación:*

$$\vec{\xi}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}; \quad \vec{\xi}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}; \quad \vec{\xi}_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (4.46)$$

*Rotación:*

$$\vec{\xi}_4 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}; \quad \vec{\xi}_5 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}; \quad \vec{\xi}_6 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \quad (4.47)$$

Ahora, para llevar a cabo el cálculo de sus conmutaciones se renombrará de una forma conveniente los 6 vectores de Killing que fueron obtenidos; ésto para facilitar la notación en el álgebra de sus conmutaciones, así se tendrá:

Tres vectores de Killing de traslaciones espaciales

$$\vec{P} = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\} = \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\} \quad (4.48)$$

Tres vectores de Killing de rotaciones espaciales

$$\vec{L} = \{\vec{\xi}_4, \vec{\xi}_5, \vec{\xi}_6\} = \{\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3\} \quad (4.49)$$

Éstos 6 vectores de Killing definen la siguiente álgebra de Lie

$$[\vec{L}_i, \vec{L}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{L}_k, \quad [\vec{L}_i, \vec{P}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{P}_k \quad (4.50)$$

donde los índices  $i, j, k$  corren de 1-3, y  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita[21]

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } ijk \text{ tiene una permutación par;} \\ -1, & \text{si } ijk \text{ tiene una permutación impar;} \\ 0, & \text{si dos índices son los mismos.} \end{cases} \quad (4.51)$$

#### 4.4.2. Esfera $n$ dimensional $S^n$

Uno de los modelos más simples de un espacio curvo conlleva a una superficie de una hipersfera incrustada en un espacio euclídeo  $(n+1)D$ . Una forma simple de sustituir la habitual geometría de los espacios euclídeos (4.34) a un espacio geométrico curvo, se hace mediante el encaje de ésta hipersuperficie en un espacio euclídeo de dimensión mayor a la hipersuperficie a través de una parametrización adecuada de coordenadas. Es decir:

$$ds^2 := \delta_{AB} dx^A dx^B = (dx^1)^2 + \dots + (dx^{n+1})^2 \quad (4.52)$$

donde los índices en mayúscula  $A, B, \dots$ , corren desde 1 hasta  $n+1$  y la función delta de Kronecker:

$$\delta_{AB} = \begin{cases} 1, & \text{si } A = B \\ 0, & \text{si } A \neq B \end{cases} \quad (4.53)$$

Recuérdese la ecuación de la esfera, pero generalizada para  $n+1$  dimensiones y radio constante:

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = \delta_{AB} x^A x^B = r^2 \quad (4.54)$$

Encajando (4.54) en (4.52) se obtendrá una métrica inducida  $g_{ij}$  de la esfera  $S^n$ . Es decir, considérese la ecuación (4.54) con el respectivo procedimiento: (al final se realizará un

cambio de índices de contravariantes a covariantes)

$$\begin{aligned}
 [(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2] + (x^{n+1})^2 &= r^2 \\
 [\delta'_{ij}x^i x^j] + \delta_{nm}x^n x^m &= r^2 \\
 \delta'_{ij}x^i x^j &= r^2 - \delta_{nm}x^n x^m \\
 \delta^{nj} &= \frac{r^2 - \delta_{nm}x^n x^m}{x^i x^j} \\
 \delta'_{ij} &= \frac{x_i x_j}{r^2 - \delta_{nm}x^n x^m}
 \end{aligned}$$

luego, una métrica general (agregando el término de corrección) es

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= \delta_{ij} + \delta'_{ij} \\
 g_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2 - \delta_{nm}x^n x^m}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Análogamente, en comparación al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , existen  $n(n+1)/2$  vectores de Killing en el espacio de incrustación que emergen de la esfera  $S^n$ . Nuevamente, recuérdese los vectores de rotación (4.36), éstos vectores generan un grupo de rotación *Special Ortonormal*  $SO(n+1)$ . Adicionalmente, para la esfera  $S^n$ , el escalar de curvatura de Ricci es:[26]

$$R = \frac{n(n-1)}{r^2} \tag{4.56}$$

éste resultado puede demostrarse con simplicidad y ello se hará en el siguiente ejemplo, particularmente, aplicado a la esfera  $S^2$  incrustada en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo:** esfera  $S^2$  incrustada en  $\mathbb{R}^3$

Como bien se conoce, una esfera  $S^2$  puede verse encajada en un espacio  $\mathbb{R}^3$  mediante la ecuación: (véase la Figura 4.4.2)

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2 \tag{4.57}$$

Se puede introducir las coordenadas adecuadas que sean solución de la ecuación (4.57); es decir, parametrizando la esfera  $S^2$ , con ayuda de las coordenadas esféricas

$$x^1 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x^2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad x^3 = r \cos \theta_1 \tag{4.58}$$

donde  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ . En efecto, al sustituir las transformaciones (4.58) en el intervalo espacio tiempo  $\mathbb{R}^3$  se obtiene la respectiva relación para la esfera  $S^2$ : (radio

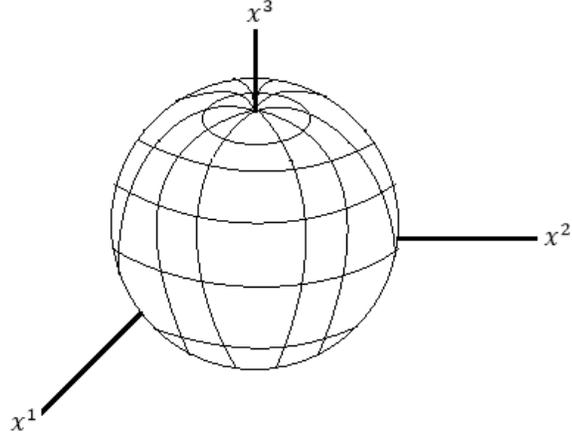


Figura 4.3: Esfera  $S^2$  incrustada en un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$

constante)

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d[r \sin \theta_1 \cos \theta_2])^2 + (d[r \sin \theta_1 \sin \theta_2])^2 + (d[r \cos \theta_1])^2 \\ &= r^2 d\theta_1^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\theta_1\theta_1} & g_{\theta_1\theta_2} \\ g_{\theta_2\theta_1} & g_{\theta_2\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta_1 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

y su inversa (componentes contravariantes)

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{\theta_1\theta_1} & g^{\theta_1\theta_2} \\ g^{\theta_2\theta_1} & g^{\theta_2\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta_1 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

A continuación, recuérdese los símbolos de Christoffel de primer género (3.9); aquí, en correspondencia a los símbolos de Christoffel obtenidos en el Apéndice E, se tiene, como inicio, dos ecuaciones diferenciales y, en segunda instancia, una tercera a resolver: (sustituyendo las expresiones (E.1) ... (E.2)).

i) cuando  $\alpha = \beta = \theta_2$

$$\frac{\partial \xi_{\theta_2}}{\partial \theta_2} = \Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_1} \xi_{\theta_1} = -\xi_{\theta_1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \quad (4.62)$$

ii) cuando  $\alpha = \beta = \theta_1$

$$\frac{\partial \xi_{\theta_1}}{\partial \theta_1} = \Gamma_{\theta_1 \theta_1}^{\theta_2} \xi_{\theta_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{\theta_1} = f(\theta_2) \quad (4.63)$$

iii) y por último, agregando la ecuación de Killing (4.38), cuando  $\alpha = \theta_1, \beta = \theta_2$

$$\frac{\partial \xi_{\theta_1}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \xi_{\theta_2}}{\partial \theta_1} = 2\xi_{\theta_2} \cot \theta_1 \quad (4.64)$$

Cuya solución general está dada por:[5]

$$\xi_{\theta_1} = a_1 \cos \theta_2 + a_2 \sin \theta_2 \quad (4.65)$$

$$\xi_{\theta_2} = \sin^2 \theta_1 (a_3 - \cot \theta_1 (a_1 \sin \theta_2 - a_2 \cos \theta_2))$$

donde  $a_1, a_2$  y  $a_3$  son constantes.

Ahora, utilizando la relación  $\xi_\alpha = g_{\alpha\beta} \xi^\beta$  (junto con la métrica (4.60)) sobre las soluciones (4.65) se tiene:

$$\xi_{\theta_1} = r^2 \xi^{\theta_1} \quad \Rightarrow \quad \xi^{\theta_1} = \frac{a_1}{r^2} \cos \theta_2 + \frac{a_2}{r^2} \sin \theta_2 \quad (4.66)$$

$$\xi_{\theta_2} = r^2 \sin^2 \theta_1 \xi^{\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \xi^{\theta_2} = \frac{a_3}{r^2} - \frac{a_1}{r^2} \cot \theta_1 \sin \theta_2 + \frac{a_2}{r^2} \cot \theta_1 \cos \theta_2$$

En efecto, en analogía al proceso (4.45), el vector de Killing más general es:

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \xi^{\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \xi^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ &= \frac{a_3}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{a_1}{r^2} \left( \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \cot \theta_1 \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \frac{a_2}{r^2} \left( \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cot \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \end{aligned} \quad (4.67)$$

cuya base de vectores es:

$$\vec{\xi}_1 = \frac{\cos \theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\cot \theta_1 \sin \theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2}; \quad \vec{\xi}_2 = \frac{\sin \theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\cot \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2}; \quad \vec{\xi}_3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (4.68)$$

Los anteriores vectores  $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$  y  $\vec{\xi}_3$  son precisamente los operadores de momento angular,

los cuales generan rotaciones alrededor de los ejes  $x^1$ ,  $x^2$  y  $x^3$ , respectivamente. El cálculo de sus conmutadores genera el álgebra de Lie  $SO(3)$ .

$$[\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{\xi}_k \quad (4.69)$$

#### 4.4.3. *Espacio de Minkowski $n$ -dimensional $\mathbb{M}_n$*

En contraste, a la métrica plana  $\mathbb{R}^n$  cuyas dimensiones inician de  $x^1$  hasta  $x^n$ , considérese la definición del intervalo espacio-tiempo de Minkowski, para lo cual incluye la coordenada  $x^0 \Rightarrow x^{n-1}$ ; adicionalmente, la métrica para éste caso es  $\delta_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ , luego:[25]

$$ds^2 := -(dx^0)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.70)$$

El espacio de Minkowski es un espacio máximamente simétrico, ello implicará que posea  $n(n+1)/2$  vectores linealmente independientes de la ecuación de Killing (4.28). Especialmente, para éste caso, existe tres clasificaciones de los vectores de Killing:[25][22]

*i)* abarca  $n - 1$  rotaciones espacio-temporales (boosts)

$$\vec{\xi}_{(\alpha)} = x^0 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^0} \quad (4.71)$$

*ii)* también incluye  $(n - 1)(n - 2)/2$  rotaciones espaciales

$$\vec{\xi}_{(\alpha\beta)} = x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (4.72)$$

*iii)* finalmente, genera  $n$  traslaciones

$$\vec{\xi}_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (4.73)$$

**Ejemplo:** *Espacio de Minkowski  $\mathbb{M}^4$  (grupo de Poincaré)*

En primer lugar, el intervalo espacio-tiempo es:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.74)$$

cuya métrica

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

usando ésta última en la ecuación de Killing (4.28) se evidencia, en analogía al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , que los símbolos de Christoffel son nulos ( $\frac{\partial \eta_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ ), reduciéndose de la forma:

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.76)$$

donde  $\mu, \nu := 0, 1, 2, 3$ . En primera instancia, una de las condiciones iniciales para que la solución de (4.76) prospere, es:

$$0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x^0} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x^3} \Rightarrow \begin{cases} \xi_0 = \xi_0(x^1, x^2, x^3) \\ \xi_1 = \xi_1(x^0, x^2, x^3) \\ \xi_2 = \xi_2(x^0, x^1, x^3) \\ \xi_3 = \xi_3(x^0, x^1, x^2) \end{cases} \quad (4.77)$$

Adicionalmente, de la ecuación (4.76) puede aceptarse la siguiente distinción: (se satisfacen seis relaciones)

$$0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^0}, \quad 0 = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} \quad (4.78)$$

siendo  $i, j = 1, 2, 3$  con  $j \neq i$ . La solución del anterior sistema de ecuaciones es:

$$\xi_\mu(x) = a_{\mu\nu} x^\nu + b_\mu \quad (4.79)$$

donde  $a_{\mu\nu}$  y  $b_\mu$  son constantes, con  $a_{\mu\nu}$  siendo antisimétrico ( $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$ ).<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Rápidamente obsérvese la veracidad de dicha solución:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (a_{\mu\nu} x^\nu + b_\mu) = a_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu} (a_{\nu\mu} x^\mu + b_\nu) = a_{\nu\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}$$

Del segundo resultado, permutando índices, implica la antisimetría  $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$ ; luego, se satisface en definitiva que:  $a_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} - a_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = 0$ .

Sin embargo, se permite el aspecto matricial de la solución (4.79) escrito de la forma:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ -a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Ahora, las componentes covariantes del vector de Killing  $\xi^\mu$  se obtiene por:

$$\xi^\mu(x) = \eta^{\mu\alpha} \xi_\alpha = a_\alpha^\mu x^\alpha + b^\mu \quad (4.81)$$

donde  $a_\alpha^\mu = \eta^{\mu\nu} a_{\nu\alpha}$  y  $b^\mu = \eta^{\mu\nu} b_\nu$ ; en efecto, matricialmente se tiene:

$$\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ -a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

En inferencia, por contracción de índices, el vector de Killing más general es: (se utilizará las ecuaciones emergentes del acople matricial (4.82))

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(x) &= \xi^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= (-a_{01}x^1 - a_{02}x^2 - a_{03}x^3 + b^0) \frac{\partial}{\partial x^0} + (-a_{01}x^0 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + b^1) \frac{\partial}{\partial x^1} \\ &\quad + (-a_{02}x^0 - a_{12}x^1 + a_{23}x^3 + b^2) \frac{\partial}{\partial x^2} + (-a_{03}x^0 - a_{13}x^1 - a_{23}x^2 + b^3) \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= b^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + b^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + b^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &\quad + a_{12}(x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}) + a_{13}(x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}) + a_{23}(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}) \\ &\quad - a_{01}(x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^1}) - a_{02}(x^2 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^2}) - a_{03}(x^3 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^3}) \end{aligned}$$

Por consiguiente, se posee cuatro vectores de Killing de traslación: (se agrega un cambio de notación en subíndices)

$$\vec{\xi}_1 = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \vec{\xi}_2 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \vec{\xi}_3 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \vec{\xi}_4 = \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (4.83)$$

tres vectores de Killing de rotaciones espaciales

$$\vec{\xi}_5 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \vec{\xi}_6 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \vec{\xi}_7 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \quad (4.84)$$

y por último, tres vectores de Killing espacio-temporales (tipo boosts)

$$\vec{\xi}_8 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \vec{\xi}_9 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \vec{\xi}_{10} = x^3 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (4.85)$$

Ahora, análogamente al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , se renombrará de una forma conveniente los 10 vectores de Killing que fueron obtenidos, como: (regreso a la nomenclatura inicial para subíndices)

i) Una traslación temporal

$$\vec{H} = \{\vec{\xi}_1\} = \{\vec{P}_0\} \quad (4.86)$$

ii) Tres traslaciones espaciales

$$\vec{P} = \{\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_4\} = \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\} \quad (4.87)$$

iii) Tres rotaciones espaciales

$$\vec{J} = \{\vec{\xi}_5, \vec{\xi}_6, \vec{\xi}_7\} = \{\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3\} \quad (4.88)$$

iv) Tres boosts

$$\vec{K} = \{\vec{\xi}_8, \vec{\xi}_9, \vec{\xi}_{10}\} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3\} \quad (4.89)$$

Éstos vectores obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\vec{J}_i, \vec{P}_0] = [\vec{P}_i, \vec{P}_0] = 0, \quad [\vec{J}_i, \vec{J}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{J}_k;$$

$$[\vec{J}_i, \vec{K}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{K}_k, \quad [\vec{K}_i, \vec{K}_j] = -\epsilon_{ijk} \vec{J}_k, \quad [\vec{J}_i, \vec{P}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{P}_k;$$

$$[\vec{K}_i, \vec{P}_j] = \delta_{ij} \vec{P}_0, \quad [\vec{K}_i, \vec{P}_0] = \vec{P}_i$$

donde  $i, j, k$  corren desde 1,2,3, y  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Éstas relaciones de conmutación define el *álgebra de Lie del grupo de Poincaré*[25][22].

#### 4.4.4. Espacios hiperbólicos $n$ -dimensionales $\mathbb{H}_n$

*Hiperboloide  $n$ -dimensional de escalar de curvatura  $R > 0$*

Recuérdese el proceso realizado para la esfera  $S^n$ , igualmente, un espacio hiperbólico puede ser visto como una hipersuperficie en un espacio plano  $(n + 1)D$ , pero ahora, ajustada en un espacio de Minkowski  $(n + 1)D$  con intervalo espacio-tiempo:

$$ds^2 := -(dX^0)^2 + \dots + (dX^n)^2 = \eta_{AB}dX^A dX^B \quad (4.90)$$

donde los índices en mayúscula  $A, B, \dots$ , corren desde 0 hasta  $n$  y representan el espacio de  $\mathbb{M}_{n+1}$ . Éste espacio hiperbólico es definido como la hipersuperficie: (en consecuencia de la dimensión temporal)

$$-(X^0)^2 + \dots + (X^n)^2 = \eta_{AB}X^A X^B = l^2, \quad \text{donde } l = \text{cte} \quad (4.91)$$

cual asegura un hiperboloide de una hoja y de radio  $l$ .

Los vectores de Killing pueden ser hallados usando la misma metodología que se usó para la esfera  $S^n$  (véase ecuación (4.55)). Es decir, si se encaja el hiperboloide (4.91) en la ecuación (4.90) con ello se obtendrá la métrica inducida  $g_{\mu\nu}$  del hiperboloide  $n$ -dimensional  $\mathbb{H}_n$ :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{X_\mu X_\nu}{l^2 - \eta_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta} \quad (4.92)$$

La hipersuperficie (4.91) encajada en  $\mathbb{M}_{n+1}$  define un hiperboloide con una métrica lorentziana de escalar de curvatura constante y positivo:

$$R = \frac{n(n-1)}{l^2} \quad (4.93)$$

Los vectores de Killing para el hiperboloide  $n$ -dimensional encajado en  $\mathbb{M}_{n+1}$  pueden ser de dos clases:

*i)  $n$  boosts*

$$\vec{\xi}_{(\alpha)} = X^0 \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial X^0} \quad (4.94)$$

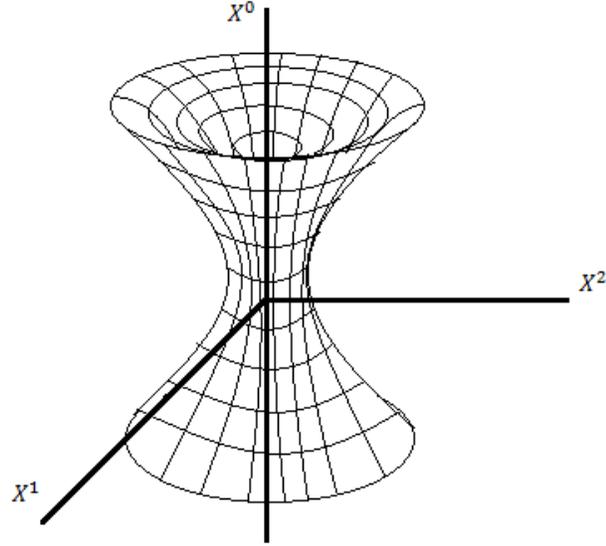


Figura 4.4: *Espacio hiperbólico 2D de curvatura positiva incrustado en el espacio-tiempo de Minkowski 3D.*

ii) y  $n(n-1)/2$  rotaciones espaciales

$$\vec{\xi}_{(\alpha\beta)} = X^\beta \frac{\partial}{\partial X^\alpha} - X^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\beta} \quad (4.95)$$

Entonces, las  $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Killing (4.28), y generan el grupo de isometrías  $SO(n, 1)$  el cual es el grupo de isometrías de Poincaré en el espacio encajado. Éste es conocido como el espacio de Sitter  $dS_n$  (el presente tan sólo será una corta introducción del espacio-tiempo de Sitter, cual será generalizado en la siguiente sección a favor de los objetivos propuestos de la presente memoria).

**Ejemplo:** *Espacio de Sitter 2D encajado en Minkowski 3D*

En primer lugar, considérese el espacio hiperbólico 2D que se ilustra en la Figura 4.4.4; la construcción algebraica de un hiperboloide es:

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 = l^2, \quad \text{donde } l = \text{cte.} \quad (4.96)$$

Una parametrización que es solución de la expresión (4.96) es

$$X^0 = l \sinh\left(\frac{\tau}{l}\right), \quad X^1 = l \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cos \theta, \quad X^2 = l \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) \sin \theta \quad (4.97)$$

donde  $-\infty \leq \tau \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Por lo tanto, el intervalo espacio-tiempo inducido debido al hiperboloide es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 \\ &= -[d(l \sinh(\frac{\tau}{l}))]^2 + [d(l \cosh(\frac{\tau}{l}) \cos \theta)]^2 + [d(l \cosh(\frac{\tau}{l}) \sin \theta)]^2 \\ &= \dots \\ ds^2 &= -d\tau^2 + l^2 \cosh^2\left(\frac{\tau}{l}\right) d\theta^2 \end{aligned} \quad (4.98)$$

La respectiva métrica de la última expresión (covariante)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\tau\tau} & g_{\tau\theta} \\ g_{\theta\tau} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & l^2 \cosh^2(\frac{\tau}{l}) \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

y su inversa (contravariante)

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{\tau\tau} & g^{\tau\theta} \\ g^{\theta\tau} & g^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/-1 & 0 \\ 0 & 1/l^2 \cosh^2(\frac{\tau}{l}) \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Bajo el uso de (3.30), los símbolos de Christoffel distintos de cero de la anterior métrica son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^{\tau} &= -\frac{1}{2} g^{\tau\tau} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \tau} \\ &= -\frac{1}{2} (-1) \frac{\partial (l^2 \cosh^2(\frac{\tau}{l}))}{\partial \tau} \\ &= \frac{l^2}{2} [2 \cosh(\frac{\tau}{l}) \sinh(\frac{\tau}{l}) \frac{1}{l}] \\ &= l \sinh(\frac{\tau}{l}) \cosh(\frac{\tau}{l}) \end{aligned} \quad (4.101)$$

y

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\theta\tau}^{\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \tau} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{l^2 \cosh^2(\tau/l)} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} (l^2 \cosh^2(\tau/l)) \\
 &= \frac{1}{2l^2 \cosh^2(\tau/l)} (2l^2 \cosh(\frac{\tau}{l}) \sinh(\frac{\tau}{l}) \frac{1}{l}) \\
 &= \frac{1}{l} \tanh(\tau/l)
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Análogamente, los símbolos de Christoffel de primer orden (3.9) y la ecuación de Killing (4.28), conceden las siguientes ecuaciones diferenciales a resolver:

i) cuando  $\alpha = \beta = \theta$ :

$$\frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \theta} = \Gamma_{\theta\theta}^{\tau} \xi_{\tau} = \xi_{\tau} l \sinh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) \tag{4.103}$$

ii) cuando  $\alpha = \beta = \tau$ :

$$\frac{\partial \xi_{\tau}}{\partial \tau} = \Gamma_{\tau\tau}^{\theta} \xi_{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_{\tau} = f(\theta) \tag{4.104}$$

iii) por último, cuando  $\alpha = \theta$ ,  $\beta = \tau$ :

$$\frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi_{\tau}}{\partial \theta} = 2\xi_{\theta} \Gamma_{\theta\tau}^{\theta} = 2\frac{1}{l} \xi_{\theta} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \tag{4.105}$$

La solución general del anterior sistema de ecuaciones diferenciales es:[5]

$$\begin{cases} \xi_{\tau} = c_2 \cos \theta + c_3 \sin \theta \\ \xi_{\theta} = \cosh^2\left(\frac{\tau}{l}\right) [l \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) (c_2 \sin \theta - c_3 \cos \theta) + c_1] \end{cases} \tag{4.106}$$

donde  $c_1, c_2, c_3$  son constantes. Ahora, las componentes contravariantes son: (utilizando  $\xi^{\mu} = g^{\mu\nu} \xi_{\nu}$  y los coeficientes de (4.100))

$$\xi^{\tau} = -\xi_{\tau}, \quad \xi^{\theta} = \frac{1}{l^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{l}\right) \xi_{\theta} \tag{4.107}$$

En efecto, el vector de Killing es

$$\begin{aligned}
 \vec{\xi} &= \xi^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 &= c_1 \frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + c_2 \left[ \frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tau} \right] + c_3 \left[ -\frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tau} \right]
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

Por lo tanto, la base de vectores es:

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \vec{\xi}_2 = \frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tau}, \tag{4.109}$$

$$\vec{\xi}_3 = -\frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

El cálculo de sus conmutadores satisface:

$$[\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3] = \vec{\xi}_1; \quad [\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2] = -\frac{1}{l^2} \vec{\xi}_3; \quad [\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_3] = \frac{1}{l^2} \vec{\xi}_2 \tag{4.110}$$

Ello define el álgebra de Lie del grupo de isometrías de  $SO(2, 1)$ , que al final viene siendo un subgrupo de isometrías del grupo de Poincaré  $(2 + 1)$ -dimensional. Recuérdese que el escalar de curvatura para éste caso es  $R = 2/l^2$ .

#### *Escalar de Curvatura del Espacio de Sitter 2D*

En analogía al Apéndice E, recuérdese los símbolos de Christoffel (4.101) y (4.102); luego, evaluando dichos resultados en el tensor de Riemann, se obtiene una única componente, es decir: (cuando se desea relacionar a la derivada el símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\theta\theta}^\tau$ )

$$\begin{aligned}
 R_{\theta\tau\theta}^\tau &= \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^\tau}{\partial \tau} - \frac{\partial \Gamma_{\theta\tau}^\tau}{\partial \theta} + \Gamma_{\sigma\tau}^\tau \Gamma_{\theta\theta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\theta}^\tau \Gamma_{\theta\tau}^\sigma \\
 &= \frac{\partial [l \sinh(\frac{\tau}{l}) \cosh(\frac{\tau}{l})]}{\partial \tau} - \frac{\partial [0]}{\partial \theta} + ([0] \Gamma_{\theta\theta}^\tau) - (\Gamma_{\theta\theta}^\tau \Gamma_{\theta\tau}^\theta) \\
 &= \frac{1}{l} [\sinh^2(\frac{\tau}{l}) + \cosh^2(\frac{\tau}{l})] - [l \sinh(\frac{\tau}{l}) \cosh(\frac{\tau}{l})] \left[ \frac{1}{l} \tanh(\frac{\tau}{l}) \right] \\
 &= \sinh^2(\frac{\tau}{l}) + \cosh^2(\frac{\tau}{l}) - \sinh^2(\frac{\tau}{l}) \\
 &= \cosh^2(\frac{\tau}{l})
 \end{aligned} \tag{4.111}$$

puesto que al igual que las demás combinaciones (cuando se desea relacionar a la derivadas el símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\theta\tau}^{\theta}$ )

$$R_{\theta\tau\tau}^{\theta} = \frac{\partial\Gamma_{\theta\tau}^{\theta}}{\partial\tau} - \frac{\partial\Gamma_{\theta\tau}^{\theta}}{\partial\tau} + \Gamma_{\sigma\tau}^{\theta}\Gamma_{\theta\tau}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\theta}\Gamma_{\theta\tau}^{\sigma} = 0$$

La correspondiente expresión covariante del coeficiente (4.111) es:

$$\begin{aligned} R_{\tau\theta\tau\theta} &= g_{\tau\tau}R_{\theta\tau\theta}^{\tau} \\ &= -\cosh^2\left(\frac{\tau}{l}\right) \end{aligned} \quad (4.112)$$

luego, el escalar de curvatura es[21]: (recuérdese (3.51))

$$\begin{aligned} R' &= g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \\ &= g^{\theta\theta}g^{\tau\tau}R_{\tau\theta\tau\theta} \\ &= \left[\frac{1}{l^2\cosh^2(\tau/l)}\right][-1][- \cosh^2(\frac{\tau}{l})] \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$= \frac{1}{l^2} := k \text{ (curvatura de Gauss)} \quad (4.114)$$

Por lo tanto, para éste caso, el escalar de Ricci es:

$$R_{(2)} = 2/l^2 \quad (4.115)$$

siendo coherente con la definición (4.30) o (4.93) cuando  $n = 2$ .]]

## 4.5 *Espacio-tiempo de Sitter* ( $dS$ )

Bajo la efímera introducción que se presentó en el último apartado; a continuación, se presentará la configuración básica para el estudio de la geometría básica del espacio-tiempo de Sitter en dimensiones arbitrarias. En general, podría considerarse un espacio-tiempo de Sitter  $n$ -dimensional; sin embargo, en beneficio del propósito para la presente memoria, se considerará un espacio-tiempo de Sitter  $5D$ .

Sin más, se desea mostrar la estructura que se requiere para el espacio-tiempo de

Sitter; para ello, considérese el intervalo espacio-tiempo  $5D$  ( $\mathbb{M}_5$ ) de la forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^5)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (dx^5)^2 \end{aligned} \quad (4.116)$$

donde se involucró el espacio-tiempo de Minkowski. La expresión (4.116), en principio, posee la métrica:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

siendo  $a, b := 0, 1, 2, 3, 5$  y  $\mu, \nu := 0, 1, 2, 3$ .

Ahora, lo siguiente será inculcar el método de compactificación desarrollado por Penrose<sup>9</sup> incrustar dentro del espacio multidimensional (4.116), una hiperesfera o hiperboloide de una hoja  $H_4$  con radio  $a$  (radio del Universo para nuestro interés) descrita de la forma:[7]

$$-n_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + (x^5)^2 = a^2 \quad (4.118)$$

Ésta hiperesfera  $H_4$  es llamada el espacio-tiempo de Sitter en su versión estándar, lo cual implica que es un espacio máximamente simétrico. A propósito de la ecuación (4.118), su respectiva solución paramétrica está definida por las coordenadas globales  $(\tau, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  de la forma:[5] (comúnmente conocido como el diagrama de Penrose)

$$\begin{cases} X^0 = l \sinh(\tau/l), \\ X^1 = l \cos \theta_1 \cosh(\tau/l), \\ X^2 = l \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cosh(\tau/l), \\ X^3 = l \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cosh(\tau/l), \\ X^5 = l \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cosh(\tau/l) \end{cases} \quad (4.119)$$

---

<sup>9</sup>Recuérdese que dicha técnica consiste en encajar el espacio-tiempo en cuestión en otro que contenga las mismas dimensiones; de tal forma que las geodésicas nulas completas del espacio-tiempo lorentziano original  $(M, g)$ , adquieran extremos bien definidos en el espacio-tiempo ambiente, luego, los puntos al infinito de dichas variedades lorentzianas se conviertan en puntos ordinarios de la nueva variedad  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ .

cuyos dominios son:  $-\infty < \tau < \infty$ ,  $0 < \theta_1 < \pi$ ,  $0 < \theta_2 < \pi$ ,  $0 < \theta_3 < 2\pi$ . Por lo tanto, el respectivo espacio-tiempo inducido es:[5]

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh^2(\tau/l)[d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1(d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2)]$$

Retornando a la idea inicial, si se considera la diferenciación y cierto proceso a la ecuación (4.118), se obtiene:

$$\begin{aligned} x^5 &= \sqrt{(a^2 + \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)} \\ dx^5 &= \frac{1}{2\sqrt{(a^2 + \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)}} d(\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu) \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu}(x^\mu dx^\nu + x^\nu dx^\mu)}{2\sqrt{(a^2 + \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)}} \\ &= \frac{2\eta_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu}{2\sqrt{(a^2 + \eta_{mn}x^m x^n)}} \\ (dx^5)^2 &= \frac{(\eta_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{(a^2 + \eta_{mn}x^m x^n)} \end{aligned} \quad (4.120)$$

Por lo tanto, el intervalo espacio-tiempo del espacio de Sitter 5D es: (reemplazando en (4.116))

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \frac{(\eta_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{a^2 + \eta_{mn}x^m x^n} \\ &= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \eta_{\sigma\mu}\eta_{\lambda\nu} \frac{x^\sigma x^\lambda}{a^2 + \eta_{mn}x^m x^n} dx^\mu dx^\nu \\ &= \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{a^2 + \eta_{mn}x^m x^n}\right) dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (4.121)$$

luego, la respectiva métrica es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{a^2 + \eta_{mn}x^m x^n} \quad (4.122)$$

Recuérdese que para espacios máximamente simétricos, la curvatura es la misma en cada punto (el radio se mantiene constante), luego la métrica anterior se reduce a:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{a^2} \quad (4.123)$$

donde  $x^\mu = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$  y  $\mu, \nu := 0, 1, 2, 3$ . A continuación, se permitirá hallar, generalizado, los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(g_{\alpha\beta}) \\
 &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\eta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\alpha}{a^2}) \\
 &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{a^2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}x^\mu x^\nu) \\
 &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \frac{\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}}{a^2} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(x^\mu x^\nu) \\
 &= \frac{1}{2a^2}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}(2x^\sigma)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{a^2}x^\sigma\eta_{\mu\nu} \quad (4.124)$$

Ahora, el respectivo tensor curvatura surge desde la ecuación (3.39): (en el proceso se ingresará la expresión (4.55) y (4.124))

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha &= \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha}{\partial x^\sigma} \\
 &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\lambda} \eta_{\mu\sigma} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \eta_{\mu\lambda} \\
 R_{\rho\mu\lambda\sigma} &= \eta_{\rho\alpha} R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha = \frac{1}{a^2} (\eta_{\rho\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\lambda} \eta_{\mu\sigma} - \eta_{\rho\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \eta_{\mu\lambda})
 \end{aligned}$$

$$R_{\rho\mu\lambda\sigma} = \frac{1}{a^2} (\eta_{\rho\lambda}\eta_{\mu\sigma} - \eta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\lambda}) \quad (4.125)$$

Por último, recuérdese las condiciones que debe cumplir un espacio máximamente simétrico para que sea homogéneo e isótropo (4.30), (4.31) y (4.32). Compárese la ecuación (4.125) con la expresión (4.32), de allí se puede concluir que si  $n = 4$  entonces el tensor y escalar de curvatura de Ricci satisfacen:[7]

$$R_{\mu\nu} = \frac{3}{a^2}g_{\mu\nu} \quad (4.126)$$

y

$$R = 12/a^2 \quad (4.127)$$

siendo el escalar de curvatura de Gauss  $k = 1/a^2$ .

Ahora, en agregado a lo que viene realizando en la presente memoria, considérese la ecuación de campo de Einstein (4.75):[32]

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4.128)$$

Obsérvese que al sustituir (4.126) y (4.127) en la ecuación de Einstein se observa que para generar el cero sobre el miembro izquierdo de la igualdad, la constante cosmológica debe ajustarse al valor:[5] (recuérdese la ecuación (4.33))

$$\Lambda_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2l^2} \quad \text{cuando } n = 4 \Rightarrow \Lambda = 3/a^2 \quad (4.129)$$

Finalmente, retornando a la ecuación de Einstein (4.128), a saber, existe tres soluciones algebraicas exactas caracterizadas por su alto grado de simetría, dichas variedades lorentzianas de curvatura constante son: El espacio-tiempo de Minkowski  $\mathbb{M}^4$  (con curvatura cero)<sup>10</sup>, "el espacio-tiempo de Sitter  $ds^4$  (con curvatura positiva)" y el espacio-tiempo anti de Sitter (con curvatura negativa).[41]

---

<sup>10</sup>El espacio-tiempo de Minkowski es la solución más simple de la ecuación de Einstein (4.128) con  $T = 0$ , y  $\Lambda = 0$ , representando a su vez un espacio-tiempo desprovisto de materia.





*La filosofía está escrita en ese grandísimo libro abierto ante los ojos; quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.*  
(Galileo Galilei)



*FUERZA DE CASIMIR EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SITTER*

---

---

Finalmente, para buen término del presente trabajo, se relacionará el efecto Casimir cuántico al espacio-tiempo de Sitter, donde se incluirá las correspondientes implicaciones relativistas. A grueso modo, dicho acople se hará a través del tensor energía-esfuerzos; para lograrlo se debe realizar una regularización de tal modo que se adquiera un valor esperado del mismo en el vacío de Casimir. La fuerza de Casimir, podrá presentarse en sus dos sentidos, repulsiva y/o atractiva, todo en dependencia de condiciones de frontera aplicada a dos casos especiales. En efecto, podrá presentarse una fuerza efectiva entre placas o contornos, aún más general que la presentada en el capítulo (2.23).

## 5.1 Tensor energía-esfuerzos en el vacío de Casimir

### 5.1.1. Regularización del tensor $T^{\mu\nu}$

La regularización es un método para lidiar con resultados infinitos o divergentes que aparecen en el cálculo de algunas cantidades físicas. En general, ello consiste en modificar la teoría o fórmula en cuestión de manera controlada mediante uno o varios parámetros a priori no físicos, de forma que el resultado sea finito. A propósito, considerando capítulos anteriores, se puede tomar ventaja para la regularización de la cantidad física de interés, para éste caso, el tensor energía-esfuerzos.

En primera instancia, recuérdese la premisa del capítulo 2, la cual define dos placas paralelas idénticas con área  $A$  y separación perpendicular  $d$  entre placas, cuales son parámetros propicios. Una placa de ellas ubicada en el origen de coordenadas  $(0, 0, 0)$  y la otra en el punto  $(0, 0, d)$ , con vector normal a las placas en la dirección  $z = x^3$ . De allí, se observó que si la polaridad del medio (región entre placas paralelas) es extremadamente considerable, el volumen se comporta como un medio superconductor y la fuerza de Casimir únicamente puede ser calculada desde la energía del campo electromagnético, para el cual sólo existe los dos cuerpos en forma de placas y contornos laterales[35]. Enfocándose sobre el eje de polarización (eje perpendicular a las placas), dicha dimensión posee vector normal  $\hat{z}^\mu = (0, 0, 0, 1)$ . El eje temporal es especificado por  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ .

Bajo la anterior filosofía, considérese la definición del *Tensor de energía-esfuerzos*  $T^{\mu\nu}$ , también llamado tensor energía-impulso (o igualmente tensor de energía-momento): es una cantidad tensorial de la teoría de la relatividad que se usa para describir el flujo de energía y el momento lineal de una distribución continua de materia en el contexto de la cosmología y/o astrofísica, él es de suma importancia en las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional (3.58). Dicho tensor, puede representarse como un arreglo matricial que posee coeficientes con distintos significados; es decir, una forma pedagógica de distinguirlo en su designación de coeficientes se muestra en la Figura 5.1.1.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> El tensor energía-esfuerzos o energía-momentum es definido por una derivación funcional de la acción con respecto al tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ :

$$T^{\mu\nu}(\varphi, \varphi) \equiv 2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$$

donde  $S \equiv \frac{1}{2} \int \varphi F \varphi d^4x$ , siendo  $\varphi$  un campo lineal libre (un campo bosónico o fermiónico, por ejemplo) moviéndose en la

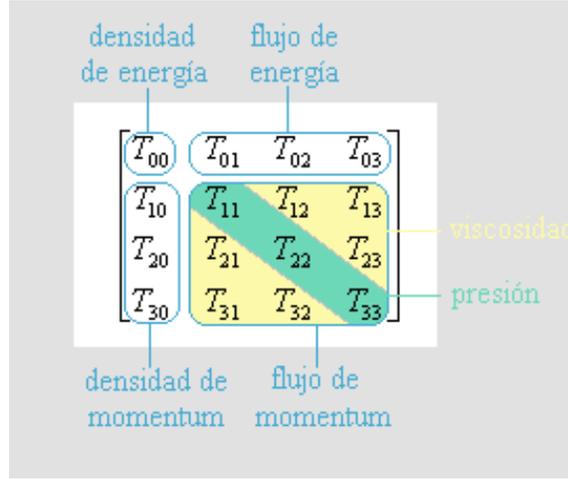


Figura 5.1: El tensor energía-esfuerzos escrito matricialmente, define coeficientes clasificados en componentes de cantidades físicas vectoriales y/o escalares.[38]

Es decir, una forma simple de hacerse con el tensor energía-esfuerzos, surge del conocimiento previo otorgado por la Figura 5.1.1; de allí, cuando se observa específicamente a la diagonal principal de la matriz, en sus componentes extremos, el superior, como bien se clarifica, define a la densidad de energía electromagnética; mientras que la componente del extremo inferior refiere a la presión ocasionada por el esfuerzo del vacío de Casimir sobre las placas en la dirección perpendicular a ellas. Luego, favoreciendo el interés de la presente memoria, se requiere ajustar una estimación para los elementos  $T^{00}$  y  $T^{33}$ ; además, se garantiza que dicha estimación sea un valor esperado puesto que emerge del vacío de Casimir (capítulo 2). En inferencia, recuérdese la variación energética ZPE (2.22) y la fuerza de Casimir (2.23); para ellas, a cambio, se tomará únicamente la *densidad de energía* (energía por unidad de volumen ( $\delta E/[L \times L \times d]$ )) y la *presión* (fuerza por unidad de área ( $F/[L \times L]$ )), respectivamente; redefiniendo nomenclatura, se obtiene:<sup>2</sup>

$$\mathcal{E} \equiv \langle T^{00} \rangle_{(0)} = -\frac{\hbar\pi^2 c}{720d^4} \quad (5.1)$$

curvatura del espacio-tiempo.[39]

<sup>2</sup> Aclárese que las ecuaciones señaladas a continuación mantienen las mismas características paramétricas concebidas en el capítulo 2, por ejemplo, se mantiene aún una temperatura ideal cero.

y

$$\mathcal{P} \equiv \langle T^{33} \rangle_{(0)} = -\frac{\hbar\pi^2 c}{240d^4} \quad (5.2)$$

Al respecto, en los resultados (5.1) y (5.2), se observa el factor común constante (definido por la letra griega kappa):

$$\hbar\pi^2 c / 180d^4 \equiv \kappa \quad (5.3)$$

recuérdese que la distancia de separación  $d$  se encuentra sobre el eje  $x^3 = z$  y a su vez depende de la cuadri-dirección  $\hat{z}^\mu$ . A dicho factor (5.3) se le asigna la esencia física de una función constante propia del vacío de Casimir. Sucesivamente, puede definirse un arreglo que contenga todos los coeficientes del tensor energía-esfuerzos, cual evidentemente satisfaga a las equivalencias (5.2) y (5.3); es decir, un primer modelo de tensor energía-esfuerzos para el vacío de Casimir es:[7][33]

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{(0)} \equiv \kappa \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} - \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu \right) \quad (5.4)$$

El ajuste anterior satisface completamente a los resultados  $T^{00}$  y  $T^{33}$ , cuando  $\hat{z} = (0, 0, 0, 1)$  y  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Ó en mejores términos, la anterior también puede ser escrita como: [39] (para el vacío de Casimir)

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{(0)} \equiv \frac{\hbar\pi^2 c}{720d^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

donde se acaba de presentar la equivalencia: (recuérdese  $T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} T_\alpha^\nu$ )

$$\text{diag}(-1, 1, 1, -3) = 4 \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} - \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu \right) \quad \text{ó} \quad \text{diag}(1, 1, 1, -3) = 4 \left( \frac{1}{4} g_\nu^\mu - \hat{z}^\mu \hat{z}_\nu \right) \quad (5.6)$$

La ecuación (5.4) o (5.5) refiere al valor esperado en el estado  $|0\rangle$  para el tensor energía-esfuerzos; él no incluye interacciones gravitacionales, pues en sí, es obtenido desde el efecto Casimir electromagnético.<sup>3</sup> Además, en comparación al capítulo precedente,

---

<sup>3</sup>En analogía, al modelamiento realizado por Casimir, se ingresó implícitamente la distinción de un vacío con y sin placas paralelas aplicado al tensor energía-esfuerzos; es decir, por ejemplo,  $\delta T^{\mu\nu}$ , cuya diferencia es comprendida a ejecutarse modo a modo.[39]

obsérvese que se adoptó un espacio-tiempo de Sitter 3+1 dimensional, cuya signatura es  $(-, +, +, -)$ .<sup>4</sup>

## 5.2 Efecto Casimir como una estructura variacional, campo escalar no masivo

Como introducción al problema, el resultado (5.4) ó (5.5) fue interesante; sin embargo, se puede ser aún más general y detallado. En correspondencia, se desea hacer un seguimiento en paralelo con el trabajo realizado por [4], el cual, en breve, también hace referencia a un espacio-tiempo de Sitter 3+1 dimensional, cuyo tensor energía-esfuerzos *entre placas conductoras paralelas* se define como:[7][4]

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle \equiv \frac{e^{-4t/a^2}}{6\pi^2} \text{diag}(1, 1, 1, -3) \times \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{c_1(x)c_2(x)e^{2dx} - 1} \quad (5.7)$$

De allí, obsérvese que existe coincidencia con la diagonal (5.6); ello esclarece la razón de los coeficientes nulos del arreglo (5.5), puesto que significa que al interior de las placas paralelas se considera un acople sin masa ( $m = 0$ ); es decir, físicamente compete a la esencia de un campo escalar no masivo, implicando que los coeficientes correspondientes al tensor energía-momentum desvanezcan, incluso ello repercute sobre los coeficientes densidad de momentum, viscosidad y flujo de energía, cuales también desvanecen (véase Figura 5.1.1). Adicionalmente, el término  $e^{-4t/a^2}$  refiere a un factor oscilante (modos de oscilación), cuyo exponente dependa de una cota de alta energía (radio  $a$  y edad  $t$  del universo por ejemplo);[39][7] los coeficientes  $c_1(x)$  y  $c_2(x)$  refieren a condiciones de frontera, para las condiciones de frontera de Dirichlet  $c_i = 1$ , mientras que para las condiciones de frontera de Neumann  $c_i = -1$  donde  $i = 1, 2$  representando a las placas 1 y 2, respectivamente.<sup>5</sup>

Por lo tanto, desde (5.6), el tensor energía-momentum para un campo escalar sin masa y conformemente acoplado puede ser escrito como:

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = K \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} - \hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu} \right) \quad (5.8)$$

<sup>4</sup>Espacio-tiempo análogo al ejemplo: Espacio de Sitter 2D encajado en Minkowski 3D, siendo ahora 3D encajado en 4D, respectivamente.

<sup>5</sup>En matemáticas, la condición de frontera de Dirichlet (o de primera clase) es un tipo de condición de frontera o contorno; que se aplica en una ecuación diferencial ordinaria o en una derivadas parciales, y se hace cuando se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. Siendo así, las condiciones de Neumann complementan a las condiciones de Dirichlet, combinación mixta.

donde la letra mayúscula define a:

$$K = \frac{2e^{-4t/a^2}}{3\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{c_1(x)c_2(x)e^{2dx} - 1} \quad (5.9)$$

Ahora, el campo electromagnético interior  $D = 3$  (dimensiones espaciales) es conformemente invariante y simétrico, puesto que el problema de Casimir consta de dos placas paralelas perfectamente conductoras fronterizas. Dicho sistema físico, puede ser reducido, en correspondencia, a un problema de “dos modos escalares” con condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann. Por lo tanto, el tensor energía-esfuerzos para campo electromagnético en el espacio de Sitter, podría doblarse al expresado en la ecuación (5.8). Es decir, llevando a cabo la respectiva integral (5.7) parametrizada en términos de  $a$ , ella conduce a las soluciones:

$$K_{em} = 2K = \begin{cases} \frac{\pi^2 \hbar c e^{-4t/a^2}}{180d^4} & \Leftrightarrow \text{cuando } c_1(x) = c_2(x) = 1, -1; \\ -\frac{7\pi^2 \hbar c e^{-4t/a^2}}{1440d^4} & \Leftrightarrow \text{cuando } c_1(x) = -c_2(x) = 1, -1. \end{cases} \quad (5.10)$$

aquí, recuérdese que el factor de normalización  $e^{-4t/a^2}$  puede tenderse a ser 1, basta con evaluar la edad y radio del universo actual ( $t \sim 10^{17}$  y  $a \sim 10^{26}$ , respectivamente)[7]; de tal forma que dicho factor pueda ser omitido en el resto de los cálculos. En inferencia, obsérvese que el método utilizado por [4], también conduce, al valor otorgado por el primer método utilizado (ecuación (5.3), resultado propio del efecto Casimir clásico).

Por lo tanto, el tensor energía-esfuerzos del campo electromagnético para el presente método será:

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{em} = K_{em} \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} - \hat{z}^\mu \hat{z}^\nu \right) \quad (5.11)$$

ecuación que mantiene la filosofía de la expresión (5.4) ó (5.5), pero resulta ser aún más general.

### 5.3 Principio de conservación del tensor energía-esfuerzos

Adicionalmente, en el contexto de la teoría de la relatividad, cabe aclararse que la ley de conservación de la energía y la ley de conservación de la cantidad de movimiento pueden expresarse de manera muy simple en términos del tensor de energía-esfuerzos. Concretamente, ambas leyes pueden escribirse en conjunto como una ecuación de continuidad del tipo Noether:[21][38] (implícitamente se involucra a la ecuación (C.84) del

Apéndice C)

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.12)$$

No obstante, en el espacio-tiempo curvo de Sitter, al evaluar el tensor (5.11) en (5.12), se observa la curiosidad:

$$\frac{1}{4} \nabla_{\mu} g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu} = -\nabla_{\mu} \hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu} \neq 0 \quad (5.13)$$

Repercusión que no es consistente con la conservación del tensor energía-esfuerzos para un sistema aislado.[7] Físicamente, podría explicarse la razón de la no divergencia del término  $\hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu}$ , cual en el espacio-tiempo de Minkowski sí sucede; para ello, recuérdese nuevamente la esencia de  $\hat{z}^{\mu}$ , él o ellos definen el posicionamiento de los contornos conductores, cuando las placas son planas y paralelas entre sí en un sistema de referencia euclídeo o Minkowskiano, ello garantiza que dichos cuadvectores unitarios sean constantes en el tiempo y espacio. Por otra parte, para el espacio-tiempo de Sitter, no lo es así, puesto que las placas de contorno son ahora precisamente la curvatura del espacio tiempo, cual no es uniforme en todos sus puntos, ocasionando varianza en el producto  $\hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu}$ .

Para éste sistema, dicha violación a la conservación (5.12) induce una función de esfuerzos innata de la curvatura, obteniéndose realmente:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = f^{\nu} \quad (5.14)$$

dependencia ahora de una fuente de esfuerzos. En solvencia, para beneficio del principio de conservación (5.12), se ve la necesidad de modificar “únicamente la estructura de los términos de contorno  $\hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu}$ ”, el fin es desvanecer la divergencia y de esa manera mantener la conservación del tensor energía-esfuerzos (ecuación (5.13)). Apuntando a ello, en primer lugar, permítase realizar el retroceso a un espacio-tiempo de Minkowski, para conseguirlo se debe renunciar al término general  $\hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu}$  y adoptar parcialmente los respectivos términos minkowskianos básicos  $\eta^{\mu\nu}$ ,  $n^{\mu} n^{\nu}$ ,  $\eta^{\mu\rho} n_{\rho} n^{\nu}$  y  $n^{\mu} n_{\rho} \eta^{\rho\nu}$ , donde  $n^{\mu}$  es un vector unitario. Mientras que el primer término del miembro izquierdo de la ecuación (5.13) se mantiene, puesto que no genera violaciones al principio de conservación o condición de compatibilidad:

$$\nabla_{\mu} g^{\nu\rho} = 0 \quad (5.15)$$

En segunda instancia, en cuanto al posicionamiento de las placas (ahora curvas), debe descartarse la limitación que les concede el término  $g^{\mu\nu}$  cual podría compararse con la métrica  $\eta^{\mu\nu}$  y así eludir el término  $\hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu}$  en un efímero espacio-tiempo de Minkowski.

De esa forma los términos que deben encontrarse, sin perder la generalidad sobre el eje donde se encuentren las placas (curvas), deben ser  $g^{\mu 3} g^{\nu 3}$  (quedando abierta la posición de las placas (curvas) en cualquier dimensión). Fácilmente, puede verificarse el anterior ideal cuando se hace el paralelo con el espacio-tiempo de Minkowski:

$$g^{\mu 3} g^{\nu 3} \rightarrow \eta^{\mu 3} \eta^{\nu 3} = \hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu} \quad (5.16)$$

sí y sólo sí, cuando se transita de un espacio-tiempo curvado general a un espacio-tiempo plano particular.

Quedando clara la estrategia utilizada de párrafo anterior, implica que el nuevo valor esperado para el tensor energía-esfuerzos es: (recuérdese la expresión (5.11))

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{em} = K_{em} \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} - g^{\mu 3} g^{\nu 3} \right) \quad (5.17)$$

siendo ahora consistente con el principio de conservación  $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ , todo acorde a la condición de compatibilidad mostrada en la ecuación (5.15).[7]

#### 5.4 Métrica de Sitter evaluada en el Tensor energía-esfuerzos

Hasta el momento se ha permitido utilizar una métrica con apariencia general  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  por no decir minkowskiana; sin embargo, la generalización que realmente se pretende acorde al nuevo espacio-tiempo, adopta resultados del capítulo anterior, precisamente, la métrica de Sitter cuyo distintivo se agrega con un término de corrección (4.123). Es decir, si  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  y  $x^{\mu} = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$ , entonces:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 - \frac{(x^0)^2}{a^2} & \frac{x^0 x^1}{a^2} & \frac{x^0 x^2}{a^2} & \frac{x^0 x^3}{a^2} \\ \frac{x^1 x^0}{a^2} & 1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} & -\frac{x^1 x^2}{a^2} & -\frac{x^1 x^3}{a^2} \\ \frac{x^2 x^0}{a^2} & -\frac{x^2 x^1}{a^2} & 1 - \frac{(x^2)^2}{a^2} & -\frac{x^2 x^3}{a^2} \\ \frac{x^3 x^0}{a^2} & -\frac{x^3 x^1}{a^2} & -\frac{x^3 x^2}{a^2} & 1 - \frac{(x^3)^2}{a^2} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Siendo así, incluso el término (netamente contravariante)  $g^{\mu 3} g^{\nu 3}$  resulta ser:

$$g^{\mu 3} g^{\nu 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{x^0 x^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x^1 x^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x^2 x^3}{a^2} \\ \frac{x^3 x^0}{a^2} & -\frac{x^3 x^1}{a^2} & -\frac{x^3 x^2}{a^2} & 1 - \frac{(x^3)^2}{a^2} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Ahora, el objetivo es hallar, propiamente, el tensor energía-esfuerzos en el espacio-tiempo de Sitter (bajo el orden de aproximación  $(x/a)^2$ ). En inferencia, sustituyendo (5.18) y (5.19) en (5.17) se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle_{em} &= \frac{1}{4} K_{em} (g^{\mu\nu} - 4g^{\mu 3} g^{\nu 3}) \\ &= \frac{1}{4} K_{em} \begin{bmatrix} -(1 + \frac{(x^0)^2}{a^2}) & \frac{x^0 x^1}{a^2} & \frac{x^0 x^2}{a^2} & -\frac{3x^0 x^3}{a^2} \\ \frac{x^1 x^0}{a^2} & 1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} & -\frac{x^1 x^2}{a^2} & \frac{3x^1 x^3}{a^2} \\ \frac{x^2 x^0}{a^2} & -\frac{x^2 x^1}{a^2} & 1 - \frac{(x^2)^2}{a^2} & \frac{3x^2 x^3}{a^2} \\ -\frac{3x^3 x^0}{a^2} & \frac{3x^3 x^1}{a^2} & \frac{3x^3 x^2}{a^2} & -3 + \frac{3(x^3)^2}{a^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

De aquí, si  $a \rightarrow \infty$ , implica que el tensor energía-esfuerzos retorna al espacio-tiempo de Minkowski (5.5):

$$T^{\mu\nu} = \frac{K_{em}}{4} \text{diag}(-1, 1, 1 - 3) \quad (5.21)$$

## 5.5 Fuerza de Casimir en el espacio-tiempo de Sitter

En primera instancia, recuérdese la filosofía del resultado (3.59); para el caso requerido, el determinante de la métrica de Sitter (5.18) es:

$$g = \det(g^{\mu\nu}) = ((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - a^2)/a^2 \simeq -1 \Leftrightarrow a \gg x^\mu \quad (5.22)$$

En segunda instancia, considérese el resultado demostrado por [40] para la densidad de fluctuación de fuerza del vacío (fuerza de la curvatura), cual involucra al tensor energía-esfuerzos de la forma:[40]

$$f_\mu \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T_\mu^\nu) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} T^{\rho\sigma} \quad (5.23)$$

La anterior ecuación define la fuerza neta generada en la curvatura; por lo tanto, si el fenómeno evidenció dos placas paralelas, en correspondencia, implicaría dos contornos curvos y dos densidades de fuerza; significa que cada término de la expresión (5.23)

representa cada una de ellas:[7]

$$f_\mu = f'_\mu + f''_\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T_\mu^\nu) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} T^{\rho\sigma} \quad (5.24)$$

donde se reitera que  $f'_\mu$  y  $f''_\mu$  refiere al primer y segundo término de (5.23), respectivamente.

A continuación, en dependencia de las expresiones (5.18), (5.20) y (5.22), se hallará cada término: (individualmente)

$$f'_\mu \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T_\mu^\nu) \simeq -\frac{\partial}{\partial x^\nu} (T_\mu^\nu) \quad (5.25)$$

donde sus respectivas componentes disponen:

Cuando  $\mu = 0$ : (recuérdese la ecuación (5.6) cuando la componente  $T_0^0$  cambia de signo en comparación a la componente  $T^{00}$ )

$$\begin{aligned} f'_0 &= -\frac{\partial}{\partial x^\nu} (T_0^\nu) \\ &= -\left[ \frac{\partial T_0^0}{\partial x^0} + \frac{\partial T_0^1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_0^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_0^3}{\partial x^3} \right] \\ &= -\frac{K_{em}}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( 1 + \frac{(x^0)^2}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{x^1 x^0}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{x^2 x^0}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{3x^3 x^0}{a^2} \right) \right] \\ &= -\frac{K_{em}}{4} \left[ \frac{2x^0}{a^2} + \frac{x^0}{a^2} + \frac{x^0}{a^2} - \frac{3x^0}{a^2} \right] \\ &= \frac{K_{em}}{4a^2} [-x^0] \end{aligned}$$

Cuando  $\mu = 1$

$$\begin{aligned} f'_1 &= -\frac{\partial}{\partial x^\nu} (T_1^\nu) \\ &= -\frac{K_{em}}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{x^0 x^1}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( 1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{x^2 x^1}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{3x^3 x^1}{a^2} \right) \right] \\ &= -\frac{K_{em}}{4} \left[ \frac{x^1}{a^2} - \frac{2x^1}{a^2} - \frac{x^1}{a^2} + \frac{3x^1}{a^2} \right] \\ &= \frac{K_{em}}{4a^2} [-x^1] \end{aligned}$$

Idénticamente, cuando  $\mu = 2$

$$f'_2 = -\frac{\partial}{\partial x^\nu}(T_2^\nu) = \frac{K_{em}}{4a^2}[-x^2]$$

Por último, cuando  $\mu = 3$

$$\begin{aligned} f'_3 &= -\frac{\partial T_3^\nu}{\partial x^\nu} \\ &= -\frac{K_{em}}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{3x^0 x^3}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{3x^1 x^3}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{3x^2 x^3}{a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -3 + \frac{3(x^3)^2}{a^2} \right) \right] \\ &= -\frac{K_{em}}{4} \left[ -\frac{3x^3}{a^2} + \frac{3x^3}{a^2} + \frac{3x^3}{a^2} + \frac{6x^3}{a^2} \right] \\ &= \frac{K_{em}}{4a^2}[-9x^3] \end{aligned}$$

Por lo tanto, coleccionando los anteriores resultados, se halla la densidad de fuerza para el primer término de (5.24):

$$f'_\mu = \frac{K_{em}}{4a^2}(-x_0, -x_1, -x_2, -9x_3) \quad (5.26)$$

Análogamente, para el segundo término de (5.24), se tiene:

$$f''_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} T^{\rho\sigma}$$

donde sus respectivas componentes disponen:

Cuando  $\mu = 0$ : (ecuaciones (5.18) y (5.20) donde  $(x^\mu)^4/a^4 \simeq 0$ )

$$\begin{aligned} f''_0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} T^{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( -1 - \frac{(x^0)^2}{a^2} \right) \right] T^{00} + \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{x^0 x^1}{a^2} \right) \right] T^{01} + \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{x^0 x^2}{a^2} \right) \right] T^{02} + \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{x^0 x^3}{a^2} \right) \right] T^{03} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{x^1 x^0}{a^2} \right) \right] T^{10} + \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{x^2 x^0}{a^2} \right) \right] T^{20} + \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{x^3 x^0}{a^2} \right) \right] T^{30} + 0 \right\} \\ &= \frac{K_{em}}{8} \left\{ \left[ -\frac{2x^0}{a^2} \right] \left[ -1 - \frac{(x^0)^2}{a^2} \right] + \left[ \frac{x^1}{a^2} \right] \left[ \frac{x^0 x^1}{a^2} \right] + \left[ \frac{x^2}{a^2} \right] \left[ \frac{x^0 x^2}{a^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{x^3}{a^2} \right] \left[ -\frac{3x^0 x^3}{a^2} \right] + \left[ \frac{x^1}{a^2} \right] \left[ \frac{x^1 x^0}{a^2} \right] + \left[ \frac{x^2}{a^2} \right] \left[ \frac{x^2 x^0}{a^2} \right] + \left[ \frac{x^3}{a^2} \right] \left[ -\frac{3x^3 x^0}{a^2} \right] \right\} \\ &= \frac{K_{em}}{4a^2} [x^0] \end{aligned}$$

De igual forma las componentes restantes resultan: (Cuando  $\mu = i = 1, 2, 3$ )

$$f_1'' = \frac{K_{em}}{4a^2}[x^1]; \quad f_2'' = \frac{K_{em}}{4a^2}[x^2]; \quad f_3'' = \frac{K_{em}}{4a^2}[-3x^3]$$

Coleccionando resultados:

$$f_{\mu''} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} T^{\rho\sigma} = \frac{K_{em}}{4a^2}(x_0, x_1, x_2, -3x_3) \quad (5.27)$$

En efecto, sustituyendo ambos resultados, (5.26) y (5.27), en la expresión (5.24) se observa que todas las componentes de la fuerza se cancelan a excepción de la ubicada en el eje  $z$ : (densidad de fuerza neta)

$$f_\mu = (0, 0, 0, -\frac{3K_{em}}{a^2}x^3) \quad (5.28)$$

Finalmente, integrando la densidad de fuerza sobre un diferencial de volumen, se halla la fuerza sobre la dirección  $z$ : (en el proceso se sustituirá el resultado (5.10))

$$F_z = A \int_0^d \sqrt{-g} f_\mu dx^3 = -\frac{3K_{em}Ad^2}{2a^2} = \begin{cases} -\frac{\pi^2 \hbar c A}{120a^2 d^2} & \Leftrightarrow c_1(x) = c_2(x) = 1, -1 \\ \frac{7\pi^2 \hbar c A}{960a^2 d^2} & \Leftrightarrow c_1(x) = -c_2(x) = 1, -1 \end{cases} \quad (5.29)$$

donde  $A$  es el área de cada placa. Se evidencia que la fuerza es atractiva si las condiciones para las placas se toman individualmente para Dirichlet o Neumann ( $c_1(x) = c_2(x) = 1, -1$ ); pero si se toma la condición mixta: Dirichlet para una placa y Neumann para la otra ( $c_1(x) = -c_2(x) = 1, -1$ ), la fuerza es repulsiva.

Finalmente, aclárese que *la anterior hipótesis únicamente tiene relevancia cuando el volumen del universo se somete a dimensiones extremas así como lo sería las nanométricas; de lo contrario se observa claramente que si se mantiene el concepto de universo macroscópico ( $a \rightarrow \infty$ ), por lo tanto, la fuerza de Casimir sería totalmente despreciable.*[7]





*El científico encuentra su recompensa en lo que Henri Poincaré llama: "el placer de la comprensión", y no en las posibilidades de aplicación que cualquier descubrimiento puede conllevar.*  
*Albert Einstein*



---

## CONCLUSIONES

---

Previo al argumento, permítase citar el aforismo de Schrodinger: “Es un milagro que a pesar de la sorprendente complejidad del universo, se pueda descubrir en sus fenómenos determinada irregularidad”. A propósito, pareciera que dicha filosofía aplicase perfectamente al *efecto Casimir*; puesto que se observó una clara manifestación de la física cuántica cuando se perturba la estabilidad del vacío electromagnético, fluctuación que como consecuencia repercute sobre objetos materiales ordinarios. El efecto Casimir, siendo ahora una realidad,[11] además de ser un fenómeno novedoso, relativamente; implica que divagar sobre él, es equivalente a caminar sobre campos desconocidos, allí pueden encontrarse incluso derivaciones implícitas sobre fenómenos aparentemente comprendidos o por comprender. He ahí la razón del por qué el efecto Casimir se escogió como punto de partida para la presente memoria, pues resultó ser una fuente sería (de fin aplicativo) para intentar simular teóricamente, de la forma más particular e ideal posible, la expansión de un Universo con *límite o característica nanométrica*.

Se observó que para lograrlo, a pesar del conflicto de escalas que puede llegar a presentarse como prejuicio, cuando se intenta superponer un efecto Casimir cuántico con un problema cosmológico así como lo es la expansión del Universo; en primera instancia, hubo que partir de una premisa no muy ambiciosa y así superar dicho inconveniente. Sin importar la particularidad del caso, ella consistió en interceptar la totalidad del volumen de cada fenómeno, con límite preferencial impuesto en cualquier instante a favor del dominio espacial del efecto Casimir. En otras palabras, la esencia de la hipótesis planteada simuló un Universo inscrito en el vacío de Casimir, para el cual las placas conductoras paralelas fueran en últimas la curvatura de contorno del mismo; de tal forma que la especialidad de la hipótesis garantizaría el normal funcionamiento de los dos fenómenos y conservación de sus parámetros estándar.

Siendo coherente con las circunstancias, el Universo se expande (de manera isótropa sobre su plano transversal); por consiguiente, hubo necesidad de sustituir el típico espacio-tiempo de Minkowski por un espacio-tiempo propicio, el *modelo asintótico de Sitter*. Las características intrínsecas de dicho espacio otorgaron ventajas al momento de ser aplicadas cuando se consideró una expansión máximamente simétrica; debido a la uniformidad de la curvatura, se logró reducir un espacio-temporal 5D (definido inicialmente) a uno 4D; además, se logró obtener una constante cosmológica positiva  $\Lambda = 3/a^2$  que resultó compatible con la filosofía natural impuesta.

La prevalencia paramétrica de un vacío de Casimir y un espacio-tiempo de Sitter, dependió de un acople a través de un tensor energía-esfuerzos efectivo; en la definición relativista, bastó con insertar resultados obtenidos previamente, como por ejemplo, las derivaciones de la densidad de energía ( $\delta E/V$ ) y presión ( $F/A$ ) entre placas paralelas. En consecuencia, gran parte de la regularización de éste tensor en el espacio-tiempo de Sitter, fue favorecida por la esencia del efecto Casimir, para el cual ya se habían eludido cantidades divergentes. No obstante, la física tras el efecto Casimir reunió una serie de condiciones impuestas; inicialmente, la región entre placas no poseía cargas ni corrientes eléctricas fuente; pero, la rigurosidad del caso (hablando de vacío, a propósito) hizo caer en cuenta que cuando se amplía el concepto a un *campo no masivo*, en la zona, también satisface dichas condiciones. Por lo tanto, siendo así, ello dió a entender que en el volumen interior al contorno tampoco se presentarían interacciones gravitacionales hacia un centro de simetría, (aclarando que, más allá del uso o no de placas, ni siquiera en el fenómeno real del efecto Casimir se presentan).

Ahora, en términos de una posible versión repulsiva para el efecto Casimir, el argumento del último párrafo posee gran relevancia; puesto que satisface a la expansión de un Universo, cual, contradictoriamente, se aleja aceleradamente de su centro de gravedad. Por lo tanto, en términos efectivos y a su vez prácticos para la presente memoria, se vió la facilidad de eliminar interacciones gravitacionales o masas interiores. Sucesivamente, se comparó los trabajos relacionados [4] y [7] que demostraron coherencia y compatibilidad en los cálculos; a su manera, ambos consideraban un tensor energía-esfuerzos para el vacío de Casimir. Por consiguiente, con la particularidad de un campo no masivo, se logró interceptar dichos tensores, resultando un tensor energía-esfuerzos más general en términos de una métrica de Sitter (ambos, dependientes de un término de corrección aproximado a segundo orden  $(x/a)^2$ , siendo  $a$  el radio del universo). Ello conllevó a un nuevo posicionamiento de las placas paralelas de Casimir, ajustándose intrínsecamente sobre la curvatura, de tal forma que ellas siempre estuviesen tangenciales a cada punto de la misma; en consecuencia, ello generó varianza en los vectores direccionales perpendiculares a las placas, de tal forma que hubo necesidad de insertar una función de esfuerzos propia de la curvatura.

A partir del tensor energía-esfuerzos  $T^{\mu\nu}$  y la función de esfuerzos innata a la curvatura  $f^\mu$ , se aplicó las condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann; logró hallarse una nueva fuerza de Casimir-Sitter con naturalidad dual (atractiva cuando se somete a las condiciones de Dirichlet o Neumann y repulsiva cuando se somete a la condición mixta Dirichlet-Neumann). Dicha fuerza asocia la distancia  $d$  entre placas y el radio del Universo  $a$ . De allí fácilmente puede concluirse que la fuerza desaparece cuando  $a, d \rightarrow \infty$ ; pero, resulta eficaz cuando el radio del universo coincide con la distancia de separación entre placas  $a = d$ . Evidentemente, siendo conscientes que la presente memoria sólo aplica al caso particular: “volumen del universo no masivo reducido a límites nanométricos”; se espera que en futuros trabajos relacionados se considere el caso opuesto; es decir, que un efecto Casimir se lleve a límites macroscópicos y aún así el fenómeno funcione. Aclarándose que también existe opción de involucrarse interacciones débiles y fuertes[7]. Sin embargo, más allá de una simulación teórica micro o macroscópica, para un enfoque como el del presente trabajo, puede presentarse gran cantidad de hipótesis, muy particulares de por cierto, pero en últimas razonables, así como lo sería para una expansión del Universo inmediatamente al Big Bang; es decir, más allá de la particularidad que se manejó en ésta memoria, éste ideal no debería descartarse, quizás, posiblemente, sea fuente de la aceleración transversal del Universo en sus primeros tiempos de Planck, cuando seriamente el Universo no contaba con una masa real y justamente se manejaba el dominio microscópico.





# CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

---

A partir de las ecuaciones de Maxwell, reescritas en términos de potenciales electromagnéticos, se hallará el Hamiltoniano del vacío clásico. En acople a ello, se hará paso a una generalización en términos de la física cuántica; finalmente, se deducirá el valor esperado de la mínima energía correspondiente al vacío cuántico.

## A.1 *Hamiltoniano electromagnético para el vacío clásico*

En primer lugar, considérese las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético:[15][16]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \tag{A.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{A.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{A.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{A.4}$$

Antes de iniciar con el tratamiento, a las ecuaciones de Maxwell (A.1) y (A.4) se les eliminará la dependencia explícita de los campos electromagnéticos, tal que las mismas resulten únicamente en términos de potenciales electromagnéticos. Para lograrlo, considérese la ley de Gauss para el campo eléctrico (A.1), en ella se sustituirá la dependencia de un potencial electrostático  $\phi$  y así simplificar notablemente el cálculo de campos eléctricos. Por otra parte, al considerar campos magnéticos descritos por la ley de Ampère-Maxwell (A.4), se observa claramente que su rotacional no es nulo, pero, la divergencia del campo magnético sí lo es (véase la ley de Gauss para el campo magnético (A.3)); ello significa que si la divergencia de cualquier rotacional es cero, entonces no habría ningún problema (siendo razonable además) en escribir la inducción magnética en términos de un *potencial vectorial magnético*  $\vec{A}$ , es decir:[15][16]

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A.5})$$

hecho que satisface (A.3) puesto que  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ . [17] Al igual que la definición (A.5) puede obtenerse un ajuste similar para el campo eléctrico; basta con sustituir precisamente ésta expresión en la ley de inducción de Faraday-Henry (A.2):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

[*Teorema A.1:*

Sea  $\vec{F}$  una función vectorial tal que su rotacional sea cero  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , entonces la función  $\vec{F}$  se puede escribir como el gradiente de una función escalar  $\psi(\vec{r})$ : [17]

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \psi(\vec{r})$$

.]

Respectivamente, obsérvese el resultado (A.6), al tomar en cuenta el Teorema A.1, la función vectorial  $\vec{E} + \partial \vec{A}/c \partial t$  resulta ser equivalente a:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \phi \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

lo que significa que se ha conseguido una relación para el campo eléctrico en términos

de potenciales electromagnéticos.<sup>1</sup>

Ahora, recuérdese nuevamente la expresión (A.1), al sustituir en ella el resultado (A.7), se logra resolver la primera parte del objetivo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}\right) &= 4\pi\rho \\ -\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 4\pi\rho\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Después de haber obtenido la ley de Gauss en términos de potenciales electromagnéticos, considérese la ley de Ampère-Maxwell (A.4), al sustituirle las definiciones (A.5) y (A.7) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

en última instancia, aplicando la idéntidad:[17]

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{A.9})$$

se logra resolver el complemento del objetivo inicial, obtener la ley de Ampère-Maxwell en términos de potenciales electromagnéticos:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad (\text{A.10})$$

En conclusión, coleccionando los resultados (A.8) y (A.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

del anterior par de ecuaciones dependientes de potenciales electromagnéticos, se puede comentar que cuando no existen cargas ni corrientes presentes en la región de interés, los términos  $\rho$  y  $\vec{J}$  son nulos[15][16].

---

<sup>1</sup>De la expresión (A.7) obsérvese que si el potencial vectorial magnético  $\vec{A}$  no es variable en el tiempo, el término  $\partial \vec{A} / \partial t$  es nulo, obteniéndose de esta manera la clásica dependencia del campo eléctrico estacionario, donde el signo negativo (-) indica que el campo  $\vec{E}$  es atractivo.

Por otra parte, particularizando desde las ecuaciones de Maxwell para la adquisición de campos electromagnéticos estacionarios; fácilmente, puede considerarse la ley de Ampère obtenida desde la relación (A.4) cuando la corriente inducida  $\partial \vec{E}/c\partial t$  se anula. Ahora, fíjese que si en ella se introduce la definición (A.5) junto con la identidad (A.9), se halla:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (\text{A.12})$$

aquí, analícese lo siguiente: el concepto de potencial eléctrico está construido en ambigüedad; en otras palabras, se puede agregar a  $\phi$  cualquier función cuyo gradiente sea cero (es decir, cualquier constante) sin alterar de alguna manera la cantidad física  $\vec{E}$ . [15][16] Igualmente, se puede agregar al potencial vectorial magnético cualquier función cuya circulación ó rotacional desaparezca (por ejemplo, el gradiente de un escalar), sin ningún efecto sobre el campo magnético  $\vec{B}$ , tal como lo afirma el Teorema A.1. En consecuencia, se justifica el hecho de que también se puede explorar esta libertad para eliminar la divergencia de  $\vec{A}$ : [15][16][17]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv 0 \quad (\text{A.13})$$

expresión conocida como el Gauge de Coulomb, cuyo sentido físico asegura la eliminación de grados de libertad redundantes impuestos por el campo; por ejemplo, la calibración (A.13) se justifica al observar la ley de Ampère (A.12), donde el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  define circulación, lo que significa que en contraste al término que define la divergencia  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  para un valor diferente de cero es incompatible, luego éste último no debería considerarse. Bajo esto, la primera ecuación del par (A.11) se reduce a:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (\text{A.14})$$

ajuste que resulta con estructura idéntica a la ecuación Poisson. [15][16] Al respecto, una posible solución para ella puede ser expresada de la forma: [18]

$$\phi(\vec{r}, t) \equiv \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (\text{A.15})$$

definición que refiere al clásico potencial escalar proveniente de una distribución de carga  $\rho$  en electrostática.

Análogamente, sin cargas  $\rho$  ni corrientes  $\vec{J}$ , la segunda ecuación del par (A.11), para

el Gauge de Coulomb (A.13), se reduce a:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \vec{0} \quad (\text{A.16})$$

resultado que define a la ecuación de onda aplicada a campos electromagnéticos, tal como lo evidencia la velocidad de propagación  $c$ . De la experiencia se conoce que una solución específica para la ecuación de onda (A.16), esta dada por la onda plana:[18]

$$\vec{A} \equiv \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{A.17})$$

donde  $\omega = kc$ . [15]<sup>2</sup>. No obstante, habido analizado las repercusiones desprendidas de las expresiones (A.11), se clarifica que ésta última solución (A.17) junto con sus condiciones iniciales impuestas, sea la más apropiada para la continuación del proceso de cuantización del campo electromagnético.

Ahora, de las ecuaciones de Maxwell se requiere dependencia explícita de energía o densidad de energía, para adquirirlo es necesario recurrir a la siguiente estrategia: considérese el producto escalar entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y la ley de Ampère-Maxwell (A.4)

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{E} \cdot \left( \frac{4\pi}{c} \vec{J} \right) + \vec{E} \cdot \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.18})$$

sucesivamente, utilizando la idéntidad:[17]

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{A.19})$$

sobre (A.18), se obtiene

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (\text{A.20})$$

incluso, obsérvese que puede sustituirse la ley de Faraday-Henry (A.2) en el resultado

---

<sup>2</sup>En agregado, la condición de Coulomb (A.13) impone el contraste:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0$  lo que significa que  $\vec{k} \cdot \vec{A}_0 = 0$ , indicando que el frente de onda es transversal a la dirección de propagación  $\vec{k}$ . Por esta razón el Gauge de Coulomb es también conocido como el ajuste transversal[18]

(A.20):

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial E^2}{\partial t} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial E^2}{\partial t} \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) + \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= -\vec{J} \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

$$2 \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_p = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (\text{A.21})$$

donde se ha reconocido la esencia física de los términos interiores a sus respectivos operadores:[15][16][18]

$$u \equiv \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad \text{y} \quad \vec{S}_p \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (\text{A.22})$$

aquí, la primera definición refiere a la densidad de energía electromagnética (energía por unidad de volumen); mientras que la segunda definición refiere al vector de Poynting, cuyo módulo representa la intensidad instantánea de energía electromagnética.

Por el momento, únicamente interesa la primera definición de (A.22), cual integrando con respecto a todo el volumen del universo, logra hallarse el Hamiltoniano para el campo electromagnético:

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 + B^2) d^3r \quad (\text{A.23})$$

Obsérvese que al sustituir las expresiones (A.5) y (A.7) en (A.23) se hace dependencia exclusiva de potencial vectorial magnético (pues también se hará  $\phi = 0 \leftrightarrow \rho = 0$ ):[13]

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int_V \left( \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) d^3r \quad (\text{A.24})$$

Es de notar que hasta la presente se ha realizado un tratamiento desde un punto de vista clásico; la meta a continuación es realizar la transición del campo electromagnético clásico a una teoría completamente cuántica.

## A.2 Hamiltoniano Electromagnético para el vacío cuántico

Recuérdese la solución particular (A.17), ella puede ser escrita de una forma más general y aún así satisfacer a la ecuación de onda (A.16); es decir, dicha solución puede ser obtenida desde la superposición de todas las diferentes soluciones en ondas planas. Luego, para garantizar tal generalidad, la superposición toma la forma de una integral sobre todos los posibles valores de  $\vec{k}$ . Sin embargo, las propiedades cuánticas del campo electromagnético hacen conceptualmente que la situación sea aún más manejable; es decir, el vector número de onda  $\vec{k}$  toma valores discretos en lugar de continuos, tal que la superposición tome la forma de una sumatoria en vez de una integral. Una manera conveniente para cumplir lo prometido es trabajar en una caja cúbica de arista  $L$  con un lado sujeto a una condición de periodicidad (de frontera). Es claro que aleatoriamente sobre el eje  $x$  ésta periodicidad puede escribirse de la forma:[18]

$$e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)} \quad (\text{A.25})$$

Al extender la condición (A.25) sobre los ejes  $y$  y  $z$ , para el caso estacionario se satisface que:(véase Apéndice B)<sup>3</sup>

$$\begin{cases} k_x L = 2\pi n_x \\ k_y L = 2\pi n_y \\ k_z L = 2\pi n_z \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

donde los números cuánticos

$$n_x, n_y, n_z \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{A.27})$$

luego, la separación de los modos adyacentes con respecto a  $x$  se da por  $\Delta k_x = 2\pi/L$ . Con el vector de onda  $\vec{k}$  tomando valores discretos, implica un ajuste de soluciones discretas; en efecto, de acuerdo a todo lo precedente, la solución (A.17) se generaliza como una doble sumatoria aplicada sobre dos términos, es decir:[18]

---

<sup>3</sup> Si desea observar en más detalle el respectivo proceso que deduzca las siguientes definiciones (ecuaciones (A.26)), diríjase al Apéndice B el cual demuestra la cuantización energética de una partícula dentro del pozo de potencial.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} \sum_k (\vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$$

$$\vec{A} \equiv \sum_{\lambda} \sum_k \left( C_{\lambda, k} \vec{\epsilon}(\lambda, k) \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} + C_{\lambda, k}^* \vec{\epsilon}(\lambda, k) \frac{e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} \right) \quad (\text{A.28})$$

donde  $k$  es el número de onda en la dirección de propagación, cuya magnitud determina la frecuencia de la onda; el índice  $\lambda$  refiere a la polarización de ella, polarización que varía desde uno a dos en la sumatoria, puesto que únicamente existen dos clases de polarización, la longitudinal y la transversal; los términos  $\vec{\epsilon}(\lambda, k)$  son vectores unitarios los cuales indican la dirección ó polarización para cada valor de  $\vec{k}$  del vector potencial magnético; las cantidades  $C_{\lambda, k}$  y  $C_{\lambda, k}^*$  refieren a coeficientes que definen la amplitud de la onda y a su vez dependen de los índices  $\lambda$  y  $k$ ; finalmente,  $V$  refiere al volumen de la caja, donde se puede dar el caso que  $L \rightarrow \infty$  sin alterar físicamente los resultados, dado que el volumen del universo como tal pueda ser limitado, la idea de introducir un *todo* en una caja no puede parecer extraño en absoluto, tal que en consecuencia el factor  $1/\sqrt{V}$  se convierta en un término de normalización. Obsérvese que el arreglo de  $\vec{A}$  en la expresión (A.28) satisface el Gauge de Coulomb (A.13) (o lo que es lo mismo, al verificar en la expresión  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ):

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\lambda, k) = 0 \quad (\text{A.29})$$

Por consiguiente, el vector polarización  $\vec{\epsilon}(\lambda, k)$  es perpendicular a la dirección de  $\vec{k}$ .

Ahora, recuérdese el Hamiltoniano del campo electromagnético (A.24), de allí, particularmente, puede ingresarse la onda electromagnética a través de un polarizador, tal que como consecuencia se filtre tan sólo la onda eléctrica. De ésta forma el término que representa la energía del campo eléctrico sea:

$$H_E = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d^3r$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V \sum_{\lambda, k} \left( \frac{-i\omega}{c} C_{\lambda, k} \vec{\epsilon}(\lambda, k) \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} + \frac{i\omega}{c} C_{\lambda, k}^* \vec{\epsilon}(\lambda, k) \frac{e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} \right) \cdot$$

$$\sum_{\lambda', k'} \left( \frac{-i\omega}{c} C_{\lambda', k'} \vec{\epsilon}(\lambda', k') \frac{e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} + \frac{i\omega}{c} C_{\lambda', k'}^* \vec{\epsilon}(\lambda', k') \frac{e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} \right) d^3r \quad (\text{A.30})$$

sin embargo, antes de continuar con el respectivo procedimiento, se observa que se tiene una sumatoria que cubre todos los posibles valores de  $k$  y otra sumatoria que cubre dos únicos valores de  $\lambda$ , siempre que el vector potencial magnético tenga dos términos, una será independiente de la otra (véase la expresión (A.28)). En consecuencia, para evaluar (A.30) es conveniente primero llevar a cabo una integral sobre todo el universo, donde debe recordarse que esto significa que  $L \rightarrow \infty$ . Para realizarlo debe usarse la siguiente condición de normalización: (Teorema A.2)

[Teorema A.2:

Considérese un conjunto de bases discretas, completas y ortonormales en el espacio de Hilbert, el cual esta conformado por un ajuste infinito de *kets*  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, \dots$ , todos ellos abreviados por  $|\phi_n\rangle$ [19]. La condición de ortonormalidad en base *bra-ket* se expresa por:

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \int \phi_n^*(x) \phi_m(x) dx = \delta_{n,m}$$

donde  $\delta_{n,m}$  define a delta de Kronecker:

$$\delta_{n,m} := \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

.]

Por consiguiente, puede utilizarse el Teorema A.2 y adquirir la normalización de interés:<sup>4</sup>[18]

$$\int_V \left( \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) \left( \frac{e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) d^3r = \delta_{k,k'} \quad (\text{A.31})$$

Regresando a la expresión (A.30) y aplicando la definición (A.31), resolviendo se

---

<sup>4</sup> Si desea cerciorarse de la veracidad de la definición (A.31), diríjase su respectiva demostración en el Apéndice B.

obtiene:

$$\begin{aligned}
H_E &= \frac{1}{8\pi} \int_V \sum_{\lambda', k'} \left( \frac{i\omega}{c} C_{\lambda', k'}^* \vec{\epsilon}(\lambda', k') \frac{e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} \right) \cdot \sum_{\lambda, k} \left( \frac{-i\omega}{c} C_{\lambda, k} \vec{\epsilon}(\lambda, k) \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} \right) d^3 r \\
&= \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda, k} \sum_{\lambda', k'} \left( \frac{i\omega}{c} C_{\lambda', k'}^* \vec{\epsilon}(\lambda', k') \right) \cdot \left( \frac{-i\omega}{c} C_{\lambda, k} \vec{\epsilon}(\lambda, k) \right) e^{-i(\omega t - \omega t)} \delta_{k, k'} \\
&= \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda, k} \sum_{\lambda'} \frac{\omega^2}{c^2} C_{\lambda', k}^* C_{\lambda, k} \vec{\epsilon}(\lambda', k) \cdot \vec{\epsilon}(\lambda, k) \\
&= \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda, k} \sum_{\lambda'} \frac{\omega^2}{c^2} C_{\lambda', k}^* C_{\lambda, k} \delta_{\lambda, \lambda'} \\
&= \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda, k} \frac{\omega^2}{c^2} C_{\lambda, k}^* C_{\lambda, k}
\end{aligned}$$

donde se han evaluado todas las posibles condiciones de ortonormalidad previstas por los delta de Kronecker. Como se observó del tratamiento anterior se han omitido tres términos, puesto que según la expresión (A.30) son cuatro en total, en los cuales dos de ellos son dependientes del tiempo. Sin embargo, cuando se agregan los términos que conforman la energía del campo magnético a los que conforman la energía del campo eléctrico, se halla que los términos dependientes del tiempo para la energía de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  (cuales serían cuatro en total) se cancelen entre sí<sup>5</sup>. En inferencia, la energía electromagnética total es:[18]

$$H_{EM} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda, k} \frac{\omega^2}{c^2} C_{\lambda, k}^* C_{\lambda, k} \quad (\text{A.32})$$

Justo como era de esperarse, puesto que el Hamiltoniano para un sistema cerrado puede ser independiente del tiempo.

Incluso, de la física cuántica, puede adoptarse una filosofía fundamental en términos de las siguientes definiciones:[18]

$$q_{\lambda, k} \equiv \frac{1}{c\sqrt{4\pi}} (C_{\lambda, k} + C_{\lambda, k}^*) \quad ; \quad p_{\lambda, k} \equiv \frac{-i\omega}{c\sqrt{4\pi}} (C_{\lambda, k} - C_{\lambda, k}^*) \quad (\text{A.33})$$

<sup>5</sup> Aunque el procedimiento es tedioso, no es difícil observar tal consecuencia, simplemente debe trabajarse desde la expresión (A.24) en su totalidad, para conseguirlo debe tenerse en cuenta el hecho que  $k \equiv \omega/c$ , [15] de tal forma que algebraicamente se logre cancelar los términos dependientes del tiempo correspondientes a  $H_E$  y  $H_B$ .

de aquí, considérese el siguiente proceso sobre el par (A.33): al multiplicar la primera expresión por  $\omega$  y la segunda expresión por  $i$ , resolviendo el sistema de ecuaciones se halla:

$$C_{\lambda,k}^* = \frac{c\sqrt{4\pi}}{2\omega}(\omega q_{\lambda,k} - ip_{\lambda,k}) \quad ; \quad C_{\lambda,k} = \frac{c\sqrt{4\pi}}{2\omega}(\omega q_{\lambda,k} + ip_{\lambda,k}) \quad (\text{A.34})$$

Por consiguiente, al sustituir los resultados (A.34) en el Hamiltoniano electromagnético (A.32) se obtiene:

$$\begin{aligned} H_{EM} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda,k} \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{c\sqrt{4\pi}}{2\omega}(\omega q_{\lambda,k} - ip_{\lambda,k}) \right) \left( \frac{c\sqrt{4\pi}}{2\omega}(\omega q_{\lambda,k} + ip_{\lambda,k}) \right) \\ &= \sum_{\lambda,k} \frac{1}{2} (p_{\lambda,k}^2 + \omega^2 q_{\lambda,k}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

En conclusión, del resultado (A.35) se observa que formalmente el campo electromagnético puede ser considerado como una colección de osciladores armónicos independientes<sup>6</sup>. Véase la Figura A.1. En ese enfoque, la densidad de energía electromagnética es determinada como un número de modos (osciladores) en un rango de frecuencia particular multiplicado por un promedio de energía correspondiente a cada oscilador. Sin embargo, cuánticamente, la expresión (A.35) puede ajustarse a una relación aún más conocida. Es decir, en primera instancia, debe reescribirse en términos de operadores:[19]

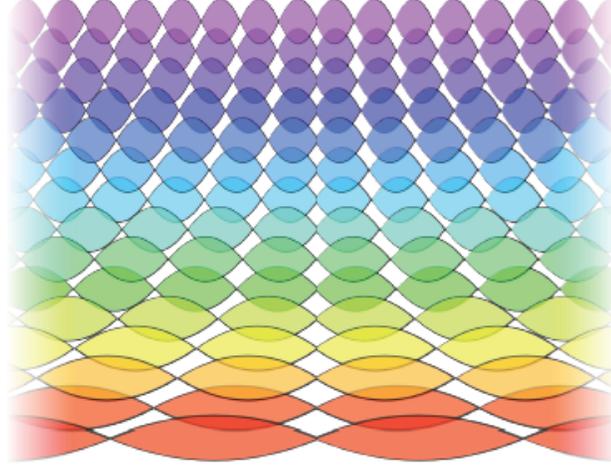
$$\hat{H}_{EM} = \sum_{\lambda,k} \frac{1}{2} (\hat{p}_{\lambda,k}^2 + \omega^2 \hat{q}_{\lambda,k}^2) \quad (\text{A.36})$$

### [Teorema A.3:

Un operador  $\hat{A}$  es una regla matemática que al ser aplicada a un *ket*  $|\psi\rangle$  transforma en otro *ket*  $|\psi'\rangle$  del mismo espacio; análogamente, si actúa sobre un *bra*  $\langle\psi|$  le transforma en otro *bra*  $\langle\psi'|$ :[19]

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad ; \quad \langle\phi|\hat{A} = \langle\phi'|$$

<sup>6</sup>Recuérdese el Hamiltoniano de una "única" partícula de masa  $m$ , la cual oscila con una frecuencia  $\omega$  bajo la influencia de un potencial armónico unidimensional. Éste explícitamente se define como  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ , [19] donde  $p$  y  $q$  refieren a coordenadas generalizadas las cuales representan al momentum y a la posición, respectivamente. En comparación al Hamiltoniano Electromagnético (A.35), no existe dependencia de la masa  $m$ , esto se debe a que la masa en reposo del fotón es nula.



**Figura A.1:** Concepto de vacío desde una perspectiva de la física cuántica. Representación de modos de vibración para cada frecuencia electromagnética en el espacio; todos los osciladores cuánticos están acoplados y generan isotropía, homogeneidad y estabilidad en la distribución del campo electromagnético.[13]

El conmutador de dos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ , denotado por  $[\hat{A}, \hat{B}]$ , se define como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Luego, particularmente, si el operador posición  $\hat{q} \equiv \hat{x}$  y el operador momentum  $\hat{p} \equiv -i\hbar\nabla$ , [19] la respectiva conmutación entre ellos será:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\lambda,k}, \hat{p}_{\lambda,k}] &= \hat{q}_{\lambda,k}\hat{p}_{\lambda,k} - \hat{p}_{\lambda,k}\hat{q}_{\lambda,k} \\ &= \hat{x}_{\lambda,k}i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{\lambda,k}} + i\hbar\frac{\partial\hat{x}_{\lambda,k}}{\partial x_{\lambda,k}} \\ &= i\hbar\hat{I} \end{aligned}$$

donde  $\hat{I}$  es el operador unitario. .]

Ahora, debe considerarse las definiciones de los operadores de creación y eliminación de la física cuántica:[18][19]

$$\hat{a}_{\lambda,k} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q}_{\lambda,k} + \frac{i}{\omega}\hat{p}_{\lambda,k}\right) \quad ; \quad \hat{a}_{\lambda,k}^{\dagger} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q}_{\lambda,k} - \frac{i}{\omega}\hat{p}_{\lambda,k}\right) \quad (\text{A.37})$$

de ellas nótese que:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{\lambda,k}^\dagger \hat{a}_{\lambda,k} &= \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} (\hat{q}_{\lambda,k} - \frac{i}{\omega} \hat{p}_{\lambda,k}) \right) \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} (\hat{q}_{\lambda,k} + \frac{i}{\omega} \hat{p}_{\lambda,k}) \right) \\
&= \frac{\omega}{2\hbar} (\hat{q}_{\lambda,k}^2 + \frac{1}{\omega^2} \hat{p}_{\lambda,k}^2 + \frac{i}{\omega} \hat{q}_{\lambda,k} \hat{p}_{\lambda,k} - \frac{i}{\omega} \hat{p}_{\lambda,k} \hat{q}_{\lambda,k}) \\
&= \frac{\omega}{2\hbar} (\hat{q}_{\lambda,k}^2 + \frac{1}{\omega^2} \hat{p}_{\lambda,k}^2) + \frac{i}{2\hbar} [\hat{q}_{\lambda,k}, \hat{p}_{\lambda,k}] \\
&= \frac{\omega}{2\hbar} (\hat{q}_{\lambda,k}^2 + \frac{1}{\omega^2} \hat{p}_{\lambda,k}^2) + \frac{i}{2\hbar} (i\hbar) \\
&= \frac{\omega}{2\hbar} (\hat{q}_{\lambda,k}^2 + \frac{1}{\omega^2} \hat{p}_{\lambda,k}^2) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el Teorema A.3. En términos más prácticos:

$$\hat{p}_{\lambda,k}^2 + \omega^2 \hat{q}_{\lambda,k}^2 = 2\hbar\omega (\hat{a}_{\lambda,k}^\dagger \hat{a}_{\lambda,k} + \frac{1}{2}) \quad (\text{A.38})$$

Finalmente, al sustituir el resultado precedente en la relación (A.36), se adquiere el “Hamiltoniano del campo electromagnético en términos de operadores”:[13]

$$\hat{H}_{EM} = \sum_{\lambda,k} \hbar\omega (\hat{a}_{\lambda,k}^\dagger \hat{a}_{\lambda,k} + \frac{1}{2}) \quad (\text{A.39})$$

donde el término  $\hat{a}_{\lambda,k}^\dagger \hat{a}_{\lambda,k} \equiv \hat{N}$  es conocido como el operador de ocupación. A través del uso del operador (A.39) aplicado sobre una función de estado  $|\psi\rangle$ , puede hallarse el valor esperado de la energía correspondiente. La filosofía del resultado sigue siendo la misma a la de la expresión (A.35), el Hamiltoniano del campo electromagnético depende de múltiples osciladores armónicos independientes; lo que significa que el campo electromagnético ha sido cuantizado.

### A.3 Estado Vacío, Energía del Punto Cero

El estado de más baja energía para el Hamiltoniano (A.39) es llamado “estado vacío” y se denota por el *ket*  $|0\rangle$ . Ahora, si el operador de eliminación  $\hat{a}$  (el cual contiene todos los valores de  $\lambda$  y  $k$ ) se aplica sobre el estado vacío, es comprensible que resulte:[13][18][19]

$$\hat{a}_{\lambda,k}|0\rangle \equiv 0 \quad (\text{A.40})$$

lo precedente significa que para este estado ya no será posible eliminar cuantos de energía.

De acuerdo al hecho de que los operadores de creación y eliminación conmutan sólo cuando  $k$  o  $\lambda$  son diferentes, favorece la descomposición del estado vacío  $|0\rangle$  como el producto de cada oscilador independiente para un dado  $\lambda$  y  $k$ : [13]

$$|0\rangle \equiv |0_{\lambda_1, k_1}\rangle \otimes |0_{\lambda_2, k_2}\rangle \otimes |0_{\lambda_3, k_3}\rangle \otimes \dots \quad (\text{A.41})$$

donde se han agregado todos los osciladores armónicos independientes. La física implícita tras la expresión (A.41) argumenta la existencia de infinidad de frecuencias o longitudes de onda que interfieren destructivamente, otorgando cierta estabilidad en todo el espacio y llevando de esta manera al concepto cuántico de estado vacío; concepto cual resulta ser muy distante a la definición de vacío clásico, puesto que para ésta última, carece de sentido hablar de frecuencias íntegras al vacío como tal.

Clásicamente, se espera que el campo electromagnético en el vacío posea una energía cero (sin fotones). Sin embargo, en la versión cuántica cuando se toma el valor esperado del Hamiltoniano (A.39) aplicado sobre el estado vacío  $|0\rangle$ , se halla que:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle &= \langle 0 | \sum_{\lambda, k} \hbar\omega (\hat{a}_{\lambda, k}^\dagger \hat{a}_{\lambda, k} + \frac{1}{2}) | 0 \rangle \\ &= \sum_{\lambda, k} \hbar\omega \langle 0 | \hat{a}_{\lambda, k}^\dagger \hat{a}_{\lambda, k} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\lambda, k} \hbar\omega \langle 0 | 0 \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \sum_{\lambda, k} \hbar\omega \delta_{0,0} \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la definición (A.40) y el Teorema A.2. Luego, la expresión que define al universo a contener un número infinito de modos de radiación (cada uno con una energía finita de  $\hbar\omega/2$ ) es la “Energía del Punto Cero” (ZPE)<sup>7</sup>: [19]

$$\boxed{\langle E \rangle_{ZPE} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_k \hbar\omega} \quad (\text{A.42})$$

<sup>7</sup> ZPE: sigla en inglés que simplifica la frase “zero-point energy”.

---

# B

## POZO DE POTENCIAL, NORMALIZACIÓN DE FUNCIONES Y FÓRMULA DE EULER-MACLAURIN

---

### B.1 *Pozo de potencial*

Considérese una partícula de masa  $m$  confinada a moverse dentro de un pozo de potencial definido de la forma: (véase la Figura B.1)

$$V = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & x > L \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Clásicamente la partícula permanece confinada dentro del pozo, moviéndose a momentum constante  $p = \pm\sqrt{2mE}$  hacia atrás y hacia adelante como resultado de repetidas reflexiones contra las paredes del pozo. Como se observa en la Figura B.1, se definen tres regiones, cuánticamente se espera que la partícula tenga sólo saltos de soluciones de estado y un espectro de energía discreto no degenerado.

Al tomar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= (E - V)\psi \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

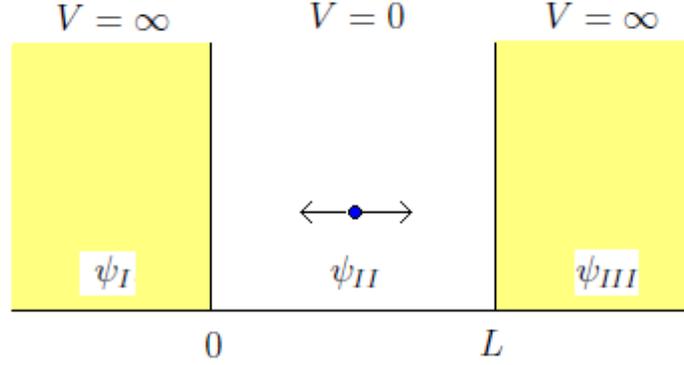


Figura B.1: Una partícula dentro del pozo de potencial.

Considerando la región II,  $V = 0$ , luego la ecuación (B.2) se reduce a:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= E\psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde  $k^2 \equiv 2mE/\hbar^2$ , siendo  $k$  el número de onda. Una posible solución a la ecuación (B.3) puede ser de la forma:[19]

$$\psi \equiv e^{sx} \quad (\text{B.4})$$

donde  $s$  refiere a un escalar complejo. En cuanto a la definición (B.4) el respectivo valor de su segunda derivada es:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} e^{sx} \right) = \frac{d}{dx} (s e^{sx}) = s^2 e^{sx}$$

Al sustituir este último resultado junto con la definición (B.4) en la ecuación (B.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} s^2 e^{sx} + \frac{2mE}{\hbar^2} e^{sx} &= 0 \\ s^2 &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \\ s &= \pm i \sqrt{2mE/\hbar^2} = \pm ik \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

en consecuencia, de la solución (B.4) se desprenden dos soluciones:

$$\psi_1 = e^{ikx} \quad ; \quad \psi_2 = e^{-ikx} \quad (\text{B.6})$$

Ahora, considérese la idéntidad:[17]

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{B.7})$$

para este caso  $\theta \equiv kx$ . En general, la solución que define a la región II y satisface la expresión (B.3) será:

$$\begin{aligned} \psi_{II} &= B\psi_1 + D\psi_2 \\ &= Be^{i\theta} + De^{-i\theta} \\ &= B(\cos \theta + i \sin \theta) + D(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Obsérvese nuevamente la Figura B.1, aplicando las condiciones de frontera, se desprende que si en las regiones I y III  $V \rightarrow \infty$ , implica que  $\psi_I$  y  $\psi_{III} \rightarrow 0$ . En efecto, la función  $\psi(x)$  debe ser continua, por lo tanto: (A continuación se dará paso al uso de las condiciones de frontera de Dirichlet)

$$\begin{aligned} \psi_I(x=0) &= \psi_{II}(x=0) \\ 0 &= C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Al tener en cuenta este último resultado, la solución (B.8) aminora a:

$$\psi_{II} = C \sin kx \quad (\text{B.9})$$

Sucesivamente

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x=a) &= \psi_{III}(x=L) \\ C \sin(kL) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

de aquí para evitar soluciones triviales  $C_2$  no debe ser cero, de lo contrario no existe onda de Broglie. Luego para que se satisfaga la ecuación (B.10) debe cumplirse que:

$$\boxed{kL = n\pi; \quad (n \equiv 1, 2, 3, \dots)} \quad (\text{B.11})$$

En agregado, del anterior resultado puede obtenerse fácilmente el espectro de energía

para una partícula en una caja de dimensión  $L$ : [19]

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L = n\pi \implies E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2; \quad (n \equiv 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{B.12})$$

La energía ha sido cuantizada y sólo ciertos valores son permitidos.

## B.2 Normalización de funciones

Considérese la función de onda:

$$\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (\text{B.13})$$

donde  $k = 2\pi n/L$  con  $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Al aplicar el Teorema 2.2, la respectiva normalización para la función (B.13) se da por:

$$\begin{aligned} \langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle &= \int_{0(V)}^L \left( \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right)^* \left( \frac{e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) d^3r \\ &= \int_{0(V)}^L \left( \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) \left( \frac{e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) d^3r \\ &= \frac{1}{V} \int_{0(V)}^L (\cos(k'r) - i \sin(k'r)) (\cos(kr) + i \sin(kr)) d^3r \\ &= \frac{1}{V} \left( \int_{0(V)}^L \cos\left(\frac{2\pi n}{L}r\right) \cos\left(\frac{2\pi n'}{L}r\right) d^3r + \int_{0(V)}^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}r\right) \sin\left(\frac{2\pi n'}{L}r\right) d^3r \right) \\ &= \frac{1}{V} \left( 0 + \int_{0(V)}^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}r\right) \sin\left(\frac{2\pi n'}{L}r\right) d^3r \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle = \frac{1}{V} \int_{0(V)}^L \sin(kr) \sin(k'r) d^3r = \delta_{k,k'}} \quad (\text{B.14})$$

del procedimiento anterior nótese que el valor arbitrario que adquiera  $L$  no influye de ninguna manera en el análisis del mismo, siempre se podrá limitar su valor.

### B.3 Fórmula de Euler-Maclaurin

*Teorema B3.1:*

[Considérese las relaciones de Bernoulli definidas como:[17]

$$\frac{d}{ds}B_m(s) = mB_{m-1}(s)$$

$$B_m(1) = (-1)^m B_m(0) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad B_m = \left[ \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right) \right]_{x=0}$$

con  $m \equiv 1, 2, 3, \dots$ . De la última expresión del trio de ecuaciones (B.15) se obtienen los números de Bernoulli definidos como:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0(0) = 1 \\ B_1(0) = -1/2 \\ B_2(0) = 1/6 \\ B_3(0) = 0 \\ B_4(0) = -1/30 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

estos últimos provienen de las funciones de Bernoulli evaluadas en  $x = 0$ . [17]]

Considérese la equivalencia:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) B_0(x) dx \quad (\text{B.17})$$

donde se permitirá que  $B'_1(x) \equiv B_0(x) = 1$ . Al sustituir  $B'_1(x)$  dentro de la expresión

(B.17) e integrando por partes<sup>1</sup>, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x)dx &= f(1)B_1(1) - f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx \\
 &= -f(1)B_1(0) - f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx \\
 &= -\left(-\frac{1}{2}\right)f(1) - \left(-\frac{1}{2}\right)f(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx \\
 &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

donde se ha utilizado el Teorema B3.1. De nuevo al utilizar la primera ecuación del trio de ecuaciones (B.15) y tomando a  $x$  en vez de  $s$  se halla la siguiente relación:

$$B_1(x) = \frac{1}{2}B_2'(x)$$

luego del resultado (B.18) integrando por partes se encuentra que

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x)dx &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \frac{1}{2!}[f'(1)B_2(1) - f'(0)B_2(0)] \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)dx
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

Ahora, al usar las relaciones:[17]

$$B_{2m}(1) = B_{2m}(0) = B_{2m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{B.20}$$

$$B_{2m+1}(1) = B_{2m+1}(0) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Éstas definen que a excepción de  $B_1$ , los números de Bernoulli de subíndice impar son

---

<sup>1</sup> $\mathcal{N}$ o es difícil demostrar la siguiente expresión, para conseguirlo se debe tomar a  $u = B_1(x)$  y  $dv = f'(x)dx$ , tal que después se pueda aplicar la integración por partes  $\int u dv = uv - \int v du$ .

nulos<sup>2</sup>. En consecuencia, continuando con el proceso se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \sum_{p=1}^q \frac{1}{(2p)!} B_{2p}[f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)] \\ &\quad + \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 f^{(2q)}(x) B_{2q}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

La precedente es la fórmula de Euler-Maclaurin, sin embargo, se asume que la función  $f(x)$  debe requerir las suficientes derivadas. El rango de integración en (B.21) puede ser variable de  $[0, 1]$  a  $[1, 2]$  sólo al reemplazar  $f(x)$  por  $f(x+1)$ . Agregando cada resultado hasta  $[m-1, m]$ , por inducción se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^m f(x)dx &= \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(m-1) + \frac{1}{2}f(m) \\ &\quad - \sum_{p=1}^q \frac{1}{(2p)!} B_{2p}[f^{(2p-1)}(m) - f^{(2p-1)}(0)] \\ &\quad + \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 B_{2q}(x) \sum_{\nu=0}^{m-1} f^{(2q)}(x+\nu) dx \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

de aquí, los términos  $\frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + \frac{1}{2}f(m)$  aparecen exactamente como la integración trapezoidal sobre una cuadratura<sup>3</sup>. La sumatoria sobre  $p$  puede ser interpretada como una corrección de la aproximación trapezoidal. En general, la fórmula de Euler-Maclaurin para una integral definida, es obtenida por repetidas integraciones por partes:[17]

$$\begin{aligned} \int_0^m f(x)dx &= \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + \frac{1}{2}f(m) \\ &\quad - \frac{B_2}{2!}[f'(m) - f'(0)] - \frac{B_4}{4!}[f'''(m) - f'''(0)] - \cdots \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

donde los  $B_n$  representan los números de Bernoulli (véase el Teorema B3.1).

<sup>2</sup>Recuérdese que los números de Bernoulli  $B_0 \equiv B_0(x)$  y  $B_1$  ya han sido utilizado en las expresiones (B.17) y (B.18) respectivamente.

<sup>3</sup>Recuérdese que la regla del trapecio esta dada por  $\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$ .



# *CINEMÁTICA RELATIVISTA*

---

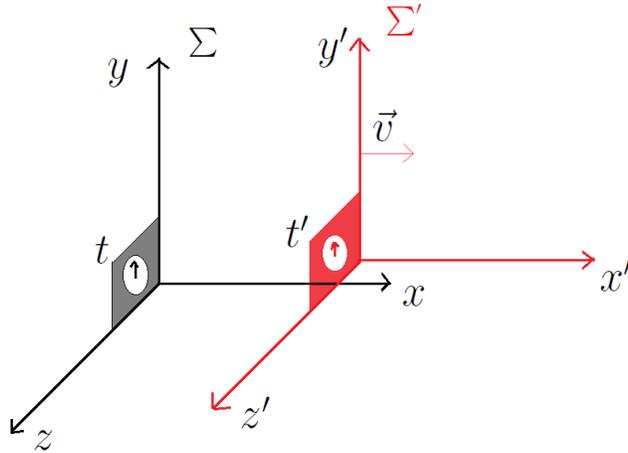
Inicialmente, se citarán algunos fundamentos propios de la relatividad especial que competen a fenómenos mecánicos, cuales después puedan ser aplicados en una siguiente sección correspondientes a fenómenos electromagnéticos.

## **C.1** *Derivación General de las Transformaciones de Lorentz*

La derivación de las Transformaciones de Lorentz depende exclusivamente de la velocidad de la luz. La constante  $c$  se caracteriza por ser una velocidad invariante e independiente de observadores inerciales, tal como lo demuestra el experimento de Michelson y Morley realizado en 1887, la Teoría del Electrón propuesta por Lorentz en 1904 y los postulados de la Teoría Especial de la Relatividad propuestos por Einstein en 1905[23][27]. Por consiguiente, en primera instancia, se asignará que:[25][15][22]

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 \equiv ct \\ x^1 \equiv x \\ x^2 \equiv y \\ x^3 \equiv z \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

donde se observa una relación muy interesante; el grupo de ecuaciones (C.1) vincula al tiempo dentro del sistema coordinado, otorgándole unidades espaciales, hecho que se debe al relacionarle con la velocidad límite  $c$ . Utilizando el convenio de suma de Einstein, puede definirse las Transformaciones de Lorentz en forma tensorial para un



**Figura C.1:** *Sistemas de referencia en movimiento relativo. De aquí se observa claramente que el sistema  $\Sigma'$  se desplaza a velocidad  $v$  en la dirección  $xx'$  con respecto al sistema  $\Sigma$ , dejando de esta manera fijas e idénticas las coordenadas  $y$  y  $z$  de ambos sistemas.*

espacio homogéneo:[15][22]

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{C.2})$$

El objetivo ahora es hallar individualmente los respectivos valores de los elementos de la matriz de transformación  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ . El símbolo  $\mu$  representa el número de dimensiones a utilizar, siguiendo el modelo estándar (Minkowski), momentáneamente se utilizarán cuatro; y el símbolo  $\nu$  representa la variación de cierta dimensión con respecto a las cuatro, donde evidentemente se incluye también la variación con respecto a ella misma. Lo que significa que para cada dimensión se obtendrán cuatro elementos de la matriz de transformación de Lorentz. Para que el proceso se torne más académico se iniciará con las componentes  $x'^3 \equiv z'$  y  $x'^2 \equiv y'$ , puesto que no son, en particular, coordenadas relativistas, y progresivamente se concluirá con las componentes  $x'^1 \equiv x'$  y  $x'^0 \equiv ct'$ .

Para la dimensión  $z \Leftrightarrow \mu = 3$ , la transformación (C.2) se convierte en:

$$x'^3 = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^3_{\nu} x^{\nu}$$

expandiendo la sumatoria se obtiene

$$x'^3 = \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3 \quad (\text{C.3})$$

De la Figura C.1, al describir los sistemas de referencia  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , particularmente, no existe movimiento relativo entre las componentes  $z$  y  $z'$ . Lo que quiere decir que sin problema alguno puede ajustarse:

$$(z' = z) \implies (x'^3 = x^3) \quad (\text{C.4})$$

En consecuencia, para que (C.4) satisfaga (C.3), debe cumplirse  $\Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 = 0$  y  $\Lambda^3_3 x^3 = x^3$ . En términos más prácticos éstos últimos deben ser de la forma:

$$\Lambda^3_0 = \Lambda^3_1 = \Lambda^3_2 = 0 \quad \text{y} \quad \Lambda^3_3 = 1 \quad (\text{C.5})$$

Igualmente, para  $y \Leftrightarrow \mu = 2$  de (C.2) se obtiene los elementos:

$$\Lambda^2_0 = \Lambda^2_1 = \Lambda^2_3 = 0 \quad \text{y} \quad \Lambda^2_2 = 1 \quad (\text{C.6})$$

En segunda instancia, la literatura de la Teoría Especial de la Relatividad induce las usuales transformaciones de Lorentz:[23][24][25][37]

$$t' \equiv \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{C.7})$$

$$x' \equiv \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{C.8})$$

$$y' \equiv y \quad (\text{C.9})$$

$$z' \equiv z \quad (\text{C.10})$$

éstas resultan de un conjunto de efectos cinemáticos (dilatación del tiempo, contracción de Lorentz y sincronización de relojes), todo bajo el concepto de simultaneidad de Einstein[23][25]. Ahora, ajustando el *factor de contracción* como  $\gamma = \gamma(|\vec{v}|) \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  donde  $\beta = v/c$  y recordando las definiciones (C.1), puede reescribirse las

transformaciones de Lorentz en notación contravariante, es decir:

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Continuando con el procedimiento, para  $x \Leftrightarrow \mu = 1$ , de (C.2) se obtiene

$$\begin{aligned} x'^1 &= \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^1_{\nu} x^{\nu} \\ &= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Al comparar la segunda ecuación del grupo (C.11) con la expresión (C.12) se halla fácilmente los valores de los correspondientes elementos:

$$\Lambda^1_0 = -\gamma\beta, \quad \Lambda^1_1 = \gamma \quad \text{y} \quad \Lambda^1_2 = \Lambda^1_3 = 0 \quad (\text{C.13})$$

Finalmente, cuando  $\mu = 0$ , de (C.2) se obtiene

$$\begin{aligned} x'^0 &= \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^0_{\nu} x^{\nu} \\ &= \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 \end{aligned}$$

lo que significa que al comparar este resultado con la primera transformación de Lorentz de (C.11), se obtiene el valor de los elementos restantes:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^0_1 = -\gamma\beta \quad \text{y} \quad \Lambda^0_2 = \Lambda^0_3 = 0 \quad (\text{C.14})$$

En última instancia, reuniendo los 16 elementos agrupados en los resultados (C.5), (C.6), (C.13) y (C.14), se obtiene en definitiva la matriz de transformación de Lorentz:[15]

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

Se observa claramente que la matriz de transformación Lorentz (C.15) es simétrica. Luego, la ecuación general de transformación de Lorentz se puede escribir como

$x' = \Lambda x$ , donde  $\Lambda$  representa la matriz de transformación,  $x'$  y  $x$  representan coordenadas generalizadas espacio-temporales ( $\mathbb{R}^4$ ) para los sistemas de referencia  $\Sigma'$  y  $\Sigma$ , respectivamente. No está de más, escribir las transformaciones de Lorentz homogéneas matricialmente:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

donde  $\gamma = \gamma(|\vec{v}|) \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  y  $\beta \equiv v/c$ .

## C.2 Regla de adición de velocidades de Einstein

Considérese nuevamente el caso del movimiento relativo entre dos sistemas de referencia; pero con la única diferencia de que dentro del sistema de referencia  $\Sigma'$  se localiza una partícula, de sistema de referencia propio  $\Sigma''$ , moviéndose hacia la derecha. En efecto, el sistema  $\Sigma'$  se desplaza con velocidad  $\vec{v}$  con respecto al sistema  $\Sigma$ , y el sistema  $\Sigma''$  (partícula) se desplaza con velocidad  $\vec{w}$  con respecto al sistema  $\Sigma'$ . Además los sistemas coordenados  $\Sigma(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $\Sigma'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$  y  $\Sigma''(x''^0, x''^1, x''^2, x''^3)$  son paralelos entre sí, con movimiento solamente en la dirección de los ejes  $x, x', x''$  y coinciden en sus orígenes en el instante  $t = t' = t'' = 0$ . Situación que puede apreciarse esquemáticamente en la Figura C.2.

De la presente memoria se conocen las transformaciones de Lorentz (C.11), éstas relacionan las coordenadas de un evento arbitrario medidas por los sistemas de referencia  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . Similarmente, las transformaciones que relacionan las coordenadas de un evento arbitrario medidas por los sistemas de referencia  $\Sigma'$  y  $\Sigma''$  claramente equivalen a:

$$\begin{cases} x''^0 = \gamma(|\vec{w}|)(x'^0 - \beta' x'^1) \\ x''^1 = \gamma(|\vec{w}|)(x'^1 - \beta' x'^0) \\ x''^2 = x'^2 \\ x''^3 = x'^3 \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

donde  $\gamma(|\vec{w}|) \equiv 1/\sqrt{1 - \beta'^2}$  y  $\beta' \equiv w/c$ . De acuerdo a lo anterior surge el interrogante, entonces, ¿cuáles son las transformaciones que relacionan a los sistemas de referencia  $\Sigma$

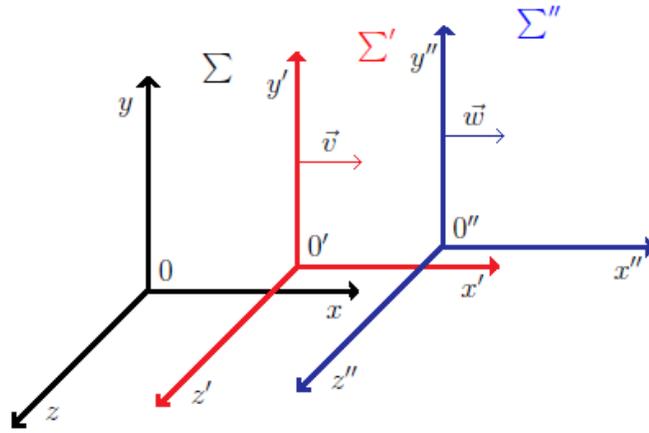


Figura C.2: *Propiedades de las Transformaciones de Lorentz, adición de velocidades.*

y  $\Sigma''$ ? Por simple lógica, éstas transformaciones deben tener la misma estructura que las transformaciones (C.11) y (C.16); luego, por definición, dichas relaciones se deben ser:

$$\begin{cases} x''^0 = \gamma(|\vec{u}|)(x^0 - \beta'' x^1) \\ x''^1 = \gamma(|\vec{u}|)(x^1 - \beta'' x^0) \\ x''^2 = x^2 \\ x''^3 = x^3 \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

Sin embargo, no todo es tan simple puesto que como se observa, el resultado depende de una velocidad  $\vec{u}$ , cual depende a su vez de las velocidades  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ ; pero, si es así, entonces, ¿cuál es la configuración de ésta dependencia?

No es necesario demostrar cada una de las transformaciones (C.17) para hallar la relación de  $\vec{u}$  con  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ ; con tan sólo sustituir las dos primeras expresiones de las transformaciones (C.11) en una única expresión de las ecuaciones (C.16), por ejemplo, la primera transformación, se podrá obtener la dependencia de éstas velocidades:

$$\begin{aligned}
x''^0 &= \gamma(|\vec{w}|)(x'^0 - \beta' x'^1) \\
&= \gamma(|\vec{w}|)[\gamma(|\vec{v}|)(x^0 - \beta x^1) - \beta' \gamma(|\vec{v}|)(x^1 - \beta x^0)] \\
&= \gamma(|\vec{v}|)\gamma(|\vec{w}|)[x^0 - \beta x^1 - \beta' x^1 + \beta \beta' x^0] \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - w^2/c^2)}} [x^0(1 + \frac{vw}{c^2}) - x^1(\frac{v}{c} + \frac{w}{c})] \\
&= \frac{1 + vw/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2 - w^2/c^2 + v^2w^2/c^4}} [x^0 - x^1 \frac{(v + w)/c}{(1 + vw/c^2)}] \\
&= \sqrt{\frac{(1 + vw/c^2)^2}{(1 + 2vw/c^2 + v^2w^2/c^4) - (v^2/c^2 + 2vw/c^2 + w^2/c^2)}} [x^0 - \frac{x^1}{c} \{ \frac{v + w}{1 + vw/c^2} \}] \\
&= \sqrt{\frac{(1 + vw/c^2)^2}{(1 + vw/c^2)^2 - (v/c + w/c)^2}} [x^0 - \frac{1}{c} \{ \frac{v + w}{1 + vw/c^2} \} x^1] \\
&= \sqrt{\frac{(1 + vw/c^2)^2}{(1 + vw/c^2)^2 [1 - (v + w)^2/c^2 (1 + vw/c^2)^2]}} [x^0 - \frac{1}{c} \{ \frac{v + w}{1 + vw/c^2} \} x^1] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - (1/c^2) \{ (v + w)/(1 + vw/c^2) \}^2}} [x^0 - \frac{1}{c} \{ \frac{v + w}{1 + vw/c^2} \} x^1] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} [x^0 - \frac{u}{c} x^1] \\
x''^0 &= \gamma(|\vec{u}|)(x^0 - \beta'' x^1) \tag{C.18}
\end{aligned}$$

Como se ve claramente en (C.18), se ha demostrado explícitamente la primera transformación de las ecuaciones (C.17); además, se logró el objetivo principal, adquirir la expresión de la velocidad  $\vec{u}$  (obsérvese el cociente que encierra las llaves), es decir, la velocidad relativa del sistema  $\Sigma''$  con respecto al sistema  $\Sigma$  se da por:[22]

$$u = \frac{v + w}{1 + vw/c^2} \tag{C.19}$$

Sorpresivamente, del resultado (C.19) se observa que las dimensiones espaciales no son las únicas que se contraen, sino que también lo hacen las velocidades. También, es muy interesante observar que en esta nueva estructura matemática se supera el problema de la electrodinámica clásica con la velocidad máxima de la naturaleza; puesto que si en dado caso la velocidad  $v = w = c$ , implica que la velocidad  $u$  registrada por un sistema en reposo relativo será nada más que  $c$ , de modo que se eliminan las inconsistencias presentadas en las teorías clásicas al adicionar velocidades.

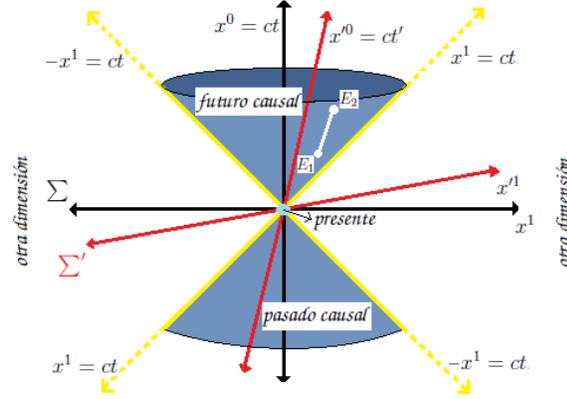


Figura C.3: Diagrama de Minkowski: movimiento a velocidad constante de un sistema inercial de referencia  $\Sigma'$  con respecto a un sistema de referencia  $\Sigma$  en reposo relativo. Seguimiento de dos eventos  $E_1(x_1^\alpha)$  y  $E_2(x_2^\alpha)$  conectados causalmente hacia futuro en la línea del universo de una partícula específica.[12]

Brevemente, en este apartado se construirá la herramienta de la cinemática relativista, los cuadri-vectores(c-v).

### C.3 Cuadri-Vectores Posición y Velocidad

Sea el cuadri-vector posición  $x \in M$  (Minkowski), cual describe un instante y posición de un evento físico cualquiera, cuyas coordenadas espacio-temporales con respecto a un observador inercial  $\Sigma$  satisfacen:

$$x^\alpha \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^1, x^2, x^3) \quad (\text{C.20})$$

Sobre la línea del universo de cierta partícula, cada punto de la trayectoria está definido por su respectivo c-v posición, luego a dicha partícula se le asocia una posición en cada instante de tiempo. Se puede relacionar el cuadri-vector posición en función de un parámetro  $\tau$ (tiempo propio marcado por un reloj que “viaja con la partícula”, tiempo que es un invariante relativista, lo que implica que es independiente del observador); es decir,  $x = x(\tau)$ . Considérese dos eventos referenciados por un observador dentro del sistema  $\Sigma$ , cuyos cuadri-vectores posición se ajustan de la forma  $x_1^\alpha$  y  $x_2^\alpha$ . Implica que

el intervalo espacio-temporal entre los dos eventos es:

$$(\Delta S)^2 = (x_2^0 - x_1^0)^2 - (x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2 - (x_2^3 - x_1^3)^2$$

Téngase en claro que si los dos eventos  $x_1^\alpha$  y  $x_2^\alpha$  son sucesivos (posiciones causales dirigidas a futuro) implica que  $\Delta S > 0$ , entonces existirá un intervalo de tiempo propio:

$$\Delta\tau \equiv \sqrt{(\Delta S)^2/c^2} \quad (\text{C.21})$$

donde nuevamente se recalca que el tiempo propio es el tiempo marcado por un reloj que va con la partícula, la cual podría, incluso, estar viajando a velocidades cercanas a la luz. Precisamente, para el caso de fotones u otras partículas cuya masa en reposo sea nula, se debe considerar que el intervalo espacio-temporal  $(\Delta S)^2$  entre dos eventos  $x_1^\alpha$  y  $x_2^\alpha$  siempre es cero, la partícula es cono-luz, lo que implica que los ejes de la coordenada espacial y temporal marcan la misma cantidad; así como se puede observar en la figura C.3; eso si se desea ver matemáticamente, ahora si se quiere un sentido físico (relativista) entonces se debe analizar el caso en el que se envía un fotón desde el primer evento en dirección del segundo, llegará en el mismo instante en que ocurra el segundo evento, por lo tanto, su diferencia siempre será nula  $(\Delta S)^2 = 0$ .

Por otra parte, se sabe que, por definición, la velocidad física se da por:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{C.22})$$

donde  $\vec{r}$  y  $t$  son variables medidas por un observador inercial  $\Sigma$ . Al tomar el tiempo real  $\tau$  con ayuda del c-v posición podremos generalizar este concepto y así encontrar el c-v velocidad

$$U^\alpha \equiv \frac{dx}{d\tau} \quad (\text{C.23})$$

de aquí  $x = x(\tau)$  es el c-v posición que describe la línea del universo. Para relacionar la c-v con la velocidad física  $\vec{u}$  medida, basta con partir de la ecuación (C.21) y hacer

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \\ cd\tau &= \sqrt{(dx^0)^2 - (d|\vec{r}|)^2} \end{aligned}$$

Se sabe que  $x^0 = ct \longrightarrow dx^0 = cdt$ , luego sustituyendo y dividiendo por el término

$cdt$

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} &= \sqrt{\frac{(cdt)^2}{(cdt)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\end{aligned}$$

Elevando a la  $-1$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(|\vec{u}|) \quad (\text{C.24})$$

de aquí, se observa que se logró relacionar “la velocidad física  $\vec{u}$  marcada por un observador inercial con el tiempo propio marcado por la partícula”. Al resultado de la ecuación (C.24) se le conoce como *factor de contracción*.

Del resultado (C.24), no será difícil obtener la relación entre las componentes del c-v velocidad

$$U^\alpha \equiv (U^0, U^1, U^2, U^3)$$

tan sólo basta partir de la expresión (C.23) y aplicar regla de la cadena

$$\begin{aligned}U^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt}(ct, x^1, x^2, x^3) \\ &= \gamma(|\vec{u}|) \left( c, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) \\ &= \gamma(|\vec{u}|) (c, u^1 = u_x, u^2 = u_y, u^3 = u_z) \\ &= \gamma(|\vec{u}|) (c, \vec{u})\end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Luego, las componentes del c-v velocidad son

$$U^0 = c\gamma(|\vec{u}|) \quad (\text{C.26})$$

$$U^1 = u_x\gamma(|\vec{u}|) \quad (\text{C.27})$$

$$U^2 = u_y\gamma(|\vec{u}|) \quad (\text{C.28})$$

$$U^3 = u_z\gamma(|\vec{u}|) \quad (\text{C.29})$$

## C.4 Cuadri-vectores Momentum y Fuerza

A continuación, se hallará el cuadri-vector fuerza con respecto a un sistema de referencia en reposo relativo  $\Sigma$ . De la Mecánica Clásica se sabe que el momentum

$$p = m_0 v$$

donde  $m_0$  es masa inercial ó masa en reposo de la partícula (es la masa medida en el sistema de referencia en reposo de la partícula). Para generalizar esta ecuación se debe incluir el cuadri-vector velocidad. Por lo tanto el cuadri-vector Momentum será

$$P \equiv m_0 U = m_0 \frac{dx}{d\tau} \quad (\text{C.30})$$

La masa en reposo es un invariante relativista, entonces si se toma el c-v velocidad para un cuerpo en reposo, la componente tridimensional de la c-v velocidad es cero de tal manera que la norma al cuadrado de la misma para este caso es  $(U)^2 = c^2$ . Precisamente, bajo ésta condición, la norma al cuadrado del c-v momentum es:

$$P^2 = (m_0 U) \cdot (m_0 U) = m_0^2 (U)^2 = m_0^2 c^2$$

Ahora, recuérdese que  $f \equiv dp/dt$ ; análogamente, a ella se le puede definir su respectivo cuadri-vector, fuerza para ésta ocasión

$$F \equiv \frac{dP}{d\tau} \quad (\text{C.31})$$

En inferencia, se debe interpretar la relación existente entre los cuadri-vectores citados con las variables dinámicas físicas. Por lo tanto, si se inicia con el c-v momentum y se acopla con la expresión (C.25), se obtendrá

$$\begin{aligned} P^\alpha &= m_0 U^\alpha \\ &= m_0 \gamma(|\vec{u}|) (c, \vec{u}) \\ &= (m_0 \gamma(|\vec{u}|) c, m_0 \gamma(|\vec{u}|) \vec{u}) \\ &= (p^0, p^1, p^2, p^3) \\ &= (E/c, \vec{p}) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

surgiendo como consecuencia la relación

$$m = m_0 \gamma(|\vec{u}|) \quad (\text{C.33})$$

que define la masa relativista (ecuación que puede ser interpretada como la inercia de la partícula de acuerdo a su dependencia de la velocidad física  $\vec{u}$ ), por consiguiente  $p^0 = mc$ . Además, surge quizás lo más importante que caracteriza a la teoría especial de la relatividad, la equivalencia masa-energía de Einstein  $E \equiv mc^2$ , [25] de esta última se obtiene el término  $E/c$  señalado en (C.32). Y por último el término  $|\vec{p}| = m|\vec{u}|$  es el momentum físico.<sup>1</sup>

Igualmente, para el c-v fuerza (C.31), aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}
 F^\alpha &= \frac{dP}{d\tau} \\
 &= \frac{dt}{d\tau} \frac{dP^\alpha}{dt} \\
 &= \gamma(|\vec{u}|) \frac{d}{dt} \{m_0 \gamma(|\vec{u}|) (c, \vec{u})\} \\
 &= \gamma(|\vec{u}|) \left( \frac{d}{dt} mc, \frac{d}{dt} m\vec{u} \right) \\
 &= \gamma(|\vec{u}|) \left( c \frac{d}{dt} m, \frac{d}{dt} \vec{p} \right) \\
 &= \gamma(|\vec{u}|) \left( c \frac{d}{dt} m, \vec{f} \right)
 \end{aligned} \tag{C.35}$$

de aquí, curiosamente, sobre la componente espacio-temporal  $f^0 = c\gamma(|\vec{u}|)dm/dt$ , se observa variación de la masa en el tiempo. Sin embargo, para justificar este hecho y además definir el concepto de energía  $E$ , al parecer, podría ser útil la definición de ortogonalidad entre los cuadri-vectores velocidad  $U$  y aceleración  $A$ ; es decir,  $U \cdot A = 0$ , por consiguiente

$$F \cdot U = \eta_{\alpha\beta} F^\alpha U^\beta = 0 \tag{C.36}$$

Recuérdese, la signatura de la métrica de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Por otra parte, fíjese que el término  $\gamma(|\vec{u}|)$  por expansión de Taylor es aproximadamente igual a

$$\gamma(|\vec{u}|) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \sigma \left( \frac{u^4}{c^4} \right) \tag{C.34}$$

donde posición  $\eta_{11}$  refiere a la coordenada espacio-temporal y la posición  $\eta_{22}$  refiere a la coordenada tridimensional. Luego, aplicando lo anterior a (C.36), se obtiene

$$\begin{aligned}
 F \cdot U &= f^0 U^0 - f^i U^i \\
 0 &= \left\{ \gamma(|\vec{u}|) c \frac{dm}{dt} \right\} \left\{ \gamma(|\vec{u}|) c \right\} - \left\{ \gamma(|\vec{u}|) \vec{f} \right\} \cdot \left\{ \gamma(|\vec{u}|) \vec{u} \right\} \\
 0 &= \gamma^2(|\vec{u}|) c^2 \frac{dm}{dt} - \gamma^2(|\vec{u}|) \vec{f} \cdot \vec{u} \\
 0 &= \frac{dmc^2}{dt} - \vec{f} \cdot \vec{u}
 \end{aligned}$$

$$\vec{f} \cdot \vec{u} = \frac{dE}{dt} \quad (\text{C.37})$$

donde se utilizó nuevamente la ecuación de energía de Einstein.[25] Sucesivamente, de la definición clásica de trabajo  $dw = \vec{f} \cdot \vec{dr}$ , se puede hallar de la ecuación (C.37) el c-v que defina al trabajo ejercido sobre la partícula, que al ser diferente de cero existirá una variación de la energía total; simbólicamente:

$$dE = \vec{f} \cdot \vec{u} dt = \vec{f} \cdot \vec{dr} = dW \quad (\text{C.38})$$

Ésta última explica el sentido físico que adquiere la componente temporal del c-v fuerza (C.35), una variación de la energía total, es decir

$$\begin{aligned}
 F^\alpha &= \gamma(|\vec{u}|) \left( c \frac{dm}{dt}, \vec{f} \right) \\
 &= \gamma(|\vec{u}|) \left( \frac{1}{c} \frac{dmc^2}{dt} m, \vec{f} \right) \\
 &= \gamma(|\vec{u}|) \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \vec{f} \right) \\
 &= \gamma(|\vec{u}|) \left( \frac{1}{c} \vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f} \right)
 \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Cabe resaltar que durante todo el proceso sólo se trabajo con los cuadri-vectores velocidad y momentum, no se utilizó el c-v aceleración.

## C.5 *Electrodinámica Relativista*

El objetivo de ésta sección es demostrar el tensor electromagnético, para ello, en primera instancia, debe realizarse la transición de una escritura común a una tensorial, presentar la transformación de campos electromagnéticos entre sistemas inerciales de referencia y, por supuesto, escribir las leyes electrodinámicas cuales satisfagan la invarianza relativista.

### C.5.1. *Antecedentes de la electrodinámica*

Inicialmente, cuando surgió la filosofía de la relatividad, clásica para ese entonces, se observó que las ecuaciones de Maxwell se alteraban y carecían de sentido físico al aplicársele las transformaciones galileanas, hecho que concluía que dichas leyes eran únicamente válidas en un sistema de referencia absoluto. Ahora, para solventar éste inconveniente, surgió un aporte fundamental a favor de la electrodinámica relativista, el cual fue realizado por Lorentz en 1904 con su teoría del electrón, trabajo que como su nombre le indica es puramente electromagnético, de allí se derivó las transformaciones de Lorentz, la invarianza de Lorentz y otras argumentaciones básicas en la relatividad. En agregado, sobre 1905, surgen los ideales de Einstein: *la velocidad de la luz es constante en el vacío e independiente de fenómenos mecánicos y electromagnéticos*, ello y demás incluidos en su Teoría Especial de la Relatividad para que hasta el momento se pueda analizar fenómenos mecánicos relativistas (por ejemplo, regla de adición de velocidades). Este hecho facilitará el tratamiento relativista de la electrodinámica, puesto que realmente, a ciencia cierta, es una teoría relativista.<sup>2</sup>

En primera instancia, recuérdese las ecuaciones de Maxwell (A.1)-(A.4). Hasta ahí llega en su totalidad las ecuaciones de Maxwell; no obstante, de las ecuaciones de Maxwell, por conservación de la carga eléctrica, se deriva la ecuación de continuidad:[15]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.40})$$

---

<sup>2</sup>Recuérdese nuevamente que Einstein al momento de crear la teoría especial de la relatividad, prefirió conservar y confiar en la validez de la teoría de Maxwell y reestructurar la mecánica newtoniana.

Además, existe la fuerza de Lorentz:[15]

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{u} \times \vec{B} \quad (\text{C.41})$$

Por último, de las ecuaciones electromagnéticas se observa que los campos eléctricos y magnéticos son diferentes pero, provenientes de un mismo fenómeno; particularmente, dichos campos son independientes cuando no existe variación de ellos en el tiempo, cuyas cargas y corrientes son estacionarias, hecho que se puede verificar en las ecuaciones de Maxwell (A.1)-(A.4):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (\text{C.42})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{C.43})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{C.44})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (\text{C.45})$$

### C.5.2. *Campo Electromagnético Relativista*

De la sección anterior se observó que clásicamente los campos electrostáticos y magnetostáticos, no establecen ninguna relación entre ellos aún cuando en últimas comparten fuentes por origen, son conceptual y fenomenológicamente diferentes. Pero, ésta afirmación no es muy cierta del todo, pues la teoría especial de la relatividad demuestra que existe una estrecha relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos, aún si son particularmente independientes del tiempo.

Coulomb fue el primero en describir cuantitativamente la fuerza entre partículas cargadas estacionarias (en reposo):

$$\vec{f}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (\text{C.46})$$

siendo  $\hat{r}$  el vector unitario y define la dirección del radio-vector que une a la carga 1 con la carga 2; la constante de proporcionalidad eléctrica  $k \equiv 1$  (se naturaliza para éste capítulo), tal que  $\vec{f}_{12}$  es la fuerza que experimenta  $q_2$  con respecto a  $q_1$ . Lo que significa que  $q_1$  a generado un campo eléctrico en su entorno cual detecta a  $q_2$  y le aplica una

fuerza ya sea repulsiva o atractiva, es decir, la ley de Coulomb es equivalente a

$$\vec{f}_{12} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}) \quad (\text{C.47})$$

donde el campo eléctrico producido por la carga  $q_1$  es

$$\vec{E}_1(\vec{r}) \equiv \frac{q_1}{r^2} \hat{r} \quad (\text{C.48})$$

Las ecuaciones fuerza eléctrica y campo eléctrico, (C.46) y (C.48), respectivamente, son válidas para un sistema de referencia en reposo. ciertamente, al marcarse la fuerza  $\vec{f}_{12}$  sobre la carga  $q_2$ , no sólo se está midiendo este parámetro, sino que también se mide el momentum  $p_2$  (puesto que  $\vec{f}_{12} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$ ); además, las velocidades  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , la distancia  $\vec{r}$  entre  $q_1$  y  $q_2$ , entre otras variables cinemáticas y dinámicas también son derivadas de la fuerza de Coulomb.

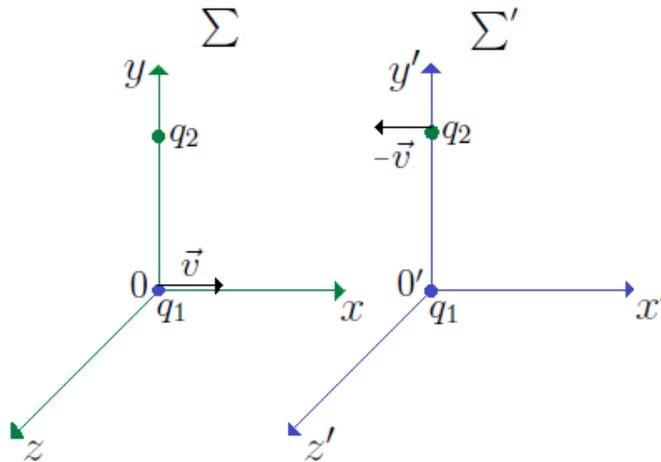


Figura C.4: Movimiento perpendicular relativo a la dirección de dos cargas eléctricas que interactúan.

A continuación, facilitando cálculos pero sin perder generalidad, considérese dos situaciones en las que intervienen las cargas  $q_1$  y  $q_2$ . En la primera se asignará que la carga  $q_2$  tiene sistema de referencia propio denotado como  $\Sigma$ , dentro del cual está ocupando en reposo la coordenada  $\Sigma(0, y, 0)$ ; sucesivamente, la carga  $q_2$  detecta a la carga  $q_1$ , cual se dirige en la dirección positiva del eje  $x$  con una velocidad  $\vec{v}$  pasando por el origen de coordenadas en el instante  $t = 0$ ; mientras que relativamente la carga  $q_1$  con sistema de referencia propio  $\Sigma'$ , dentro del cual ocupa la coordenada  $\Sigma'(0, 0, 0)$ ,

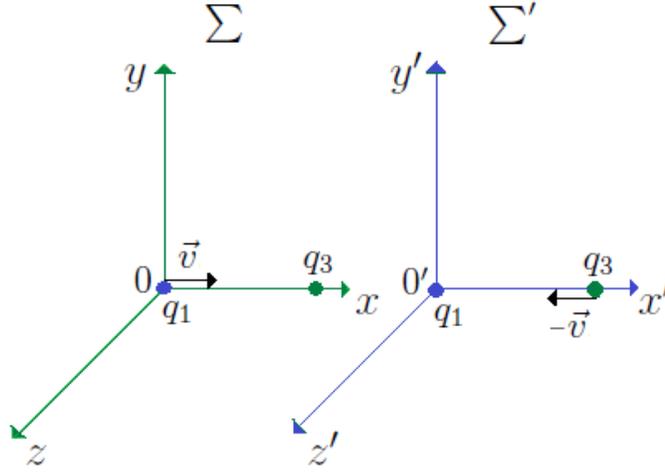


Figura C.5: Movimiento relativo de dos cargas eléctricas en la dirección que interactúan.

considera estar en reposo y a su vez, detecta a la carga  $q_2$  desplazándose en la dirección del eje  $x'$  con una velocidad  $-\vec{v}$ , así como se puede observar en la figura C.4.

Ahora, obsérvese la figura (C.5), a diferencia de la primera situación, en segundo lugar, se tiene que la carga  $q_2$  cual se denotará ahora como  $q_3$ , se encuentra sobre el eje  $x$  cuyas coordenadas en el sistema de referencia propio de  $q_3$  son  $\Sigma(x, 0, 0)$  tal que la distancia de separación  $\vec{r}$  entre  $q_1$  y  $q_3$  sea paralela al movimiento relativo.<sup>3</sup> De acuerdo a lo anterior, para un observador dentro del sistema de referencia  $\Sigma'$ , en todo instante  $t'$ , la carga  $q_1$  estará en reposo en el origen de coordenadas  $\Sigma'(0, 0, 0)$ , detectando en las dos situaciones a las cargas  $q_2$  y  $q_3$ , pasando simultáneamente en el instante  $t' = 0$  por los puntos  $\Sigma'(0, y', 0)$  y  $\Sigma'(x', 0, 0)$ , respectivamente. Bajo estas condiciones, la relación fuerza en  $\Sigma'$  para las cargas  $q_2$  y  $q_3$  deben satisfacer la ley de Coulomb. Luego, de la definición (C.46) se obtiene para la carga  $q_2$

$$f'_{x12} = 0; \quad f'_{y12} = \frac{q_1 q_2}{(y')^2}; \quad f'_{z12} = 0 \quad (\text{C.49})$$

Igualmente, para la carga  $q_3$  en el instante  $t' = 0$  sus respectivas componentes de

<sup>3</sup>Igualmente, el sistema de referencia  $\Sigma'$ , se ha tomado como el sistema inercial que se mueve relativamente con velocidad  $v$  con respecto a un sistema de referencia  $\Sigma$  en reposo relativo.

fuerza son

$$f'_{x13} = \frac{q_1 q_2}{(x')^2}; \quad f'_{y13} = 0; \quad f'_{z13} = 0 \quad (\text{C.50})$$

La carga  $q_1$  (que es el sistema  $\Sigma'$ ) se mueve con velocidad  $\vec{v}$  con respecto al sistema  $\Sigma$  y lo hace paralelamente a los ejes  $x, x'$ ; luego, todos los parámetros cinemáticos y dinámicos de cada sistema de referencia deben relacionarse mediante transformadas relativistas, donde ahora las cargas  $q_1$  y  $q_2$  (ó  $q_3$ ) se encuentran en movimiento relativo. Recuérdese que anteriormente se halló la expresión que define a las componentes del c-v fuerza (C.39), respecto al sistema de referencia  $\Sigma$  se tiene:

$$F^\alpha = (f^0, f^1, f^2, f^3) \equiv \gamma(|\vec{u}|) \left( \frac{1}{c} \vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f} \right) \quad (\text{C.51})$$

donde  $\vec{u}$  es la velocidad física de la partícula sobre la cual está actuando la fuerza física  $\vec{f}$ . Para el respectivo análisis, del c-v fuerza (C.51) se desprende la componente

$$f^1 = \gamma(|\vec{u}|) f_x \quad (\text{C.52})$$

Análogamente, para el sistema de referencia  $\Sigma'$  se obtiene

$$F'^\alpha = (f'^0, f'^1, f'^2, f'^3) = \gamma(|\vec{u}'|) \left( \frac{1}{c} \vec{f}' \cdot \vec{u}', \vec{f}' \right) \quad (\text{C.53})$$

donde surgen las componentes

$$f'^0 = \gamma(|\vec{u}'|) \left( \frac{1}{c} \vec{f}' \cdot \vec{u}' \right); \quad f'^1 = \gamma(|\vec{u}'|) f'_x \quad (\text{C.54})$$

A través de la transformada inversa de Lorentz, se puede relacionar el sistema de referencia  $\Sigma$  en términos del sistema de referencia  $\Sigma'$ , es decir

$$f^0 \equiv \gamma(|\vec{v}|) (f'^0 + \beta f'^1) = \gamma(-|\vec{v}|) (f'^0 + \beta f'^1) \quad (\text{C.55})$$

$$f^1 \equiv \gamma(-|\vec{v}|) (f'^1 + \beta f'^0) \quad (\text{C.56})$$

$$f^2 \equiv f'^2 \quad (\text{C.57})$$

$$f^3 \equiv f'^3 \quad (\text{C.58})$$

Al sustituir las componentes (C.52) y (C.54) en la transformada (C.56)

$$\begin{aligned}\gamma(|\vec{u}|)f_x &= \gamma(-|\vec{v}|)[\gamma(|\vec{u}'|)f'_x + \beta\gamma(|\vec{u}'|)(\frac{1}{c}\vec{f}' \cdot \vec{u}')] \\ &= \gamma(-|\vec{v}|)\gamma(|\vec{u}'|)[f'_x + \frac{v}{c^2}\vec{f}' \cdot \vec{u}']\end{aligned}\quad (\text{C.59})$$

Ahora, recuérdese la adición de velocidades (C.19), de allí se observa:

$$\gamma(|\vec{u}'|) = \gamma(|\vec{v}|)\gamma(|\vec{u}|)(1 - \frac{vu_x}{c^2}) \quad (\text{C.60})$$

hecho que implica que para el sistema de referencia  $\Sigma$  se obtiene

$$\gamma(|\vec{u}|) = \gamma(-|\vec{v}|)\gamma(|\vec{u}'|)(1 + \frac{vu'_x}{c^2}) \quad (\text{C.61})$$

donde evidentemente ha cambiado la dirección de la velocidad  $\vec{v}$ . Al sustituir en (C.59) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\gamma(-|\vec{v}|)\gamma(|\vec{u}'|)(1 + \frac{vu'_x}{c^2})f_x &= \gamma(-|\vec{v}|)\gamma(|\vec{u}'|)[f'_x + \frac{v}{c^2}\vec{f}' \cdot \vec{u}'] \\ f_x &= \frac{f'_x + \frac{v}{c^2}\vec{f}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}\end{aligned}\quad (\text{C.62})$$

Similarmente, de los c-v fuerza (C.51) y (C.53) se obtienen las componentes

$$f^2 = \gamma(|\vec{u}|)f_y \quad \text{y} \quad f'^2 = \gamma(|\vec{u}'|)f'_y \quad (\text{C.63})$$

respectivamente. Utilizando nuevamente la adición de velocidades por transformación de Lorentz se obtiene

$$\begin{aligned}f^2 &= f'^2 \\ \gamma(|\vec{u}|)f_y &= \gamma(|\vec{u}'|)f'_y \\ \gamma(-|\vec{v}|)\gamma(|\vec{u}'|)(1 + \frac{vu'_x}{c^2})f_y &= \gamma(|\vec{u}'|)f'_y \\ f_y &= \frac{f'_y}{\gamma(|\vec{v}|)(1 + \frac{vu'_x}{c^2})}\end{aligned}\quad (\text{C.64})$$

Luego, también

$$f_z = \frac{f'_z}{\gamma(|\vec{v}'|)(1 + \frac{vu'_z}{c^2})} \quad (\text{C.65})$$

donde  $\gamma(-|\vec{v}'|) = \gamma(|\vec{v}'|) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ .

Por otra parte, la velocidad física  $\vec{u}$  de las cargas  $q_2$  y  $q_3$  observada por la carga  $q_1$  en  $\Sigma'$ , denotadas por  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$ , respectivamente; son por ajuste iguales a la velocidad del sistema de referencia  $\Sigma$ , es decir

$$\vec{u}_{q_2} \equiv \vec{u}_1 = \sum'(-v, 0, 0) \quad (\text{C.66})$$

$$\vec{u}_{q_3} \equiv \vec{u}_2 = \sum'(-v, 0, 0) \quad (\text{C.67})$$

Insertando el respectivo análisis de la figura (C.4) y utilizando además las expresiones (C.49) marcadas por  $q_1$  en su propio sistema de referencia  $\Sigma'$ , en los resultados (C.62), (C.64) y (C.65) las componentes de fuerza para la carga  $q_2$  con respecto a su propio sistema de referencia  $\Sigma$  son

$$\begin{aligned} f_{x12} &= \frac{f'_{x12} + \frac{v}{c^2} \vec{f}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{vu_1}{c^2}} \\ &= \frac{0 + f'_{y12} \cdot \vec{u}_1}{1 + \frac{v(-v)}{c^2}} \\ &= \frac{0}{1 - v^2/c^2} \\ f_{x12} &= f'_{x12} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

;

$$\begin{aligned}
f_{y12} &= \frac{f'_{y12}}{\gamma(|\vec{v}|)(1 + \frac{vu_1}{c^2})} \\
&= \frac{f'_{y12}}{\gamma(|\vec{v}|)(1 + \frac{v(-v)}{c^2})} \\
&= \frac{f'_{y12}}{(1 - v^2/c^2)^{-1/2}(1 - v^2/c^2)} \\
f_{y12} &= \gamma(|\vec{v}|)f'_{y12} = \gamma(|\vec{v}|)\frac{q_1q_2}{(y')^2}
\end{aligned} \tag{C.69}$$

;

$$\begin{aligned}
f_{z12} &= \frac{f'_{z12}}{\gamma(|\vec{v}|)(1 + \frac{vu_1}{c^2})} \\
&= \frac{0}{\gamma(|\vec{v}|)(1 + \frac{v(-v)}{c^2})} \\
f_{z12} &= f'_{z12} = 0
\end{aligned} \tag{C.70}$$

Análogamente, insertando el respectivo análisis de la figura (C.5) y utilizando además las expresiones (C.50) marcadas por  $q_1$  en su propio sistema de referencia  $\Sigma'$ , en los resultados (C.62), (C.64) y (C.65) las componentes de fuerza para la carga  $q_3$  con respecto a su propio sistema de referencia  $\Sigma$  son

$$\begin{aligned}
f_{x13} &= \frac{f'_{x13} + \frac{v}{c^2}\vec{f}' \cdot \vec{u}'}{1 + \frac{vu_2}{c^2}} \\
&= \frac{f'_{x13} + \frac{v}{c^2}f'_{x13} \cdot \vec{u}'_2}{1 + \frac{v(-v)}{c^2}} \\
&= \frac{f'_{x13} - \frac{v^2}{c^2}f'_{x13}}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{f'_{x13}(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \\
f_{x13} &= f'_{x13} = \frac{q_1q_3}{(x')^2}
\end{aligned} \tag{C.71}$$

;

$$f_{y13} = f'_{y13} = 0 \tag{C.72}$$

;

$$f_{z13} = f'_{z13} = 0 \quad (\text{C.73})$$

Se puede también obtener únicamente las componentes de la fuerza no nula dentro del sistema de referencia  $\Sigma$ . Bajo transformaciones de Lorentz

$$x \equiv \gamma(|\vec{v}|)x' \rightarrow x' = x/\gamma(|\vec{v}|)$$

$$y \equiv y'$$

Por consiguiente, introduciendo estos últimos resultados en las expresiones (C.69) y (C.71), implica que las cargas  $q_2$  y  $q_3$  respecto a  $\Sigma$  se dan por

$$f_{y12} = \gamma(|\vec{v}|) \frac{q_1 q_2}{(y)^2} \quad (\text{C.74})$$

$$f_{x13} = \frac{1}{\gamma^2(|\vec{v}|)} \frac{q_1 q_2}{(x)^2} \quad (\text{C.75})$$

No será difícil intuir una expresión general para la fuerza eléctrica que aplica en un instante dado a una carga de prueba  $q_2$  con sistema de referencia propio ocupando la coordenada  $\Sigma(x, y, z)$ , provocado por una carga  $q_1$  que se desplaza a velocidad constante  $\vec{v}$  pasando por el origen de coordenadas  $\Sigma(0, 0, 0)$  en el mismo instante

$$\begin{aligned} |\vec{f}| &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \\ \vec{f} &= q_1 q_2 \frac{\gamma(|\vec{v}|)\vec{r}}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

donde  $\vec{r}$  es el vector posición instantáneo que une a las cargas  $q_1$  y  $q_2$ , fijese además que los coeficientes de las componentes  $y$  y  $z$  son el mismo, esto se debe a que ninguna de las dos componentes es relativista, así como se colocó aleatoriamente la carga de prueba  $q_2$  sobre el eje  $y$ , pudo serlo también en el eje  $z$ . Por otra parte, el campo eléctrico generado por una carga en movimiento es

$$\vec{E} = q_1 \frac{\gamma(|\vec{v}|)\vec{r}}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{C.77})$$

Nótese que el campo eléctrico  $\vec{E}$  se conserva radial, sin importar que ahora su entorno es elipsoidal a causa de la contracción del mismo en uno de sus ejes; hecho que se debe a causa del factor  $\gamma(|\vec{v}|)$ , cual hace que disminuya la intensidad del campo en la dirección de desplazamiento, mientras que intensidad de los demás ejes no relativistas permanece

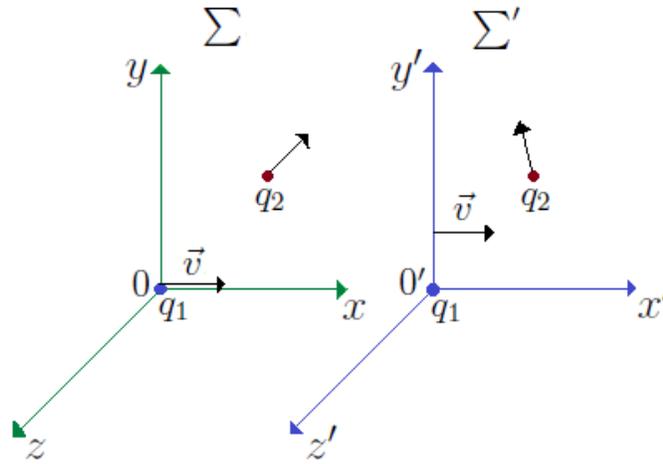


Figura C.6: Interacción entre cargas eléctricas en movimiento

intacta. Hasta éste momento se observa mucho más sentido físico la relación espacio-tiempo  $c$ , puesto que obligatoriamente debe contraerse el eje relativista, haciéndose un punto al tomar la velocidad máxima  $c$ . Por experiencia, se sabe con anterioridad que la velocidad de interacción de un campo eléctrico es la velocidad de la luz, luego, implica que para una carga  $q$  que se mueve a la velocidad máxima  $c$ , la velocidad de interacción ó su campo eléctrico en la dirección relativista es cero; de lo contrario se estaría regresando al problema de adición de velocidades de la electrodinámica clásica utilizando las transformaciones galileanas.

Comprendido lo anterior, se puede dar paso a un caso mucho más general en comparación de los dos anteriores, considérese nuevamente las cargas  $q_1$  y  $q_2$ , tal y como se puede apreciar en la figura (C.6). La carga  $q_1$  se mueve con velocidad física  $\vec{v}$  a lo largo del eje  $x$  y la carga  $q_2$  se mueve con velocidad física  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ , ambas respecto al sistema de referencia  $\Sigma$ , dentro del cual simultáneamente la carga  $q_1$  pasa por el origen y la carga  $q_2$  pasa por el punto  $P(x, y, z)$  en el instante  $t = 0$ . Análogamente, considérese a la carga  $q_1$  ubicada(en reposo) en el origen de coordenadas de su sistema de referencia propio  $\Sigma'$ , cual se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  paralelamente al eje  $x$  de  $\Sigma$ , e igualmente la carga  $q_2$  pasa con velocidad  $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$  por el punto  $P(x', y', z')$  en el instante  $t = 0$ . Se observa que a diferencia del sistema  $\Sigma$  descrito hace poco, la carga  $q_2$  cambia de dirección, pero esto lo hace únicamente respecto al punto de vista del observador  $\Sigma'$ , donde obviamente la dirección aparente de la carga  $q_2$  depende de la velocidad del observador inercial  $\Sigma'$ , puesto que la carga  $q_2$  conserva aún las características referenciadas por el observador  $\Sigma$ . Utilizando la ley de Coulomb, el observador  $\Sigma'$  concluye

que las fuerzas entre las cargas  $q_1$  y  $q_2$  independientes de velocidades físicas ( $\vec{u}$  en este caso) dentro de su propio sistema de referencia se dan por:

$$\begin{aligned} f'_{x12} &= \frac{q_1 q_2 x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ f'_{y12} &= \frac{q_1 q_2 y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ f'_{z12} &= \frac{q_1 q_2 z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

Nuevamente, recuérdese la adición de velocidades (C.19), de allí se obtiene:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(|\vec{v}|)(1 - vu_x/c^2)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(|\vec{v}|)(1 - vu_x/c^2)} \end{aligned}$$

al aplicar estas últimas en compañía de las ecuaciones (C.78) y la contracción de Lorentz  $x' = \gamma(|\vec{v}|)x$  (donde  $y' = y$  y  $z' = z$ ) a las componentes de transformación de la fuerza (C.62), (C.64) y (C.65) se obtienen las componentes de la fuerza sobre la carga  $q_2$  referenciadas por el observador inercial  $\Sigma$  que marca la velocidad  $u_x = v$  son:

$$\begin{aligned} f_{x12} &= \frac{f'_{x12} + \frac{v}{c^2} \vec{f}' \cdot \vec{u}'}{1 + vu'_x/c^2} \\ &= \frac{f'_{x12} + \frac{v}{c^2} (f'_{x12} u'_x + f'_{y12} u'_y + f'_{z12} u'_z)}{1 + vu'_x/c^2} \\ &= \frac{q_1 q_2}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left[ \gamma(|\vec{v}|)x + \frac{v}{c^2} (\gamma(|\vec{v}|)x \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} + \frac{yu_y + zu_z}{\gamma(|\vec{v}|)(1 - vu_x/c^2)}) \right] \\ &= \frac{\gamma(|\vec{v}|)q_1 q_2}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left[ x + \frac{v}{c^2} \left( \frac{yu_y + zu_z}{\gamma^2(|\vec{v}|)(1 - v^2/c^2)} \right) \right] \\ &= \frac{\gamma(|\vec{v}|)q_1 q_2}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left( x + \frac{vu_y}{c^2} y + \frac{vu_z}{c^2} z \right) \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

ahora de la ecuación (C.64) se obtiene

$$\begin{aligned}
 f_{y12} &= \frac{f'_{y12}}{\gamma(|\vec{v}|)(1 + vu'_x/c^2)} \\
 &= \frac{q_1 q_2 y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \frac{1}{\gamma(|\vec{v}|)(1 + 0)} \\
 &= \frac{q_1 q_2 y}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\gamma(|\vec{v}|)}{\gamma^2(|\vec{v}|)} \\
 &= \frac{\gamma(|\vec{v}|)q_1 q_2 y}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)
 \end{aligned} \tag{C.80}$$

y similarmente se obtiene

$$f_{z12} = \frac{\gamma(|\vec{v}|)q_1 q_2 z}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \tag{C.81}$$

Recuérdese la fuerza de Lorentz para dos cargas eléctricas

$$\vec{f}_{12} = \vec{f}_{12(elec)} + \vec{f}_{12(mag)} \equiv q_2 \vec{E} + q_2 \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \tag{C.82}$$

donde  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  refieren al campo electromagnético generado por una carga  $q_1$  y  $\vec{u}$  se define como la velocidad física de la carga  $q_2$ . De esta última ecuación se conoce el campo eléctrico  $\vec{E}$  concluido en (C.77); se requiere definir el campo magnético  $\vec{B}$  producido por la carga  $q_1$ , cual incluso puede expresarse en términos de  $\vec{E}$ , puesto que están íntimamente relacionados, es decir

$$\vec{B} \equiv \frac{1}{c} \vec{v} \times \frac{q_1 \gamma(|\vec{v}|) \vec{r}}{(\gamma^2(|\vec{v}|)x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \tag{C.83}$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la  $q_1$ . Se observa de la fuerza de Lorentz (C.82) que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es independiente de la velocidad de las cargas; mientras que el campo magnético  $\vec{B}$  es dependiente de  $\vec{v}$ , si las velocidades de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  son cero (cargas en reposo), implica que este se anula y como resultado la fuerza de Lorentz se reduce a las fuerzas expresadas en las ecuaciones (C.79), (C.80) y (C.81).

### C.5.3. Tensor electromagnético

Considérese nuevamente la ecuación de continuidad (C.40), de aquí la densidad de corriente en forma contravariante (c-v corriente) es:

$$J^\alpha \equiv (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, \vec{j})$$

la ecuación de continuidad puede escribirse explícitamente con operadores covariantes de la siguiente forma[25]<sup>4</sup>

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (\text{C.84})$$

Igualmente, la naturaleza que presenta el c-v corriente para dos observadores inerciales  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  relacionados, lo hacen a través de las transformaciones de Lorentz

$$J'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha J^\alpha \quad (\text{C.85})$$

En particular, cuando el sistema de referencia inercial  $\Sigma'$  se desplaza con velocidad  $\vec{v}$  con respecto al sistema de referencia inercial  $\Sigma$  en dirección del eje  $x$  positivo; expandiendo (C.85) utilizando nuevamente la matriz de transformación

$$\Lambda^\mu_\alpha \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>4</sup>Se puede verificar que esta expresión es equivalente a la ecuación de continuidad, simplemente expandiendo índices, es decir

$$\begin{aligned} \partial_0 j^0 + \partial_i j^i &= 0 \\ \frac{\partial(c\rho)}{c\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

con  $i \equiv 1, 2, 3$ . Cabe recordar que la componente  $j^0$  representa la densidad de carga cual por definición es un invariante relativista (conservación de la carga).

las respectivas ecuaciones de transformación se dan por

$$j'^0 = \gamma(|\vec{v}|)(j^0 - \beta j^1) \quad (\text{C.86})$$

$$j'^1 = \gamma(|\vec{v}|)(j^1 - \beta j^0) \quad (\text{C.87})$$

$$j'^2 = j^2 \quad (\text{C.88})$$

$$j'^3 = j^3 \quad (\text{C.89})$$

Al realizar las equivalencias  $j^0 = c\rho$ ,  $j'^0 = c\rho'$ ,  $j^i = \vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$  y  $j'^i = \vec{j}' = (j'_x, j'_y, j'_z)$  de las ecuaciones de transformación se obtienen las expresiones

$$\rho' = \gamma(|\vec{v}|)(\rho - \frac{v}{c^2}j_x) \quad (\text{C.90})$$

$$j'_x = \gamma(|\vec{v}|)(j_x - v\rho) \quad (\text{C.91})$$

$$j'_y = j_y \quad (\text{C.92})$$

$$j'_z = j_z \quad (\text{C.93})$$

Con ayuda de lo estudiado parcialmente del presente capítulo, se observa que lógicamente para describir un campo electromagnético producido por cargas y corrientes como mínimo se requiere conocer seis componentes (i.e. en las coordenadas cartesianas), tres del campo eléctrico y tres del campo magnético; hecho que da paso a postular un tratamiento matemático especial, un tensor de segundo orden antisimétrico será el más adecuado para generalizar el fenómeno discutido, puesto que posee seis componentes independientes. Luego, incluyendo las componentes temporales se puede definir el tensor campo electromagnético (tensor de esfuerzos) como  $F^{\alpha\beta}$ , con componentes antisimétricas dadas por [15][22]

$$\begin{aligned} F^{12} &= -F^{21} \equiv B_z \\ F^{31} &= -F^{13} \equiv B_y \\ F^{23} &= -F^{32} \equiv B_x \\ F^{\alpha\alpha} &\equiv 0 \\ F^{01} &= -F^{10} \equiv E_x \\ F^{02} &= -F^{20} \equiv E_y \\ F^{03} &= -F^{30} \equiv E_z \end{aligned} \quad (\text{C.94})$$

$\forall \alpha = 0, 1, 2, 3$ . En otros términos el tensor campo electromagnético

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{Bmatrix}$$



## *ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON*

---

Recuérdese la ecuación de Schrodinger[19] y considérese el siguiente proceso sobre ella:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\vec{r}) + V(\vec{r})\phi(\vec{r}) &= E\phi(\vec{r}) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\vec{r}) &= (E - V)\phi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

donde el factor  $E - V \equiv T$ , (energía cinética), puede escribirse en términos del momento  $T = p^2/2m$ ; es decir, la ecuación (D.1) resulta:

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\phi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{D.2})$$

Ahora, considérese la expresión relativista del cuadrado de la energía de Einstein: [23][16][19]

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 \\ E^2/c^2 - m^2c^2 &= p^2 \\ \frac{E^2}{2mc^2} - \frac{mc^2}{2} &= \frac{p^2}{2m} \end{aligned}$$

Reemplazando en (D.2), se obtiene:

$$\left(\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{mc^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\phi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{D.3})$$

Y, adoptando la equivalencia para la energía  $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  en la ecuación precedente:[19]

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{mc^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\right) \phi(\vec{r}, t) = 0 \\ & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right] - \frac{mc^2}{2}\right) \phi(\vec{r}, t) = 0 \\ & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \square^2 - \frac{mc^2}{2}\right) \phi(\vec{r}, t) = 0 \\ & \left(\square^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \phi(\vec{r}, t) = 0} \quad (\text{D.4})$$

El resultado D.4 se conoce como la ecuación de Klein-Gordon en 4D.



## *ESCALAR DE CURVATURA DE LA ESFERA $S^2$*

---

Rápidamente, considérese un corto paréntesis, en lo cual se logre hallar: los símbolos de Christoffel, tensor de Riemann, tensor de Ricci y escalar de curvatura. Para obtener los símbolos de Christoffel (de segundo género) no nulos, considérese el siguiente procedimiento: (Recuérdese la expresión (3.30))

*i)*

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta_1\theta_2}^{\theta_2} &= \frac{1}{2}g^{\theta_2\beta}\frac{\partial g_{\theta_2\beta}}{\partial\theta_1} \\ &= \frac{1}{2}g^{\theta_2\theta_2}\frac{\partial g_{\theta_2\theta_2}}{\partial\theta_1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta_1}\right)\frac{\partial(r^2\sin^2\theta_1)}{\partial\theta_1} \\ \Gamma_{\theta_1\theta_2}^{\theta_2} &= \cot\theta_1 := \Gamma_{\theta_2\theta_1}^{\theta_1}\end{aligned}\tag{E.1}$$

*ii)*

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_1} &= -\frac{1}{2}g^{\theta_1\theta_1}\frac{\partial g_{\theta_2\theta_2}}{\partial\theta_1} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial(r^2\sin^2\theta_1)}{\partial\theta_1} \\ \Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_1} &= -\sin\theta_1\cos\theta_1\end{aligned}\tag{E.2}$$

Sucesivamente, recuérdese el tensor de Riemann de segundo género (3.37), particu-

larmente, la componente no nula para él, es:

$$\begin{aligned}
 R_{\theta_2\theta_1\theta_2}^{\theta_1} &= \frac{\partial\Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_1}}{\partial\theta_1} - \frac{\partial\Gamma_{\theta_2\theta_1}^{\theta_1}}{\partial\theta_2} + \Gamma_{\sigma\theta_1}^{\theta_1}\Gamma_{\theta_2\theta_2}^\sigma - \Gamma_{\sigma\theta_2}^{\theta_1}\Gamma_{\theta_2\theta_1}^\sigma \\
 &= \frac{\partial(-\sin\theta_1\cos\theta_1)}{\partial\theta_1} - \frac{\partial(\cot\theta_1)}{\partial\theta_2} + (\Gamma_{\theta_1\theta_1}^{\theta_1}\Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_1} + \Gamma_{\theta_2\theta_1}^{\theta_1}\Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_2}) - (\Gamma_{\theta_1\theta_2}^{\theta_1}\Gamma_{\theta_2\theta_1}^{\theta_1} + \Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_1}\Gamma_{\theta_2\theta_1}^{\theta_2}) \\
 &= -(-\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1) - [(-\sin\theta_1\cos\theta_1)(\cot\theta_1)] \\
 R_{\theta_2\theta_1\theta_2}^{\theta_1} &= \sin^2\theta_1
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

cuya componente covariante (primer género) es:

$$\begin{aligned}
 R_{\theta_1\theta_2\theta_1\theta_2} &= g_{\theta_1\theta_1}R_{\theta_2\theta_1\theta_2}^{\theta_1} \\
 &= r^2\sin^2\theta_1
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

luego, el escalar de curvatura es[21]: (recuérdese (3.51))

$$\begin{aligned}
 R' &= g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \\
 &= g^{\theta_2\theta_2}g^{\theta_1\theta_1}R_{\theta_1\theta_2\theta_1\theta_2} \\
 &= \left[\frac{1}{r^2\sin^2\theta_1}\right]\left[\frac{1}{r^2}\right][r^2\sin^2\theta_1]
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

$$= \frac{1}{r^2} := k \text{ (curvatura de Gauss)} \tag{E.6}$$

Por lo tanto, para éste caso, el escalar de Ricci es:

$$R_{(2)} = 2(2-1)k = \frac{2}{r^2} \tag{E.7}$$

siendo coherente con la definición (4.30) cuando  $n = 2$ .

## REFERENCIAS

---

- [1] A.G. Riess et al., *Astrophys. J.* 659, 98 (2007); D.N. Spergel et al., astro-ph/0603449; U. Seljak, A. Slosar, and P. McDonald, *JCAP* 0610, 014 (2006).
- [2] A. G. Riess et al. (Supernova Search Team) Observational evidence from supernovae for an acelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* 116 (1998) 1009-1038. astro-ph/9805201. (document), 4.
- [3] S. Perlmutter et al. (Supernova Cosmology Project), Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae, *Astrophys. J.* 517 (1999) 565-586, astro-ph / 9812133. (document), 4.
- [4] E. Elizalde, A. A. Saharian, and T. A. Vardanyan, *Phys. Rev. D*, 81, 124003 (2010).
- [5] Gastón de los santos, *Mundos Membranas tipo Sitter*, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, 2013.
- [6] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. “*The Large Scale Structure of Space-Time*”. Cambridge, Cambridge University Press, 1973.
- [7] Xiang Chen, “*Vacuum fluctuation force on a rigid Casimir cavity in de Sitter and Schwarzschild-de Sitter spacetime*”. Arizona State University, arXiv:1211.6068v1 [hep-th] 26 nov 2012.
- [8] Emilio Elizalde. “*Efecto Casimir*”, Cern Courier, 1979(Casimir) de manuscrito. Investigación y Ciencia marzo 2009.
- [9] Ostriker, Jeremiah P., and Paul Steinhardt, “*The Quintessential Universe*”, *Scientific America*, vol. 284, 1 (Janury 2001), pp. 46-53.
- [10] P. J. E. Peebles y Bharat Ratra. “*The Cosmological Constant and Dark Energy*”. *Reviews of Modern Physics* 75: 559-606.

- [11] Steven Lamoreaux. "Casimir Forces: still surprising after 60 years". Feature article, American Institute of Physics S-0031-9228-0702-020-0, February 2007.
- [12] Mendoza S. Jairo A., Contreras R. J. Alexander, "Relación del efecto Casimir y el efecto Scharnhorst con el fenómeno superluminal". Departamento de Física y Geología, Universidad de Pamplona, grupo de investigación integrar, 2012.
- [13] Kyle Kingsbury. "The Casimir Effect", article. Version 3, April 19 2009.
- [14] Wolfgang P. Schleich. "Quantum Optics in Phase Space". 1st Edition, Wiley-Vch (Federal Republic of Germany), 2001.
- [15] John David Jackson. "Classical Electrodynamics". University of California, Third Edition, 1999.
- [16] David J. Griffiths. "Introduction to Electrodynamics". Prentice Hall, 3rd edition, 1999.
- [17] Weber and Arfken. "Essential Mathematical Methods for Physicists". ISBN 0120598779, AP 2003.
- [18] John S. Townsend. "A Modern Approach to Quantum Mechanics". University Science Books, 2000.
- [19] Nouredine Zettili. "Quantum Mechanics: concepts and applications", includes bibliographical references and index. ISBN 0 471 48943 3 (cased) ISBN 0 471 48944 1 (paper). 1. Quantum theory. I. title QC174. 12. Z47 2001. 530. 12-dc21 2001024906.
- [20] M Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko. "New Developments in the Casimir Effect", Article. arXiv: quant-ph/0106045v1 8 Jun 2001.
- [21] Bernard F. Schutz. A first course in general relativity. Cambridge, University Press. 1985.
- [22] Juan Manuel Teijeiro Sarmiento. "Sobre la Teoría Especial de la Relatividad". Universidad Nacional (Colombia) Observatorio Astronómico Nacional, Publicado en el 2004.
- [23] Robert M. Eisberg. "Fundamentos de Física Moderna". 1973.
- [24] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. "Teoría Clásica de Campos", Academia de Ciencias, U.R.S.S. 1960 primera edición.
- [25] A. P. French. "Special Relativity". The M.I.T. Introductory Physics Series. Massachusetts Institute of Technology, 1966.

- [26] M. Berger, Riemannian Manifolds: “*From Curvature to Topology (A brief historical overview) en S. S. Chern. A great geometer of the twentieth century. Expanded edition. (S.-T. Yau, Ed.). International Press, Cambridge, MA, 1998.*
- [27] Holger Muller, Paul Louis Stanwix, Sven Hermann, et al. “*Relativity test by complementary rotating Michelson-Morley experiments*”, article. Institut fur Physik, Humboldt-Universitat zu Berlín, Hausvogteiplatz 5-7, 10117 Berlín, Germany. 1 February of 2008.
- [28] Albert Einstein. “*On Electrodynamics of Moving Bodies*”, article. Annals Phys., 1905.
- [29] Fernando Etayo Gordejuela, La Geometría de las Esferas, Universidad de Cantabria.
- [30] R. B. Bucker. “*Geometry, Relativity and the fourth dimension*”. Dover Publications, Inc, New York, 1977.
- [31] I. P. Neupane, warped compactification to de Sitter space, Nucl.Phys. B847 (2001) 549-566. arxiv 1011.5007. (document), 1.6.1, 4, 4.1, 1
- [32] A. Einstein, The Foundation of the General Theory of Relativity, Annalen der Physik 354 (7), 769-822 (1916).
- [33] L. S. Brown, G. J. Maclay, Phys. Rev. 184, 1272 (1969).
- [34] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, Proc. R. Soc. London, A 360, 117 (1978).
- [35] H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. 73, 360 (1948).
- [36] Charles Kittel. “*Introduction to Solid State Physics*”. Seventh Edition, 1996.
- [37] Born M. “*Einstein’s Theory of Relativity*”. Dover Publications, Inc, 1965 (1 Ed. 1920).
- [38] Robert M. Wald, General Relativity, Chicago University Press, ISBN 0-226-87033-2.
- [39] B. S. DeWitt, Phys. Report, 19, 295 (1975).
- [40] C. Nikker, The Theory of Relativity, Oxford University Press, Oxford, (1972).
- [41] Armando Cabrera y Didier Solís, ”*Espacio conforme y compactificación en espacios-tiempo de curvatura constante*“. 16 de noviembre del 2009.