

MÉTODOS UNITARIOS PARA EL CÁLCULO DE LA POLARIZACIÓN DEL VACÍO EN QED

FABIAN CAMILO BARAJAS RINCON

Documento presentado al Programa de Física
como requisito para optar por el título de Físico.

Director: Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Básicas

Diciembre 2022

Resumen

En esta tesis se realizó el cálculo de la polarización del vacío en electrodinámica cuántica al primer orden perturbativo (un-loop) utilizando dos métodos. El método diagramático basado en las reglas de Feynman y el método de unitariedad de Cutkosky asociado con el teorema óptico en teoría cuántica de campos. En el primer procedimiento fue necesario aplicar la regularización dimensional para remover las divergencias ultravioletas presentes en la amplitud del observable físico, mientras que con la segunda prescripción se utilizaron las reglas de Cutkosky donde se evitan dichas discontinuidades y se calcula la parte imaginaria de la amplitud, la cual posteriormente se utiliza para hallar la amplitud completa a partir de las relaciones de dispersión derivadas de los teoremas integrales del análisis complejo. Además, se implementó un código en el lenguaje de *Wolfram Mathematica*, con ayuda de los paquetes *FeynArts* y *FeynCalc*, que permitieron obtener una expresión para la polarización del vacío equivalente a la encontrada con los dos métodos analíticos.

Palabras clave— Polarización del vacío, propagador, diagramas de Feynman, teorema óptico.

Agradecimientos

Primero quiero dar gracias a Dios por guiarme en cada paso que doy en mi vida, a mi madre y abuelos quienes metafóricamente son el motor de mi vida. Agradezco principal e inmensamente a mi director de tesis Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas quién constantemente esta realizando diversos aportes a la Física y además de ello transmite su conocimiento para que personas como yo nos adentremos en este maravilloso mundo de la ciencia y podamos realizar tesis como esta. Mil gracias por su paciencia y dedicación a la hora de discutir cualquier tema referente a este proceso, el cual resulto muy enriquecedor tanto a nivel académico como personal. Por otra parte, también agradezco a cada uno de los profesores que tuve durante toda mi carrera de Físico, a mis compañeros que posteriormente se convirtieron en excelentes amigos, los cuales prefiero no mencionar para evitar olvidarme de nombrar alguno de ellos. En síntesis agradezco a cada una de las personas que estuvieron de una u otra forma presentes en el desarrollo de esta tesis.

Tabla de contenido

	Pag.
Resumen	I
Agradecimientos	II
TABLA DE CONTENIDO	III
1. Introducción	1
2. Teoría Cuántica de Campos en QED	3
2.1 Campo escalar real de Klein - Gordon.....	5
2.1.1 Propagador del campo escalar de Klein-Gordon.....	10
2.2 Ecuación de Dirac	13
3. Sección Eficaz	22
3.1 Sección eficaz en teoría de campos cuánticos	29
3.1.1 Reglas de Feynman en QED	34
3.2 Teorema óptico.....	37
3.2.1 Teorema óptico en la QFT	41
4. Polarización del Vacío	44
4.1 Cálculo diagramático de la polarización del vacío	45
4.2 Método dispersivo para el cálculo de la polarización del vacío	51
4.2.1 Relaciones de dispersión	53
4.3 Implementación en Wolfram Mathematica	56
5. Conclusiones	62
Apendice. A. Notación y Convenciones	63
A.1 Unidades	63
A.2 Relatividad y Tensores	64
A.3 Distribuciones y Transformadas de Fourier	65
A.4 Mecánica Cuántica	66
A.5 Electrodinámica.....	67
A.6 Función Gamma	68

Apendice. B. Propagador de Klein-Gordon	69
B.1 Función de Green de la ecuación de Klein-Gordon	69
Apendice. C. Cálculos explícitos de la Polarización del vacío	74
C.1 Escala de Masa	74
C.2 Integrales Tensoriales y Escalares en d dimensiones.....	75
C.3 Integral parte real	78
Referencias	81

1. Introducción

En la actualidad, los aceleradores de partículas realizan experimentos cada vez más precisos con el fin de hallar la verdadera naturaleza de las partículas subatómicas que componen todo lo que existe en el universo. Entre estos instrumentos de medición, los más importantes son el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN [1] y el Fermilab, además se tiene proyectado la construcción de un nuevo acelerador lineal (ILC) que se encargará de estudiar la colisión electrón-positrón [2], del que se espera pueda medir con mayor precisión y mayor estadística las propiedades de las partículas y permita estudiar nuevas áreas de la física como la materia oscura [3]. Estos hechos, traen como consecuencia la necesidad de calcular los mismos observables de forma teórica con una precisión que va aumentando e incluye evaluar diagramas de Feynman hasta el más alto orden perturbativo posible, que puede llegar a ser de incluso 5-loops dependiendo del observable. Las correcciones obtenidas a partir de los diagramas de Feynman no pueden ser evaluadas de forma analítica en la mayoría de los casos, sin embargo, el teorema óptico puede usarse como una herramienta poderosa para encontrar representaciones dispersivas que permite evaluar las integrales de Feynman obtenidas de forma numérica. Entre los códigos recientes que buscan cumplir este objetivo se encuentran TVID (Three-loop Vacuum Integrals from Dispersion relations) [4] para funciones de Green de cero y un punto y TVID2 [5] para auto-energías. Recientemente estos códigos siguen en desarrollo y se espera poder incluir en el futuro funciones de 3 y 4 puntos también.

Los métodos de unitariedad derivados del teorema óptico se siguen utilizando actualmente y han permitido realizar correcciones cuánticas a distintos observables físicos, como lo son la masa del bosón de Higgs [6, 7], las masas de los bosones W y Z de la interacción débil [8], el momento magnético anómalo del electrón [9] y del muón [10, 11], el cálculo de observables angulares como la correlación energía-energía (EEC) [12] y en el cálculo de la sección eficaz de distintos procesos de scattering imponiendo la unitariedad de la matriz S [13]. Todos estos cálculos implican la evaluación de funciones de Green de cero puntos (burbujas del vacío), un punto (tadpoles), dos puntos (propagadores o auto-energías), tres puntos (vértices) y hasta cuatro puntos (boxes). Rutinas especializadas que permiten evaluar estas funciones de Green de

manera perturbativa hasta el orden de dos-loop son bien conocidas. Entre ellas se encuentra el método de Cutkosky [14, 15], en el cuál centraremos nuestra atención, donde se usan ciertas reglas derivadas del teorema óptico para la matriz S , asociado directamente a la unitariedad de la teoría, para calcular las discontinuidades de las amplitudes correspondientes a los diagramas de Feynman. Estas discontinuidades relacionadas a la parte imaginaria de la amplitud se usan para calcular la amplitud completa a partir de relaciones de dispersión escritas en forma de representaciones espectrales, como la representación espectral de Källén-Lehmann [15], que explotan los teoremas integrales derivados del análisis complejo.

El objetivo principal de esta tesis es calcular la corrección cuántica al orden de un-loop para el propagador del fotón en la electrodinámica cuántica (QED) usando explícitamente el método diagramático de Feynman y el método de unitariedad de Cutkosky. Además, se usaran los códigos FeynArts [16] y FeynCalc [17] de Mathematica para determinar las reglas de Feynman para la Lagrangiana de interacción de la QED, obtener una expresión para la polarización del vacío y comparar los resultados obtenidos en cada proceso.

Para estudiar las propiedades analíticas del propagador del fotón, esta tesis se dividió en tres partes. En el capítulo 2, se muestra el formalismo principal de la teoría cuántica de campos para una partícula libre escalar y se deduce el propagador libre del campo de Klein-Gordon. Adicionalmente se estudia el contenido de materia de la electrodinámica cuántica, el álgebra de Dirac y las principales propiedades de simetría del Lagrangiano de la QED. En el capítulo 3 se estudian los procesos de dispersión, la sección eficaz diferencial y total y el teorema óptico con sus diversas aplicaciones. Formalmente se demostró la estructura matemática del teorema óptico desde el punto de vista de la mecánica cuántica y la teoría de campos cuánticos. En el capítulo 4 se realiza el cálculo explícito de la polarización del vacío a un-loop usando dos métodos. Primero se utiliza el método diagramático desarrollado por Feynman y se introduce el concepto de regularización dimensional de integrales divergentes. Por otra parte, el segundo método consiste en usar las reglas de Cutkosky derivadas del teorema óptico y las relaciones de dispersión derivadas del análisis complejo para obtener la misma amplitud. Finalmente, en este mismo capítulo se desarrolla una implementación del método diagramático usando el lenguaje de programación simbólico Wolfram Mathematica para hallar la polarización del vacío.

2. Teoría Cuántica de Campos en QED

El estudio de procesos físicos que ocurren a escalas muy pequeñas (escala electro-débil $\sim 200 \text{ GeV}$) o altas energías, requirió la formulación de la teoría cuántica de campos (QFT), que además de combinar la mecánica cuántica y la relatividad especial de Albert Einstein introduce el concepto físico de campo cuántico, donde sus respectivas perturbaciones representan a las partículas fundamentales (Leptones, Quarks y Bosones). La QFT es la base del Modelo Estándar (SM) de la física de partículas y proporciona herramientas esenciales para entender otras áreas de la ciencia, por ejemplo, la astrofísica, la cosmología, la física de la materia condensada y la física nuclear [18].

No obstante, podríamos preguntarnos ¿Por qué surge la necesidad de introducir una teoría cuántica de campos?. La respuesta simple es que se busca una teoría más precisa para describir y entender el orden subyacente de la naturaleza. La mecánica cuántica reemplazo a la física clásica con el objetivo de realizar una correcta descripción del mundo subatómico mediante la denominada “primera cuantización” transformando magnitudes físicas como la posición q_j y el momento p_j en operadores lineales actuando en el espacio de Hilbert, los cuales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación canónica¹:

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= i\delta_{ij} , \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

El problema con la teoría cuántica radica en su falta de generalidad ya que en principio fue formulada para procesos no relativistas haciéndola imprecisa para describir partículas moviéndose a altas velocidades. Ahora bien, el concepto de campo se requiere porque no bastaría solamente con cuantizar partículas relativistas para extender la física cuántica y hacerla más precisa, debido a que si se escribe una ecuación de onda relativista para una sola partícula tal como veremos en la sección 2.2 se presentan inconsistencias físicas, entre ellas, estados de energía negativa. Además

¹Para el desarrollo de ésta tesis se utilizó la notación y convención habitual de QFT, ver Apéndice A. Por lo tanto, expresiones como $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$ normalmente en mecánica cuántica se escriben $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ pero aquí por convención \hbar al igual que las demás constantes universales son adimensionales e iguales a 1.

para la mecánica cuántica no relativista el número de partículas y su identidad se conservan, generando una contradicción con la relación de Einstein para la energía $E = mc^2$ que permite la creación de pares partícula-antipartícula (por ejemplo, un fotón con la suficiente energía viajando por el vacío se puede desintegrar en un electrón y un positrón) e incluso cuando no hay suficiente energía para la creación de pares el principio de incertidumbre de Heisenberg ($\Delta E \Delta t \geq \hbar$) permite que ocurran estados intermedios de formación y aniquilación de partículas virtuales en tiempos suficientemente cortos. Es necesario recurrir al formalismo de los campos cuánticos para resolver dichos inconvenientes mediante una extensión de las coordenadas generalizadas (q_i, p_j) a campos continuos que permita describir correctamente estos fenómenos físicos. Por otra parte, la necesidad de tener una teoría multipartícula surge a partir de considerar el principio de causalidad de la relatividad, es decir, que ninguna partícula de materia con masa en reposo distinta de cero puede viajar igual o más de rápido que la velocidad de la luz. Sin embargo, el propagador de la mecánica cuántica no obedece esta condición de causalidad tal como se muestra a continuación.

Partimos de la amplitud de probabilidad de que una partícula libre se propaga de un punto inicial \mathbf{x}_0 a punto final \mathbf{x} en un tiempo t , representada por el propagador:

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (2.2)$$

Recordemos de la mecánica cuántica no relativista que el operador hamiltoniano (H) para una partícula libre es $H = \mathbf{p}^2/2m$, por consiguiente, si aplicamos la relación de completitud para el momento lineal en la ecuación (2.2), el propagador se transforma en:

$$U(t) = \int d^3p \langle \mathbf{x} | e^{-i(p^2/2m)t} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (2.3)$$

Pero $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle$ es la representación de Dirac de una onda plana:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

y por lo tanto, la expresión (2.3) se convierte en:

$$U(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i(p^2/2m)t} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}. \quad (2.5)$$

Resolviendo la anterior transformada de Fourier, se llega al propagador de la mecánica cuántica:

$$U(t) = \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{im(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2t}. \quad (2.6)$$

El propagador de la expresión (2.6) es diferente de cero para cualquier valor arbitrario de \mathbf{x} y t , permitiendo que una partícula pueda viajar entre dos puntos en tiempos arbitrariamente pequeños superando incluso la velocidad de la luz, lo cual viola el criterio de causalidad. Una manera aparentemente simple de solucionar este problema es realizar un calculo análogo al precedente pero considerando la energía relativista $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, lo que conduce a la expresión del propagador:

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{\mathbf{x}^2-t^2}}. \quad (2.7)$$

Pese a incluir la energía relativista, el propagador (2.7) tampoco satisface el principio de causalidad, debido a que sigue siendo distinto de cero para valores de \mathbf{x} y t que superan la velocidad de la luz.

La teoría cuántica de campos resuelve este problema de causalidad definiendo propagadores invariantes de Lorentz en términos de campos debidamente cuantizados, dando origen a la “segunda cuantización”, la cual se basa en transformar las funciones de onda, que en mecánica cuántica son amplitudes de probabilidad que representan la frecuencia de ocurrencia de una medida, en operadores lineales obligados a satisfacer ciertas relaciones de conmutación o anti-conmutación canónicas. Para familiarizarnos con ello, a continuación se estudiará el campo escalar de Klein-Gordon y su propagador .

2.1 Campo escalar real de Klein - Gordon.

El campo escalar de Klein-Gordon $\phi(x)$ es un campo de spin cero neutro y real ($\phi(x) = \phi^*(x)$) que representa una generalización al continuo de las coordenadas generalizadas² q_j :

$$q_j \rightarrow \phi(x) \quad x = (t, \mathbf{x}), \quad (2.8)$$

²las coordenadas generalizadas son magnitudes que se utilizan para describir de manera unívoca un sistema físico con un número infinito de grados de libertad, por ejemplo, la posición de las partículas contenidas en un determinado volumen.

es decir, que en vez de tener un sistema con un número discreto y finito de grados de libertad, ahora se tiene un medio continuo.

El campo $\phi(x)$ representa la solución de la ecuación de Klein-Gordon que se expresa de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.9)$$

Recordemos que para resolver una teoría en mecánica cuántica utilizamos el hamiltoniano del sistema para obtener los auto-valores y auto-vectores posibles del estado físico. Para encontrar los auto-vectores primero se expresa el campo en la base de los momentos lineales mediante una transformada de Fourier:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{p}), \quad (2.10)$$

ahora, reemplazando $\phi(t, \mathbf{x})$ en la ecuación de movimiento (2.9) y resolviendo explícitamente, se llega a la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple en el espacio de los momentos:

$$\frac{\partial^2 \phi(t, \mathbf{p})}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{p}}^2 \phi(t, \mathbf{p}) = 0; \quad \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_{\mathbf{p}}. \quad (2.11)$$

La frecuencia $\omega_{\mathbf{p}}$ corresponde a la energía relativista $E_{\mathbf{p}}$ de un oscilador armónico cuántico descrito por el Hamiltoniano:

$$H_{OAC} = \frac{\pi^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_{\mathbf{p}}^2 \phi^2. \quad (2.12)$$

El espectro de H_{OAC} se puede encontrar en el límite del continuo escribiendo $\phi(\mathbf{x})$ y su momento canónico conjugado $\pi(\mathbf{x})$ en términos de los operadores aniquilación ($a_{\mathbf{p}}$) y creación ($a_{\mathbf{p}}^\dagger$):

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (2.13)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \quad (2.14)$$

Luego, los operadores $a_{\mathbf{p}}$ y $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ están obligados a satisfacer la relación de conmutación:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.15)$$

De este modo, los campos $\phi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$ son una expansión en series de Fourier de ondas planas, donde los coeficientes $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{p}}$ crean y aniquilan partículas respectivamente. Además, $\phi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$ son operadores que hasta aquí no evolucionan temporalmente, es decir, se encuentran en el cuadro de Schrödinger. Si realizamos el cambio de variable $p \rightarrow -p$ en el segundo término de la derecha en las ecuaciones (2.13) y (2.14) y considerando que el Jacobiano de la transformación es igual a 1, entonces, podemos reescribir $\phi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$ como:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.16)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.17)$$

Los operadores creación y aniquilación actúan de forma similar a los operadores escalera. si definimos el estado de vacío o de mínima energía como $|0\rangle$ el operador creación actuando sobre el estado de vacío crea una partícula de momento \mathbf{p} y energía relativista $E_{\mathbf{p}}$ de acuerdo con:

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}\rangle, \quad (2.18)$$

mientras que el operador aniquilación actuando sobre el estado base produce:

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, el campo $\phi(\mathbf{x})$ actuando sobre el estado de vacío crea una partícula en la posición \mathbf{x} :

$$\phi(\mathbf{x}) |0\rangle = |\mathbf{x}\rangle. \quad (2.20)$$

Haciendo uso de la expresión (2.15) podemos calcular el conmutador entre $\phi(\mathbf{x})$ y $\pi(\mathbf{x})$ obteniendo las relaciones de conmutación entre estos dos operadores:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Las expresiones de la ecuación (2.21) establecen la “segunda cuantización” que transforma funciones de onda en operadores, obedeciendo relaciones de conmutación

canónicas. En el primer conmutador aparece una delta de Dirac, en lugar de la delta de Kronecker que aparece en la ecuación (2.1) para la primera cuantización. Esto tiene como consecuencia que el conmutador no es una cantidad invariante de Lorentz. Para verificarlo, notemos que al aplicar un boost de Lorentz en la dirección z negativa, el cuadri-vector momento se transforma en:

$$\begin{aligned} E'_{\mathbf{p}} &= \gamma (E_{\mathbf{p}} + \beta p_3), \\ p'_3 &= \gamma (p_3 + \beta E'_{\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Utilizando la identidad de la función delta:

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (2.23)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \cdot \frac{dp'_3}{dp_3} \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \gamma \left(1 + \beta \frac{dE_{\mathbf{p}}}{dp_3} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

De la energía relativista

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2} \rightarrow \frac{dE_{\mathbf{p}}}{dp_3} = \frac{p_3}{E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.25)$$

la ecuación (2.24) se convierte en:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{\gamma}{E_{\mathbf{p}}} (E_{\mathbf{p}} + \beta p_3), \quad (2.26)$$

utilizando la ecuación (2.22) se llega finalmente a:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{E'_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.27)$$

De esta manera, podemos observar que la delta de Dirac no es un invariante de Lorentz, problema que esta relacionado con la no invarianza de los volúmenes bajo boosts debido a la contracción de la longitud presente en la relatividad especial. Por esta razón hay que definir una cantidad que si permanezca invariante para que no viole la causalidad. De la ecuación 2.27 puede observarse que realmente la cantidad invariante de Lorentz

es el producto entre la energía ($E_{\mathbf{p}}$) y la delta de Dirac:

$$E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = E'_{\mathbf{p}}\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{q}'). \quad (2.28)$$

Por otro lado, esto implicaría que la relación de completitud también debe modificarse, de tal forma que :

$$1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p}| \quad (2.29)$$

El número 2 junto a la energía es sólo una convención para simplificar el factor $\sqrt{2}$ de la ecuación (2.16). Modificada la relación de completitud la normalización habitual de la mecánica cuántica pasa de ser $\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ a:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (2.30)$$

la ecuación (2.18) también debe ser reescrita con el factor de normalización ($\sqrt{2E_p}$) permitiendo definir los estados multipartícula como:

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}}\dots a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots |0\rangle. \quad (2.31)$$

Respecto a la medida de la integral de volumen (V), para que sea un invariante de lorentz, esta debe ser:

$$V = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.32)$$

Este volumen puede ser expandido al espacio de Minkowski para incluir la componente temporal del cuadri-momento p mediante la relación:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0}. \quad (2.33)$$

El límite de integración del volumen tetra-dimensional para la componente temporal se restringe a valores positivos ($p^0 > 0$) debido a que energías o tiempos negativos no tienen una interpretación física.

Teniendo la normalización apropiada para tener cantidades invariantes de Lorentz, el paso a seguir es determinar como el campo cuántico $\phi(\mathbf{x})$ evoluciona en el tiempo, para lo cual tendremos que pasar del cuadro de Schrödinger al de Heisenberg donde los

operadores evolucionan a través de la transformación de similaridad:

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}. \quad (2.34)$$

Resolviendo llegamos a la expresión para un campo escalar en función del tiempo:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}). \quad (2.35)$$

La expresión (2.35) es un invariante de Lorentz al igual que en la ecuación (2.16), pero difiere en el producto escalar Minkowskiano ($p \cdot x$) definido de la siguiente manera:

$$p \cdot x = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \cdot (t, \mathbf{x}) = E_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.36)$$

2.1.1 Propagador del campo escalar de Klein-Gordon

Ahora que se ha definido el campo escalar de Klein-Gordon y sus propiedades de simetría, vamos a obtener un propagador que sea un invariante de Lorentz y por lo tanto respete el principio de causalidad. La amplitud de probabilidad $D(x - y)$ para que una partícula se propague de un punto y a un punto x es:

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x - y)}. \quad (2.37)$$

Si evaluamos la integral anterior en el límite puramente espacial $(x - y) = (0, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ haciendo uso de las coordenadas esféricas y llamando $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}$, entonces:

$$D(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} = \frac{-i}{2(2\pi)^2 |\mathbf{r}|} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{|\mathbf{p}| e^{-i|\mathbf{p}||\mathbf{r}|}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}. \quad (2.38)$$

La integral tiene singularidades en $\mathbf{p} = \pm im$, la cual se puede evaluar en el plano complejo mediante el teorema de los residuos obteniendo:

$$D(x - y) \sim e^{-m|\mathbf{r}|}. \quad (2.39)$$

Este resultado sigue siendo distinto de cero incluso fuera del cono de luz, indicándonos que se sigue violando el principio de causalidad. Para realmente discutir la causalidad,

por lo tanto, no debemos preguntarnos si las partículas se pueden propagar sobre intervalos espacio-temporales, sino que debemos estudiar si dos eventos separados espacialmente son causales o no, con causales nos referimos a que un evento es la causa del otro. Esto se traduce en calcular el conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$ para verificar si una medida del campo ϕ realizada en el punto x , puede afectar una medida en otro punto y cuya separación de x es como de espacio. Si el conmutador se anula para $(x - y)^2 < 0$ entonces una medida no afecta a la otra y la causalidad es preservada [18]. El conmutador se elimina trivialmente para $x^0 = y^0$, sin embargo en el caso mas general se tiene:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} [(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}), (a_q e^{-iqy} + a_q^\dagger e^{iqy})] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} (e^{-i(px-xy)} [a_p, a_q^\dagger] + e^{i(px-xy)} [a_p^\dagger, a_q]) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Para el computo del conmutador se ha utilizado la expresión (2.15). Podemos reformular el conmutador (2.40) teniendo en cuenta la relación (2.37) que conduce a:

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x). \tag{2.41}$$

Ahora bien, si $(x - y)^2 < 0$ (fuera del cono de luz) se puede realizar una transformación de Lorentz que va de $(x - y) \rightarrow -(x - y)$, luego, $D(x - y) = D(y - x)$ y $[\phi(x), \phi(y)] = 0$, preservando la causalidad. Por otro lado, si $(x - y)^2 > 0$ (dentro del cono de Luz) no existe una transformación continua que transforme $(x - y)$ en $(y - x)$, garantizando que el conmutador sea distinto de cero.

Ahora, vamos a mirar como la función retardada de Green es igual al conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$ cuando $x > y$. Consideremos la función retardada de Green $D_R(x - y)$ del operador de Klein-Gordon (ver Apéndice B):

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \tag{2.42}$$

La integral asociada a $D_R(x - y)$ presenta singularidades en $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Usando el teorema de los residuos de Cauchy podemos elegir un contorno en el plano complejo por debajo del eje real para $x^0 > y^0$ (Ver Apéndice B) para obtener:

$$D_R(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} 2\pi i [\text{Res}(+E_{\mathbf{p}}) + \text{Res}(-E_{\mathbf{p}})] \theta(x^0 - y^0), \quad (2.43)$$

donde $\theta(x^0 - y^0)$ es la función paso que esta definida por:

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 0 & x^0 < y^0 \\ 1 & x^0 > y^0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Resolviendo los residuos se llega a:

$$\begin{aligned} D_R(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} \Big|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \\ &= [\phi(x), \phi(y)], \end{aligned} \quad (2.45)$$

de lo cual, podemos observar que la función retardada de Green es igual al conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$ entre los campos. Existen diferentes prescripciones de la función de Green del operador de Klein-Gordon, cada una de ellas relacionadas con los contornos de integración que se utilicen para aplicar el teorema de los residuos. El propagador de Feynman $D_F(x - y)$ es una de dichas funciones y es de gran utilidad para calcular procesos de scattering en la QFT. El propagador $D_F(x - y)$ esta definido de la siguiente manera:

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}. \quad (2.46)$$

En la prescripción de Feynman los polos o las singularidades están en $p^0 = \pm(E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)$ y se encuentran desplazados por encima y por debajo del eje real, ver Figura 2.1. Con base a ello, se pueden realizar las integrales de contorno inferior para $x^0 > y^0$ y superior para $x^0 < y^0$ llegando a:

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(e^{-iE_p(x^0-y^0)} \theta(x^0 - y^0) + e^{iE_p(x^0-y^0)} \theta(y^0 - x^0) \right) \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.47)$$

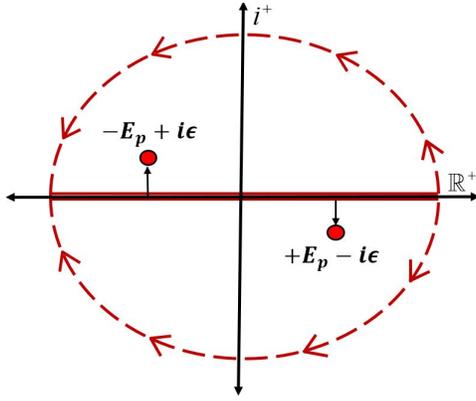


Figura 2.1: Prescripción de Feynman

En el propagador de Feynman (2.47), cuando $x^0 - y^0 > 0$, $D_F(x - y)$ representa la amplitud de probabilidad que una partícula se cree en el punto y y se propague libremente hasta x donde es aniquilada, mientras que para $y^0 - x^0 > 0$ representa la amplitud de probabilidad de que una anti-partícula se cree en x para propagarse hasta y donde es aniquilada [19]. Esta interpretación preserva la causalidad y también evita densidades de probabilidad negativa. Por lo tanto, el propagador de Feynman representa al propagador escalar como la suma entre la función retardada ($x^0 > y^0$) y avanzada ($y^0 > x^0$) de Green.

Hasta aquí, se ha obtenido el propagador del campo escalar de Klein-Gordon que describe partículas de spin 0, como por ejemplo, el bosón de Higgs. No obstante, en esta tesis se estudiará la polarización del vacío que involucra partículas de spin 1/2 (electrón-positrón) y de spin 1 (fotones). Esto requiere nuevas formas de reescribir e interpretar la ecuación de Klein-Gordon tal como lo hizo Paul Dirac y Alexandru Proca. Por ende, es necesario estudiar la ecuación de Dirac y la ecuación de Proca para finalmente hallar los propagadores de las partículas asociadas a la QED.

2.2 Ecuación de Dirac

En 1928 Paul Dirac formuló una de las ecuaciones más elegantes de la física, la cual unificó la mecánica cuántica con la relatividad especial ya que describe la dinámica de un electrón libre o cualquier otro tipo de fermión de spin 1/2 que se propague a velocidades relativistas (cercasas a la velocidad de la luz). La naturalidad de la ecuación

de Dirac radica en que explica teóricamente la existencia del spin y de las antipartículas tal como el Positrón ³ (antipartícula del electrón) que años más tarde fue descubierta por Carl David Anderson al fotografiar huellas de rayos cósmicos en una cámara de niebla [21].

Para demostrar la ecuación de Dirac partimos de la ecuación de la energía relativista (E) para una partícula libre

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (2.48)$$

donde m es la masa en reposo de la partícula. De la primera cuantización de la teoría clásica tenemos:

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.49)$$

Reemplazando en la ecuación (2.48) y aplicando el operador resultante sobre una función arbitraria $\psi(x)$ se obtiene la ecuación de Klein-Gordon en términos del operador D'Alembertiano ($\square = \partial_\mu \partial^\mu$) :

$$(\square + m^2) \psi(x) = 0. \quad (2.50)$$

Sin embargo, la ecuación diferencial (2.50) es de segundo orden, por lo tanto, admite dos soluciones representadas con ondas planas cuyos argumentos tendrán dos posibles valores de energía ($E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$). En la teoría clásica relativista la energía negativa es ignorada ya que sólo se estudia la cinemática de las partículas, por otra parte, en la teoría cuántica se estudia la dinámica de las partículas, es decir, su cinemática y las interacciones que ocurren entre ellas, en consecuencia, deben considerarse todas las soluciones, incluida la solución de energía negativa, prediciendo partículas de energía negativa, lo cual, carece de consistencia física. Para solucionar este problema, Dirac reescribió la ecuación cuadrática de Klein-Gordon como el producto de dos ecuaciones lineales:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = 0, \quad (2.51)$$

donde el factor γ se incluyó con el objetivo de obtener un producto escalar en el espacio de Minkowski, debido a que la ecuación debe ser un covariante de Lorentz. Resolviendo

³En la actualidad, los positrones son utilizados en medicina nuclear para diagnosticar diversas enfermedades mediante la tomografía por emisión de positrones (PET), ver [20].

explícitamente el producto (2.51) se obtiene:

$$[\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu + im(\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu) + m^2]\psi(x) = 0. \quad (2.52)$$

Para que la ecuación (2.52) sea equivalente a la ecuación de Klein-Gordon (ecuación (2.50)) se debe cumplir que:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu, \quad \gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu = 0. \quad (2.53)$$

Las condiciones de la expresión (2.53) obligan al factor γ a satisfacer el álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.54)$$

donde $g^{\mu\nu}$ son los elementos del tensor métrico g (Ver Apéndice 1). Los factores gamma no pueden ser un número, necesariamente deben ser matrices 4×4 o de orden superior para que satisfagan el álgebra de Clifford. Existen diversas representaciones de las matrices γ^μ , pero las más usadas son las halladas originalmente por Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

siendo σ^i las matrices de Pauli, asociadas con la propiedad intrínseca de las partículas denominada Spin.

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Tomando de (2.51) el termino correspondiente a la energía positiva, se llega a la ecuación de Dirac:

$$(i\rlap{/}\partial - m)\psi(x) = 0, \quad (2.57)$$

donde $\rlap{/}\partial$ es el slash de Feynman aplicado a la cuadri-derivada ($\rlap{/}\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$) y $\psi(x)$ debe ser un espinor de cuatro componentes compuestas por números complejos y grassmanianos. Si calculamos el adjunto a la ecuación (2.57) se llega a la ecuación adjunta de Dirac:

$$(i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi}) = 0, \quad (2.58)$$

siendo $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ el espinor adjunto. Para obtener la ecuación de continuidad primero

consideremos que el espinor ψ y espinor auto adjunto $\bar{\psi}$ representan dos partículas con distintas masas, m_1 y m_2 respectivamente. Multiplicando al lado izquierdo de la ecuación (2.57) por $\bar{\psi}$ y al lado derecho de (2.58) por ψ para posteriormente sumarlas, da como resultado:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= (m_1 - m_2)\bar{\psi}\psi \\ i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= (m_1 - m_2)\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Si las masa de las partículas son iguales ($m_1 = m_2$) se llega a:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.60)$$

de este modo, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\rho, \mathbf{j})$ es la cuadri-corriente conservada, donde ρ es la densidad de carga y \mathbf{j} es la densidad de corriente eléctrica.

A partir de la ecuación de continuidad se pueden obtener los bilineales covariantes de la teoría de Dirac, notando que bajo transformaciones de Lorentz, la cuadri-corriente transforma como un tetra-vector:

$$j^\mu \rightarrow j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu, \quad \Lambda \equiv \text{Matriz de Lorentz.} \quad (2.61)$$

Por lo tanto, la relación de continuidad es un invariante de Lorentz al ser un producto Minkowskiano de dos cuadri-vectores:

$$\partial_\mu j^\mu \rightarrow \partial'_\mu j'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \Lambda^\mu_\nu j^\nu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\nu j^\nu = \partial_\nu j^\nu. \quad (2.62)$$

Como consecuencia se deduce que el bilineal $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es también un cuadri-vector. Por otro lado, retomando la ecuación (2.59) podemos deducir que el producto escalar $\bar{\psi}\psi$ es un invariante de Lorentz. Ahora, si $j^0 = \rho$ y $\rho > 0$ entonces $\bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \|\psi\|^2 > 0$, por tanto, la probabilidad es positiva.

En general cualquier corriente fermionica es de la forma $\bar{\psi}\Gamma\psi$, donde Γ es una matriz 4×4 . Para construir la interacción Lagrangiana de la QED y otras teorías físicas más avanzadas, por ejemplo, el modelo electro-débil, se deben usar solo aquellas corrientes que tienen propiedades de transformación de Lorentz definidas. Para ello primero se

Γ	Transforma como	Rango	# de componetes
1	escalar	0	1
γ^μ	vector	1	4
$\sigma^{\mu\nu}$	tensor	2	6
$\gamma^5\gamma^\mu$	vector axial	3	4
γ^5	pseudo-escalar	4	1

Tabla 2.1: Covariantes Bilineales.

definen dos nuevas matrices:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \stackrel{\text{rep. Dirac}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.63)$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}. \quad (2.64)$$

Ahora $\bar{\psi}\Gamma\psi$ transforma covariantemente si Γ es una de las matrices dadas en la Tabla 2.1. En el mismo esquema se muestran las propiedades de transformación de $\bar{\psi}\Gamma\psi$, el número de matrices γ diferentes y el número de componentes, que en total son 16, esto significa que el conjunto de matrices $\{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^5\}$ forma una base completa para cualquier matriz de 4×4 . Estas corrientes Γ se denominan covariantes bilineales en la teoría de Dirac.

Miremos ahora las soluciones de la ecuación de Dirac, para ello, vamos al espacio de los momentos haciendo uso de la relación $p_\mu = i\partial_\mu$ para transformar la ecuación de Dirac en:

$$(p_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (2.65)$$

La anterior expresión es una ecuación matricial, la cual puede escribirse explícitamente:

$$\begin{pmatrix} E - m & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

dejando a y b igual a

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Entonces las ecuaciones resultante del sistema (2.66) son:

$$(E - m) a - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) b = 0, \quad (2.68)$$

$$-(E + m) b + (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) a = 0. \quad (2.69)$$

Despejando b de la ecuación (2.69)

$$b = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E + m} a, \quad E \geq m > 0, \quad (2.70)$$

y reemplazándola en la ecuación (2.68) se llega a la ecuación de Klein-Gordon:

$$(E^2 - \mathbf{p}^2 - m) a = 0. \quad (2.71)$$

En este caso se ha tomado la condición $E \geq m > 0$ (energía positiva) necesaria para que el espinor no diverja. La solución para a debe tener la forma:

$$a(\mathbf{p}, \sigma) = N \chi^{(\sigma)} e^{-ip \cdot x}, \quad (2.72)$$

donde N es una constante de normalización y $\chi^{(\sigma)}$ representa las auto-funciones de la matriz σ_z o los auto-estados de spin 1/2

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Así, la solución para una partícula libre con energía positiva es:

$$\begin{aligned} \psi_{(+)} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} a \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \chi^{(\sigma)} \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} \chi^{(\sigma)} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}, \quad \sigma = 1, 2, \\ &= N u(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) e^{-ip \cdot x}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por otra parte, si despejamos el espinor a de la ecuación (2.68):

$$a = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E - m} b, \quad (2.75)$$

entonces para que el espinor no diverja $E \neq m$, y el parámetro E puede tomar valores negativos $E \leq -m < 0$. Luego, realizando un análisis similar al caso de energía positiva,

se puede encontrar la siguiente solución:

$$\begin{aligned}\psi_{(-)} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E+m} b \\ b \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E+m} \chi^{(\sigma)} \\ \chi^{(\sigma)} \end{pmatrix} e^{ip\cdot x} \quad \sigma = 1, 2, \\ &= N v(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) e^{-ip\cdot x}.\end{aligned}\tag{2.76}$$

No obstante, el resultado anterior requirió una interpretación del parámetro E que condujo a la predicción teórica de las antipartículas. Las soluciones con “energías negativas” representan antipartículas con energía positiva moviéndose hacia atrás en el espacio-tiempo.

Los espinores $u(\mathbf{p}, \sigma)$ y $v(\mathbf{p}, \sigma)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$(\not{p} - m)u = 0; \quad (\not{p} + m)v = 0;\tag{2.77}$$

así, la solución general de la ecuación de Dirac es una superposición de ondas planas, que expresada en el límite del continuo permite obtener el campo fermionico:

$$\psi(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} [u(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip\cdot x} + v(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip\cdot x}],\tag{2.78}$$

en el que $a(\mathbf{p}, \sigma)$ y $a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)$ son los coeficientes de expansión y $1/\sqrt{(2\pi)^3 2E}$ es un factor de normalización, especialmente \sqrt{E} garantiza que la medida sea invariante de Lorentz. Para cuantizar el campo de Dirac ($\psi(x)$) transformamos los coeficientes a , $a^{c\dagger}$ en operadores mediante la segunda cuantización, imponiendo las relaciones de anti-conmutación

$$\{a(\mathbf{p}, \sigma), a^{\dagger}(\mathbf{p}', \sigma')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),\tag{2.79}$$

donde $a^{c\dagger}$ (la letra c en $a^{c\dagger}$ indica la conjugación de carga) y a son respectivamente los operadores creación (crea una anti-partícula) y aniquilación (aniquila una partícula). Tanto el campo de Dirac que describe fermiones como el campo escalar (2.35) que describe partículas de spin 0 mantienen la misma esencia: “las partículas se crean a partir de los modos normales de oscilación de los campos”.

De manera análoga, analicemos el campo vectorial para partículas de Spin 1, el cual satisface la ecuación:

$$\square A^{\mu}(x) = m^2 A^{\mu}(x),\tag{2.80}$$

denominada la ecuación de Proca, donde $A^\mu(x)$ es el cuadri-potencial para una partícula masiva. En el caso particular del fotón ($m = 0$) la ecuación de Proca se reduce a las ecuaciones de Maxwell

$$\square A^\mu(x) = 0, \quad (2.81)$$

por consiguiente, la estructura de la solución debe ser:

$$A^\mu(x) = N \epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}, \quad (2.82)$$

donde $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ es el vector de polarización que es de la forma $\epsilon^\mu = (0, 1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ (el \pm esta asociado con la polarización dextrógira y levógira respectivamente) y λ la helicidad o proyección del spin a lo largo del momento lineal ($\lambda = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$). Finalmente llevando al límite del continuo la solución (2.82), se consigue el campo fotónico:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} [\epsilon^\mu(p, \lambda) a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ipx} + \epsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{ipx}]. \quad (2.83)$$

Aquí, nuevamente los coeficientes de expansión a^\dagger y a son los operadores creación y aniquilación (es importante resaltar que el fotón y su anti-partícula son indistinguibles). Ahora que conocemos la estructura matemática de los campos que representan a los fermiones y a los bosones vectoriales; resulta necesario incluir la formulación Lagrangiana (densidad Lagrangiana), la cuál agrupan el campo del fotón A^μ y el del electrón ψ para estudiar la interacción fotón-electrón responsables de la QED.

La construcción de la Lagrangiana de la QED debe tener las siguientes características:

- i) Los términos que componen la Lagrangiana deben ser invariantes de Lorentz ($\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi, \dots$).
- ii) Las correcciones cuánticas a observables físicos divergen, por tanto, requieren una renormalización que sólo es posible si la dimensión de la Lagrangiana es $[\mathcal{L}] \leq m^4$, específicamente para la QED $[\mathcal{L}] = m^4$.
- iii) La lagrangiana debe conservar la carga eléctrica ($Q_i = Q_f$). Por el teorema de Noether una carga conservada implica una simetría. La simetría es $U(1)$ o

transformación Gauge que transforma los campos ψ , $\bar{\psi}$ y A_μ respectivamente:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iQ\alpha(x)}\psi, \quad (2.84)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iQ\alpha(x)}, \quad (2.85)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{Q}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.86)$$

donde $\alpha(x)$ es un parámetro que depende de cada punto del espacio-tiempo. En consecuencia, se prohíben términos escalares de tipo: $\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}$, $A_\mu A_\nu F^{\mu\nu}$..., en el cual $F^{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético.

Teniendo en cuenta las características que debe tener la Lagrangiana de la electrodinámica cuántica, los términos posibles que cumplen las restricciones mencionadas anteriormente son:

$$\mathcal{L}_{QED} = c_1\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi + c_2\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi + c_3m\bar{\psi}\psi + c_4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.87)$$

Las constantes c_i se fijan de tal forma que usando el principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtengan las ecuaciones de movimiento de los campos ψ (Ec. de Dirac) y A^μ (Ecs. de Maxwell) llegando al resultado final:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.88)$$

La razón por la cuál hemos estudiado los campos asociados a cada una de las partículas fundamentales integrados en la Lagrangiana de la QED es porque son las herramientas necesarias para calcular innumerables secciones eficaces de dispersión (amplitudes de probabilidad que permiten estudiar fenómenos cuánticos como la polarización del vacío), decaimientos de las partículas y otras cantidades observables. La confirmación experimental en los colisionadores de partículas de cada una de estas predicciones son la motivación principal para estudiar la teoría cuántica de campos.

3. Sección Eficaz

En la mecánica cuántica no relativista los procesos de scattering son aquellos en los que un estado inicial continuo se transforma en un estado final continuo, mediante la acción de un potencial (dispersos). Resulta necesario estudiar estos procesos porque son la forma en la que aprendemos experimentalmente sobre distribuciones de carga, masa y, en general, de la energía potencial referente a sistemas moleculares y atómicos [23]. En la práctica la realización de estos experimentos de dispersión, requieren colocar los detectores de los estados finales fuera del rango del potencial, por tanto, los cálculos analíticos de estos procesos se aproximan a grandes distancias. Iniciemos el estudio de estos fenómenos físicos, para el caso de una dispersión elástica e independiente del tiempo considerando el Hamiltoniano:

$$H = H_0 + V, \quad (3.1)$$

donde H_0 es operador Hamiltoniano para una partícula libre

$$H_0 = \mathbf{p}^2/2m, \quad (3.2)$$

y el parámetro V es el potencial con el que las partículas interactúan (u objetivo de colisión). El objetivo a seguir es hallar los autovalores y autovectores del Hamiltoniano (H), para ello, definiremos un auto estado inicial $|\phi\rangle$ (estado general antes de la dispersión que puede estar constituido por ondas planas o esféricas) de H_0 :

$$H_0 |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (3.3)$$

después de la colisión:

$$(H_0 + V) |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (3.4)$$

Observemos que después de la de dispersión el estado cuántico cambia de $|\phi\rangle \rightarrow |\psi\rangle$, pero el espectro continuo de la energía E se conserva. En ausencia de un dispersos el potencial V debe ser igual a cero, por lo tanto, la solución de la ecuación (3.4) debe ser:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{E - H_0} V |\psi\rangle + |\phi\rangle. \quad (3.5)$$

El operador $1/(E - H_0)$ de la ecuación previa presenta singularidades, que pueden verse fácilmente si aplicamos el bra $\langle \phi |$. Pero si consideramos E levemente compleja (agregando un $\pm i\varepsilon$ con $\varepsilon \rightarrow 0$) podemos eliminar la divergencia de la energía, dando como resultado la ecuación de Lippmann-Schwinger:

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) es una representación abstracta en el espacio de los kets. Para darle un significado físico, especialmente a grandes distancias, debemos proyectar el estado $|\psi^{(\pm)}\rangle$ en el espacio de las coordenadas:

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle + \int d^3x' \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \right| \mathbf{x}' \right\rangle \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle. \quad (3.7)$$

Si $|\phi\rangle$ representa un estado de onda plana con momento lineal \mathbf{p} , el primer termino del producto interno $\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle$ vendría siendo:

$$\langle \mathbf{x} | \phi \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (3.8)$$

El segundo termino de la expresión (3.7) simboliza la dispersión del estado inicial a causa del potencial V . A fin de solucionarlo, debemos resolver primero el Kernel (función de Green de dos puntos) de la ecuación integral que esta definido por:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \frac{1}{2m} \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \right| \mathbf{x}' \right\rangle. \quad (3.9)$$

Aplicando las relaciones de completitud para los momentos p' y p'' a (3.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \right| \mathbf{x}' \right\rangle &= \frac{1}{2m} \int d^3p' \int d^3p'' \langle \mathbf{x} | \mathbf{p}' \rangle \\ &\quad \times \left\langle \mathbf{p}' \left| \frac{1}{E - (\mathbf{p}'^2/2m) \pm i\varepsilon} \right| \mathbf{p}'' \right\rangle \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \frac{1}{2m} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{[E - (p'^2/2m) \pm i\varepsilon]}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Escribiendo $E = k^2/(2m)$ y $p' = q$, siendo k y q vectores de onda, para posteriormente resolver la integral (3.10) en coordenadas esféricas se obtiene:

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} q^2 dq \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \theta) e^{i|q||\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos \theta}}{k^2 - q^2 \pm i\varepsilon}, \\ &= \frac{-1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q (e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|})}{q^2 - k^2 \mp i\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

debido a que q presenta singularidades en $q = \pm k \pm i\varepsilon$ debemos aplicar el teorema de los residuos en el plano complejo para llegar a:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.12)$$

Reemplazando $G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ en la función de onda (3.7), esta se reduce a:

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - 2m \int d^3 x' \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle. \quad (3.13)$$

Continuando con el análisis del comportamiento de $\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle$, consideremos un potencial V local, dependiente de la posición en el espacio, es decir, un potencial diagonal que satisface una ecuación de autovalores y autovectores que puede escribirse como:

$$\langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{x}'' \rangle = V(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''), \quad (3.14)$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle &= \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{x}'' \rangle \langle \mathbf{x}'' | \psi^{(\pm)} \rangle \\ &= V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(\pm)} \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Reescribiendo la ecuación (3.13) con base en (3.15) se consigue:

$$\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - 2m \int d^3 x' \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(\pm)} \rangle. \quad (3.16)$$

A distancias suficientemente grandes la dependencia espacial en la exponencial del segundo termino de (3.16) corresponde a una onda esférica (de la forma $e^{\pm ikr}/r$). Esto significa que la solución positiva de la exponencial corresponde a una onda esférica saliente respecto al dispersor, mientras que la solución negativa corresponde a una onda esférica entrante, siempre que el potencial V sea finito [23]. Afortunadamente así

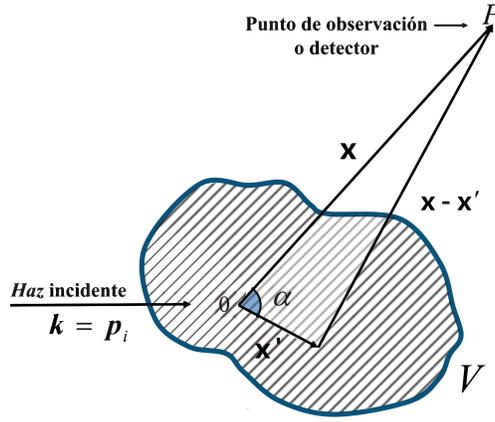


Figura 3.1: **Potencial V de scattering de rango finito:** el punto de observación P es donde se evaluará la función de onda $\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle$, mientras que la contribución a la integral en la ecuación (3.16) es para $|\mathbf{x}'|$ menor que el rango del potencial, como se representa en la región sombreada de la figura, [23].

es como se preparan los instrumentos de medición en un experimento de dispersión (fuera del rango del potencial), ver Figura 3.1. De este modo, para mantener la afinidad entre la practica y la teoría se deben tomar las siguientes consideraciones:

$$|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{x}|, \\ r' &= |\mathbf{x}'| \end{aligned} \quad (3.18)$$

y

$$\alpha = \angle(\mathbf{x}', \mathbf{x}). \quad (3.19)$$

Para $r \gg r'$

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2} \\ &= r \left(1 - \frac{2r'}{r} \cos \alpha + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

mediante la aproximación binomial

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}' \quad (3.21)$$

donde

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}. \quad (3.22)$$

El momento del haz dispersado después de la colisión debe tener la misma magnitud del momento inicial, de acuerdo con el principio de conservación del momento lineal, pero dirigida a lo largo de la línea OP (ver Figura 3.1), por lo tanto:

$$\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}}. \quad (3.23)$$

Por consiguiente, en el límite de grandes distancias, la exponencial de la ecuación (3.16) puede ser aproximada a:

$$e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \simeq e^{\pm ikr} e^{\mp i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}, \quad (3.24)$$

ya que el estado $|k\rangle$ satisface la condición de orto-normalidad:

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.25)$$

entonces,

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (3.26)$$

Por lo tanto, la función de onda que describe un proceso de scattering se obtiene tomando la solución positiva de (3.16) y fuera del rango del potencial ($r \gg r'$), de tal forma que:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \psi^{(+)} \rangle &\xrightarrow{r \gg r'} \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle - \frac{1}{4\pi} 2m \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(+)} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La expresión (3.27), nos permite concluir que tras un proceso de dispersión, la función de onda resultante es la suma de una onda plana en la dirección de propagación original \mathbf{k} , más una onda esférica saliente con amplitud de probabilidad $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ dada por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv -\frac{1}{4\pi} 2m (2\pi)^3 \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi^{(+)} \rangle \\ &= -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 2m \langle \mathbf{k}' | V | \psi^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De acuerdo con la aproximación de Born de alto orden, podemos definir el operador transición (T) que cumple la relación:

$$V|\psi^+\rangle = T|\phi\rangle. \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior y multiplicando la ecuación de Lippmann-Schwinger (3.6) por el potencial V , obtenemos:

$$T|\phi\rangle = V|\phi\rangle + V\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}T|\phi\rangle, \quad (3.30)$$

esto es valido para todo $|\phi\rangle$ que representa una onda plana y constituye una base vectorial, entonces el operador T satisface la siguiente relación entre operadores:

$$T = V + V\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}T, \quad (3.31)$$

que puede iterarse a través de una serie de Neumann para obtener:

$$T = V + V\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}V + V\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}V\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}V + \dots . \quad (3.32)$$

Luego, con base en la ecuación (3.29), la amplitud de dispersión (3.28) se transforma en:

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi}2m(2\pi)^3 \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle. \quad (3.33)$$

Así, para calcular $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ es suficiente con determinar el operador transición con el número de iteraciones necesarias para que el cálculo sea lo suficientemente preciso.

Ahora, si se prepara un experimento con un gran número de partículas idénticas, todas caracterizadas por la función de onda (3.26), entonces para responder cual es el número de partículas incidentes que cruzan un plano perpendicular (dispersor) a la dirección de incidencia por unidad de área y por unidad de tiempo, debemos recurrir a calcular la sección eficaz (o transversal) que definiremos a continuación. Con este objetivo consideraremos un haz de partículas incidentes con velocidad v que colisiona con un blanco o dispersor constituido por N_B partículas, en reposo. Consideremos que la superficie de colisión es A , ver Figura 3.2. Entonces, la probabilidad de que una partícula incidente colisione con el dispersor es:

$$P = \frac{N_B \sigma}{A}, \quad (3.34)$$

donde σ es la sección eficaz¹ o el área efectiva de una partícula (dispersora) vista por

¹La sección eficaz tiene unidades de área, generalmente se expresa en barns, que es equivalente a $10^{-28}[m]^2$ o 100 femtómetros (o fermis) cuadrados.

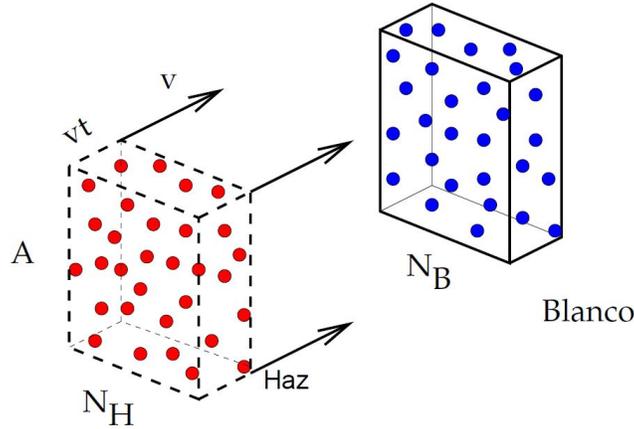


Figura 3.2: Un blanco o dispersor con N_B partículas es bombardeado por un haz de N_H partículas con velocidad v [19].

un proyectil (haz incidente) [19]. Si en el haz incidente hay N_H partículas, entonces el número de eventos es el producto $N_H P$,

$$(\# \text{ eventos}) = N_H \frac{N_B \sigma}{A} \rightarrow \sigma = \frac{(\# \text{ eventos})}{N_H N_B} A. \quad (3.35)$$

En los experimentos, el haz está formado por un gran conjunto de partículas con densidad ρ_H , moviéndose con cierta velocidad v . Por tanto, $N_H = \rho_H vtA$ y σ es igual a:

$$\sigma = \frac{(\# \text{ eventos})}{\rho_H vt N_B}. \quad (3.36)$$

Esto significa conceptualmente:

$$\sigma = \frac{\text{Número de partículas dispersadas por unidad de tiempo}}{\text{flujo de partículas incidentes}}. \quad (3.37)$$

Por esta razón, la sección eficaz se puede entender como una forma de cuantificar el efecto del centro de dispersión de las partículas, permitiéndonos saber sus estado finales. Por lo general, en los experimentos también deseamos medir los momentos con los que salen las partículas dispersadas, lo que conlleva a definir la sección transversal diferencial como:

$$\int \frac{d\sigma}{d^3 p_1 \dots d^3 p_n} d^3 p_1 \dots d^3 p_n = \sigma, \quad (3.38)$$

aquí, $d\sigma$ es un diferencial de área que cuando se integra sobre cualquier elemento infinitesimal de cuadri-momento $d^3 p_1 \dots d^3 p_n$, da la sección transversal de dispersión σ . Los distintos momentos de los estado finales no son todos independientes: sus

componentes siempre estarán restringidas por la conservación del cuadri-momento o la energía. Por ejemplo, para el caso donde solo hay dos partículas de estado final, esto solo deja dos componentes de momento sin restricciones, que generalmente se toman como los ángulos θ y ϕ del momento de una de las partículas [18]. El integrando $d\sigma/(d^3p_1 d^3p_2)$ sobre las cuatro componentes del momento restringido nos conduce a la sección transversal habitual en términos del ángulo sólido $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{\# \text{ de partículas dispersadas por unidad de tiempo en un ángulo solido } d\Omega}{\# \text{ de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo}}. \quad (3.39)$$

De esta relación podemos definir la sección eficaz diferencial en términos de la amplitud para la onda esférica saliente $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ de la ecuación (3.33) de acuerdo con:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2. \quad (3.40)$$

En síntesis, la sección transversal diferencial es el área que captura la cantidad de flujo que va en dirección $d\Omega$ o en otras palabras es la probabilidad de que una partícula sea dispersada en una dirección arbitraria dándonos una idea de la interacción entre las partículas y el dispersor.

3.1 Sección eficaz en teoría de campos cuánticos

Las cantidades calculadas con mayor frecuencia en la QFT son las secciones eficaces al igual que el ancho de decaimiento de una o varias partículas. El primer caso, se debe a que la mayoría de los experimentos de la física de partículas implican procesos de scattering, en el que se hacen chocar dos haces de partículas con momentos lineales bien definidos para posteriormente observar la formación de nuevas partículas. Por ejemplo, se pueden medir las sección eficaz para la reacción $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ (colisión par electrón-positrón ($e^- e^+$) produciendo un par muón-antimuón ($\mu^- \mu^+$)) así como también innumerables procesos que involucran la producción de hadrones, el efecto Compton, etc [18].

En mecánica cuántica no relativista la tasa de transición de un estado inicial $|\mathbf{k}\rangle$ a un estado final $|\mathbf{k}'\rangle$ en presencia de un potencial V , se estima a través de la regla de

oro de Fermi:

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' \\ \text{tasa de transición} \end{array} \right) = 2\pi |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2 \times \left(\begin{array}{c} \text{densidad de los estados} \\ \text{cuánticos finales} \end{array} \right). \quad (3.41)$$

Recordemos de la ecuación (3.32) que T es el operador transición, el cual puede iterarse a través de una serie de Neumann en términos del potencial. Existe una expresión homóloga a (3.41) en la QFT y consiste en hacer el siguiente cambio:

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle, \quad (3.42)$$

siendo S la matriz de scattering (o matriz de dispersión). La matriz S nos permite conocer la amplitud de probabilidad de medir un conjunto de partículas salientes como consecuencia de la colisión entre partículas incidentes, en otras palabras, es un operador que establece una relación entre los estados iniciales y finales en un proceso de dispersión. Además, ya que S conecta estados ortonormales, entonces es una matriz unitaria, es decir, $S^\dagger S = 1$ expresando la conservación de la probabilidad. La matriz S esta definida matemáticamente como:

$$S = \mathbb{1} - iM, \quad (3.43)$$

donde M es una matriz de transición. Evaluando explícitamente los elementos matriciales de S obtenemos:

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbb{1} | \mathbf{k} \rangle - i \langle \mathbf{k}' | M | \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - iM_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}, \quad (3.44)$$

para tener una cantidad invariante de Lorentz y que se conserve el cuadri-momento de las partículas, la matriz de transición se puede redefinir de la siguiente manera:

$$M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = (2\pi)^4 \delta^4(k' - k) \mathcal{M}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \prod_{i=\mathbf{k}',\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}}, \quad (3.45)$$

con \mathcal{M} siendo la amplitud de probabilidad de que ocurra la transición de un estado inicial $|\mathbf{k}\rangle$ a un estado final $|\mathbf{k}'\rangle$ y E_i es la energía relativista de cada una de las partículas.

Reemplazando $M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ en (3.44) se llega a:

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - i(2\pi)^4 \delta^4(k' - k) \mathcal{M}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \prod_{i=\mathbf{k}',\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}}. \quad (3.46)$$

Teniendo en cuenta la regla de oro de Fermi (expresión (3.41)) y las ecuaciones (3.33), (3.40) podemos identificar la relación de proporcionalidad que existe entre la amplitud \mathcal{M} y la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{M}|^2. \quad (3.47)$$

Siendo más precisos, podemos establecer dos reglas de oro para los observables en términos de los momentos lineales de las partículas:

- i) Para la tasa de decaimiento parcial de una partícula en n partículas, $1 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$, tenemos:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_1} \overline{|\mathcal{M}_{k'k}|^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_1 - \dots - p'_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i}. \quad (3.48)$$

- ii) Para la sección eficaz de una dispersión de dos partículas incidentes produciendo n partículas finales, $1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$, tenemos:

$$d\sigma = \frac{1}{v_\alpha} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \overline{|\mathcal{M}_{k'k}|^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i}, \quad (3.49)$$

donde el parámetro v_α es la velocidad relativa de las partículas 1 y 2 (con masas en reposo m_1 y m_2 respectivamente):

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2}, \quad (3.50)$$

y $\overline{|\mathcal{M}_{k'k}|^2}$ es la amplitud invariante de Feynman promediada sobre todos los espines de las partículas, debido a que por lo general en los experimentos referentes a la física de altas energías, las partículas no están polarizadas, por ende, se deben sumar los espines de los estados finales y promediar los espines de los estados iniciales. Por ejemplo, para el caso donde se dispersan dos

partículas y forman dos nuevas partículas ($1 + 2 \rightarrow 3 + 4$) la amplitud debe ser promediada de la forma:

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2}}_{\text{Prom. Spines iniciales.}} \overbrace{\sum \sigma_3 \sigma_4}^{\text{sum. Spines finales}} |\mathcal{M}|^2. \quad (3.51)$$

En síntesis, para conocer la probabilidad de medir observables físicos tales como secciones eficaces y tiempos de decaimiento de las partículas, bastaría con determinar la amplitud \mathcal{M} e integrar en el espacio de fase. Sin embargo, estas amplitudes no se pueden calcular con exactitud, hay que recurrir a una serie de perturbaciones para obtener un valor aproximado. Las series de Dyson permiten calcular aproximadamente la matriz S (relacionada con \mathcal{M} a través de (3.43) y (3.45)) hasta cualquier orden perturbativo conociendo la interacción Hamiltoniana (\mathcal{H}) o Lagrangiana mediante la expresión:

$$S = 1 - i \int d^4x_1 \mathcal{H}(x_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{T} \{ \mathcal{H}(x_1) \mathcal{H}(x_2) \} + \dots, \quad (3.52)$$

donde \mathcal{T} es el operador ordenamiento temporal necesario para respetar el orden iterativo de los procesos. Por ejemplo, dadas tres interacciones arbitrarias de \mathcal{H} tenemos:

$$\mathcal{H}(x_2) \mathcal{H}(x_3) \mathcal{H}(x_1) \rightarrow \mathcal{T} \{ \mathcal{H}(x_2) \mathcal{H}(x_3) \mathcal{H}(x_1) \} = \mathcal{H}(x_1) \mathcal{H}(x_2) \mathcal{H}(x_3), \quad (3.53)$$

con $x_1 < x_2 < x_3$.

Existe una manera esquemática de representar las series de Dyson con la ayuda de los diagramas de Feynman, que fueron introducidos por R. Feynman con el fin de organizar, visualizar y calcular la interacción electromagnética entre electrones y fotones, pero posteriormente se extendieron para estudiar las demás interacciones (la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte) de las partículas fundamentales. La idea de Feynman fue asignar un objeto matemático a cada parte del diagrama (o imagen del proceso de dispersión) y mediante ciertas reglas derivadas de la Lagrangiana de interacción entre las partículas, construir la amplitud de probabilidad \mathcal{M} . Entre las características principales de estos diagramas podemos denotar que siguen un orden espacio-temporal a través de un plano bidimensional donde los ejes se pueden elegir

arbitrariamente para etiquetar el espacio y el tiempo. Partículas como los fermiones se simbolizan con líneas rectas y los bosones con líneas onduladas, mientras que las antipartículas se entienden como partículas que viajan hacia atrás en el tiempo, por ende, se dibujan con líneas rectas opuestas al eje temporal. Por otro lado, Los vértices (unión entre líneas) manifiestan la interacción entre las partículas.

Para comprender con mayor claridad los diagramas y las reglas de Feynman veamos como se escribe la amplitud \mathcal{M} del proceso de dispersión $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ en QED utilizando este método. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica la amplitud de probabilidad de que ocurra la aniquilación electrón-positrón para formar un muón y anti-muón se entiende como:

$$\mathcal{M} \sim \langle \mu^+\mu^- | H_I | \gamma \rangle^\mu \langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle_\mu, \quad (3.54)$$

siendo H_I la parte de interacción del Hamiltoniano. El acople en la QED entre el estado inicial $|e^+e^- \rangle$ y el estado final $\langle \mu^+\mu^- |$ es a través del fotón (γ). Se ha etiquetado el estado del fotón con un índice μ para denotar que es una partícula vectorial de cuatro componentes. Ahora, desde la perspectiva de la QFT donde se interpreta las interacciones de los campos como el intercambio de partículas virtuales, la Lagrangiana de interacción para el proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ es:

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, \quad (3.55)$$

siendo ψ (ecuación (2.78)) el campo de las partículas que interactúan (electrón-positrón) y A_μ (ecuación (2.83)) el campo vectorial del fotón, partícula mediadora en este proceso. La dispersión $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ se puede visualizar con el diagrama de Feynman de la Figura 3.3, donde cada elemento del diagrama tiene asociado un termino algebraico. Las líneas externas son las funciones de onda de la partículas iniciales y finales que tienen espinores columna $u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)$, $v(\mathbf{p}_4, \sigma_4)$ y fila $\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2)$, $\bar{u}(\mathbf{p}_3, \sigma_3)$ (estos espinores son los coeficientes de los operadores creación y aniquilación de los campos fermiónicos, ver (2.78)). La línea interna contiene el propagador del fotón $-ig_{\mu\nu}/q^2$, donde $q = p_1 + p_2$ es el cuadri-momento del fotón virtual y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski. En cada vértice del diagrama esta escrito $ie\gamma^\mu$, asociado con la interacción entre los campos ψ y A_μ , además el elemento γ^μ son un conjunto de matrices gamma de Dirac 4×4 .

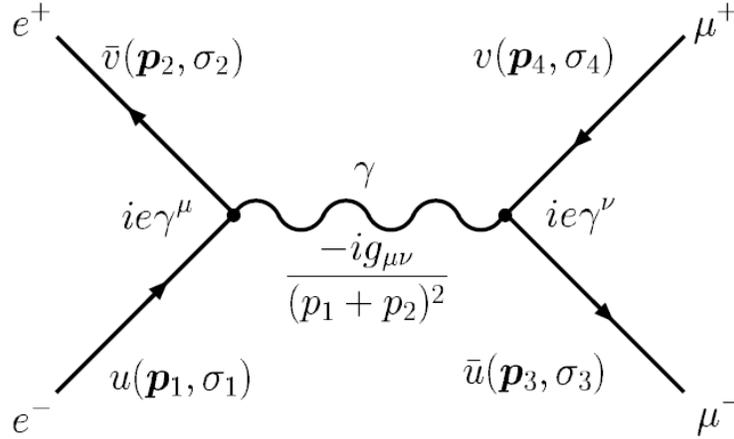


Figura 3.3: Diagrama de Feynman para el proceso de dispersión $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ cuya evolución temporal va de izquierda a derecha y el eje espacial es vertical [22].

Discutidos cada uno de los elementos del diagrama de Feynman para el proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, procedemos agrupar cada una de estos términos y construir la amplitud \mathcal{M} , para lo cual es necesario usar las reglas de Feynman de la electrodinámica cuántica que resumimos a continuación.

3.1.1 Reglas de Feynman en QED

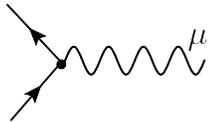
Análogamente al cálculo del propagador del campo escalar de Klein-Gordon (Capítulo 2, sección 2.1.1), el propagador de los fermiones y del fotón corresponden con la función de Green en el contorno de Feynman aplicada a la ecuación de Dirac y la ecuación de Proca, respectivamente. En la imagen de los diagramas de Feynman el propagador de Dirac (fermión) y el del fotón tienen la siguiente correspondencia:

$$\text{Propagador de Dirac : } \quad \begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.56)$$

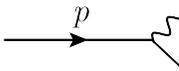
$$\text{Propagador del fotón: } \quad \begin{array}{c} p \longrightarrow \\ \text{~~~~~} \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (3.57)$$

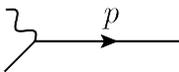
El vértice de la QED se puede deducir fácilmente de la Lagrangiana de interacción

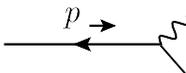
(3.55) y por cada electrón se debe añadir un parámetro $Q = -1$, en consecuencia,

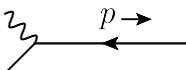
Vértice de la QED:  $= iQe\gamma^\mu$. (3.58)

Las partículas y antipartículas iniciales (o entrantes) y finales (o salientes) son los espinores del campo fermiónico (2.78) y su esquematización en los diagramas de Feynman es:

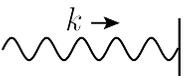
Fermiones externos:  $= u(\mathbf{p}, \sigma)$ (inicial) (3.59)

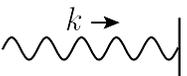
 $= \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)$ (final).

Antifermiones externos:  $= \bar{v}(\mathbf{p}, \sigma)$ (inicial) (3.60)

 $= v(\mathbf{p}, \sigma)$ (final).

Los fotones iniciales o finales en un proceso de la electrodinámica cuántica son indistinguibles con su antipartícula y matemáticamente se representan con tetra-vectores, en los diagramas de Feynman se expresan de la forma:

Fotones externos:  $= \epsilon_\mu(p)$ (inicial) (3.61)

 $= \epsilon_\mu^*(p)$ (final).

Adicionalmente para aplicar las reglas de Feynman debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Para que se conserve la energía o el momento, por cada vértice se debe escribir

una función delta de la forma:

$$(2\pi)\delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \quad (3.62)$$

donde p son los n cuadri-momentos que llegan al vértice.

- Integrar sobre todos los momentos internos.
- Hay un signo menos relativo, cuando dos diagramas difieren en número impar de intercambios fermiónicos.
- Hay un factor de simetría si hay partículas idénticas en el estado final.

Haciendo uso de las reglas de Feynman para la QED mencionadas anteriormente podemos retomar la construcción de la amplitud al segundo orden del proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, obteniendo:

$$-i\mathcal{M} = [\bar{u}(\mathbf{p}_3, \sigma_3) (ie\gamma^\nu) v(\mathbf{p}_4, \sigma_4)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2) (ie\gamma^\mu) u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)], \quad (3.63)$$

la cual se puede reducir a:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(\mathbf{p}_3, \sigma_3) \gamma_\mu v(\mathbf{p}_4, \sigma_4)] [\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)]. \quad (3.64)$$

A partir de esta expresión, ya es posible calcular la probabilidad de ocurrencia para la dispersión $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ con la regla de oro de Fermi que conduce a la sección eficaz:

$$\sigma \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2}. \quad (3.65)$$

Este resultado se obtiene considerando el sistema centro de masas de las partículas y aplicando el límite ultra-relativista, es decir, cuando la energía relativista de las partículas es muy grande en comparación con la masa en reposo de las mismas (ver [19], pág. 109).

3.2 Teorema óptico

Una de las herramientas matemáticas más útiles en la Óptica Clásica, especialmente en la teoría de dispersión de ondas es el denominado Teorema Óptico, el cual se deriva de la conservación de la energía electromagnética [24, 25], cuya estructura más simple relaciona la sección transversal total de extinción del dispersor, σ , con la parte imaginaria de la dispersión hacia adelante $f(\theta = 0)$, es decir, la amplitud de luz dispersa medida en el campo lejano a lo largo de la dirección de propagación, y a la frecuencia de la onda plana incidente en un proceso de colisión, ver Figura 3.4. Esta relación se representa matemáticamente en la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\theta = 0), \quad (3.66)$$

donde k es el vector de onda incidente y θ es el ángulo con el que es dispersado el haz

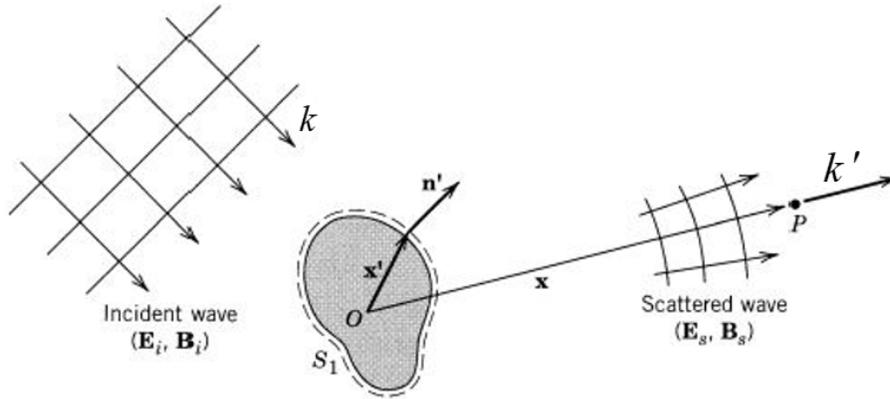


Figura 3.4: **Geometría de dispersión del Teorema óptico:** Una onda plana incidente con un vector de onda k_0 y campos electromagnéticos (E_i, B_i) es dispersada por un obstáculo (el dispersor), dando lugar a campos dispersos (E_f, B_f) que se propagan como ondas esféricas divergentes a grandes distancias. La superficie S_1 encierra completamente el dispersor [24].

incidente respecto a su dirección inicial. La estructura del Teorema Óptico representada en la Ecuación (3.66) es para sistemas físicos ideales, es decir, cuando el campo incidente es una onda plana monocromática y el dispersor es determinista, sin embargo, se puede obtener una generalización de dicho teorema que aplica a la dispersión en medios aleatorios y a situaciones en las que el campo incidente es estocástico [26, 27, 28].

La historia del Teorema óptico se remonta al año 1871 cuando Wolfgang Sellmeier y John William Strutt (más conocido como Lord Rayleigh) de forma independiente consideraron que el índice óptico de refracción de un medio depende de su coeficiente de absorción, coeficiente que más tarde se descubriría que es proporcional a la sección transversal de extinción. Rayleigh utilizaría estas ideas para estudiar la heurística del color y la polarización del cielo en un artículo publicado en 1871 [29]. Durante los siguientes años la teoría de dispersión se desarrolló aún más y en 1908 Mie estableció el Teorema Óptico de manera explícita para la dispersión de la luz en partículas esféricas [30]. En 1926-1927 Kronig y Kramers establecieron las relaciones de dispersión asociadas con la transformada de Hilbert entre las partes reales e imaginarias del índice de refracción haciendo uso de (3.66). La aparición del teorema óptico en la teoría de scattering cuántica fue en 1932 en la tesis doctoral de Feenberg y en su artículo relacionado con la dispersión de electrones lentos por un átomo neutro [31], sin embargo, estas relaciones dispersivas no se encontraron particularmente interesantes en ese momento, tuvieron que pasar un par de años hasta 1937 cuando Wheeler utiliza la matriz S como herramienta analítica en la teoría de dispersión de partículas y demostrara su unitariedad. Dos años más tarde, Bohr, Peierls y Placzek establecieron la relación del teorema óptico sin derivación explícita, y durante los siguientes veinte años y más, muchos la llamaron relación Bohr-Peierls-Placzek. En 1943, Heisenberg formuló la matriz S como una herramienta de la teoría cuántica para la descripción de la dispersión de partículas, aparentemente sin conocer el trabajo previo en esta área de Wheeler, Bohr, Peierls y Placzek. Estos hechos muestran que el teorema óptico es un ejemplo de cómo una idea científica puede ocurrir en diversos contextos de forma independiente, ser olvidada y redescubierta [32]. Heisenberg demostró la unitariedad de la matriz S y, como consecuencia observable de esta propiedad abstracta, derivó el teorema óptico generalizado. Retomando el contexto de la teoría electromagnética, Van de Hulst redescubrió el teorema óptico en 1949, sin saber que era bien conocido en óptica y en la teoría de la dispersión cuántica. Sin embargo, le fue suficiente para que el tratado de óptica de Bom y Wolf atribuye a Van de Hulst la primera derivación del teorema en el dominio de la óptica clásica. En el mismo año el auge del Teorema Óptico continuo con Wick que lo extiende a partículas con espín. En 1950, Lax incluye procesos inelásticos, en 1954 Shciff extiende aún más esa área de uso. Un artículo de 1953 de Glauber y Schomaker sobre la difracción de electrones contiene el teorema óptico generalizado sin el uso de la matriz S y sin referencias a trabajos anteriores. Hans Bethe y Frederic de Hoffmann se refirieron por

primera vez a él como el “teorema óptico” impreso en 1955, después de haber sido denominado como un "teorema óptico bien conocido" durante algún tiempo [32].

El teorema óptico entre sus diversas aplicaciones en la física clásica permite el cálculo de la amplitud de dispersión compleja en objetos esféricos y cilíndricos, lo cual permite el estudio de la retro dispersión acústica [33], además proporciona una herramienta analítica para determinar algunas de las propiedades físicas de los objetos (es decir, forma, tamaño, concentración, densidad, absorción, conductividad, etc.), a partir del campo disperso [27, 34].

La generalización del teorema óptico para procesos elásticos e inelásticos en la mecánica cuántica permite estudiar el comportamiento y las propiedades de las partículas microscópicas en diversos procesos de scattering, por ejemplo, la extensión del teorema óptico en la dispersión de ondas no planas permite estudiar haces de naturaleza cuántica de Gauss y de Bessel [35]. En la teoría cuántica de campos el teorema óptico es un método alternativo para hacer correcciones cuánticas a observables físicos tales como la masa del electrón y la polarización del vacío [36], siendo esta última la aplicación del teorema óptico que se estudiará en esta tesis.

Tras conocer un poco de la historia del teorema óptico y sus diversas aplicaciones, ahora procederemos a demostrar dicho teorema, empezando desde el punto de vista de la mecánica cuántica no relativista. Teniendo en cuenta que el teorema óptico se relaciona con la amplitud de dispersión directa, entonces, imponiendo $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ en la amplitud de dispersión (3.33) esta se convierte en:

$$f(\theta = 0) = f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} 2m(2\pi)^3 \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k} \rangle. \quad (3.67)$$

Si calculamos explícitamente la parte imaginaria de $\langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k} \rangle$ haciendo uso de expresión (3.29), la ecuación de Lippmann-Schwinger (3.6) y que el potencial es hermítico ($V^\dagger = V$), se llega a:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k} \rangle &= \text{Im} \langle \mathbf{k} | V | \psi^{(+)} \rangle \\ &= \text{Im} \left[\left(\langle \psi^{(+)} | - \langle \psi^{(+)} | V \frac{1}{E - H_0 - i\varepsilon} V | \psi^{(+)} \rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Basándonos en la relación derivada del teorema de Sokhatsky-Weierstrass (ver [37], pág.

112):

$$\frac{1}{E - H_0 - i\varepsilon} = \text{PV} \cdot \left(\frac{1}{E - H_0} \right) + i\pi\delta(E - H_0), \quad (3.69)$$

donde PV representa el valor principal de Cauchy², los términos (3.68) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \text{Im}\langle \mathbf{k}|T|\mathbf{k} \rangle &= \text{Im} \left(\langle \psi^{(+)}|V|\psi^{(+)} \rangle \right) - \text{Im} \left\langle \psi^{(+)} \left| V \text{Pr} \cdot \frac{1}{E - H_0} V \right| \psi^{(+)} \right\rangle \\ &\quad - \text{Im} \langle \psi^{(+)}|V i\pi\delta(E - H_0)V|\psi^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (3.72)$$

El primer termino de (3.72) se puede desarrollar usando (3.15) donde consideramos un potencial local y hermitico, entonces

$$\begin{aligned} \text{Im}(\langle \psi^{(+)}|V|\psi^{(+)} \rangle) &= \text{Im} (A_V \langle \psi^{(+)} | \psi^{(+)} \rangle) \\ &= \text{Im}(A_V), \quad A_V \equiv \text{autovalores de } V \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.73)$$

la parte imaginaria de A_V es nula porque los autovalores de un operador hermítico son números reales (con parte imaginaria igual a cero). Análogamente el segundo termino de (3.72) también es igual a cero, mientras que el último se puede escribir nuevamente con base en (3.29), dejándonos con:

$$\text{Im}\langle \mathbf{k}|T|\mathbf{k} \rangle = -\pi \langle \mathbf{k} | T^\dagger \delta(E - H_0) T | \mathbf{k} \rangle. \quad (3.74)$$

Aplicando la relación de completitud para el número de onda \mathbf{k}' y escribiendo la energía

²El valor principal de Cauchy permite evaluar integrales impropias constituidas por funciones suaves que presentan singularidades. Sea $f(x)$ una función con una asíntota vertical en un punto c situado entre dos puntos finitos a y b ($a < c < b$), el valor principal de Cauchy es:

$$\text{PV} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx \right), \quad (3.70)$$

y, cuando los límites de la integral son infinitos el valor principal se calcula como:

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R f(x)dx \right). \quad (3.71)$$

El valor principal de Cauchy se puede generalizar para resolver una integral de contorno compleja (ver [38]).

en función del número de onda $E = \mathbf{k}^2/(2m)$, conduce a:

$$\text{Im}\langle \mathbf{k}|T|\mathbf{k}\rangle = -\pi \int d^3k' \langle \mathbf{k}|T^\dagger|\mathbf{k}'\rangle \langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle \delta\left(E - \frac{k'^2}{2m}\right), \quad (3.75)$$

en coordenadas esféricas el diferencial varia de acuerdo a $d^3k' = k'^2 dE (dk'/dE) d\Omega'$, evaluando la función delta y haciendo $k' = k$ se obtiene:

$$\text{Im}\langle \mathbf{k}|T|\mathbf{k}\rangle = -\pi m k \int d\Omega' |\langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle|^2. \quad (3.76)$$

Reemplazando (3.76) en (3.67) llegamos a:

$$\text{Im} f(\theta = 0) = -\frac{1}{4\pi} 2m (2\pi)^3 \left(-\pi m k \int d\Omega' |\langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle|^2 \right), \quad (3.77)$$

finalmente teniendo en cuenta (3.33), (3.39) y (3.40) queda demostrado el teorema óptico:

$$\text{Im} f(\theta = 0) = \frac{k\sigma_{\text{tot}}}{4\pi}. \quad (3.78)$$

3.2.1 Teorema óptico en la QFT

En la teoría cuántica de campos, el teorema óptico es una consecuencia de la unitariedad de la matriz de scattering S . Entonces evaluando la expresión (3.43) en la identidad $S^\dagger S = 1$ se obtiene:

$$-i(M - M^\dagger) = M^\dagger M. \quad (3.79)$$

Para un estado inicial $|a\rangle$ con momento p_i y un estado final $|b\rangle$ con momento q_j , la amplitud \mathcal{M} de dispersión por definición esta relacionada con la con la matriz de transición (M) mediante:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i p_i - \sum_j q_j\right) \mathcal{M}(a \rightarrow b) = \langle a|M|b\rangle, \quad (3.80)$$

la amplitud se debe multiplicar con una función delta para que se conserve el momento. Insertando (3.79) entre los estados $\langle b|(3.79)|a\rangle$ y considerando un conjunto completo de

$$2 \operatorname{Im} \left[\text{Diagram: a circle with two incoming arrows from the left labeled 'a' and two outgoing arrows to the right labeled 'a'} \right] = \sum_k \int d\Pi_k \text{Diagram: a circle with two incoming arrows from the left labeled 'a' and two outgoing arrows to the right labeled 'k'} \times \text{Diagram: a circle with two incoming arrows from the left labeled 'k' and two outgoing arrows to the right labeled 'a'}$$

Figura 3.5: **Teorema Óptico en QFT**: La parte imaginaria de cualquier amplitud de dispersión es el resultado de una suma de contribuciones de las partículas de estados intermedios.

estados iniciales además de tener en cuenta (3.80) se llega a:

$$-i [\mathcal{M}(a \rightarrow b) - \mathcal{M}^*(b \rightarrow a)] = \sum_k \int d\Pi_k \mathcal{M}^*(b \rightarrow k) \mathcal{M}(a \rightarrow k). \quad (3.81)$$

De la expresión anterior podemos observar que la parte imaginaria de una amplitud (\mathcal{M}) es igual al producto de la suma de todos los estados intermedios k posibles de los estados inicial y final en dicho estado intermedio.

Teniendo en cuenta el teorema de reflexión de Schwartz [15], el cual establece que sea $\mathcal{M}(s)$ una función analítica definida sólo en un intervalo real, es decir, $\mathcal{M}(s) = [\mathcal{M}(s^*)]^*$, entonces a partir de una continuación analítica podemos extender $\mathcal{M}(s)$ a todo el plano complejo y encontrar sus respectivas discontinuidades, siguiendo la relación

$$\begin{aligned} \operatorname{Disc} \mathcal{M}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\mathcal{M}(s + i\varepsilon) - \mathcal{M}(s - i\varepsilon)] \\ &= 2i \operatorname{Im} \mathcal{M}(s). \end{aligned} \quad (3.82)$$

El teorema óptico resulta ser un caso especial de (3.81) que se obtiene igualando los estados inicial y final,

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(a \rightarrow a) = \sum_k \int d\Pi_k |\mathcal{M}(a \rightarrow k)|^2 \propto \sigma(\text{Sección eficaz}), \quad (3.83)$$

La identidad (3.83) es esquematizada en la Figura 3.5. De este modo el teorema óptico en la teoría de campos cuánticos conserva la esencia de su definición clásica: la amplitud de dispersión hacia adelante es proporcional a la sección eficaz o transversal total para la producción de todos los estados finales.

El teorema óptico se puede aplicar a los diagramas de Feynman haciendo uso de las reglas de Cutkosky o reglas de corte, que permiten verificar el teorema óptico para

todos los órdenes en la teoría de perturbaciones. Cutkosky demostró que este método de calcular discontinuidades es completamente general y lo resumió en el siguiente algoritmo [18, 14, 15]:

- Cortar el diagrama de Feynman de tal modo que los propagadores de corte se puedan poner simultáneamente on-shell.
- Para cada corte reemplazar el propagador siguiendo la relación:

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2i\pi\theta(\pm p_0)\delta(p^2 - m^2). \quad (3.84)$$

donde el signo de la función paso θ denota la dirección del flujo de energía positiva del propagador.

- Finalmente se suman las contribuciones de todos los cortes posibles.

Utilizando estas reglas es posible calcular las singularidades reales para las configuraciones físicas presentes en los diagramas de Feynman [18]. En el capítulo 4 se mostrará explícitamente como aplicar las reglas de Cutkosky y el Teorema Óptico con un ejemplo concreto, la polarización del vacío en QED.

4. Polarización del Vacío

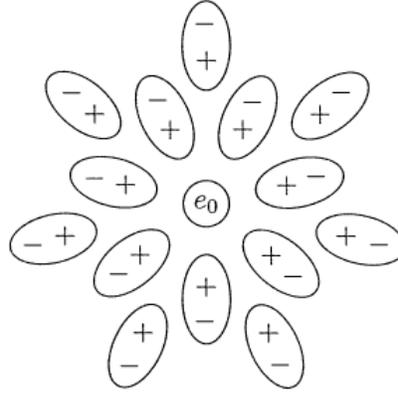


Figura 4.1: Los pares virtuales e^-e^+ son efectivamente dipolos que apantallan la carga del electrón, por lo tanto, para observar la carga desnuda debemos adentrarnos a distancias menores [18].

La polarización del vacío también conocida como la auto-energía del bosón gauge es una corrección cuántica al propagador del fotón en la QED. En general es un proceso que produce pares virtuales de partículas electrón-positrón en tiempos extremadamente cortos debido a la perturbación del vacío producida por un campo electromagnético. Este fenómeno cambia las distribuciones de carga de las partículas ya que los pares virtuales e^-e^+ transforman el vacío en un medio dieléctrico en el que la carga aparente (carga medida convencionalmente en los laboratorios) es menor que la carga real o “desnuda” (e_0) de las partículas, ver Figura 4.1.

Una de las principales aplicaciones de la polarización del vacío es el efecto Casimir, que en su forma más simple es la interacción de un par de planos conductores paralelos neutros debido a la perturbación del vacío del campo electromagnético. Es un efecto cuántico puro, es decir el estado de mínima energía, el vacío, de la QED hace que las placas se atraigan entre sí, ver [39]. La primera predicción teórica de este fenómeno físico fue realizada en 1948 por H.B.G. Casimir [40], encontrando que la fuerza de atracción entre las placas por unidad de área es¹

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{1}{a^4}, \quad (4.1)$$

¹La expresión (4.1) fue derivada sin tener en cuenta la estructura microscópica de los conductores, los cuales se tratan como cómo cuerpos macroscópicos que imponen condiciones de contorno metálico en los campos de Maxwell, un cálculo microscópico de la fuerza de Casimir es desarrollado en [41].

donde a es la distancia entre las placas generalmente medida en micras. El primer experimento destinado a verificar el efecto Casimir fue hecho por M.J. Sparnaay en 1958 [42] sin obtener resultados concluyentes, sin embargo, a finales del siglo XX, S. K. Lamoreaux diseñó un experimento definitivo que daría validez a este efecto [43] abriendo camino a la realización de experimentos aún más precisos [44, 45, 46, 47]. El vacío cuántico no sólo se polariza mediante partículas leptónicas, sino que también puede polarizarse de forma hadrónica (quark-antiquark) generando cambios en los niveles de energía atómica [48], además de influir en correcciones cuánticas de observables físicos como por ejemplo el momento magnético del muón ($g-2$) [49]. Por otra parte, en cosmología, la heurística de la polarización del vacío plantea explicaciones teóricas de procesos cuánticos que ocurren en la frontera de un agujero negro y que son los responsables de fenómenos como la radiación Hawking [50, 51]. En pocas palabras, la polarización del vacío se debe tener en cuenta en todos los procesos de la QFT donde intervenga un fotón.

4.1 Cálculo diagramático de la polarización del vacío

Para realizar el cálculo explícito de la polarización del vacío al primer orden perturbativo (un loop), primero construimos la amplitud de este observable aplicando las reglas de Feynman de la QED (Ver Capítulo 3, Sección 3.1.1) al diagrama de Feynman del propagador del fotón que se muestra en la Figura 4.2, lo que nos conduce a la siguiente amplitud [36, 52, 53]:

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{q} + \not{k} + m)}{(q+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (4.2)$$

la cual puede ser reescrita como

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = -e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu(\not{q} + m)\gamma^\nu(\not{q} + \not{k} + m)]}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((q+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (4.3)$$

donde e y m son la magnitud de la carga eléctrica y la masa del electrón y el positrón respectivamente, k es el momento del fotón, q el momento de positrón, $q+k$ el momento del electrón, mientras γ^μ , γ^ν son las matrices de Dirac. Para hallar esta amplitud,

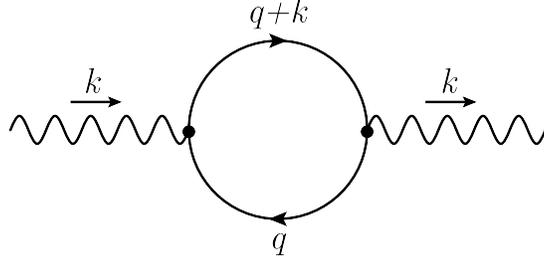


Figura 4.2: Diagrama de Feynman para la polarización del vacío en la QED: corrección a un loop al propagador del fotón.

iniciemos evaluando la traza presente en el numerador de $i\Pi^{\mu\nu}(k)$,

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{q} + \not{k} + m)] &= \text{Tr} [\gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{q} + \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{k} + m \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu + m \gamma^\mu \gamma^\nu \not{q} \\
&\quad + m \gamma^\mu \gamma^\nu \not{k} + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\
&= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma] q_\sigma q_\rho + \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\alpha] k_\alpha q_\rho \\
&\quad + m \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu] q_\rho + m \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] q_\rho \\
&\quad + m \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] k_\alpha + m^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu],
\end{aligned} \tag{4.4}$$

empleando las relaciones (A.1) del apéndice A, llegamos a:

$$\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{q} + \not{k} + m)] = 4 [2 q^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu + q^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} (q^2 + q \cdot k - m^2)]. \tag{4.5}$$

Reemplazando (4.5) en (4.3) obtenemos:

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = -4e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{T^{\mu\nu}(q, k)}{(q^2 - m^2 + i\epsilon) ((q+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}, \tag{4.6}$$

siendo

$$T^{\mu\nu}(q, k) = 2 q^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu + q^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} (q^2 + q \cdot k - m^2). \tag{4.7}$$

No obstante, la integral (4.6) tiene divergencias cuadráticas ultravioleta (UV), por ende, es necesario aplicar la regularización dimensional que consiste en evaluar el integrando en d dimensiones con $d = 4 - 2\epsilon$, por consiguiente, la amplitud se transforma en:

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = -4e^2 (\mu^2)^\epsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{T^{\mu\nu}}{(q^2 - m^2 + i\epsilon) ((q+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{4.8}$$

Donde la escala de energía μ , conocida como escala de regularización, sirve para dar a la expresión una dimensión correcta de masa [54] (Ver Apéndice C, sección C.1). Ahora, con el fin de escribir el denominador de la integral previa en un solo termino utilizaremos la parametrización de Feynman que cumple la igualdad:

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xD_1 + (1-x)D_2)^2}. \quad (4.9)$$

En el caso particular de la ecuación (4.8) tenemos

$$\begin{aligned} D_1 &= (q+k)^2 - m^2 + i\epsilon, \\ D_2 &= q^2 - m^2 + i\epsilon. \end{aligned} \quad (4.10)$$

El denominador de (4.9) se puede reescribir completando cuadrados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} xD_1 + (1-x)D_2 &= x[(q+k)^2 - m^2 + i\epsilon] + (1-x)(q^2 - m^2 + i\epsilon) \\ &= q^2 + 2xq \cdot k + xk^2 - m^2 + i\epsilon + x^2k^2 - x^2k^2 \\ &= (q+xk)^2 + x(1-x)k^2 - m^2 + i\epsilon. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Definiendo $l = q + xk$ y $M^2 = m^2 - x(1-x)k^2$, entonces:

$$xD_1 + (1-x)D_2 = l^2 - M^2 + i\epsilon. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, de acuerdo con (4.9), (4.10) y (4.12), la expresión (4.8) se convierte en:

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = -4e^2 (\mu^2)^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{T^{\mu\nu}(l-xk, k)}{[l^2 - M^2 + i\epsilon]^2}, \quad (4.13)$$

donde el cambio de variable $l = q + xk$ transforma $T^{\mu\nu}(q, k) \rightarrow T^{\mu\nu}(l-xk, k)$, luego

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(l-xk, k) &= [2l^\mu l^\nu - 2xl^\mu k^\nu - 2xk^\mu l^\nu + 2x^2k^\mu k^\nu + l^\mu k^\nu - xk^\mu k^\nu + l^\nu k^\mu \\ &\quad - xk^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(l^2 + x^2k^2 + lk - xk^2 - m^2)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La ecuación (4.13) esta constituida por integrales escalares y tensoriales en d dimensiones, donde los términos lineales desaparecen según (C.7). Por otro lado, al realizar una integración simétrica los términos que contienen $l^\mu l^\nu$ son proporcionales a

$l^2 g^{\mu\nu}$ y se reducen a integrales escalares de la forma:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2} = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2}. \quad (4.15)$$

La integral (4.15) pertenece al conjunto de integrales de Passarino-Veltman, quienes junto a Gerardus 't Hooft fueron los pioneros de la regularización dimensional y la renormalización² [56, 57]. Estas integrales con su respectiva solución expresada en términos de las funciones Gamma $\Gamma(z)$ (Ver Apéndice C.2) se pueden generalizar mediante la siguiente expresión [52],

$$\begin{aligned} I_{n,s} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^n}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^s}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 2, 3, \dots, \\ &= i \frac{(-1)^{n-s}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^\epsilon (M^2)^{2+n-s} \frac{\Gamma(2+n-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(s-n-2+\epsilon)}{\Gamma(s)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Retomando el cálculo de la amplitud $i\Pi^{\mu\nu}(k)$, desarrollemos primero las integrales en d -dimensiones de la ecuación (4.13), para tal fin, reescribimos dicha ecuación en términos de $I_{n,s}$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} I_d &= (\mu^2)^\epsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{T^{\mu\nu}(l-xk, k)}{[l^2 - M^2 + i\epsilon]^2} \\ &= \left(\frac{2}{d} - 1 \right) g^{\mu\nu} (\mu^2)^\epsilon I_{1,2} + [-2x(1-x)k^\mu k^\nu + x(1-x)k^2 g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu}] (\mu^2)^\epsilon I_{0,2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Usando la ecuación (4.16), la propiedad (A.6) y las expansiones (A.7)-(A.8) de la función Gamma, además de la expansión

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\epsilon = \exp \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\epsilon = \exp \epsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right) = 1 + \epsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.18)$$

podemos escribir:

$$(\mu^2)^\epsilon I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\Delta_\epsilon - \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.19)$$

²En 1999 M. Veltman y G. 't Hooft recibieron el premio Nobel de física por sus contribuciones teóricas de la regularización dimensional y la renormalización. Estas ideas también fueron simultáneamente planteadas pero de forma menos estructural por C. G. Bollini y J.J. Giambiagi [55].

y

$$(\mu^2)^\varepsilon I_{1,2} = \frac{i}{16\pi^2} (M^2) \left(1 + 2\Delta_\varepsilon - 2 \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.20)$$

donde

$$\Delta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_e + \ln 4\pi, \quad (4.21)$$

siendo $\gamma_e = 0.57721\dots$, la constante de Euler-Mascheroni. Además, debido a que el factor $(\frac{2}{d} - 1)$ presenta un polo $(1/\varepsilon)$ debemos expandir este termino hasta el orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\frac{2}{d} - 1 = \frac{2}{4 - 2\varepsilon} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.22)$$

Ahora, sustituyendo las expresiones (4.19), (4.20) y (4.22) en (4.17) obtenemos:

$$I_d = \frac{i}{16\pi^2} \left(\Delta_\varepsilon - \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \right) (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) 2x(1-x). \quad (4.23)$$

Por lo tanto, la amplitud (4.13) se convierte en:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(k) &= -4e^2 \frac{i}{16\pi^2} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \int_0^1 dx \cdot 2x(1-x) \left(\Delta_\varepsilon - \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \right) \\ &= - (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) i\Pi(k^2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde hemos separado el factor

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\Delta_\varepsilon - \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right) \right] \longrightarrow \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \left[\frac{\Delta_\varepsilon}{6} - \frac{1}{6} \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

de la estructura tensorial $(g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu)$, la cual satisface que $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$ (esta relación es conocida cómo la identidad Ward-Takahashi y surge cómo consecuencia de la simetría gauge del Lagrangiano de la QED [18, 36]). Una forma de resolver la integral logarítmica de $\Pi(k^2)$ es factorizar el argumento del logaritmo, es decir,

$$\begin{aligned} 1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} &= \frac{k^2}{m^2} \left(x^2 - x + \frac{m^2}{k^2} \right) \\ &= \frac{k^2}{m^2} \left(x - \frac{1}{2}(1+\beta) \right) \left(x - \frac{1}{2}(1-\beta) \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

siendo

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{r}} \quad (4.27)$$

y

$$r = \frac{k^2}{4m^2}. \quad (4.28)$$

Con el argumento del logaritmo factorizado, podemos dividir el último término de (4.25) en una suma de logaritmos y aplicar la integración individual de la forma $\int x^n \ln x$. Finalmente tras realizar unas cuantas operaciones algebraicas y sustituyendo Δ_ϵ , encontramos que la polarización del vacío en función de β y r es

$$\Pi(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_e - \log\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{5}{3} + \frac{1}{r} + \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \beta \log\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right) \right]. \quad (4.29)$$

La solución anterior de $\Pi(k^2)$ se deriva suponiendo que $r < 0$ y para valores de $r \neq 1$. Por tanto, debemos encontrar una solución para los distintos valores de r mediante la continuación analítica de la expresión (4.29).

- Para $r = 0$ retomamos la ecuación (4.25) y establecemos $k^2 = 0$, así

$$\Pi(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_e - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right). \quad (4.30)$$

- Para $0 < r < 1$ ($k^2 < 4m^2$, intervalo asociado con la descripción de las partículas virtuales), $\beta = i\beta' \rightarrow \beta' = \sqrt{\frac{1}{r} - 1}$ de modo que el argumento del logaritmo presente en (4.29) se convierte en un número complejo de norma unitaria. Utilizando las identidades trigonométricas complejas $\cot^{-1}(x) = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{ix+1}{ix-1}\right)$ y $\arcsin(x) = \cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$ obtenemos

$$\Pi(k^2) = \Pi(0) + \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{5}{3} + \frac{1}{r} - 2 \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \sqrt{\frac{1}{r} - 1} \arcsin(\sqrt{r}) \right]. \quad (4.31)$$

- Para $r \geq 1$ ($k^2 > 4m^2$, intervalo asociado con la descripción de la creación de pares de partículas reales), el argumento del logaritmo presente en (4.29) es negativo y real. Para este caso el valor de $\Pi(k^2)$ se puede hallar a partir de (4.31) utilizando

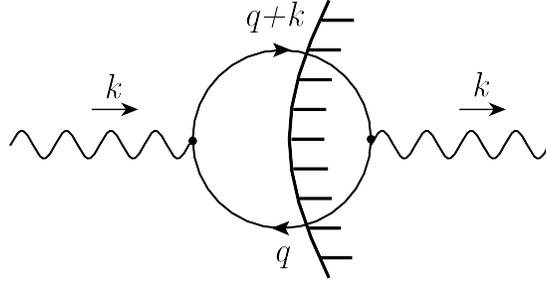


Figura 4.3: Corte del diagrama de la polarización del vacío.

la identidad trigonométrica $\cot^{-1}(ix) = i(-\tanh^{-1}(x) + \frac{i\pi}{2})$ lo que conduce a

$$\boxed{\Pi(k^2) = \Pi(0) + \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{5}{3} + \frac{1}{r} + \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \beta (2 \tanh^{-1}(\beta) - i\pi) \right]}, \quad (4.32)$$

cuya parte imaginaria se puede escribir sustituyendo r y β de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{Im } \Pi(k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \theta(k^2 - 4m^2)}. \quad (4.33)$$

Este resultado corresponde con la sección eficaz para la producción de un par de fermión-antifermión [18].

En síntesis, la amplitud de probabilidad completa para la polarización del vacío está dada por el producto entre $\Pi(k^2)$ y la estructura transversa del propagador del fotón dado en la expresión (4.24).

4.2 Método dispersivo para el cálculo de la polarización del vacío

Un método alternativo para hallar la polarización del vacío consiste en cortar el diagrama de Feynman de la auto-energía del fotón como se muestra en la Figura 4.3, reduciendo el problema a calcular la amplitud de un diagrama a nivel árbol de partículas on-shell (partículas dentro del cono de luz), método que se justifica mediante el teorema óptico y que se puede aplicar directamente siguiendo las reglas de Cutkosky [53] mencionadas en el capítulo 3. Con el fin de aplicar este procedimiento [58], partimos de la estructura transversa del propagador del fotón presente en la

ecuación (4.24) y contraemos esta expresión con $g_{\mu\nu}$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
ig_{\mu\nu}\overline{\Pi}^{\mu\nu}(k) &= -(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}k^2 - g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu) i\Pi(k^2) \\
&= -(4k^2 - k^2) i\Pi(k^2) \\
&= -3k^2 i\Pi(k^2).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Empleando la relación (4.3) la ecuación previa se convierte en

$$i\Pi(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{3k^2} e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{q} + m)\gamma^\nu(\not{q} + \not{k} + m)]}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((q+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{4.35}$$

Evaluando $g_{\mu\nu} \text{Tr}[\dots]$ teniendo en cuenta la traza (4.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} \text{Tr}[\dots] &= 4 [2g_{\mu\nu}q^\mu q^\nu + g_{\mu\nu}q^\mu k^\nu + g_{\mu\nu}q^\nu k^\mu - g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}(q^2 + q \cdot k - m^2)] \\
&= 4 [2q^2 + q \cdot k + q \cdot k - 4(q^2 + q \cdot k - m^2)] \\
&= 4 [-2q \cdot (q + k) + 4m^2],
\end{aligned} \tag{4.36}$$

así, $i\Pi(k^2)$ se reduce a:

$$i\Pi(k^2) = \frac{4}{3k^2} e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4m^2 - 2q \cdot (q + k)}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((q+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{4.37}$$

En este punto, aplicamos las reglas de Cutkosky para hallar las discontinuidades de $\Pi(k^2)$, entonces utilizando la relación (3.84) encontramos

$$\begin{aligned}
\text{Disc } \Pi(k^2) &= -\frac{4ie^2}{3k^2} \frac{(-2\pi i)^2}{(2\pi)^4} \int d^4q (4m^2 - 2q \cdot (q + k)) \delta^{(4)}(q^2 - m^2) \\
&\quad \times \delta^{(4)}((q+k)^2 - m^2) \theta(-q_0) \theta(q_0 + k_0).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Usando la identidad de la función delta (2.23), la $\text{Disc } \Pi(k^2)$ se transforma en

$$\text{Disc } \Pi(k^2) = \frac{16ie^2}{3k^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q [4m^2 - 2q \cdot (q + k)] \frac{1}{4E_{\mathbf{q}}^2} \delta(q_0 + E_{\mathbf{q}}) \delta(q_0 + k_0 - E_{\mathbf{q}}). \tag{4.39}$$

Realizando la integral sobre q_0 y considerando el sistema de referencia propio del fotón, es decir, $k^\mu = (k^0, \mathbf{0})$ obtenemos

$$\text{Disc } \Pi(k^2) = \frac{4ie^2}{3k^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3q (2m^2 - 2k_0 E_{\mathbf{q}}) \frac{1}{E_{\mathbf{q}}} \delta(k_0 - 2E_{\mathbf{q}}). \quad (4.40)$$

Resolviendo en coordenadas esféricas con $d^3\mathbf{q} = |\mathbf{q}|E_{\mathbf{q}} dE_{\mathbf{q}} \sin\theta d\phi d\theta$ y empleando la relación asociada a la energía relativista (2.48), se llega a

$$\text{Disc } \Pi(k^2) = \frac{ie^2}{3\pi k^2} \int_m^\infty dE_{\mathbf{q}} \frac{2m^2 - 2k_0 E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{q}}} \sqrt{E_{\mathbf{q}}^2 - m^2} \delta(k_0 - 2E_{\mathbf{q}}). \quad (4.41)$$

Ahora, si integramos sobre $E_{\mathbf{q}}$, entonces

$$\text{Disc } \Pi(k^2) = \frac{ie^2}{6\pi} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \theta(k^2 - 4m^2). \quad (4.42)$$

Finalmente aplicando el principio de reflexión de Schwartz (3.82), encontramos

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(k^2) &= \frac{\text{Disc } \Pi(k^2)}{2i} \\ &= \frac{\alpha}{3} \left(1 + \frac{s_0}{2s}\right) \sqrt{1 - \frac{s_0}{s}}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde $s = k^2$ y $s_0 = 4m^2$ para $s > s_0$. Observemos que este resultado es igual al encontrado en (4.33) mediante el cálculo diagramático de la polarización del vacío. La parte real de $\Pi(k^2)$ se puede hallar a partir de su parte imaginaria (4.43) utilizando las relaciones de dispersión análogas a las obtenidas por Kramers y Krönig en el estudio del índice de refracción en la teoría de dispersión de rayos-x en óptica [59].

4.2.1 Relaciones de dispersión

Con el objetivo de establecer las relaciones de dispersión, consideremos una amplitud $\mathcal{M}(s)$ en función de la energía del centro de masa al cuadrado y suponga que tiene un corte o singularidades no aisladas comenzando en s_0 para producir un estado intermedio

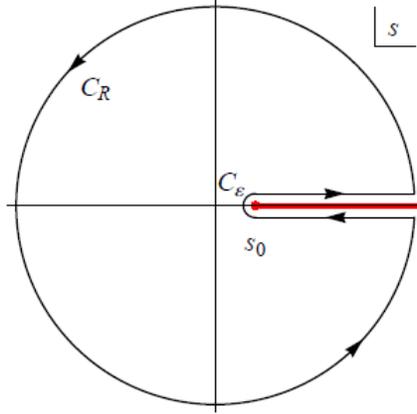


Figura 4.4: Contorno elegido para derivar las relaciones de dispersión [36].

real, que se extiende hasta el infinito [36]. Aplicando la formula integral de Cauchy

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (4.44)$$

al contorno mostrado en la Figura 4.4, por debajo del umbral s_0 la amplitud es real, porque las partículas on-shell intermedias no se pueden producir. Suponiendo que $\mathcal{M}(z)$ se puede definir para el complejo z en el plano semicomplejo superior, el principio de reflexión de Schwartz nos permite extender su dominio al plano semicomplejo inferior, a través de $\mathcal{M}(z^*) = \mathcal{M}^*(z)$. A lo largo del corte, con $s > s_0$ real, tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\mathcal{M}(s + i\varepsilon) - \mathcal{M}(s - i\varepsilon)] = 2i \operatorname{Im} \mathcal{M}(s), \quad (4.45)$$

luego

$$\mathcal{M}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\mathcal{M}(s' + i\varepsilon) - \mathcal{M}(s' - i\varepsilon)}{s' - s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R + C_\varepsilon} ds' \frac{\mathcal{M}(s')}{s' - s}, \quad (4.46)$$

para cualquier s dentro del contorno. Si las contribuciones del círculo C_R y el semicírculo C_ε se anulan en los límites $\varepsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, nos quedamos con

$$\mathcal{M}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} \mathcal{M}(s')}{s' - s} \quad (4.47)$$

Si la contribución del círculo C_R no desaparece, entonces se puede restar a $\mathcal{M}(s)$ su valor en algún punto real $\tilde{s} < s_0$ con el fin de hacer que el integrando desaparezca más

rápido en el infinito [60],

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s) - \mathcal{M}(\tilde{s}) &= \frac{s - \tilde{s}}{2\pi i} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\mathcal{M}(s' + i\varepsilon) - \mathcal{M}(s' - i\varepsilon)}{(s' - s)(s' - \tilde{s})} \\ &+ \frac{s - \tilde{s}}{2\pi i} \int_{C_R + C_\varepsilon} ds' \frac{\mathcal{M}(s')}{(s' - s)(s' - \tilde{s})} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Cuando la contribución del círculo se desvanece debido a este ajuste, por consiguiente uno se queda con la relación de dispersión

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(\tilde{s}) + \frac{s - \tilde{s}}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\text{Im } \mathcal{M}(s')}{(s' - s)(s' - \tilde{s})}. \quad (4.49)$$

Entonces para nuestro caso particular, la parte real de polarización del vacío viene dada por

$$\hat{\Pi}(s) = \Pi(s) - \Pi(0) = \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds' \text{Im } \Pi(s')}{s' (s' - s)}. \quad (4.50)$$

Reemplazando la expresión (4.43) en la integral anterior encontramos

$$\hat{\Pi}(s) = \frac{\alpha s}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \left(1 + \frac{2m^2}{s'}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s'}} \frac{1}{s' - s}. \quad (4.51)$$

Resolviendo la integral (4.51) tras realizar un conjunto de sustituciones (Ver Apéndice C, sección C.3), la polarización del vacío es

$$\boxed{\hat{\Pi}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{r} - \left(2 + \frac{1}{r}\right) \sqrt{\frac{1}{r} - 1} \arcsin \sqrt{r} \right) \rightarrow r = \frac{k^2}{4m^2}.} \quad (4.52)$$

Observemos que este resultado esta implícitamente renormalizado y concuerda con la amplitud para producción de pares de partículas virtuales (4.31).

En síntesis, este método dispersivo ofrece una manera alternativa de calcular la polarización del vacío a un-loop, permitiendo adicionalmente evaluar de forma sencilla sus discontinuidades relacionadas con la parte imaginaria de la amplitud. Ya que las reglas de Cutkosky transforman los propagadores de las partículas en funciones delta de Dirac, se facilita el desarrollo de las integrales al evitar las singularidades ultravioletas presentes cuando se realiza el cálculo diagramático de Feynman donde es necesario aplicar la regularización dimensional para evaluar las integrales divergentes

y realizar una continuación analítica para obtener el límite cinemático deseado. Por otra parte, con base en las relaciones de dispersión obtenidas a partir de los teoremas integrales del análisis complejo, es posible obtener la parte real de la amplitud a partir de la parte imaginaria llegando a resultados equivalentes a los del cálculo diagramático. No obstante, aunque para nuestro caso particular, el método dispersivo simplifica la complejidad matemática operacional, este no es utilizado convencionalmente, debido a que las relaciones de dispersión requieren conocer la estructura analítica de la amplitud, que en la mayoría de las ocasiones es desconocida para ordenes perturbativos mayores a un-loop. También podemos observar que usando el método dispersivo se impone la estructura transversal al propagador del fotón a partir de la identidad de Ward, mientras que con la regularización dimensional en el procedimiento diagramático se manifiesta de forma natural. Por último, una ventaja del método diagramático es la posibilidad de sistematizar en un algoritmo simbólico las diferentes etapas del cálculo de la amplitud para la polarización del vacío. Usando un lenguaje de programación simbólica se puede sistematizar la generación de las amplitudes, la regularización dimensional de integrales divergentes, el álgebra de Dirac en el integrando, la evaluación de la integral y la expansión en series de Laurent de la amplitud resultante que permite separar la parte singular de la parte finita con la que se realizan predicciones teóricas. En este trabajo usamos el lenguaje de programación simbólica *Wolfram Mathematica*.

4.3 Implementación en *Wolfram Mathematica*

El cálculo a un-loop de la polarización del vacío se puede verificar utilizando *Mathematica* al cual se pueden vincular los programas de *FeynArts* y *FeynCalc*, los cuales permiten construir y evaluar respectivamente amplitudes de Feynman.

El código en *Mathematica* es:

- Iniciamos llamando *FeynCalc* y *FeynArts*, para lo cual, utilizamos *PrependTo* para definir el camino donde se encuentran *FeynCalc* y *FeynArt* dentro del equipo.

```
PrependTo[$Path,ToFileName[{"\Path","to","FeynCalc"}]];
$LoadFeynArts=True;
Get["FeynCalc.m"]
```

- Creamos la Topología para el diagrama de la polarización del vacío (TopVP) usando la función de FeynArts, `CreateTopologies`, cuyos argumentos permiten definir [orden del loop, líneas externas entrante-saliente, exclusión de vértices desconectados, número de líneas conectadas a los vértices]. Por otra parte, podemos dibujar e imprimir la topología con `Paint` donde el argumento `FieldNumbers` numera cada uno de los campos presentes en la topología, ver Figura 4.5.

```
TopVP = CreateTopologies[1,1->1,
                        ExcludeTopologies->{Internal},
                        Adjacencies->3 ]

Paint[TopVP,ColumnsXRows->1,FieldNumbers->True]
```

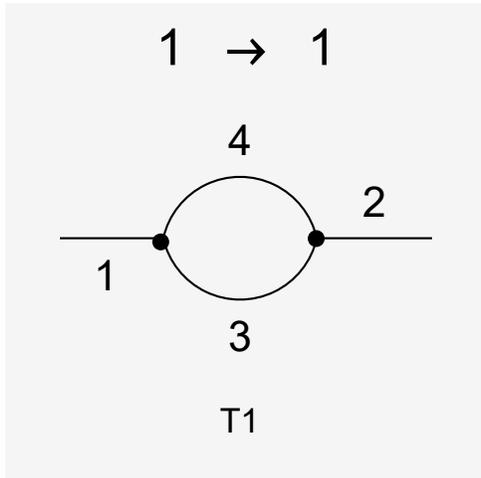


Figura 4.5: Topología de la polarización del vacío.

- Con el objetivo de insertar los campos al diagrama generado previamente utilizamos `InsertFields` que se basa en la nomenclatura de FeynArts para identificar los campos. F, S, V y U representan la familia de campos fermiónicos, escalares, vectoriales y fantasmas de Feynman respectivamente, los cuales a su vez, tiene un número de clase que indica el tipo de partícula que simbolizan, mientras que las antipartículas se establecen con un signo menos delante del

campo, por ejemplo, para el electrón tenemos $F[2,\{1\}]$, luego, el positrón es $-F[2,\{1\}]$. Los argumentos de `InsertFields` permiten definir [topología, campo entrante y saliente (fotón-fotón, $V[1]\rightarrow V[1]$), `InsertionLevel` especifica directamente y no el campo en general, `ExcludeParticles` excluye una lista de partículas definidas con anterioridad con `exclufields`] que no corresponden a la polarización del vacío en la QED. Posteriormente con `Paint` imprimimos el nuevo diagrama, ver Figura 4.6.

```

exclufields={F[1, _],F[2,{2}],F[2,{3}], F[3, _], F[4, _],
             S[1],S[2], S[3],
             V[2], V[3], V[5],
             U[1 | 2 | 3 | 4 | 5 ]};
FDVP=InsertFields[TopVP, V[1]->V[1],
                  Model->"SM",
                  InsertionLevel -> {Particles},
                  ExcludeParticles->exclufields]

Paint[FDVP,ColumnsXRows->1]

```

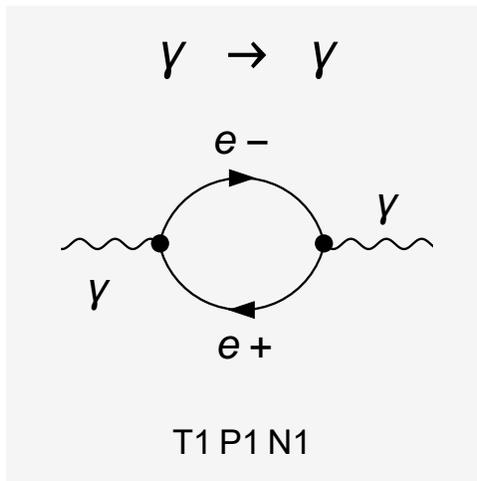


Figura 4.6: Diagrama de Feynman de la polarización del vacío generado por `FeynArts`.

- Ahora, si empleamos `CreateFeynAmp`, esta función aplica las reglas de Feynman al diagrama de la Figura 4.6 generando la amplitud a nivel integral en 4 dimensiones de la polarización del vacío. El respectivo cálculo de la amplitud se

debe realizar con `FeynCalc`, por ende, pasamos del lenguaje de `FeynArts` a `FeynCalc` con `FCFACConvert` donde escribimos la dimensión de los cuadri-momentos con `ChangeDimension`, la cual, debe especificarse en D -dimensiones para regular las integrales divergentes de Feynman que aparecen en amplitud, el momento de loop con `LoopMomenta` y los momentos de loop entrante y saliente con `IncomingMomenta` y `OutgoingMomenta` de tal forma que sigamos la notación de la Figura 4.2. Además con `Changes` realizamos unos cambios de la nomenclatura intrínseca de `FeynCalc`: $\text{Lor } 1 \rightarrow \mu$, $\text{Lor } 2 \rightarrow \nu$ y `FCGV[...]` por la carga y la masa de los fermiones que tiene esta sintaxis almacenada dentro de su argumento.

```

AmpFAVP=CreateFeynAmp[FDVP,Truncated->True]

AmpFCVP=FCFACConvert[AmpFAVP,
                      ChangeDimension->D,
                      IncomingMomenta->{k},
                      OutgoingMomenta->{k},
                      LoopMomenta->{q},
                      UndoChiralSplittings->True]

Changes = {FCGV[a_]:>a, Lor1->\[Mu], Lor2->\[Nu]}
```

- `FeynCalc` almacena los elementos de la amplitud `AmpFCVP` en una lista, lo cual nos permite separar su numerador (`Num`) del denominador (`Den`), este ultimo esta contenido en el elemento `FeynAmpDenominator` de la lista `AmpFCVP`, entonces aplicando la función `Cases` elegimos solamente lo almacenado por `FeynAmpDenominator` y posteriormente nos quedamos solo con el denominador aplicando `Flatten`. Con el fin de operar el numerador utilizamos `DeleteCases` para eliminar `FeynAmpDenominator` de `AmpFCVP` y quedarnos sólo con el numerador para luego evaluar las trazas con `DiracTrace`, adicionalmente con `Block` definimos la variable interna `res` que guardará el resultado del numerador.

```

Den = Flatten@@Cases[AmpFCVP,
                    FeynAmpDenominator[___],
                    Infinity] /. Changes // FeynCalcExternal

Num=Block[{res},
          SetOptions[DiracTrace,
                    DiracTraceEvaluate->True,
                    FeynCalcExternal->True];
          res = DeleteCases[AmpFCVP,
                            FeynAmpDenominator[___],Infinity];
          res = res /. Changes]

```

- Agrupamos nuevamente el numerador y el denominador y resolvemos la integral sobre el momento de loop interno q con `OneLoop` en D dimensiones y luego reducimos el resultado a 4 dimensiones.

```

Amp=Flatten@@Times[Num,Den]

AmpOL = OneLoopSimplify[Amp, q, FeynCalcExternal->True]

res = OneLoop[q, Amp,
              Dimension->D,
              FeynCalcExternal->True] /. D-> 4 // Simplify

```

- Finalmente la polarización del vacío es

$$\begin{aligned}
& ((EL)^2 \text{Overscript}[k, _]^2 \text{Overscript}[g, _]^{(\backslash[\text{Mu}]\backslash[\text{Nu}])} \\
& - \text{Overscript}[k, _]^{\backslash[\text{Mu}]} \text{Overscript}[k, _]^{\backslash[\text{Nu}])} \\
& (2 \text{Subscript}[A, 0] ((ME)^2) - (\text{Overscript}[k, _]^2 + 2 (ME)^2) \\
& \text{Subscript}[B, 0] (\text{Overscript}[k, _]^2, (ME)^2, (ME)^2)) / (12 \\
& \backslash[\text{Pi}]^2 \text{Overscript}[k, _]^2)
\end{aligned}$$

cuya estructura abreviada toma la forma

$$\text{res} = \frac{e^2 (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) (2A_0(m^2) - (k^2 + 2m^2) B_0(k^2, m^2, m^2))}{12\pi^2 k^2}. \quad (4.53)$$

El resultado queda en términos de las funciones de Passarino-Veltman $A_0(m^2)$ y $B_0(k^2, m^2, m^2)$ [61], cuya expansión en series de Laurent se expresa de la siguiente manera

$$B_0(k^2, m^2, m^2) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 2 - \beta \ln\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1}\right), \quad (4.54)$$

y

$$A_0(m^2) = m^2 [B_0(0, m^2, m^2) + 1], \quad (4.55)$$

donde

$$B_0(0, m^2, m^2) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right). \quad (4.56)$$

Si sustituimos (4.54), (4.55) y (4.56) en (4.53) obtenemos una expresión equivalente a (4.29) que corresponde con el resultado de polarización del vacío (a un-loop) empleando las reglas de Feynman (el código que se desarrollo anteriormente se encuentra publicado en <https://github.com/fisicateoricaUDP>).

5. Conclusiones

En esta tesis se estudiaron las propiedades analíticas del propagador del fotón al orden de un-loop, también conocido como la polarización del vacío. El cálculo respectivo de este observable primero se realizó empleando los diagramas de Feynman, lo cual nos condujo a integrales con divergencias UV, por lo tanto, fue necesario emplear la regularización dimensional, con el fin de remover dichas divergencias, así, se encontró un resultado para la amplitud en términos de logaritmos y polos simples de la forma $\frac{1}{\epsilon}$. Posteriormente haciendo uso de la continuación analítica hallamos las discontinuidades logarítmicas de la amplitud evaluando los límites cinemáticos $k^2 < 4m^2$ y $k^2 > 4m^2$ correspondientes a la formación de pares de partículas virtuales y reales respectivamente, construyendo de esta manera toda la amplitud de la polarización del vacío. Este mismo cálculo fue realizado empleando las reglas de Cutkosky derivadas del teorema óptico y las relaciones de dispersión provenientes de los teoremas integrales del análisis complejo donde observamos que se obtienen resultados semejantes al método diagramático pero implícitamente normalizados. La principal ventaja del método dispersivo es la reducción significativa de la complejidad matemática operacional del proceso en comparación con el cálculo diagramático, debido a que no se debe usar un proceso de regularización dimensional. Sin embargo, aunque para la polarización del vacío el método dispersivo resulta ser eficiente al orden de un-loop, para observables descritos por funciones de las que no se conozcan sus propiedades analíticas a altos ordenes perturbativos este procedimiento será limitado. Adicionalmente, el método diagramático tiene la ventaja de poder sistematizarse en cada etapa del cálculo de la amplitud usando programación simbólica. Evaluar la auto-energía del fotón así como la de cualquier otro tipo de observable físico requiere un conjunto de técnicas y operaciones matemáticas muy extensas, por lo tanto, en nuestro trabajo utilizamos la herramienta computacional `Wolfram Mathematica` que integra los programas de `FeynArts` y `FeynCalc`, permitiéndonos realizar y verificar el desarrollo analítico de la polarización del vacío. El resultado obtenido es equivalente al generado con los métodos diagramático y dispersivo. La diferencia es un término constante que sin embargo puede ser absorbido en el proceso de renormalización de las divergencias UV.

Apéndice A

Notación y Convenciones

A.1 Unidades

Para los cálculos asociados a la teoría cuántica de campos las constantes propias de naturaleza, por ejemplo, la constante reducida de Planck (\hbar) y la velocidad de la luz (c), toman convencionalmente el valor de la unidad

$$\hbar = c = 1.$$

Luego, el análisis dimensional para la longitud (L), el tiempo (T), la energía (E) y la masa (M) es:

$$[L] = [T] = [E]^{-1} = [M]^{-1}$$

Algunas relaciones de conversión útiles son:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ s} = 1.52 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$$

$$m_e \equiv \text{masa del electrón} = 0.5110 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_p \equiv \text{masa del protón} = 938.3 \text{ MeV}/c^2$$

$$1 \text{ metro} = 5.07 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$$

$$1 \text{ kg} = 5.61 \cdot 10^{26} \text{ GeV}$$

$$1 \text{ fm} = 5.07 \text{ GeV}^{-1}, \quad \text{fm} \equiv \text{fermi}$$

$$1 \text{ barn} = 100 \text{ fm}^2$$

A.2 Relatividad y Tensores

El tensor métrico o métrica de Minkowski:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los índices griegos corren desde 0 hasta 3 o respectivamente t, x, y, z . Los índices latinos i, j y k varían de 1 hasta 3 e indican generalmente las tres coordenadas espaciales. También se utiliza el convenio de suma de Einstein que establece que índices repetidos se suman sobre todos los valores posibles del mismo. Los cuadri-vectores son etiquetados por un tipo de letra cursiva y los vectores en tres dimensiones son denotados con letras en negrilla. Por ejemplo, para el tetra-vector desplazamiento se tiene:

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}),$$

la componente temporal ($ct = t$) covariante y contravariante de x^μ son iguales, debido a la métrica que se está usando, es decir:

$$t = x^0 = x_0.$$

Así, el producto escalar de Minkowski se define de la siguiente manera:

$$p_\mu x^\nu = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Luego, para una partícula masiva se llega a:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2.$$

Por otra lado, el operador derivada es:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right).$$

Algunos cálculos con las matrices γ de Dirac son:

$$\begin{aligned}
\text{tr}[1] &= 4 \\
\text{tr}[\gamma^\mu] &= 0 \\
\text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu} \\
\text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] &= 0 \\
\text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma^\mu &= g^{\mu\nu}g_\mu = \delta_\mu^\mu = d \\
\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\mu &= (2-d)\gamma^\rho \\
\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu &= 4g^{\rho\sigma} - (4-d)\gamma^\rho\gamma^\sigma \\
\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\mu &= -2\gamma^\tau\gamma^\sigma\gamma^\rho + (4-d)\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau
\end{aligned} \tag{A.2}$$

donde d es la dimensión de las matrices γ .

A.3 Distribuciones y Transformadas de Fourier

Cálculos explícitos en esta tesis hacen uso de la función delta de Dirac $\delta(x)$ y la función escalón $\theta(x)$ que están definidas de la siguiente forma:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \quad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x).$$

En n dimensiones la función delta es infinita en $x = 0$ y nula en cualquier otro punto, por tanto:

$$\int d^n x \delta^{(n)}(x) = 1,$$

y se satisface:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a).$$

La transformada de Fourier en cuatro dimensiones viene dada por:

$$f(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} f(p);$$

$$f(p) = \int d^4 x e^{ip \cdot x} f(x).$$

La transformada de Fourier conlleva a la identidad:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p).$$

A.4 Mecánica Cuántica

La representación de los operadores energía y momento lineal siguen las convenciones habituales de la mecánica cuántica:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla.$$

Por ende, el cuadri-momento es igual a:

$$p^\mu = i \partial^\mu.$$

El hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico

$$H_{\text{OAC}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{q}^2,$$

donde m es la masa de la partícula y ω es la frecuencia angular. El espectro del hamiltoniano se puede hallar escribiendo el operador momento \mathbf{p} y el operador posición \mathbf{q} en términos de los operadores escalera a y a^\dagger :

$$q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (a + a^\dagger); \quad p = -i \sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a - a^\dagger).$$

A partir de la relación de conmutación canónica $[q_i, p_j] = i \delta_{ij}$, el conmutador para los operadores escalera es:

$$[a, a^\dagger] = 1,$$

así, el hamiltoniano expresado mediante los operadores escalera es:

$$H_{\text{OAC}} = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

El estado base se define como $|0\rangle$, tal que $a|0\rangle = 0$ es un auto-estado de H_{OAC} (estado de mínima energía) con autovalor $\frac{\omega}{2}$. luego, los conmutadores entre los el hamiltoniano

y los operadores escalera son:

$$[H_{\text{OAC}}, a^\dagger] = \omega a^\dagger, \quad [H_{\text{SHO}}, a] = -\omega a,$$

lo que conlleva a que podamos escribir de manera general que los estados $|n\rangle$ de H_{OAC} como:

$$|n\rangle = (a^\dagger)^n |0\rangle,$$

con autovalores:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega.$$

Por otro lado, las matrices de Pauli tienen la forma:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y cumplen la siguiente identidad:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \quad \epsilon^{ijk} \equiv \text{Tensor Levi Civita.}$$

A.5 Electrodinámica

La carga eléctrica del electrón se etiqueta por la letra e . De este modo, el potencial de Coulomb Φ y la constante de estructura fina α son:

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{A.3}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}. \tag{A.4}$$

Se usan las ecuaciones de Maxwell en su forma relativista:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu$$

donde

$$A^\mu = (\Phi, A), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \& \quad j^\nu \equiv \text{Cuadri-corriente.}$$

A.6 Función Gamma

La función Gamma ($\Gamma(z)$) está definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (\text{A.5})$$

Si $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$. Una de las propiedades de más representativas de $\Gamma(z)$ es:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (\text{A.6})$$

En el cálculo explícito de la polarización del vacío resultan útiles las siguientes expansiones de $\Gamma(\varepsilon)$ con $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Propagador de Klein-Gordon

B.1 Función de Green de la ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon con un termino no homogénea J se escribe de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x) = J \quad (\text{B.1})$$

o

$$(\square + m^2) \phi(x) = J. \quad (\text{B.2})$$

siendo,

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad \square \equiv \text{Operador D'Alambertiano}. \quad (\text{B.3})$$

Sea $G(x - y)$ la función de Green del campo de Klein-Gordon $\phi(x)$, la cual satisface:

$$(\square + m^2) G(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y), \quad (\text{B.4})$$

donde el termino inhomogéneo J de (B.1) es cambiado por una fuente puntual y, el campo $\phi(x)$ es igual a:

$$\phi(x) = \int G(x - y) J d^4x. \quad (\text{B.5})$$

Observemos que G y δ dependen de cuadri-vectores:

$$G(x - y) \equiv G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0); \quad \delta^{(4)}(x - y) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(x^0 - y^0). \quad (\text{B.6})$$

Las transformadas de Fourier de la función de Green y la función delta están dadas por:

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) e^{-ip \cdot (x-y)}; \quad g(p) \equiv \text{Propagador} \quad (\text{B.7})$$

$$\delta^{(4)}(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (\text{B.8})$$

Evaluando $G(x-y)$ y $\delta^{(4)}(x-y)$ en la ecuación (B.4)

$$\begin{aligned}
(\square + m^2) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) e^{-ip \cdot (x-y)} &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \\
\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) (\square + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \\
\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)} \\
\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) (p^2 - m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x-y)};
\end{aligned}$$

de lo anterior obtenemos:

$$g(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} = \frac{i}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2} \equiv D(p) \equiv \text{propagador escalar.} \quad (\text{B.9})$$

Luego

$$G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} = D_R(x-y). \quad (\text{B.10})$$

La notación $D_R(x-y)$ corresponde a la función retardada de Green (ecuación (2.42)) que satisface:

$$\phi(x) = - \int d^4x' D_R(x-y) \cdot J(y) + \phi_0; \quad -\infty \leq t' \leq t. \quad (\text{B.11})$$

Ya que $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$ es el cuadri-momento, podemos reescribir $D_R(x-y)$:

$$\begin{aligned}
D_R(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{i}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \frac{i}{(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} e^{-ip^0(x^0-y^0)} \right]
\end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

La integral de p^0 es divergente, ya que presenta singularidades o polos en $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; por tanto, se debe utilizar el teorema de los residuos para evaluar la integral.

Recordemos el teorema de los residuos de Cauchy. Sea D un dominio simplemente conexo y C un contorno cerrado simple que se halla completamente dentro de D . Si una función es analítica sobre y en el intervalo de C , excepto en un número finito de

puntos singulares, z_1, z_2, \dots, z_k del interior de C , entonces:

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k), \quad (\text{B.13})$$

si f tiene un polo de orden n en $z = z_0$, entonces:

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1} (z - z_0)^n f(z)}{dz^{n-1}}. \quad (\text{B.14})$$

Si escribimos la integral para p^0 de (B.12), en términos de una variable compleja $z = x + iy$ se tiene:

$$\oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2}. \quad (\text{B.15})$$

Teniendo en cuenta la desigualdad LM (L es la longitud de la curva) o teorema de acotación para $D_R(x - y)$

$$\left| \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2} \right| \leq LM \leq \pi R \text{Max} \left| \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2} \right|$$

$$\left| \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2} \right| \leq \pi R \frac{e^{y(t-t')}}{R^2} \leq \frac{1}{R} \rightarrow 0; \quad R \rightarrow \infty. \quad (\text{B.16})$$

La letra R denota el radio de la contorno de integración; para este caso corresponde con la media circunferencia. Entonces, dada la desigualdad LM la integral converge cuatro tipos de contornos.

i.) Para $x^0 > y^0$ desplazamos los polos hacia abajo del eje real una distancia ϵ , con $\epsilon \rightarrow 0$ ver figura B.1. La integral para z se convierte en:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{(z + i\epsilon)^2 - E_p^2}. \quad (\text{B.17})$$

observe que: $(z + i\epsilon)^2 - E_p^2 = 0 \rightarrow z = \pm E_p - \epsilon$. Aplicando el teorema de los residuos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{(z + i\epsilon)^2 - E_p^2} = -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) + \text{Res}(f(z), -E_p - i\epsilon)], \quad (\text{B.18})$$

el signo $(-)$ es consecuencia de que la integral de contorno se hace en el sentido horario.

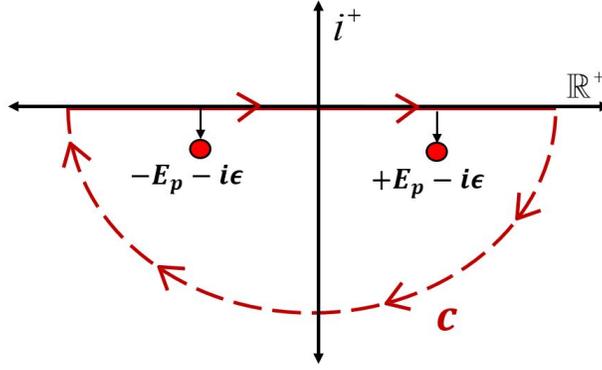


Figura B.1: Polos desplazados hacia abajo del eje real

Para el residuo $\text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon)$ se tiene explícitamente:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) &= \lim_{z \rightarrow E_p - i\epsilon} [z - (E_p - i\epsilon)] \cdot \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{[z - (E_p - i\epsilon)][z - (-E_p - i\epsilon)]} \\
 &= \lim_{z \rightarrow E_p - i\epsilon} \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{[z - (-E_p - i\epsilon)]} \\
 &= \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{[E_p - i\epsilon + E_p + i\epsilon]} \\
 \text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) &= \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{2E_p}. \tag{B.19}
 \end{aligned}$$

Análogamente para el $\text{Res}(f(z), -E_p - i\epsilon)$ se obtiene:

$$\text{Res}(f(z), -E_p - i\epsilon) = \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{2E_p}. \tag{B.20}$$

Reemplazando los residuos en la integral de z y evaluando el límite $\epsilon \rightarrow 0$ se llega a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{(z + i\epsilon)^2 - E_p^2} = -2\pi i \left[\frac{e^{-iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} - \frac{e^{iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} \right] \tag{B.21}$$

Sustituyendo el resultado de la integral anterior en la función retardada de Green (B.12) se llega a:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2\pi} \left[-2\pi i \left(\frac{e^{-iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} - \frac{e^{iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} \right) \right]$$

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)} \right) \quad (\text{B.22})$$

Por lo tanto, La función retardada de Green $D_R(x-y)$ es igual al conmutador $[\phi(x), \phi(y)]$ (ecuación (2.40)).

ii.) Para $y^0 > x^0$ el contorno de integración sería por encima del eje real, sin embargo, esta prescripción carece de interpretación física por tratarse de partículas viajando hacia el pasado o de energía negativa.

iii.) El propagador de Feynman utiliza una prescripción donde las singularidades se encuentran desplazadas por encima y por debajo del eje real. Con base a ello, se pueden realizar las integrales de contorno inferior para $x^0 > y^0$ y superior para $x^0 < y^0$ llegando a:

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\text{Res}(f, -E_{\mathbf{p}}) \theta(y^0 - x^0) - \text{Res}(f, E_{\mathbf{p}}) \theta(x^0 - y^0) \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(e^{iE_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)} \theta(y^0 - x^0) + e^{-iE_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)} \theta(x^0 - y^0) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Esta prescripción de Feynman representa el propagador escalar para partículas de spin 0.

iv.) Existe una prescripción inversa del contorno de integración y es la función de Green de Dyson:

$$G_D(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(e^{-iE_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)} \theta(y^0 - x^0) + e^{+iE_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)} \theta(x^0 - y^0) \right) \quad (\text{B.24})$$

Apéndice C

Cálculos explícitos de la Polarización del vacío

C.1 Escala de Masa

La razón por la cual introducimos la escala de masa μ en el Capítulo 4, sección 4.1 esta relacionada con el siguiente análisis dimensional. La acción S , en la QED esta definida en términos de la densidad Lagrangiana (\mathcal{L}_{QED}) por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{QED}. \quad (\text{C.1})$$

En $d = 4$ dimensiones $[S] = m^0$ y $[\mathcal{L}] = m^4$, por tanto, con base en la expresión (2.88), los campos A_μ y ψ satisfacen $[A_\mu] = m$ y $[\psi] = m^{3/2}$. Sin embargo, en $d = 4 - 2\varepsilon$ tomando los términos cinéticos de la acción

$$S = \int d^d x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + i\bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi \right], \quad (\text{C.2})$$

encontramos

$$[S] = m^{-d} (m[A_\mu])^2 = m^0 \rightarrow [A_\mu] = m^{\frac{1}{2}(d-2)} = m^{1-\varepsilon}, \quad (\text{C.3})$$

$$[S] = m^{-d} [\psi]^2 m = m^0 \rightarrow [\psi]^2 = m^{(d-1)} = m^{3-2\varepsilon}. \quad (\text{C.4})$$

Ahora, reemplazando estas dimensiones en el termino de interacción (3.55)

$$S_I = \int d^d x e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi, \quad (\text{C.5})$$

llegamos a

$$\begin{aligned} m^0 &= m^{-d} [e] [\psi]^2 [A_\mu] = m^{-d} [e] m^{3-2\varepsilon} m^{1-\varepsilon} \\ &= m^{-4+2\varepsilon} [e] m^{3-2\varepsilon} m^{1-\varepsilon} \\ &= m^{-\varepsilon} [e] \rightarrow [e] = m^\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

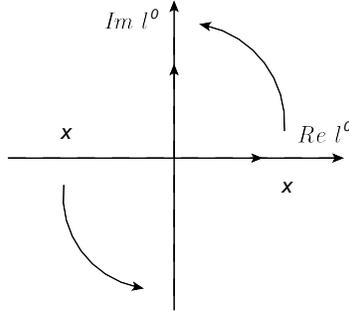


Figura C.1: Rotación de Wick para la componente temporal de l .

Finalmente, con el objetivo de mantener la carga eléctrica adimensional, realizamos $e \rightarrow e\mu^\epsilon$.

C.2 Integrales Tensoriales y Escalares en d dimensiones

Por integración simétrica [36], tenemos que

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2} = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^k} = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2}. \quad (\text{C.8})$$

Donde se ha tenido en cuenta que en d dimensiones $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d$. La integral escalar de (C.8) se puede escribir de manera general como

$$I_{n,s} = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^n}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^s}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 2, 3, \dots \quad (\text{C.9})$$

Para realizar esta integral primero consideremos la integración sobre la componente temporal de l en el plano complejo aplicando la siguiente transformación

$$l^0 \rightarrow il_E^0, \quad \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}_E. \quad (\text{C.10})$$

Esta deformación del contorno corresponde la denominada rotación de Wick [53, 52], ver Figura C.1, que nos permite solucionar la integral en el espacio de Minkowski a partir de una integral en el espacio euclídeo. Por consiguiente, hemos definido un nuevo vector $l_E^2 = (l_E^0)^2 + (\mathbf{l}_E)^2$, donde \mathbf{l}_E es un vector en $d - 1$ dimensiones y satisface que

$l^2 = -l_E^2$. Por lo tanto, la integral (C.9) se convierte en

$$I_{n,s} = i(-1)^{n-s} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^{2n}}{[l_E^2 + M^2]^s}. \quad (\text{C.11})$$

Aquí, la prescripción de Feynman para los propagadores de las partículas $i\epsilon$ no es necesaria porque el denominador resulta ser positivo tras realizar la rotación de Wick ($M^2 > 0$). Ahora, para resolver la integral utilizamos coordenadas esféricas, luego

$$\int d^d l_E = \int_0^\infty d\bar{l} \bar{l}^{d-1} \int d\Omega_{d-1}, \quad (\text{C.12})$$

siendo $\bar{l} = \sqrt{(l_E^0)^2 + (\vec{l}_E)^2}$ la magnitud del vector l_E y $d\Omega_{d-1}$ el ángulo sólido en coordenadas esféricas, ambos en d dimensiones. Para la integración angular tenemos

$$\int d\Omega_{d-1} = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-1} \sin^{d-2} \theta_{d-1}. \quad (\text{C.13})$$

realizando

$$\int_0^\pi d\theta \sin^m \theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (\sin^2 \theta)^{\frac{m}{2}} = \int_0^1 dx \cdot x^{\frac{m-1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})}, \quad (\text{C.14})$$

donde hemos hecho la sustitución $x = \sin^2 \theta$, el ángulo sólido se reduce a

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{d-1} &= 2\pi \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1+1}{2})}{\Gamma(\frac{1+2}{2})} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{2+1}{2})}{\Gamma(\frac{2+2}{2})} \dots \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{d-2+1}{2})}{\Gamma(\frac{d-2+2}{2})} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Por otra parte, la integral radial tiene la forma

$$\int_0^\infty d\bar{l} \frac{\bar{l}^{d-1+2n}}{[\bar{l}^2 + M^2]^s}. \quad (\text{C.16})$$

Sustituyendo $\bar{l} = Mx \rightarrow d\bar{l} = Mdx$ en (C.16) llegamos a

$$\int_0^\infty d\bar{l} \frac{\bar{l}^{d-1+2n}}{[\bar{l}^2 + M^2]^s} = \int_0^\infty Mdx \frac{M^{d-1+2n} x^{d-1+2n}}{M^{2s} [x^2 + 1]^s} = (M^2)^{\frac{d}{2}-s+n} \int_0^\infty dx \frac{x^{d-1+2n}}{[1+x^2]^s} \quad (\text{C.17})$$

Ahora, tomando $x = \sinh z \rightarrow dx = \cosh z dz$ ($0 \leq x < \infty \rightarrow 0 \leq z < \infty$) y usando la identidad $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, entonces

$$1 + x^2 = 1 + \sinh^2 z = \cosh^2 z = (1 - \tanh^2 z)^{-1}, \quad (\text{C.18})$$

$$x^2 = -1 + (1 - \tanh^2 z)^{-1} = \tanh^2 z (1 - \tanh^2 z)^{-1}. \quad (\text{C.19})$$

Haciendo $u = \tanh^2 z \rightarrow du = 2 \tanh z \cosh^{-2} z dz$ ($0 \leq z < \infty \rightarrow 0 \leq u < \infty$):

$$1 + x^2 = (1 - u)^{-1}, \quad x^2 = u(1 - u)^{-1}. \quad (\text{C.20})$$

Por lo tanto, la expresión (C.17) queda escrita como

$$\begin{aligned} (M^2)^{\frac{d}{2}-s+n} \int_0^\infty dx \frac{x^{d-1+2n}}{[1+x^2]^s} &= (M^2)^{\frac{d}{2}-s+n} \int_0^\infty \frac{\cosh^3 z}{2 \tanh z} du \frac{[u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}]^{d-1+2n}}{[1-u]^{-s}} \\ &= (M^2)^{\frac{d}{2}-s+n} \int_0^\infty du \frac{(1-u)^{-\frac{3}{2}}}{2u^{\frac{1}{2}}} u^{\frac{d-1+2n}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2}-n} (1-u)^s \\ &= \frac{1}{2} (M^2)^{\frac{d}{2}-s+n} \int_0^\infty du u^{\frac{d-2+2n}{2}} (1-u)^{s-n-\frac{d}{2}-1} \\ &= \frac{(M^2)^{n-s+\frac{d}{2}} \Gamma(n + \frac{d}{2}) \Gamma(s - n - \frac{d}{2})}{2 \Gamma(s)}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Donde en la última línea de la ecuación previa hemos utilizado la definición de la función Gamma (A.5). Combinando el resultado anterior con la integración angular (C.15) obtenemos

$$I_{n,s} = i (M^2)^{n-s+\frac{d}{2}} \frac{(-1)^{n-s} \Gamma(n + \frac{d}{2}) \Gamma(s - n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(s)}. \quad (\text{C.22})$$

Finalmente para aplicar la regularización dimensional es conveniente escribir $I_{n,s}$ reemplazando $d = 4 - 2\varepsilon$, por lo tanto,

$$I_{n,s} = i \frac{(-1)^{n-s}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^\varepsilon (M^2)^{2+n-s} \frac{\Gamma(2+n-\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{\Gamma(s-n-2+\varepsilon)}{\Gamma(s)}. \quad (\text{C.23})$$

C.3 Integral parte real

Con la finalidad de hallar la amplitud real (4.51) debemos resolver la siguiente integral [53],

$$I_R = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \left(1 + \frac{2m^2}{s'} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s'} \frac{1}{s' - s}}. \quad (\text{C.24})$$

Iniciamos sustituyendo $x = \frac{s'}{4m^2}$, tenemos que $ds' = 4m^2 dx$ y recordando la notación $r = \frac{s}{4m^2}$, encontramos,

$$I_R = \frac{1}{4m^2} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{1}{x-r} \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{x}}. \quad (\text{C.25})$$

Posteriormente, si sustituimos $z = 1 - \frac{1}{x}$, entonces, $x = \frac{1}{1-z}$ y $dx = \frac{dz}{(1-z)^2}$, por consiguiente,

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{1}{4m^2} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)} \frac{1}{\frac{1}{1-z} - r} \left(1 + \frac{1}{2} (1-z) \right) \sqrt{z} \\ &= \frac{1}{4m^2} \int_0^1 dz \frac{1}{1-r+rz} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}z \right) \sqrt{z} \\ &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{1-r} \int_0^1 dz \frac{3\sqrt{z} - z^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{r}{1-r}z}. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Ahora, sustituyendo $y = \frac{r}{1-r}z$, entonces, $z = \frac{1-r}{r}y$ y $dz = \frac{1-r}{r}dy$, luego,

$$I_R = \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \int_0^{\frac{r}{1-r}} dy \frac{3\sqrt{\frac{1-r}{r}y} - \left(\frac{1-r}{r}y\right)^{\frac{3}{2}}}{1+y}. \quad (\text{C.27})$$

Reemplazando $1 + y = t$, el límite superior de la integral se transforma en $\frac{1}{1-r}$, de esta forma,

$$\begin{aligned}
I_R &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \left\{ \frac{3 \left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t-1}}{t} - \frac{\left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{3}{2}} (t-1)^{\frac{3}{2}}}{t} \right\} \\
&= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \left\{ \frac{3 \left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t-1}}{t} - \left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{t-1}(t-1)}{t}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \left\{ \left[3 \left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \frac{\sqrt{t-1}}{t} - \left(\frac{1-r}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{t-1} \right\}.
\end{aligned} \tag{C.28}$$

Finalmente hemos llegado a integrales triviales de evaluar que se desarrollan por sustitución simple de la siguiente manera:

- En el primer término de (C.28) encontramos la integral

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \frac{\sqrt{t-1}}{t} &= \int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \frac{t-1}{t\sqrt{t-1}} \\
&= \int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \frac{1}{\sqrt{t-1}} - \int_0^{\frac{1}{1-r}} dt \frac{1}{t\sqrt{t-1}} \\
&= \int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \frac{1}{\sqrt{t-1}} - \int_0^{\frac{1}{1-r}} dt \frac{2du}{1+u^2}, \rightarrow u = \sqrt{t-1} \quad (\text{C.29}) \\
&= 2\sqrt{t-1} \Big|_1^{\frac{1}{1-r}} - 2 \arctan \sqrt{t-1} \Big|_1^{\frac{1}{1-r}} \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{1-r}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{r}{1-r}}.
\end{aligned}$$

- En el segundo término de (C.28) encontramos la integral

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{1}{1-r}} dt \sqrt{t-1} &= \frac{2}{3} (t-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{\frac{1}{1-r}} \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{r}{1-r}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Por lo tanto, I_R se convierte en:

$$\begin{aligned}
I_R &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \left\{ \left[3 \left(\frac{1-r}{r} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1-r}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \left[2\sqrt{\frac{r}{1-r}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{r}{1-r}} \right] - \frac{2}{3} \right\} \\
&= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \left\{ \left[\left(\frac{1-r}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \left(3 + \left(\frac{1-r}{r} \right) \right) \right] \left[2\sqrt{\frac{r}{1-r}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{r}{1-r}} \right] - \frac{2}{3} \right\} \\
&= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \left\{ \left[\sqrt{\frac{1-r}{r}} \left(2 + \frac{1}{r} \right) \right] \left[2\sqrt{\frac{r}{1-r}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{r}{1-r}} \right] - \frac{2}{3} \right\} \\
&= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \left\{ 2 \left(2 + \frac{1}{r} \right) - 2 \left(2 + \frac{1}{r} \right) \sqrt{\frac{1}{r} - 1} \arctan \sqrt{\frac{r}{1-r}} - \frac{2}{3} \right\} \\
&= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{10}{3} + \frac{2}{r} - 2 \left(2 + \frac{1}{r} \right) \sqrt{\frac{1}{r} - 1} \arctan \sqrt{\frac{r}{1-r}} \right\},
\end{aligned} \tag{C.31}$$

y utilizando la identidad trigonométrica $\arctan \sqrt{\frac{r}{1-r}} = \arcsin \sqrt{r}$ se obtiene:

$$I_R = \frac{1}{s} \left[\frac{5}{3} + \frac{1}{r} - \left(2 + \frac{1}{r} \right) \sqrt{\frac{1}{r} - 1} \arcsin \sqrt{r} \right]. \tag{C.32}$$

Referencias

- [1] G. B. Gelmini. El boson de Higgs. *arXiv:1407.1741 [physics.pop-ph]*, 2014.
- [2] D. M. Asner et al. ILC higgs white paper. *arXiv:1310.0763 [hep-ph]*, 2013.
- [3] G. Haghighat et al. Probing light dark sector at future lepton colliders via (dark) Higgs invisible decays. *arXiv:2209.07565 [hep-ph]*, 2022.
- [4] A. Freitas. Three-loop vacuum integrals with arbitrary masses. *arXiv:1609.09159 [hep-ph]*, *Journal of High Energy Physics*, 2016(11), nov 2016.
- [5] S. Bauberger, A. Freitas, and D. Wiegand. TVID 2: Evaluation of planar-type three-loop self-energy integrals with arbitrary masses. *arXiv:1908.09887 [hep-ph]*, *Journal of High Energy Physics*, 2020(1), jan 2020.
- [6] E. A. Reyes and A. R. Fazio. High-Precision calculations of the Higgs Boson Mass. *arXiv:2112.15295 [hep-ph]*, *Particles*, 5(1):53–73, feb 2022.
- [7] A. R. Fazio and E. A. Reyes R. The lightest Higgs boson mass of the MSSM at three-loop accuracy. *arXiv:1901.03651 [hep-ph]*, *Nuclear Physics B*, 942:164–183, may 2019.
- [8] X. Chen et al. Isolated photon and photon+jet production at NNLO QCD accuracy. *arXiv:1904.01044 [hep-ph]*, *Journal of High Energy Physics*, 2020(4):1–36, 2020.
- [9] R. H. Parker et al. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. *arXiv:1812.04130 [physics.atom-ph]*, *Science*, 360(6385):191–195, apr 2018.
- [10] T. Aoyama et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model. *arXiv:2006.04822 [hep-ph]*, *Physics Reports*, 887:1–166, dec 2020.
- [11] P. Girotti. Status of the fermilab muon $g-2$ experiment. In *EPJ Web of Conferences*, volume 262, page 01003. EDP Sciences, 2022.

- [12] O. Gituliar and S. Moch. Fuchsia and Master integrals for Energy-Energy correlations at NLO in QCD. *arXiv:1711.05549 [hep-ph]*, *Acta Physica Polonica B*, 48(12):2355, 2017.
- [13] W. J. Torres Bobadilla, A. R. Fazio, P. Mastrolia, and E. Mirabella. Generalised unitarity for dimensionally regulated amplitudes, 2015.
- [14] Cutkosky R. E. Singularities and discontinuities of feynman amplitudes. *Journal of Mathematical Physics*, 1(5):429–433, 1960.
- [15] R. Zwicky. A brief introduction to dispersion relations and analyticity. *arXiv preprint arXiv:1610.06090*, 2016.
- [16] T. Hahn. Generating Feynman Diagrams and Amplitudes with FeynArts 3. *arXiv:hep-ph/0012260*, *Computer Physics Communications*, 140(3):418–431, nov 2001.
- [17] V. Shtabovenko, R. Mertig, and F. Orellana. FeynCalc 9.3: New features and improvements. *arXiv:2001.04407 [hep-ph]*, *Computer Physics Communications*, 256:107478, nov 2020.
- [18] M. E. Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [19] J. I. Illana. Teoría cuántica de campos. *Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada. Espana. Pág, 1*, 2017.
- [20] Fred Alonso López-Durán, Efraín Zamora-Romo, José Luis Alonso-Morales, and Guillermo Mendoza-Vásques. Tomografía por emisión de positrones: los nuevos paradigmas. *Tip Revista Especializada en Ciencias Químico-Biológicas*, 10(1):26–35, 2007.
- [21] C. D. Anderson. The positive electron. *Phys. Rev.*, 43:491–494, Mar 1933.
- [22] K. Kumericki. Feynman Diagrams for Beginners. *arXiv:1602.04182 [physics.ed-ph]*, 2016.
- [23] J.J. Sakurai. *Modern quantum mechanics, revised edition*. American Association of Physics Teachers, 1995.
- [24] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics-Third Edition*. John Wiley, NY, 1999.

- [25] R. G. Newton. *Scattering theory of waves and particles*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] P. S. Carney et al. Statistical generalizations of the optical cross-section theorem with application to inverse scattering. *JOSA A*, 14(12):3366–3371, 1997.
- [27] I. Rondón O. and F. Soto E. Generalized optical theorem for propagation invariant beams. *Optik*, 137:17–24, 2017.
- [28] L. Zhang. Generalized optical theorem for an arbitrary incident field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 145(3):EL185–EL189, 2019.
- [29] J. W. Strutt. Xv. on the light from the sky, its polarization and colour. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(271):107–120, 1871.
- [30] G. Mie. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der physik*, 330(3):377–445, 1908.
- [31] E. Feenberg. The scattering of slow electrons by neutral atoms. *Physical Review*, 40(1):40, 1932.
- [32] R. G Newton. Optical theorem and beyond. *American Journal of Physics*, 44(7):639–642, 1976.
- [33] P. L. Marston. Generalized optical theorem for scatterers having inversion symmetry: Applications to acoustic backscattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(4):1291–1295, 2001.
- [34] J. Soares. Introduction to optical characterization of materials. In *Practical Materials Characterization*, pages 43–92. Springer, 2014.
- [35] G. Gouesbet. On the optical theorem and non-plane-wave scattering in quantum mechanics. *Journal of mathematical physics*, 50(11):112302, 2009.
- [36] R. J. Rietkerk. One-loop amplitudes in perturbative quantum field theory. Master’s thesis, Utrecht University, 2012.
- [37] S. Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1995.

- [38] Matilde Legua and Luis M. Sánchez-Ruiz. Cauchy principal value contour integral with applications. *Entropy*, 19(5):215, 2017.
- [39] M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko. New developments in the casimir effect. *Physics Reports*, 353(1-3):1–205, oct 2001.
- [40] H. B. G. Casimir. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Indag. Math.*, 10:261–263, 1948.
- [41] P. R. Buenzli and Ph. A. Martin. Microscopic theory of the casimir force at thermal equilibrium: Large-separation asymptotics. *Physical Review E*, 77(1), jan 2008.
- [42] M.J. Sparnaay. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, 24(6):751–764, 1958.
- [43] S. K. Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to $6\mu\text{m}$ range. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5–8, Jan 1997.
- [44] S. K. Lamoreaux. Erratum: Demonstration of the casimir force in the 0.6 to $6\mu\text{m}$ range [phys. rev. lett. 78, 5 (1997)]. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5475–5476, Dec 1998.
- [45] U. Mohideen and Anushree Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to $0.9\mu\text{m}$. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4549–4552, Nov 1998.
- [46] A. M. Kimball. The casimir effect: recent controversies and progress. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(38):R209–R277, sep 2004.
- [47] G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. Experiment and theory in the casimir effect. *Contemporary Physics*, 47(3):131–144, 2006.
- [48] S. Breidenbach et al. Hadronic vacuum polarization correction to atomic energy levels. *arXiv:2209.03234 [quant-ph]*, 2022.
- [49] L. D. Luzio et al. New physics behind the new muon g-2 puzzle? *arXiv:2112.08312 [hep-ph]*, *Physics Letters B*, 829:137037, jun 2022.
- [50] A. Dasgupta and S. Rahmati. A note on vacuum polarisation and hawking radiation. *arXiv:1205.3805 [gr-qc]*, 2012.
- [51] S. Rahmati. *Vacuum polarization and Hawking radiation*. PhD thesis, Lethbridge, Alta.: University of Lethbridge, Dept. of Physics and Astronomy . . . , 2012.

- [52] J. C. Romao. Modern techniques for one-loop calculations. *Version*, 1:263, 2004.
- [53] O. Yudilevich. One-loop amplitudes. Master's thesis, Utrecht University, 2009.
- [54] C. Gnendiger et al. To d , or not to d : Recent developments and comparisons of regularization schemes. *arXiv:1705.01827*, *The European Physical Journal C*, 77(7), jul 2017.
- [55] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi. Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter. *Nuovo Cim. B*, 12(1):20–26, 1972.
- [56] M. Veltman et al. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44(1):189–213, 1972.
- [57] J Fv Ashmore. A method of gauge-invariant regularization. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 4(8):289–290, 1972.
- [58] V. Radovanovic. *Problem book in quantum field theory*. Springer, 2006.
- [59] R. L. Kronig. On the theory of dispersion of x-rays. *Josa*, 12(6):547–557, 1926.
- [60] B. A. Kniehl. Dispersion relations in loop calculations. *arXiv:hep-ph/9607255*, 1996.
- [61] D. Bardin and G. Passarino. *The standard model in the making: Precision study of the electroweak interactions*, volume 104. Oxford University Press, 1999.