

# MÉTODOS ANALÍTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA AUTO-ENERGÍA DEL ELECTRÓN EN QED

CRISTIAN ANDRES LOBO BONETH

Documento presentado al Programa de Física  
como requisito para optar por el título de Físico.

Director: Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas



Departamento de Física  
Facultad de Ciencias Básicas

Junio 2022

## Resumen

En este trabajo se realizó el cálculo de la auto-energía del electrón en electrodinámica cuántica al orden de un-loop utilizando el método diagramático basado en las reglas de Feynman, a partir del cual se pudo construir la amplitud de este observable físico. Debido a que se encontraron divergencias ultravioletas en las integrales que componen la amplitud, fue necesario aplicar un procedimiento de regularización dimensional que permitió aislar las singularidades en forma de polos simples y además separar la parte finita que contiene la información teórica necesaria para realizar predicciones físicas. Se usó la parametrización de Feynman para escribir la amplitud en términos de integrales escalares cuya solución es conocida analíticamente y depende de funciones especiales como la función gamma de Euler o la función logaritmo en el plano complejo. Finalmente, se implementó un código en el lenguaje simbólico *Wolfram Mathematica*, con ayuda de los paquetes *FeynArts* y *FeynCalc*, el cual permitió obtener una expresión analítica para la auto-energía del electrón que coincide con la encontrada por el método diagramático de Feynman salvo por algunas constantes que sin embargo se pueden absorber en las divergencias.

*Palabras clave*— Auto-energía del electrón, Diagramas de Feynman, Regularización Dimensional, Funciones de Green, Mathematica.

## DEDICATORIA

Con mucho cariño para mi hija,  
**María Gabriella**  
y mi compañera de vida,  
**María Fernanda.**

CRISTIAN A. LOBO B.

## Agradecimientos

En primer lugar dar gracias a Dios por permitirme culminar con éxito mi carrera de pregrado, a mis papás y hermanos que de una u otra manera estuvieron para mí en las situaciones más difíciles durante todo este largo camino, a mis suegros que siempre me tendieron la mano en este proceso. Agradecer enormemente a mi director Ph.D Edilson Alfonso Reyes Rojas por su gran ayuda, dedicación y paciencia durante todo este camino de mi tesis, pese a que su tiempo es limitado debido a la investigación y publicación en los temas más importantes de la física en la actualidad. A cada docente que estuvo en el desarrollo de mi carrera que gracias a ellos he podido culminar con gran éxito. A mi amigo Jaider Medina Yepes que desde un inicio siempre me inculcó la importancia de seguir estudiando, de escoger una carrera que me apasionara para luego poder ejercerla de la mejor manera. Reconocer el apoyo a ese grupo de abogados en especial a Eduardo José Duarte (Lalo), que vieron en mi el potencial para continuar con mi carrera y que siempre me brindaron la ayuda necesaria. A todos mis compañeros de estudio en especial a Fabian Barajas por su apoyo y colaboración, que aun cuando mis ocupaciones me restringían el tiempo de estudio, nunca me dejaron solo. Por último, a cada una de las personas que estuvieron durante este largo y enriquecedor proceso.

## Tabla de contenido

	Pag.
Resumen .....	I
DEDICATORIA .....	II
Agradecimientos .....	III
TABLA DE CONTENIDO .....	IV
1. Introducción.....	1
2. Teoría Cuántica de Campos .....	3
2.1 El campo de Klein-Gordon .....	12
2.2 Evolución temporal de los campos cuánticos .....	15
2.3 El propagador de Klein-Gordon .....	16
3. Ecuación de Dirac y Lagrangiano de la QED .....	21
3.1 Soluciones de la ecuación de Dirac .....	25
3.2 El campo del fotón .....	27
3.3 Lagrangiano de la QED .....	28
3.4 Diagramas de Feynman .....	30
3.5 Reglas de Feynman en QED .....	30
3.6 Teorema Óptico .....	33
4. Auto-energía del electrón en QED.....	42
4.1 Auto-energía en Mecánica Cuántica.....	42
4.2 Cálculo diagramático en QED a (1-loop) .....	48
4.3 Implementación en Mathematica .....	52
5. Conclusiones .....	59
Apendice. A. Notación, unidades y convenciones .....	60
A.1 Unidades Naturales .....	60
A.2 Métricas .....	61

Apendice. B. Cálculo de la función retardada de Green para el propagador de Klein-Gordon .....	62
Apendice. C. Cálculo de la Auto-energía en la teoría $\phi^3$ .....	67
Referencias .....	69

# 1. Introducción

El método diagramático de Feynman es una herramienta útil en la actualidad para realizar cálculos perturbativos en las teorías de campos cuánticos, han sido utilizados en el cálculo de distintos observables físicos entre los que se encuentran, la masa del electrón [1], la masa del bosón de Higgs [2, 3], las masas de los bosones W y Z de la interacción débil [4], el momento magnético anómalo del electrón [5] y del muon [6, 7], el cálculo de observables angulares como la correlación energía-energía (EEC) [8] y en el cálculo de la sección eficaz de distintos procesos de dispersión imponiendo la unitariedad de la matriz S [9]. Todos estos cálculos implican la evaluación de funciones de Green de cero puntos (burbujas del vacío), un punto (tadpoles), dos puntos (propagadores o auto-energías), tres puntos (vértices) y hasta cuatro puntos (boxes). Rutinas especializadas que permiten evaluar estas funciones de Green de manera perturbativa hasta el orden de dos-loop son bien conocidas [10, 11, 12].

Recientemente, debido a la precisión esperada en los experimentos que serán llevados a cabo en los aceleradores de partículas futuros, como el LHC, el ILC o el FCC, surgió la necesidad de calcular los mismos observables de forma teórica con una precisión que va aumentando e incluye evaluar diagramas de Feynman hasta el más alto orden perturbativo posible, que puede llegar a ser de incluso 5-loops dependiendo del observable. Las correcciones obtenidas a partir de los diagramas de Feynman no pueden ser evaluadas de forma analítica en la mayoría de los casos, sin embargo, ciertos métodos dispersivos pueden usarse como una herramienta poderosa para encontrar representaciones dispersivas que permite evaluar las integrales de Feynman obtenidas de forma numérica. Entre los códigos recientes que buscan cumplir este objetivo se encuentran TVID [13] para funciones de Green de cero y un punto y TVID2 [14] para auto-energías. Recientemente estos códigos siguen en desarrollo y se espera poder incluir en el futuro funciones de 3 y 4 puntos también.

Esta investigación está dividida principalmente en tres partes en las que se estudian de manera profunda las propiedades analíticas de las correcciones al propagador del electrón, comúnmente llamada auto-energía del electrón. En el capítulo dos se muestra el marco conceptual de la teoría cuántica de campos, donde se estudia el campo de Klein-

Gordon y su propagador. En el capítulo tres se encuentra el estudio de la ecuación de Dirac en la que está inmersa el campo de Dirac y las soluciones que se encuentran a su ecuación. Además, del análisis del Lagrangiano de la electrodinámica cuántica, pasando por las reglas y los diagramas de Feynman finalizando con el del teorema óptico en el que se describe un pequeño ejemplo de cómo se implementa para la solución de cálculos como la auto-energía del electrón. Finalmente, en el capítulo cuatro se encuentran los cálculos específicos para la auto-energía del electrón en Electrodinámica Cuántica (QED). En la primera parte de este capítulo se encuentra la motivación y la importancia a través del tiempo que tiene el cálculo de este observable físico, en la segunda parte está el cálculo diagramático en el cual se utilizan los diagramas y las reglas de Feynman para construir la amplitud del observable físico y realizar los cálculos correspondientes para llegar al resultado analítico. En la última parte de nuestra tesis se encuentra el cálculo de la auto-energía del electrón implementando el lenguaje de programación de `Mathematica` [15] con los paquetes de `FeynArts` [16] y `FeynCalc` [17].

El objetivo principal de nuestro estudio es analizar las propiedades analíticas del propagador del electrón al orden de un-loop en la QED para realizar el cálculo a través de los diagramas de Feynman y también a partir del código en el lenguaje de `Mathematica` obtener una expresión para este observable físico y finalmente comparar los resultados obtenidos para la auto-energía del electrón en la QED usando el método de los diagramas de Feynman y los resultados de la implementación en `Mathematica`.



## 2. Teoría Cuántica de Campos

Con el origen de la física moderna entre finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, el estudio de los fenómenos físicos se volvieron más interesantes para los científicos de la época, a tal punto, que llegaron a encontrarse con grandes problemas que parecían no tener solución. Investigando un poco más en el amplio mundo cuántico, notaron que era necesario el desarrollo de una teoría mas robusta que pudiera dar una solución real a ciertos problemas, esto condujo a la teoría cuántica de campos (TCC) la cual unificó la mecánica cuántica, la relatividad especial e introduce el concepto de campo cuántico. La mecánica cuántica fue desarrollada en la década de 1920 dando solución a problemas que la física clásica no podía explicar, “la radiación de cuerpo negro” [18], “el efecto fotoeléctrico” [19] y “el espectro de emisión discreto en los gases” [20], por otra parte, la relatividad especial fue formulada en 1905 por Albert Einstein [21], con el objetivo de describir el comportamiento de las partículas que alcanzan velocidades cercanas a la velocidad de la luz, entre sus postulados establece que dicha velocidad es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales. Por tanto, un experimento realizado en un marco de referencia inercial a una velocidad constante, debe tener los mismos resultados que en cualquier otro marco de referencia, de tal manera que ningún cuerpo con masa en reposo distinta de cero podrá viajar a la velocidad de la luz. También, se introduce el concepto físico de campos cuánticos, en el cual las perturbaciones presentadas en dichos campos corresponden a las partículas fundamentales como los leptones, los quarks y los bosones [22].

La TCC es de gran importancia en la actualidad. Sus bases están desarrolladas en la física moderna, hoy en día es de gran ayuda y provee herramientas en problemas de física nuclear, física atómica, física de la materia condensada y astrofísica [22]. Como consecuencia de los aportes a las diferentes ramas de la física en los que incursiona la TCC, se podría pensar que es bastante compleja, pero los conceptos e ideas centrales de la teoría son de alguna manera simples y en ocasiones intuitivos, debido a las múltiples herramientas que se utilizan. Los diagramas de Feynman, el grupo de renormalización y las transformaciones de simetría son algunos ejemplos de estas herramientas. Los cálculos que se van a desarrollar durante este trabajo han adoptado las siguientes convenciones del sistema de unidades naturales,  $\hbar = 1$  y  $c = 1$ , por lo

que las constantes fundamentales no aparecen en la ecuaciones, las convenciones usadas se encuentran en el Apéndice A.1.

Desde la mecánica clásica hasta la teoría de campos cuánticos existen los conceptos de partícula y de campo, este último asociado a la interacción de las partículas con el entorno. Las partículas en mecánica clásica son una abstracción donde toda la masa del cuerpo se centra en un punto, el centro de masa (c.m.), y por lo tanto las podemos asociar a las piedras, pelotas, autos, etc., que describen una dinámica con ciertas características físicas. Por otro lado, también se definen diferentes campos en la física clásica: el campo electromagnético y el campo gravitacional los cuales nos ayudaban a representar las interacciones fundamentales asociadas en este caso con la fuerza eléctrica, la fuerza magnética y la fuerza gravitacional. Los campos se pueden entender como perturbaciones que se realizan en el espacio, el cual genera algún tipo de fuerza, que finalmente interactúa con las partículas en aquellos lugares donde no es nulo el campo. A partir del estudio y desarrollo de la TCC, se pudo aclarar que estos dos conceptos, aunque parezcan muy alejados en su significado, están conectados. El principio de complementariedad desarrollado por Bohr [23], nos posibilita la unificación de estos dos conceptos, en tanto podemos afirmar que las partículas y los campos son visiones complementarias pero que están enmarcados dentro de una misma realidad. De esta manera, los campos cuánticos están asociados con un tipo de partícula en específico, el campo electromagnético tiene asociada una partícula la cual conocemos como fotón, el campo gravitacional tiene asociada su partícula hipotética la cual se denominó gravitón y de manera análoga existe un campo cuántico correspondiente en el caso de los electrones, neutrinos y quarks [24].

La teoría de campo más exitosa en la actualidad es la QED que estudia la interacción entre los electrones, positrones y fotones. Su formulación parte de las ecuaciones de Maxwell y también de la ecuación de Dirac, imponiendo la invarianza de Lorentz para respetar el principio de relatividad de Einstein. Las soluciones a estas ecuaciones nos permiten predecir con gran precisión diversos fenómenos dentro de un rango macroscópico y hasta el rango del radio de un protón. El cálculo teórico más preciso realizado en la actualidad, proviene de hecho de la QED, y corresponde a la predicción del momento magnético del electrón, que tiene un acuerdo de 12 cifras significativas con el resultado experimental [6].

Para adentrarnos un poco en los cálculos que se realizan comúnmente en la QED, revisemos superficialmente el cálculo de la sección transversal de la aniquilación de un electrón y un positrón, que generan un par de leptones, en este caso muones. El experimento se realiza de tal forma que un haz de electrones colisiona inelásticamente contra un haz de positrones para producir muones y anti-muones. La cantidad que se va a medir en este caso es la sección transversal en función de la energía del centro de masa y el ángulo  $\theta$  relativo entre los electrones que ingresan y los muones que salen, como se observa en la Figura 2.1.

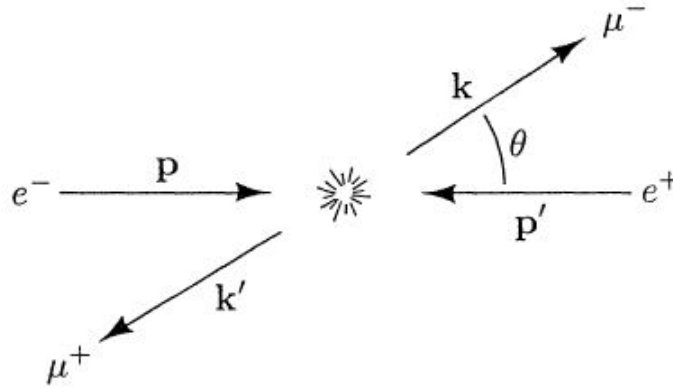


Figura 2.1: Proceso de aniquilación  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , en el marco del centro de masa [22].

El cálculo lo realizamos en el sistema c.m. donde los momentos satisfacen:

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{p} \quad ; \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{k}. \quad (2.1)$$

Por otro lado, consideramos una energía  $E$  lo suficientemente grande en comparación con la masa del electrón o del muon, de tal manera que:

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = E \equiv E_{\text{cm}}/2. \quad (2.2)$$

Como los fermiones (electrones, positrones y muones) tienen spin  $1/2$ , se debe especificar cual será la orientación del spin. En el experimento los haces de electrones y positrones no están polarizados y los detectores de muones tampoco detectan su polarización, por lo que se debe promediar la sección transversal sobre el spin de los electrones y positrones. La sección transversal diferencial para este proceso, independientemente de

las orientaciones del spin, para  $k$  dentro de un ángulo sólido  $d\Omega$  se denota como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2} \cdot |\mathcal{M}|^2, \quad (2.3)$$

donde  $\mathcal{M}$  es la amplitud de probabilidad para que ocurra el proceso (análoga a la amplitud de dispersión en cuántica no relativista). La sección transversal se estudiará con mas detalles en el próximo capítulo. De acuerdo con la QED los problemas de dispersión no se pueden calcular con exactitud, es por eso, que se recurre a una teoría de perturbaciones, la cual permite que la sección eficaz se escriba como una serie perturbativa, donde los primeros términos de la serie se evalúan para dar una expresión aproximada de la amplitud  $\mathcal{M}$  de que este suceso pueda ocurrir.

Una forma de visualizar de manera elegante esta expansión es mediante el método de los diagramas de Feynman. Estos diagramas representan las interacciones durante un proceso de dispersión. Al menor orden perturbativo, donde solo se considera el primer término de la serie, basta con considerar el diagrama de Feynman que se puede observar en la Figura 2.2.

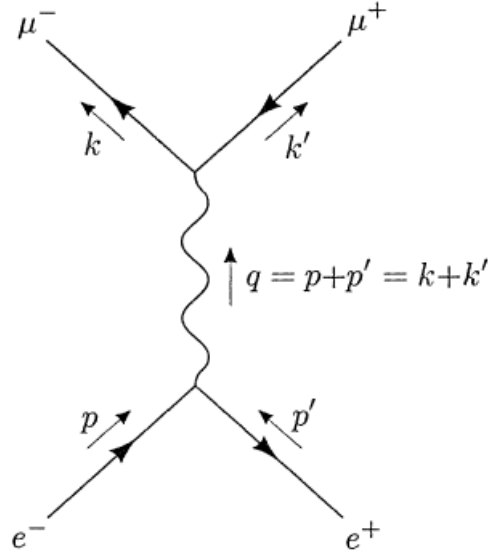


Figura 2.2: Diagrama de Feynman al orden más bajo contribuyendo a la sección transversal del proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . En este orden, el único estado intermedio posible es un fotón ( $\gamma$ ) [22].

En la teoría de perturbaciones de la mecánica cuántica, se puede calcular la amplitud  $\mathcal{M}$  de un proceso, a primer orden, de la forma:

$$\langle \text{estado final} | H_I | \text{estado inicial} \rangle, \quad (2.4)$$

donde  $H_I$  es el Hamiltoniano de interacción. En este caso el estado inicial es  $|e^+e^- \rangle$  y el estado final es  $\langle \mu^+\mu^- |$ . Cabe recordar que el Hamiltoniano acopla los electrones a los muones a través del campo electromagnético (fotones) y no de forma directa. Reemplazando nuestros valores para los estados inicial y final, obtenemos una segunda expresión:

$$\mathcal{M} \sim \langle \mu^+\mu^- | H_I | \gamma \rangle^\mu \langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle_\mu. \quad (2.5)$$

Esta es la manera en que se puede describir de una forma heurística la contribución a  $\mathcal{M}$  del diagrama de Feynman en la Figura 2.2. Las líneas externas de los electrones corresponden al factor  $|e^+e^- \rangle$ ; las líneas externas de los muones corresponden al factor  $\langle \mu^+\mu^- |$ . Los vértices corresponden a  $H_I$ , y la línea interna del fotón corresponde al operador  $|\gamma \rangle \langle \gamma |$ . Ya sabemos que el fotón es una partícula vectorial de cuatro componentes, por tal motivo se han añadido los índices ( $\mu$ ), de aquí que hay 4 posibles estados intermedios, uno para cada componente y de acuerdo a las reglas de la teoría de perturbaciones se deben sumar todos los posibles estados. De esta manera la suma en la Ec. (2.5) toma la forma simple de un sencillo producto punto de cuadvectores, como consecuencia la amplitud  $\mathcal{M}$  será un escalar invariante de Lorentz, siempre y cuando se cumpla que cada término de la Ec. (2.5) sea un cuadvector.

Con el objetivo de calcular la amplitud  $\mathcal{M}$  es necesario realizar el cálculo del elemento matricial  $\langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle$  considerando las siguientes orientaciones de spin:

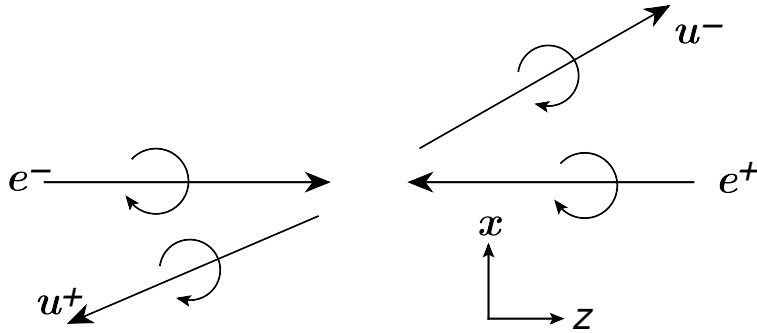


Figura 2.3: Posible conjunto de orientaciones. El electrón y el anti-muon son dextrógiros, mientras que el positrón y el muon son levógiros.

Como consecuencia se obtiene la siguiente amplitud:

$$\mathcal{M}(RL \rightarrow RL) = e^2(1 + \cos\theta), \quad (2.6)$$

donde  $R$  (Derecha) y  $L$  (Izquierda) representan las orientaciones de spin de las partículas iniciales y finales. Como era de esperarse si se considera  $\theta = 180^\circ$  este resultado se anula, por tanto un estado cuyo momento angular está en dirección  $+z$ , no se puede superponer con un estado con momento angular en dirección  $-z$ . Por otro lado, se pueden considerar los siguientes casos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(RL \rightarrow LR) &= e^2(1 - \cos\theta) \\ \mathcal{M}(LR \rightarrow RL) &= e^2(1 - \cos\theta) \\ \mathcal{M}(LR \rightarrow LR) &= e^2(1 + \cos\theta). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Los estados anteriores son los únicos cuatro estados que tienen contribuciones a la amplitud, de tal forma que las demás orientaciones de espín como por ejemplo (RR  $\rightarrow$  LL) son cero. Ahora, reemplazando estas expresiones en la Ec. (2.3), se llega a la sección eficaz diferencial en la cual se suman todas las contribuciones sobre el espín y se divide sobre el numero de contribuciones para nuestro caso es 4, es decir, se hace el promedio de las contribuciones:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 E_{c.m}^2} \left( \frac{1}{\#s} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{64\pi^2 E_{c.m}^2} \frac{1}{\#s} (|\mathcal{M}_{RL \rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{RL \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LR \rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{LR \rightarrow LR}|^2) \\ &= \frac{1}{64\pi^2 E_{c.m}^2} \frac{1}{\#s} (2e^4(1 + \cos\theta)^2 + 2e^4(1 - \cos\theta)^2) \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{c.m}^2} \frac{1}{\#s} ((1 + \cos\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2) \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{c.m}^2} \frac{1}{\#s} (2 + 2\cos^2\theta) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4E_{c.m}^2} (1 + \cos^2\theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$  es la constante de estructura fina. Integrando se obtiene la sección transversal total:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}. \quad (2.9)$$

Los resultados obtenidos en las Ec. (2.8) y Ec. (2.9) se aproximan a los valores experimentales en tan solo un 10% por tal motivo es una mala predicción teórica, debido a que no se incluyen todos los términos de la serie de perturbaciones. Las características cualitativas de las expresiones, la dependencia angular, el decrecimiento de la energía son datos muy importantes en los experimentos y por tanto como no son incluidos, difieren en un amplio porcentaje con los datos reales [22].

La TCC permite entonces dar una explicación concisa de cómo ocurren los procesos a escalas muy pequeñas, a través del cálculo de observables como la sección eficaz, para energías lo suficientemente grandes, de aquí nos surgen las siguientes preguntas. ¿Por qué se deben cuantizar los campos?, ¿Por qué no simplemente se cuantizan las partículas relativistas de la misma forma en la que se cuantizan las no relativistas?. Las respuestas a estas preguntas se deben a que, si nosotros elegimos una ecuación relativista de una sola partícula, la ecuación de Klein-Gordon, y miramos sus soluciones, nos damos cuenta que contienen inconsistencias, entre ellas estados con energías negativas. Por tal motivo, no se puede hacer un desarrollo físico a este tipo de problemas ya que no se puede asumir que un proceso relativista se pueda solucionar con una sola partícula. Por otro lado, cuando no se cuenta con suficiente energía para la creación de pares, aparecen lo que normalmente llamamos estados multipartículas, un ejemplo de ello, son los estados intermedios de la teoría de perturbaciones de segundo orden. De acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ , se puede tener una idea de estos estados existentes pero por periodos de tiempo demasiados cortos, y si aumentamos los órdenes en la teoría de perturbaciones podemos observar que se crean de manera aleatoria muchas partículas virtuales. De acuerdo con las ideas anteriores, la mecánica cuántica no relativista no es suficiente para representar los procesos que ocurren en la naturaleza como la creación y aniquilación de partículas (un fotón que crea un par positrón-electrón), el decaimiento de las partículas (un neutrón libre se desintegra en un protón, un electrón y un antineutrino electrónico), debido a que en todos los procesos de la mecánica cuántica el número de partículas debe ser conservativo. Otra razón por la que se debe recurrir a una nueva teoría, es que la mecánica cuántica no relativista describe procesos a bajas velocidades, es decir, que no puede solucionar problemas con partículas relativistas; este hecho genera que el propagador de la mecánica cuántica viole el principio de causalidad tal como se puede observar a continuación.

Consideremos la amplitud para una partícula libre que se propaga de  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}$ :

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (2.10)$$

De la mecánica cuántica no relativista  $H = \mathbf{p}^2/2m$ , reemplazando en la Ec (2.10) se tiene:

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} | \mathbf{x}_0 \rangle, \quad (2.11)$$

aplicando la relación de completitud para el momento lineal, se obtiene:

$$U(t) = \int d^3p \langle \mathbf{x} | e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (2.12)$$

Como el Hamiltoniano actúa sobre el ket  $|\mathbf{p}\rangle$  sacamos la función exponencial del producto escalar, debido a que este producto representa una onda plana en la representación de Dirac, de tal forma que:

$$U(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}. \quad (2.13)$$

La ecuación anterior se resuelve mediante la aplicación de la transformada de Fourier de una Gaussiana [22], y tenemos como resultado:

$$U(t) = \left( \frac{m}{2\pi it} \right)^{3/2} e^{im(x-x_0)^2/2t}. \quad (2.14)$$

La solución anterior es diferente de cero para cualquier valor que tome  $x$  y  $t$ , por tanto, predice que una partícula puede propagarse entre dos puntos del espacio en un tiempo lo suficientemente corto de tal forma que se viola el principio de causalidad, es decir, la partícula viajaría mas rápido que la luz en el vacío. Ahora, se podría pensar que utilizando la energía relativista pudiéramos dar solución a este problema, así que incluyendo esta energía  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ , la Ec (2.10) toma la forma:

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty p^2 dp e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\cos\theta} \end{aligned} \quad (2.15)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3} (2\pi) \int_0^\infty p^2 dp e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \left( \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\cos\theta} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty p^2 dp e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \left( \frac{e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\cos\theta}}{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \right)_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty p^2 dp e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \frac{1}{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} (e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} - e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty p^2 dp e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \frac{1}{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} (e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} - e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}) \quad (2.16) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty p^2 dp e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \frac{1}{ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} 2i \operatorname{sen}(p|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \frac{\operatorname{sen}(p|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \\
U(t) &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}.
\end{aligned}$$

La solución que acabamos de encontrar puede ser evaluada a través de funciones de Bessel, pero de nuevo se obtiene un resultado que viola la causalidad, debido a que la solución que tenemos a continuación es diferente de cero para cualquier valor que tome  $x$  y  $t$ :

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}, \quad (2.17)$$

de tal forma que tampoco la energía relativista es una candidata para la solución que buscamos. Se debe entonces encontrar un término de corrección para que esta propagación no viole ningún principio físico.

Lo maravilloso de la TCC es que no solo proporciona una manera más sofisticada de manejar estados de varias partículas y las transiciones entre los diferentes estados intermedios, sino que además resuelve el problema de la causalidad introduciendo el concepto de anti-partícula y explica de manera acertada la relación entre el spin y la estadística. Pero lo realmente importante de la TCC es que suministra las herramientas necesarias para el cálculo de diversas secciones transversales de dispersión, el tiempo de vida medio de las partículas y otras cantidades observables.

Por tal motivo se necesita construir un propagador que respete el principio de causalidad, imponiendo la invarianza de Lorentz y se debe definir en términos de campos cuantizados. A este proceso se le llama "segunda cuantización" y consiste en transformar las funciones de onda en operadores lineales que están obligados a satisfacer las relaciones de conmutación o anti-conmutación canónicas. En este capítulo vamos a tomar como ejemplo el campo de Klein-Gordon y su respectivo propagador.

## 2.1 El campo de Klein-Gordon

El campo más simple existente en la teoría cuántica de campos es el campo de Klein-Gordon, la idea es comenzar con una teoría clásica, es decir, un campo escalar real que está sujeto al siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.18)$$

donde el campo  $\phi(x)$  es solución de la ecuación de Klein-Gordon obtenida a partir del principio de mínima acción:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.19)$$

Posteriormente, se aplica la segunda cuantización al campo  $\phi(x)$ , lo que implica una transformación de un sistema con un número de grados de libertad finito, a un medio continuo. Describiendo el proceso de manera detallada, se tiene de la primera cuantización las siguientes relaciones de conmutación entre la posición  $q_i$  y el momento lineal  $p_j$ :

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= i\delta_{ij}; \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

De lo anterior podemos inferir que la posición y el momento no conmutan, es decir, que estos observables físicos no pueden ser medidos al mismo tiempo.

Para la segunda cuantización el procedimiento que se debe realizar es convertir la función de onda en un operador:

$$\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \hat{\phi}(x), \quad (2.21)$$

que satisface las siguientes reglas de conmutación canónicas:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $\pi(\mathbf{x})$ , es la densidad de momento. Debemos recordar que esta representación está en el cuadro de Schrödinger, por tanto solo aparecen las tres variables espaciales y la dependencia temporal no es incluida. Lo que se hace a continuación es realizar un cambio de base vectorial, de la base del espacio de las coordenadas a la base en el espacio de los momentos mediante una transformada de Fourier, de tal forma que expandiendo el campo clásico de Klein-Gordon, tenemos:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{p}). \quad (2.23)$$

Reemplazando el campo  $\phi(t, \mathbf{x})$  en la ecuación de movimiento Ec.(2.19):

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\mathbf{p}|^2 + m^2 \right] \phi(t, \mathbf{p}) = 0. \quad (2.24)$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi(t, \mathbf{p})}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{p}}^2 \phi(t, \mathbf{p}) = 0, \quad (2.25)$$

que es la ecuación que representa un oscilador armónico simple en el espacio de los momentos, con frecuencia:

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_{\mathbf{p}}, \quad (2.26)$$

esta frecuencia corresponde a la energía relativista de un oscilador armónico cuántico cuyo Hamiltoniano tiene la forma:

$$H_{OAC} = \frac{\pi^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_{\mathbf{p}}^2\phi^2. \quad (2.27)$$

En campos cuánticos es posible escribir  $\phi(\mathbf{x})$  y su momento canónico conjugado  $\pi(\mathbf{x})$ , como una serie de Fourier de ondas planas en los cuales los modos normales de oscilación

tienen coeficientes que son operadores escalera, aniquilación ( $a_{\mathbf{p}}$ ) y creación ( $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ ):

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.28)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \quad (2.29)$$

Los dos términos de cada integral son invariantes de Lorentz de tal modo que realizando el siguiente cambio  $\mathbf{p} = -\mathbf{p}$  podemos simplificar las expresiones, recordando que es válido ya que el Jacobiano de transformación es 1, solucionando las integrales y factorizando las expresiones anteriores de tal forma que:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.30)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.$$

Usando los campos anteriores, se pueden verificar las siguientes relaciones de conmutación:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (2.31)$$

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \left( [a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}] - [a_{\mathbf{p}}, a_{-\mathbf{p}'}^\dagger] \right) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')}, \quad (2.32)$$

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Un factor importante para nuestros cálculos consiste en exigir que el conmutador respete la invarianza de Lorentz. Sin embargo, la delta de Dirac no es un invariante de Lorentz, debido a que los volúmenes no lo son, cuando se les aplica un boost en alguna dirección se obtiene como resultado una contracción a lo largo de una de sus dimensiones. Lo que nos conduce a definir una nueva cantidad que se mantenga invariante con el fin de preservar la causalidad, en este caso para que el término sea invariante de Lorentz debe tener la siguiente forma [22]:

$$E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = E_{p'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}'). \quad (2.33)$$

Esto conduce a definir el estado de una partícula relativista con momento lineal  $\mathbf{p}$  y energía relativista  $E_{\mathbf{p}}$  de la siguiente manera:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle, \quad (2.34)$$

y por lo tanto:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2.35)$$

Este producto si es invariante de Lorentz debido a que incluye el producto de la delta de Dirac con la energía  $E_{\mathbf{p}}$ . Como consecuencia de esto, los estados se deben definir con el factor de normalización presentado en la Ec. (2.34).

Como ya se cuenta con los factores de normalización adecuados para que las cantidades cumplan con la invarianza de Lorentz, a continuación vamos a revisar la evolución temporal del campo de Klein-Gordon, es decir, pasamos del cuadro de Schrödinger al cuadro de Heisenberg y verificamos que la invarianza de Lorentz no se rompa al hacer la evolución.

## 2.2 Evolución temporal de los campos cuánticos

Como el campo cuántico es un operador lineal, evoluciona en el cuadro de Heisenberg de acuerdo con la siguiente transformación de similaridad:

$$\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0t}\phi(\mathbf{x})e^{-iH_0t}, \quad (2.36)$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano libre. Aplicando la condición de similaridad al campo  $\phi(\mathbf{x})$  explícitamente en la Ec. (2.30), obtenemos el siguiente resultado:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} ([e^{iH_0t}a_{\mathbf{p}}e^{-iH_0t}] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + [e^{iH_0t}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{-iH_0t}] e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \quad (2.37)$$

Teniendo en cuenta las siguientes transformaciones:

$$e^{iH_0t}a_{\mathbf{p}}e^{-iH_0t} = a_{\mathbf{p}}e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \quad (2.38)$$

$$e^{iH_0t}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{-iH_0t} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{iE_{\mathbf{p}}t}, \quad (2.39)$$

y reemplazándolas en la Ec. (2.37) obtenemos finalmente:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (2.40)$$

donde  $(p \cdot x)$  es el producto escalar Minkowskiano definido como:

$$p \cdot x = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \cdot (t, \mathbf{x}) = E_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.41)$$

De la Ec. (2.40) se observa que la invarianza de Lorentz se sigue preservando explícitamente después de la evolución debido a que el volumen de integración y los exponentes en los exponenciales son cantidades escalares.

### 2.3 El propagador de Klein-Gordon

Habiendo definido el campo de Klein-Gordon y sus propiedades de simetría, procedemos a construir un propagador que no viole el principio de causalidad. La amplitud de probabilidad de que una partícula vaya desde un punto  $y$  a un punto  $x$  en un tiempo  $t$  esta descrito por:

$$D(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.42)$$

Esta expresión no es la adecuada para describir el propagador ya que esta integral sigue violando el principio de causalidad. Para verificarlo, supongamos un intervalo espacio-temporal que involucra únicamente la dirección temporal, es decir,  $x^0 - y^0 = t$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$ , se tiene lo siguiente:

$$D(x - y) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{p^2 + m^2}t} \quad (2.43)$$

sea  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  y  $dE = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} dp$ , evaluando los límites y reemplazando se obtiene:

$$D(x - y) = \frac{4\pi}{8\pi^3(2)} \int_m^\infty dE \frac{p^2 \sqrt{p^2 + m^2}}{p \sqrt{p^2 + m^2}} e^{-iEt} \quad (2.44)$$

despejando  $p$  de  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  y reemplazando se tiene:

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \quad (2.45)$$

solucionando la integral se llega al resultado siguiente:

$$\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-imt}. \quad (2.46)$$

Como se nota en el cálculo anterior, no importa que valores arbitrarios tome el tiempo  $t$ , la probabilidad seguirá siendo distinta de cero.

Si se considera el caso en el que el intervalo espacio-temporal es únicamente espacial, es decir,  $x^0 - y^0 = 0$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}$ , la solución tiene la forma:

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} \\ &= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

para la solución de esta integral, se debe hacer la siguiente sustitución  $\rho = -ip$ , de tal manera que la integral se convierte en lo siguiente:

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{m^2 - \rho^2}}. \quad (2.48)$$

La integral anterior, posee una divergencia en el caso en el que  $\rho = \pm im$ . Extendiendo analíticamente la integral al plano complejo y con ayuda del teorema de los residuos, finalmente, la solución de la integral es:

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{m^2 - \rho^2}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-mr}. \quad (2.49)$$

De aquí se concluye que aunque se tomen puntos en el espacio que estén fuera del cono de luz, la probabilidad siempre es distinta de cero indicando que se viola el principio de causalidad. Por tal motivo, la causalidad no se debe abordar desde la perspectiva en la cual las partículas se propagan en intervalos espacio-temporales, sino que debemos evaluar si dos eventos espaciales son causales o no, lo que nos conduce a calcular el

conmutador entre los campos para distinguir si la medida de uno afecta al otro, en otras palabras, si el conmutador se anula en  $(x - y)^2 < 0$  la causalidad es preservada. Calculando el conmutador se tiene [22]:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \\
&\quad \times [(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), (a_{\mathbf{q}} e^{-iq \cdot y} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot y})] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \\
&= D(x - y) - D(y - x).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Como cada término en la última línea a la derecha de (2.50) es invariante de Lorentz, se puede realizar la transformación  $(x - y) \rightarrow -(x - y)$  de tal forma que los dos términos son iguales y por tanto se cancelan, conservando así la causalidad. Para el caso en que  $(x - y)^2 > 0$  el valor del conmutador es distinto de cero porque la partícula se esta propagando dentro del cono de luz y no hay una transformación que pueda hacer que  $(x - y) \rightarrow (y - x)$ .

Ahora se va a calcular la función retardada de Green y verificar que su resultado es el mismo del conmutador que se ha calculado en la Ec. (2.50). La función retardada de Green en un espacio cuatridimensional se escribe de la siguiente manera:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \tag{2.51}$$

La integral anterior posee divergencias en  $p_0 = \pm E_p = \pm \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . Por tal motivo, debemos hacer una extensión analítica de la integral de tal forma que se puedan desplazar las singularidades por debajo del eje real en el plano complejo como se muestra en la Figura 2.4:



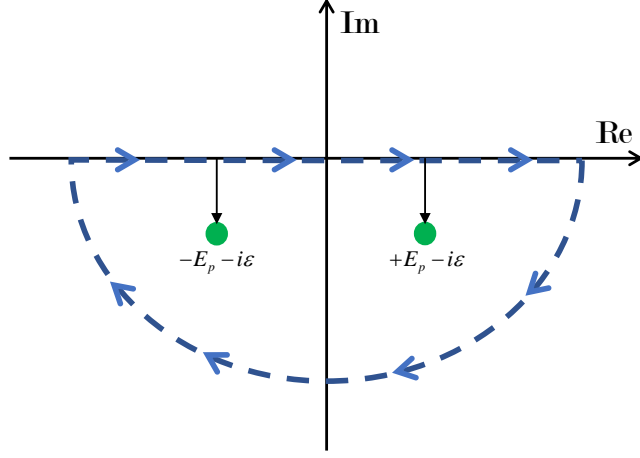


Figura 2.4: Polos desplazados por debajo del eje real una distancia  $\epsilon$ , dicha distancia debe cumplir que  $\epsilon \rightarrow 0$ .

posteriormente utilizando el teorema de los residuos de Cauchy para  $x^0 > y^0$  obtenemos:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}). \quad (2.52)$$

(El cálculo explícito de la Ec. (2.52) se encuentra en el Apéndice B). De aquí se concluye que la función retardada de Green es igual al resultado obtenido en la Ec. (2.51), por tanto, la solución de la función retardada de Green corresponde con el propagador de Klein-Gordon.

Existen diferentes prescripciones para evaluar la función de Green, sin embargo, la más representativa para nosotros y que posee gran significado físico es la prescripción de Feynman, la cual desplaza las divergencias asociadas a las energías positivas de las partículas por debajo del eje real, mientras que las divergencias de energías negativas asociadas a las antipartículas son desplazadas por encima del eje real como se muestra en la Figura 2.5.



### 3. Ecuación de Dirac y Lagrangiano de la QED

La manera para llegar a la ecuación de Dirac es por medio de la ecuación de Klein-Gordon, de tal forma que haremos una reconstrucción de esta ecuación. Usando la definición de cuadri-momento:

$$P^\mu = (\gamma m, p_x, p_y, p_z), \quad (3.1)$$

donde la primera componente es la energía mientras que el factor de Lorentz  $\gamma$  corresponde a:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (3.2)$$

Se puede construir un escalar, es decir, una cantidad que es invariante antes las transformaciones de Lorentz a partir del producto escalar:

$$P^\mu P_\mu = P \cdot P. \quad (3.3)$$

Ahora, si estamos en el centro de masa de una partícula elemental, es decir, estamos sobre la partícula, y recordando también que  $\gamma$  en el centro de masa es 1, entonces el cuadri-momento toma la forma:

$$P_{c.m}^\mu = (m, 0, 0, 0) \Rightarrow P_{c.m} \cdot P_{c.m} = m^2. \quad (3.4)$$

Desde el punto de vista de un observador, obtenemos lo siguiente:

$$P^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) \Rightarrow P \cdot P = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2. \quad (3.5)$$

En la métrica de Minkowski los productos escalares son invariantes, es decir, que no importa el marco de referencia las medidas deben ser invariantes, por tal motivo, se deduce que:

$$P_{c.m} \cdot P_{c.m} = P \cdot P. \quad (3.6)$$

Como consecuencia de esto:

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2, \quad (3.7)$$

que corresponde a la energía relativista de la partícula. Aplicando la primera cuantización a la ecuación anterior, la cual establece que

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.8)$$

se obtiene una ecuación de operadores lineales:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = (-i\nabla)^2 + m^2, \quad (3.9)$$

que puede reescribirse como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 = 0, \quad (3.10)$$

o en forma covariante en términos de la cuadri-derivada  $\partial_\mu$ :

$$\partial^\mu \partial_\mu + m^2 = 0. \quad (3.11)$$

Aplicando la Ec. (3.11) sobre una función de onda,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \psi(x) = 0, \quad (3.12)$$

llegamos a la ecuación de Klein-Gordon. Esta ecuación tiene una inconsistencia, posee una solución para estados de energía negativa debido a la estructura de la energía relativista ( $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ). Esto representa un problema para la mecánica cuántica donde se deben considerar todas las soluciones posibles. Dirac abordó este problema reescribiendo la ecuación de Klein-Gordon como el producto de dos ecuaciones lineales, es decir:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi = 0. \quad (3.13)$$

Evaluando explícitamente lo anterior, encontramos

$$[\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu + im(\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu) + m^2] \psi = 0. \quad (3.14)$$

Para obtener de nuevo el operador de Klein-Gordon se deben cumplir las siguientes identidades:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu; \quad \gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu = 0; \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

Estas relaciones son satisfechas si los factores gamma son matrices que cumplen el álgebra de Clifford  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ . Las matrices  $\gamma^\mu$  fueron descritas por Dirac y tiene la siguiente representación en 4 dimensiones:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli asociadas al spin de la partícula

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Finalmente la ecuación de movimiento de Dirac para un electrón libre o en general para un fermión de spin  $\frac{1}{2}$  con energía positiva es:

$$\boxed{(i\cancel{\partial} - m)\psi(\mathbf{x})=0}, \quad (3.18)$$

donde se usó la notación de Feynman ( $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ ), mientras que la solución de la ecuación:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

es un espinor de 4 componentes complejas de números grasmanianos que no conmutan.. Por otro lado, se le dice espinor porque transforma de manera distinta bajo transformaciones de Lorentz en comparación a los cuadvectores.

Adicionalmente, la ecuación adjunta de Dirac se puede encontrar aplicando el adjunto a la Ec. (3.18), dando como resultado:

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\psi(x)^\dagger = 0. \quad (3.20)$$

Usando las propiedades de las matrices gamma se tiene:

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) - m\psi(x)^\dagger = 0, \quad (3.21)$$

lo que conduce finalmente a:

$$\boxed{i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0}, \quad (3.22)$$

donde se define el campo adjunto de Dirac como  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . De las ecuaciones (3.18) y (3.22) se puede verificar que la cuadri-corriente  $j^\mu$  se conserva y por lo tanto satisface la ecuación de continuidad  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , siendo  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ . Bajo transformaciones de Lorentz la cuadri-corriente transforma como un cuadri-vector de la siguiente manera:

$$j^\mu \rightarrow j'^\mu = \Lambda_\nu^\mu j^\nu, \quad (3.23)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz de Lorentz, por tanto la relación de continuidad es un invariante de Lorentz ya que es el producto Minkowskiano de dos cuadri-vectores

$$\partial_\mu j^\mu \rightarrow \partial'_\mu j'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\nu \Lambda_\nu^\mu j^\nu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \Lambda_\nu^\mu j^\nu = \partial_\nu j^\nu. \quad (3.24)$$

Concluimos que el bilineal  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  es también un cuadri-vector. Además, de la componente temporal, podemos observar que la probabilidad es positiva ya que  $j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi > 0$  como es de esperarse. Cualquier corriente fermiónica en la TCC es de la forma  $\bar{\psi} \Gamma \psi$ , donde  $\Gamma$  es una matriz  $4 \times 4$ . Para poder construir la Lagrangiana de interacción de la QED y otras teorías físicas más avanzadas, por ejemplo, el modelo electro-débil, se deben usar solo aquellas corrientes que tienen propiedades de transformación de Lorentz definidas. Esto requiere la definición de dos nuevas matrices  $\gamma^5$  y  $\sigma^{\mu\nu}$  que satisfacen:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \stackrel{\text{Dirac rep.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \\ \sigma^{\mu\nu} &\equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

El bilineal  $\bar{\psi} \Gamma \psi$  transforma covariantemente si  $\Gamma$  es una de las matrices dadas en la Tabla 3.1 que se encuentra a continuación. En el mismo cuadro se muestran las propiedades de transformación de  $\bar{\psi} \Gamma \psi$  así como el número de grados de libertad independientes.

$\Gamma$	Transforma como	Rango	# de componentes
1	escalar	0	1
$\gamma^\mu$	vector	1	4
$\sigma^{\mu\nu}$	tensor	2	6
$\gamma^5\gamma^\mu$	vector axial	3	4
$\gamma^5$	pseudo-escalar	4	1

Tabla 3.1: Covariantes bilineales

El número total de componentes son 16, esto significa que el conjunto de matrices  $\{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5\}$  forma una base completa para cualquier matriz  $4 \times 4$ . Estas corrientes  $\Gamma$  se denominan covariantes bilineales en la teoría de Dirac.

Con la construcción de la ecuación de Dirac vamos a calcular cuales son las soluciones y que representan físicamente.

### 3.1 Soluciones de la ecuación de Dirac

En la representación coordenada el cuadri-momento satisface:

$$P_\mu = i\hbar\partial_\mu \Rightarrow (E, \mathbf{P}) = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (3.26)$$

de tal manera que la ecuación de Dirac en el espacio de los momentos, se escribe de la forma:

$$(P_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (3.27)$$

En forma matricial esto puede escribirse explícitamente como:

$$\begin{aligned} (E\gamma^0 - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m)\psi &= 0, \\ \begin{pmatrix} E - m & -\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Las matrices anteriores están escritas en bloques de matrices  $2 \times 2$ , donde  $\sigma$  representa las matrices de Pauli. De lo anterior podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(E - m)\phi - (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi = 0, \quad (3.29)$$

$$(\mathbf{P} \cdot \sigma)\phi - (E + m)\chi = 0. \quad (3.30)$$

De la ecuación (3.29) despejamos  $\chi$ :

$$\chi = \frac{\mathbf{P} \cdot \sigma}{E + m}\phi, \quad (3.31)$$

imponiendo el siguiente límite cinemático  $E \geq m > 0$ , es decir, que se toma el factor de energía positiva condicionando así que el espinor no diverja. Ahora, la ecuación (3.31) nuevamente la reemplazamos en (3.29):

$$(E - m)\phi - \frac{(\mathbf{P} \cdot \sigma)(\mathbf{P} \cdot \sigma)}{E + m}\phi = 0, \quad (3.32)$$

entonces:

$$(E - m)\phi - \frac{\mathbf{P}^2}{E + m}\phi = 0, \quad (3.33)$$

multiplicamos por  $(E + m)$  a ambos lados:

$$\begin{aligned} (E - m)(E + m)\phi - \mathbf{P}^2\phi &= 0, \\ (\partial^\mu \partial_\mu - m^2)\phi &= 0, \\ (\square - m^2)\phi &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\square$  es el operador D'Alembertiano, llegando así a la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución tiene la forma

$$\phi = Nu(\sigma)e^{-i(Et - P \cdot x)}, \quad (3.34)$$

siendo  $N$  una constante de normalización, de manera que la solución para una partícula libre con energía positiva queda definida como

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\mathbf{P} \cdot \sigma}{E + m}\phi \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} u_\sigma \\ \frac{\mathbf{P} \cdot \sigma}{E + m}u_\sigma \end{pmatrix} e^{-i(Et - p \cdot x)}. \quad (3.35)$$

De manera análoga, despejamos  $\phi$  de (3.29):

$$\phi = \frac{\mathbf{P} \cdot \sigma}{(E - m)}\chi. \quad (3.36)$$



Para este caso  $E \neq m$  por tanto los valores que podría tomar  $E$  serían entre  $-E \leq m < 0$ , es decir, valores negativos. Operando de manera similar al primer caso de energía positiva se obtiene la siguiente solución:

$$\chi = N v_\sigma e^{i(Et+p \cdot x)}. \quad (3.37)$$

De manera mas detallada, se tiene:

$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{(E+m)} \chi \\ \chi \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{(E+m)} v_\sigma \\ v_\sigma \end{pmatrix} e^{i(Et+p \cdot x)}. \quad (3.38)$$

La anterior solución condujo a una interpretación de  $E$  por lo cual se llegó a la predicción teórica de las antipartículas, es decir, que las partículas no poseen energía negativa, sino que se están propagando hacia atrás en el tiempo debido a la transformación de inversión temporal, en otras palabras invirtiendo el movimiento de la partícula. Esta es la causa del signo (-) que se antepone al momento lineal en la ecuación (3.38).

Por tanto la solución general de la ecuación de Dirac, es la suma continua en los momentos de las soluciones tanto para las partículas  $u(\mathbf{p}, \sigma)$  como para las anti-partículas  $v(\mathbf{p}, \sigma)$ , multiplicadas por una función de onda  $e^{-ip \cdot x}$  acompañados de los operadores aniquilación y creación  $a$  y  $a^\dagger$  respectivamente, de tal manera que se obtiene:

$$\psi(x) = \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} [a(\mathbf{p}, \sigma) u(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) v(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x}], \quad (3.39)$$

además  $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}}$  es un factor de normalización con el cual se garantiza la invarianza de Lorentz de la medida.

### 3.2 El campo del fotón

El campo vectorial de partículas con espín 1 que representa al fotón es de gran importancia para la QED y forma parte de las interacciones relacionadas en el Lagrangiano, por tal motivo vamos a describir brevemente como se construye. El

campo del fotón satisface la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) A^\mu(x) = m^2 A^\mu(x), \quad (3.40)$$

donde  $A^\mu(x)$  es el cuadri-potencial de la QED. A esta expresión se le conoce como la ecuación de Proca sin fuentes, particularmente para el fotón, donde  $m=0$ , se tiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) A^\mu(x) = 0, \quad (3.41)$$

cuya solución es de la forma:

$$A^\mu(x) = N \epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}, \quad (3.42)$$

donde,  $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$  es un vector de polarización y  $(\lambda = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$  es un parámetro llamado helicidad, definido como la proyección del spin sobre el momento lineal.

De manera análoga al campo para el electrón, usando la segunda cuantización, el estado físico de un fotón libre se describe con el campo cuántico

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} \left[ \epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ipx} + \epsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) a^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{ipx} \right], \quad (3.43)$$

donde  $a$  y  $a^\dagger$  son de nuevo los operadores aniquilación y creación. Ahora que se tiene la formulación matemática para los campos del electrón y del fotón se hace necesario incluir la densidad lagrangiana la cual agrupa estos dos campos y permite saber cómo es la interacción fotón-electrón de la QED.

### 3.3 Lagrangiano de la QED

En física teórica, las teorías renormalizables en 4 - dimensiones en el espacio de Minkowski son las que permiten realizar predicciones teóricas. Usualmente al realizar correcciones cuánticas las amplitudes de dichas correcciones divergen, sin embargo si el Lagrangiano cumple con ciertas restricciones, estas divergencias pueden removerse a cualquier orden perturbativo. Para el Lagrangiano de la QED se debe satisfacer lo siguiente:

- i) La dimensión de la densidad Lagrangiana debe ser  $[\mathcal{L}] = m^4$ .
- ii) Los términos de interacción incluidos en el Lagrangiano deben ser invariantes de Lorentz por ejemplo  $(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi, \dots)$ .
- iii) Se debe conservar la carga eléctrica  $Q$ , la simetría gauge  $U(1)$  local cumple con esta condición ya que transforma los campos de la siguiente manera:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iQ\alpha(x)}\psi, \quad (3.44)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iQ\alpha(x)}, \quad (3.45)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{Q}\partial_\mu\alpha(x), \quad (3.46)$$

donde el parámetro  $\alpha(x)$  es dependiente de las coordenadas del espacio-tiempo.  $U(1)$  además cumple el teorema de Noether que enuncia que toda carga conservada implica una simetría. Por consiguiente, términos escalares como  $\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}, A_\mu A_\nu F^{\mu\nu}, \dots$  deben ser excluidos, siendo  $F^{\mu\nu}$  el tensor de campo electromagnético.

La QED describe la dinámica entre los electrones, positrones y fotones, por tanto un Lagrangiano que respete las condiciones anteriores debe ser de la forma:

$$\mathcal{L}_{QED} = c_1\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi + c_2\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi + c_3m\bar{\psi}\psi + c_4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.47)$$

Las constantes  $c_i$  se fijan de tal forma que usando el principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtengan las ecuaciones de movimiento de los campos  $\psi$  (Ec. de Dirac),  $A$  (Ec. de proca), etc. Finalmente el Lagrangiano de la QED es:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.48)$$

El Lagrangiano de la QED es el bloque de construcción para calcular secciones eficaces, anchos de decaimiento, masa de las partículas y otros parámetros de la QED. Por otra parte, a partir del Lagrangiano se obtienen las reglas de Feynman la cuales se van a tratar en la siguiente sección.

### 3.4 Diagramas de Feynman

Los diagramas de Feynman[25] describen las interacciones entre partículas y las contribuciones perturbativas en las amplitudes de dispersión de la TCC, mediante esquemas simbolizados por líneas, vértices y bucles. Estos esquemas están representados en un plano bidimensional, los fermiones como el electrón son interpretados por líneas rectas, los bosones como por ejemplo el fotón por líneas onduladas y las antipartículas, por líneas con dirección opuesta al eje temporal, que se entiende como partículas que viajan hacia atrás en el tiempo. Los vértices representan las interacciones entre las diferentes partículas que hacen parte del diagrama mientras que los bucles (o loops) representan las correcciones cuánticas virtuales a los observables [26].

### 3.5 Reglas de Feynman en QED

Los diagramas de Feynman se construyen a partir de una serie de reglas que el mismo autor describe y que se especifican a continuación, estas reglas están regidas por la Lagrangiana de interacción. En el caso de la QED los propagadores del electrón como del fotón están representados por:

$$\text{Propagador del electrón} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \longleftarrow \end{array} \quad = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.49)$$

$$\text{Propagador del fotón} \quad \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \longleftarrow p \end{array} \quad = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (3.50)$$

En la QED existe únicamente un vértice de interacción, para el caso del electrón se debe agregar un factor  $Q = -1$ , por tanto:

$$\text{Vértice de la QED} \quad \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \mu \\ \text{~~~~~} \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad = iQe\gamma^\mu. \quad (3.51)$$

Para las partículas y antipartículas fermiónicas entrantes y salientes, su representación diagramática tiene la forma:

Fermiones externos

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \text{---} \leftarrow p \end{array} = u(\mathbf{p}, \sigma) \quad (\text{Inicial}) \quad (3.52)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \text{---} \rightarrow p \end{array} = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \quad (\text{Final}). \quad (3.53)$$

Anti-fermiones externos

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \leftarrow p \text{---} \end{array} = \bar{v}(\mathbf{p}, \sigma) \quad (\text{Inicial}) \quad (3.54)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ p \text{---} \rightarrow \end{array} = v(\mathbf{p}, \sigma) \quad (\text{Final}). \quad (3.55)$$

En el caso de los fotones, estos son indistinguibles de su anti-partícula y tienen su representación en los diagramas de Feynman siguiente:

Fotones externos

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \leftarrow p \end{array} = \epsilon_\mu(p) \quad (\text{Inicial}) \quad (3.56)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ p \rightarrow \end{array} = \epsilon_\mu^*(p) \quad (\text{Final}). \quad (3.57)$$

Para ilustrar un poco más el uso de las reglas de Feynman, vamos a deducir la amplitud del diagrama que se muestra en la Figura 3.1:

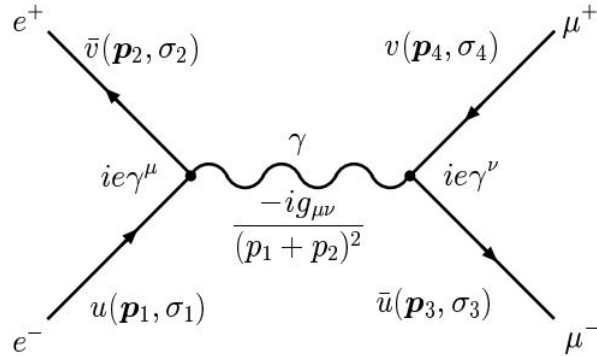


Figura 3.1: Proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  a nivel árbol en QED [27].

Este diagrama representa el proceso de aniquilación de un electrón y un positrón para dar un muón y un antimuón. Aplicando las reglas de Feynman, recorriendo cada línea fermiónica en sentido contrario al flujo fermiónico, la amplitud viene dada por:

$$-i\mathcal{M} = [\bar{u}(\mathbf{p}_3, \sigma_3) (ie\gamma^\nu) v(\mathbf{p}_4, \sigma_4)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2) (ie\gamma^\mu) u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)], \quad (3.58)$$

contrayendo una de las matrices gamma con el tensor métrico se tiene:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(\mathbf{p}_3, \sigma_3) \gamma_\mu v(\mathbf{p}_4, \sigma_4)] [\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)], \quad (3.59)$$

con esta expresión calculamos la probabilidad de ocurrencia para la dispersión con la regla de oro de Fermi:

$$\left( \begin{array}{c} \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' \\ \text{tasa de transición} \end{array} \right) = 2\pi |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2 \times \left( \begin{array}{c} \text{densidad de los estados} \\ \text{cuánticos finales} \end{array} \right), \quad (3.60)$$

donde  $T$  es el operador transición. Existe una analogía en la TCC para la ecuación anterior que consiste en realizar el siguiente cambio:

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle, \quad (3.61)$$

aquí  $S$  es la matriz de dispersión que nos permite conocer la amplitud de probabilidad y además tiene la relación entre los estados iniciales y finales de un proceso dispersivo. La matriz  $S$  se define como:

$$S = \mathbb{1} - iM, \quad (3.62)$$

operando los elementos matriciales se llega a:

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbb{1} | \mathbf{k} \rangle - i \langle \mathbf{k}' | M | \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - iM_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}, \quad (3.63)$$

siendo  $M$  la matriz de transición, para que esta matriz sea un invariante de Lorentz se define de la siguiente forma:

$$M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = (2\pi)^4 \delta^4(k' - k) \mathcal{M}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \prod_{i=\mathbf{k}',\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}}, \quad (3.64)$$

reemplazando (3.64) en (3.63) se tiene:

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - i(2\pi)^4 \delta^4(k' - k) \mathcal{M}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \prod_{i=\mathbf{k}',\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}}. \quad (3.65)$$

Teniendo en cuenta la regla de oro de Fermi podemos concluir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{M}|^2, \quad (3.66)$$

siendo  $\mathcal{M}$  la amplitud del proceso, que para un caso en específico en que dos partículas se dispersan creando dos nuevas partículas, la amplitud promedio debe ser de la forma:

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2}}_{\text{Prom. Spines iniciales.}} \overbrace{\sum \sigma_3 \sigma_4}^{\text{sum}} |\mathcal{M}|^2. \quad (3.67)$$

Conociendo las relaciones entre la matriz de dispersión  $S$  y la matriz  $\mathcal{M}$ , a través, de la regla de oro de Fermi es posible hacer el cálculo de la sección eficaz para el proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  cuya amplitud está dada por la Ec. (3.59), lo que conduce al valor teórico de la sección eficaz total, a partir del resultado en (2.8) se integra con respecto al ángulo sólido obteniendo así el siguiente valor:

$$\sigma \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}. \quad (3.68)$$

Este resultado es válido si el proceso se realiza en el sistema de centro de masa de las partículas y si la energía relativista en el c.m. ( $E_{cm}$ ) se considera mucho mayor que la masa en reposo del muon y el electrón [28].

### 3.6 Teorema Óptico

Existe un método adicional para el cálculo de amplitudes a partir de los diagramas de Feynman que es conocido como el teorema óptico, este método consiste en cortar el diagrama de Feynman como se muestra en la Figura 3.2 reduciendo así el problema debido a que solo se hace el cálculo del diagrama a nivel árbol. Este método además utiliza las reglas de Cutkosky que serán mencionadas más adelante. Por otra parte, el método dispersivo basado en el teorema óptico permite evaluar de forma más sencilla

las discontinuidades que se relacionan con la parte imaginaria de la amplitud ya que los propagadores de las partículas se convierten en funciones delta de Dirac a través de las reglas de Cutkosky. Además, ayuda en el desarrollo de las integrales ya que evita las singularidades infrarrojas presentes en el cálculo diagramático. Por otro lado, con base en las relaciones de dispersión obtenidas a partir de los teoremas integrales del análisis complejo, es posible obtener la parte real de la amplitud a partir de la parte imaginaria llegando a resultados equivalentes a los del cálculo diagramático. Aunque el método dispersivo simplifica la complejidad matemática en los cálculos, no es muy utilizado tradicionalmente, debido a que se requiere conocer la estructura analítica de la amplitud, que en la mayoría de los casos es desconocida para las relaciones de dispersión en ordenes perturbativos mayores a un-loop.

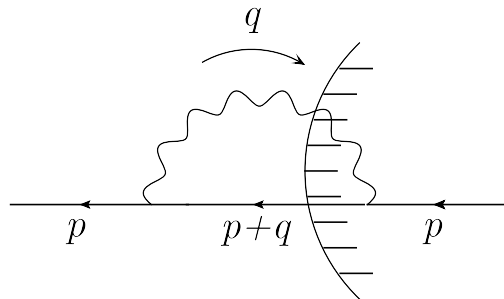


Figura 3.2: Corte del diagrama de la auto-energía del electrón

En la teoría de dispersión existe un teorema muy importante llamado el teorema óptico, que nos relaciona la sección transversal del objeto dispersor con la amplitud de dispersión, esta dispersión crea una superposición entre las ondas incidentes y dispersadas [29], como se muestra en la siguiente figura:



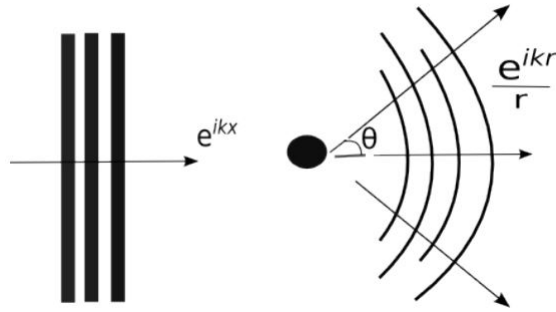


Figura 3.3: Una onda plana incidente  $e^{ikx}$  es dispersada por una partícula. A una distancia lejana la onda dispersada puede ser aproximada a una onda esférica  $e^{ikr}/r$  [29]

La idea principal del surgimiento del teorema óptico radica en que el índice de refracción de un medio depende del coeficiente de absorción. El primer científico en discutir estas afirmaciones acerca del coeficiente de absorción en la dispersión de la luz cuando se propaga a través de un medio fue Sellmeier en 1871. De igual manera Lord Rayleigh en ese mismo año describe este fenómeno de manera independiente, pero de una forma más cuantitativa. Luego de mucha investigación y con el pasar de los años en 1989 Rayleigh observa que el índice de refracción, que para nuestro caso denotaremos con la letra  $n$ , es linealmente dependiente con la amplitud de dispersión, que denotaremos con  $A(0)$  [30]. Por lo tanto:

$$n = 1 + 2\pi N k^{-2} A(0), \quad (3.69)$$

donde  $N$  es el número de partículas por unidad de volumen y  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ , el número de onda, mientras que  $\lambda$  es la longitud de onda. Tiempo después Rayleigh también mostró que el coeficiente de absorción es proporcional a lo que más tarde se conoció como la sección transversal de extinción  $\sigma_{ex}$ . A partir de la conservación de la energía se obtiene la sección eficaz total  $\sigma_{tot}$ , dada por:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{ex} = 4\pi k^{-1} \text{Im}A(0). \quad (3.70)$$

Para una nube de muchas partículas situadas al azar la Ec. (3.70) es la razón por la cual las secciones transversales de extinción son aditivas. Después de 1899, la teoría de la dispersión de la luz tuvo un gran desarrollo y consecuencia de esto el teorema óptico se establece de manera bastante explícita en 1908 por Mie el cual habla sobre la

dispersión de la luz por partículas esféricas, con esta idea los científicos Gans y Happel siguieron trabajando y citando a Mie, en 1909 [31].

En los años 1926 y 1927 los científicos Kronig y Kramers proponen que la causa de la radiación en un medio nos lleva a una relación de transformada de Hilbert de las partes imaginarias y reales del índice de refracción en función de la frecuencia. Posteriormente, Fenberng en su tesis doctoral y en su artículo [32] mostró por primera vez el uso de esta poderosa herramienta en la teoría cuántica de dispersión de partículas en la cual utilizó una derivación por el método de cambio de fase (Expansión de Faxen-Holtzmarl) que estaba restringida por un potencial esférico.

En 1937 Wheeler aportó una herramienta importante en el estudio de la dispersión que fue la matriz  $S$ , la cual demostró que era unitaria. En 1939 los científicos Bohr, Peierls y Placzek establecieron la Ec. (3.70) sin derivarla explícitamente y durante los 20 años siguientes dicha ecuación se podía encontrar en la literatura como la relación Bohr-Peierls-Placzek [33]. Como en esa época empezaba la segunda guerra mundial la comunicación entre los científicos estaba truncada por lo cual en 1943 aparece Heisenberg [34] de forma independiente y crea la matriz  $S$  además de la demostración de la unitariedad. Como consecuencia de la propiedad de unitariedad, derivó, por primera vez, el teorema óptico generalizado. Si llamamos  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$  el momento de las partículas incidentes,  $\mathbf{k}' = k'\hat{\mathbf{k}}$  el de las finales, y  $A_k(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}})$  la amplitud de dispersión elástica, entonces el teorema óptico generalizado es la ecuación:

$$\text{Im } A_k(\hat{k}', \hat{k}) = \left(\frac{k}{4\pi}\right) \int d\hat{k}'' A_k(\hat{k}', \hat{k}'') A_k^*(\hat{k}'', \hat{k}) \quad (3.71)$$

Después de la segunda guerra mundial, los trabajos relacionados con la dispersión de partículas y más específicamente con el teorema óptico fueron avanzando mucho más, de tal manera que en el año 1949 Wick lo extiende a partículas con espín  $\frac{1}{2}$ , el estudio específico está basado en neutrones [35]. En el año 1950 Lax incluye a esta herramienta procesos inelásticos y en 1954 Schiff extiende aún más esta área del teorema óptico donde obtiene una comprensión cualitativa de la sección transversal total en términos del principio de incertidumbre [36]. Para 1953 un artículo publicado por Glauber y Schomaker [37] en el cual explicaban la dispersión de electrones contenía el teorema óptico generalizado, pero sin el uso de la matriz  $S$ . Ninguno de los libros preguerra logran mencionar esta poderosa herramienta, incluso en libros como los de Messiah,

Gottfried y Sakurai aun lo nombran como “la relación Bohr-Peierls-Placzek”.

A partir del año 1952 se empieza a nombrar de manera formal el teorema óptico por los físicos que trabajaban en la física cuántica de partículas. Los científicos Bethe y Hoffman en 1955 lo nombran como “el llamado teorema óptico” [38] y es la primera referencia impresa que se encuentra con ese nombre. Por otro lado, Van de Hulst redescubre la Ec. (3.70) en 1949 para la dispersión de la luz, totalmente inconsciente de que ya era bien conocida tanto en óptica como en teoría de dispersión cuántica. La derivación de Van de Hulst del teorema óptico es, desde un punto de vista físico, muy agradable e intuitiva [39].

El 1957 Puzikov, Ryndin y Smorodinskii utilizaron la Ec. (3.71) para la construcción de la matriz de dispersión de un sistema de dos nucleones, lo cual pretendía calcular el número de experimentos necesarios para la determinación de los elementos de la matriz de dispersión elástica. Con ayuda de la condición de unitariedad se pudo demostrar que el número requerido de experimentos es igual al número de funciones complejas que ingresan a la matriz de dispersión [40]. Este análisis también fue realizado por el científico Klepikov en 1964 pero con un poco más de detalle. La finalidad de la investigación es considerar la Ec. (3.71) como una ecuación integral no lineal para la fase de amplitud de dispersión, siempre que la sección transversal diferencial estuviera descrita experimentalmente como una función del ángulo de dispersión [41].

Siguiendo en la línea de la física clásica, el teorema óptico tiene muchas aplicaciones que han sido de mucha ayuda para el desarrollo científico, proporciona una herramienta analítica para determinar algunas de las propiedades físicas de los objetos (es decir, forma, tamaño, concentración, densidad, absorción, conductividad, etc.), a partir del campo disperso [42, 43]. Tiene mucha utilidad en la revisión de la naturaleza no física de la absorción negativa en la dispersión pasiva lineal [44]. Por otra parte, el teorema óptico permite el cálculo de la amplitud de dispersión compleja en objetos esféricos y cilíndricos, que tiene como resultado el estudio de la retrodispersión acústica [45]. Finalmente, permite entender correctamente efectos físicos cómo la fuerza y torque de radiación sobre una esfera, a partir de la polarización circular producida por una onda electromagnética [46].

El teorema óptico en la mecánica cuántica, se puede generalizar para procesos elásticos e

inelásticos, lo que permite estudiar el comportamiento y las propiedades de las partículas microscópicas en diversos procesos de dispersión, por ejemplo, la extensión del teorema óptico en la dispersión de ondas no planas permite estudiar haces de naturaleza cuántica de Gauss y de Bessel [47]. En QED permite el cálculo de diversos observables físicos, así como sus correcciones cuánticas. Como ejemplos tenemos la masa del electrón y la polarización del vacío [48]. Esta tesis abordará el cálculo de la masa del electrón a través de diagramas de Feynmann y por medio del teorema óptico.

En la teoría cuántica de campos cuando se tiene una función de correlación de dos puntos la cual se expresa como una función analítica del cuadri-momento, observamos que esta función posee singularidades no aisladas y que estas se deben a los estados intermedios de las partículas. En la mecánica cuántica no relativista, la amplitud de dispersión tiene una discontinuidad en la parte imaginaria, de la cual podemos deducir que la parte imaginaria de la amplitud es proporcional a la sección transversal total.

$$2\text{Im} \left( \begin{array}{c} k_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ k_1 \quad p_1 \end{array} \right) = \sum_f \int d\Pi_f \left( \begin{array}{c} k_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ k_1 \quad f \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ f \quad p_1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ p_2 \end{array} \right)$$

Figura 3.4: El teorema óptico: la parte imaginaria de cualquier amplitud de dispersión, surge de una suma de contribuciones de todas las posibles partículas en estado intermedio [22]

En la figura se muestra un proceso para dos estados iniciales y dos estados finales, pero podrían ser igualmente estados asintóticos de una o varias partículas. La relación que representa los diagramas de la Figura 3.4 es:

$$2 \text{Im} \mathcal{M}(a \rightarrow b) = \sum_f d \prod_f M^+(b \rightarrow f) M((a \rightarrow f)) \quad (3.72)$$

donde  $a$  son los estados iniciales con cuadri-momentos  $k_1$  y  $k_2$ ,  $b$  son los estados finales con momentos  $p_1$  y  $p_2$ , mientras que  $\mathcal{M}$  es la amplitud de probabilidad de la producción de todos los posibles estados intermedios, representados con la letra  $f$  Proporcionando

los factores cinemáticos requeridos, tenemos que la sección eficaz diferencial es:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow p_f)|^2 (2\pi)^4 d^4 \left( k_1 + k_2 - \sum p_f \right). \quad (3.73)$$

Finalmente, integrando la Ec. (3.73) y haciendo  $k_i = p_i$  con  $i = 1, 2$ , obtenemos la forma estándar del teorema óptico:

$$\text{Im } \mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2) = 2E_{cm} P_{cm} \sigma_{tot}(k_1, k_2 \rightarrow \text{anything}), \quad (3.74)$$

donde  $E_{cm}$  es la energía total del centro de masa y  $P_{cm}$  es el momento de cualquiera de las partículas en el marco del centro de masa. La Ec. (3.74) nos relaciona la amplitud de dispersión con la sección transversal total de todos los posibles estados finales. Como la parte imaginaria de la amplitud de dispersión crea la atenuación de la onda al atravesar el objetivo, se deduce que es proporcional a la probabilidad de dispersión [22].

Cutkosky demostró que la parte imaginaria de la amplitud de probabilidad de dispersión está relacionada con las discontinuidades físicas. Para encontrar la discontinuidad de cualquier diagrama de Feynman se debe seguir el siguiente algoritmo [49, 50]:

- I. Se debe cortar el diagrama de todas las formas posibles, de modo que todos los propagadores cortados se pongan on-shell (dentro del cono de luz respetando causalidad) simultáneamente.
- II. Para cada corte, se reemplaza el propagador por:

$$1/(P^2 - m^2 + i\varepsilon) \rightarrow -2\pi i \delta(P^2 - m^2)$$

Luego se usan los teoremas integrales del análisis complejo para calcular las integrales de contorno obtenidas.

- III. Finalmente se suman las contribuciones de todos los cortes posibles.

Usando estas reglas de corte, es posible probar el teorema óptico a todos los órdenes en la teoría de perturbaciones [22]. Por consiguiente, para ilustrar de mejor manera la teoría dispersiva, se realizará el cálculo de la auto-energía en la teoría  $\phi^3$ . El Lagrangiano

viene dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{3!} \phi^3. \quad (3.75)$$

La auto-energía esta representada por el diagrama de la Figura 3.5:

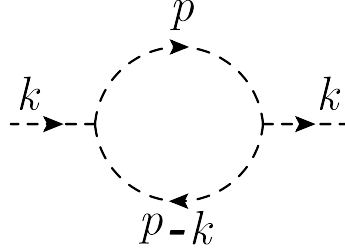


Figura 3.5: Auto-energía de un campo escalar en la teoría  $\phi^3$ .

Aplicando las reglas de Feynman se obtiene la amplitud correspondiente:

$$iT = (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (3.76)$$

El cálculo de la parte imaginaria se puede realizar de dos maneras, primero de la forma convencional a través de los diagramas de Feynman y después con las reglas de Cutkosky. El cálculo diagramático se encuentra en el Apéndice C.

Procediendo con el método de Cutkosky los propagadores deben ponerse on-shell para obtener la siguiente amplitud:

$$\begin{aligned} 2ImT &= -(i\lambda)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \theta(p^0) \theta(k^0 - p^0) \delta(p^2 - m^2) \delta((p-k)^2 - m^2) \\ &= \lambda^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 p' (2\pi)^2 \theta(p^0) \theta(k^0 - p^0) \delta(p^2 - m^2) \delta(p'^2 - m^2) \delta^4(p' - k + p), \end{aligned} \quad (3.77)$$

haciendo uso de la siguiente propiedad:

$$\int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) = \int d^3 p \frac{1}{2p^0}, \quad (3.78)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Im} T &= \lambda^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' \frac{1}{2p^0} \frac{1}{2p'^0} 2\pi \delta^4(p' - k + p) \\
2 \operatorname{Im} T &= \lambda^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \frac{1}{2p'^0} 2\pi \delta(k^0 - p^0 - p'^0),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

donde  $k = (\sqrt{s}, \mathbf{0})$ ;  $p = \left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \mathbf{p}\right)$ ;  $p' = \left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, -\mathbf{p}\right)$ , de tal manera que:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Im} T &= \lambda^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 4(|\mathbf{p}|^2 + m^2)} 2\pi \delta\left(\sqrt{s} - 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \frac{\delta\left(|\mathbf{p}| - \sqrt{\frac{s}{4} - m^2}\right)}{\frac{2|\mathbf{p}|}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}} \theta\left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \theta\left(1 - \frac{4m^2}{s}\right),
\end{aligned} \tag{3.80}$$

realizando el cambio  $s = k^2$ , llegamos a:

$$\operatorname{Im} T = \frac{\lambda^2}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \theta\left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right), \tag{3.81}$$

siendo este el mismo resultado de la Ec (C.9). De esta manera, cualquiera de los dos métodos utilizados es eficiente para obtener la expresión analítica de la auto-energía de un campo escalar al orden de un-loop. Estos procedimientos pueden extenderse también para otros cálculos mas complejos como el de la auto-energía del electrón que vamos a discutir en el siguiente capítulo.

## 4. Auto-energía del electrón en QED

En este capítulo se describirá de manera detallada el desarrollo del cálculo de la auto-energía del electrón en la QED. El estudio de este observable físico llevó a un cambio conceptual en la física teórica con la formulación de la mecánica cuántica. El cálculo se desarrolla haciendo uso del método diagramático basado en las reglas de Feynman, además, se implementó un script en el lenguaje `Wolfram Mathematica` con el cual también se logra obtener el mismo resultado analítico.

### 4.1 Auto-energía en Mecánica Cuántica

La energía que tiene un electrón cuando se encuentra en el vacío sin interacción, es decir, aislado de otras partículas, campos o cuantos de luz, se denomina auto-energía. Desde el punto de vista de la mecánica clásica la auto-energía del electrón está dada por:

$$W = T + \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV, \quad (4.1)$$

siendo  $T$  la energía relativista del electrón,  $E$  y  $H$  la intensidad de los campos eléctrico y magnético respectivamente y  $dV$  el diferencial volumétrico.

En el electromagnetismo la magnitud del campo eléctrico de un electrón libre es  $\frac{e}{r^2}$ , suponiendo que el electrón no tiene espín, es decir, el campo magnético es cero, la auto-energía se convierte en:

$$W \sim m + \frac{1}{8\pi} \int \frac{e^2}{r^4} dV \sim m + \frac{1}{8\pi} \int \frac{e^2}{r^2} dr. \quad (4.2)$$

Si el radio del electrón se considera cero esta integral diverge, pero cuando asumimos que el electrón tiene un radio  $a$ , la integral se puede resolver de la siguiente manera:

$$\int_a^\infty \frac{e^2}{r^2} dr = \frac{e^2}{a}. \quad (4.3)$$

Esta es la manera clásica de explicar porque el electrón no es una partícula puntual. Este observable físico en la mecánica clásica no tuvo ningún inconveniente para los científicos, pero con la llegada de la mecánica cuántica representó un gran problema.



Los primeros científicos en advertirlo fueron Pauli y Heisenberg en 1929 y 1930, poco tiempo después en 1939 el científico Weisskopf también da parte de la discusión. El cálculo de la auto-energía basado en la mecánica cuántica se convirtió en un problema de gran magnitud por las razones que vamos a discutir a continuación [51]:

- En el concepto de la mecánica cuántica el electrón se comporta como una partícula puntual, por tal motivo su radio debería ser cero, esto es debido a que el producto de las densidades de carga en dos puntos diferentes tienen el mismo comportamiento de una función delta de Dirac que tiene valor nulo en todos lados menos en un lugar donde ocurre su máximo. Esto significa que la probabilidad de encontrar densidades de carga en dos puntos diferentes para un electrón libre es cero, la carga debería concentrarse en un solo punto, pero esto conduce a divergencias lineales en la energía electrostática.
- Desde el punto de la mecánica cuántica, el electrón posee una propiedad intrínseca llamada espín. Esta propiedad puede ser observada con el famoso experimento de Stern-Gerlach [52]. Como consecuencia del espín, el valor del campo magnético  $H$  es distinto de cero, debido a que el espín induce un campo electromagnético alterno que debe ser incluido como parte del cálculo de la auto-energía.
- Para finalizar, la mecánica cuántica predice que el vacío puede polarizarse a través de fluctuaciones cuánticas del campo electromagnético. Debido a estas fluctuaciones la auto-energía desarrolla divergencias infrarrojas cuadráticas. Para un electrón de radio  $a$  en el límite infrarrojo donde  $a \rightarrow 0$  la energía de las fluctuaciones da como resultado

$$W_{fluct} \sim \frac{e^2 \hbar}{ma^2} \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

El primer cálculo que se realizó de la auto-energía del electrón fue a partir de la teoría de Dirac, esta teoría usa la ecuación de Dirac como base, pero omite todos los estados de energía negativos. Además, utiliza la teoría de perturbaciones para encontrar la contribución  $e^2$  a la auto-energía. Como consecuencia, el Hamiltoniano para la teoría

de Dirac viene dado por [51]:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H' \\ H &= \sum k a_{k\epsilon}^* a_{k\epsilon} + H_{\text{Coulomb}} + \beta m + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

siendo  $a^*$  y  $a$  los operadores creación y aniquilación respectivamente, además  $H'$  es el Hamiltoniano de Dirac en el límite no relativista,  $\mathbf{A}$  el vector potencial del electromagnetismo, mientras que  $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$  y  $\beta = \gamma^0$  satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \{\alpha^i, \beta\} = 0. \quad (4.6)$$

La primera contribución a la auto-energía del electrón es de segundo orden en la teoría de perturbaciones independiente del tiempo [53]:

$$\Delta W = \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle n | H' | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_n}, \quad (4.7)$$

donde  $|n\rangle$  son los estados no perturbados de  $H_0$  de tal forma

$$|\langle n | H' | 0 \rangle|^2 \sim \frac{e^2}{k}. \quad (4.8)$$

Si extendemos sobre todo el dominio, se tiene que:

$$\sum_n \rightarrow \int d^3k \sim \int_0^\infty k^2 dk, \quad (4.9)$$

encontrando finalmente:

$$\Delta W \sim \int \frac{k dk}{m}. \quad (4.10)$$

Este resultado tiene una divergencia cuadrática, un problema mucho mayor comparado con la teoría clásica en la cual se tiene una divergencia lineal. Waller en 1930 fue el primero en encontrar este resultado [53], luego Oppenheimer y Rosenfeld llegaron a las mismas conclusiones. Mas adelante, Weisskopf en 1934, dividió la energía total en una parte estática y otra parte dinámica. Con esto, pudo demostrar que la parte electrostática se constituía únicamente de una divergencia logarítmica, lo cual era mucho más fácil de resolver que la divergencia cuadrática encontrada anteriormente. Sin embargo, para la parte electrodinámica nuevamente se encontró con la divergencia cuadrática. Posteriormente Furry mostró con un cálculo similar que

para la parte electrodinámica solamente existe una divergencia de tipo logarítmica. Weisskopf rápidamente admitió que había cometido un error y publicó una corrección [54]. Los resultados mas importantes de este trabajo se muestran a continuación. Para una sola partícula libre se tiene:

$$\begin{aligned}
E^S &= \int_0^\infty dk + \text{finite terms} \\
E^D &= e^2 \left[ \frac{m^2}{p(m^2 + p^2)^{1/2}} \log \frac{(m^2 + p^2)^{1/2} + p}{(m^2 + p^2)^{1/2} - p} - 2 \right] \int_0^\infty dk \\
&\quad + \frac{2e^2}{(m^2 + p^2)^{1/2}} \int_0^\infty k dk,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde  $E^S$  es la contribución estática, mientras que  $E^D$  es la contribución dinámica. La divergencia de la auto-energía total es, por lo tanto, cuadrática. En la teoría relativista de Dirac se encontraron en cambio las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
E^S &= \frac{e^2}{(m^2 + p^2)^{1/2}} (2m^2 + p^2) \int_{k_0}^\infty \frac{dk}{k} + \text{finite terms} \\
E^D &= \frac{e^2}{(m^2 + p^2)^{1/2}} \left( m^2 - \frac{4}{3}p^2 \right) \int_{k_0}^\infty \frac{dk}{k} + \text{finite terms},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde la parte dinámica contiene únicamente divergencias logarítmicas. Por su parte Heisenberg repitió el cálculo y encontró los mismos resultados, pero adicionalmente argumento que no eran del todo satisfactorios debido a que no eran explícitamente invariantes de Lorentz. El resultado correcto debe ser una expresión de la forma [55]:

$$E^S + E^D \approx e^2 \sqrt{m^2 + p^2} \int \frac{dk}{k}, \tag{4.13}$$

ya que el término  $m^2 + p^2$  es un invariante relativista, a diferencia de la suma de las ecuaciones para  $E^S$  y  $E^D$  en (4.12). Esto se convirtió en el problema más importante de resolver de la QED. El mejor camino a la solución de este problema fue propuesto una vez mas por Weisskopf argumentando que la auto-energía era divergente logarítmicamente a todos los órdenes en la teoría perturbativa de Dirac. En 1936, Dirac, Heisenberg y Weisskopf ya habían resuelto el problema de la polarización del vacío utilizando la invariancia relativista y la renormalización de la carga eléctrica. Por otro lado, en los años 1937 y 1938 Kramers, Pauli y Fierz habían desarrollado un

procedimiento para deshacerse de las divergencias logarítmicas. Incluso, Weisskopf llegó a pensar que todos los procedimientos que tuvieran divergencias en electrodinámica podrían ser resueltos por medio de estos principios, pero no se logró concertar una prescripción correcta sobre el método para eliminar los infinitos. De hecho, en 1930 Heisenberg publicó un artículo sobre la auto-energía del electrón en donde argumenta que las soluciones a este problema están por fuera del modelo Minkowskiano 4-dimensional del espacio-tiempo. Muchos formalismos se seguían desarrollando de manera continua para tratar de dar una solución a este gran problema, incluyendo incluso sugerencias en la que se cambiaba el formalismo de los auto-estados y los campos cuánticos por un formalismo netamente basado en observables físicos como la matriz  $S$  que fue introducida en el año de 1937 por Wheeler [56]. Esta matriz contenía las amplitudes de dispersión de los observables y fue usada por Feynman para hacer cálculos al menor orden perturbativo. Posteriormente, Dirac sugirió que se introdujeran los estados de probabilidad negativa. Todas estas ideas fueron consideradas como alternativa a la búsqueda de una teoría de renormalización de las divergencias.

En la década de 1940, Schwinger junto con Feynman hicieron el formalismo para la QED que la transformó en una teoría muy sólida y libre de divergencias. Mientras que el método de Schwinger era bastante complicado, el de Feynman suministraba las herramientas para resolver los problemas relacionados con la radiación de una forma más sencilla. Podemos colocar en contexto como fue la reformulación que hizo Feynman de la mecánica cuántica mediante el famoso ejemplo de la doble rendija [57].

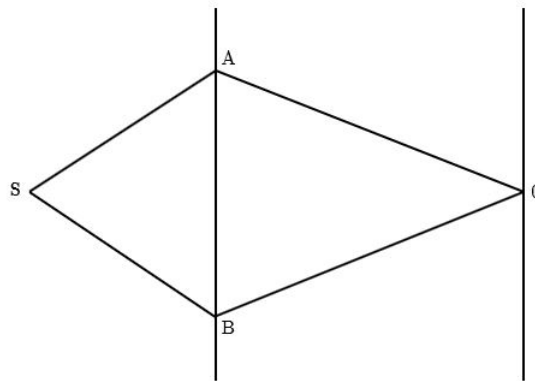


Figura 4.1: Experimento de la doble rendija [51].

Dicho experimento fue realizado por Young y consiste en enviar ondas de luz que atraviesan una pantalla en la que hay dos rendijas, detrás de la primera pantalla se posiciona una pantalla de observación como se ve en la Figura 4.1. Este experimento muestra que los dos rayos interfieren, dando una prueba suficiente del carácter ondulatorio de la luz. Por otro lado, en mecánica cuántica tenemos la dualidad onda-partícula, como consecuencia cuando se envían partículas de materia a través de estas rendijas encontraremos de igual forma un patrón de interferencia en la pantalla de observación que corresponde a una amplitud de probabilidad. Ahora, si se perforan mas rendijas en la pantalla o se agregan mas pantallas (ver Figura 4.2) se deben sumar las amplitudes de todos los posibles caminos que puedan seguir las partículas y elevarlas al cuadrado para obtener la probabilidad.

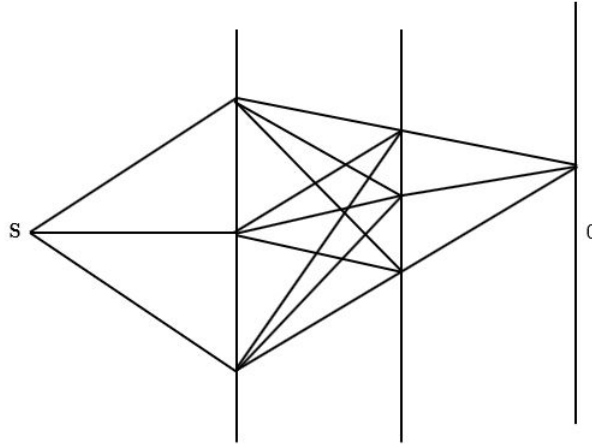


Figura 4.2: Posibles caminos que pueden tomar las partículas [51].

Cuando se realiza la suma sobre todos los posibles caminos, siendo la amplitud de un camino  $e^{iS}$  y  $S$  la acción clásica asociada al camino de la partícula, se encuentra que la probabilidad está dada por la siguiente expresión:

$$\int Dq(t) e^{i \int_0^T dt L(\dot{q}, q)}, \quad (4.14)$$

donde  $L$  es el Lagrangiano obtenido de restar la energía potencial de la energía cinética. El problema entonces se reduce a calcular la integral (4.14). Ahora bien, no es posible calcular esta integral de manera exacta por lo que su cálculo se hace usando métodos aproximados, expandiendo las amplitudes alrededor de constantes de acoplamiento que para el caso de la QED es la constante de estructura fina  $\alpha$  [58]. Como se había discutido

en el capítulo anterior, Feynman dio reglas para construir dichas amplitudes de los observables físicos y una prescripción para evaluar su valor teórico, en nuestro caso vamos a desarrollar el cálculo de la auto-energía del electrón para la QED de manera diagramática como se muestra a continuación.

## 4.2 Cálculo diagramático en QED a (1-loop)

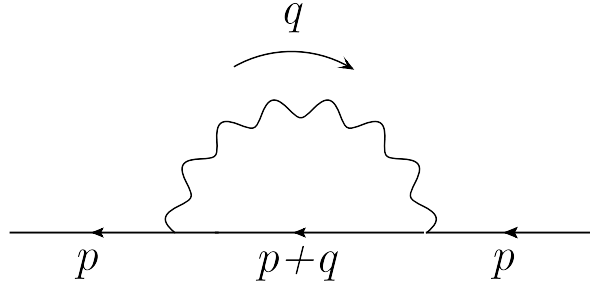


Figura 4.3: Diagrama de Feynman para la auto-energía del electrón

El diagrama de Feynman de la Figura 4.3 representa la auto-energía del electrón al primer orden perturbativo (a un loop). La amplitud para este proceso se construye a partir de las reglas de Feynman asociada a la lagrangiana de la QED, se debe tener en cuenta que para nuestro cálculo no se incluyen los campos de las líneas externas, por lo tanto, siguiendo este método obtenemos

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + \not{q} + m)}{(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \quad (4.15)$$

realizando un conteo de potencias de esta integral se obtiene que la amplitud en la Ec. (4.15) depende del momento de loop de la siguiente manera:

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + \not{q} + m)}{(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \propto \int_{-\infty}^{\infty} q dq. \quad (4.16)$$

la integral anterior presenta divergencias lineales ultravioletas (cuando  $q \rightarrow \infty$ ) en el espacio de 4 dimensiones, por lo que es necesario un procedimiento de regularización

dimensional donde la dimensión de la integral se reduce a  $d$  dimensiones:

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(\not{p} + \not{q}) + dm}{((p+q)^2 - m^2 + i\epsilon)(q^2 + i\epsilon)}, \quad (4.17)$$

siendo  $d = 4 - 2\varepsilon$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$  y donde hemos usado las siguientes relaciones tomadas del álgebra de Dirac en  $d$  dimensiones:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= d, \\ \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu &= (2-d)\gamma^\rho, \end{aligned} \quad (4.18)$$

para simplificar la amplitud. Ahora, usando la parametrización de Feynman

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xD_1 + (1-x)D_2)^2}, \quad (4.19)$$

donde  $D_1 = [(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon]$  y  $D_2 = (q^2 + i\epsilon)$ , por tanto:

$$\begin{aligned} xD_1 + (1-x)D_2 &= x[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon] + (1-x)(q^2 + i\epsilon) \\ &= xp^2 + 2xpq + xq^2 - xm^2 + xi\epsilon + q^2 + i\epsilon - xq^2 - xi\epsilon \\ &= xp^2 + 2xpq - xm^2 + q^2 + i\epsilon + x^2p^2 - x^2p^2 \\ xD_1 + (1-x)D_2 &= [(q+xp)^2 - x[m^2 - (1-x)p^2 + i\epsilon]] \end{aligned} \quad (4.20)$$

la amplitud (4.17) puede ser reescrita como:

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 \frac{(2-d)(\not{p} + \not{q}) + dm}{[(q+xp)^2 - x[m^2 - (1-x)p^2 + i\epsilon]]^2} dx. \quad (4.21)$$

Sustituyendo  $M^2 = x[m^2 - x(1-x)p^2]$  y  $l^2 = (q+xp)^2$  la integral se convierte en

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)[\not{l} + (1-x)\not{p}] + dm}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2}. \quad (4.22)$$

Ahora, separamos las integrales de modo que

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int_0^1 dx \left[ \underbrace{\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)l}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2}}_I + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2-d) \times (1-x)\not{p} + dm}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (4.23)$$

Debido a que  $I$  es una integral par evaluada de  $-\infty$  a  $\infty$  por propiedades de las integrales su valor es cero, por tanto, sacamos la parte constante de la segunda integral y obtenemos lo siguiente:

$$-i\Sigma(p) = -e^2 \int_0^1 [(2-d) \times (1-x)\not{p}] + dm dx \underbrace{\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2}}_{II}. \quad (4.24)$$

La segunda integral ( $II$ ) es una integral escalar cuya solución tiene la siguiente estructura:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^k} = \frac{i(-1)^k \Gamma(k - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(k)} (M^2)^{d/2-k}. \quad (4.25)$$

Realizando la sustitución  $d = 4 - 2\epsilon$ ,  $k = 2$  y agregando un factor de masa  $\mu$  para lograr un resultado con una dimensión de masa correcta, se obtiene

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} (\mu^2)^\epsilon \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)} \left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right)^\epsilon, \quad (4.26)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma de Euler definida como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (4.27)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la serie de Laurent alrededor de  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.28)$$

$$\left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} = 1 - \epsilon \log \left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.29)$$



y sustituyendo (4.28), (4.29) en (4.26) tenemos la siguiente expresión

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - M^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \log \left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \quad (4.30)$$

Por lo tanto, reemplazando (4.30) en (4.24) encontramos

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) = & i\frac{\alpha}{4\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - 2 \int_0^1 dx (1-x) \log \left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \not{p} \\ & - i\frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx \log \left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] m, \end{aligned} \quad (4.31)$$

siendo  $\alpha = e^2/4\pi$  la constante de estructura fina. De esta manera calculando las integrales en el parámetro de Feynman, se tiene:

$$\int_0^1 dx \log \left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) = \left[ -2 + \log \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \log(1-r) \right], \quad (4.32)$$

$$\int_0^1 dx x \log \left( \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) = \frac{1}{2} \left[ -2 + \log \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{1}{r} + \left( 1 - \frac{1}{r} \right)^2 \log(1-r) \right], \quad (4.33)$$

con  $r = p^2/m^2$ . Ahora, reemplazando (4.32) y (4.33) en (4.31) se puede escribir la auto-energía del electrón como:

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) = & i\frac{\alpha}{4\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \log \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + 1 + \frac{1}{r} - \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \log(1-r) \right] \not{p} \\ & - i\frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \log \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{3}{2} - \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \log(1-r) \right] m. \end{aligned} \quad (4.34)$$

El procedimiento de regularización dimensional permite entonces expresar las divergencias ultravioletas en 4 dimensiones como polos simples de la amplitud a un-loop y además permite encontrar una parte finita que se podrá usar para hacer predicciones teóricas siempre y cuando se de una prescripción para remover las divergencias. La discusión acerca de los esquemas de renormalización adecuados para remover las divergencias se salen de los propósitos de esta tesis y se dejan como perspectivas de investigación. La solución anterior está expresada bajo las condiciones  $r < 0$  y  $r \neq 0$ , pero puede hacerse una extensión analítica y encontrar una expresión

que sea válida para todo  $r$ . El resultado obtenido es:

*i)* Para  $r = 0$  las soluciones de las integrales (4.32), (4.33) son triviales, por tanto:

$$-i\Sigma(0) = i\frac{\alpha}{4\pi} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - 1 \right] \not{p} - i\frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{1}{2} \right] m. \quad (4.35)$$

*ii)* En el caso en que  $r > 1$  es necesario realizar la continuación analítica para los logaritmos, de tal manera que reemplazamos  $\log(1-r)$  por  $\log|1-r| - i\pi\theta(r-1)$ . Finalmente, la solución para todos los momentos  $p$  está dada por [48]:

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) = -i\Sigma(0) + i\frac{\alpha}{4\pi} \left[ 2 + \frac{1}{r} - \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \left(\log|1-r| - i\pi\theta(r-1)\right) \right] \not{p} \\ - i\frac{\alpha}{\pi} \left[ 2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\log|1-r| - i\pi\theta(r-1)\right) \right] m \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para finalizar, vamos a realizar este mismo cálculo de la auto-energía del electrón a un loop pero ahora de manera sistemática mediante el software de programación simbólica **Mathematica** el cual nos permite crear la amplitud del proceso, hacer la regularización dimensional de las integrales que poseen divergencias, realizar operaciones del álgebra de Dirac y por último evaluar las integrales para poder dar un resultado numérico correcto que en principio debe ser igual al obtenido a través de los diagramas de Feynman [59].

### 4.3 Implementación en Mathematica

Para realizar el cálculo de la auto-energía del electrón en Mathematica, usamos los paquetes **FeynArts** y **FeynCalc** que permiten crear la amplitud del proceso, realizar el algebra de Dirac, hacer la expansión en series de Laurent y finalmente imprimir la expresión teórica esperada.

\* Para iniciar, con los comandos **PrependTo** y **Get** hacemos el llamado a **FeynArts** y **FeynCalc** desde la ubicación de nuestro ordenador.

```
PrependTo[$Path,ToFileName[{"feyncalc","FeynCalc"}]];
$LoadFeynArts=True;
Get["FeynCalc.m"];}
```

- \* Para crear nuestra topología de la auto-energía del electrón que denotamos con TopSE utilizamos `CreateTopologies` de `FeynArts` que tiene como primer argumento el número de loops, como segundo argumento el número de líneas externas (entrantes y salientes), el tercer argumento excluye todos los vértices que están desconectados y por último el número de líneas conectadas a los vértices. Por otro lado, para visualizar la topología lo hacemos mediante la función `Paint` que dentro de sus argumentos tiene la opción `FieldNumbers` útil para enumerar todos los campos presentes en el diagrama como se puede observar en la Figura 4.4.

```
TopSE=CreateTopologies[1,1->1,
                       ExcludeTopologies->{Internal},
                       Adjacencies->3 ]
Paint[TopSE,ColumnsXRows->1,FieldNumbers->True]
```

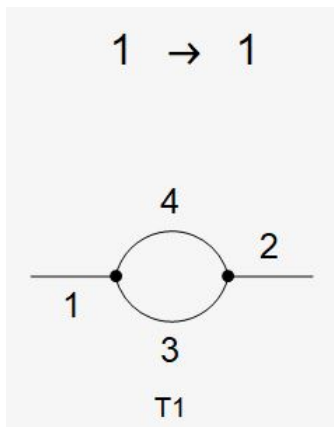


Figura 4.4: Topología auto-energía del electrón.

- \* Antes de insertar los campos que van a interactuar, hacemos la exclusión de los demás campos del modelo estándar que no van a ser considerados en el cálculo con la ayuda de la función `excludefields`. Con F se denotan los campos fermiónicos, con S los campos escalares, con V los campos vectoriales y con U los campos fantasmas de Feynman. Ahora, con `InsertFields` insertamos a

nuestra topología los campos en las líneas externas, en nuestro caso el proceso incluye una línea de un electrón que entra y otra de un electrón saliendo, que se denota como  $F[2,\{1\}] \rightarrow F[2,\{1\}]$ . Con `InsertionLevel` se especifica el tipo de diagrama que se quiere producir y por último `ExcludeParticles` excluye todas las partículas que no hacen parte del cálculo de la auto-energía del electrón. Seguido, dibujamos el nuevo diagrama con la función `Paint` que se puede observar en la Figura 4.5.

```

excldefields={F[1, _],F[2,{2}],F[2,{3}], F[3, _], F[4, _],
              S[1],S[2], S[3],
              V[2], V[3], V[5],
              U[1 | 2 | 3 | 4 | 5 ]};

FDSE=InsertFields[TopSE, F[2,{1}]->F[2,{1}],
                  Model->"SM",
                  InsertionLevel -> {Particles},
                  ExcludeParticles->excldefields]

Paint[FDSE,ColumnsXRows->1]

```

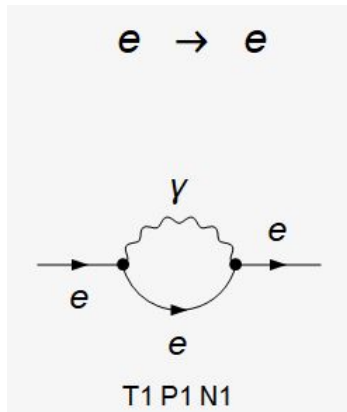


Figura 4.5: Diagrama de Feynman de la auto-energía del electrón.

- \* Para crear la amplitud de nuestro diagrama usamos el comando `CreateFeynAmp` el cual aplica las reglas de Feynman a la Figura 4.5 y con la función `Truncated` le ordenamos al código que no evalúe las líneas externas del diagrama. Con `FeynArts` no es posible realizar ningún tipo de álgebra sobre la amplitud, ni

tampoco se puede evaluar numéricamente, por esta razón es necesario exportar el resultado al lenguaje de `FeynCalc` haciendo uso de la función `FCFAConvert`. Por otro lado, con `ChangeDimension` cambiamos la dimensión de las matrices gamma, la dimensión de la integral y de los momentos especificando que sea en  $D$  dimensiones, con el objetivo de aplicar el procedimiento de regularización dimensional y poder evaluar las integrales divergentes que aparecen en el cálculo de la amplitud. Adicionalmente incluimos también los momentos entrantes y salientes con `IncomingMomenta` y `OutgoingMomenta` respectivamente, además, se incluye el momento de loop con `LoopMomenta` y también se realizan los siguientes cambios: con el comando `FCGV[a_]:->a` se cambia la masa y la carga del electrón por su valor que está incluido dentro del argumento de la función `FCGV` y por otro lado cambiamos el momento de loop de la siguiente manera  $k \rightarrow k+p$ .

```
AmpFASE=CreateFeynAmp[FDSE,Truncated->True]

AmpFCSE=FCFAConvert[AmpFASE,
                    ChangeDimension->D,
                    IncomingMomenta->{p},
                    OutgoingMomenta->{p},
                    LoopMomenta->{k},
                    UndoChiralSplittings->True]

Changes = {FCGV[a_]:>a,k->k+p}
```

- \* La función `Cases` de `Mathematica` nos permite separar el numerador y el denominador de la lista `AmpFCSE` que contiene la amplitud, por tanto, para separar el denominador lo hacemos con el comando `FeynAmpDenominator[...]` y para el numerador realizamos lo siguiente: de la lista `AmpFCSE` eliminamos el denominador con la función `DeleteCases` y nos queda únicamente el numerador. Finalmente se aplican los cambios descritos anteriormente.

```

Den=Flatten@@Cases[AmpFCSE,
                  FeynAmpDenominator[___],
                  Infinity] /. Changes // FCE

Num=Block[{res},
          res>DeleteCases[AmpFCSE,
                          FeynAmpDenominator[___],Infinity];
          res=res /. Changes // FCE ]

```

Con los resultados obtenidos reconstruimos nuevamente la amplitud y aplicamos también la función `Contract` que simplifica el tensor métrico, luego se aplica `OneLoopSimplify` que elimina el momento de loop y por último usamos `OneLoop` para realizar la integral en 4 dimensiones aplicando los cambios definidos en `Changes2`. Para ver de una manera más ordenada el resultado, usamos el comando `Collect` que ordena la expresión como polinomios de la variable elegida.

```

Amp=Contract[Flatten@@Times[Num,Den]] // FCE

AmpOL=OneLoopSimplify[Amp,k,FeynCalcExternal->True]

res=OneLoop[k,Amp,Dimension->D,
            FeynCalcExternal->True] /. D->4 // Simplify

Changes2 = {"ME" -> m,"EL"^2->4*Pi*\[Alpha],SP[a_, a_]->a^2}

resmod = res /. Changes2

```

Finalmente el resultado obtenido para la auto-energía del electrón es

$$\frac{(m \sqrt{\alpha} B_0(p^2, 0, m^2)) \sqrt{\pi} + (\sqrt{\alpha} (-A_0(m^2) + (m^2 + p^2) B_0(p^2, 0, m^2)) \text{GS}[p])}{4 p^2 \sqrt{\pi}}$$

El resultado anterior, escrito de manera abreviada se convierte en

$$\text{resmod} = \frac{\alpha B_0(p^2, 0, m^2)m}{\pi} + \frac{\alpha \left( -\frac{1}{p^2} A_0(m^2) + \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right) B_0(p^2, 0, m^2) \right) \not{p}}{4\pi} \quad (4.37)$$

Los términos  $A_0$  y  $B_0$  que aparecen en nuestro resultado son las funciones de Passarino-Veltman [60] las cuales son una expansión en series de Laurent de integrales irreducibles a un-loop que tienen la siguiente forma:

$$A_0(m^2) = m^2 (B_0(m^2, 0, m^2) - 1), \quad (4.38)$$

$$B_0(m^2, 0, m^2) = \Delta_\epsilon + 2 - \ln \frac{m^2}{\mu^2}, \quad (4.39)$$

$$B_0(p^2; 0, m^2) = \Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 2 - \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 + \frac{p^2 - i\epsilon}{m^2}\right), \quad (4.40)$$

donde:

$$\Delta_\epsilon = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi. \quad (4.41)$$

Finalmente, sustituyendo (4.38), (4.39), (4.40) en (4.37) llegamos al mismo resultado obtenido con el método diagramático, excepto por algunas constantes que pueden ser absorbidas en las divergencias junto con el polo simple  $\frac{1}{\epsilon}$ . El programa realizado en *Mathematica* para la auto-energía del electrón en QED puede ser consultado en el siguiente sitio web <https://github.com/fisicateoricaUDP>.

Con la implementación en *Mathematica* se tienen varias ventajas, una de las más relevantes es el tiempo de ejecución del cálculo, para el caso de un-loop el resultado se obtiene en solo algunos segundos. Además, esta implementación al ser muy concisa tiene un costo computacional muy bajo por lo que su eficiencia es bastante óptima. Por otro lado, el resultado que se obtiene está dado en términos de las funciones de Passarino-Veltman que son funciones conocidas analíticamente lo que permite llegar al resultado final de una manera sencilla haciendo los reemplazos correspondientes. Para finalizar, esta implementación también puede ser extendida para realizar cálculos de

las auto-energías de las demás partículas del Modelo Estándar al mismo orden perturbativo.



## 5. Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se estudiaron las propiedades analíticas del propagador del electrón al orden de un-loop en la QED, conocido en el ámbito científico como la auto-energía del electrón. Para realizar el cálculo de este observable se utilizó el método diagramático de Feynman con el cual se pudo construir la amplitud. La expresión obtenida contiene divergencias ultravioletas lineales en el espacio de Minkowski de 4 dimensiones, para poder aislar dichas singularidades aplicamos el esquema de regularización dimensional extendiendo analíticamente las integrales al espacio de  $D$  dimensiones. Además, este método de regularización permite separar los polos simples, es decir, la parte divergente de la parte finita de la cual se obtiene la información para hacer predicciones físicas. Sin embargo, introduce una nueva escala de energía no física que aparece en el resultado final, la dependencia en esta escalar forma parte del error teórico en el cálculo.

Por otro parte, el método diagramático se presta para hacer una implementación en un lenguaje de programación simbólica que permita realizar el cálculo de manera automática. Se desarrollo un script en el lenguaje simbólico de `Mathematica` con ayuda de los paquetes `FeynArts` y `FeynCalc` que permitió construir la amplitud del observable físico en términos de las funciones de Passarino-Veltman. Dichas funciones forman una base irreducible para los diagramas a un-loop y su expansión en series de Laurent puede obtenerse de forma analítica llegando a resultados equivalentes al obtenido con la parametrización de Feynman. Este código, además, puede extenderse para la evaluación de las auto-energías a un-loop de los demás fermiones del Modelo Estándar, e incluso se puede usar para implementar el cálculo de la auto-energía del electrón a ordenes perturbativos superiores.

Todo el análisis anterior nos lleva a concluir que utilizar un lenguaje de programación simbólica como lo es `Wolfram Mathematica` permite conseguir resultados bastante confiables al momento de realizar cálculos perturbativos como la auto-energía del electrón, estos resultados son muy utilizados actualmente en la física de altas energías. El cálculo de la auto-energía a través del teorema óptico y la renormalización de la masa del electrón se dejan como perspectivas de investigación para futuros trabajos.

## Apéndice A

### Notación, unidades y convenciones

#### A.1 Unidades Naturales

En nuestra tesis se utilizará la siguiente convención para las unidades de la velocidad de la luz  $c$ , la constante de Planck  $\hbar$  y la constante gravitacional  $G$ :

$$c = \hbar = G = 1.$$

Del principio de incertidumbre se tiene como consecuencia que:

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p &\geq \hbar \rightarrow \Delta x m \Delta v \geq 1 \\ &\rightarrow \Delta x \geq \frac{1}{m \Delta v}.\end{aligned}$$

Realizando el análisis dimensional correspondiente:

$$[x] = \frac{1}{[m][v]} \rightarrow [x] = [m]^{-1}$$

Observando que para la energía se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta E \Delta t &\geq \hbar \rightarrow \Delta E \Delta t \geq 1 \\ &\rightarrow \Delta t \geq \frac{1}{\Delta m c^2}\end{aligned}$$

Haciendo el análisis dimensional, podemos inferir:

$$[t] = [m]^{-1}$$

Finalmente:

$$[x] = [t] = [m]^{-1} \rightarrow [m] = [E] = eV.$$

## A.2 Métricas

En mecánica cuántica no relativista:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una cantidad invariante se define como:

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} p_i r_j = p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3.$$

En mecánica cuántica relativista en un espacio plano o Minkowskiano, es decir, con métrica constante, se tiene:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La cantidad invariante:

$$p \cdot r = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} p^\mu r^\nu = p^0 r^0 - p^1 r^1 - p^2 r^2 - p^3 r^3$$

Finalmente en relatividad general, la métrica no es constante y esta definida así:

$$\text{Métrica} \equiv g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} f(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r(x) \end{pmatrix}$$

## Apéndice B

Cálculo de la función retardada de Green para el propagador de Klein-Gordon

Partiendo de la ecuación de Klein-Gordon no homogénea que tiene la siguiente forma:

$$(\square + m^2)\phi(x) = J, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  es el operador D'Alembertiano.

Ahora, sea  $G(x - y)$  la función de Green del campo de Klein-Gordon  $\phi(x)$  que satisface lo siguiente:

$$(\square + m^2)G(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y), \quad (\text{B.2})$$

nótese que se ha cambiado el término no homogéneo por una fuente puntual y el campo ahora puede ser escrito como:

$$\phi(x) = \int G(x - y)Jd^4x. \quad (\text{B.3})$$

Las funciones  $G$  y  $\delta^4$  son dependientes de cuadri-vectores como se muestra a continuación:

$$G(x - y) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0); \quad \delta^{(4)}(x - y) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(x^0 - y^0). \quad (\text{B.4})$$

Si aplicamos las transformadas de Fourier a la función de Green y a la función  $\delta^4$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} G(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p g(p) e^{-ip \cdot (x - y)}, \\ \delta^{(4)}(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot (x - y)}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde cabe resaltar que  $g(p)$  es el propagador de Klein-Gordon. Ahora, reemplazando

(B.5) en (B.2) encontramos:

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p g(p) e^{-ip \cdot (x-y)} &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} \\ \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p g(p) (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} \\ \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p g(p) (p^2 - m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned}$$

de aquí destacamos que:

$$g(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} = \frac{i}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2} \equiv D(p) \equiv \text{propagador escalar}. \quad (\text{B.6})$$

De tal manera, que llegamos a lo siguiente:

$$G(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} = D_R(x-y). \quad (\text{B.7})$$

Este resultado que hemos obtenido es el mismo que se encuentra en (2.51) y que satisface lo siguiente:

$$\phi(x) = - \int d^4 x' D_R(x-y) \cdot J(y) + \phi_0; \quad -\infty \leq t' \leq t. \quad (\text{B.8})$$

$D_R(x-y)$  puede ser reescrita de la siguiente manera, haciendo el cambio  $p^2 = p^0 - \mathbf{p}^2$

$$\begin{aligned} D_R(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ D_R(x-y) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{i}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \frac{i}{(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} e^{-ip^0(x^0-y^0)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

La segunda ecuación que contiene el término  $p^0$  posee singularidades en  $p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  pero pueden ser removidas o aisladas gracias al teorema de los residuos de Cauchy que enuncia lo siguiente: sea D un dominio simplemente conexo y C un contorno cerrado simple que se halla completamente dentro de D. Si una función es analítica sobre y en el intervalo de C, excepto en un número finito de puntos singulares,  $z_1, z_2, \dots, z_k$  del interior de C, entonces:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k), \quad (\text{B.10})$$

la expresión para evaluar los residuos de un polo de orden  $n$ , tiene la forma

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1} (z - z_0)^n f(z)}{dz^{n-1}}. \quad (\text{B.11})$$

La integral de  $p^0$  de (B.9) escrita en la forma de variable compleja toma la forma

$$\oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2}. \quad (\text{B.12})$$

Aplicando el teorema de acotación *LM* [61] (ver página 20) para  $D_R(x - y)$

$$\begin{aligned} \left| \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2} \right| &\leq LM \leq \pi R M a x \left| \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2} \right| \\ \left| \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z^2 - E_p^2} \right| &\leq \pi R \frac{e^{y(t-t')}}{R^2} \leq \frac{1}{R} \rightarrow 0; \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

donde  $R$  es el radio del contorno de integración, al aplicar la desigualdad la integral converge en 4 tipos de contornos:

(i) El primer caso es en el que  $x^0 > y^0$  donde los polos se corren hacia abajo como se muestra en la Figura (2.4), es decir, que aplicando el teorema de los residuos se tiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint dz \frac{e^{iz(x^0 - y^0)}}{(z + i\epsilon)^2 - E_p^2} = -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) + \text{Res}(f(z), -E_p - i\epsilon)], \quad (\text{B.14})$$

al evaluar los residuos se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) &= \lim_{z \rightarrow E_p - i\epsilon} [z - (E_p - i\epsilon)] \cdot \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{[z - (E_p - i\epsilon)][z - (-E_p - i\epsilon)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow -E_p - i\epsilon} \frac{e^{-i2(x^0 - y^0)}}{[z - (-E_p - i\epsilon)]} \\ &= \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{[E_p - i\epsilon + E_p + i\epsilon]} \\ \text{Res}(f(z), E_p - i\epsilon) &= \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{2E_p}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

operando de manera similar encontramos el otro residuo con valor:

$$\text{Res}(f(z), -E_p - i\epsilon) = \frac{e^{-i(E_p - i\epsilon)(x^0 - y^0)}}{2E_p}, \quad (\text{B.16})$$

al reemplazar los valores de los residuos en la integral (B.12) y haciendo la evaluación en el límite en el que  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{(z + i\epsilon)^2 - E_p^2} = -2\pi i \left[ \frac{e^{-iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} - \frac{e^{iE_p(x^0 - y^0)}}{2E_p} \right], \quad (\text{B.17})$$

finalmente reemplazando este resultado en la integral (B.9) llegamos al resultado

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left( e^{-iE_p(x^0 - y^0)} - e^{iE_p(x^0 - y^0)} \right). \quad (\text{B.18})$$

De esta manera concluimos que la función retardada de Green  $D_R(x - y)$  representa el propagador escalar asociado a partículas de espín 0.

(ii) El segundo caso es cuando  $y^0 > x^0$ , es decir, que los polos se corren hacia arriba, esta expresión es conocida como la función avanzada de Green, nuevamente aplicando el teorema de los residuos, se obtiene:

$$D_A(x - y) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left( e^{-iE_p(x^0 - y^0)} - e^{iE_p(x^0 - y^0)} \right) \theta(y^0 - x^0) \quad (\text{B.19})$$

(iii) Una de las prescripciones más importantes es la prescripción de Feynman o el propagador de Feynman el cual desplaza el polo con energía positiva hacia abajo y el polo con energía negativa hacia arriba y se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left( \text{Res}(f, -E_p) \theta(y^0 - x^0) - \text{Res}(f, E_p) \theta(x^0 - y^0) \right) \\ D_F(x - y) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left( e^{iE_p(x^0 - y^0)} \theta(y^0 - x^0) + e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \theta(x^0 - y^0) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

(iv) Finalmente, esta la prescripción de Dyson que es la opuesta a la de Feynman, es decir, que el polo con energía positiva se desplaza hacia abajo y el polo con energía

negativa lo desplaza hacia arriba, luego la solución es:

$$D_D = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left( e^{-iE_p(x^0-y^0)} \theta(y^0 - x^0) + e^{iE_p(x^0-y^0)} \theta(x^0 - y^0) \right) \quad (\text{B.21})$$



## Apéndice C

### Cálculo de la Auto-energía en la teoría $\phi^3$

Para el cálculo diagramático de la parte imaginaria, se tiene:

$$\begin{aligned}
 iT &= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon) [(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \\
 &= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 + 2p \cdot P - M^2 + i\varepsilon)^2}, \\
 &= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[(p + P)^2 - \Delta]^2},
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

donde:

$$\begin{cases} P = -xk \\ \Delta = P^2 + M^2 = m^2 - k^2x(1-x) - i\varepsilon. \end{cases} \tag{C.2}$$

La amplitud se convierte entonces en:

$$iT = \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 - \Delta)^2}, \tag{C.3}$$

la segunda integral en el parámetro de Feynman es divergente. Usando la regularización dimensional obtenemos:

$$T = \frac{\lambda}{16\pi^2} \mu^E \Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right) \int_0^1 dx \Delta^{-(2-\frac{d}{2})}, \tag{C.4}$$

eligiendo la renormalización on-shell,  $T_R(k^2 = m^2) = 0$ , llegamos a:

$$\begin{aligned}
 T_R &= T - T(k^2 = m^2) \\
 &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \Gamma \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_0^1 dx \left[ \left( \frac{\Delta(k^2)}{\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} - \left( \frac{\Delta(k^2 = m^2)}{\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right] \\
 &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - C + O(\varepsilon) \right) \int_0^1 dx \left[ 1 - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{m^2 - k^2x(1-x) - i\varepsilon}{m^2 - m^2x(1-x) - i\varepsilon} \right] \\
 &= -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{1 - \beta x(1-x) - i\varepsilon}{1 - x(1-x) - i\sigma} \right] = -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} [L(\beta) - L(1)],
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

en la expresión anterior  $\beta = \frac{k^2}{m^2}$  y la función  $L(\beta)$  está dada por:

$$L(\beta) \equiv \int_0^1 dx \ln[1 - \beta(1-x)x - i\varepsilon], \quad (\text{C.6})$$

que satisface:

$$\text{Im}L(\beta) = -\pi \sqrt{1 - \frac{4}{\beta}} \theta(\beta - 4), \quad (\text{C.7})$$

por lo tanto:

$$\text{Im}T = -\frac{\lambda^2}{16\pi^2} [\text{Im}L(\beta) - \text{Im}L(1)], \quad (\text{C.8})$$

obteniendo finalmente:

$$\text{Im}T = \frac{\lambda^2}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \theta\left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right), \quad (\text{C.9})$$

donde la función  $\theta$  asegura que solo haya una parte imaginaria en la transición de los estados intermedio al estado final [62].

## Referencias

- [1] S. Weinberg and W. S., *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 1: Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern Applications, Cambridge University Press, 1995.
- [2] A. R. Fazio and E. A. R. R., “The lightest higgs boson mass of the MSSM at three-loop accuracy,” *Nuclear Physics B*, vol. 942, pp. 164–183, may 2019.
- [3] E. Reyes and R. Fazio, “High-precision calculations of the higgs boson mass,” *Particles*, vol. 5, no. 1, pp. 53–73, 2022.
- [4] L. Chen and A. Freitas, “Leading fermionic three-loop corrections to electroweak precision observables,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2020, jul 2020.
- [5] R. H. Parker, C. Yu, W. Zhong, B. Estey, and H. Müller, “Measurement of the fine-structure constant as a test of the standard model,” *Science*, vol. 360, pp. 191–195, apr 2018.
- [6] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, T. Blum, M. Bruno, I. Caprini, C. C. Calame, M. Cè, G. Colangelo, *et al.*, “The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model,” *Physics reports*, vol. 887, pp. 1–166, 2020.
- [7] P. G. and, “Status of the fermilab muon  $g-2$  experiment,” *EPJ Web of Conferences*, vol. 262, p. 01003, 2022.
- [8] O. Gituliar and S.-O. Moch, “Fuchsia and master integrals for energy–energy correlations at NLO in QCD,” *Acta Physica Polonica B*, vol. 48, no. 12, p. 2355, 2017.
- [9] W. T. Bobadilla, A. Fazio, P. Mastrolia, and E. Mirabella, “Generalised unitarity for dimensionally regulated amplitudes,” *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, vol. 267, pp. 150–157, 2015.
- [10] T. Hahn and M. Perez-Victoria, “Automated one-loop calculations in four and d dimensions,” *Computer Physics Communications*, vol. 118, no. 2-3, pp. 153–165, 1999.

- [11] H. B. Moss, A. Moore, D. S. Leslie, and P. Rayson, “Fiesta: Fast identification of state-of-the-art models using adaptive bandit algorithms,” *arXiv preprint arXiv:1906.12230*, 2019.
- [12] E. Villa, “pysecdec as a tool for expansion by regions and loop amplitude evaluation,” *SciPost Physics Proceedings*, no. 7, p. 014, 2022.
- [13] A. Freitas, “Three-loop vacuum integrals with arbitrary masses,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2016, no. 11, pp. 1–20, 2016.
- [14] S. Bauberger, A. Freitas, and D. Wiegand, “Tvid 2: evaluation of planar-type three-loop self-energy integrals with arbitrary masses,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2020, no. 1, pp. 1–27, 2020.
- [15] “Mathematica, Versión 13.1.” Champaign, IL, 2022.
- [16] T. Hahn, “Generating feynman diagrams and amplitudes with feynarts 3,” *Computer Physics Communications*, vol. 140, no. 3, pp. 418–431, 2001.
- [17] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, “Feyncalc - computer-algebraic calculation of feynman amplitudes,” *Computer Physics Communications*, vol. 64, no. 3, pp. 345–359, 1991.
- [18] G. Kirchhoff, *Researches on the Solar Spectrum, and the Spectra of the Chemical Elements*. Macmillan and Company, 1862.
- [19] A. Einstein, “Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz,” *Annalen der Physik*, vol. 17, pp. 132–148, 1905.
- [20] A. Angstrom, *Optiska Undersokningar*. Svenska Vetenskapakademien, 1853.
- [21] A. Einstein, “Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtet betreffenden heuristischen gesichtspunkt,” *Albert Einstein-Gesellschaft*, 1905.
- [22] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [23] K. G. Martín, “Biología y filosofía de la complementariedad en Niels Bohr,” *Bajo palabra. Revista de filosofía*, no. 24, pp. 449–474, 2020.
- [24] J. Sentís, *Cuántica : tu futuro en juego*. Editorial Ariel, 2017.

- [25] R. P. Feynman, “Space-time approach to quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 769–789, Sep 1949.
- [26] A. F. Soria, *Física nuclear y de partículas*, vol. 62. Universitat de València, 2020.
- [27] K. Kumericki, “Feynman diagrams for beginners,” *arXiv:1602.04182*, 2016.
- [28] I. J.I, “Teoría cuántica de campos,” *Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada. Espana.*, 2017.
- [29] N. X.Hernandez, “Estudio de la generación de plasmones de superficie localizados en nanomateriales,” *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla*, 2016.
- [30] R. G. Newton, “Optical theorem and beyond,” *American Journal of Physics*, vol. 44, no. 7, pp. 639–642, 1976.
- [31] Gans and . H. Happel *Reviews of Modern Physics* **29**, 294, 1909.
- [32] E. Feenberg, “The scattering of slow electrons by neutral atoms,” *Phys. Rev.*, vol. 40, pp. 40–54, Apr 1932.
- [33] N. Bohr, R. Peierls, and G. Placzek, “Nuclear reactions in the continuous energy region,” *Nature*, vol. 144, pp. 200–201, July 1939.
- [34] W. Heisenberg, “Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen. II,” *Zeitschrift fur Physik*, vol. 120, pp. 673–702, Nov. 1943.
- [35] G. C. Wick, “On the space distribution of slow neutrons,” *Phys. Rev.*, vol. 75, pp. 738–756, Mar 1949.
- [36] L. I. Schiff, “On an Expression for the Total Cross Section,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 11, pp. 288–290, 03 1954.
- [37] R. Glauber and V. Schomaker, “The theory of electron diffraction,” *Phys. Rev.*, vol. 89, pp. 667–671, Feb 1953.
- [38] H. Bethe, *Mesons and Fields: Fields, by S. S. Schweber, H. A. Bethe and F. de Hoffmann*. Mesons and Fields, Row, Peterson, 1955.
- [39] H. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*. Structure of matter series, John Wiley, 1957.

- [40] L. Puzikov, R. Ryndin, and J. Smorodinsky, “Construction of the scattering matrix of a two-nucleon system,” *Nuclear Physics*, vol. 3, no. 3, pp. 436–445, 1957.
- [41] N. Klepikov, “On the completeness of the complete scattering experiment,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 20, p. 505, 1964.
- [42] J. A. Soares, “Introduction to optical characterization of materials,” in *Practical Materials Characterization*, pp. 43–92, Springer, 2014.
- [43] I. Rondón-Ojeda and F. Soto-Eguíbar, “Generalized optical theorem for propagation invariant beams,” *Optik*, vol. 137, pp. 17–24, 2017.
- [44] P. L. Marston and L. Zhang, “Unphysical consequences of negative absorbed power in linear passive scattering: Implications for radiation force and torque,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 139, no. 6, pp. 3139–3144, 2016.
- [45] P. L. Marston, “Generalized optical theorem for scatterers having inversion symmetry: Applications to acoustic backscattering,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, no. 4, pp. 1291–1295, 2001.
- [46] P. L. Marston and J. H. Crichton, “Radiation torque on a sphere caused by a circularly-polarized electromagnetic wave,” *Phys. Rev. A*, vol. 30, pp. 2508–2516, Nov 1984.
- [47] G. Gouesbet, “On the optical theorem and non-plane-wave scattering in quantum mechanics,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 50, no. 11, p. 112302, 2009.
- [48] R. Rietkerk, “One-loop amplitudes in perturbative quantum field theory,” 2012.
- [49] R. E. Cutkosky, “Singularities and discontinuities of feynman amplitudes,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 1, no. 5, pp. 429–433, 1960.
- [50] R. Zwicky, “A brief introduction to dispersion relations and analyticity,” *arXiv preprint arXiv:1610.06090*, 2016.
- [51] V. F. Weisskopf, “On the self-energy and the electromagnetic field of the electron,” *Phys. Rev.*, vol. 56, pp. 72–85, Jul 1939.
- [52] W. Gerlach and O. Stern, “Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld,” *Zeitschrift fur Physik*, vol. 9, pp. 349–352, Dec. 1922.

- [53] I. Waller, “Bemerkungen über die rolle der eigenenergie des elektrons in der quantentheorie der strahlung,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 62, pp. 673–676, 1930.
- [54] V. Weisskopf, “Berichtigung zu der arbeit: über die selbstenergie des elektrons,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 90, no. 11, pp. 817–818, 1934.
- [55] W. Heisenberg, “Die selbstenergie des elektrons,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 65, no. 1, pp. 4–13, 1930.
- [56] J. A. Wheeler, “On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure,” *Phys. Rev.*, vol. 52, pp. 1107–1122, Dec 1937.
- [57] T. Young, “II: The bakerian lecture. on the theory of light and colours,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pp. 12 – 48, 1802.
- [58] J. Bovy, “The self-energy of the electron: a quintessential problem in the development of QED,” *arXiv preprint physics/0608108*, 2006.
- [59] J. C. Romao, “Modern techniques for one-loop calculations,” *Version*, vol. 1, p. 263, 2004.
- [60] D. Bardin and G. Passarino, *The standard model in the making: Precision study of the electroweak interactions*, vol. 104. Oxford University Press, 1999.
- [61] S. Arias García, “El teorema de baire y sus consecuencias en espacios de banach,” *Universitat de Barcelona*, 2016.
- [62] J. C. Romao, “Advanced quantum field theory,” *Lecture Notes for the PhD program, Phys. Dept., Inst. Sup. Tec., Lisboa*, 2013.