

Estudio Teórico del Efecto de la Polarización sobre la Modulación en el Mezclado de dos Ondas en un Cristal Fotorrefractivo (BTO).

Henry Levin Parada Contreras

1094270608



GRUPO ÓPTICA MODERNA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

2022

Estudio Teórico del Efecto de la Polarización sobre la Modulación en el Mezclado de dos Ondas en un Cristal Fotorrefractivo (BTO).

Henry Levin Parada Contreras

Trabajo para optar por el título de físico

Dra.Sc. Nat Martha Lucia Molina Prado



GRUPO ÓPTICA MODERNA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

2022

Dedicatoria

A mis padres, por apoyarme en el camino, a pesar de que no ha sido fácil, a mis hermanas por siempre darme el empujón que me faltaba, a mis amigos por ser la inspiración de crecer cada día y a mi pareja por siempre creer en mí.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, a mi tía, amigos, y mi pareja por su apoyo en este proceso el cual es un paso más hacia lo profesional.

Agradezco a mis compañeros de tesis por siempre estar ahí cuando los necesitaba y resolver dudas que surgían en el camino, en especial a Diego Armando Landinez y Jonathan Mercado.

Agradezco a la Dra. Martha Lucia Molina por su colaboración, paciencia y ayuda.

Agradezco a la Universidad de Pamplona, a los profesores que pertenecen al departamento de física y a todos mis compañeros.

Resumen

Un patrón de luz no homogénea, como el producido por la interferencia de dos haces, genera en un cristal fotorrefractivo una variación local del índice de refracción o red de índice. Esto permite que los dos haces se acoplen intercambiando energía, fenómeno que se conoce como mezcla de ondas. En el mezclado de dos ondas, los haces se difractarán sobre la red que ellos mismos generaron en el cristal, haciendo que el intercambio energético que se produce cambie continuamente las condiciones de difracción. De esta forma aparece en el material fotorrefractivo un efecto dinámico conocido como auto difracción, lo cual permite que la modulación del patrón de intensidad producido por los haces a la entrada del cristal, cambie a medida que los haces se propagan dentro de este, y que se modifique de acuerdo con las condiciones de mezclado a lo largo de la longitud de interacción. En este trabajo se lleva a cabo un estudio computacional desde la expresión analítica hallada tanto para la configuración $\langle 001 \rangle$ como $\langle 110 \rangle$, en aras de analizar cómo influye el cambio del estado de polarización de la luz incidente sobre la modulación o acoplamiento energético en cristales silenitas BTO, BSO y BGO. A partir de este análisis, se presentan algunas conclusiones sobre los efectos en cada una de las configuraciones. En los cálculos realizados se puede observar que para el caso de configuración $\langle 001 \rangle$, se aprecia que el fenómeno de transferencia de energía a pesar de no ser muy fuerte en comparación con la intensidad de los haces incidentes, es más notorio para cristales de mayor espesor.

Índice general

1	INTRODUCCIÓN	1
2	EFFECTO FOTORREFRACTIVO	4
2.1	Reseña histórica y generalidades.....	5
2.2	Modelo de transporte de bandas.....	6
2.2.1	Ecuaciones del material.....	7
2.2.1.1	Ecuación de centros ionizados.....	8
2.2.1.2	Ecuación de conductividad.....	8
2.2.1.3	Ecuación de continuidad	9
2.2.1.4	Ecuación de Poisson.....	9
2.2.2	Solución al modelo de transporte de bandas en estado estacionario.....	10
2.2.3	Campo de cargas espaciales	14
2.2.4	Técnica de registro holográfico	14
3	ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN CRISTALES BTO	19
3.1	Propagación de las ondas en medios anisótropos.....	20
3.1.1	Clasificación de cristales anisótropos	21
3.1.2	Elipsoide de índices	21
3.2	Método del cálculo de Jones para los estados de polarización.....	24
3.2.1	Estados de polarización de una onda plana	25
3.2.2	Representación matricial de dispositivos de polarización.....	27
3.3	Efecto electroóptico.....	28
3.3.1	Configuración cristalográfica transversal.....	31
3.3.2	Birrefringencia.....	35
3.3.3	Tensor dieléctrico	40
3.4	Actividad óptica	41
3.4.1	Actividad óptica en cristales con características isotrópicas	41
4	MEZCLA DE DOS ONDAS	45
4.1	Mezclado de dos ondas para el caso degenerado	45
4.1.1	Teoría de ondas acopladas propuesta por Kogelnik para el caso degenerado	46
4.2	Solución a la ecuación de ondas acopladas.....	49
4.2.1	Teoría de ondas acopladas dinámicas	54

5 ANÁLISIS FÍSICO MATEMÁTICO DE LA MODULACIÓN PARA LA CONFIGURACIÓN < 110 >	56
6 ANÁLISIS FÍSICO MATEMÁTICO DE LA MODULACIÓN PARA LA CONFIGURACIÓN < 001 >	70
6.1 Comparación gráfica de la modulación para las configuraciones $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ en cristales BTO.	75
CONCLUSIONES	79
REFERENCIAS	81
Apéndice A	85
Matriz de transformación para la configuración transversal	85

Índice de tablas

<i>Tabla 2.1. Materiales fotorrefractivos.....</i>	<i>5</i>
<i>Tabla 3.1. Representación de los estados de polarización [21]</i>	<i>26</i>
<i>Tabla 5.1. Modulación y amplitud de difracción para la configuración <110>.....</i>	<i>64</i>
<i>Tabla 5.2. Parámetros físicos para el cristal BTO [5,25]</i>	<i>64</i>
<i>Tabla 5.3. Parámetros físicos para el cristal BSO [5,23,24].....</i>	<i>65</i>
<i>Tabla 5.4. Parámetros físicos para el cristal BGO [26,27].....</i>	<i>66</i>
<i>Tabla 6.1. Modulación y amplitud de difracción para la configuración <001>.....</i>	<i>72</i>

Índice de figuras

Figura 2.1. Esquema del fenómeno fotorrefractivo.	7
Figura 2.2. Registro holográfico con un haz señal S_0 y un haz de referencia R_0 en el cristal fotorrefractivo	15
Figura 3.1. Elipsoide de índices (a) Cuando no hay campo eléctrico externo (b) En presencia del campo externo aplicado.	24
Figura 3.2. Configuración transversal a) $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ y b) $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$	31
Figura 3.3. Cristal bajo dos sistemas coordenados, ejes de laboratorio (rojo) y ejes cristalográficos (verde).....	32
Figura 3.4. Actividad óptica en un cristal fotorrefractivo [22].....	41
Figura 3.5. Rotación del plano de polarización de un haz de luz propagándose en un medio ópticamente activo [19]	43
Figura 4.1. Interferencia de dos haces en el medio fotorrefractivo, donde $\vec{k}_c = \vec{k}_2$ y $\vec{k}_i = \vec{k}_1$	45
Figura 4.2. Acoplamiento interno de las ondas de referencia y señal al interior del cristal fotorrefractivo[17].....	46
Figura 4.3. Propagación de los vectores de onda dentro del cristal	49
Figura 4.4. Polarización horizontal con un ángulo de polarización θ_p y en sentido antihorario visto por un observador a la entrada del cristal	52
Figura 5.1. Amplitud de difracción en el cristal [24].	58
Figura 5.2. Amplitud de difracción en términos de la dirección de \hat{S}_0	60
Figura 5.3. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BTO , cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$	65
Figura 5.4. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BSO , cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$	66
Figura 5.5. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BGO , cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$	67

Figura 6.1. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BTO , cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$	72
Figura 6.2. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BSO , cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$	73
Figura 6.3. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BGO , cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$	74
Figura 6.4. Modulación para las dos configuraciones $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ en términos del ángulo de polarización para un cristal BTO , para espesores de a)3 mm b)5 mm c)10 mm.	75

Capítulo 1

1 INTRODUCCIÓN

El efecto fotorrefractivo se conoce como la variación del valor del índice de refracción, el cual experimentan algunos materiales al estar en presencia de un haz de luz no uniforme.

Este fenómeno se descubrió en el año 1966 de manera accidental por Ashkin y colaboradores, cuando se iba a generar el segundo armónico en LiNbO_3 (Niobato de litio), en donde se utilizaron intensidades altas de radiación [1]. Ashkin y colaboradores, observaron que existía una dispersión del haz incidente al pasar por el cristal, a este efecto lo dieron a conocer principalmente como un daño óptico no deseado en cristales con características no lineales, ya que este impedía las condiciones de acoplamiento las cuales no generaban el segundo armónico. Luego, este mismo efecto fue observado en otro tipo de materiales, asociándolo con un cambio local en el índice de refracción [2]. A partir de este descubrimiento, muchos investigadores se dieron a la tarea de estudiar dicho fenómeno y los efectos internos que ocurrían en el cristal. Sin embargo, había muchas brechas, las cuales fueron resueltas más adelante por un grupo de investigadores de Kiev en el año 1976[3,4]. El modelo planteado para describir el fenómeno fue aprobado y recibió el nombre de transporte de bandas o modelo de Kukharev, el cual describe la interacción no lineal con el medio fotorrefractivo. En el modelo mencionado, aparecen varios procesos internos como: la foto-generación y la recombinación de las cargas libres a partir las impurezas pertenecientes al medio.

El modelo de Kukharev consiste en analizar el campo de carga espacial formado al interior del cristal partiendo de las ecuaciones del material.

Para generar el efecto fotorrefractivo es necesario iluminar el cristal con intensidades de luz no uniforme, esta radiación electromagnética no homogénea provoca transiciones electrónicas hacia la banda de conducción, de esta manera, se crea una distribución de carga espacial que genera un campo interno en el material denominado campo de cargas espaciales. Dicho campo origina un cambio local en el índice de refracción modulado por efecto electro-óptico [5]. Este efecto ha sido observado en distintos materiales como: $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$, LiNbO_3 , $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ los cuales presentan fotorrefractividad y son

apropiados para holografía entre otras aplicaciones. En el registro de un holograma puede ocurrir acoplamiento energético entre los haces incidentes en el cristal fotorrefractivo; esta condición experimental se conoce como mezcla de ondas [1,6].

En este documento se realiza un estudio teórico sobre la amplitud de difracción a partir del acoplamiento de las ondas en un cristal fotorrefractivo $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$, teniendo en cuenta la teoría de Kogelnik, para el caso de redes dinámicas y bajo la condición de Bragg, en la configuración cristalográfica transversal cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$, en función de factores físicos pertenecientes al material fotorrefractivo como el coeficiente electro-óptico, actividad óptica y externos como el campo aplicado al cristal, las radiaciones de los haces a la entrada del material, la periodicidad de la red, entre otros[23,24].

En el capítulo 2, se muestra el modelo de transporte de bandas con las respectivas ecuaciones que lo conforman, la forma del campo de cargas espaciales y como factor principal todo acerca del fenómeno fotorrefractivo como reseña, generalidades y los elementos que lo componen; como el comportamiento electromagnético de las ondas y las modificaciones de las propiedades del cristal incluyendo el análisis del registro holográfico.

En el capítulo 3, se presenta el análisis matemático a partir de las ecuaciones de Maxwell para el comportamiento de la luz, donde se obtiene la ecuación de onda para ser aplicada sobre una onda plana. También, se presenta la relación del ángulo de polarización mediante los vectores de Jones para una polarización lineal, la birrefringencia circular sobre la difracción de los haces incidentes y la birrefringencia lineal con dicha amplitud.

En el capítulo 4, se estudia el mezclado de ondas y se hace el respectivo desarrollo matemático para la obtención de las ecuaciones acopladas las cuales se modificaron a partir de la teoría de redes dinámicas.

En el capítulo 5 y 6, se presenta el desarrollo físico matemático del cálculo de la modulación en función del espesor del cristal, a partir de las amplitudes de difracción en la configuración transversal para $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$. Se realiza un análisis gráfico para la modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores del cristal fotorrefractivo BTO.

Capítulo 2

2 EFECTO FOTORREFRACTIVO

El efecto fotorrefractivo es el fenómeno que produce la variación interna del índice de refracción, la cual ocurre por la iluminación de luz no uniforme en cristales o materiales electro-ópticos y fotoconductores. Igualmente, se puede traducir como variaciones del índice de refracción y como un flujo luminoso a través del medio fotorrefractivo, donde para producir dicho efecto en el material, este debe tener ciertas características, como lo son; las impurezas donores y aceptores de electrones también llamados huecos, los cuales se encuentran en los niveles de energía medios dentro del gap. Es por ello, que cuando el material se encuentra en presencia de intensidades de luz no uniforme, los donores se fotoionizan y desplazan los electrones a la banda de conducción mediante algún mecanismo de transporte, los cuales pueden ser:

Difusión

La intensidad de luz incidente sobre el material excita las regiones donores de carga, para así crear una densidad no uniforme de fotoelectrones, los cuales son desplazados hasta las regionesceptoras de carga, generando un campo interno llamado campo de carga espacial [7].

"Drift" o arrastre

En este caso, el desplazamiento de electrones se debe a la aplicación de un campo eléctrico externo, el cual arrastra los electrones hasta que llegan a sitios vacíos en la región oscura llamados aceptores, formando de esta manera un campo de cargas espaciales interno, el cual se ve influenciado por el campo externo [8].

Efecto fotovoltaico de volumen

Se produce en algunos materiales ferroeléctricos con simetría no cúbica, como el niobato de litio (LiNbO_3), donde una foto-corriente se puede generar en ausencia de un campo eléctrico externo. Dicho efecto fotovoltaico es bastante intenso en el cristal ya antes mencionado, produciendo así cambios de índices de refracción muy elevados sin estar en presencia de un campo eléctrico externo [9].

Los materiales fotorrefractivos se pueden clasificar en diferentes grupos según sus características internas como se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Materiales fotorrefractivos

Grupo	Definición	Materiales
Ferroeléctricos	Los materiales ferroeléctricos se caracterizan por presentar polarizabilidad eléctrica muy alta y un máximo en la constante dieléctrica.	LiNbO ₃ LiTaO ₃ BaTiO ₃ KNbO ₃ SBN
Silenitas	Son una mezcla estequiométrica de óxidos.	Bi ₁₂ SiO ₂₀ (BSO) Bi ₁₂ GeO ₂₀ (BGO) Bi ₁₂ TiO ₂₀ (BTO)
Semiconductores	Permiten conducir y modular la corriente de acuerdo a los patrones necesarios.	GaAs: Cr InP: Fe CdTe
Cerámicas piezoeléctricas	Son los óxidos con estructura perovskita Pb (Zr, Ti) O ₃ (PZT), con composiciones alrededor de la denominada frontera de fase morfotrópica entre los polimorfos, ferroeléctricos, romboédrico y tetragonal.	tipo PLZT
Orgánicos	No hay niveles de valencia o conducción bien definidos, el transporte de cargas ocurre mediante saltos entre estados localizados.	poly(N – vinylcarbazole) o PVI

2.1 Reseña histórica y generalidades

El efecto fotorrefractivo se caracteriza por exhibir el cambio de índice de un medio debido a una fuente de luz no uniforme que incide sobre el material fotorrefractivo. Este efecto se ha observado a través de los años en distintos materiales con características electro-ópticas como los mencionados en la tabla 2.1.

Este fenómeno no permite la generación del segundo armónico el cual era el objetivo en su momento de Ashkin [1]. Sin embargo, el fenómeno resultó de interés como medio de registro alternativo.

En los años 60 ya casi culminando dicha década, Chen y sus colaboradores observaron que, a partir de los tiempos largos de respuesta debido a estos cristales, ellos se podían utilizar como memorias ópticas de alta densidad, donde, el primer modelo de migración de cargas fue publicado por Chen en el año 1969[10]. Dicho modelo, explica que el arrastre de los electrones debido al campo eléctrico interno, podría generar una redistribución de carga espacial. Además, este campo crea una red de índices de refracción, la cual tendrá el mismo período espacial que la distribución luminosa original. Pero, al iluminar el medio fotorrefractivo, se re-excitan los portadores de cargas lo cual ocasiona que la red de índice desaparezca.

Teniendo como base el modelo planteado por Chen; Thaxter [2], Johnson [11], Glass [12] y Kim [13]. Mejoraron el modelo de cargas por efecto "Drift" para analizar los siguientes efectos: influencia de un campo eléctrico aplicado, aparición de un campo de carga espacial interno, difusión de cargas, efecto fotovoltaico de volumen, mecanismo de retroalimentación entre un campo foto-inducido y la densidad de electrones libres, entre otros.

Por otro lado, en el año 1979, Kukharev et al. [4]. Publican el modelo teórico de transporte de bandas. Este modelo tiene en cuenta distintos efectos como los son: campo eléctrico aplicado, fotovoltaico de volumen y recursivo del campo de carga espacial en la misma distribución de la carga.

2.2 Modelo de transporte de bandas

En el modelo de transporte de banda, se considera que los electrones de los donores son foto-excitados hacia la banda de conducción tal como se muestra en la figura 2.1, donde, las cargas se mueven antes de ser atrapadas por lugares vacíos y si el tiempo en el que ocurre la recombinación es largo, dichas cargas se mueven por algún mecanismo, ya sea de difusión o arrastradas por el campo interno del material fotorrefractivo utilizado, en donde el sitio en el

cual fueron ionizadas dichas cargas es diferente al de recombinación. Por ende, se origina un campo de cargas espaciales que produce variaciones en el índice de refracción debido al efecto Pockels o efecto electro-óptico lineal.

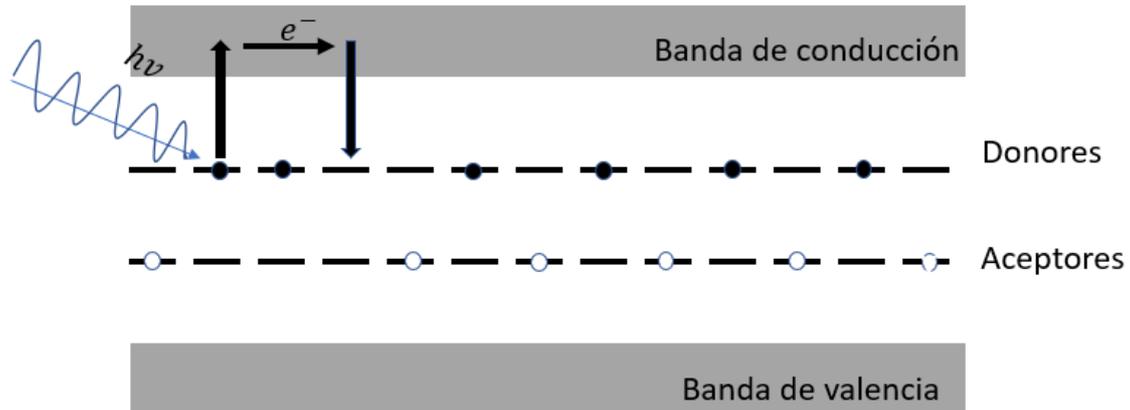


Figura 2.1. Esquema del fenómeno fotorrefractivo

2.2.1 Ecuaciones del material

El conjunto de ecuaciones que se utilizan para observar el comportamiento de la distribución espacial de campo eléctrico, el cual produce el cambio en el índice de refracción cuando sobre el cristal se hace incidir un haz de luz no uniforme, se da a partir del siguiente supuesto: Se supone que hay una presencia de átomos en el cristal llamados donores N_D y aceptores de carga N_A , donde existe una parte de átomos donores que se encuentra ionizada $N'_{D0} = N_A$. Se definen que los aceptores son muy profundos energéticamente y por eso no pueden ser ionizados por el haz incidente, entonces en el proceso de ionización y captura, se consideran solo los donores que no han sido ionizados $N_D - N'_D$ así como N'_D . El conjunto de ecuaciones que describen el fenómeno se muestra a continuación.

2.2.1.1 Ecuación de centros ionizados

El atrapamiento se ocasiona en sitios de impurezas que están vacíos los cuales atrapan las cargas. Es por ello, que se dice que la migración de electrones en cada nivel se da por las siguientes ecuaciones. A continuación, se muestra la siguiente ecuación, que recibe el nombre de razón de cambio de donores ionizados.

$$\frac{\partial N'_D}{\partial t} = (N_D - N'_D)(sI + \beta) - \gamma NN'_D \quad (2.1)$$

Donde, s es la probabilidad (sección transversal) de foto-ionización debida a la radiación incidente, β es la tasa de generación debido a la excitación térmica, γ es la constante de recombinación e I es la intensidad luminosa incidente.

2.2.1.2 Ecuación de conductividad

Existen dos procesos de migración que se generan en los cristales silenitas:

Difusión: es debido a la agitación térmica. Él conduce a una densidad de corriente de difusión isotrópica.

$$\vec{J} = \mu K_B T \vec{\nabla} N \quad (2.2)$$

Donde, μ es el valor absoluto de la movilidad de la carga q , T es la temperatura absoluta, K_B la constante de Boltzmann y N es la densidad electrónica foto inducida.

Arrastre: transporte de cargas debido a un campo eléctrico \vec{E} que produce una densidad de corriente de arrastre:

$$\vec{J} = \mu N q \vec{E} \quad (2.3)$$

El campo eléctrico microscópico interno del material tiene dos componentes, una proviene del campo de cargas espaciales E_{SC} foto-inducido en el material y la otra componente se

origina del campo aplicado en el material \vec{E}_0 . Así la ecuación de conductividad se expresa como:

$$\vec{J} = \mu N q \vec{E} + \mu k_B T \vec{\nabla} N \quad (2.4)$$

2.2.1.3 Ecuación de continuidad

La razón de generación de electrones, es la misma que la razón de ionización de donores, sin embargo, los electrones en la banda de conducción son cargas móviles, en tanto las impurezas ionizadas permanecen en una posición fija respecto a la red cristalina. En consecuencia, el flujo de electrones afecta localmente la densidad de carga. Si \vec{J} representa la densidad de corriente y $(-q)$ es la carga del electrón, entonces la ecuación de continuidad será [21]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial N'_D}{\partial t} = \frac{1}{q} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (2.5)$$

2.2.1.4 Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson relaciona el campo eléctrico con la redistribución de carga en el cristal. Teniendo en cuenta que la densidad de carga local es $-q(N + N_A + N'_D)$, entonces la ecuación de Poisson se puede expresar como:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = -q(N + N_A + N'_D) = \rho(r) \quad (2.6)$$

Estas cuatro ecuaciones son conocidas como ecuaciones del material o ecuaciones de Kukharev y describen el modelo de transporte de banda en un material fotorrefractivo [21].

2.2.2 Solución al modelo de transporte de bandas en estado estacionario

Se considera la incidencia de los haces y su propagación en el cristal fotorrefractivo, donde, las zonas brillantes se representan por la ecuación $\cos \vec{k} \cdot \vec{r} = 1$ e $I = 2I_0$ donde I es la intensidad en el medio fotorrefractivo e I_0 es la intensidad inicial. Debido a la absorción de fotones existente en el material, las cargas foto-ionizadas se desplazan desde las zonas brillantes, dejando atrás a las impurezas donoras ionizadas con carga positiva; en el llegado caso donde no hubiese luz para excitar las cargas, ellas permanecerían en las regiones oscuras, lo cual conduciría a una división de carga. Como respuesta a la propagación del haz de luz en el material fotorrefractivo, debido a la acumulación de carga espacial en el medio, se origina, a partir de las regiones brillantes y oscuras que están cargadas positiva y negativamente un campo de carga espacial [5].

Lo que se desea obtener, es la expresión del campo de cargas espaciales para el caso estacionario, utilizando las ecuaciones del material, donde las derivadas con respecto al tiempo son cero.

$$(N_D - N'_D)SI - \gamma NN'_D = 0 \quad (2.7)$$

$$\vec{J} = \mu Nq\vec{E} + \mu K_B T \vec{\nabla} N \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{q} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = -q(N + N_A - N'_D) = \rho(r) \quad (2.10)$$

Las ecuaciones que son solución para el caso estacionario se pueden escribir como:

$$N(r) = N_0 + Re(N_1 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (2.11)$$

$$N'_D = N'_{D0} + Re(N'_{D1} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (2.12)$$

$$\vec{J}(r) = \vec{J}_0 + \text{Re}(\vec{J}_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \quad (2.13)$$

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_0 + \text{Re}(\vec{E}_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \quad (2.14)$$

Donde $N_0, N_1, \vec{J}_0, \vec{J}_1, N'_{D0}, N'_{D1}, \vec{E}_0, \vec{E}_1$, son constantes, siendo \vec{E}_0 el campo externo y \vec{E}_1 el campo de cargas espaciales.

Se considera el caso donde hay iluminación periódica. Reemplazando las ecuaciones (2.11) y (2.12) en la ecuación (2.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(N_D - N'_{D0} - \text{Re}(N'_{D1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right) \left(s(I_0 + \text{Re}(I_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}})) \right) \\ & - \gamma \left(N_0 + \text{Re}(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right) \left(N'_{D0} + \text{Re}(N'_{D1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right) = 0 \end{aligned}$$

Realizando los respectivos productos resulta:

$$\begin{aligned} N_D s I_0 - N'_{D0} s I_0 - s I_0 N'_{D1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + N_D s I_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - N'_{D0} s I_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - s N'_{D1} I_1 e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \gamma N_0 N'_{D0} \\ - \gamma N'_{D0} N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \gamma N_0 N'_{D1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \gamma N'_{D1} N_1 e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \end{aligned}$$

Agrupando los términos con igual exponencial $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ y despreciando los demás términos, ya que su contribución es pequeña, casi nula, por tanto, se reescribiría la ecuación como:

$$(-s I_0 N'_{D1} + N_D s I_1 - N'_{D0} s I_1 - \gamma N'_{D0} N_1 - \gamma N_0 N'_{D1}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \quad (2.15)$$

Factorizando se tiene:

$$-s I_0 N'_{D1} + (N_D - N'_{D0}) s I_1 - \gamma N'_{D0} N_1 - \gamma N_0 N'_{D1} = 0 \quad (2.16)$$

Sustituyendo la ecuación (2.8) en (2.9) resulta:

$$\frac{1}{q} \vec{\nabla} \cdot (\mu N q \vec{E} + \mu K_B T \vec{\nabla} N) = 0$$

Reemplazando las ecuaciones (2.11) y (2.14) en la ecuación anterior, está se modifica directamente como:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\mu \left(N_0 + \text{Re}(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right) q \left(\vec{E}_0 + \text{Re} \left(\vec{E}_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \right) + \mu K_B T \vec{\nabla} \left(N_0 + \text{Re}(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right) \right) = 0$$

Haciendo la respectiva distribución de cada uno de los términos de la ecuación anterior:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\mu N_0 q \vec{E}_0 + \mu N_0 q \vec{E}_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \mu q \vec{E}_0 N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \mu q \vec{E}_1 N_1 e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \mu K_B T \vec{\nabla} N_0 + \mu K_B T \vec{\nabla} N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) = 0$$

Realizando la derivada con respecto a r :

$$\left(-i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 \mu N_0 q e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \mu q N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - 2i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 \mu q N_1 e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}} + (i \cdot i) \vec{k} \cdot \vec{k} \mu K_B T N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) = 0$$

Los términos acompañados por $e^{-2i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ son ondas que su contribución es prácticamente nula, por lo tanto, no son tenidos en cuenta tal que:

$$\left(-i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 \mu N_0 q - i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \mu q N_1 - \vec{k} \cdot \vec{k} \mu K_B T N_1 \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior entre q , sé obtiene:

$$-i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 \mu N_0 - i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \mu N_1 - \vec{k} \cdot \vec{k} \frac{\mu K_B T N_1}{q} = 0 \quad (2.17)$$

Tomando la ecuación (2.10) y reemplazando las soluciones (2.11) (2.12) y (2.14) esta queda como:

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \left(\vec{E}_0 + \text{Re}(\vec{E}_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right) = -q \left(N_0 + \text{Re} \left(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) + N_A - N'_{D0} - \text{Re}(N'_{D1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right)$$

Igualando términos con exponencial $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \left(\text{Re}(\vec{E}_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right) = -q \left(\text{Re} \left(N_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) - \text{Re}(N'_{D1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \right)$$

Derivando la relación anterior resulta:

$$i\varepsilon \vec{k} \cdot \vec{E}_1 = q(N_1 - N'_{D1}) \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.10) se pueden escribir como:

$$(N_D - N'_{D0})(sI_o) - \gamma N_o N'_{D0} = 0 \quad (2.19)$$

$$(N_o + N_A - N'_{D0}) = 0 \quad (2.20)$$

Donde N_D , N_A y \vec{E}_o son constantes. Despejando de la ecuación (2.19) N'_{D0} se llega a:

$$N'_{D0} = \frac{N_D s I_o}{\gamma N_o + s I_o} \quad (2.21)$$

De la ecuación (2.20) se despeja N'_{D0} tal que:

$$N'_{D0} = N_o + N_A \quad (2.22)$$

Igualando las ecuaciones (2.21) y (2.22) se obtiene:

$$N_o + N_A = \frac{N_D s I_o}{\gamma N_o + s I_o}$$

Donde se considera que $N_o \ll N_A$ y $s I_o \ll N_A \gamma$. Realizando el respectivo despeje de N_o se llega a:

$$N_o = \frac{s I_o (N_D - N_A)}{N_A \gamma} \quad (2.23)$$

Reemplazando la ecuación (2.18) en (2.17) tal que:

$$-\left(\frac{\mu q N_o N_1}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{\mu q N_o N'_{D1}}{\varepsilon}\right) - i \vec{k} \mu \vec{E}_o N_1 - \vec{k} \cdot \vec{k} \frac{\mu k_B T N_1}{q} = 0 \quad (2.24)$$

Despejando N'_{D1} de la ecuación (2.24) como:

$$\left(\frac{\mu q N_o N'_{D1}}{\varepsilon}\right) = i \vec{k} \mu \vec{E}_o N_1 + \vec{k} \cdot \vec{k} \frac{\mu k_B T N_1}{q} + \left(\frac{\mu q N_o N_1}{\varepsilon}\right)$$

$$N'_{D1} = \frac{i \vec{k} \varepsilon \vec{E}_o N_1}{q N_o} + \vec{k} \cdot \vec{k} \frac{\varepsilon k_B T N_1}{q^2 N_o} + N_1 \quad (2.25)$$

Despejando N_1 de la ecuación (2.16) se llega a:

$$N_1 = \frac{sI_0 N'_{D1} - (N_D - N'_{D0})sI_1 + \gamma N_0 N'_{D1}}{-\gamma N'_{D0}} \quad (2.26)$$

2.2.3 Campo de cargas espaciales

A partir de las ecuaciones halladas en la sección 2.2.2, se puede obtener el campo de cargas espaciales reemplazando las ecuaciones (2.25) y (2.26) en (2.18) y de ahí despejando E_1 , donde, después de un desarrollo matemático extenso resulta:

$$E_1 = \frac{iE_d}{1 + \frac{E_d}{E_q}} \left[\frac{1 + i\frac{E_0}{E_d}}{1 + i\frac{E_0}{E_d + E_q}} \right] \frac{I_1}{I_0}$$

E_1 representa el campo de cargas espaciales. Reescribiendo la ecuación anterior se obtiene:

$$E_1 = iE_q \left[\frac{E_d + iE_0}{E_d + E_q + iE_0} \right] \frac{I_1}{I_0} \quad (2.27)$$

El campo de saturación se define como:

$$E_q = \frac{N_A q}{\epsilon \epsilon_0 K_G} \quad (2.28)$$

El campo de difusión está dado por:

$$E_d = \frac{K_G K_B T}{q} \quad (2.29)$$

Donde K_G es la magnitud del vector de red.

2.2.4 Técnica de registro holográfico

Una de las características más importantes de la holografía es el registro total del frente de onda en fase y en amplitud, donde los medios más utilizados para dicho proceso son

denominados cristales fotorrefractivos, los cuales son utilizados en el registro de hologramas, ya que son sensibles a la luz y debido a ello se genera una respuesta del medio fotorrefractivo, ya sea rápida o lenta, lo cual implica que es necesario pasar la información de fase a variaciones de intensidad. Lo anterior se puede realizar iluminando el cristal con un hazes de luz (ver figura 2.2), formando un interferograma que contiene la información de ambos frentes de onda, donde la intensidad dependerá tanto de la amplitud de la onda de señal como de su fase.

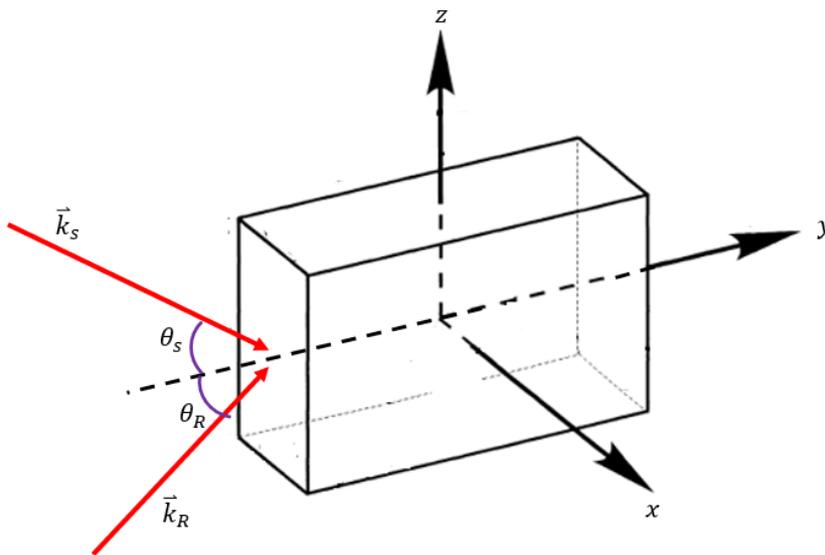


Figura 2.2. Registro holográfico con un haz señal S_0 y un haz de referencia R_0 en el cristal fotorrefractivo

En la figura 2.2 se puede observar el registro holográfico, donde \vec{k}_s y \vec{k}_R son los respectivos vectores de onda para el haz de referencia y el haz señal. θ_s y θ_R son los ángulos de registro de cada uno de los haces incidentes.

La distribución de amplitud en el plano del holograma vendrá dada por la suma de las amplitudes complejas de las ondas mediante:

$$I = |\vec{S}(0) + \vec{R}(0)|^2 \quad (2.30)$$

Donde, $\vec{S}(0)$ y $\vec{R}(0)$ son las intensidades incidentes de los haces y están dadas por:

$$\vec{S}(0) = \vec{S}_0 e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{y} + \varphi - \omega t)} \quad (2.31)$$

$$\vec{R}(0) = \vec{R}_0 e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{y} - \omega t)}$$

Reemplazando las ecuaciones mostradas en (2.31) en la ecuación (2.30) tal que:

$$I = \left| \vec{S}_0 e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{y} + \varphi - \omega t)} + \vec{R}_0 e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{y} - \omega t)} \right|^2 \quad (2.32)$$

Se realiza el respectivo producto por su complejo conjugado como:

$$I = (\vec{S}_0 e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{y} + \varphi - \omega t)} + \vec{R}_0 e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{y} - \omega t)}) (\vec{S}_0 e^{-i(\vec{k}_s \cdot \vec{y} + \varphi - \omega t)} + \vec{R}_0 e^{-i(\vec{k}_R \cdot \vec{y} - \omega t)})$$

Factorizando la expresión anterior se llega a:

$$I = |\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2 + \vec{S}_0 \cdot \vec{R}_0 e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{y} - \omega t) - i(\vec{k}_s \cdot \vec{y} + \varphi - \omega t)} + \vec{S}_0 \cdot \vec{R}_0 e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{y} + \varphi - \omega t) - i(\vec{k}_R \cdot \vec{y} - \omega t)}$$

Operando los términos de los exponenciales, la intensidad resulta en:

$$I = |\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2 + \vec{S}_0 \cdot \vec{R}_0 [e^{i((\vec{k}_R - \vec{k}_s) \cdot \vec{y} - \varphi)} + e^{-i((\vec{k}_R - \vec{k}_s) \cdot \vec{y} - \varphi)}] \quad (2.33)$$

Como se logra apreciar en la ecuación (2.33), el factor por el cual se está realizando el producto toma la forma de un coseno de la siguiente manera:

$$I = |\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2 + \vec{S}_0 \cdot \vec{R}_0 [2 \cos((\vec{k}_R - \vec{k}_s) \cdot \vec{y} - \varphi)] \quad (2.34)$$

El vector de onda está dado por:

$$\vec{K} = \vec{k}_R - \vec{k}_s$$

Entonces teniendo en cuenta la anterior relación para el vector de onda, la ecuación (2.34) cambia como:

$$I = |\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2 + \vec{S}_0 \cdot \vec{R}_0 [2 \cos(\vec{K} \cdot \vec{y} - \varphi)]$$

Multiplicando y dividiendo la ecuación (2.34) por $(|\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2)$ se obtiene:

$$I = |\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2 \left[1 + \frac{\vec{S}_0 \cdot \vec{R}_0}{|\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2} [2 \cos(\vec{K} \cdot \vec{y} - \varphi)] \right] \quad (2.35)$$

Donde:

$$m = 2 \frac{\vec{S}_0 \cdot \vec{R}_0}{|\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2} \quad (2.36)$$

Reemplazando la ecuación (2.36) en la ecuación (2.35) la modulación del patrón de intensidad es:

$$I = (|\vec{S}_0|^2 + |\vec{R}_0|^2) [1 + |m| [\cos(\vec{K} \cdot \vec{y} - \varphi)]]$$

Siendo el modulo del vector de red :

$$|\vec{K}| = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.37)$$

El espaciado entre franjas está dado por:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2n \sin(\theta)} \quad (2.38)$$

Donde λ es la longitud de onda de los haces, θ es el ángulo de registro y n es el índice de refracción del medio.

Capítulo 3

3 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN CRISTALES BTO

El cambio de las propiedades ópticas al estar sometido a un campo eléctrico, se describe de manera interna en el cristal como una variación del índice de refracción. El cristal BTO pertenece al sistema cúbico y a la simetría de clase 23. Dicho cristal en estado imperturbable es isótropo; poseen una actividad óptica característica de cada cristal y no son centros simétricos. La gran incógnita es analizar la variación de la isotropía del medio y como está se relaciona con la actividad óptica bajo la acción de una onda electromagnética.

Lo anterior se puede abordar analizando separadamente la birrefringencia lineal inducida por efecto electro-óptico y la birrefringencia circular debida a la actividad óptica.

La siguiente ecuación se conoce como la ecuación de onda, la cual se deduce a partir de las ecuaciones de Maxwell como:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Donde la ecuación (3.1), satisface la onda plana monocromática incidente en el medio homogéneo e isótropo la cual está dada por:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \quad (3.2)$$

Donde la frecuencia angular se representa por ω y \vec{K} que es el vector de onda; los cuales se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$K = |\vec{K}| = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} \quad (3.3)$$

La velocidad de una onda plana es:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} \quad (3.4)$$

El índice de refracción en un medio homogéneo e isótropo se define como:

$$n = \frac{c}{v} \quad (3.5)$$

Donde la velocidad de la luz está determinada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (3.6)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.4) y (3.6) en (3.5) se obtiene:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}$$

Donde el índice de refracción depende de la frecuencia de la onda, es decir que las ondas se propagan por el cristal con una velocidad de fase diferente si sus frecuencias son diferentes.

Reemplazando la ecuación (3.2) en (3.1) resulta en:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial (i\omega E_0 e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})})}{\partial t} = 0$$

La ecuación anterior se modifica teniendo en cuenta las ecuaciones (3.2) y (3.6) como:

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2 \vec{E} = 0 \quad (3.7)$$

Donde ϵ_r es la permitividad relativa.

3.1 Propagación de las ondas en medios anisótropos

En medios anisótropos, la velocidad de fase de las ondas depende tanto de su dirección de propagación como de su estado de polarización, en donde el estado de polarización varía debido a la anisotropía del cristal. Existen muchos cristales fotorrefractivos los cuales tienen características anisotrópicas como BTO, BSO, BGO entre otros. La permitividad dieléctrica para estos cristales puede plantearse como un tensor de rango 2. En los ejes cristalográficos, el tensor dieléctrico diagonalizado se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Las constantes dieléctricas en los ejes cristalográficos están representadas por ε_x , ε_y , ε_z y los índices de refracción como n_x , n_y , n_z .

3.1.1 Clasificación de cristales anisótropos

Los cristales pueden clasificarse de acuerdo a su simetría o elementos pertenecientes a ella, donde el comportamiento óptico depende de dicha simetría. Se presentan tres casos a continuación:

- ❖ En el primer caso, n_1 , n_2 y n_3 son diferentes. A este cristal se le denomina como biaxial.
- ❖ En el segundo caso, dos de los índices de refracción principales son iguales $n_1 = n_2 = n_o$ (donde n_o es el índice ordinario) y $n_3 = n_e$ (donde n_e representa al índice extraordinario). Cuando esto se da, a los cristales se les denomina uniaxiales. Dichos cristales se caracterizan por tener una simetría tetragonal, hexagonal o trigonal.
- ❖ Para el tercer caso los cristales tienen un solo valor para el índice de refracción y se les denomina medios amorfos o isótropos ($n_1 = n_2 = n_3 = n$)

3.1.2 Elipsoide de índices

El elipsoide de índices para una superficie tridimensional, está dado por:

$$\sum \eta_{ij} \xi_i \xi_j = 1 \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Donde ξ_i representa la coordenada i -ésima de un sistema de coordenadas, η_{ij} son las componentes del tensor de impermeabilidad, donde este se define como el inverso del tensor dieléctrico como:

$$\eta\epsilon = \epsilon_0 \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) puede escribirse en notación tensorial según:

$$\eta_{ij}\epsilon_{jk} = \epsilon_0\delta_{ik}$$

En las coordenadas principales el tensor de impermeabilidad se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

Donde los índices principales del medio están representados por n_x , n_y y n_z .

Con el elipsoide de índices, se puede describir como varían los índices en un medio transparente, cuando este está sometido a un campo eléctrico externo.

La ecuación del elipsoide de índices de forma general está dada por:

$$\begin{aligned} \sum \eta_{ij} \xi_i \xi_j = \eta_{xx}xx + \eta_{yy}yy + \eta_{zz}zz + \eta_{xy}xy + \eta_{xz}xz + \eta_{zx}zx + \eta_{zy}zy \\ + \eta_{yx}yx + \eta_{yz}yz = 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \sum \eta_{ij} \xi_i \xi_j = \eta_{xx}x^2 + \eta_{yy}y^2 + \eta_{zz}z^2 + (\eta_{yx} + \eta_{xy})xy + (\eta_{xz} + \eta_{zx})zx \\ + (\eta_{zy} + \eta_{yz})yz = 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por el principio de conservación de energía se permite establecer que el tensor η es simétrico, es decir que:

$$\eta_{xy} = \eta_{yx} \quad ; \quad \eta_{xz} = \eta_{zx} \quad ; \quad \eta_{yz} = \eta_{zy}$$

Como un resultado de esta simetría, es necesario abreviar notaciones, donde están definidas por [19]:

$$\begin{aligned}
 1 &= (xx) = (11) \\
 2 &= (yy) = (22) \\
 3 &= (zz) = (33) \\
 4 &= (yz) = (zy) = (23) = (32) \\
 5 &= (zx) = (xz) = (31) = (13) \\
 6 &= (xy) = (yx) = (12) = (21)
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Teniendo en cuenta (3.13) la ecuación del elipsoide de índices se modifica directamente en:

$$\eta_1 x^2 + \eta_2 y^2 + \eta_3 z^2 + 2\eta_4 yz + 2\eta_5 zx + 2\eta_6 xy = 1
 \tag{3.14}$$

Las componentes η_1 , η_2 , η_3 , η_4 , η_5 y η_6 se presentan como una variación del elipsoide de índices, debido a la acción de un campo eléctrico externo tal como se muestra en la figura 3.1.

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \eta + \Delta\eta_1 \\
 \eta_2 &= \eta + \Delta\eta_2 \\
 \eta_3 &= \eta + \Delta\eta_3 \\
 \eta_4 &= \Delta\eta_4 \\
 \eta_5 &= \Delta\eta_5 \\
 \eta_6 &= \Delta\eta_6
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Cuando el cristal no está sometido a un campo eléctrico externo, el elipsoide de índices se reduce a una esfera y las componentes principales del tensor son:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$$

Retomando la consideración para el campo externo, el elipsoide de índices cambiaría de la siguiente forma:

$$(\eta + \Delta\eta_1)x^2 + (\eta + \Delta\eta_2)y^2 + (\eta + \Delta\eta_3)z^2 + 2\Delta\eta_4yz + 2\Delta\eta_5zx + 2\Delta\eta_6xy = 1$$

La ecuación que describe la intersección entre el plano normal al vector \vec{u} y el elipsoide se obtiene cuando $y=0$ como se muestra en la ecuación (3.16).

$$(\eta + \Delta\eta_1)x^2 + (\eta + \Delta\eta_3)z^2 + 2\Delta\eta_5zx = 1 \quad (3.16)$$

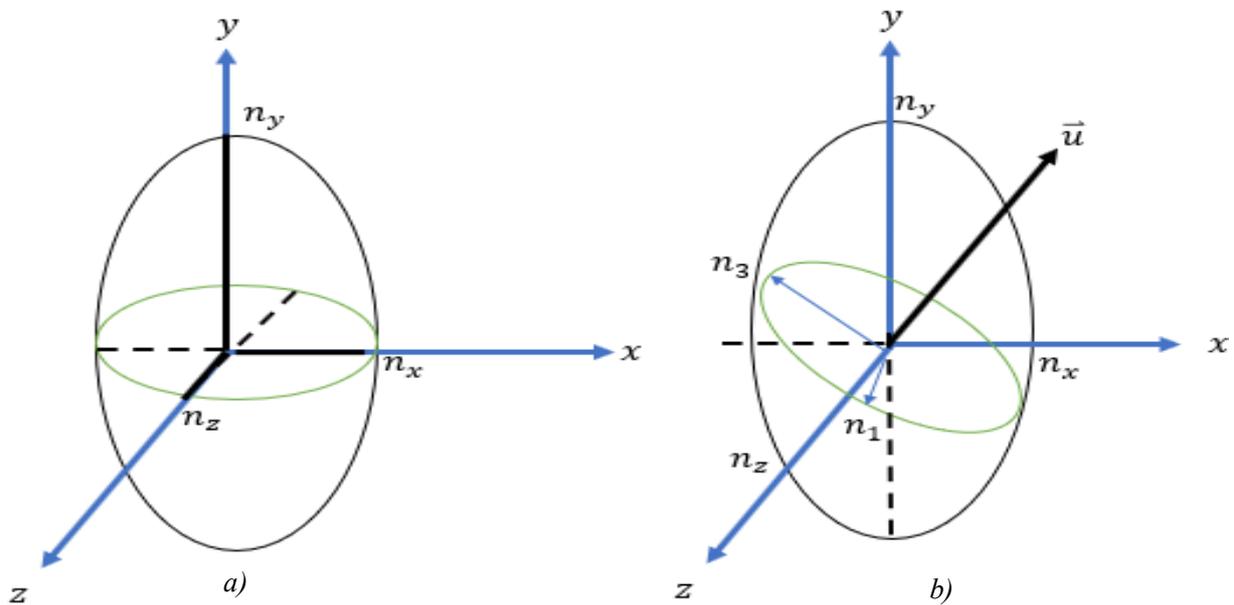


Figura 3.1. Elipsoide de índices (a) Cuando no hay campo eléctrico externo (b) En presencia del campo externo aplicado

3.2 Método del cálculo de Jones para los estados de polarización

El método matricial del cálculo propuesto en el año 1941 por Jones [20], permite determinar el estado de polarización de la luz al atravesar todo el sistema óptico. Cuando se habla de

sistemas ópticos se hace referencia a polarizadores, láminas retardadoras y filtros, los cuales pueden estar orientados a un ángulo diferente cada uno.

En el método de Jones, el estado de polarización se puede representar como un vector de dos componentes y cada elemento óptico que forma al sistema por una matriz 2x2. Donde la matriz resultante se obtiene multiplicando las diferentes matrices de los elementos ópticos que lo componen en el orden en el cual va avanzando el haz de luz. El estado de polarización de la luz transmitida o que atraviesa el medio se puede obtener al multiplicar el vector que representa la luz incidente, ya sea lineal, circular o elíptica por la matriz obtenida de los elementos ópticos [21].

3.2.1 Estados de polarización de una onda plana

La polarización de la luz debe tener en cuenta la dirección del campo eléctrico $\vec{E}(r,t)$, el cual varía sinusoidalmente con el tiempo, cuyas amplitudes y fases son ligeramente diferentes. Cada vez que r cambia, el extremo del campo eléctrico va trazando una elipse a medida que se mueve por el plano, donde el estado de polarización se determina mediante la elipticidad y orientación de la elipse y su tamaño se determina por su intensidad óptica.

Se considera una onda monocromática de frecuencia ω que viaja en dirección r , el campo eléctrico está en el plano x, z mediante:

$$\vec{E} = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\} \quad (3.17)$$

Donde \vec{E}_0 es la amplitud de la onda.

Las componentes para la amplitud de la onda son $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0z}\hat{z}$ el cual es un vector con componentes complejas E_{0x} y E_{0z} . El estado de polarización para esta onda puede ser escrito en forma de un vector de Jones como:

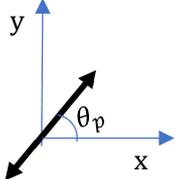
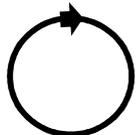
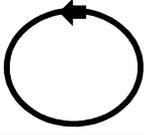
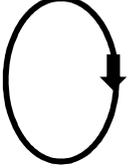
$$J = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0z} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

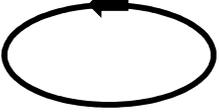
Este vector contiene información de fase y amplitud de cada una de las componentes del campo. Cuando se requiere saber cuál es el estado de polarización de la onda es conveniente normalizarlo, donde al normalizarlo resulta:

$$JJ^* = 1 \quad (3.19)$$

A continuación, se mostrarán algunos estados de polarización mediante los vectores de Jones.

Tabla 3.1. Representación de los estados de polarización [21]

Estado de polarización	Vectores de Jones	Representación de las polarizaciones
Linealmente polarizada en dirección x	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	
Linealmente polarizada en dirección y	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	
Linealmente polarizada, plano de polarización haciendo un ángulo θ_p con el eje x	$\begin{bmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{bmatrix}$	
Circularmente polarizado hacia la derecha	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$	
Circularmente polarizado hacia la izquierda	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix}$	
Elípticamente polarizado hacia la derecha	$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$	

Elípticamente polarizado hacia la izquierda	$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -j \end{bmatrix}$	
--	--	---

3.2.2 Representación matricial de dispositivos de polarización

Al transmitirse la onda plana a través de un elemento óptico lineal, este altera la polarización de la onda y cumple con el principio de superposición de los campos ópticos transmitidos.

Las amplitudes de los campos pertenecientes a las ondas de entrada y transmitidas en las distintas coordenadas se representan por E_{1x} , E_{1z} (incidentes) y E_{2x} , E_{2z} (transmitidos).

Estas componentes están relacionadas mediante:

$$\begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1z} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Al desarrollar los vectores de Jones escritos en la ecuación (3.20) donde $J_2 = TJ_1$ es esta matriz la que describe el sistema, el cual se puede escribir como:

$$\begin{aligned} E_{2x} &= T_{11}E_{1x} + T_{12}E_{1z} \\ E_{2z} &= T_{21}E_{1x} + T_{22}E_{1z} \end{aligned}$$

Donde T_{11} , T_{12} , T_{21} y T_{22} son constantes que caracterizan el sistema.

Los elementos que componen los vectores y matrices de Jones, tienen que estar acordes al sistema coordenado elegido, puesto que, mediante la matriz de transformación ellos pueden ser determinados en otro sistema coordenado.

Se toma el sistema cartesiano $x-z$; al mover este sistema a uno nuevo este se denota como primado, donde la dirección primada forma un ángulo φ con respecto a la no primada. El vector de Jones en el sistema primado puede ser escrito de la siguiente manera.

$$J' = R(\varphi)J$$

Donde $R(\varphi)$ representa la matriz de rotación:

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\text{sen}(\varphi) \\ \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

3.3 Efecto electroóptico

En estado normal, sin presencia de factores externos o contracciones mecánicas, el cristal BTO es isótropo debido a su simetría cúbica, pero, cuando este es sometido a un campo eléctrico externo, se provoca en él una anisotropía por efecto electro-óptico lineal (Pockels) o una birrefringencia lineal, la cual es directamente proporcional a la intensidad del campo eléctrico aplicado.

Lo principal, es analizar el comportamiento de las ondas propagándose por el medio fotorrefractivo, cuando este se somete a un campo eléctrico externo, el cual está orientado con respecto a los ejes cristalográficos. Mediante el elipsoide de índices se permite determinar el comportamiento de los modos normales de vibración en el medio. Cuando el medio está en presencia de un campo eléctrico externo, se produce una variación en el tensor de permitividad o lo que es lo mismo, un cambio en el tamaño y dirección del elipsoide de índices, donde a dicha variación en las componentes pertenecientes al elipsoide de índices se le denomina efecto Pockels o electro-óptico lineal.

El efecto electro-óptico, se define en términos del cambio del tensor impermeabilidad o tensor de índices como:

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk}E_k + s_{ijkl}E_kE_m$$

Las constantes r_{ijk} y s_{ijklm} son llamadas coeficientes Pockels (electro-ópticos lineales) y coeficientes Kerr (electro-ópticos cuadráticos) respectivamente. Para este caso el efecto Kerr no se tiene en cuenta, por lo tanto:

$$\Delta\eta_{ij} = r_{ijk}E_k \quad (3.22)$$

La simetría cúbica permite realizar el intercambio de los dos primeros índices, esto se hace con el fin de reducir la notación y escribir la matriz de coeficientes electro-ópticos.

$$r_{ijk} = r_{jik}$$

Entonces de acuerdo a esta simetría y a la contracción de índices, el tensor de coeficientes electro-ópticos se puede reescribir de la siguiente manera:

$$r_{lk} = r_{ijk}$$

De forma general la anterior relación, teniendo en cuenta la ecuación (3.13) resulta en:

$$r_{1k} = r_{11k}$$

$$r_{2k} = r_{22k}$$

$$r_{3k} = r_{33k}$$

$$r_{4k} = r_{23k} = r_{32k}$$

$$r_{5k} = r_{31k} = r_{13k}$$

$$r_{6k} = r_{12k} = r_{21k}$$

Donde k varía de (1 a 3) estos números representan cada una de las coordenadas.

De acuerdo a la notación contraída, los coeficientes para el factor electro-óptico se pueden escribir en una matriz 6x3. Entonces se puede deducir que existen 18 componentes pertenecientes al tensor electro-óptico, donde conforme al grupo de simetría del cristal, algunas componentes del tensor son cero. Debido a la simetría cúbica, el número de componentes independientes decrece, este supuesto lo que da entender es que a medida que hay mayor simetría en la estructura del cristal van a existir menos componentes electro-ópticas en la matriz.

La ecuación (3.22) se puede escribir solo teniendo en cuenta la aproximación lineal como:

$$\Delta\eta_l = \sum_k r_{lk} E_k \quad (3.23)$$

Donde k varía de x a z y l de 1 a 6 .

Escribiendo la ecuación (3.23) en su forma matricial tal que:

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} \\ r_{4x} & r_{4y} & r_{4z} \\ r_{5x} & r_{5y} & r_{5z} \\ r_{6x} & r_{6y} & r_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Se debe tener en cuenta que:

- 1) La ausencia de centro de simetría permite la existencia de un efecto electro-óptico de primer orden.
- 2) La actividad óptica no varía por acción de un campo eléctrico.

Por definición se conoce que para cristales cúbicos como el BTO con simetría 23 los únicos coeficientes electro-ópticos no nulos son: r_{41} , r_{52} , r_{63} , tal como se muestra en (3.24), los cuales toman un mismo valor r_{41} :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

3.3.1 Configuración cristalográfica transversal.

El cristal BTO tiene sus caras paralelas a los planos (001) y (110). Existen diferentes tipos de configuraciones, pero en la presente investigación se hará énfasis en la configuración transversal cuando $\vec{K}_G \parallel$ a los ejes $\langle 001 \rangle$ y $\langle 110 \rangle$.

Se define un sistema coordenado para la propagación de la luz, donde \vec{K}_G es paralelo a la dirección $\langle 001 \rangle$, y el segundo caso se cumple cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ donde la propagación de la luz ocurre en el eje y .

Para esto se hacen una serie de rotaciones de los ejes cristalográficos hacia los ejes del laboratorio.

$$X_i = a_{ij}X_j \quad (3.25)$$

Donde a_{ij} es la matriz de transformación, X_j representa el sistema cristalográfico y X_i el sistema coordenado de propagación.

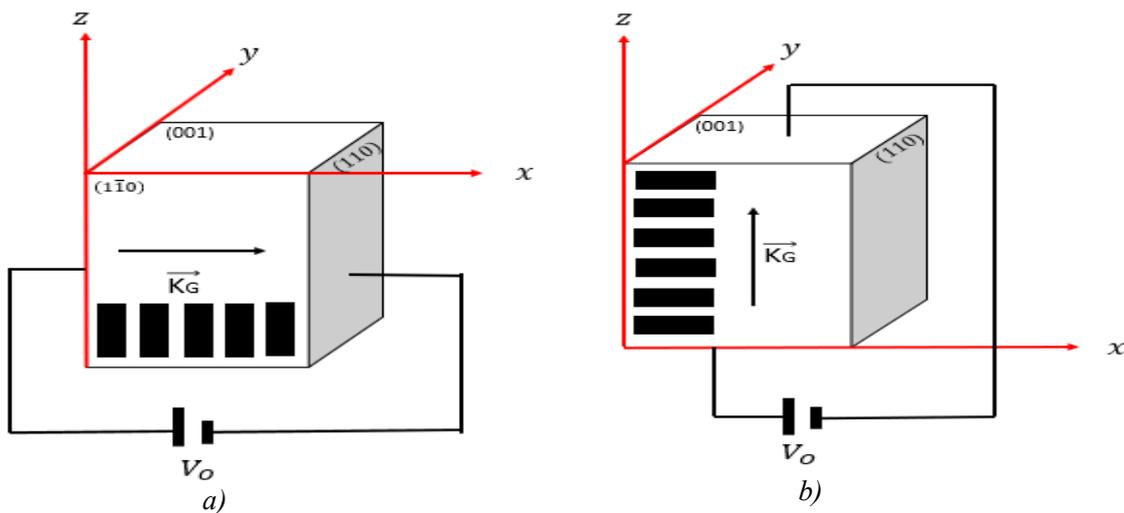


Figura 3.2. Configuración transversal. a) $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ y b) $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$

Partiendo de la premisa, en la cual el campo aplicado sobre el cristal está en la dirección cristalográfica $\langle 110 \rangle$ y el plano de incidencia está determinado por (x,z) . Donde los ejes de laboratorio están dados por las componentes primadas y los cristalográficos por las componentes no primadas. Lo que nos indica lo anterior es que existe un ángulo entre los dos tipos de coordenadas, para ello se debe realizar una respectiva rotación de los ejes no primados a los de laboratorio como se muestra en la figura 3.3.

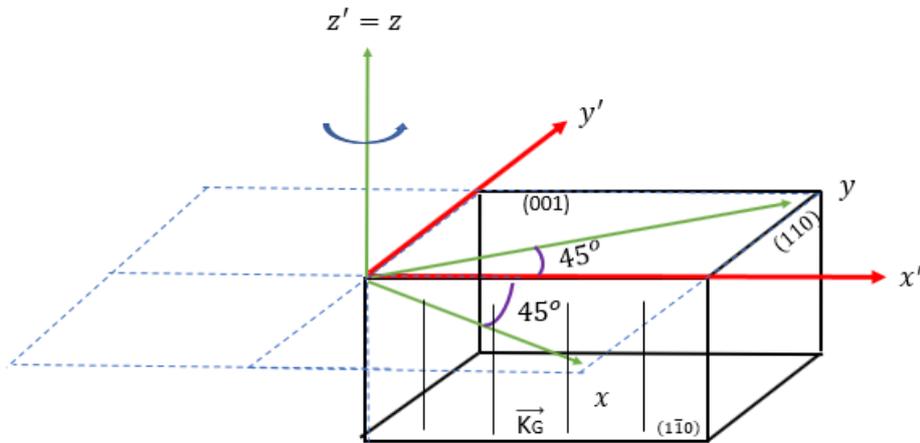


Figura 3.3. Cristal bajo dos sistemas coordenados, ejes de laboratorio (rojo) y ejes cristalográficos (verde)

La matriz de cofactores o cosenos directores se puede escribir como:

$$A = \begin{bmatrix} (x', x) & (x', y) & (x', z) \\ (y', x) & (y', y) & (y', z) \\ (z', x) & (z', y) & (z', z) \end{bmatrix}$$

Las componentes primadas dan información acerca de la posición final de los ejes cristalográficos. Donde la rotación se hace alrededor del eje z y es de 45° .

$$A = \begin{bmatrix} \cos 45 & \cos 45 & \cos 90 \\ \cos 135 & \cos 45 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

La matriz de transformación está definida por [21]:

$$[a_{ij}] = \{A\}^{-1}$$

$$[a_{ij}] = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \quad (3.27)$$

La inversa de una matriz está determinada por:

$$T^{-1} = \frac{adj(T^t)}{|T|} \quad (3.28)$$

Haciendo el respectivo proceso matemático descrito en el apéndice A, se llega a que la matriz de transformación es:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Al orientar los ejes cristalográficos hacia los ejes de propagación se condicionará la birrefringencia lineal. Por lo cual es necesario escribir el tensor de coeficientes electro-ópticos en esta nueva dirección, lo anterior se da a través de la siguiente ecuación.

$$r_{ijk} = \sum_l \sum_m \sum_n a_{il} a_{jm} a_{kn} r_{lmn} \quad (3.30)$$

Los cosenos directores, al pasar de un sistema coordenado (cristalográfico) al otro sistema coordenado (laboratorio) están representados por a_{il} , a_{jm} y a_{kn} y los coeficientes electro-ópticos en su forma tensorial como r_{lmn} y r_{ijk} respectivamente [21].

Abriendo la sumatoria, donde l , m y n varían de 1 hasta 3, la ecuación (3.30) cambiaría directamente como:

$$\begin{aligned}
 r_{ijk} = & a_{i1}a_{j1}a_{k1}r_{111} + a_{i1}a_{j1}a_{k1}r_{112} + a_{i1}a_{j1}a_{k3}r_{113} + a_{i1}a_{j2}a_{k1}r_{121} + a_{i1}a_{j2}a_{k2}r_{122} \\
 & + a_{i1}a_{j2}a_{k3}r_{123} + a_{i1}a_{j3}a_{k1}r_{131} + a_{i1}a_{j3}a_{k2}r_{132} + a_{i1}a_{j3}a_{k3}r_{133} \\
 & + a_{i2}a_{j1}a_{k1}r_{211} + a_{i2}a_{j1}a_{k2}r_{212} + a_{i2}a_{j1}a_{k3}r_{213} + a_{i2}a_{j2}a_{k1}r_{221} \\
 & + a_{i2}a_{j2}a_{k2}r_{222} + a_{i2}a_{j2}a_{k3}r_{223} + a_{i2}a_{j3}a_{k1}r_{231} + a_{i2}a_{j3}a_{k2}r_{232} \\
 & + a_{i2}a_{j3}a_{k3}r_{233} + a_{i3}a_{j1}a_{k1}r_{311} + a_{i3}a_{j1}a_{k2}r_{312} + a_{i3}a_{j1}a_{k3}r_{313} \\
 & + a_{i3}a_{j2}a_{k1}r_{321} + a_{i3}a_{j2}a_{k2}r_{322} + a_{i3}a_{j2}a_{k3}r_{323} + a_{i3}a_{j3}a_{k1}r_{331} \\
 & + a_{i3}a_{j3}a_{k2}r_{332} + a_{i3}a_{j3}a_{k3}r_{333}
 \end{aligned}$$

Para cristales con simetría cúbica como el cristal BTO las componentes que no son cero están dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_{41} &= r_{231} = r_{321} \\
 r_{52} &= r_{312} = r_{132} \\
 r_{63} &= r_{123} = r_{213}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

De la consideración (3.31), el tensor de coeficientes electro-ópticos adquiere la siguiente forma:

$$r_{ijk} = (a_{i1}a_{j2}a_{k3} + a_{i1}a_{j3}a_{k2} + a_{i2}a_{j1}a_{k3} + a_{i2}a_{j3}a_{k1} + a_{i3}a_{j1}a_{k2} + a_{i3}a_{j2}a_{k1})r_{41} \tag{3.32}$$

Al aplicar la matriz de transformación obtenida en (3.29) sobre la ecuación (3.32) cuyo procedimiento se muestra en el apéndice A se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -r_{41} \\ 0 & 0 & r_{41} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

3.3.2 Birrefringencia

Retomando la expresión (3.16) para el elipsoide de índices:

$$(\eta + \Delta\eta_1)x^2 + (\eta + \Delta\eta_3)z^2 + 2\Delta\eta_5zx = 1 \quad (3.34)$$

Teniendo en cuenta la matriz (3.33) para los coeficientes electrópticos y el campo eléctrico con tres componentes, la ecuación (3.23) se modifica directamente en:

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r_{41} \\ 0 & 0 & r_{41} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{41}E_z \\ r_{41}E_z \\ 0 \\ r_{41}E_y \\ -r_{41}E_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Reemplazando los valores hallados en la ecuación (3.35) para la impermeabilidad en la ecuación (3.34) para el elipsoide de índices, se obtiene:

$$(\eta - r_{41}E_z)x^2 + \eta z^2 - 2r_{41}E_xxz = 1 \quad (3.36)$$

Realizando la transformación del sistema cristalográfico al sistema de laboratorio a través de:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$x = x' \cos\varphi - z' \sin\varphi$$

$$z = x' \sin\varphi + z' \cos\varphi \quad (3.37)$$

Reemplazando las relaciones (3.37) en la ecuación (3.36), la ecuación para el elipsoide quedaría como:

$$(\eta - r_{41}E_z)(x' \cos\varphi - z' \sin\varphi)^2 + \eta(x' \sin\varphi + z' \cos\varphi)^2 - 2r_{41}E_x(x' \cos\varphi - z' \sin\varphi)(x' \sin\varphi + z' \cos\varphi) = 1$$

Realizando el producto del tercer término resulta en:

$$(\eta - r_{41}E_z)(x'^2 \cos^2\varphi - 2z'x' \cos\varphi \sin\varphi + z'^2 \sin^2\varphi) + \eta(x'^2 \sin^2\varphi + 2z'x' \sin\varphi \cos\varphi + z'^2 \cos^2\varphi) - 2r_{41}E_x(x'^2 \cos\varphi \sin\varphi - z'x' \sin^2\varphi + z'x' \cos^2\varphi - z'^2 \sin\varphi \cos\varphi) = 1$$

Distribuyendo términos de la ecuación anterior:

$$x'^2 \eta \cos^2\varphi - 2\eta z'x' \cos\varphi \sin\varphi + z'^2 \eta \sin^2\varphi - r_{41}E_z x'^2 \cos^2\varphi + r_{41}E_z 2z'x' \cos\varphi \sin\varphi - r_{41}E_z z'^2 \sin^2\varphi + x'^2 \eta \sin^2\varphi + 2z'x' \eta \sin\varphi \cos\varphi + z'^2 \eta \cos^2\varphi - 2r_{41}E_x x'^2 \cos\varphi \sin\varphi + 2r_{41}E_x z'x' \sin^2\varphi - 2r_{41}E_x z'x' \cos^2\varphi + 2r_{41}E_x z'^2 \sin\varphi \cos\varphi = 1$$

Agrupado y cancelando algunos términos se obtiene:

$$x'^2 \eta + z'^2 \eta - r_{41}E_z x'^2 \cos^2\varphi + r_{41}E_z 2z'x' \cos\varphi \sin\varphi - r_{41}E_z z'^2 \sin^2\varphi - 2r_{41}E_x x'^2 \cos\varphi \sin\varphi + 2r_{41}E_x z'x' \sin^2\varphi - 2r_{41}E_x z'x' \cos^2\varphi + 2r_{41}E_x z'^2 \sin\varphi \cos\varphi = 1$$

Factorizando los términos que tienen x'^2 , z'^2 y $z'x'$ se llega a:

$$x'^2(\eta - r_{41}E_z \cos^2\varphi - 2r_{41}E_x \cos\varphi \sin\varphi) + z'^2(\eta - r_{41}E_z \sin^2\varphi + 2r_{41}E_x \sin\varphi \cos\varphi) + z'x'(r_{41}E_z 2\cos\varphi \sin\varphi + 2r_{41}E_x \sin^2\varphi - 2r_{41}E_x \cos^2\varphi) = 1 \quad (3.38)$$

Donde el factor que multiplica a $z'x'$, se hace cero cuando φ cumple que:

$$\tan 2\varphi = \frac{2E_x}{E_z} \quad (3.39)$$

Para demostrar la ecuación (3.39) se toma el factor que está multiplicando a $z'x'$ de la siguiente forma:

$$r_{41}E_z 2\cos\varphi \sin\varphi + 2r_{41}E_x \sin^2\varphi - 2r_{41}E_x \cos^2\varphi = 0 \quad (3.40)$$

Por identidades trigonométricas se conoce que:

$$2\cos\varphi \sin\varphi = \sin 2\varphi$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$

Reemplazando las identidades mostradas anteriormente en la ecuación (3.40) está se modificaría directamente como:

$$E_z \sin 2\varphi - 2 E_x \cos 2\varphi = 0 \quad (3.41)$$

De la ecuación (3.41) se deduce la expresión (3.39). Teniendo en cuenta la condición (3.39), la expresión (3.38) resulta:

$$\begin{aligned} & x'^2(\eta - r_{41}E_z \cos^2\varphi - 2 r_{41}E_x \cos\varphi \sin\varphi) \\ & + z'^2(\eta - r_{41}E_z \sin^2\varphi + 2 r_{41}E_x \sin\varphi \cos\varphi) = 1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por identidades trigonométricas se conoce que:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \quad \sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

Por geometría, a partir de la expresión (3.39) se deduce lo siguiente:

$$\sin 2\varphi = \frac{2 E_x}{\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \quad \cos 2\varphi = \frac{E_z}{\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}}$$

Reemplazando las respectivas identidades trigonométricas y las deducidas a partir de la ecuación (3.39) en la ecuación (3.42) se obtiene:

$$x'^2 \left(\eta - r_{41}E_z \left(\frac{1}{2} + \frac{E_z}{2\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) - r_{41}E_x \left(\frac{2 E_x}{\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) \right) + z'^2 \left(\eta - r_{41}E_z \left(\frac{1}{2} - \frac{E_z}{2\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) + r_{41}E_x \left(\frac{2 E_x}{\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) \right) = 1$$

Multiplicando $r_{41}E_z$ por cada uno de los términos dentro de los paréntesis tal que:

$$x'^2 \left(\eta - \left(\frac{r_{41}E_z}{2} + \frac{r_{41} E_z^2}{2\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) - \left(\frac{2 r_{41} E_x^2}{\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) \right) + z'^2 \left(\eta - \left(\frac{r_{41}E_z}{2} - \frac{r_{41} E_z^2}{2\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) + \left(\frac{2 r_{41} E_x^2}{\sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}} \right) \right) = 1$$

Operando los valores internos para las raíces:

$$x'^2 \left(\eta - \frac{r_{41} E_z}{2} - \left(\frac{r_{41} E_z^2 \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} + 4 r_{41} E_x^2 \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}}{2(4 E_x^2 + E_z^2)} \right) \right) + z'^2 \left(\eta - \frac{r_{41} E_z}{2} + \left(\frac{r_{41} E_z^2 \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} + 4 r_{41} E_x^2 \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}}{2(4 E_x^2 + E_z^2)} \right) \right) = 1$$

Sacando factor común de las respectivas raíces y los valores para el campo en x y en z se obtiene:

$$x'^2 \left(\eta - \frac{r_{41} E_z}{2} - \left(\frac{r_{41} (4 E_x^2 + E_z^2) \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}}{2(4 E_x^2 + E_z^2)} \right) \right) + z'^2 \left(\eta - \frac{r_{41} E_z}{2} + \left(\frac{r_{41} (4 E_x^2 + E_z^2) \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}}{2(4 E_x^2 + E_z^2)} \right) \right) = 1$$

Cancelando términos de la expresión anterior se llega a:

$$x'^2 \left(\eta - \frac{r_{41} E_z}{2} - \left(\frac{r_{41} \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}}{2} \right) \right) + z'^2 \left(\eta - \frac{r_{41} E_z}{2} + \left(\frac{r_{41} \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2}}{2} \right) \right) = 1 \quad (3.43)$$

La ecuación para una elipse se define como:

$$\frac{x'^2}{n_1^2} + \frac{y'^2}{n_2^2} + \frac{z'^2}{n_3^2} = 1$$

Se tiene que los índices principales son n_1 y n_3 , y que $\eta = \frac{1}{n^2}$.

Relacionando la ecuación (3.43) con la ecuación para una elipse se obtiene:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{r_{41}}{2} \left(E_z + \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) = \frac{1}{n_1^2} \quad (3.44)$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{r_{41}}{2} \left(E_z - \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) = \frac{1}{n_3^2} \quad (3.45)$$

De forma experimental según [5] se tiene que:

$$\Delta n_1 = |n_1 - n| \quad (3.46)$$

$$\Delta n_3 = |n_3 - n|$$

Ya que Δn_1 y Δn_2 son muy pequeñas (3.46) puede reescribir como:

$$\begin{aligned} n_1 &= n - \Delta n_1 \\ n_3 &= n - \Delta n_3 \end{aligned} \quad (3.47)$$

A partir de las relaciones mostradas en (3.47) se puede afirmar que Δn_1 y Δn_2 no afectan en nada, ya sean positivas o negativas.

Reemplazando las relaciones (3.47) en la ecuación (3.44) y desarrollando matemáticamente mediante:

$$\begin{aligned} -\frac{r_{41}}{2} \left(E_z + \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) &= \frac{1}{(n - \Delta n_1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{(n - \Delta n_1)^2} - \frac{1}{n^2} &= \frac{n^2 - (n - \Delta n_1)^2}{n^2 (n - \Delta n_1)^2} \\ \frac{n^2 - n^2 + 2n\Delta n_1 - \Delta n_1^2}{n^2 (n^2 - 2n\Delta n_1 + \Delta n_1^2)} &= \frac{2n\Delta n_1 - \Delta n_1^2}{n^2 (n^2 - 2n\Delta n_1 + \Delta n_1^2)} \\ \Delta n_1^2 &\approx 0 \\ \frac{2n\Delta n_1}{n^3 (n - \Delta n_1 - \Delta n_1)} & \end{aligned}$$

Reemplazando $n - \Delta n_1$ en la ecuación anterior:

$$\frac{2n\Delta n_1}{n^3 (n_1 - \Delta n_1)}$$

Reemplazando Δn_1 :

$$\begin{aligned} \frac{2n\Delta n_1}{n^3 (n_1 - |n_1 - n|)} \\ \frac{2n\Delta n_1}{n^3 (n_1 - |n_1 - n|)} \approx \frac{2n\Delta n_1}{n^3 (n)} = \frac{2\Delta n_1}{n^3} \\ -\frac{r_{41}}{2} \left(E_z + \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) &= \frac{2\Delta n_1}{n^3} \end{aligned}$$

De la anterior relación se deduce el factor para Δn_1 . Donde realizando el mismo procedimiento para Δn_3 se obtiene que las variaciones están dadas por:

$$-\frac{r_{41}n^3}{4} \left(E_z + \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) = \Delta n_1$$

$$-\frac{r_{41}n^3}{4} \left(E_z - \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) = \Delta n_3$$

Escrito de otra forma para la configuración transversal, resulta:

$$\Delta n = |\Delta n_1 - \Delta n_3| = \left| -\frac{r_{41}n^3}{4} \left(E_z + \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) - \left(-\frac{r_{41}n^3}{4} \left(E_z - \sqrt{4 E_x^2 + E_z^2} \right) \right) \right| \quad (3.48)$$

3.3.3 Tensor dieléctrico

El índice de refracción se relaciona con la permitividad del medio dieléctrico. Donde, la permitividad es un tensor de rango 2, que está determinado por:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{bmatrix} \rightarrow \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

ε_0 se conoce como la permitividad dieléctrica en el vacío; representa los valores para el índice de refracción en las distintas direcciones dentro del cristal. Cuando los tres valores para el índice de refracción son diferentes, el material es anisotrópico. En la ecuación (3.49) se muestra como la permitividad depende de la anisotropía del cristal.

3.4 Actividad óptica

La actividad óptica, es también conocida como birrefringencia circular, la cual se asocia con la rotación del plano de polarización cuando la luz incide sobre el medio, donde la onda está linealmente polarizada de manera vertical u horizontal. El cristal fotorrefractivo en este caso el BTO puede presentar cualquiera de los dos tipos de rotación ya sea levógiro o dextrógiro.

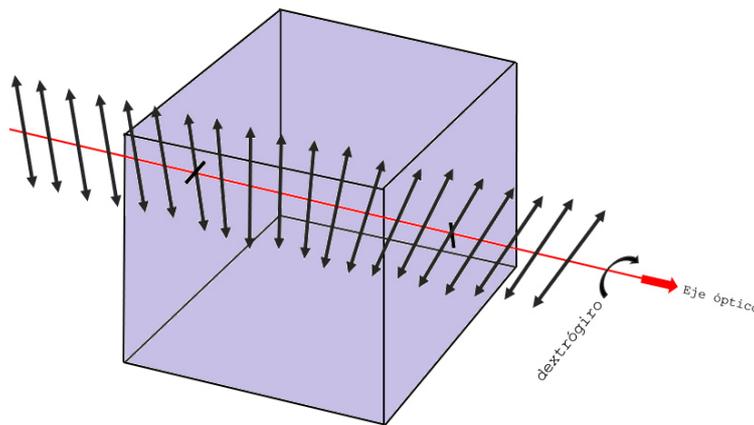


Figura 3.4. Actividad óptica en un cristal fotorrefractivo [22]

3.4.1 Actividad óptica en cristales con características isotrópicas

Cuando se propagan ondas luminosas de tipo monocromáticas en medios fotorrefractivos isotrópicos, se aprecia que su plano de polarización se rota un ángulo el cual es proporcional al espesor atravesado, este fenómeno es llamado actividad óptica. La primera vez que fue apreciado fue en el cuarzo, y además de presentarse en el BTO también se presenta en otros cristales cúbicos como el BSO y BGO, y en algunos cristales uniaxiales o biaxiales donde la dirección de la luz debe estar en dirección del eje óptico.

El primero en observar dicho fenómeno fue el francés Dominique R.F en el año de 1811. Dominique descubrió que el plano de polarización o vibración del haz de luz lineal era

afectado por una rotación a medida que se propagaba por el cuarzo. En el mismo período de tiempo Jean Batiste Biot observó el mismo efecto en sustancias transparentes. Los investigadores mencionados anteriormente, plantearon que el material que haga girar el campo de una onda plana lineal se le conocería como un material ópticamente activo.

En el año de 1825 Fresnel propuso que el fenómeno de la actividad óptica se da por la división de onda del haz incidente, el cual tiene que estar linealmente polarizado, donde esta onda se divide en dos ondas circularmente polarizadas, una de las ondas dirigida hacia la derecha y la otra hacia la izquierda. Estas ondas producidas por la división del haz tienen diferente velocidad donde para cada una de ellas se establece un índice de refracción diferente n_+ y n_- .

Una onda polarizada en un plano horizontal que se propaga por un medio ópticamente activo se divide en dos ondas circulares, una dextrógira y otra levógira. A medida estas ondas se propagan por el medio, se produce una resultante cuyo plano de polarización rota un ángulo ψ . La rotación del plano de polarización es por consiguiente igual a la mitad de la diferencia de fase que separa las dos componentes circulares.

A continuación, se escribe el ángulo de rotación del plano de polarización teniendo en cuenta la diferencia de fase de las ondas circulares como:

$$\delta = \frac{2\pi L_y}{\lambda} (n_- + n_+) \quad (3. 50)$$

El poder rotatorio se define por unidad de longitud como:

$$\rho = \frac{\delta}{2L_y} = \frac{\pi}{\lambda} (n_- + n_+) \quad (3. 51)$$

En la figura 3.5 se ilustra el giro del plano de polarización cuando el haz de luz se propaga en el medio. El ángulo ψ es proporcional al espesor del medio atravesado. En este caso se tomará que la onda gira hacia la derecha.

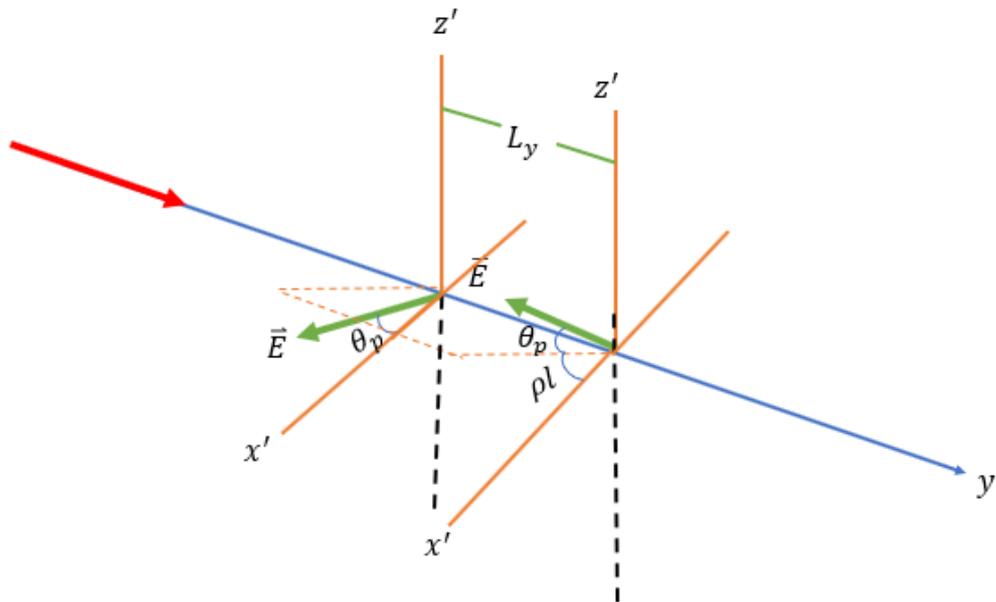


Figura 3.5. Rotación del plano de polarización de un haz de luz propagándose en un medio ópticamente activo [19]

En la figura 3.5 se representa la propagación de la onda incidente con un ángulo de polarización θ_p , este dependerá del ángulo de giro ρl y, por lo tanto, la amplitud de difracción se modificará debido a la rotación del plano de polarización [19,23,24].

Capítulo 4

4 MEZCLA DE DOS ONDAS

La intersección de dos haces en un medio fotorrefractivo genera un patrón de franjas de interferencia, donde la variación de intensidad inducirá una red de índices en el cristal. El vector de onda de la red está dado como $\vec{K}_G = \vec{k}_c - \vec{k}_i$. Esta red influye en la propagación de los haces y debido a ella las ondas son difractadas, por causa de las dispersiones de Bragg por ello se trabaja de acuerdo a dicha condición.

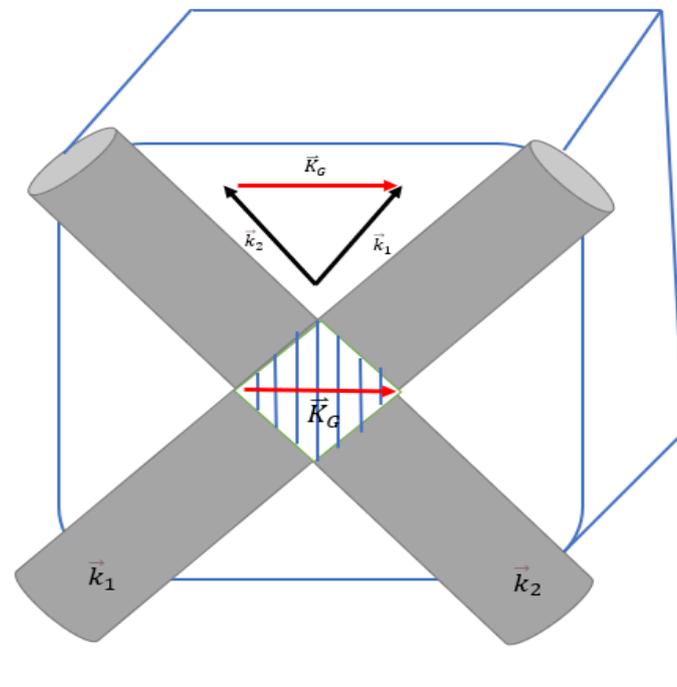


Figura 4.1. Interferencia de dos haces en el medio fotorrefractivo, donde $\vec{k}_c = \vec{k}_2$ y $\vec{k}_i = \vec{k}_1$

4.1 Mezclado de dos ondas para el caso degenerado

Para este caso se toma como consideración que las frecuencias de las ondas que se propagan por el medio sean iguales, dichas ondas producen un patrón de intensidad, el cual produce la variación del índice de refracción o constante dieléctrica por causa del campo interno

generado en el medio o campo de carga espacial. A continuación, se mostrará a partir de la teoría propuesta por Kogelnik las ecuaciones acopladas relacionadas con el fenómeno físico mencionado.

4.1.1 Teoría de ondas acopladas propuesta por Kogelnik para el caso degenerado

La teoría de acoplamiento propuesta por Kogelnik tiene como base la solución de las ecuaciones de Maxwell para dar solución a la forma en como se propagan las ondas en una estructura periódica en el interior del cristal, en el cual existe una variación periódica de las propiedades ópticas de este. Esta teoría es válida para redes de volumen. Se considera que solo dos ondas se propagan por la red, la cuales son denominadas como: onda señal S la y onda de referencia R . Dichas ondas obedecen la condición de Bragg, por lo tanto, los órdenes superiores que no cumplen con esta condición no son tomados en cuenta, ya que no contribuyen energéticamente.

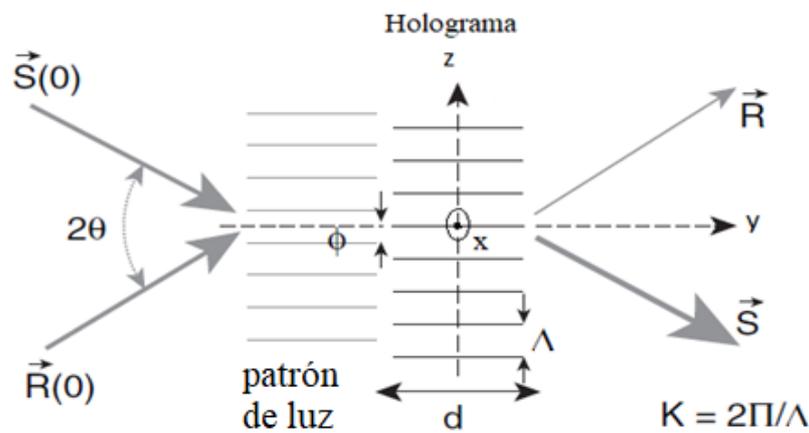


Figura 4.2. Acoplamiento interno de las ondas de referencia y señal al interior del cristal fotorrefractivo[17]

El proceso de reconstrucción en la red holográfica se muestra en la figura 4.2, cuando sobre la muestra está presente la onda de reconstrucción \vec{R} a un ángulo de incidencia θ . El eje de propagación y es perpendicular a la superficie de registro (x,z) . Los planos de las franjas se forman perpendiculares al plano de incidencia. El vector de red es \vec{K} o de otra forma \vec{K}_G , el cual está orientado perpendicular a los planos de las franjas tal como se ilustra en la figura

4.3 los cuales están separados una distancia Λ , la cual está dada por la ecuación (2.38), donde el vector de red forma un ángulo $\Phi = \phi_p$ con el eje de propagación.

La dirección de propagación de las ondas incidentes dentro del medio viene dada por el vector \vec{k}_c y \vec{k}_i y forman un ángulo θ_c y θ_i respecto al eje de propagación como se muestra en la figura 4.3.

Suponiendo que las ondas incidentes tienen la forma:

$$\vec{E} = \vec{R}(y, z)e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} + \vec{S}(y, z)e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad (4.1)$$

La ecuación para la propagación de una onda electromagnética en una red de difracción está dada por:

$$\nabla^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad (4.2)$$

Donde $\vec{E}(y, z)$ es la amplitud compleja de la componente del campo eléctrico que se supone es independiente de x , y oscila con una frecuencia angular ω . La constante de propagación $\gamma(y, z)$ se modula espacialmente y se relaciona con la constante dieléctrica relativa $\epsilon_r(y, z)$ a través de:

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \quad (4.3)$$

Donde c es la velocidad de la luz en el espacio vacío. Ahora se supone una rejilla unidimensional que se extiende desde $y=0$ hasta $y=l$. La permitividad relativa también se supone que varía dentro de la rejilla de acuerdo con la siguiente ley[17]:

$$\epsilon_r = \epsilon_{r0} + \epsilon_{r1} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} + \phi_p) \quad (4.4)$$

Donde ϵ_{r1} , es la amplitud de la modulación espacial y ϵ_{r0} es la constante dieléctrica promedio. El patrón se desplaza por ϕ_p con respecto al patrón de registro de la luz como se representa en la figura 4.2.

Para el factor γ^2 se tiene que:

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{r0} + \epsilon_{r1} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} + \phi_p)) \quad (4.5)$$

Escribiendo el coseno en su forma exponencial y multiplicando $\frac{\omega^2}{c^2}$ por cada uno de los términos se tiene:

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r0} + \frac{\omega^2}{2c^2} \epsilon_{r1} e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} + \phi_p)} + \frac{\omega^2}{2c^2} \epsilon_{r1} e^{-i(\vec{K} \cdot \vec{r} + \phi_p)}$$

Donde:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r0}$$

Separando los exponenciales, queda que la constante de propagación es:

$$\gamma^2 = \beta^2 + 2\beta \left[\frac{\omega}{4\sqrt{\epsilon_0}} \epsilon_{r1} e^{i\phi_p} \right] e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} + 2\beta \left[\frac{\omega}{4\sqrt{\epsilon_0}} \epsilon_{r1} e^{-i\phi_p} \right] e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (4.6)$$

Donde Δn está dado como sigue[17]:

$$\Delta n = \frac{\epsilon_{r1}}{2\sqrt{\epsilon_{r0}}}$$

Las constantes de acoplamiento se deducen a partir de la ecuación (4.6) como:

$$\begin{aligned} \kappa_+ &= \frac{\omega}{4\sqrt{\epsilon_0}} \epsilon_{r1} e^{i\phi_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta n \omega}{c} e^{i\phi_p} \right) \\ \kappa_- &= \frac{\omega}{4\sqrt{\epsilon_0}} \epsilon_{r1} e^{-i\phi_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta n \omega}{c} e^{-i\phi_p} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Luego la ecuación (4.6) resulta:

$$\gamma^2 = \beta^2 + 2\beta \left[\kappa_+ e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} + \kappa_- e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \right] \quad (4.8)$$

La constante κ_- y κ_+ son el parámetro central para el acoplamiento, los cuales describen la interacción entre las ondas \vec{R} y \vec{S} . Si κ_+ y $\kappa_- = 0$ no existe acoplamiento entre las ondas \vec{R} y \vec{S} .

4.2 Solución a la ecuación de ondas acopladas

Las ondas \vec{R} y \vec{S} que se propagan a través de la red formada dentro del cristal, se pueden describir en función de sus respectivas amplitudes, las cuales varían a lo largo del eje y , cediendo parte de la energía al cristal si este presenta absorción.

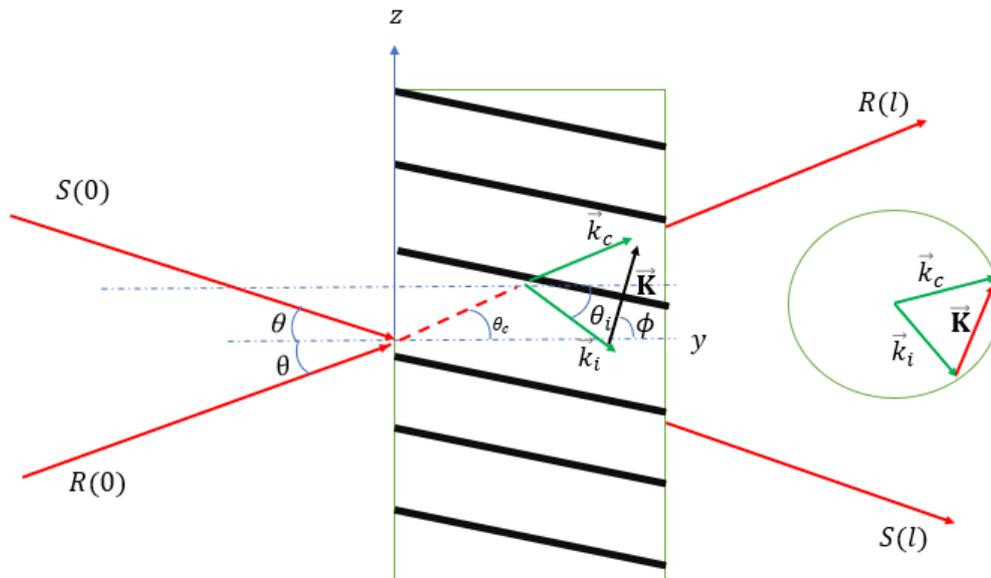


Figura 4.3. Propagación de los vectores de onda dentro del cristal

Por simplicidad en el análisis del acoplamiento, se asumirá que la red es infinita en la dirección z tal que las funciones para \vec{R} y \vec{S} son funciones de y .

$$\vec{E} = \vec{R}(y)e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} + \vec{S}(y)e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad (4.9)$$

Donde los vectores de propagación \vec{k}_c y \vec{k}_i representados en la figura 4.3, llevan información de las constantes de propagación de las ondas de referencia \vec{R} y de señal \vec{S} . \vec{k}_c y \vec{k}_i están relacionados con el vector de la red \vec{K} a través de la siguiente expresión:

$$\vec{k}_i = \vec{k}_c - \vec{K} \quad (4.10)$$

Ahora para las componentes de los vectores \vec{k}_i y \vec{k}_c se descomponen de acuerdo al ángulo que forma cada uno de ellas con respecto al eje y teniendo en cuenta la relación (4.10) se tiene que las componentes son:

$$k_{cy} = \beta \cos \theta_c \quad (4.11)$$

$$k_{cz} = \beta \sin \theta_c \quad (4.12)$$

$$k_{iy} = \beta \cos \theta_c - \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \quad (4.13)$$

$$k_{iz} = \beta \sin \theta_c - \frac{2\pi}{\Lambda} \sin \phi \quad (4.14)$$

Donde ϕ es el ángulo formado por el vector de red con respecto a la dirección de propagación.

Reemplazando (4.9) en la ecuación (4.2) se llega a:

$$\nabla^2 \left(\vec{R}(y)e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} + \vec{S}(y)e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right) + \gamma^2 \left(\vec{R}(y)e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} + \vec{S}(y)e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right) = 0 \quad (4.15)$$

Realizando la primera derivada de la ecuación (4.9) con respecto a y se llega a:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \left(\frac{d\vec{R}(y)}{dy} e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} - ik_{cy} e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \vec{R}(y) + \frac{d\vec{S}(y)}{dy} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} - ik_{iy} \vec{S}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right)$$

De igual manera se halla la segunda derivada con respecto a y de la expresión anterior como:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = \left(\frac{d^2 \vec{R}(y)}{dy^2} e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} - ik_{cy} e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \frac{d\vec{R}(y)}{dy} - k_{cy}^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \vec{R}(y) - ik_{cy} e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \frac{d\vec{R}(y)}{dy} + \frac{d^2 \vec{S}(y)}{dy^2} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} - ik_{iy} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \frac{d\vec{S}(y)}{dy} - k_{iy}^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{S}(y) - ik_{iy} \vec{S}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \frac{d\vec{S}(y)}{dy} \right)$$

Factorizando los exponenciales, la ecuación anterior resulta en:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{R}(y)}{dy^2} - ik_{cy} \frac{d\vec{R}(y)}{dy} - k_c^2 \vec{R}(y) - ik_{cy} \frac{d\vec{R}(y)}{dy} \right) + e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{S}(y)}{dy^2} - ik_{iy} \frac{d\vec{S}(y)}{dy} - k_i^2 \vec{S}(y) - ik_{iy} \vec{S}(y) \frac{d\vec{S}(y)}{dy} \right)$$

De forma similar se halla la primera y segunda derivada de la ecuación (4.9) con respecto a z lo cual da como resultado:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \left(-ik_{cz} e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \vec{R}(y) - ik_{iz} \vec{S}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \left(-k_{cz}^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \vec{R}(y) - k_{iz}^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{S}(y) \right)$$

Reemplazando las segundas derivadas tanto de y , z y la ecuación (4.8) en la ecuación (4.15) se obtiene:

$$e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{R}(y)}{dy^2} - ik_{cy} 2 \frac{d\vec{R}(y)}{dy} - k_c^2 \vec{R}(y) \right) + e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{S}(y)}{dy^2} - ik_{iy} 2 \frac{d\vec{S}(y)}{dy} - k_i^2 \vec{S}(y) \right) + \left(-k_c^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \vec{R}(y) - k_i^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{S}(y) \right) + \left(\beta^2 + 2\beta \left[\kappa_+ e^{i(\vec{k}_c - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} + \kappa_- e^{-i(\vec{k}_c - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \right] \right) \left(\vec{R}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} + \vec{S}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \right) = 0$$

Abriendo los paréntesis del cuarto término como:

$$e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{R}(y)}{dy^2} - ik_{cy} 2 \frac{d\vec{R}(y)}{dy} - k_c^2 \vec{R}(y) \right) + e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{S}(y)}{dy^2} - ik_{iy} 2 \frac{d\vec{S}(y)}{dy} - k_i^2 \vec{S}(y) \right) + \left(-k_c^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \vec{R}(y) - k_i^2 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{S}(y) \right) + \beta^2 \vec{R}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} + \beta^2 \vec{S}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + 2\kappa_+ \beta \vec{R}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + 2\kappa_+ \beta \vec{S}(y) e^{i(\omega t - (2\vec{k}_i - \vec{k}_c) \cdot \vec{r})} + 2\kappa_- \beta \vec{R}(y) e^{i(\omega t - (2\vec{k}_c - \vec{k}_i) \cdot \vec{r})} + 2\kappa_- \beta \vec{S}(y) e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} = 0$$

Reorganizando la expresión anterior de la siguiente forma:

$$e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{R}(y)}{dy^2} - ik_{cy} 2 \frac{d\vec{R}(y)}{dy} - k_{cy}^2 \vec{R}(y) - k_{cz}^2 \vec{R}(y) + \beta^2 \vec{R}(y) + 2\kappa_+ \beta \vec{S}(y) \right) + e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \left(\frac{d^2 \vec{S}(y)}{dy^2} - ik_{iy} 2 \frac{d\vec{S}(y)}{dy} - k_{iy}^2 \vec{S}(y) - k_{iz}^2 \vec{S}(y) + \beta^2 \vec{S}(y) + 2\kappa_- \beta \vec{R}(y) \right) + 2\kappa_- \beta \vec{R}(y) e^{i(\omega t - (2\vec{k}_c - \vec{k}_i) \cdot \vec{r})} + 2\kappa_+ \beta \vec{S}(y) e^{i(\omega t - (2\vec{k}_i - \vec{k}_c) \cdot \vec{r})} = 0$$

Los dos últimos términos de

esta expresión son ondas que viajan en otras direcciones, por lo tanto, no son tenidas en cuenta y debido a que son funciones variables se desprecian las derivadas de segundo orden sobre la premisa de que \vec{R} y \vec{S} son funciones que varían lentamente.

$$e^{i(\omega t - \vec{k}_c \cdot \vec{r})} \left(-ik_{cy} 2 \frac{d\vec{R}(y)}{dy} + 2\kappa_+ \beta \vec{S}(y) \right) + e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \left(-ik_{iy} 2 \frac{d\vec{S}(y)}{dy} + 2\kappa_- \beta \vec{R}(y) \right) = 0 \quad (4.16)$$

De la ecuación (4.16) se obtienen las dos ecuaciones acopladas para el cristal fotorrefractivo como:

$$k_{cy} \frac{d\vec{R}(y)}{dy} + i\beta \kappa_+ \vec{S}(y) = 0 \quad (4.17)$$

$$k_{iy} \frac{d\vec{S}(y)}{dy} + i\beta \kappa_- \vec{R}(y) = 0 \quad (4.18)$$

La amplitud difractada $\vec{R}(y)$ escrita en términos de la variación del ángulo de polarización en la dirección de propagación $\vec{R}(l)$, se puede plantear como un vector con dos componentes según (3.18) como se muestra en la figura 4.4:

$$\vec{R}(l) = R(l)_{x'} \hat{x} + R(l)_{z'} \hat{z} \quad (4.19)$$

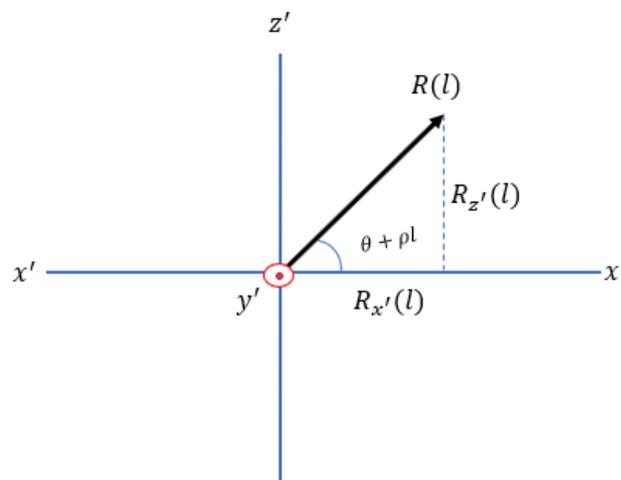


Figura 4.4. Polarización horizontal con un ángulo de polarización θ_p y en sentido antihorario visto por un observador a la entrada del cristal

Se considera que la onda está polarizada linealmente de forma horizontal con un ángulo de polarización θ_p como se muestra en la tabla 3.1, pero debido a la actividad óptica presente en el material las componentes difractadas para R se modifican de acuerdo a la figura 3.5 y figura 4.4 como:

$$R(l)_{x'} = R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \quad (4.20)$$

$$R(l)_{z'} = R_0 \sin(\theta_p + \rho l) \quad (4.21)$$

Por lo tanto, para el caso general de una red dinámica que exhibe al mismo tiempo una modulación de fase (con índice de refracción modulación de amplitud n) ϕ_p desplaza al patrón de interferencia de la luz en el cristal, las formulaciones de Kogelnik en las ecuaciones (4.17) y (4.18) se modifican directamente [17] en:

$$\frac{d\vec{R}(l)}{dl} = -i\beta\kappa|m|e^{i\phi_p} \frac{\vec{S}(l)}{k_{cy}} \quad (4.22)$$

$$\frac{d\vec{S}(l)}{dl} = -i\beta\kappa|m|e^{-i\phi_p} \frac{\vec{R}(l)}{k_{iy}} \quad (4.23)$$

Donde:

$$m = |m|e^{i\phi_p}$$

La constante de acoplamiento se deduce a partir de:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donde T es el periodo y:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Combinando las ecuaciones mostradas para la velocidad y para la frecuencia angular con la ecuación (4.7) se llega a:

$$\kappa = \frac{\pi}{\lambda} \Delta n \quad (4.24)$$

4.2.1 Teoría de ondas acopladas dinámicas

En este caso está presente un mecanismo de retroalimentación, que relaciona los hologramas que se registran y la difracción de los haces que se utilizan para el registro, un fenómeno llamado “auto difracción” (o mezcla de ondas) que no existe para las redes fijas y es, por lo tanto, que no se tiene en cuenta en la formulación original de Kogelnik. Para comprender estas diferencias, es importante recordar las expresiones de la amplitud del índice de modulación de refracción [17], las cuales se pueden generalizar como:

$$\Delta n \equiv -\frac{n^3 r_{41} E_{esp}}{2} \quad (4.25)$$

La amplitud en estado estable del campo eléctrico generado por el registro holográfico en un material fotorrefractivo viene dada por mE_{esp} cómo se informa en [17], donde E_{esp} es constante, m es la visibilidad del patrón de registro de las franjas de luz que puede variar a lo largo del espesor del cristal. Por tanto, es necesario escribir la ecuación (4.25) como:

$$\Delta n = mn_1 \quad (4.26)$$

$$n_1 \equiv -\frac{n^3 r_{41} E_{esp}}{2} \quad (4.27)$$

Donde la ecuación (4.26) permite mostrar explícitamente la dependencia del índice de refracción de la visibilidad de la franja m

Capítulo 5

5 ANÁLISIS FÍSICO MATEMÁTICO DE LA MODULACIÓN PARA LA CONFIGURACIÓN < 110 >

A partir de la ecuación (3.48) para la configuración transversal se puede deducir lo siguiente:

$$\Delta n_{x'} = -\frac{r_{41}n^3}{4} \left(E_z + \sqrt{4E_x^2 + E_z^2} \right) \quad (5.1)$$

$$\Delta n_{z'} = -\frac{r_{41}n^3}{4} \left(E_z - \sqrt{4E_x^2 + E_z^2} \right) \quad (5.2)$$

Asumiendo que el campo eléctrico solo tiene componente en x , para la configuración transversal [figura 3.2 (a)] con $E_z=0$ y $E_y = 0$, las ecuaciones (5.1) y (5.2) se modifican directamente en:

$$\Delta n_{x'} = -\frac{r_{41}n^3}{2} E_x \quad (5.3)$$

$$\Delta n_{z'} = \frac{r_{41}n^3}{2} E_x \quad (5.4)$$

Teniendo en cuenta que $\vec{S}(l) = S(l)_x \hat{x} + S(l)_z \hat{z}$ es un vector de dos componentes y reemplazando la ecuación (4.19) en (4.23) se obtiene:

$$\frac{d(S(l)_{x'} \hat{x} + S(l)_{z'} \hat{z})}{dl} = -i\beta\kappa|m|e^{-i\phi_p} \frac{1}{k_{iy}} (R(l)_{x'} \hat{x} + R(l)_{z'} \hat{z})$$

Separando la ecuación anterior por componentes vectoriales como:

$$\frac{d(S(l)_{x'})}{dl} = -i\beta\kappa|m|e^{-i\phi_p} \frac{1}{k_{iy}} (R(l)_{x'}) \quad (5.5)$$

$$\frac{d(S(l)_{z'})}{dl} = -i\beta\kappa|m|e^{-\phi_p} \frac{1}{k_{iy}} (R(l)_{z'}) \quad (5.6)$$

Reemplazando las expresiones planteadas para la amplitud de difracción (4.20), (4.21) y (4.24) en las ecuaciones (5.5) y (5.6) se llega a:

$$\frac{dS(l)_{x'}}{dl} = -i|m|e^{-i\phi_p} \frac{\pi}{\lambda} \frac{\Delta n_{x'}}{k_{iy}} \beta R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \quad (5.7)$$

$$\frac{dS(l)_{z'}}{dl} = -i|m|e^{-i\phi_p} \frac{\pi}{\lambda} \frac{\Delta n_{z'}}{k_{iy}} \beta R_0 \sin(\theta_p + \rho l) \quad (5.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.3) y (5.4) en las expresiones (5.7) y (5.8) resulta:

$$\frac{dS_{x'}(l)}{dl} = -i|m|e^{-i\phi_p} \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{k_{iy}} \left(-\frac{r_{41}n^3}{2} E_x \right) \beta R_0 \cos(\theta_p + \rho l)$$

$$\frac{dS_{z'}(l)}{dl} = -i|m|e^{-i\phi_p} \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{k_{iy}} \left(\frac{r_{41}n^3}{2} E_x \right) \beta R_0 \sin(\theta_p + \rho l)$$

Para valores efectivos del campo eléctrico y el coeficiente electro-óptico se tiene que:

$$|\Delta n_{max}| = \frac{r_{41}n^3}{2} E_{esp} \quad (5.9)$$

Por lo tanto, las ecuaciones anteriores para $dS_{z'}(l)$ y $dS_{x'}(l)$ se modifican teniendo en cuenta k_{iy} y la existencia de un desfase de $\phi_p = -\frac{\pi}{2}$ como:

$$\frac{dS_{x'}(l)}{dl} = -|m| \frac{\pi}{\lambda} \frac{|\Delta n_{max}|}{\cos \theta_c} R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \quad (5.10)$$

$$\frac{dS_{z'}(l)}{dl} = |m| \frac{\pi}{\lambda} \frac{|\Delta n_{max}|}{\cos \theta_c} R_0 \sin(\theta_p + \rho l) \quad (5.11)$$

Las ecuaciones (5.10) y (5.11) son las ecuaciones que representan la amplitud de difracción a el haz de señal para la configuración transversal en términos de la componente de birrefringencia lineal máxima.

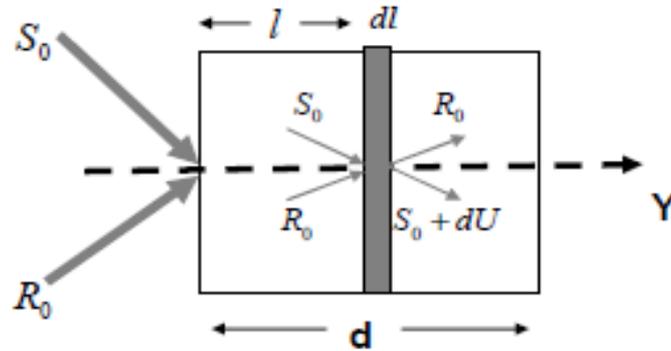


Figura 5.1. Amplitud de difracción en el cristal [24]

Donde se asume $U(l)$ como la amplitud de difracción dentro del cristal fotorrefractivo como:

$$U(l) = U(l)_{\hat{x}} + U(l)_{\hat{z}} \quad (5.12)$$

En una posición l arbitraria en el cristal $S_{x'}(l)$ y $S_{z'}(l)$ están dadas como [23,24] :

$$S_{x'}(l) = S_0 + U_{x'}(l) \quad y \quad S_{z'}(l) = S_0 + U_{z'}(l)$$

Reemplazando las relaciones anteriores en las ecuaciones (5.10) y (5.11) se obtiene:

$$\frac{d(S_0 + U_{x'}(l))}{dl} = -|m| \frac{\pi |\Delta n_{max}|}{\lambda \cos \theta_c} R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \quad (5.13)$$

$$\frac{d(S_0 + U_{z'}(l))}{dl} = |m| \frac{\pi |\Delta n_{max}|}{\lambda \cos \theta_c} R_0 \sin(\theta_p + \rho l) \quad (5.14)$$

Derivando con respecto a l las ecuaciones (5.13) y (5.14) resulta:

$$\frac{d(U_{x'}(l))}{dl} = -|m| \frac{\pi |\Delta n_{max}|}{\lambda \cos \theta_c} R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \quad (5.15)$$

$$\frac{d(U_{z'}(l))}{dl} = |m| \frac{\pi |\Delta n_{max}|}{\lambda \cos \theta_c} R_0 \sin(\theta_p + \rho l) \quad (5.16)$$

Cuando θ_c es pequeño se podría deducir que:

$$\cos \theta_c \approx 1 \quad (5.17)$$

Cuando θ_c es pequeño las ecuaciones (5.15) y (5.16) se modifican como:

$$\begin{aligned}\frac{d(U_{x'}(l))}{dl} &= -|m|\frac{\pi}{\lambda}|\Delta n_{max}|R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \\ \frac{d(U_{z'}(l))}{dl} &= |m|\frac{\pi}{\lambda}|\Delta n_{max}|R_0 \sin(\theta_p + \rho l)\end{aligned}\quad (5.18)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de la modulación (2.36) donde $R_0 \gg S_0$ la modulación se modifica como $|m| \approx 2\frac{S_0}{R_0}$; entonces en una posición l arbitraria dentro del cristal está se puede escribir de la siguiente forma [23]:

$$|m| = 2\frac{S_0 + U(l)}{R_0}\quad (5.19)$$

Derivando con respecto a l , la expresión (5.19) tal que:

$$\frac{dm}{dl} = \frac{2}{R_0} \frac{dU(l)}{dl}$$

Realizando el respectivo despeje se llega a:

$$\frac{R_0}{2} \frac{dm(l)}{dl} = \frac{dU(l)}{dl}\quad (5.20)$$

Derivando la ecuacion (5.12) se obtiene:

$$dU(l) = dU(l)_{\hat{x}} + dU(l)_{\hat{z}}\quad (5.21)$$

Por geometría se escriben las componentes de $dU(l)_{x'}$ y $dU(l)_{z'}$ que vibran paralelo a la dirección de \hat{S}_0 como se muestra en la figura 5.2.

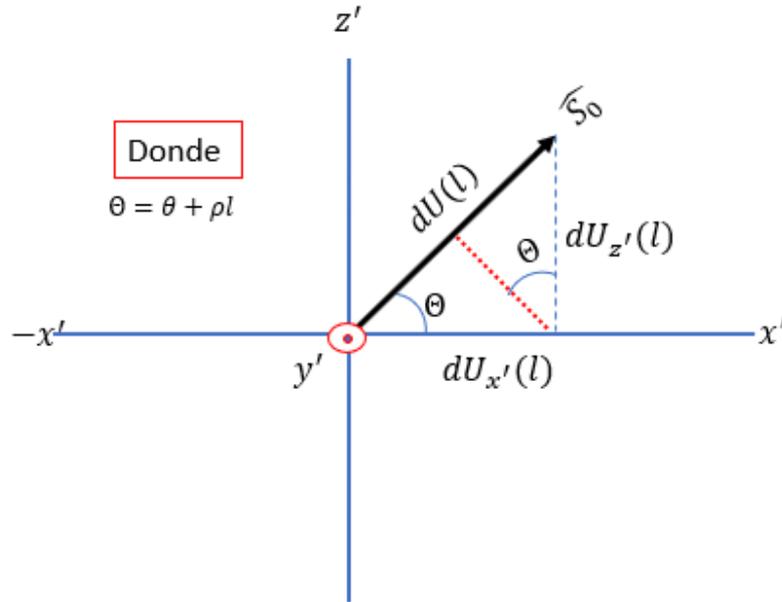


Figura 5.2. Amplitud de difracción en términos de la dirección de \widehat{S}_0

Donde las componentes que vibran paralelas a la dirección de \widehat{S}_0 figura 5.2 geoméricamente están dados por:

$$\frac{dU(l)_{\hat{x}}}{dU(l)_{x'}} = \cos(\theta_p + \rho l) \quad (5.22)$$

$$\frac{dU(l)_{\hat{z}}}{dU(l)_{z'}} = \sin(\theta_p + \rho l) \quad (5.23)$$

Reemplazando (5.21) en la ecuación (5.20) como:

$$\frac{R_0}{2} \frac{dm(l)}{dl} = \frac{dU(l)_{\hat{x}} + dU(l)_{\hat{z}}}{dl}$$

Reemplazando las respectivas amplitudes mostradas en las ecuaciones (5.18) y las ecuaciones (5.22) y (5.23) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{R_0}{2} \frac{dm(l)}{dl} = \frac{\left(-|m| \frac{\pi}{\lambda} |\Delta n_{max}| R_0 \cos(\theta_p + \rho l)^2 + |m| \frac{\pi}{\lambda} |\Delta n_{max}| R_0 \sin(\theta_p + \rho l)^2\right)}{dl} dl \quad (5.24)$$

Donde:

$$\zeta = \frac{\pi}{\lambda} |\Delta n_{max}| \quad (5.25)$$

Teniendo en cuenta la relación (5.25), la ecuación (5.24) se modificaría directamente en:

$$\frac{dm(l)}{|m|} = -2\zeta |\Delta n_{max}| \cos(\theta_p + \rho l)^2 + 2\zeta |\Delta n_{max}| \sin(\theta_p + \rho l)^2 \quad (5.26)$$

Se conoce por identidad que:

$$\sin(\theta_p + \rho l)^2 = 1 - \cos(\theta_p + \rho l)^2 \quad (5.27)$$

Aplicando la propiedad trigonométrica (5.27) sobre la expresión (5.26) se deduce:

$$\frac{d(m(l))}{|m|} = 2\zeta [1 - \cos(\theta_p + \rho l)^2 - \cos(\theta_p + \rho l)^2] dl$$

Operando la ecuación anterior se llega a:

$$\frac{d(m(l))}{|m|} = 2\zeta [1 - 2\cos(\theta_p + \rho l)^2] dl \quad (5.28)$$

Se procede a integrar en ambos lados de la expresión (5.28) como:

$$\int \frac{d(m(l))}{|m|} = \int 2\zeta (1 - 2\cos(\theta_p + \rho l)^2) dl \quad (5.29)$$

Se sabe que:

$$\cos(\theta_p + \rho l)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2(\theta_p + \rho l)) \quad (5.30)$$

Reemplazando la identidad (5.30) en la ecuación (5.29) resulta:

$$\int \frac{d(m(l))}{|m|} = \int 2\zeta (1 - 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2(\theta_p + \rho l)) \right]) dl \quad (5.31)$$

Integrando en ambos lados de la ecuación anterior con respecto a l se llega a:

$$\ln(m(l)) = -\frac{\zeta l}{\rho l} \sin(2(\theta_p + \rho l)) + c \quad (5.32)$$

Se reescribe la expresión $\sin(2(\theta_p + \rho l))$ como:

$$\sin(2(\theta_p + \rho l)) = 2(\sin(\theta_p + \rho l) \cos(\theta_p + \rho l))$$

Por identidades trigonométricas de ángulos dobles la ecuación anterior se modifica en:

$$\sin(2(\theta_p + \rho l)) = 2(\sin(\theta_p) \cos(\rho l) + \sin(\rho l) \cos(\theta_p))(\cos(\theta_p) \cos(\rho l) - \sin(\theta_p) \sin(\rho l))$$

Donde realizando los respectivos productos:

$$\begin{aligned} \sin(2(\theta_p + \rho l)) &= 2\sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \cos(\rho l)^2 + 2\cos(\theta_p)^2 \cos(\rho l) \sin(\rho l) - \\ &2\sin(\theta_p)^2 \sin(\rho l) \cos(\rho l) - 2\sin(\rho l)^2 \cos(\theta) \sin(\theta_p) \end{aligned}$$

Reagrupando términos de la expresión anterior:

$$2(\sin(\theta_p + \rho l) \cos(\theta_p + \rho l)) = \sin(2\theta_p) [\cos(\rho l)^2 - \sin(\rho l)^2] + \cos(2\theta_p) [2 \sin(\rho l) \cos(\rho l)]$$

Aplicando la identidad trigonométrica (5.27) en la expresión anterior esta modifica directamente como:

$$2\sin(2(\theta_p + \rho l)) = \sin(2\theta_p) [1 - 2 \sin(\rho l)^2] + \cos(2\theta_p) [2 \sin(\rho l) \cos(\rho l)]$$

Distribuyendo los respectivos productos se llega a:

$$\sin(2(\theta_p + \rho l)) = \sin(2\theta_p) - 2 \sin(\rho l) (\sin(2\theta_p) \sin(\rho l) + \cos(2\theta_p) \cos(\rho l) \sin(\rho l))$$

Por identidad de ángulos dobles se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\sin(2(\theta_p + \rho l)) = \sin(2\theta_p) + 2 \sin(\rho l) (\cos(2\theta_p + \rho l))$$

Retomando la expresión (5.32) y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se deduce que:

$$\ln(m(l)) = -\frac{\zeta l}{\rho l} \sin(2\theta_p) - \frac{\zeta l}{\rho l} 2 \sin(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l) + c$$

Aplicando exponencial a ambos lados para eliminar el logaritmo natural la ecuación anterior resulta:

$$m(l) = e^{\frac{\zeta l}{\rho l}[-2 \sin(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l) - \sin(2\theta_p)] + c} \quad (5.33)$$

Se hizo:

$$e^c = cte = a$$

De acuerdo a lo anterior la ecuación (5.33) cambia de la siguiente forma:

$$m(l) = a e^{\frac{\zeta l}{\rho l}[-2 \sin(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l) - \sin(2\theta_p)]} \quad (5.34)$$

Cuando $l=0$ se determina la expresión para la modulación inicial como:

$$m(0) = a e^{-\frac{\zeta}{\rho} \sin(2\theta_p)}$$

Despejando a de la anterior relación tal que:

$$a = m(0) e^{\frac{\zeta}{\rho} \sin(2\theta_p)}$$

Se hizo $m(0) = m_0$, entonces la expresión para la modulación en función de l es:

$$m(l) = m_0 e^{-\zeta l 2 \operatorname{sinc}(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l)} \quad (5.35)$$

Donde la ecuación (5.35) representa la modulación para la configuración transversal $\vec{K}_G \parallel < 110 >$.

Tabla 5.1. Modulación y amplitud de difracción para la configuración <110>

CONFIGURACIÓN <110>
$d(U_{x'}(l)) = - m \frac{\pi}{\lambda} \Delta n_{max} R_0 \cos(\theta_p + \rho l) dl$
$d(U_{z'}(l)) = m \frac{\pi}{\lambda} \Delta n_{max} R_0 \sin(\theta_p + \rho l) dl$
$m(l) = m_0 e^{-2\zeta l \text{sinc}(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l)}$

Tabla 5.2. Parámetros físicos para el cristal BTO [5,25]

Nomenclatura	Nombre	Valor
ρ	Poder rotatorio (mm^{-1})	6.5
$E_{efectivo}$	Campo eléctrico de carga espacial ($\frac{V}{cm}$)	500
N	Índice de refracción	2.58
$r_{efectivo}$	Coefficiente electroóptico ($\frac{m}{V}$)	5.1×10^{-12}
λ	Longitud de onda (nm)	632

Para la simulación del cálculo de la modulación en las figuras del capítulo 5 y capítulo 6, se supuso una relación entre las amplitudes de los haces de 1:10, lo que corresponde a una modulación del patrón de intensidad a la entrada del cristal aproximadamente igual a 0.2. Se utilizó un Δn_{max} dependiente del cristal a ser utilizado y el campo de carga espacial del orden de $500 \frac{V}{cm}$ [23,24]. A continuación, se mostrará el análisis gráfico para cada cristal fotorrefractivos BTO, BSO y BGO para diferentes espesores del cristal en configuración <110>, en el cual se tendrá en cuenta los valores experimentales de las tablas 5.2, 5.3 y 5.4.

Haciendo uso de la ecuación de la modulación para la configuración <110> mostrada en el tercer renglón en la tabla 5.1 se realizan gráficas para analizar el comportamiento de la modulación a medida que se varía el espesor del cristal fotorrefractivo. De igual manera analizar la modulación en función del ángulo de polarización del haz de registro.

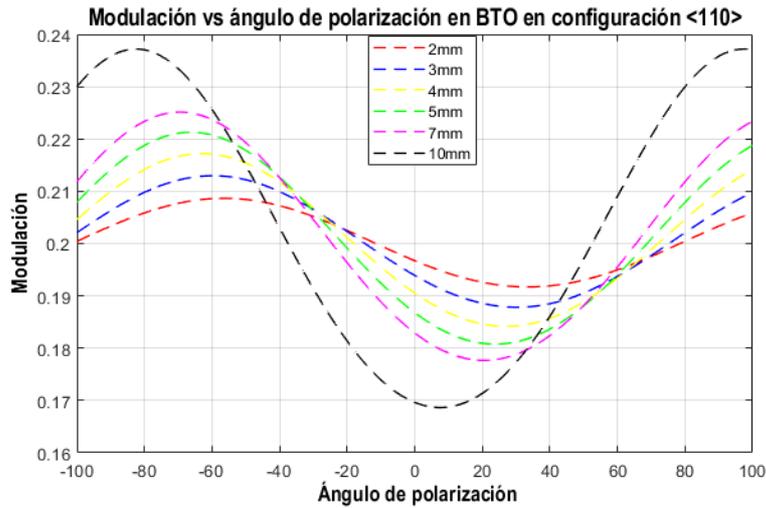


Figura 5.3. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BTO, cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$. En la figura 5.3 se grafican curvas para diferentes espesores del cristal BTO, teniendo en cuenta los parámetros físicos del cristal BTO mostrados en la tabla 5.2, en donde se aprecian una serie de máximos y mínimos para la modulación a medida que se varía el espesor del cristal. Dichos máximos se dan para ángulos comprendidos entre -90 a -50 grados aproximadamente y los mínimos están comprendidos para ángulos entre 10 y 40 grados. La modulación o transferencia de energía para la configuración <110> aumenta en función del espesor para ángulos de polarización entre -90 y -60 grados.

Tabla 5.3. Parámetros físicos para el cristal BSO [5,23,24]

Nomenclatura	Nombre	Valor
ρ	Poder rotatorio (mm^{-1})	40
$E_{efectivo}$	Campo eléctrico de carga espacial ($\frac{V}{cm}$)	500
n	Índice de refracción	2.6
$r_{efectivo}$	Coefficiente electroóptico ($\frac{m}{V}$)	4.5×10^{-12}
λ	Longitud de onda (nm)	532

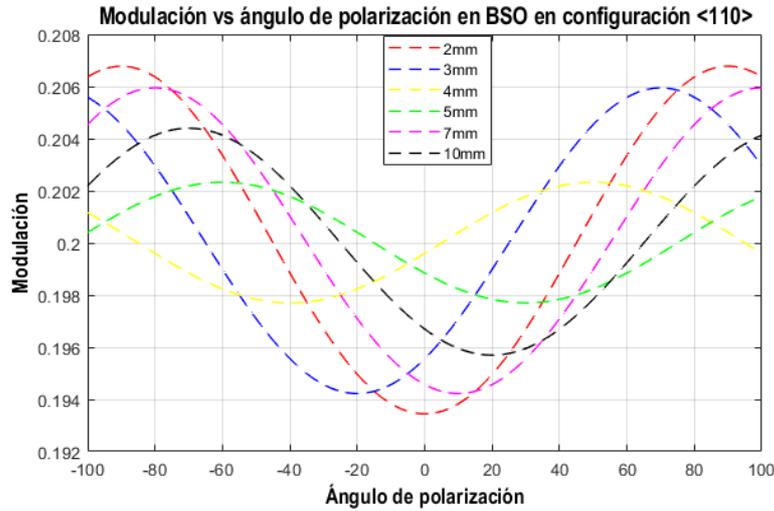


Figura 5.4. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal **BSO**, cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$

Realizando el análisis para el comportamiento de la modulación para el cristal BSO figura 5.4, teniendo en cuenta los parámetros característicos del cristal mostrados en la tabla 5.3, se logró apreciar algunos máximos para la modulación en ángulos comprendidos entre -90 a -50 grados y 50 a 90 grados aproximadamente. Para el mínimo se determinó que se da para ángulos entre -40 a 40 grados aproximadamente. Para este cristal se puede analizar que no es notoria la variación de la modulación tal como se observa en el BTO, ya que gráficamente se puede analizar que el valor máximo de la modulación para el cristal BTO es aproximadamente 0.237 y para el BSO es 0.207. Aclarando que experimentalmente el cristal BSO es sensible a la longitud de onda del verde y el cristal BTO a la longitud de onda del rojo, por ende, se trabaja bajo estos parámetros, para el análisis de la transferencia de energía.

Tabla 5.4. Parámetros físicos para el cristal BGO [26,27]

Nomenclatura	Nombre	Valor
ρ	Poder rotatorio (mm^{-1})	38
$E_{efectivo}$	Campo eléctrico de carga espacial ($\frac{V}{cm}$)	500
n	Índice de refracción	2.15
$r_{efectivo}$	Coefficiente electroóptico ($\frac{m}{V}$)	3.8×10^{-12}
λ	Longitud de onda (nm)	514

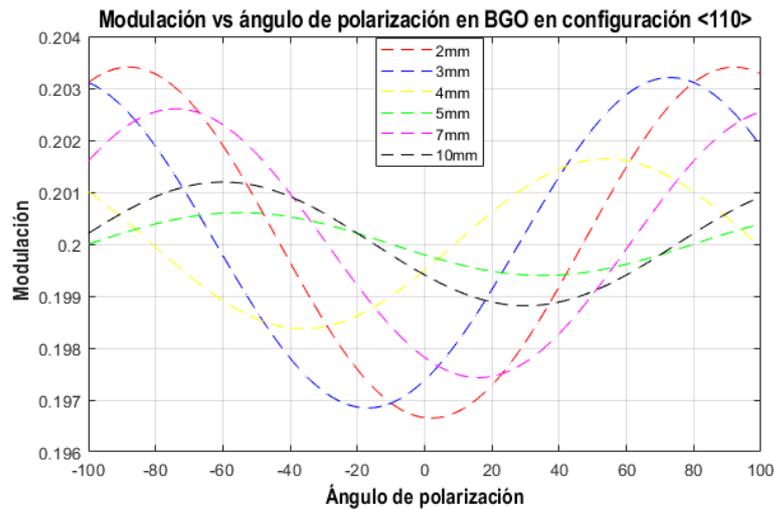


Figura 5.5. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal BGO, cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$

La modulación en el cristal BGO para la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ depende de los espesores planteados para el cristal y de sus parámetros físicos, los cuales se muestran en la tabla 5.4, se logra apreciar la variación de los máximos para la modulación la cual no aumenta proporcionalmente cuando se aumenta el espesor del cristal, esto se puede ver claramente en los mínimos para la modulación comprendidos entre -40 y 50 grados aproximadamente. Si,

se comparan los resultados para los tres cristales BTO, BSO y BGO en configuración $\langle 110 \rangle$ se podría establecer que la mayor transferencia de energía se presenta para el cristal BTO.

Capítulo 6

6 ANÁLISIS FÍSICO MATEMÁTICO DE LA MODULACIÓN PARA LA CONFIGURACIÓN $\langle 001 \rangle$

En la configuración transversal $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ se asume que el campo eléctrico solo tiene componente en z , lo anterior hace referencia a las componentes para el campo eléctrico $E_x = 0$ y $E_y = 0$ son nulas, por lo tanto, las ecuaciones (5.1) y (5.2) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Delta n_{x'} &= -\frac{r_{41}n^3}{2}E_z \\ \Delta n_{z'} &= 0\end{aligned}\quad (6.1)$$

Las variaciones mostradas en (6.1) al ser reemplazadas en las ecuaciones (5.7) y (5.8) esta se modificarían directamente como:

$$\frac{dS_{x'}(l)}{dl} = -i|m|e^{-i\phi_p} \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{k_{iy}} \left(-\frac{r_{41}n^3}{2}E_x \right) \beta R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \quad (6.2)$$

$$\frac{dS_{z'}(l)}{dl} = -i|m|e^{-i\phi_p} \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{k_{iy}} (0) \beta R_0 \sin(\theta_p + \rho l) \quad (6.3)$$

Recordando que:

$$|\Delta n_{max}| = \frac{r_{41}n^3}{2}E_{esp}$$

Las ecuaciones (6.2) y (6.3) se modifican al reemplazar k_{iy} y teniendo en cuenta la existencia de un desfase de $\phi = \frac{\pi}{2}$ como:

$$\frac{dS_{x'}(l)}{dl} = \frac{\pi}{\lambda} |m| \frac{|\Delta n_{max}|}{\cos \theta_c} R_0 \cos(\theta_p + \rho l) \quad (6.4)$$

$$\frac{dS_{z'}(l)}{dl} = 0 \quad (6.5)$$

Para el cálculo de la modulación para la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$, se tendrán en cuenta las expresiones (6.4) y (6.5) para encontrar $d(U(l)_{x'})$ y $d(U(l)_{z'})$ como:

$$d((U(l)_{x'})) = \frac{\pi}{\lambda} |m| |\Delta n_{max}| R_0 \cos(\theta_p + \rho l) dl$$

$$d((U(l)_{z'})) = 0$$

$dU(l)$ tendrá solo una componente para este caso como:

$$dU(l) = dU(l)_{\hat{x}}$$

De acuerdo a la figura 5.2 se deduce que:

$$\frac{dU(l)_{\hat{x}}}{dU(l)_{x'}} = \cos(\theta_p + \rho l)$$

Entonces, teniendo en cuenta la relación anterior, $dU(l)$ se modifica directamente en:

$$dU(l) = |m| \frac{\pi}{\lambda} |\Delta n_{max}| (R_0 \cos(\theta_p + \rho l)^2) dl \quad (6.6)$$

Reemplazando la ecuación (6.6) en la expresión (5.20) se llega a:

$$dm = 2|m| \frac{\pi}{\lambda} |\Delta n_{max}| (\cos(\theta_p + \rho l)^2) dl \quad (6.7)$$

Haciendo:

$$\zeta = \frac{\pi}{\lambda} |\Delta n_{max}|$$

Despejando $|m|$ y dl de la expresión (6.7) se obtiene:

$$\frac{d(m(l))}{|m|} = 2\zeta (\cos(\theta_p + \rho l)^2) dl \quad (6.8)$$

Por identidad se sabe que:

$$\cos(\theta + \rho l)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2(\theta_p + \rho l))$$

Reemplazando la anterior identidad en la ecuación (6.8) esta se modifica en:

$$\frac{d(m(l))}{|m|} = 2\zeta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2(\theta_p + \rho l)) \right) dl \quad (6.9)$$

Se procede a integrar la expresión (6.9) como sigue:

$$\int \frac{d(m(l))}{|m|} = \int 2\zeta \left(\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2(\theta_p + \rho l)) \right] \right) dl$$

Integrando en ambos lados la ecuación anterior, se llega a:

$$\ln(m(l)) = \zeta l + \frac{\zeta l}{2\rho l} \sin(2(\theta_p + \rho l)) + c$$

La expresión $\sin(2(\theta_p + \rho l))$ ya se demostró en el capítulo 5 para la configuración transversal por lo cual lo anterior resulta en:

$$\ln(m(l)) = \zeta l + \frac{\zeta l}{2\rho l} [2 \sin(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l) + \sin(2\theta_p)] + c \quad (6.10)$$

Aplicando exponencial a ambos lados de la ecuación (6.10).

Donde:

$$e^c = cte = a$$

Esta se modificaría directamente en:

$$m(l) = a e^{\zeta l (1 + \sin(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l))} \quad (6.11)$$

Entonces cuando $l=0$ la modulación inicial es:

$$m(0) = a e^{\frac{\zeta}{2\rho} \sin(2\theta_p)} \quad (6.12)$$

Despejando a de la ecuación (6.12):

$$a = m(0) e^{-\frac{\zeta}{2\rho} \sin(2\theta_p)}$$

Reemplazando a en (6.11) se obtiene la modulación en función de l como:

$$m(l) = m_0 e^{\zeta l(1 + \text{sinc}(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l))} \quad (6.13)$$

Donde la ecuación (6.13) representa la expresión para la modulación en la configuración $\langle 001 \rangle$.

Tabla 6.1. Modulación y amplitud de difracción para la configuración $\langle 001 \rangle$

CONFIGURACIÓN $\langle 001 \rangle$
$d((U(l)_x)) = m \frac{\pi}{\lambda} \Delta n_{max} R_0 \cos(\theta_p + \rho l) dl$
$d((U(l)_z)) = 0$
$m(l) = m_0 e^{\zeta l(1 + \text{sinc}(\rho l) \cos(2\theta_p + \rho l))}$

Los parámetros físicos presentados en las tablas 5.2 también se utilizaron para realizar el análisis gráfico para la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ en un BTO.

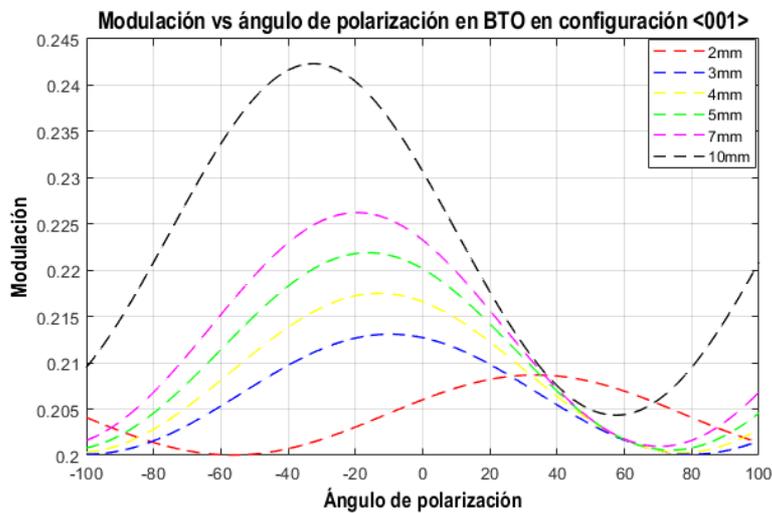
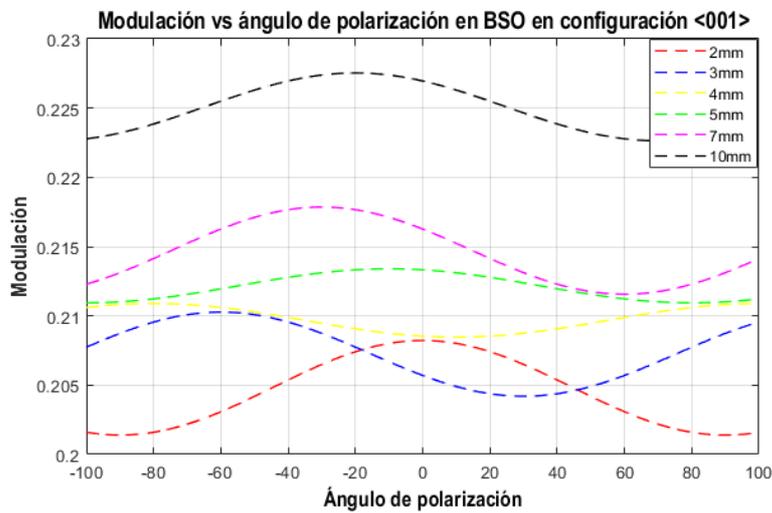


Figura 6.1. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal **BTO**, cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$

Teniendo en cuenta los valores experimentales mostrados en la tabla 5.2 y la ecuación para la modulación mostrada en la tabla 6.1, se logran modular distintas curvas para diferentes espesores de los cristales. En la figura 6.1 para el cristal BTO en la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ se aprecian distintos máximos y mínimos para las modulaciones, dichos máximos se dan para ángulos comprendidos entre -40 y 0 grados aproximadamente y algunos mínimos se dan para ángulos entre 40 a 80 grados. Lo anterior permite establecer que el intercambio energético es proporcional al espesor del cristal, esto quiere decir que, entre mayor sea el espesor del cristal mayor será la transferencia de energía.



Para la

figura 6.2

Figura 6.2. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de cristal BSO, cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$. Para el cristal BSO en configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ se logra observar que la modulación para diferentes espesores del cristal se maximiza cuando los espesores del cristal aumentan.

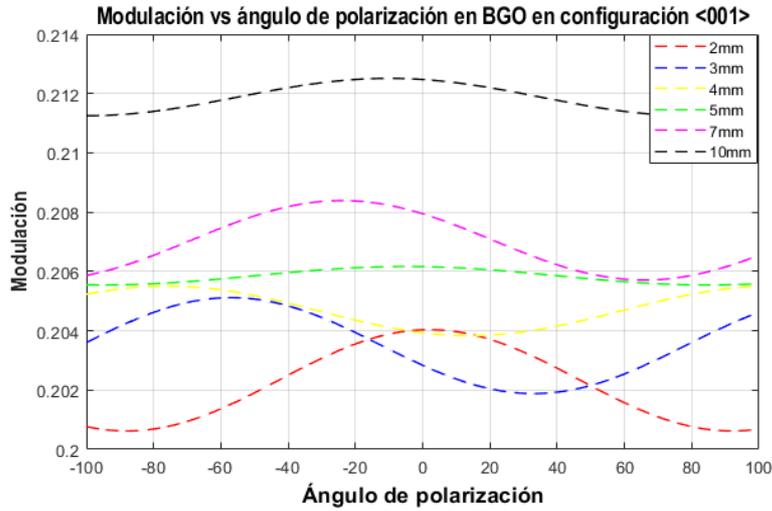


Figura 6.3. Modulación en términos del ángulo de polarización para diferentes espesores de un cristal **BGO**, cuando $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$

En la figura 6.3 para el cristal fotorrefractivo BGO en configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ y teniendo en cuenta los parámetros físicos mostrados en la tabla 5.4, se puede apreciar que las modulaciones varían poco, a medida que va cambiando el espesor del cristal comparado con el cristal BSO. Se puede deducir que los valores para la modulación más grandes también se dan para espesores del cristal grandes. Donde el comportamiento para la modulación para este cristal es similar para el cristal BSO.

6.1 Comparación gráfica de la modulación para las configuraciones $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ en cristales BTO

En esta sección se realiza un análisis gráfico de la modulación en las configuraciones $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ en función del ángulo de polarización para distintos espesores de un cristal fotorrefractivo BTO, donde se tienen en cuenta los parámetros físicos de la tabla 5.2, una modulación inicial de $m_0 \approx 0.2$ y las ecuaciones para la modulación de las tablas 5.1, 6.1 para las configuraciones $\langle 110 \rangle$ y $\langle 001 \rangle$.

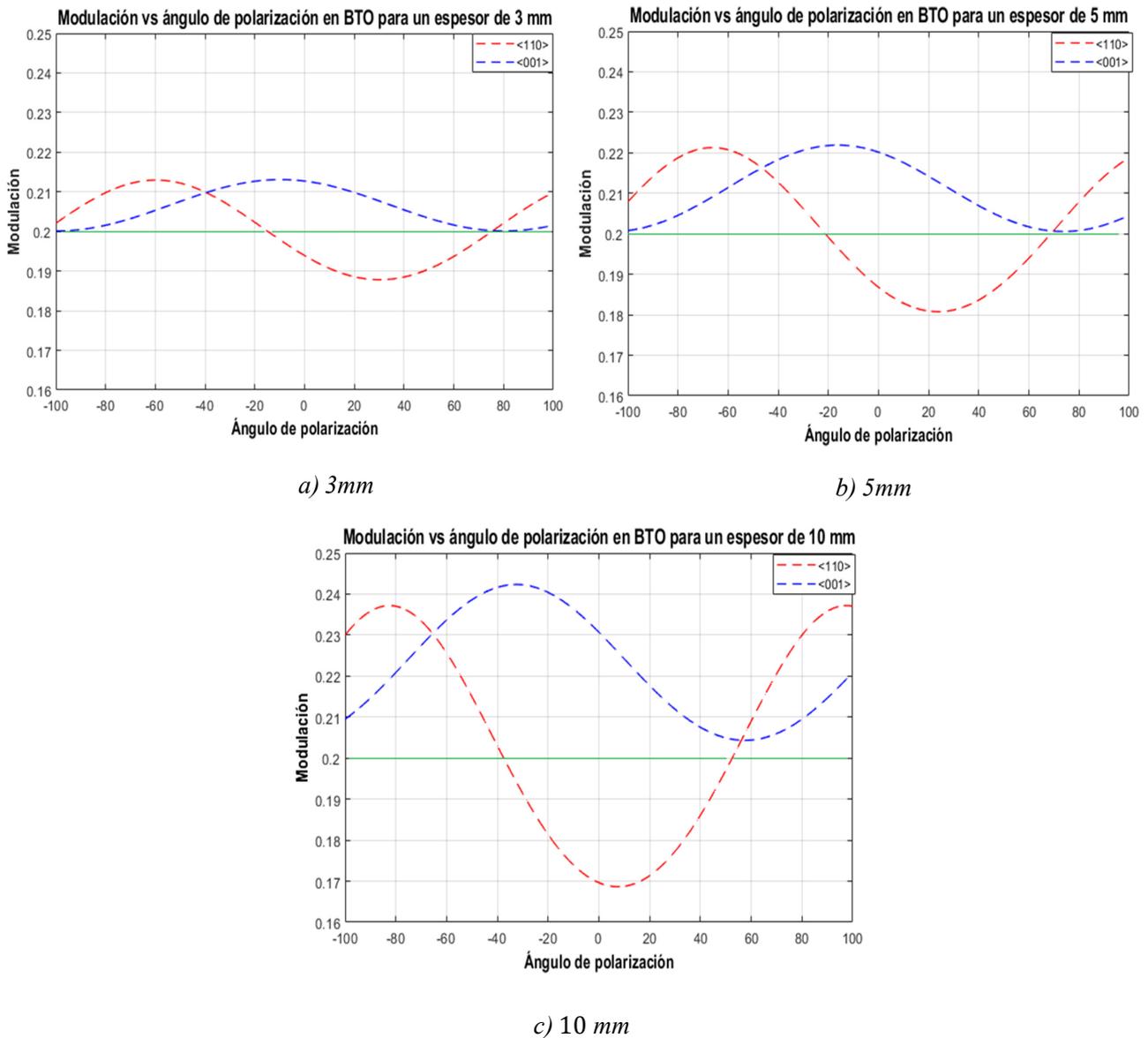


Figura 6.4. Modulación para las dos configuraciones $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ en términos del ángulo de polarización para un cristal BTO, para espesores de a) 3 mm b) 5 mm c) 10 mm.

En las figuras 6.4 a), b) y c), se muestran resultados de simulaciones para cristales BTO de diferente espesor y se puede evidenciar la dependencia de la modulación con el espesor del cristal. Se puede observar que para la configuración $\langle 001 \rangle$ y $\langle 110 \rangle$ la modulación es notoria, pero se observa que para la configuración $\langle 110 \rangle$ existen ángulos de polarización dónde se presenta pérdida de energía, ósea no existe transferencia de energía del haz de bombea al haz

de señal sino viceversa. Por ello, se considera que la configuración óptima para la transferencia de energía es la configuración $\langle 001 \rangle$.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

Se estudió el efecto de la influencia del ángulo de polarización sobre la modulación en un cristal BTO en dos configuraciones cristalográficas, $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$, donde se tuvieron en cuenta las propiedades físicas del cristal, como la birrefringencia lineal, la birrefringencia circular, el acoplamiento de las ondas, el coeficiente electro-óptico, la difracción de las ondas en el medio fotorrefractivo y factores externos como, el campo externo aplicado, la modulación inicial y la longitud de onda.

La configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ para el cristal BTO con un campo de cargas espaciales a $500 \frac{V}{cm}$, un campo externo $5 \frac{KV}{cm}$ y una modulación inicial de 0.2, a medida que el espesor del cristal aumenta, la modulación también se incrementa para ciertos ángulos de polarización.

La modulación para la configuración transversal $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ para el cristal BTO con un campo externo de $5 \frac{KV}{cm}$ y una modulación inicial de 0.2, a medida que el espesor del cristal aumentan, la modulación también se incrementa casi igual que para la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$, sin embargo para la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$ vemos que en ciertos intervalos de ángulos de polarización, tenemos modulación negativa, ósea, no hay transferencia de energía.

Se puede deducir que tanto la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ y $\vec{K}_G \parallel \langle 110 \rangle$, en el caso del cristal BTO, son factibles para observar máximos en la modulación, sin embargo, la configuración $\vec{K}_G \parallel \langle 001 \rangle$ es donde se presenta el mayor intercambio energético.

Si analizamos la ecuación $|m| = 2 \frac{S_0 + U(l)}{R_0}$ de la modulación donde se involucra las amplitudes del haz señal y haz referencia incidentes junto con la amplitud difractada, se puede ver que si se presenta un cambio en la modulación, este está relacionado con un efecto de transferencia de energía en el haz señal debido al haz de bombeo o referencia, lo que hace enfatizar que de acuerdo a los resultados mencionados anteriormente, la configuración $\langle 001 \rangle$ es la configuración óptima para realizar estudios de transferencia de energía.

Existe una relación entre el aumento del espesor y el ángulo de polarización, esto se ve reflejado en la figura 3.5, donde el ángulo de polarización es importante para que la modulación con respecto a la amplitud difractada sea máxima. En el caso de cristales silenitas en configuración $\langle 001 \rangle$, la modulación está por encima de la modulación inicial. Y en un caso particular para el BTO a medida que el espesor aumenta, el ángulo de polarización se incrementa.

REFERENCIAS

- [1] A. Ashkin, G. D. Boyd, J. M. Dziedzic, R. G. Smith, A. A. Bollmann, J. J. Levinstein, K. Nassau, “*Optically-induced refractive indice inhomegeneities in LiNbO₃ and LiTaO₃*”, Appl. Phys. Lett. Vol. No 9, pp.72, 7, 1966.
- [2] J. B. Thaxter, “*Electrical control of holographic storage in stronium-barium niobate*”, Appl. Phys. Vol. 15,10, 1969.
- [3] N. V. Kukhtarev. “*Kinetics of hologram recording and erasure in electrooptic crystals*”, Sov. Tech. Phys. Lett. Vol. 2, 438-440, 1976.
- [4] N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odulov, M. S. Soskin and V. L. Vinetskii, “*Holographic storage in electrooptic crystals, Ferroelectrics*” Vol. No 22., pp 949-960, 1, 1978.
- [5] A. L. Villamizar Amado “*Estudio de la eficiencia de difracción en cristales silenitas*”, Tesis de pregrado. Grupo de óptica moderna departamento de física y geología, Universidad de Pamplona, 2017.
- [6] R. Saxena, C. Gu, and P. Yeh, “*Properties of Photorefractive Gratings with Complex Coupling Constants*” J. Opt. Soc. Am. Vol 8, No 5, 5, 1991.
- [7] A. Marrakchi, J. P. Huignard, P. Gunter, “*Diffraction Efficiency and Energy Transfer in Two-Wave Mixing Experiments with Bi₁₂SiO₂₀ Crystals*” Appl. Phys, Vol No 24, pp 131-138, 1981.
- [8] J. P. Huignard, F. Micheron, Appl. and M. Peltier, F. Micheron, “*Volumen Hologram Recording and Charge Transfer Processes in Biúsia*”, Journal of applied physics, Vol, No 48, pp 3683 ,9, 1977.
- [9] A. M. Glas, D. von der Linde and T. J. Negran. “*High-voltage bulk photovoltaic effect and the photorefractive process in LiNbO₃*”, Appl. Phys. Lett, Vol, No 25, pp 233,8, 1974.
- [10] F. S. Chen, “*Optically induced change of refractive indices in LiNbO₃ and LiTaO₃*”, Appl. Phys, Vol, No 40, pp 3389, 10, 1969.

- [11] W. D. Johnston Jr. “*Optical index damage in LiNbO₃ and other pyroelectric insulators*”, Journal of Applied Physics, Vol, No 41, pp 3279, 9, 1970.
- [12] A. M. Glass “*The photorefractive effect*”, Opt. Eng, Vol, No 17, pp 470-479,9, 1978.
- [13] D. M. Kim, R.R. Shah, T.A. Rabson and F.K. Tittel, “*Nonlinear dynamic theory for photorefractive phase hologram formation*”, Applied Physics Letters, Vol, No 28, pp 338, 3, 1976.
- [14] G. F. Forte. “*Estudio de generación de autoimágenes a partir de redes de volumen*”. PhD thesis, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de la Plata, 2014.
- [15] V. Jerez. “*Grabado de hologramas fotorrefractivos a altas temperaturas*”. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander, 2011.
- [16] D. Gulich. www.damiangulich.com.ar.
- [17] J. Frejlich. “*Photorefractive Materials, Fundamental Concepts, Holographic Recording and Characterization*”, Jhon Wiley, New Jersey, 2007.
- [18] Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich. “*Fundamentals Of Photonics*”, Third edition, 111 River Street, Hoboken, NJ07030, USA, Vol 2, 2019.
- [19] P. Yeh, “*Introduction to Photorefractive Nonlinear Optics*”, Wiley, New York, 1993.
- [20] R. C. Jones, “*A new calculus for the treatment of optical systems*”, Vol, No 31,7, 1941.
- [21] M. C.Lasprilla. “*registro en cristales fotorrefractivos BSO*”. phg tesis, facultad de ciencias exactas ,1996.
- [22] Eugene Hecht “*óptica tercera edición*” Addison Wesley Iberoamericana,S.A. Nuñes de Balboa Madrid 2000.
- [23] J. A. Gómez, Á. Salazar, H. Lorduy G. *Influence Of The Polarization On The Modulation In Two-Wave Mixing In BSO Crystals*” Revista Colombiana de Física, Vol. 42, No. 3, pp 466-468, 12, 2010.

- [24] S. Mallick and D. Roudé “*Influence of the Polarization Direction on Two-Beam Coupling in Photorefractive $Bi_{12}SiO_{20}$ Diffusion Regime*”, *Appl. Phys. Vol, No 43, pp 239-245, 3, 1987.*
- [25] Gonzalez, A Zuñiga, and F Magaña. “*Optimization of the diffraction efficiency in nonuniform gratings in sillenite crystals ($Bi_{12}SiO_{20}$ and $Bi_{12}TiO_{20}$) considering the variation of fringe period, optical activity and polarization angles in a strong non-linear regime*”. *Revista mexicana de física, Vol, No 55, pp 25–31, 2, 2009.*
- [26] Kelson D Chabak, Kevin D Leedy, Andrew J Green, Shin Mou, Adam T Neal, Thaddeus Asel, Eric R Heller, Nolan S Hendricks, Kyle Liddy, Antonio Crespo, Nicholas C Miller, Miles T Lindquist, Neil A Moser, Robert C Fitch Jr, Dennis E Walker Jr, Donald L Dorsey and Gregg H Jessen “*Lateral β - Ga_2O_3 field effect transistors*” Air Force Research Laboratory, Sensors Directorate, 2241 Avionics Circle, Wright-Patterson AFB, OH 45433, United States of America. 28 November 2019.
- [27] A Matusevich, R Kowarschik, H Bartelt and V Shepelevich “*Investigation of long-lived photo-induced processes in photorefractive crystals of the sillenite group and their application*”, these doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.), Friedrich-Schiller-Universität Jena, 24. July, 1984.
- [28] J. E. Rueda, L. A Guerra, L. M Castro “*Eficiencia de difracción de redes fotorrefractivas en $Bi_{12}SiO_{20}$, en términos de tres casos de manipulación del plano de polarización de los haces de registro*” Grupo Óptica Moderna, Universidad de Pamplona, Lab. de Óptica, Pamplona, Colombia, vol 8, 2010
- [29] L. J. Mendoza Herrera. J. E. Rueda. “*Mezclado de ondas en materiales fotorrefractivos*” Tesis Pregrado, Grupo óptica moderna departamento de física y geología Universidad de Pamplona 2009.

Apéndice A

Anexo

Matriz de transformación para la configuración transversal

La inversa de una matriz se define como:

$$T^{-1} = \frac{adj(T^t)}{|T|} \quad (\text{A. 1})$$

Se procede a hallar el determinante de T :

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 \quad (\text{A. 2})$$

Hallando la traspuesta de T :

$$T^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{0} & \frac{\sqrt{2}}{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 3})$$

La adjunta de la traspuesta quedaría como:

$$adj(T^t) = \begin{bmatrix} +T_{11} & -T_{12} & +T_{13} \\ -T_{21} & +T_{22} & -T_{23} \\ +T_{31} & -T_{32} & +T_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 4})$$

Hallando los respectivos componentes de la adjunta:

$$T_{11} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_{12} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_{13} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$T_{21} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_{22} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_{23} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$T_{32} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$T_{33} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Reemplazando los componentes de la adjunta (A.4) (A.2):

$$T^{-1} = \frac{adj(T^t)}{|T|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 0 \\ -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 5})$$

A continuación, se muestra el análisis para la matriz de coeficientes electro ópticos

$$r_{111} = r_{11} = (a_{11}a_{12}a_{13} + a_{11}a_{13}a_{12} + a_{12}a_{11}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{11} + a_{13}a_{11}a_{12} + a_{13}a_{12}a_{11})r_{41}$$

$$r_{112} = r_{12} = (a_{11}a_{12}a_{23} + a_{11}a_{13}a_{22} + a_{12}a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21} + a_{13}a_{11}a_{22} + a_{13}a_{12}a_{21})r_{41}$$

$$r_{113} = r_{13} = (a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31})r_{41}$$

$$r_{221} = r_{21} = (a_{21}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{23}a_{12} + a_{22}a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23}a_{11} + a_{23}a_{21}a_{12} + a_{23}a_{22}a_{11})r_{41}$$

$$r_{222} = r_{22} = (a_{21}a_{22}a_{23} + a_{21}a_{23}a_{22} + a_{22}a_{21}a_{23} + a_{22}a_{23}a_{21} + a_{23}a_{21}a_{22} + a_{23}a_{22}a_{21})r_{41}$$

$$r_{223} = r_{23} = (a_{21}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{21}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32} + a_{23}a_{22}a_{31})r_{41}$$

$$r_{331} = r_{31} = (a_{31}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{33}a_{12} + a_{32}a_{31}a_{13} + a_{32}a_{33}a_{11} + a_{33}a_{31}a_{12} + a_{33}a_{32}a_{11})r_{41}$$

$$r_{332} = r_{32} = (a_{31}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{33}a_{22} + a_{32}a_{31}a_{23} + a_{32}a_{33}a_{21} + a_{33}a_{31}a_{22} + a_{33}a_{32}a_{21})r_{41}$$

$$r_{333} = r_{33} = (a_{31}a_{32}a_{33} + a_{31}a_{33}a_{32} + a_{32}a_{31}a_{33} + a_{32}a_{33}a_{31} + a_{33}a_{31}a_{32} + a_{33}a_{32}a_{31})r_{41}$$

$$r_{231} = r_{41} = (a_{21}a_{32}a_{13} + a_{21}a_{33}a_{12} + a_{22}a_{31}a_{13} + a_{22}a_{33}a_{11} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{23}a_{32}a_{11})r_{41}$$

$$r_{232} = r_{42} = (a_{21}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{33}a_{22} + a_{22}a_{31}a_{23} + a_{22}a_{33}a_{21} + a_{23}a_{31}a_{22} + a_{23}a_{32}a_{21})r_{41}$$

$$r_{233} = r_{43} = (a_{21}a_{32}a_{33} + a_{21}a_{33}a_{32} + a_{22}a_{31}a_{33} + a_{22}a_{33}a_{31} + a_{23}a_{31}a_{32} + a_{23}a_{32}a_{31})r_{41}$$

$$r_{131} = r_{51} = (a_{11}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{33}a_{12} + a_{12}a_{31}a_{13} + a_{12}a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31}a_{12} + a_{13}a_{32}a_{11})r_{41}$$

$$r_{132} = r_{52} = (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{11}a_{33}a_{22} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{12}a_{33}a_{21} + a_{13}a_{31}a_{22} + a_{13}a_{32}a_{21})r_{41}$$

$$r_{133} = r_{53} = (a_{11}a_{32}a_{33} + a_{11}a_{33}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{33} + a_{12}a_{33}a_{31} + a_{13}a_{31}a_{32} + a_{13}a_{32}a_{31})r_{41}$$

$$r_{121} = r_{61} = (a_{11}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{12} + a_{12}a_{21}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12} + a_{13}a_{22}a_{11})r_{41}$$

$$r_{122} = r_{62} = (a_{11}a_{22}a_{23} + a_{11}a_{23}a_{22} + a_{12}a_{21}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{22} + a_{13}a_{22}a_{21})r_{41}$$

$$r_{123} = r_{63} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})r_{41}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -r_{41} \\ 0 & 0 & r_{41} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ -r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

