

Deducción de la expresión matemática que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico lineal efectivo en un cristal fotorrefractivo $Bi_{12}TiO_{20}$ (BTO), para técnicas experimentales

Jonathan Andrés Mercado Chavarría



Departamento De Física y Geología
Facultad De Ciencias Básicas
Universidad De Pamplona
Pamplona, Colombia
2021

Deducción de la expresión matemática que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico lineal efectivo en un cristal fotorrefractivo $Bi_{12}TiO_{20}$ (BTO), para técnicas experimentales

Trabajo de grado presentado como requisito para obtener el título de:

Físico

Jonathan Andrés Mercado Chavarría

Director:

Dra. Martha Lucia Molina Prado



Grupo Óptica Moderna



Departamento De Física y Geología
Facultad De Ciencias Básicas
Universidad De Pamplona
Pamplona, Colombia
2021

Dedicatoria

Le quiero dedicar este trabajo principalmente a Dios, ser incondicional que me otorgó: sabiduría, paciencia y disposición para salir adelante, y culminar con éxito este lindo camino de la vida.

A mis Abuelos Amelía Támara Salas y León Villada, que aun no se encuentran conmigo, son mi mayor inspiración para salir adelante.

A mis hermanos Yeny Mercado, Gina Mercado y Duvan Mercado, por ser la voz de aliento en momentos difíciles.

Agradecimientos

A mi directora Dra. Martha Lucia Molina Prado, por toda su colaboración, paciencia, enseñanza y confianza que permitieron la realización de este trabajo. Su aporte ha sido muy importante para mi formación académica y personal.

Al PhD. Andrés De Lima Moura, por proporcionarnos los datos experimentales para corroborar nuestro trabajo y sobre todo por sus asesoría a esta tesis.

A mi abuela Maria Guillermina Arboleda, y a mis papás Cesar Mercado y Luz Marina Chavarría, por ser el apoyo constante en mi trayecto formativo a lo largo de esta carrera.

A la universidad de Pamplona y a los docentes del departamento de física por su valiosa enseñanza.

A mis compañeros de batalla, por su apoyo constante particularmente Julio Mejía, Marcel Parada, Ronald Ahumada y Yorlan Pérez, persona que me motivó a conocer las mieles de la física.

Por último, a las familias Sierra Contreras y Pérez Noriega; por su apoyo y recibirme como un miembro más de su familia, durante mi estancia universitaria en el municipio de Pamplona.

Deducción de la expresión matemática que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico lineal efectivo en un cristal fotorrefractivo $Bi_{12}TiO_{20}$ (BTO), para técnicas experimentales

Jonathan Andres Mercado chavarría

Director:

Dra. Martha Lucia Molina Prado

RESUMEN

Se realiza un desarrollo para encontrar la expresión matemática que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico lineal en un cristal fotorrefractivo, en este caso, el óxido de bismuto de titanio (BTO), por medio de un montaje experimental de incidencia oblicua. Con la expresión matemática se calcula la variación de intensidad transmitida, inducida por un campo eléctrico externo, lo cual permite hallar el coeficiente electro-óptico, para una determinada longitud de onda y parámetros propios del cristal BTO. En la variación de intensidad transmitida se tienen en cuenta indirectamente los coeficientes de transmisión paralelo y perpendicular al plano de incidencia y también la birrefringencia inducida por un campo eléctrico externo. Esta expresión es válida para diferentes longitudes de onda y para otros materiales birrefringentes inducidos eléctricamente. Se presenta un análisis de la variación de intensidad transmitida versus campo eléctrico aplicado.

Palabras claves: Coeficiente electro-óptico, fotorrefractivo, cristales silenitas, birrefringencia inducida.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fundamentación teórica	3
2.1. Ondas electromagnéticas	3
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell y ecuación de onda	3
2.1.2. Densidad de energía y vector de Poynting	7
2.2. Formalismo de polarización	9
2.2.1. Estados de polarización de la luz	10
2.2.2. Modelos para describir los estado de polarización para la luz . .	14
2.2.3. Modelos de polarización para la interacción luz-materia	20
2.3. Propagación de ondas electromagnéticas en medios anisotrópicos	36
2.3.1. Elipsoide de índices	37
2.3.2. Efecto electro-óptico-lineal (Pockels)	39
2.3.3. Efecto electro-giratorio	40

2.4. Materiales fotorrefractivos	41
2.4.1. Cristal de óxido de bismuto $Bi_{12}TiO_{20}$	42
3. Técnicas para determinar el coeficiente electro-óptico efectivo	44
3.1. Antecedentes sobre la medida del coeficiente electro-óptico en el BTO .	44
3.1.1. Modelos experimentales para la medida del coeficiente electro-óptico en cristales silenitas	47
3.2. Deducción de la expresión que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico en BTO	53
3.2.1. Estado de polarización en la interfaz aire-cristal	54
3.2.2. Estado de polarización en la interfaz cristal-aire	56
3.2.3. Variación de intensidad transmitida (VIT)	60
3.2.4. Expresión del retardo de fase con dependencia con los índices lento y rápido para incidencia oblicua	60
3.3. Montaje experimental para determinar la VIT	67
4. Análisis gráfico de la expresión que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico en incidencia oblicua	69
4.1. Gráfica teórica de la VIT versus campo eléctrico aplicado para una longitud de onda de $780nm$	69
4.2. Gráfica teórica de la VIT versus campo eléctrico aplicado para una longitud de onda de $\approx 632,9nm$	71
4.3. Gráfica de VIT versus ángulo de polarización con una longitud de onda de $\approx 632,9nm$	72

5. Conclusiones y perspectivas	74
5.1. Conclusiones	74
5.2. Perspectivas	75
Referencias bibliográficas	75
Apéndices	79
A. Deducción de los coeficientes de transmisión y reflexión	80
A.1. Expresiones para los coeficientes de transmisión t_{\perp} y reflexión r_{\perp} para el caso 1: donde \vec{E} es perpendicular al plano de incidencia	80
A.2. Expresiones para los coeficientes de transmisión t_{\parallel} y reflexión r_{\parallel} en el caso 2: donde \vec{E} es paralelo al plano de incidencia	82
B. Matriz de Jones para una placa retardadora rotada	84
C. Deducción de la matriz que calcula los efectos simultáneos debido a la birrefringencia inducida y circular	87

Índice de tablas

2.1. <i>Tabla de representación de los vectores de Jones, donde $n = 0, 1, 2, 3..$ [1].</i>	16
2.2. <i>Tabla de representación de los vectores de Stokes [2].</i>	19
2.3. <i>Tabla de elementos ópticos con sus respectivas matrices de Jones [3].</i>	34
2.4. <i>Representación de las matrices de Mueller para los elementos ópticos [4].</i>	35
2.5. <i>Propiedades ópticas especificadas con $\lambda = 633nm$ y propiedades físicas del cristal de $Bi_{12}TiO_{20}$ [5].</i>	43
4.1. <i>Parámetros del BTO para una longitud de onda de $780nm$ [6].</i>	69
4.2. <i>Datos experimentales que relacionan la variación de intensidad transmitida con respecto al campo eléctrico aplicado, empleando una longitud de onda de $780nm$.</i>	70
4.3. <i>Parámetros ópticos del BTO para una longitud de onda de $632,9 nm$.</i>	71

Índice de figuras

2.1. Representación de una onda electromagnética.	6
2.2. Representación de la polarización lineal.	11
2.3. Representación de la polarización circular.	12
2.4. Ilustración de la polarización elíptica.	12
2.5. Representación geométrica de la polarización elíptica dada por la ecuación (2.44).	13
2.6. Ilustración de los estados de polarización con diferencia de fase peculiares.	14
2.7. Representación de las componentes horizontales y verticales del vector campo eléctrico sujeta a un ángulo θ	18
2.8. Representación del comportamiento de un material birrefringente.	21
2.9. Ilustración de una lámina de $\frac{\lambda}{2}$	22
2.10. Ilustración del funcionamiento de una lámina de $\frac{\lambda}{4}$	23
2.11. Ilustración de una onda de luz que incide oblicuamente en una interfaz. .	25
2.12. Representación del caso uno.	27

2.13. Ilustración para el caso dos.	28
2.14. Ilustración de la actividad óptica.	30
2.15. Elementos ópticos: a) polarizador; b) lámina retardadora.	32
2.16. Ilustración sobre la elipsoide de índice de refracción.	38
2.17. Ilustración de un medio anisotrópico en el que viaja una onda plana.	38
2.18. Ejes cristalográficos del cristal de $Bi_{12}TiO_{20}$	43
3.1. Gráfica experimental de r_{ef} vs λ	45
3.2. Gráficas experimentales sobre la medida del coeficiente electro-óptico en función de la longitud de onda.	46
3.3. Ilustración del experimento de Henry.	47
3.4. Ilustración del arreglo experimental de Papazoglou y colaboradores	49
3.5. Ilustración del montaje experimental propuesto por Laguado.	50
3.6. Esquema experimental para determinar el coeficiente electro-óptico, con incidencia oblicua.	52
3.7. Ilustración de un rayo incidente formando un ángulo θ_p con la dirección horizontal.	54
3.8. Trayectoria de un haz de luz al atravesar las interfaces aire-cristal y cristal-aire.	55
3.9. Descripción gráfica para determinar l_{ef} por medio de relaciones trigonométricas.	56
3.10. El cristal BTO dividido en N-láminas con una longitud d	57
3.11. Ilustración de la interfaz cristal-aire, $n_1=n_{BTO}$ y $n_2=n_{aire}$	59
3.12. Orientación del campo eléctrico aplicado (\vec{E}_{ap}) con relación a los ejes cristalográficos (x_1, x_2 y x_3).	61

3.13. Sistema de coordenadas rotadas a 45° , configuración vista desde la cara $(1\bar{1}0)$	63
3.14. Sistema de coordenadas rotadas a 45° , configuración vista desde la cara $(\bar{1}\bar{1}0)$	64
3.15. Orientación de los ejes lento y rápido del cristal BTO.	65
3.16. Esquema experimental con incidencia oblicua, para medir la VIT.	67
4.1. Variación de intensidad transmitida en función del campo eléctrico aplicado, con un $\theta_p=0^\circ$ y $r_{ef}=5,5\text{pm}/\text{V}$	70
4.2. Variación de intensidad transmitida en función del campo eléctrico aplicado, para una $\lambda = 632,9\text{nm}$	72
4.3. Variación de intensidad transmitida en función del ángulo de polarización. .	73
C.1. Ilustración del desfase total producido por el retardo de fase y la actividad óptica.	89

Capítulo 1

Introducción

Los materiales fotorrefractivos poseen múltiples propiedades; entre ellas resaltan la fotoconductividad, birrefringencia, que son electro-ópticos y además, ópticamente activos. Dichas propiedades implican que el material produce conductividad eléctrica debido a la absorción de radiación electromagnética, posee más de un índice de refracción, al aplicarle un campo eléctrico externo el índice de refracción lineal varía y además pueden rotar su plano de polarización, respectivamente [7]. Recientemente estos materiales han sido objeto de estudio debido a su gran variedad de aplicaciones en los campos de la holografía, interferometría y procesamiento de información óptica [8].

Son de gran interés, en los materiales fotorrefractivos, la familia de los silenitas, los cuales han sido estudiados extensamente [9–15]; de ellos hacen parte el silicato de bismuto u óxido de bismuto de silicio (BSO), el titanato de bismuto u óxido de bismuto (BTO) y el germanato de bismuto u óxido de bismuto de germanio (BGO). Todos los mencionados son cristales con estructura cúbica centrada en el cuerpo (*BCC*), perteneciendo además al grupo I-23 [5, 7, 16]. Las características que hacen a estos cristales tan atractivos son su tiempo de respuesta relativamente corto y buena sensibilidad para la excitación con fotones de baja energía [6, 16].

Uno de los parámetros más importante para la aplicación de cristales silenitas es la magnitud de los elementos del tensor electro-óptico, como se discutirá más adelante; en general se determina el coeficiente electro-óptico efectivo (r_{ef}), resaltando que la técnica más empleada para calcularlo es la desarrollada por Henry et al [10]; de forma similar, se encuentra la propuesta por Papazoglou y colaboradores et al [17], la cual consiste en encontrar el valor del campo eléctrico en donde la elipticidad del haz, después de atravesar el cristal, es nula, también se analiza la propuesta de Laguado [16] quien emplea polarimetría Mueller-Stokes; Por último, se hace referencia al método Moura et al [6], donde se usa configuración de incidencia oblicua con un desarrollo teórico y experimental para calcular r_{ef} .

El propósito de este trabajo es encontrar una expresión matemática que permita el cálculo del coeficiente electro-óptico efectivo de un cristal BTO; para esto se emplea una configuración de incidencia oblicua y se tiene en cuenta una longitud de onda del orden de los 632,9 nm y un ángulo de incidencia (θ_I) de 32.5°. En el análisis realizado para el cálculo de la expresión de variación de intensidad transmitida se tiene en cuenta los cambios de polarización que sufre el haz al atravesar el cristal; y la diferencia en los coeficientes de transmisión paralela y perpendicular al plano de incidencia. Esta expresión puede ser empleada para materiales birrefringentes inducidos eléctricamente y sobre todo es válida para trabajar el rango espectral de la luz desde el ultravioleta hasta el infrarrojo.

El presente trabajo se encuentra dividido en cuatro capítulos. el primero, se hace una breve descripción de todo el proceso llevado a cabo; en el capítulo dos se presenta una introducción teórica sobre el formalismo de polarización, luego, sobre la propagación de ondas electromagnética en materiales anisotrópicos y para finalizar, una breve descripción sobre el cristal BTO; en el tercer capítulo, se hace una revisión bibliográfica sobre la medición del r_{ef} en un cristal BTO, por otro parte, se hace la deducción de la expresión matemática que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico efectivo y por último, una perspectiva del montaje experimental para determinar la variación de intensidad transmitida *VIT*. El cuarto capítulo muestra los resultados obtenidos en función de la expresión matemática encontrada en el capítulo anterior; para verificar el desarrollo teórico aquí presentando, se hizo uso de datos experimentales, facilitados por el PhD. Andrés de Lima de Moura adscrito a la universidad Federal Alagoas de Brasil. Finalmente se presentan las conclusiones generales y las perspectivas del trabajo.

Capítulo 2

Fundamentación teórica

2.1. Ondas electromagnéticas

2.1.1. Ecuaciones de Maxwell y ecuación de onda

Las ecuaciones de Maxwell son el conjunto de cuatro ecuaciones que detallan los fenómenos electromagnéticos en escala macroscópica; en este grupo de ecuaciones se integran: la ley de Gauss, la divergencia del campo magnético, la ley de Faraday y para finalizar, la ley de Ampère-Maxwell, donde la contribución de Maxwell fue fundamental para entender la luz como una onda electromagnética. En forma diferencial, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como [18]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

donde, \vec{D} representa el vector desplazamiento eléctrico, ρ_v es la densidad volumétrica de carga eléctrica (C/m), \vec{B} es el vector inducción magnética, \vec{E} el vector campo eléctrico (V/m), \vec{H} el vector campo magnético (A/m) y \vec{J}_f es la densidad de corriente eléctrica libre (A/m^2). Además, el vector \vec{D} tiene una relación proporcional con el vector campo eléctrico y esta dado por la siguiente expresión:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.5)$$

donde ε_0 es la permitividad en el vacío siendo igual a $8,854 \times 10^{-12}$ (F/m); \vec{P} es el vector de polarización eléctrica del medio, estando relacionado con el vector campo eléctrico por:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2.6)$$

donde χ es la susceptibilidad eléctrica e indica la capacidad de los dipolos eléctricos en el material dieléctrico para alinearse con el vector campo eléctrico, por tanto el vector desplazamiento, la cual esta dado por:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.7)$$

siendo $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$ y es conocida como la permitividad eléctrica en el medio. Otra relación es la existente entre el vector inducción magnética (\vec{B}) y vector campo magnético viene dado por:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (2.8)$$

donde μ_0 es la permeabilidad en el vacío y su valor es de $4\pi \times 10^{-7}$ (H/m); \vec{M} es el vector de polarización magnética y se aplica en un medio lineal; para este caso se expresa el vector polarización magnética como $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, en tanto al vector inducción magnética presenta una relación con el vector campo magnético y se expresa como:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (2.9)$$

$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ es la permeabilidad magnética en el medio. La característica principal de las constantes μ y ε es que son tensores de rango dos, siempre y cuando el medio no sea isotrópico, pero si ocurre lo contrario, entonces μ y ε serán valores escalares [1]. Ahora considerando que no hay carga, ni corriente en el medio y que los vectores campos eléctricos e inducción magnética tienen respuesta lineal en medios homogéneos, las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.13)$$

Se deducirá la ecuación de onda que describe la propagación de los campos eléctricos y magnéticos. En primera instancia, se aplica rotacional a la ecuación (2.12), teniendo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (2.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (2.15)$$

Se reemplaza (2.13) en (2.15) y se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\left(\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad (2.16)$$

Ahora se empleará la siguiente relación del álgebra vectorial: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, en la expresión (2.16). Por último se aplica la expresión (2.10) para obtener la ecuación (2.17) ésta se reduce a una ecuación de onda homogénea:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Se pueden deducir expresiones similares para el vector campo magnético y vector inducción magnética

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

Se tiene en cuenta que la cantidad $\mu\varepsilon$ tiene unidades de $(1/velocidad)^2$, y se denota esta velocidad de propagación v , definida como:

$$v^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon} \quad (2.20)$$

En el espacio libre, $\mu=\mu_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$, y $v=c$ donde c es la velocidad de la luz y se puede calcular a partir de los valores de μ_0 y ε_0 ; este valor equivale aproximadamente a $3 \times 10^8(m/s)$. Por estas ecuaciones Maxwell concluyó que la luz es una perturbación electromagnética en formas de ondas que se propagan a través del campo electromagnético, a la cual denominó "*ondas electromagnéticas*". Las ecuaciones (2.18) y (2.17) se soluciona a partir de ondas planas monocromáticas, expresadas como:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \end{cases} \quad (2.21)$$

Se entiende que la parte real de estas ecuaciones, son las que representan los respectivos campos, y se expresan matemáticamente como:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{cases} \quad (2.22)$$

donde \vec{k} es el vector de onda y esta orientado en la dirección de propagación, \vec{r} es el vector de posición, ω es la frecuencia angular de las oscilaciones; t es el tiempo, \vec{E}_0 y

\vec{H}_0 son los vectores de amplitud de los vectores campo eléctrico y campo magnético, respectivamente; además, estas amplitudes vienen dadas por valores complejos y se representan como:

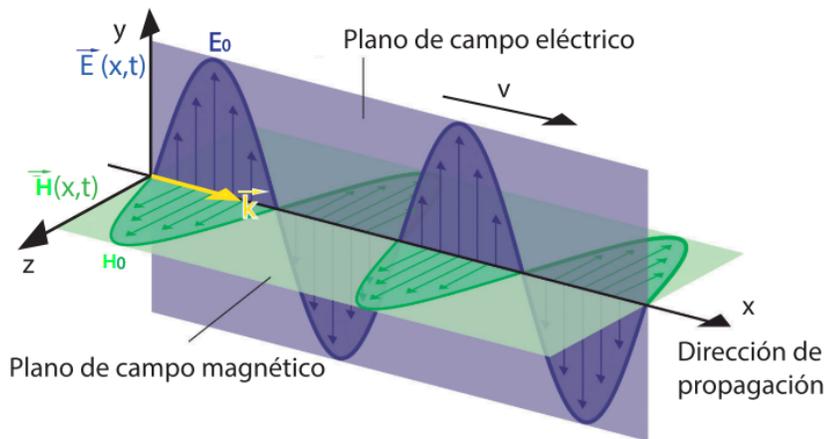
$$\begin{cases} \vec{E}_0 = E_{01}e^{i\delta_1}\hat{u} + E_{02}e^{i\delta_2}\hat{v} \\ \vec{H}_0 = H_{01}e^{i\delta_1}\hat{u} + H_{02}e^{i\delta_2}\hat{v} \end{cases} \quad (2.23)$$

donde E_{01}, E_{02}, H_{01} y H_{02} son valores positivos, \hat{u} y \hat{v} , son vectores unitarios, y δ_1 y δ_2 , son los respectivos ángulos de fase. En la figura (2.1) se representa una onda electromagnética viajando dirección positiva del eje x, con los vectores campos eléctrico y magnético oscilando en la dirección y y z, respectivamente.

Si se reemplazan las ecuaciones (2.21) en las ecuaciones de Maxwell (2.1-2.4), se demuestra que:

- Los vectores \vec{E} y \vec{H} se propagan con idéntica velocidad y fase.
- La onda electromagnética presenta carácter transversal, o sea, \vec{E} y \vec{H} son perpendiculares a la dirección de propagación, (ver figura 2.1)

Figura 2.1: Representación de una onda electromagnética.



Fuente: adaptado de Torrijos [19].

$$\begin{cases} (i).\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \vec{k} \\ (ii).\vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \rightarrow \vec{H} \perp \vec{k} \\ (iii).\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\vec{H} \\ (iv).\vec{k} \times \vec{H} = -\varepsilon\omega\vec{E} \end{cases} \quad (2.24)$$

estas relaciones nos implican que los vectores \vec{k} , \vec{E} y \vec{H} son mutuamente perpendiculares. En la figura (2.1) se resumen las expresiones halladas previamente para ondas electromagnéticas.

- Si la onda electromagnética viaja en el vacío, lo hará con una velocidad definida como c ; por el contrario, si la onda electromagnética se encuentra un medio material su velocidad de propagación (v) se vería afectada, es por eso que se define una relación que identifica al medio material; esta propiedad se conoce como el índice de refracción n

$$n = \frac{c}{v} \quad (2.25)$$

- Los vectores \vec{E} y \vec{H} se encuentran vinculados por su velocidad de propagación; para el caso del vacío, se da la siguiente relación:

$$\vec{E} = c \cdot \vec{H} \quad (2.26)$$

2.1.2. Densidad de energía y vector de Poynting

El campo electromagnético tiene la capacidad de producir calor y realizar un trabajo en contra de las fuerzas mecánicas y químicas, esto significa que la luz puede transportar energía y en si es una forma de radiación electromagnética [1]. Se multiplica escalarmente por \vec{E} a cada uno de los miembros de la ley de Ampère-Maxwell (ecuación 2.4)

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J}_f + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.27)$$

Ahora se aplica una identidad vectorial¹ y se obtiene

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{J}_f + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.28)$$

Se reemplazan la ecuaciones (2.3), (2.7) y (2.9) en la ecuación (2.28) y se obtiene:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{J}_f \quad (2.29)$$

¹ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$

Según una propiedad de las derivadas parciales ², la ecuación (2.29) queda como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{J}_f \quad (2.30)$$

La expresión (2.30) se conoce como la ecuación de continuidad o teorema de Poynting, su interpretación física es la ley de conservación de la energía del campo electromagnético [20]. En si \vec{S} y U están definidos como:

$$\begin{cases} \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \\ U = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + H^2) \end{cases} \quad (2.31)$$

el escalar U representa la densidad de energía del campo electromagnético y tiene unidades de Joules por metro cúbico. El vector \vec{S} o vector de Poynting representa el flujo de energía o la intensidad de la onda y tiene dimensiones de Joules por metro cuadrado por segundo [18], cabe agregar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$ representa el flujo de salida de potencia electromagnética neta por unidad de volumen, $\frac{\partial U}{\partial t}$ exhibe la variación en el tiempo de la energía del campo electromagnético en un volumen dado, y $\vec{E} \cdot \vec{J}$ expone las pérdidas de energía por unidad de volumen [1].

Para determinar la densidad de energía U que relaciona los vectores campos eléctrico y magnético, se asocia con sus respectivas soluciones de ondas planas monocromáticas y se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon c^2 H_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + H_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad (2.32)$$

Cabe mencionar que $\frac{1}{\mu} = c^2 \epsilon$, lo cual se tiene en cuenta para cuando se trabaja el espacio libre o un medio totalmente vacío. Por lo tanto, la ecuación (2.32) viene dada por

$$U = \frac{1}{\mu} H_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.33)$$

Para el caso del vector Poynting en términos de campo eléctrico y magnético, se utiliza la expresión (2.31) y lo sustituimos en la expresión (2.24) (iii).

$$\vec{S} = \frac{1}{\omega \mu} (\vec{E} \times \vec{k} \times \vec{E}) \quad (2.34)$$

Se aplica el producto triple vectorial a esta expresión y se utiliza la expresión (2.24)(i), y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{S} = \frac{1}{\omega \mu} (\vec{k} E^2) \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \rightarrow \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t}$$

Se tiene en cuenta las soluciones de las ecuaciones de ondas (Ecuación, 2.22) cumplen la ecuación de dispersión,¹ la cual esta asociada con medios isótropos homogéneos [20].

$$\vec{S} = \frac{1}{v\mu} E^2 \hat{k} \quad (2.36)$$

donde \hat{k} es un vector unitario en la dirección de propagación de la onda. Se aplica la ecuación (2.22) en la ecuación (2.36) y se obtiene:

$$\vec{S} = \frac{1}{v\mu} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{k} \quad (2.37)$$

∴

$$\vec{S} = \frac{n}{Z_0} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{k} \quad (2.38)$$

donde n es el índice de refracción y Z_0 es la impedancia de espacio libre y presenta un valor de 377Ω . En medios isótropos \vec{S} va en la dirección del vector de onda, pero, para medios anisótropos los vectores \vec{S} y \vec{k} va en direcciones perpendiculares [18].

Dado que el valor promedio del coseno al cuadrado es $\frac{1}{2}$, entonces el valor promedio del modulo para el vector de Poynting ($\langle \vec{S} \rangle$) se escribe como:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{n}{2Z_0} E_0^2 \quad (2.39)$$

Por último, la intensidad es la magnitud del vector Poynting o irradiancia se define como la potencia promedio por unidad de área de transportada de la onda electromagnética.

$$I = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2 \quad (2.40)$$

2.2. Formalismo de polarización

El estudio de la polarización de un material se basa en el análisis de la dirección de oscilación de un campo eléctrico de una onda electromagnética, este fenómeno de la polarización ocurre con el movimiento de los electrones de un material, producido principalmente por el campo eléctrico y la estructura molecular de este, el cual se ve afectado por la separación de los electrones de sus posiciones de equilibrio [21]. Antes de mencionar los tipos de polarización, se hará un estudio del tratamiento del vector campo eléctrico de una onda electromagnética, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

¹Es la relación del módulo del vector de onda con la frecuencia de angular y la velocidad de propagación de la onda en el medio (v), y viene dado por: $|k| = \frac{\omega}{v}$

² Z_0 es un valor que viene dado por la raíz que encierra la relación entre la permeabilidad en el vacío y la permitividad en el vacío $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

☞ Las componentes del campo eléctrico serán divididas en una base cartesiana en las direcciones x e y , haciendo así que el vector de onda se encuentre en la dirección z . Se denota la dirección z como la dirección de propagación.

☞ Las componentes del vector campo eléctrico, se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta_y) \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

donde, k es el modulo del vector de onda, ω es la frecuencia angular de las oscilaciones, t el tiempo, E_{0x} e E_{0y} son las respectivas amplitudes del vector campo eléctrico. Por otra parte, δ_x y δ_y son las respectivas fases.

☞ El desfase entre las ondas anteriores es el que define los tipos de polarización.

$$\delta = \delta_y - \delta_x$$

2.2.1. Estados de polarización de la luz

Polarización lineal

Este estado de polarización ocurre cuando el vector campo eléctrico resultante vibra en una dirección constante aunque su magnitud y signo depende en gran medida de una función del tiempo y de la posición. Para que se establezca este tipo de polarización, el desfase entre las componentes x e y del vector campo eléctrico han de ser nulo, π o múltiplo entero de 2π , es decir:

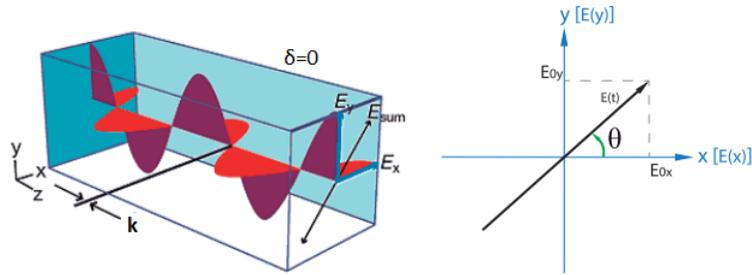
$$\begin{cases} \delta = \delta_y - \delta_x = 0 = \pm 2n\pi \\ \delta = \delta_y - \delta_x = \pi = \pi \pm 2n\pi \end{cases} \quad (2.42)$$

donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Una representación de una onda polarizada linealmente se aprecia en la figura (2.2), en esta ilustración, se aprecia un desfase nulo y la geometría de la proyección que estará dada por la ecuación (2.43); la importancia del signo en la expresión, es que da información del desfase: el signo positivo corresponde a un desfase nulo o múltiplo entero de 2π , mientras que el negativo hace referencia a un desfase igual a π [1].

$$\frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \pm \tan(\theta) \rightarrow E_y = \pm \tan(\theta) E_x \quad (2.43)$$

Figura 2.2: Representación de la polarización lineal.



Fuente: Torrijos, 2014, modificado [19].

Polarización circular

Este tipo de polarización sucede cuando el vector campo eléctrico resultante experimenta una trayectoria circular y totalmente uniforme, que se confina en el plano xy , a lo que es equivalente a la superposición de ondas electromagnéticas de la misma frecuencia con vectores de campo eléctrico ortogonales entre sí y con amplitud de igual estimación. Cabe recalcar que el desfase (δ) entre las componentes x e y del campo eléctrico es $\pm\pi/2$. Las características que describen la polarización circular son:

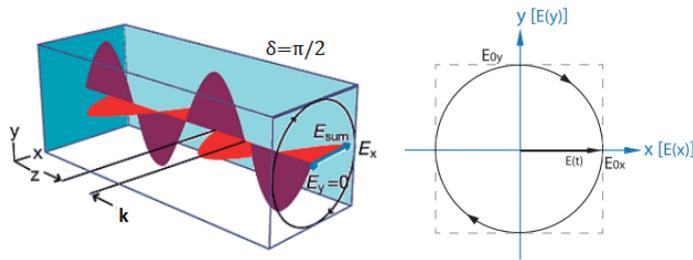
- La proyección geométrica se ilustra en la figura (2.3) describe el vector campo eléctrico como una circunferencia de radio igual a E_0 , que se deduce de la siguiente manera.

$$E_0^2 = (E_x)^2 + (E_y)^2$$

Lo que se define es que el módulo del vector campo eléctrico es constante

- Si el observador se encuentra en el eje z , se presentarán dos tipos de rotación: una a la derecha o sentido dextrógiro, que se presenta cuando el desfase es positivo ($\delta = \pi/2$) y otra rotación es a la izquierda o levógiro, con un desfase negativo ($\delta = -\pi/2 = 3\pi/2$) [1].

Figura 2.3: Representación de la polarización circular.

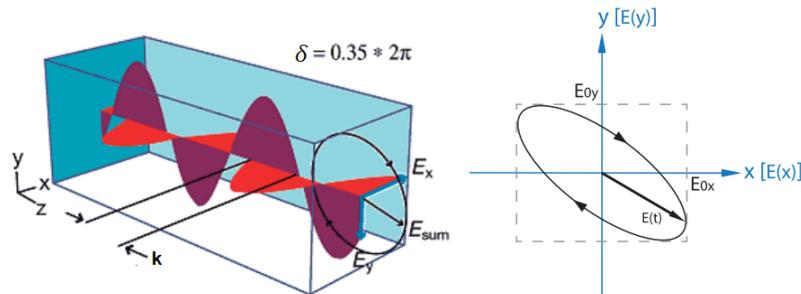


Fuente: Torrijos, 2014, modificado [19].

Polarización elíptica

Este tipo de polarización tiene lugar cuando el vector campo eléctrico resultante describe una trayectoria elíptica, esta es trazada por el extremo del vector campo eléctrico resultante en un plano fijo perpendicular al vector \vec{k} , como se ilustra en la figura (2.4). La polarización elíptica presenta el mismo desfase que la polarización circular, pero con las amplitudes del campo eléctrico diferentes, es decir: E_{0x} y E_{0y} toman valores distintos, dando como consecuencia que la circunferencia se transforme en una elipse cuyos semiejes encajan con las direcciones x e y .

Figura 2.4: Ilustración de la polarización elíptica.



Fuente: Torrijos, 2014, modificado [19].

Este tipo de modelo puede abordar la polarización lineal y circular, para describir esta situación de manera más general, se utiliza la expresión (2.44), denominada elipse de

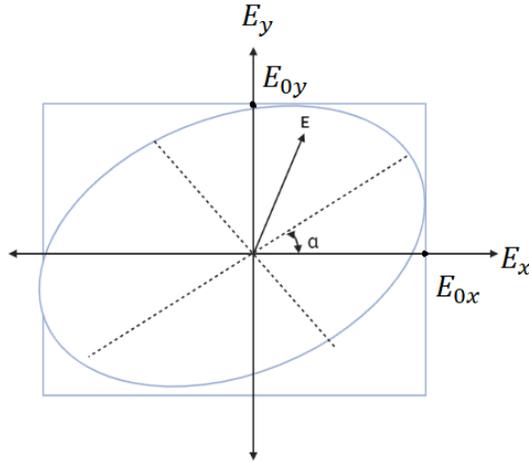
polarización y se utiliza para describir la curva que traza el vector campo eléctrico resultante [21, 22].

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \quad (2.44)$$

Esta expresión depende de la fase o la diferencia de fase y las amplitudes de la onda que se superponen. Los ejes principales de esta elipse forman un ángulo α con la dirección horizontal de un sistema coordenado (E_x, E_y) , como se ilustra en la figura (2.5) y esta dada por:

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \right) \quad (2.45)$$

Figura 2.5: Representación geométrica de la polarización elíptica dada por la ecuación (2.44).



Fuente: autor, adaptado de Hecht, 2002 [22].

La polarización circular se puede deducir de la ecuación (2.44), aplicando una diferencia de fase de $\delta = -\pi/2 + 2n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$ y que las amplitudes tenga el mismo valor ($E_{0x} = E_{0y} = E_0$), por lo tanto la ecuación (2.44) se reduce a

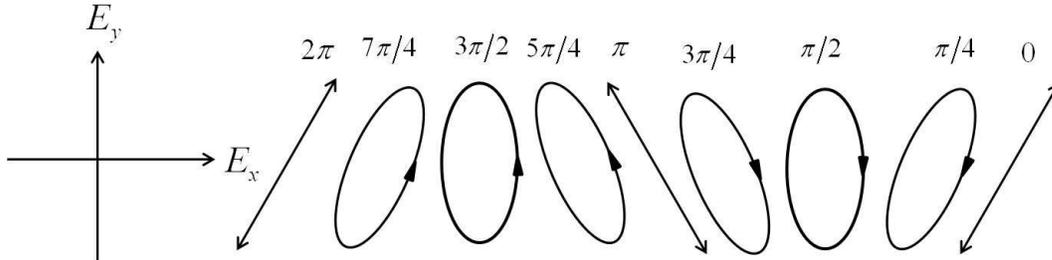
$$E_x^2 + E_y^2 = 1 \quad (2.46)$$

Para el caso de la polarización lineal, ya estudiada anteriormente, se puede deducir aplicando $\delta = \pm n\pi$ en la ecuación de la elipse de polarización, obteniendo:

$$E_x = \pm \frac{E_{0x}}{E_{0y}} E_y \quad (2.47)$$

En la figura (2.6) se ilustran los distintos estados de polarización, teniendo múltiples valores para δ .

Figura 2.6: Ilustración de los estados de polarización con diferencia de fase peculiares.



Fuente: adaptado de Hecht, 2002 [22].

2.2.2. Modelos para describir los estado de polarización para la luz

Vectores de Jones

En la rama de la óptica, el concepto de vectores de Jones fue introducido en el año 1941 por R.C. Jones [23], examinando el estudio de los distintos tipos de polarización para una onda plana monocromática, pero, omitiendo el análisis de la luz no polarizada, o como también conocida luz natural y luz parcialmente polarizada. Además esta formulación no se centra en analizar el espacio físico real más bien se concentra en el espacio matemático abstracto [1]. Este tema se limita en un análisis matricial confinado en la luz polarizada que consta de un vector columna expresado con dimensiones matricial de (2×1) , que involucran las componentes del vector campo eléctrico. Una onda electromagnética que se propaga a lo largo del eje z en un sistema de coordenadas ortogonales (x, y, z) y con vectores unitarios \hat{i} e \hat{j} en la dirección positiva en los ejes coordenados (x, y) y puede ser escrita en función de la ecuación (2.21) para el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.48)$$

Una forma general de expresar el vector \vec{E}_0 de una onda plana es:

$$\vec{E}_0 = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} \quad (2.49)$$

donde E_x y E_y son cantidades imaginarias y son expresadas de la siguiente manera [18]:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_y &= E_{0y}e^{i\delta_y} \end{aligned}$$

Se reemplazan las expresiones anteriores en la expresión (2.49)

$$\vec{E}_0 = E_{0x}e^{i\delta_x}\hat{i} + E_{0y}e^{i\delta_y}\hat{j} \quad (2.50)$$

Por último, se sustituyen la ecuación (2.50) en la expresión (2.48) obteniendo la siguiente expresión:

$$\vec{E} = E_{0x}e^{i(kz-\omega t)}e^{i\delta_x}\hat{i} + E_{0y}e^{i(kz-\omega t)}e^{i\delta_y}\hat{j} \quad (2.51)$$

donde E_{0x} y E_{0y} son cantidades reales. Si se considera que la onda plana monocromática se encuentra en reposo, en este caso $z = 0$ y $t=0$, el propagador $kz - \omega t = 0$.

$$\vec{E} = E_{0x}e^{i\delta_x}\hat{i} + E_{0y}e^{i\delta_y}\hat{j} \quad (2.52)$$

Se lleva a la forma de una matriz de (2x1) o un vector columna:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_{0y}e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

La expresión obtenida se le conoce con el nombre de **vector de Jones**; dicho vector da información de la amplitud y fase de la onda polarizada. Una importante operación en este concepto es determinar la intensidad total (I):

$$I = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (2.54)$$

O bien de forma matricial es:

$$I = \begin{pmatrix} E_x^* & E_y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \vec{E}^\dagger \vec{E} \quad (2.55)$$

donde, \vec{E}^\dagger es el complejo conjugado de \vec{E} y se obtiene la condición de normalización definida por:

$$E_x E_x^* + E_y E_y^* = 1 \quad (2.56)$$

La forma normalizada del vector de Jones se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{E}_n = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\delta_x} \\ \sin \theta e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

El cual:

$$\cos \theta = \frac{E_{0x}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}}, \quad \sin \theta = \frac{E_{0y}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}}$$

\vec{E}_n es la forma normalizada del vector de Jones que se obtiene dividiendo el vector Jones sobre la raíz cuadrada de la suma de sus amplitudes al cuadrado, θ es el ángulo que se forma con la dirección de polarización y el eje horizontal. Si se desea determinar el estado polarización conviene utilizar la expresión (2.57).

Los vectores de Jones normalizados que describen los respectivos estados de polarización son representado en la siguiente tabla:

Estados de Polarización	Forma vectorial	δ, θ	Descripción
Polarización lineal horizontal	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$(2n\pi, 0)$	$E_{0y} = 0$
Polarización lineal vertical	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$(2n\pi, \frac{\pi}{2})$	$E_{0x} = 0$
Polarización lineal a $+45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$(2n\pi, \frac{\pi}{4})$	Ninguna
Polarización lineal a -45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(\pi, -\frac{\pi}{4})$	Ninguna
Polarización circular a la derecha	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$	$E_{0x} = E_{0y}$
Polarización circular a la izquierda	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$	$E_{0x} = E_{0y}$

Tabla 2.1: *Tabla de representación de los vectores de Jones, donde $n = 0, 1, 2, 3..$ [1].*

Al considerar los siguientes vectores \vec{E}_i y \vec{E}_j , estos son ortogonales, si:

$$\vec{E}_i^\dagger \cdot \vec{E}_j = 0 \quad (2.58)$$

Las ecuaciones (2.56) y (2.58) se pueden describir en la siguiente ecuación [2, 24]

$$\vec{E}_i^\dagger \cdot \vec{E}_j = \delta_{ij} \quad (2.59)$$

donde, δ_{ij} es el delta de Kronecker, que nos indica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 & \text{si } i &= j \\ \delta_{ij} &= 0 & \text{si } i &\neq j \end{aligned}$$

La ecuación (2.59) es conocida como “**condición de ortonormalidad**” [24].

Vectores de Stokes

La elipse de polarización (ecuación, 2.44) presenta muchos obstáculos para su análisis, entre esos inconvenientes se encuentra la descripción de la luz natural y luz

parcialmente polarizada [2, 4, 24], algo que el formalismo de Jones no establece en el espacio matricial; estas limitaciones obliga a formular una descripción alternativa de la polarización en términos de observables basados en medidas de intensidad. Para eso se aplica los parámetros de Stokes para una onda plana [1, 2, 4, 24], que son asequibles para trabajar con flujo de energía a través de una superficie. Los parámetros de Stokes de una onda plana, tienen dimensiones de intensidad y se le atribuyen valores reales, sin embargo, estos parámetros analizan los siguientes tipos de luz natural, luz polarizada parcialmente y luz polarizada totalmente.

Las parámetros de Stokes están definidos como:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.60)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.61)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* = 2E_{0x} E_{0y} \cos \delta \quad (2.62)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) = 2E_{0x} E_{0y} \sin \delta \quad (2.63)$$

Se observa que: S_0 indica la intensidad total del haz de luz, mientras que el resto de parámetros describen los diferentes estados de polarización, S_1 describe la cantidad de luz polarizada linealmente, que puede ser horizontal si ($S_1 > 0$) o vertical si ($S_1 < 0$); S_2 indica la cantidad de luz polarizada linealmente a $+45^\circ$; si ($S_2 > 0$) ó -45° si ($S_2 < 0$) y finalmente S_3 que es la cantidad de luz que pasa a través del medio polarizada circularmente a la derecha si ($S_3 > 0$) ó luz polarizada circularmente a la izquierda si ($S_3 < 0$). Además, las expresiones (2.60 a 2.63) se obtienen considerando dos ondas ortogonales entre si; tomando un punto en el espacio $z = 0$ y los factores como amplitud y fases van a cambiar con el tiempo, en si no serán constante con el tiempo. Los cuatro parámetros de Stokes pueden ser arreglados en forma de una matriz columna:

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

La expresión (2.64), se denomina “**vector de Stokes**” para una onda plana. El vector de Stokes para luz polarizada elípticamente es:

$$S = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x} E_{0y} \cos \delta \\ 2E_{0x} E_{0y} \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Si, $\delta = 0^\circ$ o $\delta = 180^\circ$, en la ecuación (2.65), esta se reduce a una representación para describir luz polarizada linealmente.

$$S = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x}E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Hay otro tipo de representación para la luz polarizada linealmente y elípticamente, expresada en las amplitudes E_{0x} y E_{0y} , y sobre todo, en términos de un ángulo auxiliar θ , éste ángulo comparte información de la orientación del campo eléctrico, como se indica en la figura (2.7).

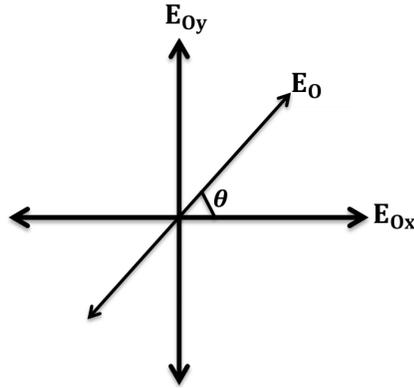
$$E_{0x} = E_0 \cos \theta \quad (2.67)$$

$$E_{0y} = E_0 \sin \theta \quad (2.68)$$

donde:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Figura 2.7: Representación de las componentes horizontales y verticales del vector campo eléctrico sujeta a un ángulo θ .



Fuente: autor.

Se reescribe la intensidad total S_0 en términos de la ecuaciones (2.67) y (2.68).

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = E_0^2 \quad (2.69)$$

En la tabla (2.2) se muestran los vectores de Stokes para algunos estados de polarización habituales que provienen de la ecuación (2.65).

Estados de Polarización	Forma vectorial	Descripción
Polarización lineal horizontal	$I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$E_{0y} = 0$ y $I_0 = E_{0x}^2$
Polarización lineal vertical	$I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$E_{0x} = 0$ y $I_0 = E_{0y}^2$
Polarización lineal a $+45^\circ$	$I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$E_{0x} = E_{0y} = E_0$, $\delta = 0^\circ$ y $I_0 = 2E_0^2$
Polarización lineal a -45°	$I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\delta = 180^\circ$ y $I_0 = 2E_0^2$
Polarización circular a la derecha	$I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\delta = 90^\circ$ y $I_0 = 2E_0^2$
Polarización circular a la izquierda	$I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\delta = -90^\circ$ y $I_0 = 2E_0^2$
Luz no polarizada	$I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Ninguna

Tabla 2.2: Tabla de representación de los vectores de Stokes [2].

Se sustituyen las ecuaciones (2.67) y (2.68) en la expresión (2.66) y se presenta el siguiente vector de Stokes para describir luz polarizada linealmente:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

donde $I_0 = E_0^2$ es la intensidad total. Para la polarización elíptica se reemplazan las

expresiones (2.67) y (2.68) en la ecuación (2.65).

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \cos \delta \\ \sin 2\theta \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Teniendo claro que la luz puede estar totalmente polarizada o no polarizada, al incidir en un medio, es importante definir que tan polarizada se encuentra un punto estable, estableciendo así el grado de polarización (P) [4].

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (2.72)$$

donde, P=1 indica luz totalmente polarizada y P=0 describe luz no polarizada; sin embargo, si se presenta un resultado entre $0 < P < 1$ corresponde a luz parcialmente polarizada. Los vectores de Stokes se pueden tratar como una suma matricial; para así obtener un vector de Stokes final.

$$S = \sum_i S_i \quad (2.73)$$

2.2.3. Modelos de polarización para la interacción luz-materia

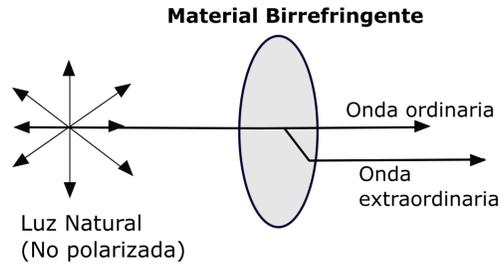
En esta sección se discute un estudio sobre la luz al interactuar con materiales polarizantes y como resultado se obtiene un estado de polarización único [1, 21]. Por ultimo se anexa un aporte teórico-matemáticos a los que son las matrices de Jones y matrices de Mueller que describen matemáticamente los instrumentos ópticos.

Birrefringencia

En la naturaleza existen ciertos materiales cristalinos que presentan anisotropía óptica, lo que nos da a entender que sus características ópticas son distintas en todas las direcciones de la muestra cristalina. Ciertos materiales cristalinos como el cuarzo, calcita, hielo y turmalina exhiben “**birrefringencia**”, fenómeno que consiste en producir una doble refracción. Los materiales cristalinos exhiben dos ejes de transmisión: uno denominado eje rápido conocido como el eje óptico y el eje lento en dirección perpendicular al eje óptico, en donde los átomos del material se sitúan asimétricamente. Cuando el haz incide sobre un material birrefringente, este se divide en dos ondas designadas como onda extraordinaria “e”, y onda ordinaria “o” (ver figura

2.8). Estas dos ondas se propagan por los ejes rápido y lento, y se producen dos índices de refracción en el material llamados índice ordinario n_o e índice extraordinario n_e , respectivamente.

Figura 2.8: Representación del comportamiento de un material birrefringente.



Fuente: autor, adaptado de Gutierrez, 2008 [25].

La onda “o” cumple las leyes de Snell y sobre todo es ortogonal al eje óptico, mientras que la onda “e” se refractará con un ángulo diferente al ángulo de incidencia.

Las láminas birrefringentes o placas retardadoras, son fabricados de materiales minerales como por ejemplo el calcita; su función es generar distintos estados de polarización dependiendo del diseño de la lámina y el mineral empleado. Las láminas retardadoras son cortadas de tal forma que en la superficie se incorpore el eje óptico o el eje de simetría del cristal.

Las placas retardadoras incluyen una diferencia de fase o un retardo de fase al haz óptico, debido a la propagación de las ondas ordinarias y extraordinaria. sin embargo, este retardo es causado por el rayo que viaja en la dirección del eje lento en semejanza con el haz que viaja en dirección del eje rápido y en conjunto con el grosor del cristal o la distancia que recorre el haz dentro del cristal. Una lámina retardadora presenta un retardo de fase Γ [2] definido como:

$$\Gamma = |k| \Lambda \tag{2.74}$$

donde $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el modulo del vector de onda y Λ es la diferencia de camino óptico que se define como la diferencia en distancia que recorre la luz que viaja en dirección del eje rápido respecto al eje lento. Para un cristal birrefringente con índices de refracción n_s e n_f ³ y la distancia que recorre el haz de luz dentro del cristal es (L), entonces, la

³s y f, hacen referencias a los ejes lento y rápido por su siglas en ingles *slow* y *fast*

diferencia de camino óptico es $\Lambda=(n_s - n_f)L$. Por lo tanto, el retardo de fase para una lámina retardadora se expresa en la siguiente ecuación:

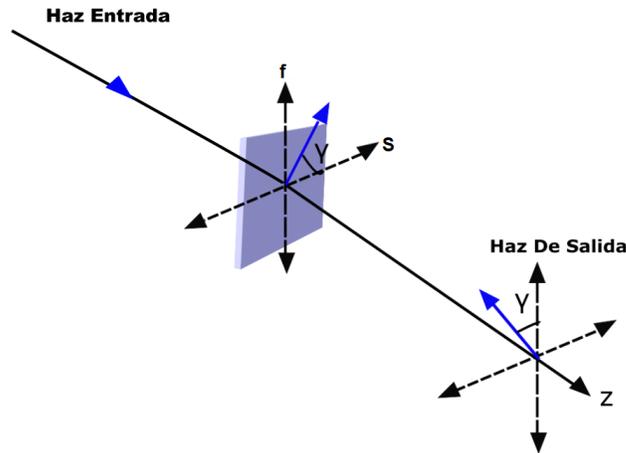
$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_f)L \quad (2.75)$$

Se puede identificar varios tipos de placas birrefringentes en función de su retardo, las más habituales para trabajar en escenarios experimentales son:

- Lámina retardadora de media onda ($\Gamma = 180^\circ = \pi[\text{rad}]$)

Establece un retardo de fase de π radianes o 180° entre las ondas o y e . Se considera que incide un haz polarizado linealmente en una lámina que forma un ángulo γ con respecto al eje lento (ver figura 2.9).

Figura 2.9: Ilustración de una lámina de $\frac{\lambda}{2}$.



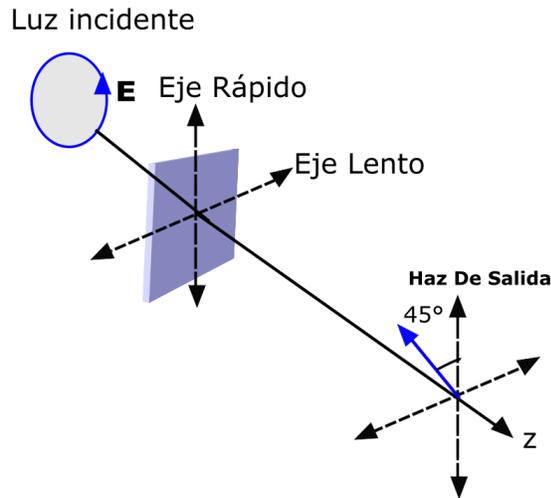
Fuente: autor, adaptado de Torrijos, 2014 [19].

La lámina de media onda, ocasiona que un estado de polarización presente una rotación de 2γ , debido a que la onda e tendrá una velocidad de propagación y una longitud de onda mayor que la onda o . Un caso de los cambios que ocasiona una lámina de media onda es modificar un haz de luz polarizado circularmente a la derecha (dextrógira), este al incidir por la lámina, obtendrá el mismo estado de polarización pero con una rotación a la izquierda (levógira). Otro ejemplo sería con los estados de polarización elíptica levógira y polarización lineal a $+45^\circ$, donde al incidir sobre esta lámina se obtendrá luz polarizada elípticamente dextrógira y polarización lineal a -45° .

-
- Lámina retardadora cuarto onda ($\Gamma = 90^\circ = \pi/2[rad]$)

Este tipo de instrumento óptico ocasiona un retardo de fase de 90° o $\pi/2[rad]$, entre las componentes ortogonales de las ondas o y e . La lámina retardadora puede convertir luz polarizada linealmente en luz polarizada elípticamente y viceversa.

Figura 2.10: Ilustración del funcionamiento de una lámina de $\frac{\lambda}{4}$.



Fuente: autor, adaptado de Hecht,2002 [22].

Amplitud de ondas transmitidas

Se estudia la influencia de la polarización de la luz a través de dos medios lineales no conductores con índices de refracción n_1 y n_2 que están presentes en una interfaz. En particular, se quiere analizar la relación de la polarización con respecto a las leyes de reflexión, refracción y la amplitud de las ondas transmitidas.

En primer lugar, para encontrar las leyes de reflexión y refracción, y la amplitud de las ondas transmitidas se aplican las condiciones de frontera o contorno, pudiendo así calcular las componentes tangenciales y normales de los vectores \vec{E} y \vec{H} , así mismo, estas componentes deben presentar continuidad al pasar de un medio al otro [26, 27]. Las condiciones de contorno son extraídas de las ecuaciones de Maxwell escritas en forma integral [26] y son denotadas así:

- Para la forma integral de la ley de Gauss con ausencia de cargas libres dentro del cristal fotorrefractivo, se obtiene:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.76)$$

Se aplica esta ecuación a una superficie gaussiana que se sitúa en una superficie de contacto entre dos medios lineales, en este caso, un cilindro. Considerando que su altura tiende a cero y que las bases de esta superficie coinciden con la frontera. El flujo eléctrico es calculado con las bases del cilindro que se encuentran en la frontera, de esta manera, como no hay presencia de cargas en la interfaz, no hay flujo eléctrico. Es posible afirmar que las componentes del vector desplazamiento en el medio uno es igual a las componentes del medio dos [26].

$$\vec{D}_1^\perp = \vec{D}_2^\perp = \varepsilon_1 \vec{E}_1^\perp = \varepsilon_2 \vec{E}_2^\perp \quad (2.77)$$

Esta ecuación implica que las componentes normales en cada lado de la interfaz son iguales.

- Para el campo inducción magnética (\vec{B}) se aplica la ley de Gauss para magnetismo de forma integral.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.78)$$

Se aplica la lógica anterior, en este caso, las componentes presente en los dos medios se conserva lo que quiere decir que no sufren alteraciones, implicando que:

$$\vec{B}_1^\perp = \vec{B}_2^\perp \quad (2.79)$$

- Para la ley de Ampere de forma integral:

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{I}_{enc} \quad (2.80)$$

donde \vec{I}_{enc} es la corriente encerrada dentro de la interfaz. Para resolver esta integral se considera un contorno rectangular, en el cual sus lados largos son paralelos a la superficie frontera y sus lados cortos perpendiculares, la solución de la integral se expresa como:

$$\vec{H}_1^\parallel - \vec{H}_2^\parallel = \vec{I}_{enc} \quad (2.81)$$

Se desprecia la presencia de esta corriente dentro la interfaz, por lo tanto:

$$\vec{H}_1^\parallel = \vec{H}_2^\parallel \quad (2.82)$$

Se puede afirmar que las componentes del vector campo magnético se conservan a medida que interactúa con la superficie de contorno.

• Se emplea la ley de Faraday de forma integral.

$$\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.83)$$

Se reemplaza (2.78) en (2.83) y se obtiene:

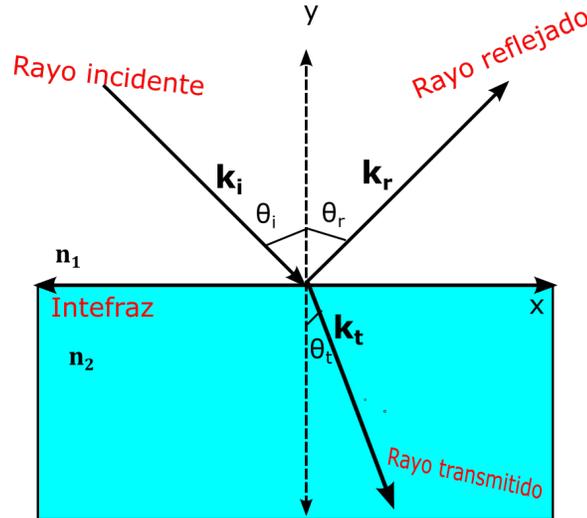
$$\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.84)$$

En este caso, se hace el mismo razonamiento que se aplicó al campo magnético, obteniendo:

$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \quad (2.85)$$

En consecuencia, las componentes tangenciales de los vectores \vec{H} y \vec{E} son continuas a través de la interfaz. Hay que dejar claro que las ecuaciones (2.77, 2.79, 2.82) y (2.85) se adaptan para obtener las amplitudes o componentes de las ondas transmitidas y reflejadas en términos de la onda incidente.

Figura 2.11: Ilustración de una onda de luz que incide oblicuamente en una interfaz.



Fuente: autor, adaptado de Zilio, 2009 [27].

Se considera una onda plana polarizada que incide de manera oblicua en la interfaz que separa dos medios de diferentes índices de refracción. El haz incidente se propaga en un medio con índice de refracción (n_1) y presenta un vector de onda \vec{k}_i (con campos \vec{E}_i y \vec{H}_i) estableciendo un ángulo θ_I como se muestra en la figura (2.11); el haz reflejado se propaga en el mismo medio, con un vector de onda \vec{k}_r (con campos correspondiente \vec{E}_r y \vec{H}_r) en dirección θ_r . Además, el rayo transmitido que se propaga

por todo el segundo medio (n_2), como se registra en la figura (2.11), presenta un vector de onda \vec{k}_t (campos respectivos \vec{E}_t y \vec{H}_t), con un ángulo θ_t .

Los campos eléctricos presentes en esta interfaz son:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \quad (2.86)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t) \quad (2.87)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t) \quad (2.88)$$

Los campos magnéticos se relacionan con los campos eléctricos (ecuación, 2.29 *iii*), por lo tanto, los campos magnéticos incidente, reflejado y el transmitido son representados a través de las siguientes expresiones:

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\mu\omega_i} \quad (2.89)$$

$$\vec{H}_r = \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\mu\omega_r} \quad (2.90)$$

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}_t \times \vec{E}_t}{\mu\omega_t} \quad (2.91)$$

Se contempló que la permeabilidad magnética en los medios presentan igual valor, esto se atribuye principalmente a que los dos medios son isótropos, homogéneos, lineales y dieléctricos. Para los vectores campos eléctricos y magnéticos en los medios con índices de refracción n_1 y n_2 se imponen las siguientes condiciones de frontera:

$$\vec{E}_i + \vec{E}_r \quad \text{e} \quad \vec{H}_i + \vec{H}_r \quad \text{Para } n_1 \quad (2.92)$$

$$\vec{E}_t \quad \text{e} \quad \vec{H}_t \quad \text{Para } n_2 \quad (2.93)$$

En la interfaz, las condiciones de frontera o contorno estan dadas:

$$() \exp i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) + () \exp i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t) = () \exp i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t) \quad (2.94)$$

Cabe resaltar que las condiciones de frontera se deben mantener constante en todos los puntos de la interfaz y en todo tiempo t , además, es indispensable que los argumentos de las exponenciales sean iguales [18], implicando que:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (2.95)$$

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \quad (2.96)$$

De la ecuación (2.94), se deduce que \vec{k}_i , \vec{k}_r y \vec{k}_t son coplanares ya que sus proyecciones sobre el plano de la interfaz son todas iguales; así mismo, los vectores de onda indicados en la figura (2.11) integran un plano de incidencia:

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t \quad (2.97)$$

El modulo del vector de onda esta vinculado con la velocidad de propagación de la onda con el medio, por lo que se puede inferir que $k_i = k_r$, entonces con base en la ecuación (2.96):

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.98)$$

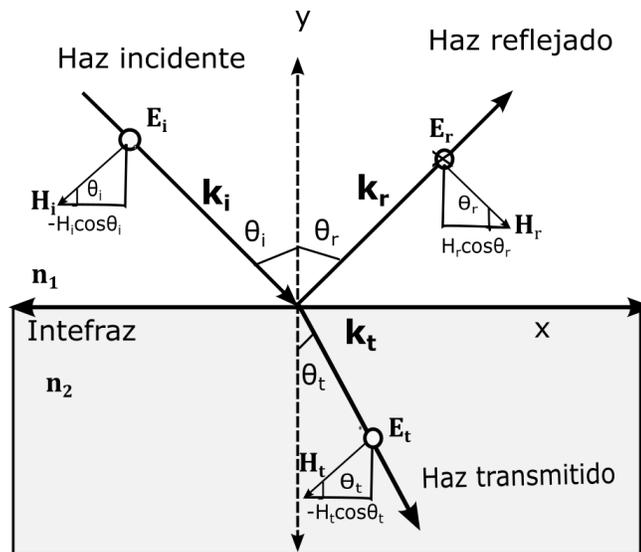
Esta expresión es conocida como la ley de reflexión [18]. El ángulo del haz transmitido o refractado se puede encontrar usando la expresión $k = \frac{\omega n}{c}$, usando la ecuación (2.96), se tiene $\frac{k_t}{k_i} = \frac{n_2}{n_1}$, reemplazando en la ecuación (2.95), obteniendo la ya conocida ley de Snell para la refracción [18, 27].:

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin \theta_t \quad (2.99)$$

Para saber el comportamiento de la luz polarizada cuando interactúa con dos medios, se determinan los coeficientes de reflexión (relación entre la amplitud de la onda reflejada y la amplitud de la onda incidente) y transmisión (relación entre la amplitud de la onda transmitida con respecto a la onda incidente). Estos parámetros dan una descripción completa y detallada de los cambios que sufren las ondas reflejadas y transmitida debido a la presencia de una interfaz. Para calcular estos coeficientes, se tomarán como bases dos casos específicos:

- Caso 1: \vec{E} perpendicular al plano de incidencia.

Figura 2.12: Representación del caso uno.



Fuente: autor, adaptado de Zilio, 2009 [27]

- Este caso indica que \vec{E} es paralelo a la interfaz o perpendicular al plano de incidencia. Las direcciones de los vectores campos eléctricos y magnéticos

para este proceso, se muestran en la figura (2.12) y de hecho, con base a estas direcciones, se aplican las condiciones de fronteras (ecuaciones, 2.82 y 2.85).

$$E_i + E_r = E_t \quad (2.100)$$

$$-H_i \cos \theta_i + H_r \cos \theta_r = -H_t \cos \theta_t \quad (2.101)$$

Se usan las ecuaciones (2.89 2.90 y 2.91) para eliminar H y trabajar en función del campo eléctrico. La expresión (2.101) se expresa:

$$-k_i E_i \cos \theta_i + k_r E_r \cos \theta_r = -k_t E_t \cos \theta_t \quad (2.102)$$

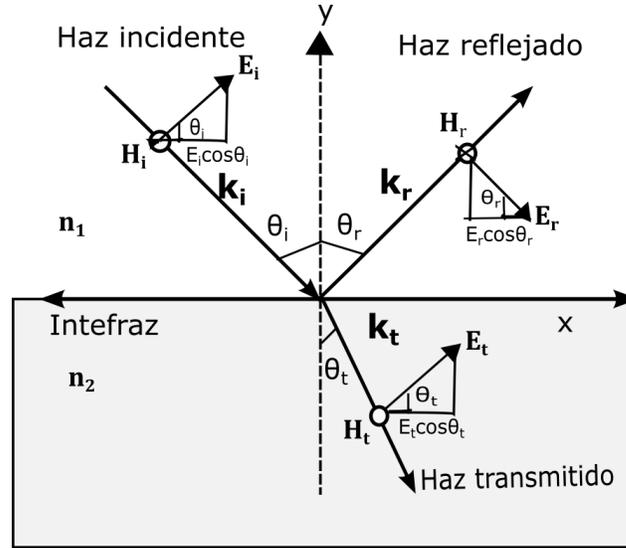
- Los coeficientes de transmisión y reflexión, para este caso, se expresan con las variables t_{\perp} y r_{\perp} .

$$t_{\perp} = \left[\frac{E_t}{E_i} \right] \quad (2.103)$$

$$r_{\perp} = \left[\frac{E_r}{E_i} \right] \quad (2.104)$$

- Caso 2: \vec{E} paralelo al plano de incidencia.

Figura 2.13: Ilustración para el caso dos.



Fuente: autor, adaptado de Zilio,2009 [27]

- Este caso, nos indica que \vec{E} es perpendicular a la interfaz o paralelo al plano de incidencia, en la figura (2.13) se muestran la direcciones de los campos

eléctricos y magnéticos. Con base a esta figura, se deducen las condiciones de frontera.

$$H_i - H_r = H_t \quad (2.105)$$

$$E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t \quad (2.106)$$

Se usan las ecuaciones (2.89, 2.90 y 2.91) para eliminar H y trabajar en función del campo eléctrico, la expresión (2.105) nos queda:

$$-k_i E_i + k_t E_r = -k_t E_t \quad (2.107)$$

- t_{\parallel} y r_{\parallel} representan los coeficientes de transmisión y reflexión.

$$t_{\parallel} = \left[\frac{E_t}{E_i} \right] \quad (2.108)$$

$$r_{\parallel} = \left[\frac{E_r}{E_i} \right] \quad (2.109)$$

Para calcular los respectivos coeficientes de transmisión y reflexión para los casos uno y dos, se hace un extenso procedimiento algebraico resolviendo las ecuaciones (2.100, 2.102, 2.106 y 2.107) y empleando las leyes de Snell (2.98 y 2.99)⁴.

- Caso 1:

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (2.110)$$

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (2.111)$$

- Caso 2:

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (2.112)$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (2.113)$$

Las expresiones anteriores son empleadas para configuración de incidencia oblicua [18, 26]. Los coeficientes de transmisión y reflexión en cada caso presentan valores distintos para un ángulo de incidencia ($\theta_i \neq 0$), si $\theta_i = 0$, los coeficientes de transmisión y reflexión se expresan como:

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (2.114)$$

$$t_{\perp} = t_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (2.115)$$

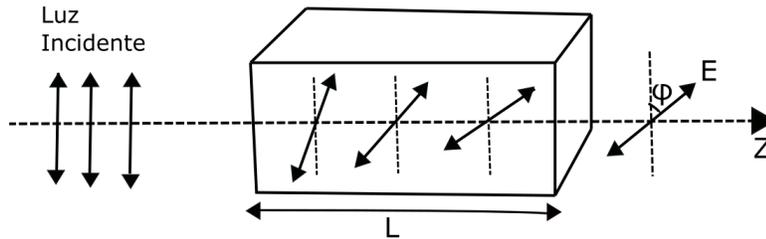
⁴Los coeficientes de transmisión y reflexión son resueltos en el apéndice A.

Actividad óptica

Es un rasgo existente en algunos materiales, que permite rotar el plano de polarización de un haz de luz polarizado linealmente, ilustrado en la figura (2.14). El ángulo de rotación φ del plano de polarización esta subordinado a una distancia (L) recorrida por la luz dentro del material, este fenómeno lo conocemos como “**poder rotatorio**”. La expresión matemática para el poder rotatorio se expresa como el ángulo girado por unidad de longitud [27].

$$\rho_0 = \frac{\varphi}{L} \quad (2.116)$$

Figura 2.14: Ilustración de la actividad óptica.



Fuente: autor, adaptado de Zilio,2009 [27].

La actividad óptica es causada por una diferencia de índices de refracción de la luz polarizada circularmente, esto se debe principalmente a la simetría de las moléculas que compone los materiales [27]. El ángulo φ esta dado por:

$$\varphi = \frac{\pi L}{\lambda} (n_D - n_I) \quad (2.117)$$

donde n_D y n_I son los índices de refracción para la polarización circular derecha e izquierda, respectivamente, de modo que el poder rotatorio específico viene dado por:

$$\rho_0 = \frac{\pi}{\lambda} (n_D - n_I) \quad (2.118)$$

Matrices de Jones

En la sección (2.2.2), se discutió sobre formalismo matricial de los diferentes estados de polarización en función de una diferencia de fase (δ). Se estudiará las matrices de Jones con dimensiones 2x2, que describen las componentes de dispositivos ópticos lineales como los retardadores y polarizadores.

Las componentes de un haz emergente de un elemento óptico están conectados linealmente con las componentes del haz incidente, esta relación se escribe como:

$$E'_x = J_{11}E_x + J_{12}E_y \quad (2.119)$$

$$E'_y = J_{21}E_x + J_{22}E_y \quad (2.120)$$

donde E'_x y E'_y son las componentes del haz emergente y E_x e E_y son las componentes del haz de salida; las cantidades J_{ij} , $i, j = 1, 2$ son los factores transformadores.

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

o

$$\vec{E}' = J\vec{E} \quad (2.122)$$

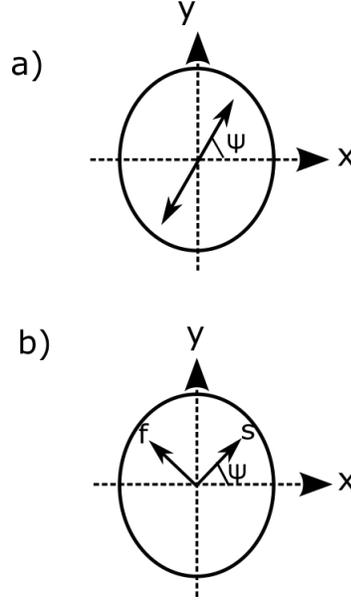
donde J es la matriz de Jones para un elemento óptico y generalmente presenta magnitud compleja. Si la luz atravesara un tren de elementos ópticos, entonces el resultado estaría dado por la multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

Al expresar la matriz para un polarizador lineal (M_p) con su eje de transmisión orientando con un ángulo ψ a la dirección horizontal como se representa en la figura (2.15.a), este se denota de la siguiente manera [1]:

$$M_p = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi & \cos \psi \sin \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Figura 2.15: Elementos ópticos: a) polarizador; b) lámina retardadora.



Fuente: autor, adaptado de Yariv, 2007 [1].

Para una placa birrefringente o lámina retardadora, el cual, su eje lento (s) forma un ángulo ψ con el eje horizontal como se ilustra en la figura (2.15.b). La matriz de una lámina retardadora ⁵ se puede denotar como [1]:

$$M_R = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi + e^{i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi & -i \sin \frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi \\ -i \sin \frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi & e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi + e^{i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

donde Γ es el retardo de fase para una placa birrefringente (ver ecuación 2.75) tema discutido anteriormente en el concepto de birrefringencia. Los cristales silenitas son materiales ópticamente activos que provocan una rotación al vector polarización o al plano de polarización, por lo tanto, la actividad óptica puede ser expresada en forma de matriz de Jones, a través de una matriz de rotación que tiene un ángulo φ [28]:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \mp \sin \varphi \\ \pm \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

donde los signos que están fuera de la diagonal indican el tipo de rotación, si es en sentido horario o anti-horario. Las matrices de Jones son aplicables a la polarización por

⁵La ecuación 2.125 se demostró en el apéndice B

transmisión (ver sección 2.2.3) en función de los coeficientes de reflexión y transmisión, y son utilizados para las dos situaciones. La matriz de transmisión es expresada como [3]:

$$T = \begin{bmatrix} t_{\parallel} & 0 \\ 0 & t_{\perp} \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

$$(2.128)$$

Para el caso de la reflexión

$$R = \begin{bmatrix} -r_{\parallel} & 0 \\ 0 & r_{\perp} \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

donde t_{\parallel} y t_{\perp} son los coeficientes de transmisión paralelo y perpendicular al plano de incidencia. Así mismo, r_{\parallel} es el coeficiente de reflexión paralelo al plano de incidencia y r_{\perp} es el coeficiente de reflexión perpendicular a este mismo plano. Para resaltar, los elementos nulos fuera de la diagonal, son aplicables a materiales dieléctricos isotrópicos [18]. En la tabla (2.3), se muestra una generalidad sobre los distintos elementos ópticos.

Elementos ópticos	Matriz de Jones
Polarizador lineal con eje de transmisión horizontal	$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador lineal con eje de transmisión vertical	$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polarizador lineal con eje de transmisión $\pm 45^\circ$	$\rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}$
Placa de onda $\frac{\lambda}{4}$ con su eje rápido situado horizontal o vertical	$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix}$
Placa de onda $\frac{\lambda}{4}$ con su eje rápido situado $\pm 45^\circ$	$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix}$
Placa de onda $\frac{\lambda}{2}$ con su eje rápido ya sea vertical o horizontal	$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Polarizador circular a la derecha o a la izquierda	$\rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix}$

Tabla 2.3: *Tabla de elementos ópticos con sus respectivas matrices de Jones [3].*

Matrices de Mueller

La interacción de la luz con los elementos ópticos se pueden ser describir por medio de este método, que consta de matrices de dimensiones de 4x4 denominadas “**Matrices Mueller**”. La funcionalidad principal de estas matrices es trabajar con los vectores de Stokes (tema ya discutido en la sección 2.2.2). Unas de las ventajas que presenta este método matricial con respecto al formalismo Jones es trabajar con los efectos de la luz no polarizada. La relación entre las matrices de Mueller y los vectores de Stokes se establece [2] como:

$$S_{salida} = MS_{entrante} \rightarrow \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

Este tipo de matriz presenta valores reales y por ende medibles; una de las características que expresa este formalismo es que la diferencia de fase no se preserva y trabajan específicamente con valores de intensidad transmitida [25]. Ahora, si la luz interactúa con un tren de dispositivos ópticos, cada parte de este sistema se puede describir por una matriz individual, con base a la ecuación (2.130), se denota como [24]:

$$S_{salida} = M_n \dots M_2 M_1 S_{entrante} \quad (2.131)$$

Las matrices de Mueller para los diferentes dispositivos ópticos son representados en la tabla (2.4).

Elementos ópticos	Matriz de Mueller
Polarizador lineal con eje de transmisión horizontal o vertical	$\rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador lineal con eje de transmisión $\pm 45^\circ$	$\rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Placa de onda $\frac{\lambda}{4}$ con su eje rápido situado vertical o horizontal	$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$
Placa de onda $\frac{\lambda}{2}$ con su eje rápido ya sea vertical o horizontal	$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Polarizador circular a la izquierda o al derecha	$\rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabla 2.4: Representación de las matrices de Mueller para los elementos ópticos [4].

2.3. Propagación de ondas electromagnéticas en medios anisotrópicos

Con respecto al vector de polarización \vec{P} (ecuación, 2.6), su magnitud y dirección dependen de la dirección de aplicación de un campo eléctrico externo. Con base a la ecuación (2.6), la susceptibilidad eléctrica lineal es descrita por medio de un tensor rango dos.

$$\vec{P}_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} \vec{E}_j \quad (2.132)$$

los índices (1, 2 y 3) representan los ejes x , y e z , respectivamente. De acuerdo con esta ecuación, las relaciones entre las componentes del vector polarización y las componentes del vector campo eléctrico se expresan como:

$$\begin{cases} P_x = \varepsilon_0(\chi_{11}E_x + \chi_{12}E_y + \chi_{13}E_z) \\ P_y = \varepsilon_0(\chi_{21}E_x + \chi_{22}E_y + \chi_{23}E_z) \\ P_z = \varepsilon_0(\chi_{31}E_x + \chi_{32}E_y + \chi_{33}E_z) \end{cases} \quad (2.133)$$

Se aplica el campo eléctrico en la dirección x , el vector polarización se induce en las direcciones y z . Al tensor de susceptibilidad se le aplica una rotación en base al sistema de coordenadas, de manera que los elementos fuera de la diagonal sean nulos, estos ejes los conocemos como los ejes principales dieléctricos del cristal [21]. Las relaciones entre el vector polarización y el vector campo eléctrico son:

$$\begin{cases} P_x = \varepsilon_0\chi_{11}E_x \\ P_y = \varepsilon_0\chi_{22}E_y \\ P_z = \varepsilon_0\chi_{33}E_z \end{cases} \quad (2.134)$$

La respuesta dieléctrica del cristal se describe por medio del tensor de permitividad eléctrica del medio “ ε_{ij} ”, que se define por [21]:

$$\vec{D}_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \vec{E}_j \quad (2.135)$$

o

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z \\ D_y = \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z \\ D_z = \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z \end{cases} \quad (2.136)$$

Con base a la ecuación (2.5), la relación de las componentes de la susceptibilidad y la permitividad eléctrica del medio es:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(1 + \chi_{ij}) \quad (2.137)$$

La conservación de la energía electromagnética implica que este tensor es hermitiano, es decir, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^\dagger$. Sin embargo, este tensor sufre variaciones debido a la dirección de propagación y solo seis de los nueve elementos del tensor de permitividad dieléctrica son independientes [27].

2.3.1. Elipsoide de índices

En los cristales anisotrópicos, el índice de refracción lineal establece una dependencia con respecto a la dirección de polarización y a la dirección de propagación \vec{s} ; para deducir este comportamiento, se utiliza la expresión del elipsoide de índices de donde se extrae la densidad de energía U_e almacenada en el campo eléctrico en un medio anisotrópico [21].

$$U_e = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (2.138)$$

La superficie de densidad de energía U_e es constante en el espacio, en este caso \vec{D} esta dada por:

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = 2U_e \quad (2.139)$$

donde ε_x , ε_y y ε_z son las permitividades dieléctricas principales. Si se asocia un vector posición $\vec{r} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{2U_e}}$ y haciendo unas series de pasos algebraicos a la ecuación (2.139) se transforma en:

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x/\varepsilon_0} + \frac{y^2}{\varepsilon_y/\varepsilon_0} + \frac{z^2}{\varepsilon_z/\varepsilon_0} = 1 \quad (2.140)$$

esta expresión se puede reescribir en términos de los índices de refracción.

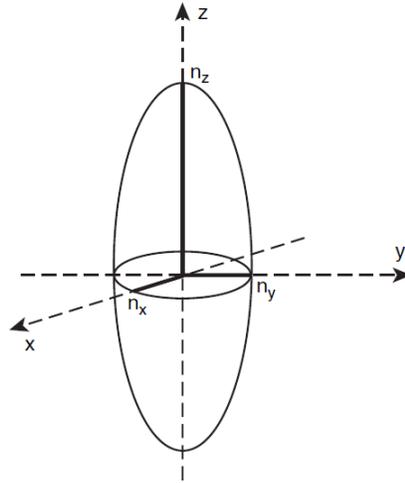
$$\begin{aligned} n_x^2 &= \varepsilon_x/\varepsilon_0 \\ n_y^2 &= \varepsilon_y/\varepsilon_0 \\ n_z^2 &= \varepsilon_z/\varepsilon_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.140) se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (2.141)$$

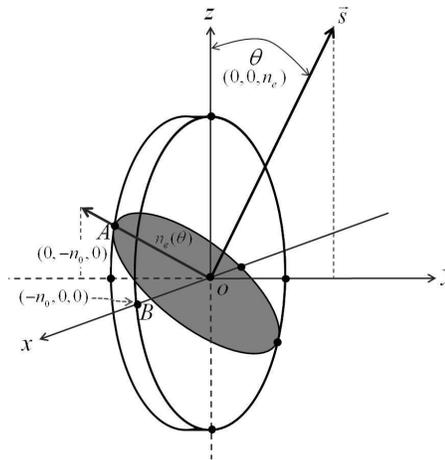
donde n_x , n_y y n_z son los índices de refracción principales a lo largo de las coordenadas x , y e z , respectivamente, como se representa en la figura (2.16). Para determinar o analizar la dirección de polarización y la velocidad de fase para una dirección de propagación dada, simplemente se empalma la indicatriz con un plano ortogonal al vector de \vec{s} , obtener así una figura elíptica donde los índices extraordinario n_e y ordinario n_o se interceptan con la dirección de propagación del campo eléctrico (ver figura 2.17).

Figura 2.16: *Ilustración sobre la elipsoide de índice de refracción.*



Fuente: adaptado de Frejlich, 2007 [7].

Figura 2.17: *Ilustración de un medio anisotrópico en el que viaja una onda plana.*



Fuente: adaptado de frejlich [7]

Ya que el cristal fotorrefractivo que se emplea es uniaxial es decir, presenta un solo eje óptico, como se ilustra en la figura (2.17), la expresión para el elipsoide de índices viene dada por [21].

$$\frac{x^2}{n_0^2} + \frac{y^2}{n_0^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (2.142)$$

Las direcciones de los índices ordinario y extraordinario se encuentran paralelos a los ejes principales de la elipse como se muestra en la figura (2.17). Por simetría del problema, se emplea coordenadas esféricas para determinar la posición de los índices ordinarios y extraordinario en el elipsoide de índices, en este caso, las coordenadas se expresan de la siguiente manera:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.143)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.144)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.145)$$

donde r es el radio, θ es el ángulo polar y ϕ es el ángulo azimutal. Estas relaciones se comprenden teniendo en cuenta que: $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ y $0 \leq \phi \leq 360^\circ$.

Sustituyendo estas ecuaciones en la (2.142) y despejando a r , se obtiene:

$$r(\theta, \phi) = \left(\frac{\sin^2 \theta}{n_0^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.146)$$

Esta elipsoide se encuentra alrededor del eje z y varía con el ángulo θ , los índices de refracción presentes en el material son independientes de ϕ debido a la simetría. Se calcula $r(\pi/2, 0)$ y $r(\pi/2 + \theta, \pi/2)$ y se obtiene:

$$r(\pi/2, 0) = n_0 \quad (2.147)$$

$$r(\pi/2 + \theta, \pi/2) = \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_0^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = n_e(\theta) \quad (2.148)$$

donde $0 \leq n_e(\theta) \leq n_e$. Cabe destacar que los argumentos de θ y ϕ son aplicados al \vec{s} cuando este incide de manera normal al material, no en incidencia oblicua.

2.3.2. Efecto electro-óptico-lineal (Pockels)

Es un efecto óptico no lineal de segundo orden que provoca cambios en la red cristalina de los cristales anisotrópicos, como consecuencia hay una alteración al índice de refracción, esta alteración es producida, ya sea por un campo eléctrico aplicado externamente o un campo de cargas espaciales [12]. Para que sea abordado este fenómeno experimentalmente, el medio en estudio no debe exhibir simetría de inversión [5, 7, 21].

Como se discutió anteriormente, este efecto provoca cambios en el índice de refracción; para describir este fenómeno matemáticamente, se inicia por describir la

relación entre el tensor de impermeabilidad dieléctrica o el tensor de índices y el campo eléctrico aplicado.

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_i = r_{ij} E_{ap,j} \quad (2.149)$$

Escrito de manera explícita como:

$$\begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_1 \\ \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_2 \\ \dots \\ \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ap,1} \\ E_{ap,2} \\ E_{ap,3} \end{bmatrix}$$

donde, $E_{ap,j}$ son las componentes del campo eléctrico aplicado y r_{ij} es un tensor de rango tres denominado tensor de coeficiente electro-óptico [5], que da información sobre el material en respuesta de un campo eléctrico aplicado. Un material con simetría I-23, los elementos del tensor electro-óptico presentan magnitud nula, excepto los coeficiente r_{41} , r_{52} y r_{63} , por lo que el tensor para materiales I-23 se expresa como:

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

Las consecuencias que provoca aplicar este campo eléctrico causa una deformación al cristal; este efecto es conocido como piezoeléctrico inverso (d_{14}) y a su vez provoca cambio en el índice de refracción por el efecto elasto-óptico (p_{44}) [29]. El efecto electro-óptico lineal efectivo (r_{ef}), es la suma del efecto primario, que se obtendría si no ocurre deformación en el cristal, y el efecto electro-óptico secundario, influencia dada por la combinación del efecto piezoeléctrico inverso y elasto-óptico, por lo tanto, el (r_{ef}) se define como:

$$r_{ef} = r_{41} + d_{14}p_{44} \quad (2.151)$$

En experimentos aplicados al BTO con campo eléctrico estático, el valor de $d_{14}p_{44}$ se estima igual a $0,21pm/V$ [30], siendo un valor mucho menor que r_{41} .

2.3.3. Efecto electro-giratorio

Este efecto aparece por la alteración de la actividad óptica bajo la presencia de un campo eléctrico externo [15]. Este efecto es un pseudo-tensor de rango tres y se exhibe

en la simetría I-23, pero no en las simetrías 432, $m3m$ y $43m$ [15]. Este tensor presenta las mismas cualidades que el tensor del coeficiente electro-óptico [31].

$$\zeta_{ij} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta_{61} & \zeta_{62} & \zeta_{63} \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

Los elementos ζ_{41} , ζ_{52} y ζ_{63} son distintos de cero si se emplea un material con grupo de simetría I-23. La intervención del efecto electro-giratorio al cambio en la rotación del plano de polarización o la dirección de polarización, está dada por la expresión [15]:

$$\Delta\rho = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\lambda n_{cr}} \zeta_{41} E_{ap} \quad (2.153)$$

donde λ es la longitud de onda que incide en el material y ζ_{41} es el coeficiente electro-giratorio. De esta manera, la actividad óptica incluido el poder rotatorio (ecuación, 2.116).

$$\rho = \rho_o - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\lambda n_{cr}} \zeta_{41} E_{ap} \quad (2.154)$$

ρ_o es la actividad óptica por unidad de longitud sin presencia de un campo eléctrico externo. Esta expresión es muy importante para el aporte del cálculo del coeficiente electro-óptico efectivo.

2.4. Materiales fotorrefractivos

Estos tipos de materiales son explicado con base en la física de los semiconductores, que describe particularmente el mecanismo de conducción eléctrica. Los materiales fotorrefractivos presentan una banda de conducción separada de la banda de valencia por una brecha típica de materiales aislantes, sin embargo, presentan defectos intrínsecos, los cuales se le atribuyen a procesos de fabricación dentro del material. Tales discrepancias pueden ser átomos ausentes en las redes cristalinas o átomos que ocupan la posición de otros en la estructura [7]. En este caso, los defectos extrínsecos se crean deliberadamente al dopar el cristal. Los materiales fotorrefractivos se dividen en tres tipos, como son:

☛ Óxidos Ferroeléctricos entre ellos se comparecen:

- Titanato de Bario ($BaTiO_3$)
- Niobatio de Litio ($LiNbO_3$)

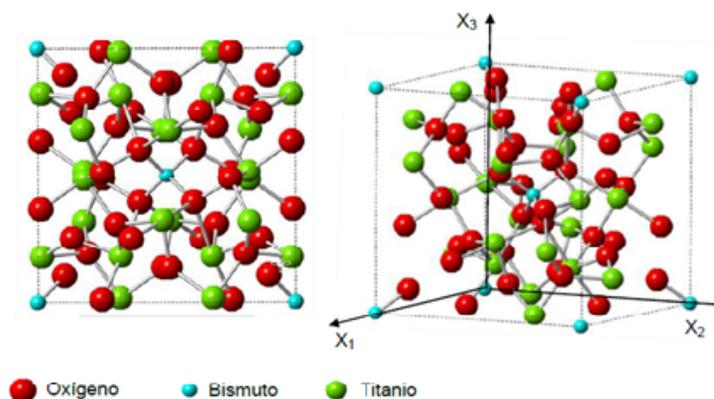
-
- Tantalato de Litio ($LiTaO_3$)
 - Niobato de Potasio ($KNbO_3$)
- ☛ Semiconductores entre ellos se presentan: Arseniuro de Galio ($GaAs$), Fosfito de indio (LnP) y $CdTe$ (Telururo de cadmio).
- ☛ Cristales silenitas: pertenecen a la clase cristalografía cúbica no centro simétrico I-23 son fotoconductores, electro-giratorios, piezoeléctricos, electro-ópticos, elasto-ópticos y ópticamente activos, exhiben resistencia a la oscuridad entre ellos se identifica:
- óxido de bismuto de germanio o germanato de bismuto $Bi_{12}GeO_{20}$ (BGO)
 - óxido de bismuto de silicio o silicato de bismuto $Bi_{12}SiO_{20}$ (BSO)
 - óxido de bismuto de titanio o titanato de bismuto $Bi_{12}TiO_{20}$ (BTO)

En este trabajo, se emplea un cristal de óxido de bismuto de titanio que presentan varias aplicaciones en memorias holográficas, procesamiento óptico en señales, interferometría, conjugación de fase y moduladores de luz, entre muchas otras [16, 31, 32]

2.4.1. Cristal de óxido de bismuto $Bi_{12}TiO_{20}$

Este componente presenta una estructura cubica centrada en el cuerpo (BCC). La estructura cristalina del $Bi_{12}TiO_{20}$ esta formado por poliedros Bi-O, los cuales los iones de Bi están unidos a 5 iones de oxígeno, formando una estructura octaédrica, la red poliédrica esta conectada a tetraedros Ti O_4 , cada tetraedro esta formado por 4 aniones de oxígeno y un catión de titanio (Ti) [33]. El cristal BTO es crecido por la técnica de “Czochralski”, fundiendo $BiO_3 + TiO_2$ a una temperatura de $950^\circ C$ [34], aunque existen otras técnicas para el crecimiento de este cristal, entre esas están el método de solución de fusión [9].

Figura 2.18: Ejes cristalográficos del cristal de $Bi_{12}TiO_{20}$.



Fuente: adaptado de Jerez, 2011 [34].

Las características que presentan este cristal, es su alta sensibilidad para la luz roja y su elevada fotoconductividad eléctrica [32], En la tabla (2.5) se presentan las propiedades ópticas y físicas del cristal de $Bi_{12}TiO_{20}$.

Propiedades	Valores
Índice de refracción	2.56
Permeabilidad dieléctrica	$\epsilon = 47$ a frecuencia $1KHz$
Actividad óptica	$6,3^\circ/mm$
Simetría	23
Coefficiente electro-óptico	$\approx 5,5 \times 10^{-12} m/V$
Coefficiente electro-giratorio	Menor $0,30 \times 10^{-12} m/V$
Temperatura de Fundido	$950^\circ C$
Densidad	$9,1g/cm^3$

Tabla 2.5: Propiedades ópticas especificadas con $\lambda = 633nm$ y propiedades físicas del cristal de $Bi_{12}TiO_{20}$ [5].

Capítulo 3

Técnicas para determinar el coeficiente electro-óptico efectivo

3.1. Antecedentes sobre la medida del coeficiente electro-óptico en el BTO

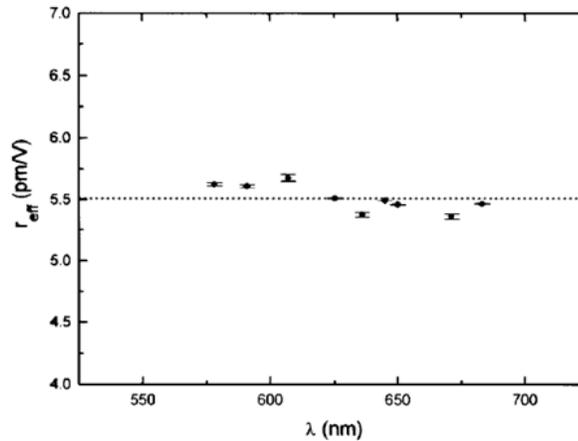
El coeficiente electro-óptico es uno de los parámetros más importante para la aplicación de los cristales silenitas. sin embargo, la medición del coeficiente electro-óptico implica una dependencia con la longitud de onda, según estudios informan que la medición del r_{ef} para el $Bi_{12}TiO_{20}$, difieren significativamente con distintas longitudes de onda [6, 8, 12, 13, 17, 35].

Según lo reportado por Fox y Bruton et al [13], la primera medición del coeficiente electro-óptico en el BTO, utilizando una longitud de onda de 633 nm y empleando un soleil-babinet (retardador de orden cero, continuamente variable) fue de $r_{41} \sim 5,17$ pm/V. Este valor se midió sin tener en cuenta la deformación producida por el campo eléctrico externo aplicado al BTO. Años más tarde Wilde, Lemaire, Prokofiev, Papazoglou y Riehemann hacen aportes relevantes a la medida del coeficiente electro-óptico en BTO, tanto con el valor efectivo, como con la técnica de medición [8, 17, 35, 36] y utilizando otros cristales silenitas para dicha medición [10, 11, 14].

Investigadores como Wilde et al [35] con un trabajo de gran magnitud para la medición del coeficiente electro-óptico efectivo, empleando las conocidas configuraciones holográficas del campo eléctrico como es: transversal y longitudinal con base a distribuir corriente; tanto alterna (ac), como directa (dc), entregando un valor promedio del coeficiente electro-óptico es igual $r_{41} = 5,75 \pm 0.10$ pm/V para corriente directa y para corriente alterna un coeficiente electro-óptico de $r_{41} = 5,2 \pm 1,0$ pm/V, disponiendo

un haz de luz de 633nm. Papazoglou y colaboradores et al [17] en el año 1997, hacen un aporte de la medición del coeficiente electro-óptico efectivo de $r_{ef} = 5,5$ pm/V, teniendo en cuenta la influencia del llamado efecto electro-óptico secundario que combina el efecto piezoeléctrico inverso y el efecto elasto-óptico, empleando una región espectral de 575nm a 700nm como se muestra en la figura (3.1) donde los puntos son los datos experimentales, las barras de error simbolizan la desviación estándar de cada conjunto de medida y la línea de puntos representa el valor medio de todos los datos medidos. Papazoglou, resta la contribución piezoeléctrica para así obtener un valor del coeficiente electro-óptico $r_{41} = 5,3$ pm/V, este valor cumple con lo reportado por Fox y Bruton. Una contribución fundamental que hace papazoglou, es afirmar que en el rango espectral visible no se presenta dispersión del coeficiente electro-óptico para el BTO.

Figura 3.1: Gráfica experimental de r_{ef} vs λ .



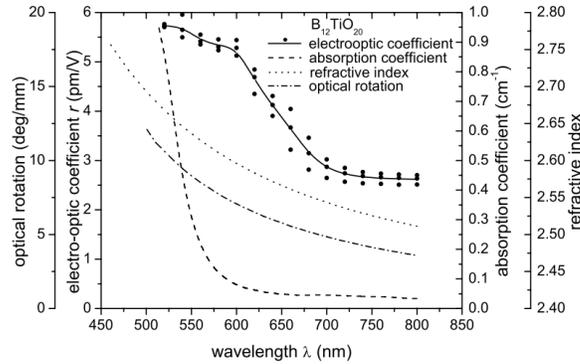
Fuente: Papazoglou Y colaboradores, 1997 [17].

Otros autores como es Lemaire que empleó una longitud de onda de 650 nm, y reporta un valor de $r_{ef} \approx 2,1$ pm/V [36] y por último se encuentra a Prokofiev et al [37] obtuvo un $r_{41} \approx 5,3$ pm/V empleando el concepto de eficiencia de difracción para un cristal BTO. En el año 1997, se hace un estudio del r_{41} en relación al BTO con distintos dopajes con elementos representativos en la tabla periódica como son el calcio, vanadio, galio y cadmio, reportando un valor de coeficiente electro-óptico lineal sin dopar de $r_{41} = 5,66$ pm/V [8], este valor en si muestra diferencias con los valores obtenidos con los cristales BTO dopados.

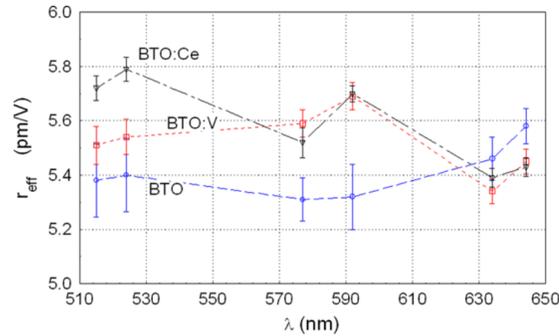
En la actualidad el investigador Efremidis y colaboradores [31], emplean un rango espectral 520 nm-800 nm, informando una variación de $r_{ef} \sim 3,0$ pm/V a 5,7 pm/V; como se muestra en la figura (3.2a), se puede observar en esta ilustración una

considerable dispersión del coeficiente electro-óptico en el cristal BTO. Por otro lado, en 2011 De Oliveira et al [12], empleó un rango espectral de $\sim 500\text{nm}$ y $\sim 650\text{nm}$, y obtiene un r_{ef} promedio cercano a $5,5 \text{ pm/V}$ reafirmando así el trabajo de Papazoglou, como se muestra en la figura (3.2b).

Figura 3.2: Gráficas experimentales sobre la medida del coeficiente electro-óptico en función de la longitud de onda.



(a) Gráfica de resultados de Efremidis.



(b) Gráfica de resultados De Oliveira en cristales BTO en estados puro y dopados.

Fuentes: Efremidis y De Oliveira [12,31]

Por último, el cálculo de Coeficiente electro-óptico para el cristal BTO más reciente es reportado por Moura et al [6] en el año 2013, empleando un procedimiento alternativo de incidencia oblicua, que es un técnica llamativa; que procede de un método tanto experimental y teórico empleando una longitud de onda en la región del infrarrojo y reporta un valor de $r_{ef} = 5,5 \pm 0,2 \text{ pm/V}$, este valor mencionado concuerda con los

valores reportados de Papazoglou y De Olivera; para una longitud de onda 780nm. Además, los trabajos de Moura y De Olivera ratifican la no presencia de la dispersión del coeficiente electro-óptico lineal en cristal de óxido de bismuto de titanio empleando el espectro visible, las causas de esta dispersión que exhibe las mediciones de efremidis puede estar relacionado con dos factores entre ellos se encuentran los inadecuados polarizadores para medir el rango de longitud de onda que él trabaja y la creación de un campo de carga espaciales que es opuesto al campo aplicado causado por la intensidad del haz incidente que puede inducir una alta densidad de electrones en la banda de conducción [6, 12].

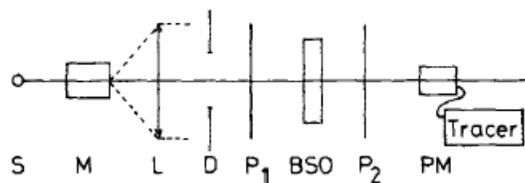
3.1.1. Modelos experimentales para la medida del coeficiente electro-óptico en cristales silenitas

Se hizo una revisión literaria sobre los modelos experimentales para medir coeficiente electro-óptico en cristales silenitas. Para eso se dividió en dos modelos experimentales uno en incidencia normal o en línea (Su principal característica es que el haz de luz incide perpendicular a unas de las caras del cristal silenita) y el otro en incidencia oblicua o fuera de línea(su principal característica es precisamente que el haz incide con respecto a un ángulo de incidencia que se forma entre una recta normal a la superficie de contacto):

Modelos experimentales en incidencia normal o en línea

En este modelo se abordó en el año 1986 con el estudio de Henry et al [10], planteó una teoría fundamentada en el cambio de polarización de un haz polarizado linealmente sobre un cristal, este cambio se lo atribuyó a la birrefringencia inducida y a la birrefringencia circular. El estado de polarización del haz que sale del cristal suele ser elíptico y señalo lo anterior por medio de una expresión matemática que se lo asoció con el r_{ef} , para eso empleó un procedimiento experimental como se indica en la (3.3).

Figura 3.3: Ilustración del experimento de Henry.



Fuente: Henry y colaboradores, 1986 [10]

El arreglo experimental se conformó por una fuente de luz (S), un monocromador (M), dispositivo óptico que sirvió para medir la composición de la luz según su distribución de longitudes de onda, una lente (L), un diafragma (D) que se empleó para controlar el área iluminada del cristal, un polarizador (P_1) que controlaba la dirección de polarización del haz incidente, el cristal silenita que estuvo bajo la acción de un campo eléctrico aplicado, un analizador (P_2) y un foto-multiplicador (PM) que estaba conectado a un sistema de registros de datos.

El procedimiento consistió en rotar el analizador (P_2), para así determinar las intensidades máximas y mínimas con respecto al campo eléctrico aplicado, sin embargo, para encontrar esas medidas de intensidad, el polarizador P_1 se orienta a un ángulo de θ_α arbitrario; por lo que el grado de polarización o la visibilidad para esta orientación viene dada por [2, 24]:

$$V_{\theta_\alpha} = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (3.1)$$

donde I_M es la intensidad transmitida máxima y I_m es la intensidad transmitida mínima. Ya obtenidas esas mediciones, se hizo un segundo procedimiento, para eso el polarizador P_1 se giró a una orientación $\pi/4$ con respecto a la anterior; por lo que la posición angular es ahora $\theta_\alpha + \pi/4$ y se determinó $V_{\theta_\alpha + \pi/4}$, una vez que se hallan determinados V_{θ_α} y $V_{\theta_\alpha + \pi/4}$, estos valores de intensidad se reemplazaron en la siguiente ecuación [10]:

$$V_{\theta_\alpha} + V_{\theta_\alpha + \pi/4} = 1 + \left[1 - \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} \right) \right] \quad (3.2)$$

donde:

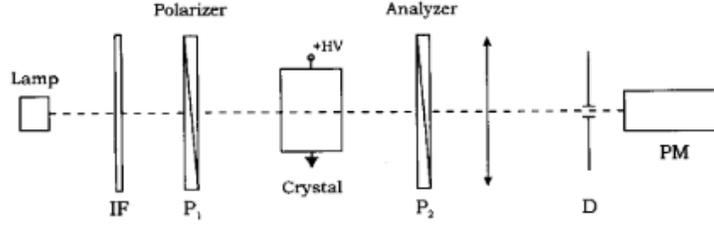
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n^3 r_{41} E_{ap} d, \quad \phi^2 = \rho'^2 + \delta^2 \quad (3.3)$$

ϕ es la diferencia de fase debido a la birrefringencia inducida y la actividad óptica, n es el índice de refracción lineal del material con respecto a la longitud de onda del haz incidente, E_{ap} es el campo aplicado y d es la distancia que recorre el haz dentro del material. Realmente este experimento mostró ciertas discrepancias, ya que el haz incidente entró en incidencia normal a la cara del cristal, y se presentó el fenómeno de múltiples reflejos en el cristal y no solo es el único obstáculo, también se presentó un campo eléctrico interno que esta relacionado con el transporte de cargas no homogéneas [6].

Otra técnica fue la propuesta por Papazoglou et al [17]. Este método experimental, consistió en encontrar el valor del campo eléctrico aplicado para el cual la elipticidad (relación entre el eje menor y el eje mayor de la elipse) que emerge del cristal debe ser

0. Considerando que en el cristal se propagan dos ondas elípticas en diferentes sentidos (derecha y izquierda) por las direcciones de polarización del material birrefringente, el r_{ef} se determinó por medio de unas expresiones analíticas que deducen la elipticidad del haz de luz que emerge del cristal, el cual se relacionó con la dirección de polarización del haz incidente y las características del cristal [17].

Figura 3.4: Ilustración del arreglo experimental de Papazoglou y colaboradores



Fuente: Papazoglou y colaboradores [17].

Sin embargo, debido a la figura (3.4), dentro del cristal se producen estados de polarización elíptico debido a la birrefringencia lineal; que es originado por un campo eléctrico aplicado. Internamente en el cristal se exhiben una diferencia de fase ϕ entre las dos ondas elípticas, que se propagan por los ejes del cristal birrefringente. ϕ se expresa como:

$$\phi = \sqrt{(2\rho_0)^2 + (\delta)^2} \quad (3.4)$$

donde ρ_0 es el poder rotatorio por unidad de longitud y δ es el retardo de fase por unidad de longitud, respectivamente. Por lo tanto, δ está dado por:

$$\delta = 2k_0\Delta n = \frac{2\pi}{\lambda}r_{ef}n^3E_0 \quad (3.5)$$

donde k_0 es la magnitud del vector de onda, n es el índice de refracción del material, E_0 es el campo eléctrico aplicado. La medición del r_{ef} se fundamentó en el que la elipticidad sea cero y para encontrar esta magnitud se registran grandes valores de voltaje, cabe resaltar que la intensidad que salió del analizador es luz polarizada linealmente, en total ϕl es igual a $m\pi$. Por lo tanto, r_{ef} es:

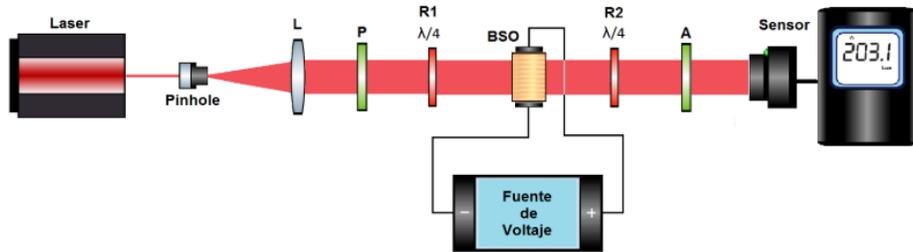
$$r_{ef} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - (2\rho)^2}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}n^3E_0\right)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Experimentalmente, lo que se calculó fueron los altos valores de voltaje aplicado, para que así la elipticidad se convirtiera en cero y que en el fotomultiplicador se registraran

valores de intensidad mínima, como consecuencia, estos voltajes se reemplazan en la ecuación (3.6).

Para destacar un ultimo estudio sobre la medida del coeficiente electro-óptico en cristales silenitas en especial del BSO, se lo atribuyen a William Laguado et al [16]; Esta técnica se baso en un análisis de Mueller-Stokes (temas ya discutido en las secciones 2.2.2, 2.2.3), la técnica que implementó, tiene la ventaja de determinar de manera simultanea el coeficientes electro-óptico lineal y el poder rotatorio. Esta técnica consistió en obtener la matriz de Mueller del arreglo experimental, que exhibe 16 elementos de intensidad [2, 4, 24]. El montaje experimental como se ilustra en la figura (3.5) estuvo compuesto de un haz de luz de He-Ne de 633 nm, un pinhole, una lente (L), polarizador (P), una retardador (R_1) de $\lambda/4$. La muestra de BSO estuvo anclada con una fuente de voltaje, para que así suministrara un campo eléctrico externo. Un retardador (R_2), un analizador (A) y por ultimo, un sensor que se conecto a un medidor de intensidad.

Figura 3.5: Ilustración del montaje experimental propuesto por Laguado.



Fuente: Laguado, 2019 [16].

El funcionamiento del montaje experimental consistió en generar estados de polarización elípticos por medio del primer tramo denominado “sistema generador” conformado por un polarizador lineal y un retardador de cuarto de onda ($\lambda/4$) este se rotó en paso de 40° hasta dar el giro completo, estos estados de polarización incidieron en el material, ya en el interior del cristal fotorrefractivo estos estados de polarización se vieron alterado por la birrefringencia circular y lineal, al salir del cristal, los estados de polarización pasaron por un “sistema analizador” que tuvo la función de analizar los estados de polarización que emergieron del cristal. Este sistema estuvo conformado por una lámina retardadora de cuarto de onda, el cual es girado a razón de 40° hasta dar el giro completo y por último un polarizador lineal, y finalizó en el sensor donde

se registró los valores de intensidad, de esta manera se obtuvo una matriz de 9x9 de intensidades.

Para determinar coeficiente electro-óptico lineal se utilizó la matriz de Mueller teórica (M_T) del material que cobijo la diferencia de fase debido a la birrefringencia inducida y la birrefringencia circular, esta matriz se denota de la siguiente manera:

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \Delta - \sin^2 \Delta \cos 2\Theta & -\cos \Theta \sin 2\Delta & -\sin^2 \Delta \sin^2 \Theta \\ 0 & \cos \Theta \sin 2\Delta & \cos 2\Delta & \sin 2\Delta \sin \Theta \\ 0 & -\sin^2 \Delta \sin^2 \Theta & -\sin 2\Delta \sin \Theta & \cos^2 \Delta - \sin^2 \Delta \cos 2\Theta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donde, Δ y Θ se expresan como:

$$\Delta^2 = \rho^2 + \delta^2 \quad (3.8)$$

$$\tan \Theta = \frac{\delta}{\rho} \quad (3.9)$$

donde ρ es el poder rotatorio y δ es el retardo de fase debido a la birrefringencia lineal. sin embargo, δ se expresa como:

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} r_{41} n^3 E_{ap}$$

Θ es una posición angular que se forma entre los dos fenómenos; este ángulo se calculó empleando el teorema de Pitagoras en referencia a la ecuación (3.9). Para determinar la matriz de Mueller experimental (M_e) de la muestra se empleó la polarimetría Mueller-Stokes [16, 38], la construcción de la matriz experimental se necesito de algunos parámetros entre ellos el desfase que presentan los retardadores, y el número de medidas que se relaciona con la rotación de los retardadores. En este caso, la matriz de Mueller experimental se expresa de la siguiente manera:

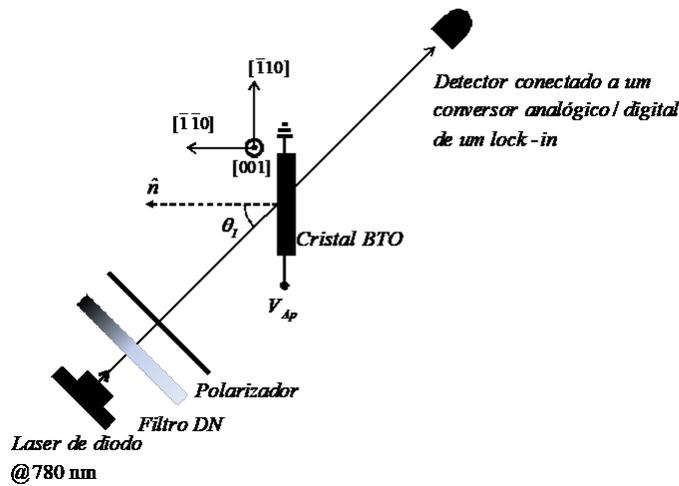
$$M_e = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Para encontrar r_{41} , igualaron los elementos de la matriz teórica (ecuación, 3.7) con la matriz experimental (ecuación, 3.10) por ende, se determinaron los valores de Δ y Θ , por consecuencia, estos dos parámetros se asocian con el r_{41} . Este método es sencillo y se puede emplear para cualquier otro cristal que exhiba actividad óptica y birrefringencia inducida.

Modelo experimental en incidencia oblicua o fuera de línea

El modelo experimental que se reporta sobre incidencia oblicua es presentado por Moura et al [6]. En esta técnica experimental consistió en un estudio experimental como teórico sobre la medida del coeficiente electro-óptico lineal empleando el espectro del infrarrojo. Este trabajo se fundamenta en un modelo teórico que relaciona el cálculo del coeficiente electro-óptico con la variación de la intensidad transmitida (*VIT*), que es provocado por la presencia de los coeficientes de transmisión y la birrefringencia inducida.

Figura 3.6: Esquema experimental para determinar el coeficiente electro-óptico, con incidencia oblicua.



Fuente: Moura, 2013 [6].

El montaje experimental que se observa en la figura (3.6), el cual, consistió en un fuente de luz de 780nm, incluidos un filtro de densidad neutra (DN), un polarizador y una fuente de voltaje que se conecta con la muestra, y para finalizar, un detector que tuvo la función de convertir los datos analógicos en digital. El arreglo experimental se relaciona con el modelo teórico, el cual, hace una descripción del comportamiento de la polarización a medida que recorre la luz por el montaje. Moura, emplea en el montaje un ángulo de incidencia de $34,5^\circ$ para abordar el problema.

El modelo teórico que plantea Moura, es un estudio físico-matemático que aborda los criterios del formalismo de Jones [23], coeficientes de transmisión [3], birrefringencia, coeficiente de electro-óptico y coeficiente de electro-giratorio. Lo que se discute en la técnica es encontrar el estado de polarización que recorre el haz dentro del cristal BTO.

3.2. Deducción de la expresión que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico en BTO

El coeficiente electro-óptico es un parámetro óptico muy importante en los cristales silenitas, esa dependencia va de la mano con el grupo de simetría, y la actividad óptica. En este trabajo, se realiza una deducción físico-matemática de la expresión para el cálculo de la variación de intensidad transmitida, que permite hallar indirectamente el coeficiente electro-óptico de un cristal silenita en configuración oblicua. En dicha configuración el haz polarizado linealmente cae oblicuamente sobre el cristal fotorrefractivo con simetría I-23 y en presencia de un campo eléctrico externo aplicado se genera birrefringencia lineal en el cristal. Esta birrefringencia actúa sobre las componentes del vector de polarización del haz incidente y genera en este un cambio en su propagación dentro del cristal. El objetivo de la deducción físico-matemática de la variación de intensidad transmitida es describir teóricamente el comportamiento del haz de luz durante su propagación en las interfaces involucradas en el modelo experimental propuesto en la figura (3.6) y hallar una expresión para el retardo de fase generado por el cristal y una expresión de intensidad que describa el haz una vez emerge del cristal fotorrefractivo que se encuentra en presencia de un campo eléctrico externo aplicado (E_{ap}).

Este modelo consta de cuatro fases que se distribuyen de la siguiente manera:

1. Determinar el estado de polarización del haz antes de entrar al cristal y después de entrar al cristal, lo que designaremos el estado de polarización en la interfaz aire-cristal.
2. Hallar una expresión para el estado de polarización en la interfaz cristal-aire, que encierra el estado de polarización dentro del cristal y fuera del cristal, que sufre cambios a la hora de aplicar un campo eléctrico externo.
3. Hallar una expresión para calcular la variación de intensidad del haz transmitido que emerge del cristal. Esta variación se debe a la birrefringencia inducida y a los coeficientes de transmisión en la configuración oblicua.
4. Por último, hallar una expresión para el retardo de fase en dependencia de los índices principales del cristal que se torna birrefringente en presencia de un campo eléctrico aplicado.

Las fases uno y dos dependen de los coeficientes de transmisión. Sin embargo, dentro de estas cuatro fases se aplican los conocimientos discutidos en las secciones (2.2.2 y 2.2.3) sobre la descripción de la polarización en forma matricial para determinar los estados de polarización.

3.2.1. Estado de polarización en la interfaz aire-cristal

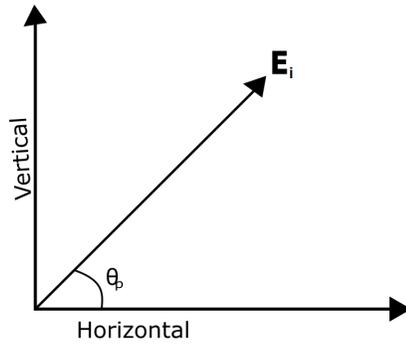
El comportamiento de un haz polarizado linealmente, antes de incidir oblicuamente en el cristal BTO, el cual, se expresa como el estado de polarización inicial (\vec{E}_i) por medio de formalismo de Jones. Este estado de polarización se describe por un ángulo de polarización θ_p , que se forma con la dirección de polarización del (\vec{E}_i) y plano de incidencia, (ver figura 3.7). De acuerdo con la ecuación (2.57), el estado de polarización inicial para el haz esta dado por:

$$\vec{E}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_p e^{i\delta_x} \\ \sin \theta_p e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Recordando los conceptos discutidos en la sección (2.2), las fases presentes en la polarización lineal son $2n\pi$, donde ($n = 0, 1, 2, 3$), por lo tanto, el estado de polarización inicial se expresa como:

$$\vec{E}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

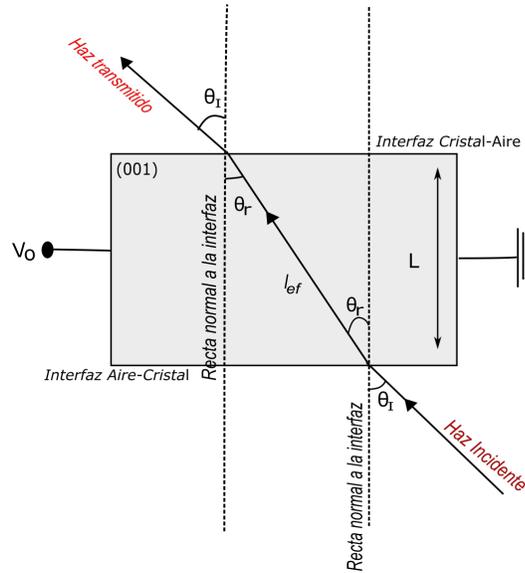
Figura 3.7: Ilustración de un rayo incidente formando un ángulo θ_p con la dirección horizontal.



Fuente: autor.

En la figura (3.8) se muestra la trayectoria de un haz incidente polarizado linealmente que incide oblicuamente sobre un cristal fotorrefractivo sometido a una diferencia de voltaje. Los ángulos presentes en la interfaz aire-cristal son θ_I y θ_r , respectivamente, y para la interfaz cristal-aire el ángulo de incidencia es θ_r y el ángulo transmitido es θ_I , respectivamente. Esta configuración es vista desde la cara (001). Hay que hacer una salvedad que la luz incide en la cara ($\bar{1}\bar{1}0$).

Figura 3.8: Trayectoria de un haz de luz al atravesar las interfaces aire-cristal y cristal-aire.



Fuente: autor.

Por tratarse de incidencia oblicua, la distancia que recorre el haz no es precisamente el grosor del cristal L , sino, una distancia que depende del ángulo transmitido que llamaremos como l_{ef} . Para encontrar la distancia recorrida por el haz dentro del cristal, se observa la figura (3.9), se obtiene:

$$l_{ef} = \frac{L}{\cos \theta_r} \quad (3.13)$$

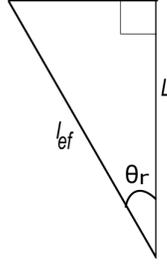
Teniendo en cuenta la ley de Snell ecuación (2.99), se expresa de la siguiente manera:

$$n_{aire} \sin \theta_I = n_{BTO} \sin \theta_r \quad (3.14)$$

Por lo tanto, l_{ef} esta dado por:

$$l_{ef} = \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_{aire} \sin \theta_I}{n_{BTO}} \right)^2}} \quad (3.15)$$

Figura 3.9: Descripción gráfica para determinar l_{ef} por medio de relaciones trigonométricas.



Fuente: autor.

En la interfaz aire-cristal, la luz incide oblicuamente en el cristal fotorrefractivo BTO, esta a su vez lleva un tipo de polarización establecido, y se vera modificado por la interfaz. La matriz de transmisión que involucra los coeficientes de transmisión tanto paralelo como perpendicular al plano de incidencia se representa de acuerdo con la expresión (2.128):

$$T_{a \rightarrow c} = \begin{bmatrix} t_{\parallel, a \rightarrow c} & 0 \\ 0 & t_{\perp, a \rightarrow c} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde los elementos presentes en la diagonal principal se denotan en virtud a las ecuaciones (2.110, 2.112), haciendo claridad que $n_1 = n_{aire}$, $n_2 = n_{BTO}$ y el ángulo $\theta_i = \theta_I$, por lo tanto, los coeficientes de transmisión en la interfaz se indican como:

$$t_{\parallel, a \rightarrow c} = \frac{2n_{aire}n_{BTO} \cos \theta_I}{n_{BTO}^2 \cos \theta_I + n_{aire} \sqrt{n_{BTO}^2 - n_{aire}^2} \sin^2 \theta_I} \quad (3.17)$$

$$t_{\perp, a \rightarrow c} = \frac{2n_{aire} \cos \theta_I}{n_{aire} \cos \theta_I + \sqrt{n_{BTO}^2 - n_{aire}^2} \sin^2 \theta_I} \quad (3.18)$$

Aplicando el formalismo de Jones, el estado de polarización en la interfaz aire-cristal ($\vec{E}_{a \rightarrow c}$) esta dado por:

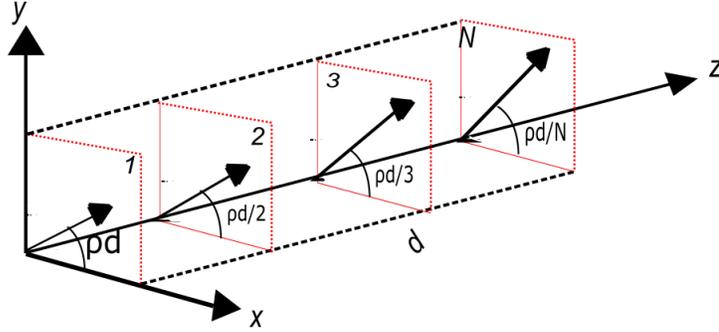
$$\vec{E}_{a \rightarrow c} = T_{a \rightarrow c} \vec{E}_i \quad (3.19)$$

3.2.2. Estado de polarización en la interfaz cristal-aire

Se analizará el cambio de polarización en presencia de un campo eléctrico aplicado, y la polarización del haz transmitido que emerge del cristal BTO, como se ilustra en la figura (3.8). Sin embargo, para determinar la estructura matricial del estado de polarización del haz dentro del cristal, se sabe por definición que el cristal de

$Bi_{12}TiO_{20}$ presentan actividad óptica y birrefringencia inducida debido a un campo eléctrico externo y provocan que se desencadene alteraciones en la polarización [6, 16].

Figura 3.10: El cristal BTO dividido en N -láminas con una longitud d .



Fuente: autor, adaptado de Yariv, 1984 [21].

El cristal se divide en N -Láminas delgadas ($N \rightarrow \infty$) de espesor $\Delta L = d/N$ como se muestra en la figura (3.10), donde d es la distancia que recorre la luz en el material. La m -ésima capa esta localizada a una distancia $L_m = m\Delta L$, para ($m = 1,2,3,\dots,N$). Entonces, se analiza la rotación del plano de polarización de las N -láminas con respecto a uno de los ejes fijos del laboratorio, por lo que el ángulo de rotación de la m -ésima capa esta dado por $\varphi_m = m\Delta\varphi$, donde $\Delta\varphi = \rho\Delta L$. El retardo de fase para la m -ésima capa se expresa como $\Gamma_m = m\Gamma/2N$. Los efectos simultáneos de la birrefringencia inducida y la actividad óptica bajo la presencia de un campo eléctrico aplicado en la m -ésima lámina esta dada por el producto matricial de las matrices (2.125 y 2.126), por lo tanto, la matriz de Jones de la m -ésima lámina sería:

$$M_m = M_{r_0}R(\varphi_m) \quad (3.20)$$

donde, M_{r_0} es la matriz de Jones de la birrefringencia para la m -ésima lámina y se denota como:

$$M_{r_0} = \begin{bmatrix} e^{-i(\frac{\Gamma}{2N})} \cos^2 \psi + e^{i(\frac{\Gamma}{2N})} \sin^2 \psi & -i \sin 2\psi \sin \left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \\ -i \sin 2\psi \sin \left(\frac{\Gamma}{2N}\right) & e^{i(\frac{\Gamma}{2N})} \cos^2 \psi + e^{-i(\frac{\Gamma}{2N})} \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

y $R(\varphi_m)$ es la matriz de la actividad óptica para la m -ésima lámina, se expresa como:

$$R(\varphi_m) = R\left(\frac{\rho d}{N}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\rho d}{N}\right) & -\sin\left(\frac{\rho d}{N}\right) \\ \sin\left(\frac{\rho d}{N}\right) & \cos\left(\frac{\rho d}{N}\right) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ρ es la actividad óptica por unidad de longitud donde se incluye el efecto electro-giratorio, (ecuación 2.154). La matriz de Jones para describir los efectos de la birrefringencia y la actividad óptica (M_T) para las N láminas del cristal se expresa como:

$$M_T = \prod_{m=1}^N M_m = \left[M_{r_0} R \left(\frac{\rho d}{N} \right) \right]^N \quad (3.23)$$

La expresión (3.23) es calculada analíticamente aplicando la identidad de Chebyshev [21], que se expresa de la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} \frac{A \sin(NK\Lambda) - \sin[(N-1)K\Lambda]}{\sin(K\Lambda)} & B \frac{\sin(NK\Lambda)}{\sin(K\Lambda)} \\ C \frac{\sin(NK\Lambda)}{\sin(K\Lambda)} & \frac{D \sin(NK\Lambda) - \sin[(N-1)K\Lambda]}{\sin(K\Lambda)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

con:

$$K\Lambda = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2}A + D \right) \quad (3.25)$$

La solución de la ecuación (3.23) con respecto a la identidad de Chebyshev, se calcula en el apéndice C.

$$M_T = \begin{bmatrix} \cos \Delta - i \sin \Psi \cos 2\psi \sin \Delta & -(\cos \Psi + i \sin \Psi \sin 2\psi) \sin \Delta \\ (\cos \Psi - i \sin \Psi \sin 2\psi) \sin \Delta & \cos \Delta - i \sin \Psi \cos 2\psi \sin \Delta \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Los ejes lento y rápido del cristal se encuentra a 45° ($\psi = 45^\circ$) con respecto a los ejes fijos del laboratorio o la dirección horizontal, por lo que la ecuación (3.26) nos queda:

$$M_T = \begin{bmatrix} \cos \Delta & -e^{i\Psi} \sin \Delta \\ e^{-i\Psi} \sin \Delta & \cos \Delta \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

donde:

$$\Delta = \sqrt{(\rho l_{ef})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2}$$

$$\tan \Psi = \frac{\Gamma}{2\rho l_{ef}}$$

Δ es el desfase total introducido por el producto del poder rotatorio por la distancia efectiva y el retardo de fase. Por último, se examina el comportamiento del haz transmitido en la frontera o la interfaz, (ver figura 3.11), empleando los coeficientes de transmisión, la matriz de transmisión para esta interfaz está dada por:

$$T_{c \rightarrow a} = \begin{bmatrix} t_{\parallel, c \rightarrow a} & 0 \\ 0 & t_{\perp, c \rightarrow a} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

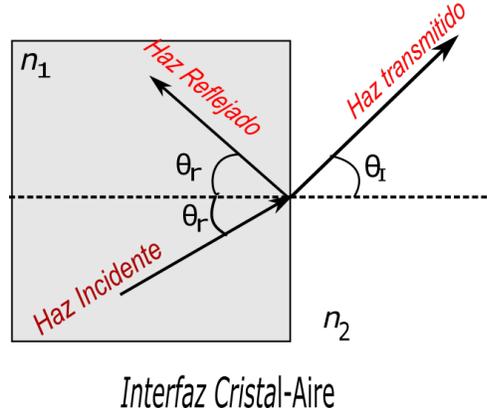
donde los elementos de esta matriz, se representan como:

$$t_{\parallel,c \rightarrow a} = \frac{2n_{\text{aire}}n_{BTO} \cos \theta_r}{n_{\text{aire}}^2 \cos \theta_r + n_{BTO} \sqrt{n_{\text{aire}}^2 - n_{BTO}^2} \sin^2 \theta_r} \quad (3.29)$$

$$t_{\perp,c \rightarrow a} = \frac{2n_{BTO} \cos \theta_r}{n_{BTO} \cos \theta_r + \sqrt{n_{\text{aire}}^2 - n_{BTO}^2} \sin^2 \theta_r} \quad (3.30)$$

Las ecuaciones (3.29) y (3.30) se infieren de las ecuaciones (2.110 y 2.112), para este caso n_1 y n_2 son los índices de refracción del cristal (n_{BTO}) y del aire (n_{aire}), respectivamente. Conforme a la figura (3.11), el ángulo de incidencia en la interfaz cristal-aire es igual al ángulo de refracción ($\theta_i = \theta_r$) determinado en la interfaz aire-cristal.

Figura 3.11: Ilustración de la interfaz cristal-aire, $n_1=n_{BTO}$ y $n_2=n_{\text{aire}}$.



Fuente: autor.

El estado de polarización del haz que emerge del cristal BTO (\vec{E}_{ec}), se expresa por medio del formalismo de Jones como:

$$\vec{E}_{ec} = T_{c \rightarrow a} M_T \vec{E}_{a \rightarrow c} \quad (3.31)$$

Se sustituye la ecuación (3.19) en la expresión (3.31), obteniendo:

$$\vec{E}_{ec} = T_{c \rightarrow a} M_T T_{a \rightarrow c} \vec{E}_i \quad (3.32)$$

Se opera matricialmente la ecuación (3.32), para obtener así la expresión del estado de polarización que emerge del cristal (\vec{E}_{ec}):

$$\mathbf{E}_{ec} = \begin{bmatrix} \cos \Delta t_{\parallel,c \rightarrow a} t_{\parallel,a \rightarrow c} \cos \theta_p - e^{i\Psi} \sin \Delta t_{\parallel,c \rightarrow a} t_{\perp,a \rightarrow c} \sin \theta_p \\ e^{-i\Psi} \sin \Delta t_{\perp,c \rightarrow a} t_{\parallel,a \rightarrow c} \cos \theta_p + \cos \Delta t_{\perp,c \rightarrow a} t_{\perp,a \rightarrow c} \sin \theta_p \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

3.2.3. Variación de intensidad transmitida (*VIT*)

Para conocer la variación de intensidad transmitida (*VIT*), se necesita conocer la intensidad transmitida que se define como la magnitud de la componente del vector de Poynting normal a la interfaz cristal-aire, la intensidad que mide el detector en base a la ecuación (2.40), se expresa como:

$$I_{Trans} = \frac{1}{2} \frac{n_{BTO}}{Z_0} |\vec{E}_{ec}|^2 \cos \theta_r \quad (3.34)$$

donde, $Z_0 = 377\Omega$ se define como la impedancia en el espacio libre. La expresión (3.34), es la intensidad transmitida que llega al detector en forma oblicua con relación al ángulo de refracción (θ_r) determinado en la interfaz aire-cristal. El coseno presente en esta expresión hace referencia a la potencia promedio por unidad de área de la interfaz cristal-aire.

La *VIT* varía con el campo eléctrico aplicado que produce la birrefringencia lineal y la diferencia de los coeficientes de transmisión debido a la incidencia oblicua. Esta variación de intensidad transmitida por el cristal; se define como la relación entre la intensidad del haz con un campo eléctrico aplicado diferente de cero [$I_{Trans}(E_{ap} \neq 0)$] y la intensidad del haz sin existencia de un campo eléctrico aplicado [$I_{Trans}(E_{ap} = 0)$], por lo que se obtiene [6] :

$$VIT = \left[\frac{I_{Trans}(E_{ap} \neq 0)}{I_{Trans}(E_{ap} = 0)} - 1 \right] * 100 \quad (3.35)$$

Se sustituye la ecuación (3.34) en la ecuación (3.35), encontrando una expresión para la *VIT* en términos del estado de polarización del haz que emerge del cristal de BTO.

$$VIT = \left[\frac{|\vec{E}_{ec}(E_{ap} \neq 0)|^2}{|\vec{E}_{ec}(E_{ap} = 0)|^2} - 1 \right] * 100 \quad (3.36)$$

La variación de intensidad transmitida requiere de los parámetros controlados experimentales como son el campo eléctrico aplicado, ángulo de incidencia, ángulo de polarización de entrada y la longitud de onda, estos parámetros dan un aporte muy importante en el cálculo del coeficiente electro-óptico efectivo. La *VIT* presenta una proporcionalidad con el ángulo de incidencia ofreciendo así un crecimiento monótono que se observará en el capítulo 4.

3.2.4. Expresión del retardo de fase con dependencia con los índices lento y rápido para incidencia oblicua

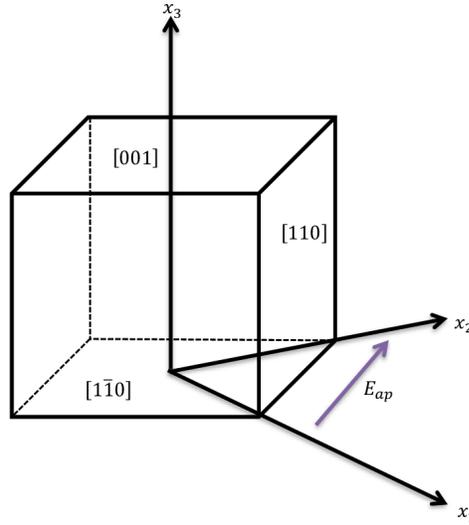
Para emplear la expresión de la *VIT*, se tiene que conocer el retardo de fase, expresión (2.75); que requiere calcular la posición de los ejes lento y rápido del cristal

birrefringente. Para determinar esta orientación se emplea el concepto del elipsoide de índices, ya discutida en la sección (2.3.1). Se entiende que el cristal BTO es isotrópico cuando no se aplica una fuerza externa, en este caso un campo eléctrico externo ($E_{ap} = 0$), reflejando un único índice de refracción en todas direcciones, por lo que el elipsoide de índices muestra simetría de esfera, y cuya expresión se representa como:

$$\frac{x_1^2}{n_{BTO}^2} + \frac{x_2^2}{n_{BTO}^2} + \frac{x_3^2}{n_{BTO}^2} = 1 \quad (3.37)$$

donde n_{BTO} es el índice de refracción del cristal con $E_{ap} = 0$. Por otro lado, si se aplica un campo eléctrico externo dentro del cristal BTO, éste exhibe birrefringencia lineal. Los planos cristalográficos que se emplean en el cristal BTO se relacionan con el campo eléctrico aplicado y el haz incidente, y se denotan de la siguiente manera: la luz incide en el plano $(\bar{1}\bar{1}0)$ y el campo eléctrico se aplica en el plano $(1\bar{1}0)$, y el plano (001) es perpendicular al plano de incidencia como se muestra en la figura (3.12). En la ilustración se indican los ejes cristalográficos (x_1 , x_2 y x_3) y el campo eléctrico aplicado se transmite por el plano x_1x_2 .

Figura 3.12: Orientación del campo eléctrico aplicado (\vec{E}_{ap}) con relación a los ejes cristalográficos (x_1 , x_2 y x_3)



Fuente: autor, adaptado de papazoglou [17].

El \vec{E}_{ap} se representa vectorial como:

$$\vec{E}_{ap} = \frac{E_{ap}}{\sqrt{2}}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \quad (3.38)$$

De este trabajo se sigue el enfoque que nos explican las referencias [1, 7, 21] en relación al comportamiento del elipsoide de índices con respecto a la presencia de un E_{ap} , por lo que el elipsoide de índices en presencia de un campo eléctrico aplicado se expresa en términos de los ejes cristalográficos como:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n_{BTO}^2} + \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_1 \right) x_1^2 + \left(\frac{1}{n_{BTO}^2} + \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_2 \right) x_2^2 + \\ & \left(\frac{1}{n_{BTO}^2} + \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_3 \right) x_3^2 + 2x_2x_3\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_4 + 2x_1x_3\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_5 \\ & + 2x_2x_1\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_6 = 1 \quad (3.39) \end{aligned}$$

El cambio de índice debido al campo eléctrico aplicado y asociando el efecto electro-óptico lineal, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_1 \\ \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_2 \\ \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_3 \\ \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_4 \\ \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_5 \\ \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_{ap}}{\sqrt{2}} \\ \frac{E_{ap}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Se obtiene la siguiente expresión que asocia el elipsoide de índices con el campo eléctrico y el efecto electro-óptico lineal:

$$\frac{x_1^2}{n_{BTO}^2} + \frac{x_2^2}{n_{BTO}^2} + \frac{x_3^2}{n_{BTO}^2} + 2\frac{E_{ap}}{\sqrt{2}}r_{41}x_2x_3 + 2\frac{E_{ap}}{\sqrt{2}}r_{41}x_1x_3 = 1 \quad (3.41)$$

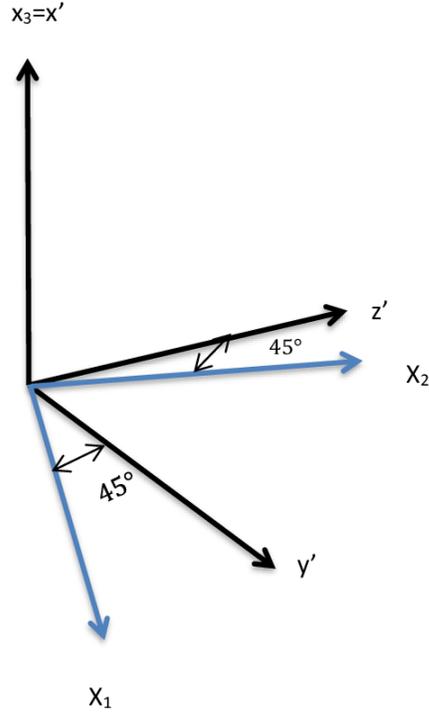
Ahora, se aplica una rotación a los ejes x_1 , x_2 y x_3 para los ejes x' , y' y z' en torno a x_3 , a 45° , mostrado en la figura (3.13). De esta forma, la transformaciones estan dada por:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - z') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z') \\ x_3 = x' \end{cases} \quad (3.42)$$

Se reemplazan las ecuaciones (3.42) en (3.41), se obtiene:

$$\frac{x'^2}{n_{BTO}^2} + \frac{y'^2}{n_{BTO}^2} + \frac{z'^2}{n_{BTO}^2} + 2r_{41}E_{ap}x'y' = 1 \quad (3.43)$$

Figura 3.13: Sistema de coordenadas rotadas a 45° , configuración vista desde la cara $(\bar{1}\bar{1}0)$



Fuente: autor.

Se hace una rotación del sistema de coordenadas a 45° con respecto a z' como se ilustra en la figura (3.14), esta configuración es vista en la cara $(\bar{1}\bar{1}0)$ cara opuesta a la cara (110) . Se tienen las siguientes transformaciones:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) \\ z' = z \end{cases} \quad (3.44)$$

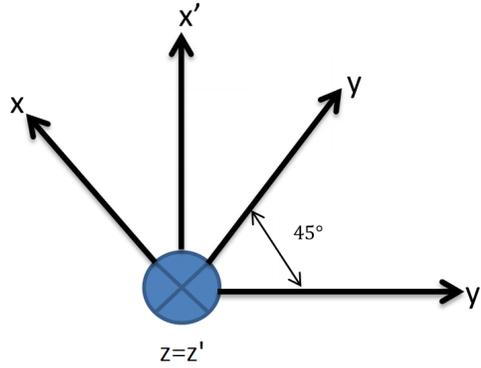
se sustituye la ecuación (3.44) en la expresión (3.43), y se obtiene:

$$\left(\frac{1}{n_{BTO}^2} - r_{41}E_{ap} \right) x^2 + \left(\frac{1}{n_{BTO}^2} + r_{41}E_{ap} \right) y^2 + \frac{z^2}{n_{BTO}^2} = 1 \quad (3.45)$$

Se compara la ecuación (3.14) con la ecuación (2.141), para obtener:

$$\begin{cases} \frac{1}{n_x^2} = \left(\frac{1}{n_{BTO}^2} - r_{41} E_{ap} \right) \\ \frac{1}{n_y^2} = \left(\frac{1}{n_{BTO}^2} + r_{41} E_{ap} \right) \\ \frac{z^2}{n_z^2} = \frac{1}{n_{BTO}^2} \end{cases} \quad (3.46)$$

Figura 3.14: Sistema de coordenadas rotadas a 45° , configuración vista desde la cara $(\bar{1}\bar{1}0)$



Fuente: autor.

Se aplica álgebra básica y los índices de refracción para las nuevas coordenadas son:

$$\begin{cases} n_x = n_{BTO}(1 - n_{BTO}^2 r_{41} E_{ap})^{-\frac{1}{2}} \\ n_y = n_{BTO}(1 + n_{BTO}^2 r_{41} E_{ap})^{-\frac{1}{2}} \\ n_z = n_{BTO} \end{cases} \quad (3.47)$$

Para el cristal BTO, se tiene que r_{41} oscila en valores de $5 \times 10^{-12} pm/V$, por lo que el término $n_{BTO}^2 r_{41} E_{ap}$ es del orden de 10^{-5} , por ende es mucho menor que 1, esto fue comprobado numéricamente y experimentalmente [6]. Luego, se aplica una expansión de primer orden a la expresión dentro de los paréntesis presentes en la ecuación (3.47), por lo tanto, la ecuación (3.47) se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} n_x = n_{BTO} + \frac{1}{2} n_{BTO}^3 r_{41} E_{ap} \\ n_y = n_{BTO} - \frac{1}{2} n_{BTO}^3 r_{41} E_{ap} \\ n_z = n_{BTO} \end{cases} \quad (3.48)$$

Se denota $\frac{1}{2} n_{BTO}^3 r_{41} E_{ap}$.

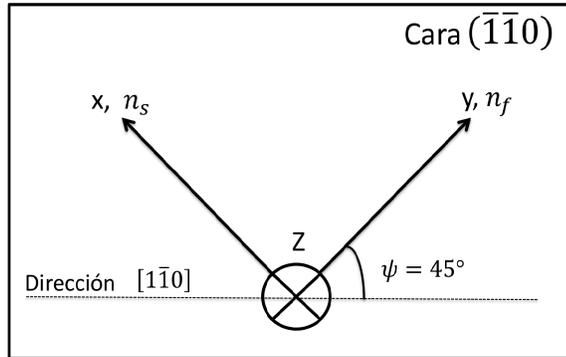
$$\Delta n = \frac{1}{2} n_{BTO}^3 r_{41} E_{ap} \quad (3.49)$$

La expresión (3.49), nos indica la variación del índice de refracción debido al campo eléctrico externo aplicado. Por lo tanto, los índices (n_x , n_y y n_z) con respecto a esta variación se expresan:

$$\begin{cases} n_x = (n_{BTO} + \Delta n) \\ n_y = (n_{BTO} - \Delta n) \\ n_z = n_{BTO} \end{cases} \quad (3.50)$$

Un cristal BTO se comporta como una placa birrefringente bajo la acción de un campo eléctrico externo, en este caso, sus índices de refracción principales (n_f y n_s) o (n_e y n_o) se exhiben en la figura (3.15). En esta figura, la cara $[\bar{1}\bar{1}0]$ es paralela a los ejes x e y , acorde a la ecuación (3.50). Por el eje x se propaga el rayo lento debido a que presenta un índice de refracción mayor que en el eje y , por consecuencia, $n_x = n_s$ y $n_y = n_f$, respectivamente. En la figura (3.15) los ejes lento y rápido del cristal birrefringente forman un ángulo $\psi = 45^\circ$ con la dirección $[\bar{1}\bar{1}0]$.

Figura 3.15: Orientación de los ejes lento y rápido del cristal BTO.



Fuente: autor.

La ecuación del elipsoide de índices del BTO con relación a la ecuación (3.45), y teniendo en cuenta la variación del índice del BTO (Δn) con respecto a los ejes x e y , se convierte en:

$$\frac{x^2}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{y^2}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{z^2}{n_{BTO}^2} = 1 \quad (3.51)$$

Teniendo presente lo estudiado en la sección (2.3.1), los índices de refracción del cristal anisotrópico se sitúan paralelamente a los ejes principales de la elipse. Se emplean coordenadas esféricas para determinar la posición de los índices lento o rápido en la elipse. Por lo tanto, la ecuación (3.51) en términos de coordenadas esféricas se expresa

como:

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{n_{BTO}^2} = 1 \quad (3.52)$$

donde r es una distancia desde el centro hasta un punto cualquiera de la elipsoide, θ es el ángulo polar que va $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ y ϕ es el ángulo azimutal que va $0 \leq \phi \leq 360^\circ$. Se despeja r y se obtiene:

$$r(\theta, \phi) = \left[\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_{BTO}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

En este caso, θ es el ángulo de refracción (θ_r) en la interfaz aire-cristal. Por geometría del problema la dirección de propagación del haz en incidencia oblicua esta entre $\phi = 0$ y $\phi = 135^\circ$, debido a la posición de los índices de refracción del cristal birrefringente en la elipsoide.

En este trabajo por ser una configuración de incidencia oblicua, el retardo de fase (ecuación 2.75) para cualquier ángulo de incidencia (θ_I), y teniendo presente los índices de refracción para las direcciones de polarización paralelas a los ejes lento y rápido del cristal birrefringente, se expresan como:

$$\Gamma = \frac{2\pi l}{\lambda} [r(\theta = 90^\circ - \theta_r, \phi = 0) - r(\theta = 90^\circ + \theta_r, \phi = 90^\circ)] \quad (3.54)$$

Para este caso, l es igual a l_{ef} , definida en la ecuación (3.15). Por último, se hace uso de identidades trigonométricas básicas y el resultado del retardo de fase se expresa como:

$$\Gamma = \frac{2\pi l_{ef}}{\lambda} \left\{ \left[\frac{\cos^2 \theta_r}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{\sin^2 \theta_r}{n_{BTO}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{\cos^2 \theta_r}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{\sin^2 \theta_r}{n_{BTO}^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.55)$$

Si se quiere estudiar para un ángulo de refracción $\theta_r = 0$, el retardo de fase se denota como:

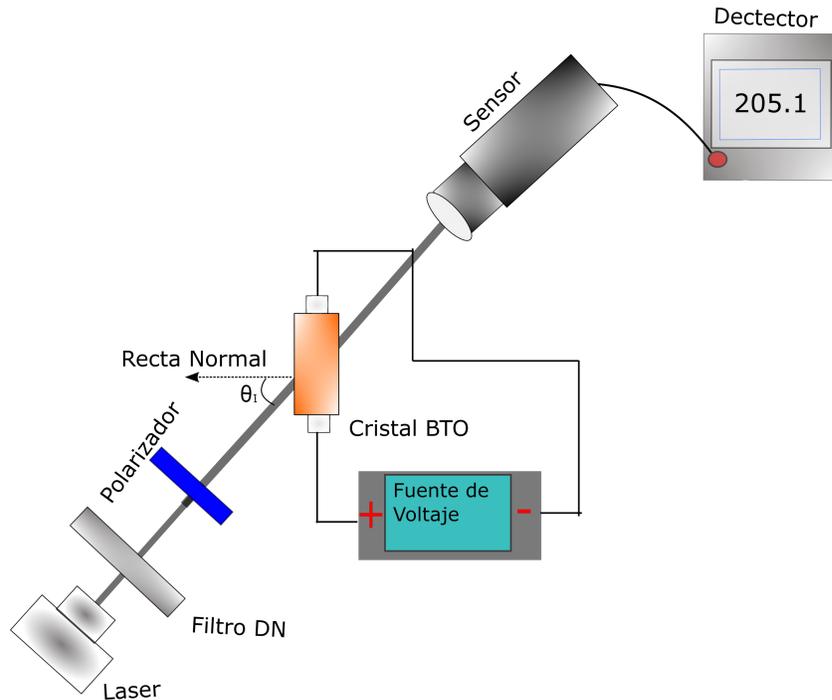
$$\Gamma = \frac{2\pi l_{ef}}{\lambda} [(n_{BTO} + \Delta n) - (n_{BTO} - \Delta n)] \quad (3.56)$$

En el caso que se desea trabajar con incidencia normal, la distancia que recorre el haz es el mismo espesor del material, por lo tanto, el retardo de fase para incidencia normal es:

$$\Gamma = \frac{4\pi L}{\lambda} \Delta n \quad \text{Donde } \Delta n = 0,5n_{BTO}^3 r_{ef} E_{ap} \quad (3.57)$$

3.3. Montaje experimental para determinar la VIT

Figura 3.16: Esquema experimental con incidencia oblicua, para medir la VIT.



Fuente: autor.

El montaje experimental que se muestra en la figura (3.16); se utiliza para medir la variación de intensidad transmitida y por consecuencia el coeficiente electro-óptico efectivo. El arreglo experimental se compone de un láser de He-Ne con una longitud de onda de 632.9nm que se encuentra polarizado linealmente, este incide sobre un filtro atenuador o filtro de densidad neutra (DN) que permite controlar la intensidad del haz incidente, luego, interactúa con un polarizador fijo que controla la dirección de polarización del haz incidente, también, el haz que emerge del polarizador incide sobre una de las caras del cristal silenita formando un ángulo θ_I con respecto a la normal de la cara incidente del cristal. Cabe señalar, que para producir el campo eléctrico externo se hace uso de una fuente de voltaje que viene conectado al cristal BTO, y para finalizar, un sensor que esta conectado a un detector que muestra los valores de intensidad transmitida.

Este montaje tiene como ventaja la no detección de haces reflejados. Para hacer la medición de la intensidad transmitida se inicia con la fuente de voltaje apagada $V_{ap} = 0$ y permanece así durante un intervalo de tiempo, se registra esta intensidad

transmitida para voltaje cero. Seguidamente de este intervalo de tiempo; se enciende la fuente de voltaje y se aplica una diferencia de potenciales durante un transcurso de tiempo, este intervalo de tiempo es crucial para que la intensidad alcance una condición de estabilidad y no muestre discrepancias a la hora de determinar la VIT , estas discrepancias son ocasionadas por un campo eléctrico de carga espacial [6, 12]. De igual manera se sensa la intensidad transmitida en presencia de un campo eléctrico constante. Una vez se tienen los dos valores $I_{Trans}(E_{ap} \neq 0)$ y $I_{Trans}(E_{ap} = 0)$ se evalúa la VIT para dicho voltaje aplicado, según la ecuación (3.36).

Capítulo 4

Análisis gráfico de la expresión que permite el cálculo del coeficiente electro-óptico en incidencia oblicua

4.1. Gráfica teórica de la VIT versus campo eléctrico aplicado para una longitud de onda de $780nm$

Para evaluar el procedimiento establecido en la sección (3.2), se realiza una réplica de la curva teórica del trabajo de Moura et al [6], sobre el cálculo del coeficiente electro-óptico lineal en un cristal BTO con respecto a la variación de intensidad transmitida en función del campo eléctrico aplicado para $\lambda = 780nm$. Los parámetros ópticos utilizados son los de la tabla (4.1).

Parámetro	Símbolo	Valor del parámetro
Índice de refra. del BTO	n_{BTO}	2.52
Coef. electro-giratorio	ξ_{41}	$0,5pm/V$
Actividad óptica sin campo	ρ_0	$4.3 \text{ } \circ/mm$
Coef. electro-óptico	r_{ef}	$5,5pm/V$
Grosor de la muestra	L	3.6 mm

Tabla 4.1: Parámetros del BTO para una longitud de onda de $780nm$ [6].

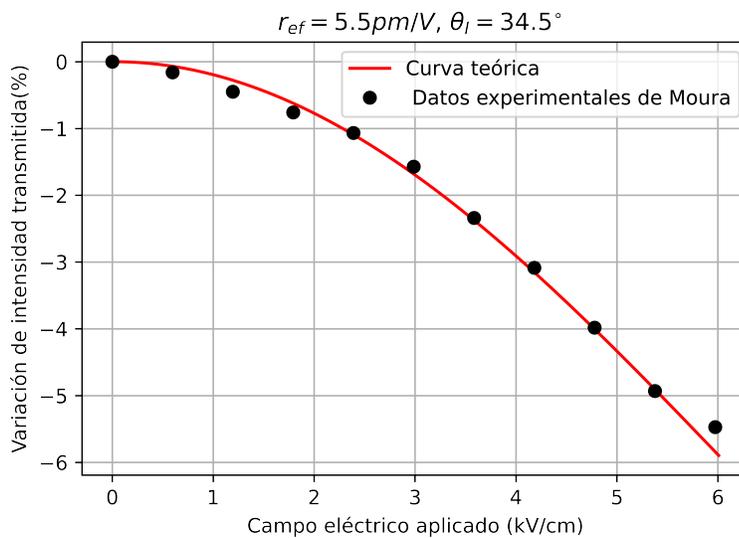
La curva teórica de la figura (4.1), es obtenida implementando un algoritmo en la herramienta computacional Python, fundamentada en la ecuación (3.35). Los círculos

en negro son los datos experimentales (ver tabla, 4.2), obtenidos en la medición de la *VIT* versus campo eléctrico aplicado en configuración de incidencia oblicua, facilitados por el Ph.D Andrés de Lima Moura. Para obtener la curva teórica en la figura (4.1) y ajustarla con los datos experimentales, se estableció un $r_{ef} = 5,5 \text{ pm/V}$, magnitud que corrobora lo establecido por el modelo tanto experimental y teórico de Moura.

Variación de int. transmitida (%)	Campo eléctrico aplicado (kV/cm)
0	0
-0.16	0.597
-0.450	1.19
-0.758	1.792
-1.06746	2.3894
-1.57264	2.98685
-1.79211	3.584
-3.0956	4.18
-3.98296	4.77
-4.93	5.37
-5.471	5.97371

Tabla 4.2: Datos experimentales que relacionan la variación de intensidad transmitida con respecto al campo eléctrico aplicado, empleando una longitud de onda de 780 nm .

Figura 4.1: Variación de intensidad transmitida en función del campo eléctrico aplicado, con un $\theta_p=0^\circ$ y $r_{ef}=5,5 \text{ pm/V}$.



Fuente: autor

Para esta gráfica, se implementó teóricamente un rango mensurable de campo eléctrico de 0 kV/cm a 6 kV/cm. Esta gráfica muestra que la *VIT* presenta una variación decreciente debido a la birrefringencia lineal y a la diferencia de los coeficientes transmisión. El valor de $r_{ef} = 5,5$ pm/V para $\lambda = 780$ nm se encuentra dentro del valor del coeficiente electro-óptico lineal para un cristal BTO.

4.2. Gráfica teórica de la *VIT* versus campo eléctrico aplicado para una longitud de onda de $\approx 632,9$ nm

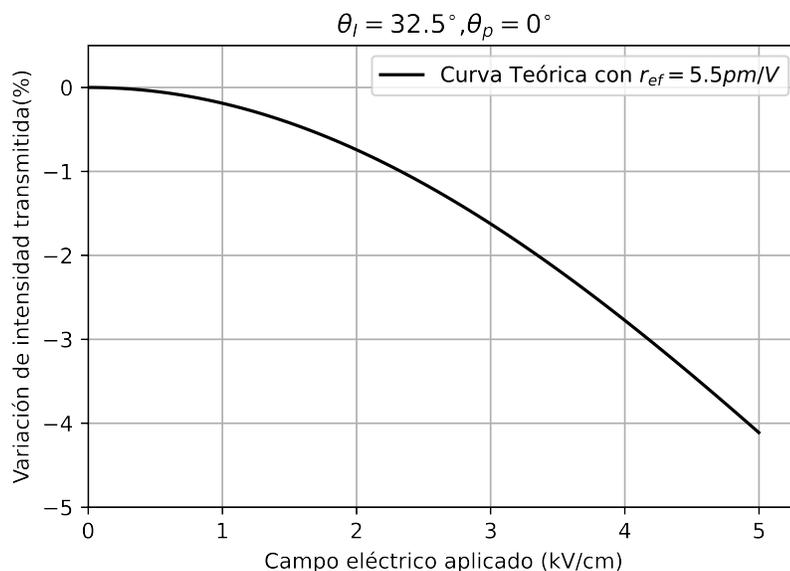
Ya demostrada la eficacia del procedimiento de la sección (3.2) y del algoritmo implementado, se procedió aplicar el cálculo del r_{ef} , para el cristal BTO con el que cuenta el laboratorio de metrología óptica de la universidad de Pamplona. Se dispuso de los siguientes datos como: un láser de 632,9 nm polarizado linealmente y un cristal BTO de dimensiones $(3 \times 10 \times 10) \text{mm}^3$ en que se configuran las siguientes direcciones cristalográficas denotados como $[\bar{1}\bar{1}0]$ dirección donde incide la luz, $[1\bar{1}0]$ dirección donde se aplica el campo eléctrico y la dirección $[001]$, el cual, es perpendicular al plano de incidencia. Sin embargo, los parámetros ópticos que se abordaron en la figura (4.2) se exhiben en la tabla (4.3), todos estos factores proceden de estudios y publicaciones en relación al cristal de óxido de bismuto de titanio con $\lambda = 632,9$ nm.

Parámetros	Símbolo	Valor del parámetro	Referencia
Índice de refra. del BTO	n_{BTO}	2.56	[32, 35]
Coef electro-giratorio	ξ_{41}	0,35pm/V	[35]
Actividad óptica sin campo	ρ_0	6.3 o/mm	[5, 32, 37]
Coficiente Electro-óptico	r_{ef}	5,5pm/V	[17, 37]

Tabla 4.3: *Parámetros ópticos del BTO para una longitud de onda de 632,9 nm.*

En la figura (4.2) se exhibe el comportamiento de la *VIT* en relación con el campo eléctrico externo aplicado. El ángulo de incidencia es $\theta_I=32,5^\circ$, un ángulo de polarización $\theta_p = 0^\circ$ y un $r_{ef} = 5,5$ pm/V, valor promedio reportado por las referencias [12, 17]. En este caso, la *VIT* decrece a medida que se aumenta el campo eléctrico aplicado. La variación de intensidad transmitida oscila entre valores de 0 a $\approx 4,5\%$ con un rango de campo eléctrico aplicado mensurable entre 0kV/cm y 5kV/cm .

Figura 4.2: Variación de intensidad transmitida en función del campo eléctrico aplicado, para una $\lambda = 632,9nm$.

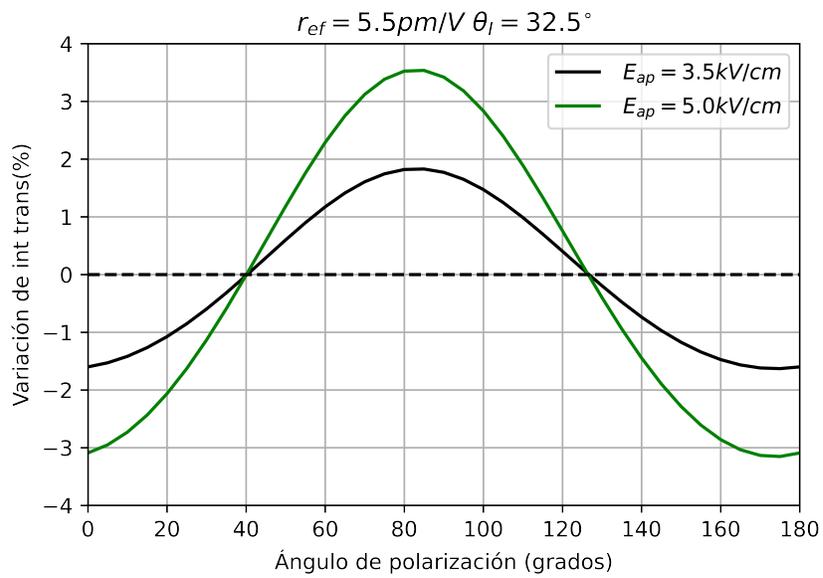


Fuente: autor.

4.3. Gráfica de VIT versus ángulo de polarización con una longitud de onda de $\approx 632,9nm$

En la figura (4.3), se muestra el comportamiento de la VIT con respecto al ángulo de polarización, variando de 0° hasta 180° y empleando campos eléctricos aplicado entre $3,5kV/cm$ y $5,0 kV/cm$. Para esta figura se fija un $\theta_I = 32,5^\circ$ y $r_{ef} = 5,5 pm/V$, y se observa que la variación de intensidad transmitida depende en gran medida de la dirección del ángulo de polarización (θ_p), y sobre todo varía desde -4% a 4% . Además los valores de la VIT que son cercanos a cero son independientes del campo eléctrico aplicado.

Figura 4.3: Variación de intensidad transmitida en función del ángulo de polarización.



Fuente: autor.

En la figura (4.3), las curvas son las predicciones deducidas de la ecuación (3.36) empleando el valor de $r_{ef} = 5,5 \mu\text{m}/\text{V}$.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

5.1. Conclusiones

- ☞ Teniendo en cuenta la birrefringencia inducida generada en un cristal fotorrefractivo debido a la aplicación de un campo eléctrico externo y la diferencia en los coeficientes de transmisión para polarización paralela y perpendicular al plano de incidencia, se desarrolló un procedimiento que permite determinar el coeficiente electro-óptico efectivo r_{ef} en un material fotorrefractivo. Este procedimiento busca medir la variación de la intensidad transmitida debido al campo eléctrico externo aplicado al cristal. Este método se puede aplicar a cualquier material fotorrefractivo que presente birrefringencia inducida producto de un campo eléctrico externo.
- ☞ El procedimiento propuesto se aplicó a un BTO para longitudes de onda de 780 nm y 632,9 nm. Los resultados mostrados en la figura (4.1) proponen un $r_{ef} = 5,5$ pm/V para el ajuste de la curva teórica con los datos experimentales suministrados por el Ph.D. Andrés de Lima Moura de la Universidad Federal Alagoas de Brasil, al cual expresamos nuestro agradecimiento.
- ☞ Para el cálculo indirecto del r_{ef} a través de la VIT vs campo eléctrico aplicado, mostrado en las figuras (4.1) y (4.2), se tuvieron en cuenta los efectos piezoeléctrico inverso y foto-elástico, los cuales provocan deformaciones en la muestra, por causa del campo eléctrico aplicado, el cual a su vez genera alteraciones en el índice de refracción del material. Teniendo lo anterior presente, es notable que la curva teórica se ajusta de manera aproximada a la curva de los datos experimentales, en el caso de la figura (4.1).
- ☞ El valor obtenido r_{ef} para el cristal BTO, para $\lambda = 632,9\text{nm}$, se obtuvo utilizando parámetros físicos del cristal reportados en [12, 17]

☞ Para la medición del r_{ef} , se puede utilizar cualquier ángulo de incidencia ($\theta_I \neq 0$).

5.2. Perspectivas

- ☛ Revisar el comportamiento del VIT de manera experimental para el cristal BTO con una longitud de onda de 632.9nm y comparar con el desarrollo teórico.
- ☛ Se sugiere continuar el estudio con otros cristales silenitas como el *BSO* y *BGO*.
- ☛ Se propone un análisis tanto experimental como teórico, para comprobar si existen alteraciones en el r_{ef} al variar el ángulo de incidencia.

Bibliografía

- [1] A. Yariv, P. Yeh, and A. Yariv, *Photonics: optical electronics in modern communications*, vol. 6. Oxford University Press New York, 2007.
- [2] D. H. Goldstein, *Polarized light*. CRC press, 2017.
- [3] G. R. Fowles and D. W. Lynch, *Introduction to Modern Optics*. Dover publications inc, 1968.
- [4] K. K. Sharma, *Optics: principles and applications*. Elsevier, 2006.
- [5] M. P. Petrov, S. I. Stepanov, and A. V. Khomenko, *Photorefractive crystals in coherent optical systems*, vol. 59. Springer, 1991.
- [6] A. Moura, A. Canabarro, W. Soares, E. de Lima, J. Carvalho, and P. dos Santos, “Experimental determination of effective electro-optic coefficient and electric screening field factor in the electrically induced birefringent $Bi_{12}TiO_{20}$ crystal by using an oblique incidence setup,” *Optics Communications*, vol. 295, pp. 197–202, 2013.
- [7] J. Frejlich, *Photorefractive materials: fundamental concepts, holographic recording and materials characterization*. John Wiley & Sons, 2007.
- [8] S. Riehemann, F. Rickermann, V. Volkov, A. Egorysheva, and G. Von Bally, “Optical and photorefractive characterization of BTO crystals doped with Cd, Ca, Ga, and V,” *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, vol. 6, no. 02, pp. 235–249, 1997.
- [9] V. Tassev, G. Diankov, and M. Gospodinov, “Optical activity of doped sillenite crystals,” *Materials research bulletin*, vol. 30, no. 10, pp. 1263–1267, 1995.

-
- [10] M. Henry, S. Mallick, D. Rouède, L. Celaya, and A. Garcia Weidner, “Propagation of light in an optically active electro-optic crystal of $Bi_{12}SiO_{20}$: Measurement of the electro-optic coefficient,” *Journal of applied physics*, vol. 59, no. 8, pp. 2650–2654, 1986.
- [11] F. Vachss and L. Hesselink, “Measurement of the electrogyratory and electro-optic effects in BSO and BGO,” *Optics communications*, vol. 62, no. 3, pp. 159–165, 1987.
- [12] I. de Oliveira, T. O. dos Santos, J. F. Carvalho, and J. Frejlich, “Electro-optic coefficient and wavelength dispersion in sillenite crystals,” *Applied physics B*, vol. 105, no. 2, pp. 301–304, 2011.
- [13] A. Fox and T. Bruton, “Electro-optic effects in the optically active compounds $Bi_{12}TiO_{20}$ and $Bi_{40}Ga_{20}O_{63}$,” *Applied Physics Letters*, vol. 27, no. 6, pp. 360–362, 1975.
- [14] P. Bayvel, “Electro-optic coefficient in bso-type crystals with optical activity measurement and application to sensors,” *sensors and Actuators*, vol. 16, no. 3, pp. 247–254, 1989.
- [15] N. Deliolanis, E. Vanidhis, and N. A. Vainos, “Dispersion of electrogyration in sillenite crystals,” *Applied Physics B*, vol. 85, no. 4, pp. 591–596, 2006.
- [16] W. Laguado, “Caracterización óptica de cristales fotorrefractivos $Bi_{12}SiO_{20}$: Coeficiente electro-óptico, actividad óptica y coeficiente de absorción,” Tesis de Pregrado, Departamento de Física, Universidad de Pamplona, 2019.
- [17] D. Papazoglou, A. Apostolidis, and E. Vanidhis, “Index of refraction, optical activity and electro-optic coefficient of bismuth titanium oxide ($Bi_{12}TiO_{20}$),” *Applied Physics B*, vol. 65, no. 4, pp. 499–503, 1997.
- [18] G. R. Fowles, *Introduction to modern optics*. Courier Corporation, 1989.
- [19] F. Torrijos, *Propiedades de materiales mediante el análisis de radiación aleatoria*. PhD thesis, Universidad politécnica de Madrid, 2014.
- [20] R. C. Sánchez, *Diseño y caracterización de un esparciámetro de resolución angular*. PhD thesis, Instituto politécnico nacional, centro de investigación en ciencias aplicadas y tecnología avanzada, unidad Querétaro, 2017.
- [21] A. Yariv and P. Yeh, *Optical waves in crystals*, vol. 5. Wiley New York, 1984.
- [22] E. Hecht, *Optics*. Pearson education, Addison-Wesley, 2002.
- [23] R. C. Jones, “A new calculus for the treatment of optical systems i. description and discussion of the calculus,” *Josa*, vol. 31, no. 7, pp. 488–493, 1941.
-

-
- [24] E. Collett, "Field guide to polarization, spie field guides, vol," *FG05. SPIE*, vol. 57, 2005.
- [25] J. C. Gutiérrez, *Análisis de polarización de la interacción luz materia en medios anisotrópicos*. PhD thesis, Centro de investigación en óptica A.C, sede León, Guanajuato, 2008.
- [26] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 3rd ed.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [27] S. C. Zílio, *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. Instituto de Física de São Carlos, 2009.
- [28] P. Dennerly and A. Krzywicki, *Mathematics for physicists*. Courier Corporation, 2012.
- [29] J. F. Nye *et al.*, *Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices*. Oxford university press, 1985.
- [30] S. Stepanov, S. M. Shandarov, and N. D. Khatkov, "Photoelastic contribution to the photorefractive effect in cubic crystals," *Soviet Physics, Solid State*, vol. 29, no. 10, pp. 1754–1756, 1987.
- [31] A. Efremidis, N. Deliolanis, C. Manolikas, and E. Vanidhis, "Dispersion of electro-optic coefficients in sillenite crystals," *Applied Physics B*, vol. 95, no. 3, pp. 467–473, 2009.
- [32] F. Mersch, K. Buse, W. Sauf, H. Hesse, and E. Krätzig, "Growth and characterization of undoped and doped $Bi_{12}TiO_{20}$ crystals," *physica status solidi (a)*, vol. 140, no. 1, pp. 273–281, 1993.
- [33] S. M. Efendiev, T. Kulieva, V. Lomonov, M. Chiragov, M. Grandolfo, and P. Vecchia, "Crystal structure of bismuth titanium oxide $Bi_{12}TiO_{20}$," *physica status solidi (a)*, vol. 74, no. 1, pp. K17–K21, 1982.
- [34] V. A. Jerez, *Grabado de hologramas fotorrefractivos a alta temperatura*. PhD thesis, Facultad de ciencias, Escuela de física, Universidad industrial de Santander, 2011.
- [35] J. Wilde, L. Hesselink, S. McCahon, M. Klein, D. Rytz, and B. Wechsler, "Measurement of electro-optic and electrogyratory effects in $Bi_{12}TiO_{20}$," *Journal of applied physics*, vol. 67, no. 5, pp. 2245–2252, 1990.
- [36] P. C. Lemaire and M. Georges, "Local measurement system for optical and electro-optic characterization and homogeneity analysis of photorefractive sillenite crystals," *Optical Materials*, vol. 4, no. 2-3, pp. 182–187, 1995.
-

-
- [37] V. Prokofiev, J. Carvalho, J. Andreetta, N. Gallo, A. Hernandez, J. Frejlich, A. Freschi, P. Garcia, J. Maracaiba, A. Kamshilin, *et al.*, “Growth and characterization of photorefractive $Bi_{12}TiO_{20}$ single crystals,” *Crystal Research and Technology*, vol. 30, no. 2, pp. 171–176, 1995.
- [38] A. G. Vanegas, “Implementación de un procesador óptico-virtual de encriptación de transformada conjunta para la generación de criptogramas camuflados,” Tesis de Pregrado, Departamento de Física, Universidad de Pamplona, 2018.

Apéndice A

Deducción de los coeficientes de transmisión y reflexión

En las siguientes secciones, se demostrarán los coeficientes de transmisión y reflexión para los casos que el vector de campo eléctrico incide tanto perpendicular como paralelamente al plano de incidencia.

A.1. Expresiones para los coeficientes de transmisión t_{\perp} y reflexión r_{\perp} para el caso 1: donde \vec{E} es perpendicular al plano de incidencia

Para determinar t_{\perp} y r_{\perp} (ecuaciones 2.110 y 2.111), se determinan las ecuaciones de contorno o de frontera (ver ecuaciones 2.100 y 2.102):

$$E_i + E_r = E_t \quad (\text{A.1})$$

$$-k_i E_i \cos \theta_i + k_r E_r \cos \theta_r = -k_t E_t \cos \theta_t \quad (\text{A.2})$$

Se procede a multiplicar por ambos lados de la igualdad por el factor $\frac{1}{E_i}$ en las ecuaciones anteriores.

$$1 + \frac{E_r}{E_i} = \frac{E_t}{E_i} \quad (\text{A.3})$$

$$-k_i \cos \theta_i + k_r \frac{E_r}{E_i} \cos \theta_r = -k_t \frac{E_t}{E_i} \cos \theta_t \quad (\text{A.4})$$

Se escribe en función de t_\perp y r_\perp (ecuaciones 2.103 y 2.104).

$$1 + r_\perp = t_\perp \quad (\text{A.5})$$

$$-k_i \cos \theta_i + k_r r_\perp \cos \theta_r = -k_t t_\perp \cos \theta_t \quad (\text{A.6})$$

Ahora, la ecuación (A.6) se multiplica por $\frac{c}{\omega}$ y queda

$$-k_i \frac{c}{\omega} \cos \theta_i + k_r \frac{c}{\omega} r_\perp \cos \theta_r = -k_t \frac{c}{\omega} t_\perp \cos \theta_t \quad (\text{A.7})$$

De acuerdo con la ley de reflexión de Snell, $k_i = k_r$ y $\theta_i = \theta_r$.

$$-k_i \frac{c}{\omega} \cos \theta_i + k_i \frac{c}{\omega} r_\perp \cos \theta_i = -k_t \frac{c}{\omega} t_\perp \cos \theta_t \quad (\text{A.8})$$

Sabemos que $n = \frac{kc}{\omega}$, por lo tanto:

$$n_1 = \frac{ck_i}{\omega} \quad (\text{A.9})$$

$$n_2 = \frac{ck_t}{\omega} \quad (\text{A.10})$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción del medio uno y medio dos. Ahora (A.8) en términos de los índices de refracción se expresa:

$$-n_1 \cos \theta_i + n_1 r_\perp \cos \theta_i = -n_2 t_\perp \cos \theta_t \quad (\text{A.11})$$

Se simplifica algebraicamente:

$$n_1 \cos \theta_i (r_\perp - 1) = -n_2 t_\perp \cos \theta_t \quad (\text{A.12})$$

Se reemplaza la expresión (A.5) en la expresión (A.12), por lo tanto, (A.13) queda en función del coeficiente de reflexión:

$$n_1 \cos \theta_i (r_\perp - 1) = -n_2 (1 + r_\perp) \cos \theta_t \quad (\text{A.13})$$

Se operan variables semejantes y se despeja r_{\perp} , para obtener la siguiente expresión:

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (\text{A.14})$$

Hay que dejar claro que como se trabaja una configuración de incidencia oblicua, θ_i es un parámetro que es controlado experimentalmente, por lo que el ángulo θ_t va tener dependencia con respecto al ángulo de incidencia. El paso a seguir es dejar el ángulo transmitido en términos del ángulo de incidencia; luego se aplica identidad trigonométrica básica a la ecuación (A.14), para obtener la expresión (A.15):

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}} \quad (\text{A.15})$$

Luego se aplica la ley de Snell para la refracción (ver ecuación, 2.99). r_{\perp} en dependencia θ_i viene dada por:

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (\text{A.16})$$

Se reemplaza la expresión (A.16) en la expresión (A.5) y se opera algebraicamente, para obtener t_{\perp} [3, 26]:

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (\text{A.17})$$

A.2. Expresiones para los coeficientes de transmisión t_{\parallel} y reflexión r_{\parallel} en el caso 2: donde \vec{E} es paralelo al plano de incidencia

Se inicia por las condiciones de contorno, (ecuaciones 2.106 y 2.107), que se denotan de la siguiente manera:

$$E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t \quad (\text{A.18})$$

$$-k_i E_i + k_t E_r = -k_t E_t \quad (\text{A.19})$$

Se multiplica estas dos expresiones por el factor $\left(\frac{1}{E_i}\right)$, para dejarla en función de t_{\parallel} y r_{\parallel} (ver ecuaciones, 2.103 y 2.104).

$$\cos \theta_i + r_{\parallel} \cos \theta_r = t_{\parallel} \cos \theta_t \quad (\text{A.20})$$

$$-k_i + k_t r_{\parallel} = -k_t t_{\parallel} \quad (\text{A.21})$$

Se multiplica (A.21) por el factor $\left(\frac{c}{\omega}\right)$ y se obtiene:

$$-k_i \frac{c}{\omega} + k_t \frac{c}{\omega} r_{\parallel} = -k_t \frac{c}{\omega} t_{\parallel} \quad (\text{A.22})$$

De acuerdo con la ley de reflexión de Snell, $k_i = k_r$ y $\theta_i = \theta_r$, las ecuaciones (A.20) y (A.21).

$$-k_i \frac{c}{\omega} + k_i \frac{c}{\omega} r_{\parallel} = -k_t \frac{c}{\omega} t_{\parallel} \quad (\text{A.23})$$

$$\cos \theta_i + r_{\parallel} \cos \theta_i = t_{\parallel} \cos \theta_t \quad (\text{A.24})$$

Se sustituyen las ecuaciones presentes en (A.10) en la expresión (A.23) y nos queda:

$$-n_1 + n_1 r_{\parallel} = -n_2 t_{\parallel} \quad (\text{A.25})$$

De (A.25), se despeja t_{\parallel} y se sustituye en (A.24), y se obtiene de manera algebraica a r_{\parallel}

$$r_{\parallel} = \frac{-n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (\text{A.26})$$

Ya determinado r_{\parallel} , se procede a determinar t_{\parallel} , para eso, se reemplaza (A.26) en (A.25) y se procede hacer un cálculos algebraicos.

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (\text{A.27})$$

Apéndice B

Matriz de Jones para una placa retardadora rotada

Se asume un haz incidente descrito por el siguiente vector de Jones:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde, V_x y V_y , son las componentes descrito en los ejes del laboratorio (x, y) . Para determinar como se propaga la luz en una placa birrefringente, se necesita descomponer la luz en una combinación lineal en términos de los ejes lento (s) y rápido (f), por lo que se aplica una transformación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} V_s \\ V_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

donde ψ es el ángulo de rotación con respecto a los ejes del laboratorio y los ejes fundamentales de la placa birrefringente. Ahora se asume que las componentes de un haz de luz que emerge de un retardador, están relacionadas linealmente con las componentes del haz incidente, esta relación se denota como:

$$V'_s = e^{-i\beta_s} V_s \quad (\text{B.3})$$

$$V'_f = e^{-i\beta_f} V_f \quad (\text{B.4})$$

donde: β_s y β_f , son las diferencias de fase de cada onda, que se propaga por los respectivos ejes de la placa birrefringente.

$$\beta_s = \frac{2\pi}{\lambda} n_s l \quad (\text{B.5})$$

$$\beta_f = \frac{2\pi}{\lambda} n_f l \quad (\text{B.6})$$

Además, n_f y n_s son los índices de refracción con respecto a los ejes de la placa retardadora y l es la distancia recorrida del haz en el material. Las expresiones anteriores, se puede escribir en términos matriciales:

$$\begin{pmatrix} V'_s \\ V'_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda}n_sl)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda}n_f l)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ V_f \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{pmatrix} V'_s \\ V'_f \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} V_s \\ V_f \end{pmatrix}$$

A la expresión (B.7), se multiplica la matriz por $e^{-i(\frac{2\pi\Delta l}{\lambda})(\frac{1}{2}n_s + \frac{1}{2}n_f - \frac{1}{2}n_s - \frac{1}{2}n_f)}$, y se obtiene:

$$M = e^{-i(\frac{2\pi\Delta l}{\lambda})(\frac{1}{2}n_s + \frac{1}{2}n_f - \frac{1}{2}n_s - \frac{1}{2}n_f)} \begin{bmatrix} e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda}n_sl)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{2\pi}{\lambda}n_f l)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Se opera matemáticamente en el exponencial, y queda

$$M = e^{-i(\frac{2\pi l}{\lambda})\frac{1}{2}(n_s + n_f)} \begin{bmatrix} e^{-i[\frac{2\pi l}{\lambda}](\frac{1}{2}(n_L - n_R))} & 0 \\ 0 & e^{-i[\frac{2\pi l}{\lambda}](-\frac{1}{2}(n_L - n_R))} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

donde se define las siguientes variables:

$$\begin{aligned} \phi &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right) \frac{1}{2}(n_s + n_f) \rightarrow \text{Cambio de fase absoluto} \\ \Gamma &= \frac{2\pi l}{\lambda} (n_s - n_f) \rightarrow \text{Retardo de fase} \end{aligned}$$

En la birrefringencia, ϕ es causado por la placa birrefringente; como los efectos de interferencia. Sin embargo, ϕ es cien veces mayor que Γ , además, $|n_s - n_f| \ll n_s, n_f$ [1]. Por lo tanto la expresión (B.9) queda:

$$M = e^{-i\phi} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Se desprecia el factor $e^{i\phi}$, esto debido a que no se observa los efectos interferencia causado por múltiples reflexiones. La ecuación (B.10) nos queda.

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La expresión anterior es conocida como la matriz de Jones para un retardador de forma general. Ahora la expresión para el estado de polarización saliente de la placa, ecuación (B.7), queda:

$$\begin{pmatrix} V'_s \\ V'_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ V_f \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Se procede a cambiar la expresión (B.12) de coordenadas sf a xy , se aplica la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V'_s \\ V'_f \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Se combina las ecuaciones (B.2) y (B.12) en la ecuación (B.13) y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \end{pmatrix} = R(-\psi) \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} R(\psi) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

donde $R(\psi)$ es la matriz de rotación en sentido anti-horario y $R(-\psi)$ es la matriz de rotación en sentido horario.

La expresión (B.14) reescrita nos queda:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Se opera matricialmente

$$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \cos \psi & -e^{i\frac{\Gamma}{2}} \sin \psi \\ e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \sin \psi & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi + e^{i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi & \cos \psi \sin \psi (e^{-i\frac{\Gamma}{2}} - e^{i\frac{\Gamma}{2}}) \\ \cos \psi \sin \psi (e^{-i\frac{\Gamma}{2}} - e^{i\frac{\Gamma}{2}}) & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi + e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Ahora

$$\frac{e^{i\frac{\Gamma}{2}} - e^{-i\frac{\Gamma}{2}}}{2i} = \sin \frac{\Gamma}{2}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi + e^{i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi & -\cos \psi \sin \psi (2i \sin \frac{\Gamma}{2}) \\ -\cos \psi \sin \psi (2i \sin \frac{\Gamma}{2}) & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi + e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

simplificando y se aplica la siguiente identidad trigonométrica:

$$2 \cos \psi \sin \psi = \sin 2\psi$$

Por lo tanto, la matriz de Jones para un retardador rotado en términos de ψ y Γ es:

$$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi + e^{i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi & -i \sin 2\psi \sin \frac{\Gamma}{2} \\ -i \sin 2\psi \sin \frac{\Gamma}{2} & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \cos^2 \psi + e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Apéndice C

Deducción de la matriz que calcula los efectos simultáneos debido a la birrefringencia inducida y circular

La matriz de Jones para N placas retardadoras rotadas viene dada por:

$$M_{rO} = \begin{bmatrix} e^{-i(\frac{\Gamma}{2N})} \cos^2 \psi + e^{i(\frac{\Gamma}{2N})} \sin^2 \psi & -i \sin 2\psi \sin \left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \\ -i \sin 2\psi \sin \left(\frac{\Gamma}{2N}\right) & e^{i(\frac{\Gamma}{2N})} \cos^2 \psi + e^{-i(\frac{\Gamma}{2N})} \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

Analizando N-placas ópticamente activas, con rotación horaria y donde l_{ef} es la distancia recorrida por el haz:

$$R_N = \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & -\sin \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ \sin \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & \cos \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

La matriz de Jones que asocia la birrefringencia inducida y la actividad óptica en el BTO es:

$$M_T = [M_{rO} R_N]^N \quad (C.3)$$

O

$$M_T = \left[\begin{array}{cc} X \cos \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + L \sin \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & -X \sin \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + L \cos \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ L \cos \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + Y \sin \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & -L \sin \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + Y \cos \left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \end{array} \right]^N \quad (C.4)$$

donde:

$$X = e^{-i\left(\frac{\Gamma}{2N}\right)} \cos^2 \psi + e^{i\left(\frac{\Gamma}{2N}\right)} \sin^2 \psi = \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) - i \sin\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos 2\psi \quad (C.5)$$

$$Y = e^{i\left(\frac{\Gamma}{2N}\right)} \cos^2 \psi + e^{-i\left(\frac{\Gamma}{2N}\right)} \sin^2 \psi = \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) + i \sin\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos 2\psi \quad (C.6)$$

$$L = -i \sin 2\psi \sin\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \quad (C.7)$$

La ecuación (C.4), se determina analíticamente aplicando la identidad de Chebyshev [21], que se expresa de la siguiente manera:

$$M_T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} \frac{A \sin(NK\Lambda) - \sin[(N-1)K\Lambda]}{\frac{\sin K\Lambda}{\sin NK\Lambda}} & \frac{B \sin(NK\Lambda)}{\frac{\sin K\Lambda}{\sin[(N-1)K\Lambda]}} \\ \frac{C \sin(NK\Lambda)}{\sin(K\Lambda)} & \frac{D \sin(NK\Lambda) - \sin[(N-1)K\Lambda]}{\sin(K\Lambda)} \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

Con:

$$K\Lambda = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2}(A + D) \right] \quad (C.9)$$

Se define a A,B,C y D con respecto a la matriz (C.4)

$$\begin{cases} A = X \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + L \sin\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ B = -X \sin\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + L \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ C = L \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + Y \sin\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ D = -L \sin\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + Y \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \end{cases} \quad (C.10)$$

De la ecuación (C.9) se sustituye A y D, se simplifica y se obtiene la siguiente expresión:

$$K\Lambda = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(2 \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \right) \right] \quad (C.11)$$

Se simplifica.

$$\cos K\Lambda = \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \quad (C.12)$$

A la ecuación (C.12), se le aplica la expansión de segundo orden para el coseno en los argumentos $K\Lambda$, $\Gamma/2N$ y l_{ef}/N .

$$\left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}(K\Lambda)^2 \right] = \left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Gamma}{2N} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\rho l_{ef}}{N} \right)^2 \right] \quad (C.13)$$

Se aplica álgebra básica:

$$1 - \frac{1}{2}(K\Lambda)^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{2N} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho l_{ef}}{N} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Gamma}{2N} \right)^2 \left(\frac{l_{ef}}{N} \right)^2 \quad (C.14)$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, Los argumentos $\frac{\Gamma}{2N}$ y $\frac{l_{ef}}{N}$ son pequeños a uno.

$$(K\Lambda)^2 = \left(\frac{\rho l_{ef}}{N} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2N} \right)^2 \quad (C.15)$$

\therefore

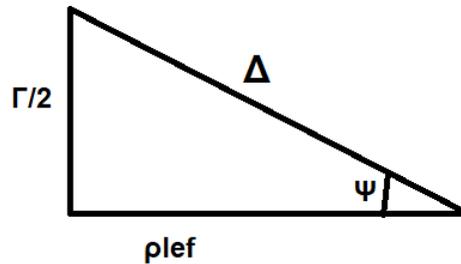
$$K\Lambda = \sqrt{\left(\frac{\rho l_{ef}}{N} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2N} \right)^2} = \frac{1}{N} \Delta \quad (C.16)$$

donde:

$$\Delta = \sqrt{(\rho l_{ef})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} \quad (C.17)$$

Δ es el desfase total introducidos por el retardo de fase y la actividad óptica. Sin embargo, Δ , ρl_{ef} y $\Gamma/2$ se relacionan con el siguiente triangulo rectángulo:

Figura C.1: Ilustración del desfase total producido por el retardo de fase y la actividad óptica.



y

$$\Psi = \arctan \left(\frac{\Gamma}{2\rho l_{ef}} \right) \quad (C.18)$$

Ahora se implementan aproximaciones de primer orden para A,B,C y D, en la ecuación (C.10) para las expresiones trigonométricas, excepto a las expresiones $\cos \psi$ y $\sin \psi$, por lo que se obtienen:

$$\begin{cases} A = 1 - i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi \\ B = -\frac{1}{N} (\rho l_{ef} + i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \\ C = \frac{1}{N} (\rho l_{ef} - i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \\ D = 1 + i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi \end{cases} \quad (C.19)$$

Se reemplazan las ecuaciones (C.16) y (C.19) en (C.8) y se tiene:

$$M_T = \begin{bmatrix} \frac{(1 - i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi) \sin(\Delta) - \sin(\Delta - \frac{\Delta}{N})}{\sin \frac{\Delta}{N}} & -\frac{1}{N} (\rho l_{ef} + i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \frac{\sin(\Delta)}{\sin \frac{\Delta}{N}} \\ \frac{1}{N} (\rho l_{ef} - i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \frac{\sin \Delta}{\sin(K\Lambda)} & \frac{(1 + i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi) \sin(\Delta) - \sin(\Delta - \frac{\Delta}{N})}{\sin \frac{\Delta}{N}} \end{bmatrix} \quad (C.20)$$

Se aplica una aproximación de primer orden a $\sin \frac{\Delta}{N}$.

$$\sin \frac{\Delta}{N} \cong \frac{\Delta}{N} \quad (C.21)$$

Se simplifica la componente M_{T1} de la ecuación (C.20).

$$\frac{(1 - i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi) \sin(\Delta) - \sin(\Delta - \frac{\Delta}{N})}{\frac{\Delta}{N}} = \frac{-i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi \sin(\Delta) + \sin(\Delta) - \sin(\Delta - \frac{\Delta}{N})}{\frac{\Delta}{N}} \quad (C.22)$$

Con respecto (C.22), Se determina la expresión $\sin(\Delta) - \sin(\Delta - \frac{\Delta}{N})$, para eso se aplica la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin E - \sin F = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(E - F) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(E + F) \right] \quad (C.23)$$

Se emplea la identidad y queda:

$$\sin(\Delta) - \sin \left(\Delta - \frac{\Delta}{N} \right) = 2 \sin \left[\frac{1}{2} \left(\Delta - \Delta + \frac{\Delta}{N} \right) \right] \cos \left[\frac{1}{2} \left(\Delta + \Delta - \frac{\Delta}{N} \right) \right] \quad (C.24)$$

∴

$$\sin(\Delta) - \sin\left(\Delta - \frac{\Delta}{N}\right) = 2 \sin\left(\frac{\Delta}{2N}\right) \cos\left(\Delta - \frac{\Delta}{N}\right) \quad (\text{C.25})$$

Se utilizan aproximaciones de primer orden y luego operaciones algebraicas, para obtener la siguiente expresión:

$$2 \sin\left(\frac{\Delta}{2N}\right) \cos\left(\Delta - \frac{\Delta}{N}\right) = \frac{\Delta}{N} \cos \Delta \quad (\text{C.26})$$

Ahora se reemplaza (C.26), en (C.22) para obtener:

$$\frac{(1 - i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi) \sin(\Delta) - \sin(\Delta - \frac{\Delta}{N})}{\frac{\Delta}{N}} = \frac{-i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi \sin \Delta + \frac{\Delta}{N} \cos \Delta}{\frac{\Delta}{N}} \quad (\text{C.27})$$

Entonces

$$\frac{-i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi \sin \Delta + \frac{\Delta}{N} \cos \Delta}{\frac{\Delta}{N}} = \cos \Delta - i\frac{\Gamma}{2\Delta} \cos 2\psi \sin \Delta \quad (\text{C.28})$$

Se hace el mismo procedimiento anterior que se empleo para determinar M_{T1} , ahora a la componente M_{T4} y queda:

$$\frac{(1 + i\frac{\Gamma}{2N} \cos 2\psi) \sin(\Delta) - \sin(\Delta - \frac{\Delta}{N})}{\frac{\Delta}{N}} = \cos \Delta + i\frac{\Gamma}{2\Delta} \cos 2\psi \sin \Delta \quad (\text{C.29})$$

Ahora, se reemplazan (C.21), (C.28) y (C.29) en (C.20).

$$M_T = \begin{bmatrix} \cos \Delta - i\frac{\Gamma}{2\Delta} \cos 2\psi \sin \Delta & -\frac{1}{N} (\rho l_{ef} + i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \frac{\sin \Delta}{\Delta} N \\ \frac{1}{N} (\rho l_{ef} - i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \frac{\sin \Delta}{\Delta} N & \cos \Delta + i\frac{\Gamma}{2\Delta} \cos 2\psi \sin \Delta \end{bmatrix} \quad (\text{C.30})$$

Se simplifica para obtener:

$$M_T = \begin{bmatrix} \cos \Delta - i\frac{\Gamma}{2\Delta} \cos 2\psi \sin \Delta & -(\rho l_{ef} + i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \frac{\sin \Delta}{\Delta} \\ (\rho l_{ef} - i\frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi) \frac{\sin \Delta}{\Delta} & \cos \Delta + i\frac{\Gamma}{2\Delta} \cos 2\psi \sin \Delta \end{bmatrix} \quad (\text{C.31})$$

En base a la figura (C.1), $\frac{\Gamma}{2}$ y ρl_{ef} , se define de la siguiente manera:

$$\frac{\Gamma}{2\Delta} = \sin \Psi \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\rho_{ef}^l}{\Delta} = \cos \Psi \quad (\text{C.33})$$

Por lo tanto, la matriz de transferencia producida por el retardo de fase y la actividad óptica con respecto a ψ , donde ψ es el ángulo de rotación con respecto a los ejes del laboratorio y los ejes fundamentales de la placa birrefringente.

$$M_T = \begin{bmatrix} \cos \Delta - i \sin \Psi \cos 2\psi \sin \Delta & -(\cos \Psi + i \sin \Psi \sin 2\psi) \sin \Delta \\ (\cos \Psi - i \sin \Psi \sin 2\psi) \sin \Delta & \cos \Delta - i \sin \Psi \cos 2\psi \sin \Delta \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

La expresión (C.34), se le conoce como la matriz de Jones para calcular los efectos simultáneos de la birrefringencia inducida y actividad óptica en un cristal silenita. Esta matriz es calculada en las referencias [13, 16].