



Simulación Escalar de Modos Normales en Fibras Ópticas de Salto de Índice

Sabas Méndez González

Departamento de Física y Geología
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad de Pamplona
2021

Simulación Escalar de Modos Normales en Fibras Ópticas de Salto de Índice

Sabas Méndez González

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Físico

Directora:
Martha Lucia Molina Prado. Dra Sc.

Departamento de Física y Geología
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad de Pamplona
2021

”Todo hombre debería leer solo aquello a que le lleva su inclinación; ya que lo que lee como obligación de poco le aprovechará ”

- Samuel Johnson

Agradecimientos

A mi madre Ana, que aunque no esta conmigo no hay un solo instante en que no piense en sus consejos.

A mi esposa Luz Karime por ser la persona que me motiva a seguir adelante.

A la Dra. Martha Lucia Molina, por su paciencia, por creer que este trabajo era posible.

Al Dr. Néstor Alonso Arias, por sus observaciones, por los aportes académicos, por sus sugerencias siempre acertadas.

Resumen

En este trabajo, se muestran las simulaciones de los modos de propagación en una fibra óptica de salto de índice de refracción. Para el desarrollo se ha usado dos métodos: método analítico y numérico (método de elementos finitos).

En el método analítico se hace uso de la teoría electromagnética (ecuaciones de Maxwell y relaciones constitutivas de la materia), dando origen a un conjunto de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones resultantes de aplicar la teoría electromagnética representan los diferentes modos (diferentes formas en la que se propaga la luz debido a la dispersión) presentes en las dos principales regiones de la fibra óptica (núcleo y revestimiento).

Los modos que se propagan dentro de la fibra de salto de índice, modos estudiados en este proyecto, son configuraciones electromagnéticas designadas como transversal magnético TM, transversal eléctrico TE y los modos híbridos EH Y HE; en cada caso se forma un conjunto que dependerá de los parámetros geométricos de la fibra y de la longitud de onda de operación. Para cada conjunto de modos se determinan las ecuaciones que los representa (ecuación de dispersión). Las soluciones de las diferentes ecuaciones representan los modos guiados y expresan el tipo de componente del campo electromagnético que puede viajar en el interior de la fibra óptica.

En la simulación de los modos se muestran la intensidad del campo eléctrico o magnético del que tiene lugar. Se ha hecho una simulación de tipo numérico de los diferentes modos, usando el método de los elementos finitos, el cual está incorporado en el toolbox de MATLAB. En este caso se construye una función que expresa el índice de refracción en las diferentes regiones que componen la fibra óptica. Por último, las soluciones, analítica y numérica, se comparan. Esta comparación consiste en establecer la curva solución del índice de refracción efectivo para un modo en particular, que en este caso se ha hecho con el modo dominante HE_{11} , tanto del método analítico como también del resultado numérico hallado con el uso de los elementos finitos.

Palabras claves: Modos de propagación, fibra óptica, elementos finitos, índice de refracción efectivo, modo dominante.

Lista de Figuras

1-1.	Partes de una fibra óptica que muestra el núcleo el revestimiento y la capa que recubre la estructura. Fuente. Autor	2
1-2.	Los tres tipos fundamentales de fibras ópticas y comparación de grosor y el índice de refracción del núcleo y el revestimiento para cada uno, así como de la trayectoria de los rayos de luz en el núcleo [41].	3
3-1.	Reflexión en una interfaz plana entre regiones ilimitadas de índices de refracción n_1 y n_2 que muestra (a) reflexión y refracción parcial y (b) reflexión interna total [35].	8
3-2.	La transmisión de un rayo de luz en una perfecta fibra óptica. El índice de refracción n_1 es ligeramente mayor que el índice de refracción n_2 [19].	9
4-1.	(a) Dominio bidimensional Ω con su frontera $\partial\Omega$. (b) Discretización de $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ en elementos finitos $\partial\Omega^e$ con su frontera Γ^e [32].	18
4-2.	Un dominio bidimensional Ω típico con frontera $\partial\Omega$ [32].	19
5-1.	Funciones de Bessel ordinarias. (Izquierda) funciones J_m , (derecha) funciones Y_m . Fuente. Autor	26
5-2.	Funciones de Bessel modificadas. (Izquierda) funciones K_m , (derecha) funciones I_m . Fuente. Autor	26
5-3.	Las configuraciones de campo eléctrico para los tres modos LP más bajos ilustrados en términos de sus modos exactos constituyentes: (a) designaciones de modo LP ; (b) designaciones de modo exacto; (c) distribución del campo eléctrico de los modos exactos; (d) distribución de intensidad de E_x para los modos exactos que indican el perfil de intensidad del campo eléctrico para los modos LP correspondientes [40].	33
5-4.	Constante de fase β normalizada en relación a la constante de fase en el espacio libre, en función de la frecuencia normalizada V [40].	46
6-1.	Perfil bidimensional de una fibra óptica de salto de índice, con radio de núcleo igual $10\ 10\mu$ y radio de revestimiento igual a 100μ	49

6-2.	discretización en elementos finitos generado a partir de la PDEtool de MATLAB para el dominio bidimensional de una fibra óptica multimodo de salto de índice. Fuente. Autor	50
6-3.	Modos normales de propagación en una fibra óptica de salto de índice hallados usando el método de Elementos Finitos, para valores de índice de refracción en el núcleo y revestimiento de 1.5 y 1.49, respectivamente, y una longitud de onda de $900nm$. Fuente. Autor	55
6-4.	Solución gráfica de la ecuación trascendental $\frac{J_{m-1}(p)}{pJ_m(p)} - \frac{K_{m-1}(q)}{qK_m(q)} = 0$ para los modos HE_{mn} . Fuente. Autor	58
6-5.	(a) Índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada V . (b) Error en % cometido al usar el método de elementos finitos. Fuente. Autor . . .	60
6-6.	Modos normales de propagación hallados usando el método analítico, para valores de índice de refracción en el núcleo y revestimiento de 1.5 y 1.49, respectivamente, y una longitud de onda de $900nm$. Fuente. Autor	61
6-7.	Modos evanescentes hallados usando el método de elementos finitos para valores de índice de refracción del revestimiento igual a 1.49 y una longitud de onda de $900nm$. Fuente. Autor	63

Lista de Tablas

5-1.	Correspondencia entre el orden inferior en modos linealmente polarizados y los modos exactos tradicionales a partir de los cuales se forman	32
5-2.	Ecuación de dispersión de los modos guiados en una fibra óptica de salto de índice. Las ecuaciones de dispersión de los modos híbridos EH y HE corresponden a la aproximación de la ecuación 5-63	39
6-1.	Valores de índice de refracción efectivo n_{eff} de los modos de propagación hallados con el método de Elementos Finitos.	51
6-2.	Valores de índice de refracción efectivo n_{eff} de los modos de propagación hallados con el método analítico.	53
6-3.	Valores de índice de refracción efectivo n_{eff} de los modos evanescentes hallados con el método de Elementos Finitos.	54

Contenido

Agradecimientos	VI
Lista de Figuras	VIII
Lista de Tablas	X
Lista de símbolos	XIII
1 Introducción	1
1.1 Por que usar fibras ópticas?	4
2 Antecedentes y Estado Actual del Tema	5
2.1 Evolución de las Fibras ópticas	5
3 Fundamentos Teóricos	7
3.1 Reflexión interna total en fibras ópticas	7
3.2 Propagación de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos.	10
4 Métodos Numéricos	15
4.1 Solución de ecuaciones diferenciales parciales usando la PDEToolbox de MATLAB	15
4.1.1 Descripción de la PDEToolbox	15
4.1.2 Descripción del método de elementos finitos	17
5 Fibras Ópticas	22
5.1 Estudio teórico de la fibra óptica	22
5.1.1 Ecuación característica	29
5.1.2 Cálculo de los modos propagantes	30
5.2 Método aproximado para resolver la ecuación de dispersión para los modos hí- bridos	38
5.3 Constante de fase y frecuencia de corte de los modos en una fibra de índice escalonado	43
5.4 Desfase de grupo y factor de desfase modal	45

6	Simulación numérica y analítica de los modos normales	48
6.1	Uso de la PDEtoolbox de MATLAB	48
6.2	Resultados numéricos	49
6.3	Resultados analíticos	52
6.4	Modos evanescentes	53
7	Conclusión	65
8	Bibliografía	70

Lista de símbolos

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
c	Velocidad de la luz en el vacío	m/s	$1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$
ϵ_0	Permitividad eléctrica del vacío	C^2/Nm^2	$1/c^2\mu_0$
μ_0	Permeabilidad magnética del vacío	Tm/A	$1/c^2\epsilon_0$
ω	Frecuencia angular	rad/s	$2\pi f$
H_x	Componente en la dirección x del campo magnético	A/m	
H_y	Componente en la dirección y del campo magnético	A/m	
H_z	Componente en la dirección z del campo magnético	A/m	
E_x	Componente en la dirección x del campo eléctrico	V/m	
E_y	Componente en la dirección y del campo eléctrico	V/m	
E_z	Componente en la dirección z del campo eléctrico	V/m	
D	Densidad de flujo eléctrico	C/m^2	ϵE
B	Densidad de flujo magnético	$webers/m^2$	μH
n	Índice de refracción	1	c/v
n_1	Índice de refracción del núcleo	1	c/v
n_2	Índice de refracción del revestimiento	1	c/v
D	Densidad de flujo eléctrico	C/m^2	
σ	Conductividad eléctrica	S/m	J/E
J	Densidad de corriente	A/m^2	σE
θ	Ángulo	rad	
θ_c	Ángulo crítico	rad	
ϕ	fase inicial de la onda	rad	
K_0	Número de onda	m^{-1}	$2\pi/\lambda_0$
P	Polarización eléctrica	C/m^2	ϵE

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
r	Radio de la fibra	m	
M	Magnetización del medio	A/m	$\chi_m H$
β	Constante de propagación en un medio dieléctrico	m^{-1}	$2\pi/\lambda$
β_0	Constante de propagación en el vacío	m^{-1}	$2\pi/\lambda_0$
β_{mn}	Constante de propagación de los modos	m^{-1}	$2\pi/\lambda_{mn}$
v_g	Velocidad de grupo	m/s	$d\omega/d\beta$
τ	Tiempo de transito de los modos	s	$1/v_g$
λ	Longitud de onda en un medio dieléctrico	m^{-1}	λ_0/n
λ_0	Longitud de onda en el vacío	m^{-1}	$2\pi/K_0$
δ_{kj}	Delta de Kronecker		
N_g	Índice de grupo	1	c/v_g
f_c	Frecuencia de corte	Hz	$\omega/2\pi$
Δ	Diferencia relativa de índices	1	$\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$
V	Frecuencia normalizada	1	$\frac{2\pi a n_1}{\lambda_0} \sqrt{2\Delta}$
a	Radio del núcleo	m	
Ω	Dominio bidimensional		$\int \int dx dy$
$\partial\Omega$	Contorno		$\oint ds$

1 Introducción

La industria de las fibras ópticas se ha visto favorecida por el desarrollo de las tecnologías de las fuentes ligeras y dispositivos de luz. Desde que aparecieron las fibras ópticas, una ventaja evidente es la reducción en la pérdida de información en la transmisión de datos a grandes distancias. Todo esto ha revolucionado la industria de las telecomunicaciones [1].

Gran parte de las comunicaciones actuales utilizan sistemas de fibras ópticas. Las fibras ópticas responden de forma excelente a la demanda aumentada en las redes de comunicación; esto se debe a que las fibras ópticas utilizan pulsos de luz para transmitir la información [2]. Otra de las principales razones que ha permitido extender el uso de fibras ópticas ha sido el uso creciente de la internet en todo el mundo.

En cuanto a las ventajas de usar fibras ópticas, sobresalen la insensibilidad a las interferencias, la tasa de transferencia de datos, la cual se hace a grandes velocidades. Gracias a estas ventajas son las preferidas en la industria de las telecomunicaciones, siendo precisamente aquí donde encuentran la mayor aplicación en la actualidad. Recientemente ha nacido una ciencia dedicada al estudio de los fenómenos ópticos en donde la unidad implicada es el fotón, esta ciencia recibe el nombre de **FOTÓNICA** [3].

La fotónica abarca un amplio estudio, que van desde sistemas de comunicaciones ópticas, lentes, láseres entre otros. La gran variedad de estudio de la fotónica ha impulsado el desarrollo de las comunicaciones. Dentro del interés de estudio de la fotónica se encuentran las fibras ópticas.

La evolución de estos dispositivos ópticos ha sido gracias al interés de crear fibras que soporten mayores volúmenes de información, reducir las pérdidas de potencia entre estaciones de comunicación. En este sentido el estudio de las fibras ópticas desde el punto de vista de la ciencia y la ingeniería ha sido determinante [1]. En la actualidad el uso de fibras óptica es extenso, a tal punto que está sustituyendo los sistemas tradicionales de comunicación. Gracias a las fibras ópticas se a conseguido acelerar las comunicaciones a larga distancia.

Las diferencias entre los sistemas tradicionales de comunicación y los actuales, los que usan fibras ópticas, son notables. Las fibras ópticas utilizan, comúnmente, fuentes de luz infrarroja, de longitud de onda más larga que la luz visible. Esto es importante ya que evita la dispersión

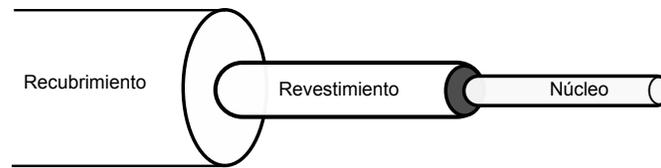


Figura 1-1: Partes de una fibra óptica que muestra el núcleo el revestimiento y la capa que recubre la estructura. Fuente. Autor

causadas por defectos en las fibras; un defecto de material puede ser cualquier cosa tal como un pequeño vacío, una impureza o un cambio local en el índice de refracción.

En definitiva, las fibras ópticas son más seguras, capaces de enviar información a distancias más grandes, con mayor velocidad que los cables metálicos (cobre, plata aluminio). Dentro de las dificultades prácticas sobresale la que surge cuando se rompe una fibra óptica. La reparación de una fibra óptica es una tarea más difícil si se compara con la de un cable tradicional.

Las fibras actuales están compuestas de un material dieléctrico transparente, muy flexible. Una fibra óptica está integrada por una región central o núcleo de la fibra, una región que rodea el núcleo o revestimiento y por último la región compuesta por la cubierta. El núcleo se fabrica con un material de índice de refracción mayor al del revestimiento; en algunos casos el índice de refracción del núcleo es gradual. La cubierta es una región que no presenta importancia a la hora de estudiar los fenómenos ópticos que hacen posible el viaje de la luz en la guía dieléctrica.

En las fibras de salto de índice de refracción, el valor de este es una constante que cambia ligeramente al pasar al revestimiento, el cual a su vez también es constante. El aspecto final del conjunto núcleo, revestimiento y cubierta es parecido al de una fibra, con un grosor pequeño [4].

En la actualidad existen diversos tipos de fibras, en esta variedad no solo los cambios en el índice de refracción son notables, también se han diseñado fibras con configuraciones geométricas en el núcleo que las hacen más eficientes. En la figura 1-2 se muestran los tres principales tipos de fibra [5]. La fibra monomodo de salto de índice (a), que propaga un solo modo en el núcleo, con diámetro de núcleo aproximadamente de 10μ , la fibra multimodo de índice escalonado (b), que propaga más de un modo en el núcleo, con diámetro en el núcleo aproximadamente de 100μ . Por último, la fibra multimodo de índice gradual (c), esta tiene un índice que varía radialmente en el núcleo, siendo su valor máximo en el centro. En todos los casos, los valores del índice de refracción son mayor en el núcleo; una condición necesaria para la propagación de la luz.

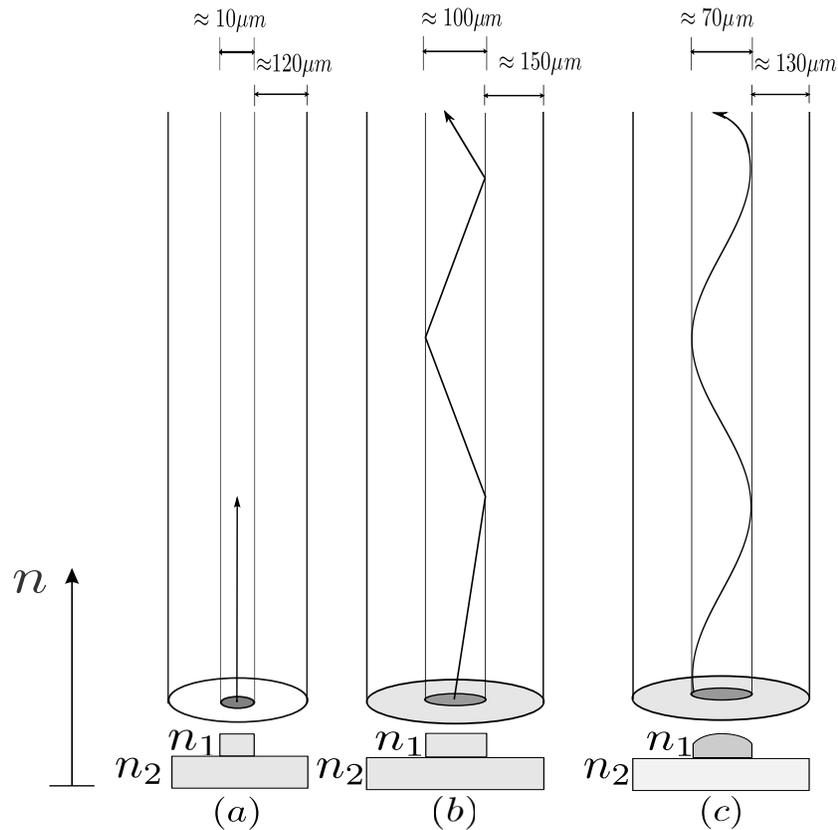


Figura 1-2: Los tres tipos fundamentales de fibras ópticas y comparación de grosor y el índice de refracción del núcleo y el revestimiento para cada uno, así como de la trayectoria de los rayos de luz en el núcleo [41].

En la fabricación de las fibras ópticas se emplea el dióxido de silicio (SiO_4). El dióxido de silicio es un material transparente, muy flexible de alta pureza. Para modificar el valor del índice de refracción de la fibra, el dióxido de silicio es dopado con otros materiales como germanio o pentóxido de fósforo consiguiendo un aumento en el índice de refracción; o bien, si lo que se desea es una reducción de este, entonces se dopa con boro. Los valores más comunes para el índice de refracción varían entre 1 y 1.5. La permitividad relativa del revestimiento es ligeramente menor por menos de 1 % que la permitividad relativa del núcleo. Esta diferencia, aunque pequeña, permite que las ondas electromagnéticas se propaguen a lo largo de la fibra por reflexiones internas sucesivas en la frontera núcleo-revestimiento, lográndose así un efecto de rebote continuo. La configuración de la fibra permite el confinamiento de la onda electromagnética (luz) en el núcleo de la geometría y por lo tanto transmitir de forma longitudinal dicha onda [6].

En principio, las leyes de la óptica geométrica permiten entender el proceso de viaje de la luz por interior de una fibra óptica. Sin embargo, al ser la luz una onda electromagnética, es preferible

usar las leyes de la electrodinámica para entender el comportamiento del campo electromagnético. Esta tarea resulta en ocasiones compleja, ya que solo casos muy particulares se pueden resolver estas ecuaciones en forma analítica. Una alternativa para la solución de las ecuaciones que surgen del estudio en fibras ópticas, consiste en el uso de técnicas numéricas. Las ecuaciones se pueden resolver usando aproximaciones con muy buenos resultados. Los métodos más comunes en estas tareas son el método de las diferencias finitas y el método de los elementos finitos.

1.1. Por que usar fibras ópticas?

A continuación se resumen las ventajas que tiene el uso de fibras ópticas en la actualidad.

- *Larga distancia de transmisión.* Las fibras ópticas tienen menores pérdidas de transmisión en comparación con los cables de cobre. Esto significa que los datos pueden enviarse a distancias más largas, reduciendo así el número de repetidores intermedios necesarios para estos tramos. Esta reducción en equipos y componentes disminuye el costo y la complejidad del sistema.
- *Gran capacidad de información.* Las fibras ópticas tienen anchos de banda más amplios que los cables de cobre, lo que significa que se puede enviar más información a través de una sola línea física. Esta propiedad da como resultado una disminución en el número de líneas físicas necesarias para enviar una cierta cantidad de información.
- *Tamaño pequeño y bajo peso.* El bajo peso y las pequeñas dimensiones de las fibras ofrecen una clara ventaja sobre los cables pesados y voluminosos en conductos subterráneos de la ciudad o en bandejas de cables montadas en el techo. Esto también es importante en aviones, satélites y barcos donde los cables pequeños y livianos son ventajosos, y en aplicaciones militares tácticas donde grandes cantidades de cable deben desenredarse y recuperarse rápidamente.
- *Inmunidad a interferencias eléctricas.* Una característica especialmente importante de las fibras ópticas se relaciona con el hecho de que consisten en materiales dieléctricos, lo que significa que no conducen electricidad. Esto hace que las fibras ópticas sean inmunes a los efectos de interferencia electromagnética observados en los cables de cobre, como la captación inductiva de otros cables adyacentes que transportan señales o el acoplamiento de ruido eléctrico en la línea desde cualquier tipo de equipo cercano.

2 Antecedentes y Estado Actual del Tema

2.1. Evolución de las Fibras ópticas

La transmisión de luz a través de una estructura de guía de onda dieléctrica se propuso e investigó por primera vez a principios del siglo XX [5]. En 1910 Hondros y Debye, en *Electromagnetic waves on the dielectric wire*, presentan un desarrollo analítico para determinar las constantes de propagación de los modos guiados. El trabajo experimental fue desarrollado por Schriever en 1920 [7]. Sin embargo, una guía dieléctrica transparente, construida típicamente de silicio, con índice de refracción alrededor de 1.5, rodeada de aire, demostró ser una fibra poco práctica por las pérdidas excesivas en la interfase vidrio-aire [8].

El interés en la aplicación de guías de onda ópticas dieléctricas en áreas como imágenes ópticas y diagnóstico médico (por ejemplo, endoscopios) llevó a propuestas para una guía dieléctrica revestida a mediados de la década de 1950 con el fin de superar estos problemas [9, 10].

La Segunda Guerra Mundial pareció frenar estos esfuerzos de investigación, al menos temporalmente, el interés fue reestimulado inmediatamente por la demostración de Maiman del láser de rubí en 1960 [11]. La invención de la estructura de guía de ondas revestida condujo a las primeras propuestas serias de Kao y Hockham y Werts, en 1966, para utilizar fibras ópticas como un medio de comunicación, aunque presentaban pérdidas de potencia [8]. Otro estímulo para la investigación y el desarrollo de la fibra vino con la demostración casi simultánea del láser semiconductor enfriado criogénicamente por varios grupos en 1962 [12]. Aunque las pérdidas en la transmisión se mantuvieron muy altas, 1 dB/metro a lo largo de la década de 1960 [13]. Fueron Jones y Kao quienes observaron que estas pérdidas no eran inherentes al vidrio sino que eran causadas por impurezas y que la contribución inherente de la dispersión de Rayleigh a la pérdida del vidrio era extremadamente baja [14]. No fue hasta después de un pionero trabajo de guía de ondas por Kurtz y Streifer, así como la demostración del láser semiconductor a temperatura ambiente por varios grupos en 1970 que Kapron, Keck y Mauer demostraron la primera pérdida baja (menos de 100 dB / km) [15]. Después de este punto, los desarrollos fueron increíblemente rápidos. Para 1975, las primeras líneas troncales de teléfono de fibra óptica con tecnología de semiconductores estaban en tierra. En 1980, la fibra monomodo era el medio de transmisión de prácticamente todos los sistemas telefónicos de larga distancia que se estaban instalando [16]. Hay dos tipos principales de fibras ópticas: fibras clásicas y fibras ópticas microestructuradas.

Las fibras clásicas se han desarrollado desde principios de la década de 1960 como un medio de transmisión para sistemas de telecomunicaciones ópticas de larga distancia [17]. El trabajo sobre las fibras microestructuradas se inició en la década de 1990 para abordar las deficiencias de las fibras de clásicas en varias aplicaciones que generalmente no están relacionadas con las telecomunicaciones. Los trabajos desarrollados por hodros y Debie junto con los desarrollados por E. Snitzer, describen los pasos que conducen a una solución analítica para el problema de fibras con salto de índice [5].

A mediados de la década de 1990, se demostró experimentalmente una nueva clase de fibra óptica microestructurada, denominada fibra de cristal fotónico, que posteriormente ha mostrado el potencial para entregar aplicaciones que van desde la transmisión de luz a través de la distancia hasta implementaciones de dispositivos ópticos (por ejemplo, divisores de potencia, amplificadores, interruptores biestables, convertidores de longitud de onda) [18]. La característica de esta fibra óptica microestructurada es que típicamente contiene una serie de orificios de aire que corren a lo largo del eje longitudinal en lugar de consistir en una estructura de barra de sílice sólida. Además, la presencia de estos orificios proporciona una dimensión adicional al diseño de la fibra que ya ha dado lugar a nuevos desarrollos tanto para guiar como para controlar la luz.

Una solución numérica y analítica desarrollada para simular los modos en una fibra multimodo es la descrita por Blanco Rodriguez, este estudio contiene no solamente la simulación de modos para fibras ópticas de salto de índice, sino también el análisis de modos en fibras de cristal fotónico y fibras bragg [2]. La propuesta hecha por Blanco Rodriguez es el uso del método de elementos finitos para solucionar la ecuación vectorial de Helmholtz. En la misma línea de trabajo Sánchez Berrocal hace simulaciones escalares de fibras de cristal fotónico, las simulaciones de este último se obtiene a partir de la simplificación de la ecuación vectorial de Helmholtz.

Apreciación sobre el modelo escalar y vectorial. Cuando se habla de modelo escalar se hace referencia a la ecuación de Helmholtz que se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell. Este modelo realmente es una simplificación de la ecuación vectorial de onda, ajustado para la comodidad en la búsqueda de la solución analítica, algo que no es posible en el caso de la ecuación vectorial, que como único recurso para la solución son los métodos numéricos. En particular una solución vectorial está mas ajustada a la realidad física del problema.

3 Fundamentos Teóricos

En este capítulo se exponen los fundamentos físico-matemáticos más relevantes que permiten explicar la propagación de la luz en un medio material. Preliminarmente, a partir de la óptica geométrica se deducen los conceptos que explican la propagación de la luz en medios caracterizados por el índice de refracción. Posteriormente, con uso de las ecuaciones de Maxwell se deducirá la ecuación de autovalores que gobierna la distribución del campo transversal eléctrico y magnético de una onda que se propaga en un medio dieléctrico (ecuación vectorial de Helmholtz). A partir de esta última ecuación se llega al modelo simplificado o ecuación escalar de Helmholtz.

3.1. Reflexión interna total en fibras ópticas

En términos de las características directas de lo que ocurre en el interior de una fibra óptica, es conveniente tratar el estudio de la propagación de la luz partiendo de la óptica geométrica.

Las longitudes de onda usadas para la transmisión de luz en las fibras ópticas se encuentran entre valores de 800 nanómetros y 1600 nanómetros. El diámetro del núcleo tiene valores que van desde 10 y 200 micras aproximadamente. Bajo estas circunstancias, la luz puede tratarse como rayos que experimentan reflexión y refracción en la frontera núcleo-revestimiento. De esta manera los frentes de onda electromagnética son vistos como líneas rectas por el objeto en el que inciden, ya que este es muchas veces mayor que las longitudes de onda; teniendo en cuenta lo anterior, una representación de onda plana electromagnética es aceptada.

Cuando la luz que se propaga en un medio pasa abruptamente a otro, la luz experimenta varios cambios. Parte de la luz se refleja en la superficie de separación de los medios y otra se transmite al segundo medio. La dirección de propagación del rayo transmitido es diferente, se dice que ha ocurrido refracción de la luz. Otro hecho importante tiene que ver con la velocidad de la luz en el nuevo medio, pues esta ahora también es diferente; será mayor o menor dependiendo de las características de los medios. Una forma de caracterizar los medios en donde se propaga la luz es a través de la definición de índice de refracción

$$n \equiv \frac{c}{v} \quad (3-1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, v es la velocidad de la luz en un medio diferente al

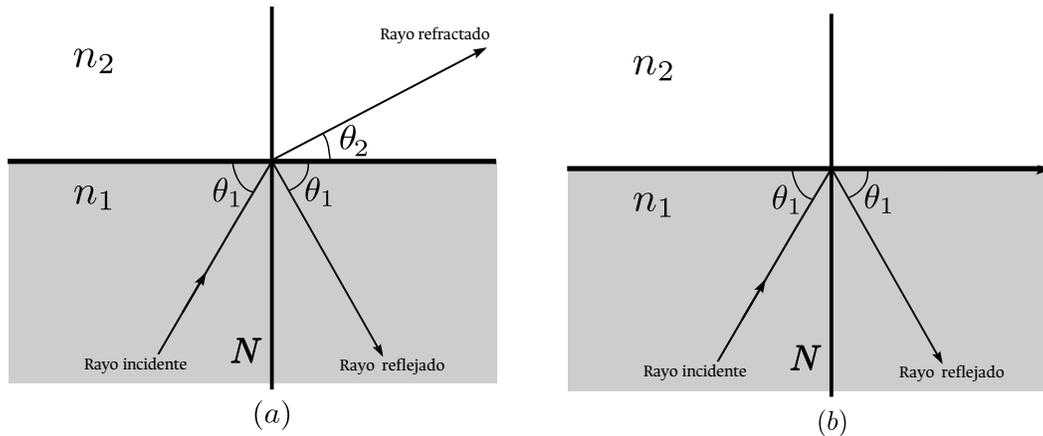


Figura 3-1: Reflexión en una interfaz plana entre regiones ilimitadas de índices de refracción n_1 y n_2 que muestra (a) reflexión y refracción parcial y (b) reflexión interna total [35].

vacío. Como consecuencia, cuando un rayo viaja entre dos medios pueden producirse los fenómenos de reflexión y refracción.

La reflexión se presenta cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios con propiedades diferentes. La onda reflejada tiene un ángulo que, medido con respecto al plano de separación de los medios, coincide con el ángulo formado por la onda incidente; el ángulo reflejado también se mide con respecto al plano de la superficie de separación, tal como se muestra en la figura 3-1(a). En cuanto a la refracción, se observa que en este fenómeno la dirección del rayo incidente cambia cuando atraviesa la interfase. Este cambio de dirección obedece a que la velocidad de la onda refractada es ahora diferente; el valor de velocidad de propagación de la luz en un medio con índice de refracción n_1 , es menor que el valor de la velocidad de propagación en un medio con índice de refracción $n_2 < n_1$.

La reflexión y la refracción de la luz se explican a partir de las leyes de Snell. La relación que indica la refracción de la luz, es:

$$n_1 \cos \theta_1 = n_2 \cos \theta_2. \quad (3-2)$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios, θ_1 es el ángulo que se forma entre el rayo incidente con la parte inferior del plano de separación de los medios y θ_2 se forma entre el rayo refractado con la parte superior del plano de separación de los medios, como se observa en la Figura 3-1(a).

Si se despeja el coseno del ángulo de la onda refractada,

$$\cos \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_1. \quad (3-3)$$

se nota que hay casos donde la refracción es imposible. Si el segundo miembro de la ecuación 3-3 es mayor que uno, entonces el coseno del ángulo es mayor que uno, algo que no puede ocurrir, por lo tanto no habrá refracción; solo se observará el rayo reflejado (reflexión interna total), como se observa en la Figura 3-1(b). El ángulo bajo el cual se observa reflexión interna total recibe el nombre de ángulo crítico, este ángulo se obtiene de la siguiente relación:

$$\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \sin^{-1}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} \quad (3-4)$$

los valores de ángulos menores al crítico también producen reflexión interna total.

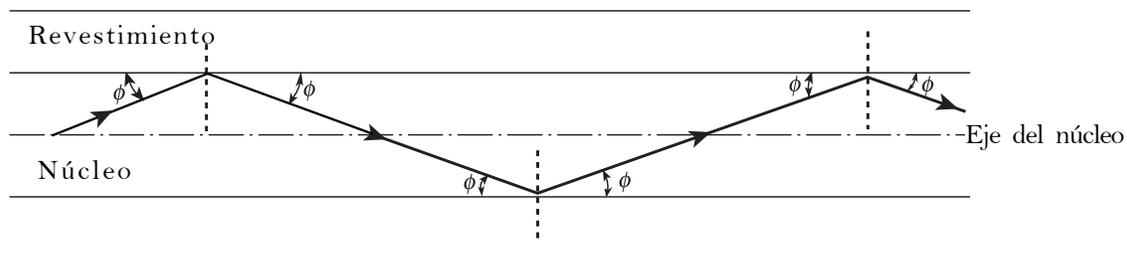


Figura 3-2: La transmisión de un rayo de luz en una perfecta fibra óptica. El índice de refracción n_1 es ligeramente mayor que el índice de refracción n_2 [19].

La propagación de la luz en una fibra óptica se da de la misma manera: la luz incide con un ángulo suficientemente pequeño en la interfase núcleo revestimiento, en donde el núcleo posee un índice de refracción ligeramente mayor al índice de refracción del revestimiento, la onda queda confinada y es guiada por el núcleo de la fibra. La Figura 3-2 ilustra la transmisión de un rayo de luz en una fibra óptica a través de una serie de reflexiones internas totales en la interfaz del núcleo y el revestimiento. El rayo tiene un ángulo de incidencia θ en la interfaz que es menor que el ángulo crítico, y se refleja con el mismo ángulo de incidencia. El rayo de luz que se muestra en la Figura 3-2 se conoce como rayo meridional a medida que pasa a través del eje del núcleo de la fibra [19]. Este tipo de rayo es el más simple de describir, y generalmente se usa para ilustrar las propiedades fundamentales de transmisión de las fibras ópticas.

Hay que resaltar que la transmisión de luz que se ilustra en la Figura 3-2 supone una fibra perfecta, y que cualquier discontinuidad o imperfección en la interfaz de revestimiento del núcleo probablemente resultaría en una refracción en lugar de una reflexión interna total, con la consiguiente pérdida del rayo de luz en el revestimiento. La invarianza traslacional del rayo reflejado se puede expresar por medio de una cantidad que relaciona el índice de refracción de núcleo y los ángulos que producen reflexión interna total [4]. Este invariante se puede deducir de la ley de Snell: $\beta = n_1 \cos(\theta)$, donde θ es cualquier ángulo menor o igual al ángulo crítico.

3.2. Propagación de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos.

La propagación de cualquier ondas electromagnética se rige clásicamente por las ecuaciones de Maxwell [20, 21]. Las cuatro ecuaciones de Maxwell, junto con la ecuación de conservación de la carga y las ecuaciones constitutivas del material, permiten estudiar cualquier fenómeno relacionado con la transmisión de ondas electromagnéticas. [22] Estas ecuaciones son las que, a continuación, se exponen:

- Ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3-5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (3-6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (3-7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3-8)$$

- Ecuación de conservación de la carga:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (3-9)$$

- Ecuaciones constitutivas de la materia:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (3-10)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (3-11)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (3-12)$$

siendo

\vec{E} : Intensidad de campo eléctrico,

\vec{B} : Inducción magnética,

\vec{J} : Densidad de corriente eléctrica,

\vec{H} : Intensidad de campo magnético,

\vec{D} : Inducción eléctrica,

ρ : Densidad de carga eléctrica,

ϵ : Permitividad eléctrica,

μ : Permeabilidad magnética,

\vec{P} : Polarización eléctrica del medio,

\vec{M} : Polarización magnética del medio,

σ : Conductividad eléctrica.

En estas ecuaciones el campo eléctrico y magnético se encuentran acoplados, por lo que hallando uno de ellos se obtiene el otro.

En la mayoría de los canales de comunicación inalámbrica, la información es transmitida por una onda electromagnética sinusoidal (tiempo-armónico) con una frecuencia portadora, es decir un campo variable en el tiempo que puede ser representado por la forma de un fasor $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{H}(\vec{x}, t)$ con una frecuencia angular portadora ω [23]. En forma más precisa, el campo eléctrico y magnético se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{H}(\vec{x}) \exp(i\omega t) \quad (3-13)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) \exp(i\omega t) \quad (3-14)$$

donde ω es la frecuencia angular e $i = \sqrt{-1}$. Considerando el medio isotrópico no magnético ($\vec{M} = 0$) y sin cargas ni corrientes ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$), la representación en fasores del campos eléctrico y magnético reemplazada en las ecuaciones de Maxwell conducen a nuevas ecuaciones independientes del tiempo [24]:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial(\mu\vec{H}(\vec{x}, t))}{\partial t}, \quad (3-15)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = -(i\omega)\mu_0\vec{H}(\vec{x}), \quad (3-16)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{\partial(\epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}, t))}{\partial t}, \quad (3-17)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{x}) = (i\omega)\epsilon_0 n^2(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}), \quad (3-18)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{x}, t) = 0, \quad (3-19)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{x}) = 0, \quad (3-20)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}, t)) = 0, \quad (3-21)$$

$$\nabla \cdot (n^2(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})) = 0. \quad (3-22)$$

donde $\epsilon(\vec{\mathbf{x}}) = \epsilon_0 n^2(\vec{\mathbf{x}})$, ϵ_0 y μ_0 son respectivamente, la permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética en el vacío y n es el índice de refracción del medio material [2]. Despejando $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}})$ de la ecuación 3-18 y reemplazado en en la ecuación 3-16 se llega:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{n^2(\vec{\mathbf{x}})} \nabla \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}) \right] = k_0^2 \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}), \quad (3-23)$$

donde $k_0^2 \equiv \frac{\omega_0^2}{c^2}$. Despejando $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}})$ de la ecuación 3-16 y sustituyendo en la ecuación 3-18 se tiene

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}})) = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}). \quad (3-24)$$

La solución $\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}})$ y $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}})$ pueden escribirse como una combinación lineal de las soluciones transversales y longitudinales

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}) = \left[\vec{\mathbf{h}}_t(\vec{\mathbf{x}}_t) + h_z \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-i\beta z} \quad (3-25)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}) = \left[\vec{\mathbf{e}}_t(\vec{\mathbf{x}}_t) + e_z \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-i\beta z}, \quad (3-26)$$

donde $\vec{\mathbf{h}}_t$ y $\vec{\mathbf{e}}_t$ denotan las componentes transversales del campo magnético y el campo eléctrico respectivamente. En un medio invariante bajo traslación longitudinal, el índice de refracción n es una función de las coordenadas transversales $\vec{\mathbf{x}} = (x, y)$.

Se ha elegido la propagación de la onda en la dirección del eje z , siendo β la constante de propagación. El operador ∇ , se puede escribir como la suma de dos operadores, uno que actúa sobre las componentes transversales y otro actuando sobre la componente longitudinal $\nabla_t + \nabla_z = \nabla_t - i\beta \hat{\mathbf{z}}$. De esta forma es más fácil operar sobre los campos. Reemplazando 3-25 en 3-23, se tiene

$$\left(\nabla_t - i\beta \hat{\mathbf{z}} \right) \times \left(\frac{1}{n^2(\vec{\mathbf{x}})} \left(\nabla_t - i\beta \hat{\mathbf{z}} \right) \times \left(\vec{\mathbf{h}}_t + h_z \hat{\mathbf{z}} \right) \right) = k_0 \left(\vec{\mathbf{h}}_t + h_z \hat{\mathbf{z}} \right). \quad (3-27)$$

De la ecuación 3-27 se obtienen las componentes transversales y longitudinal del campo magnético. Efectuando primero el siguiente producto vectorial, para calcular una expresión en términos de $\vec{\mathbf{h}}_t$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_t - i\beta \hat{\mathbf{z}} \right) \times \left(\frac{1}{n^2(\vec{\mathbf{x}})} \left(\nabla_t \times \vec{\mathbf{h}}_t + \nabla_t \times h_z \hat{\mathbf{z}} - i\beta \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{h}}_t - i\beta \hat{\mathbf{z}} \times h_z \hat{\mathbf{z}} \right) \right) \\ = k_0 \left(\vec{\mathbf{h}}_t + h_z \hat{\mathbf{z}} \right). \end{aligned} \quad (3-28)$$

Las operaciones algebraicas sobre 3-28 conducen a la siguiente forma:

$$\left(\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(\vec{\mathbf{x}}) \right) \vec{\mathbf{h}}_t + \nabla_t \ln(n^2(\vec{\mathbf{x}})) \times \nabla_t \times \vec{\mathbf{h}}_t = \beta^2 \vec{\mathbf{h}}_t. \quad (3-29)$$

Las componentes transversales h_x y h_y de 3-29 son:

$$\left(\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(\vec{x})\right) h_x + \frac{\partial \ln(n^2(\vec{x}))}{\partial y} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right) = \beta^2 h_x. \quad (3-30)$$

$$\left(\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(\vec{x})\right) h_y + \frac{\partial \ln(n^2(\vec{x}))}{\partial x} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x}\right) = \beta^2 h_y. \quad (3-31)$$

Del desarrollo del producto vectorial restante en la ecuación 3-27 conduce a la expresión que contiene el término del campo magnético longitudinal.

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left[\frac{1}{n^2(\vec{x})} \left(\nabla_t \times h_z \hat{z} \right) \right] &= \nabla_t \frac{1}{n^2(\vec{x})} \times \nabla_t \times h_z \hat{z} \\ &+ \frac{1}{n^2(\vec{x})} \nabla_t \times \left(\nabla_t \times h_z \hat{z} \right), \end{aligned} \quad (3-32)$$

efectuando los productos en cuestión, se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left(k_0^2 n^2(\vec{x}) + \nabla_t^2 \right) h_z - i\beta \left(h_x \frac{\partial \ln^2(\vec{x})}{\partial x} + h_y \frac{\partial \ln^2(\vec{x})}{\partial y} \right) = \\ \beta^2 h_z + \left(\frac{\partial \ln^2(\vec{x})}{\partial x} \frac{\partial h_z}{\partial x} + \frac{\partial \ln^2(\vec{x})}{\partial y} \frac{\partial h_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3-33)$$

Las ecuaciones 3-30, 3-31 y 3-33 son ecuaciones diferenciales no homogéneas, acopladas de tipo vectorial, en cada caso, la solución representa la distribución del campo magnético de las dos componentes transversales y en la componente longitudinal. En cuanto a las componentes del campo eléctrico se deduce que estas presentan formas similares a las componentes del campo magnético, así que basta con estudiar solo las componentes del campo magnético.

Estas ecuaciones tal y como se presentan no poseen soluciones analíticas conocidas, y pueden representar un problema en un medio bidimensional caracterizado por el índice de refracción junto con las condiciones periódicas y de frontera.

La ecuación escalar proviene de suponer que los gradientes de los logaritmos se pueden despreciar en comparación con el resto de términos presentes en las ecuaciones, esta suposición se cumple para el dominio que pertenece al núcleo y el revestimiento, pues para una fibra en donde el índice de refracción es constante, las derivadas parciales del logaritmo natural del índice de refracción se hacen cero, no obstante en la interfase esto no ocurre. Así las ecuaciones a resolver, despreciando el término de acoplamiento $\nabla_t \ln(n^2(\vec{x}))$ en las ecuaciones 3-30, 3-31 y 3-33 son formas simplificadas de la ecuación vectorial de onda

$$\left(\nabla_t^2 + K_0^2 n^2(\vec{x})\right) h_x = \beta^2 h_x. \quad (3-34)$$

$$\left(\nabla_t^2 + K_0^2 n^2(\vec{x})\right) h_y = \beta^2 h_y. \quad (3-35)$$

$$\left(K_0^2 n^2(\vec{x}) + \nabla_t^2\right) h_z = \beta^2 h_z. \quad (3-36)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver completamente usando todas los elementos presentes en la PDEToolbox de MATLAB. Se nota que la ecuación 3-29 sin el término de acoplamiento, produce una forma tal que las componentes transversales de los campos se solapan en una sola; es decir que para las componentes del campo magnético h_x y h_y tendrán un mismo comportamiento cuando se determinen las simulaciones de las dos componentes. Se notará que la distribución de las dos componentes transversales eléctricas y magnéticas de la onda propagante serán iguales con un desfase que las diferencia.

4 Métodos Numéricos

En el capítulo anterior se llegó a un modelo vectorial de la ecuación de onda representado por la ecuación 3-33, que derivó las ecuaciones escalares 3-34, 3-35 y 3-36. Estas últimas ecuaciones se pueden resolver analíticamente, no obstante, se dará una demostración de la solución del mismo problema usando el método de elementos finitos [25, 26].

En el presente capítulo se describirá brevemente las características más importante de la herramienta PDEToolbox de MATLAB. Esta herramienta permite solucionar en forma numérica ecuaciones diferenciales parciales. Como se verá, en la solución de estas ecuaciones, la PDEToolbox usa el método de elementos finitos en dominios bidimensionales.

Se abordará, sin mayores detalles, las características más importantes del método de elementos finitos, tales como: discretización del dominio, formulación débil del problema, condiciones de contorno, etc.

4.1. Solución de ecuaciones diferenciales parciales usando la PDEToolbox de MATLAB

4.1.1. Descripción de la PDEToolbox

La PDEToolbox de MATLAB es una herramienta que permite solucionar en forma numérica algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. la solución de estas ecuaciones se consigue con el uso del método de elementos finitos incorporado en la PDEToolbox.

Existen dos formas de usar el PDEToolbox de MATLAB: la línea de comandos y el entorno PDETool [27]. La función PDETool conduce a un entorno gráfico, desde donde se pueden definir parámetros de entrada en forma directa. Desde la PDETool se puede crear geometrías 2D, dibujando, rotando y combinando las formas básicas: círculos, elipses, rectángulos y polígonos; en el contorno de las geometrías se pueden establecer diferentes tipos de condiciones, las predefinidas son de tipo Dirichlet, estas se pueden cambiar con las condiciones tipo Neumann o combinaciones de las dos, condiciones de frontera tipo Robin.

Todas las ecuaciones que se pueden resolver con esta herramienta presentan coeficientes que pueden ser constantes o funciones del espacio y tiempo. Estas condiciones se pueden especificar por región; se pueden especificar los coeficientes en cualquier momento antes de resolver la ecuación diferencial porque los coeficientes son independientes de la geometría y de la frontera. El mallado triangular se consigue seleccionando **Initialize Mesh** en el menú **Mesh**. Para mas detalles del uso de la PDETool puede ver [28]. Usando el mismo menú, también puede refinar la malla, mostrar etiquetas de nodo y triángulo, y controlar los parámetros de la malla, lo que le permite generar una malla que sea lo suficientemente fina como para resolver adecuadamente las características importantes en la geometría, pero que sea lo suficientemente gruesa como para ejecutarse de manera razonable en cantidad de tiempo y memoria.

Otra elección para tener acceso a este potente paquete, es haciendo uso directo de las funciones de la PDETool, esto permite una mayor libertad para resolver problemas con el método de elementos finitos. Para el desarrollo de este trabajo se ha preferido el editor de códigos de MATLAB. Los pasos para realizar los cálculos computacionales usando la PDEToolbox, tanto en el entorno gráfico como en el uso directo de las funciones, son los siguientes:

- Definir la geometría. La PDETool solo permite realizar geometrías bidimensionales, esta geometría se representa por medio de una matriz donde se establece la información referente a la discretización del dominio.
- Mallado de la geometría. MATLAB dispone de una poderosa herramienta para realizar mallados automáticamente; también, permite refinar la malla según sea necesario.
- Imposición de condiciones de contorno. Las condiciones de contorno que se pueden establecer con el uso de este toolbox, son de tipo Neumann, Dirichlet, Robin (Neumann generalizadas), mixtas para el caso que se tenga un sistema de ecuaciones
- Definición de los coeficientes del problema. Los coeficientes pueden ser constantes, o ser funciones de las coordenadas espaciales y del tiempo, según el problema a resolver.
- Selección de la ecuación a resolver. Las ecuaciones que se pueden resolver son todas de tipo escalar. Estas constituyen un conjunto de cinco ecuaciones diferenciales parciales

1. **Ecuación parabólica**

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f. \quad (4-1)$$

2. **Ecuación elíptica**

$$- \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f. \quad (4-2)$$

3. **Ecuación elíptica no lineal**

$$- \nabla \cdot (c(u)\nabla u) + a(u)u = f(u). \quad (4-3)$$

4. Ecuación hiperbólica

$$d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f. \quad (4-4)$$

5. Problema de autovalores

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda u. \quad (4-5)$$

Para las ecuaciones parabólica e hiperbólicas, los coeficientes c , d , a , y f pueden tener dependencia de las coordenadas espaciales (x, y) y del tiempo, en tanto que en el resto solo dependen del espacio.

- Visualización de los resultados. Para la visualización de resultados, la PDETool tiene implementada funciones que permiten la generación de resultados visuales, esto es una gran ventaja, ya que no se recurre a funciones generales de MATLAB.

4.1.2. Descripción del método de elementos finitos

Existen muchos métodos para resolver problemas de valor en la frontera. Uno de los métodos más poderosos es el de los elementos finitos. Con este método se pueden resolver problemas definidos en dominios unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales.

Como el presente proyecto tiene como objetivo mostrar simulaciones bidimensionales, se aborda la temática del método numérico en este dominio.

Para una región bidimensional, el dominio se divide en dos partes: la región interior y la frontera, $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, como se muestra en la figura 4-1. El dominio interior se divide en un conjunto de subdominios $\bar{\Omega}^e = \Omega^e + \partial\Omega^e$ llamados elementos finitos [29]. Los subdominios están representados por geometrías elementales (triángulos, cuadriláteros), en los vértices o nodos de estas geometrías se aproxima la solución mediante funciones lineales o cuadráticas definidas a trozos [30]. Generalmente las funciones de aproximación son de tipo lineal, esto conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas que se pueden resolver mediante cualquier método existente para este tipo de problemas (factorización, cálculo de inversa).

La aproximación de la solución $u(X)$ sobre un elemento finito del dominio solución del problema, se consigue expandiendo $u(X)$ en una base del subespacio de búsqueda V_{N_p} , el cual pertenece a un espacio vectorial V , de dimensión finita e igual al número de nodos de la malla. De acuerdo a esto esta aproximación se puede escribir de la siguiente manera:

$$u(X) \approx u_i^e(X) = \sum_{j=1}^N u_j^e \psi_j^e(X), \quad X = (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (4-6)$$

donde u_j^e denota el valor de la función $u_i^e(X)$ para un conjunto de puntos (nodos del elemento) en el elemento $\bar{\Omega}^e$ y ψ_j^e son funciones de interpolación de Lagrange asociadas con el elemento [31]. Las funciones de interpolación dependen no solo del número de nodos en el elemento, sino también de la forma del elemento. La forma del elemento debe ser tal que su geometría esté definida de manera única por un conjunto de nodos y la función aproximada varía entre los nodos de acuerdo con la aproximación adoptada. Un triángulo es la forma geométrica bidimensional más simple en dos dimensiones porque está definido de forma única por tres puntos ($n = 3$) en un plano y la función aproximada varía entre dos puntos de acuerdo con:

$$u_i^e(X) = c_1^e + c_2^e x + c_3^e y \quad (4-7)$$

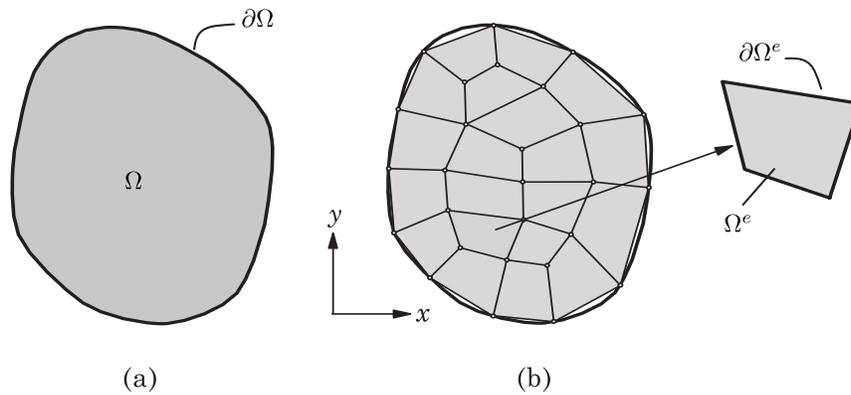


Figura 4-1: (a) Dominio bidimensional Ω con su frontera $\partial\Omega$. (b) Discretización de $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ en elementos finitos $\partial\Omega^e$ con su frontera Γ^e [32].

Para explicar el método de elementos finitos, aplicamos la formulación débil o modelo de Ritz a las ecuaciones 3-34 y 3-35

$$\left(\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(\vec{x}) \right) h_x = \beta^2 h_x. \quad (4-8)$$

$$\left(\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(\vec{x}) \right) h_y = \beta^2 h_y. \quad (4-9)$$

definidas en un dominio bidimensional Ω , en este dominio h_x y h_y constituyen la solución del problema, con condiciones de contorno Robin $\partial\Omega$:

$$\vec{n} \cdot \nabla h_x + q h_x = 0. \quad (4-10)$$

$$\vec{n} \cdot \nabla h_y + q h_y = 0. \quad (4-11)$$

Al multiplicar las ecuaciones 4-8 y 4-9 por una función de prueba ω continua, con primeras derivadas parciales sobre Ω , e integrando sobre Ω , se llega a la forma variacional débil [32].

$$\int_{\Omega} \omega \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) + k_0^2 n^2 h_x - \beta^2 h_x \right) dy dx = 0. \quad (4-12)$$

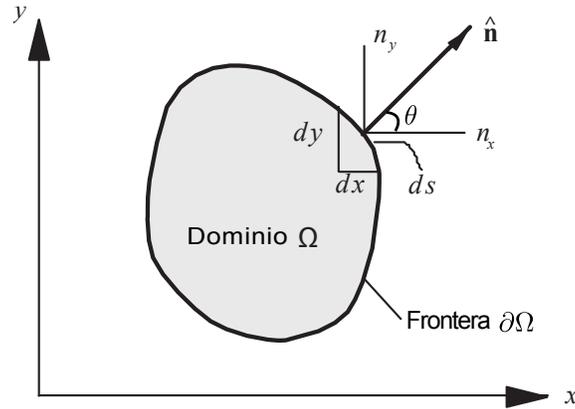


Figura 4-2: Un dominio bidimensional Ω típico con frontera $\partial\Omega$ [32].

$$\int_{\Omega} \omega \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) + k_0^2 n^2 h_y - \beta^2 h_y \right) dy dx = 0. \quad (4-13)$$

Para simplificar los cálculos en las ecuaciones 4-12 y 4-13, sea

$$F_1 = \frac{\partial h_x}{\partial x} \quad (4-14)$$

$$F_2 = \frac{\partial h_y}{\partial y} \quad (4-15)$$

reescribiendo 4-12 y 4-13, se tiene :

$$\int_{\Omega} \omega \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 \right) + k_0^2 n^2 h_x - \beta^2 h_x \right) dy dx = 0. \quad (4-16)$$

$$\int_{\Omega} \omega \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 \right) + k_0^2 n^2 h_y - \beta^2 h_y \right) dy dx = 0. \quad (4-17)$$

De la derivada del producto entre funciones y con el uso del teorema de la divergencia, las integrales 4-16 y 4-17 se transforman en:

$$\int_{\Omega} \left(- \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial h_x}{\partial x} \right) + k_0^2 n^2 h_x \omega - \beta^2 h_x \omega \right) dy dx + \oint_{\partial\Omega} \left(\omega \frac{\partial h_x}{\partial x} n_x + \omega \frac{\partial h_x}{\partial y} n_y \right) ds = 0. \quad (4-18)$$

$$\int_{\Omega} \left(- \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) + k_0^2 n^2 h_y \omega - \beta^2 h_y \omega \right) dy dx + \oint_{\partial\Omega} \left(\omega \frac{\partial h_y}{\partial x} n_x + \omega \frac{\partial h_y}{\partial y} n_y \right) ds = 0. \quad (4-19)$$

en las ecuaciones 4-18 y 4-19, n_x y n_y son las componentes del vector unitario perpendicular al contorno $\partial\Omega$

$$\hat{n} = \cos(\theta)\hat{i} + \sen(\theta)\hat{j} \quad (4-20)$$

la condición de contorno impuesta reduce las ecuaciones 4-18 y 4-19 a la forma siguiente:

$$\int_{\Omega} \left(- \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial h_x}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial h_x}{\partial x} \right) + k_0^2 n^2 h_x \omega - \beta^2 h_x \omega \right) dydx = 0. \quad (4-21)$$

$$\int_{\Omega} \left(- \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial h_y}{\partial x} \right) + k_0^2 n^2 h_y \omega - \beta^2 h_y \omega \right) dydx = 0. \quad (4-22)$$

Las ecuaciones 4-21 y 4-22 representan la forma débil de las ecuaciones 4-8 y 4-9. El siguiente paso es determinar una aproximación sobre un típico elemento de la discretización. La forma débil en las ecuaciones 4-21 y 4-22 requiere que la aproximación elegida para h sea al menos lineal tanto en x como en y para que cada término en la ecuación 4-17 tenga una contribución distinta de cero para la integral. Como la variable principal es solo h , que debe ser continua entre los elementos, la familia de funciones de interpolación de Lagrange es admisible [33]. Por lo tanto, h se aproxima sobre un típico elemento finito Ω^e por la expresión

$$h(x, y) \approx h_i^e(x, y) = \sum_{j=1}^N h_j^e \psi_j^e(x, y) \quad (4-23)$$

donde h_j^e es el valor de h_i^e para el j -ésimo nodo del elemento y ψ_j^e son las funciones de interpolación de Lagrange, con la propiedad

$$\psi_k^e(x_j, y_j) = \delta_{kj} \quad (4-24)$$

donde (x_j, y_j) es la coordenada global del j -ésimo nodo del elemento Ω^e . Sustituyendo la aproximación del elemento finito 4-21 para h_x en 4-19 y h_y en 4-20 se obtiene:

$$\int_{\Omega} - \left[\frac{\partial\omega}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^N h_{xj}^e \frac{\partial\psi_j^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial\omega}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^N h_{xj}^e \frac{\partial\psi_j^e}{\partial y} \right) \right] + \int_{\Omega} \left(\omega n^2 k_0^2 \sum_{j=1}^N h_{xj}^e \psi_j^e - \omega \beta^2 \sum_{j=1}^N h_{xj}^e \psi_j^e \right) dydx = 0. \quad (4-25)$$

$$\int_{\Omega} - \left[\frac{\partial\omega}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^N h_{yj}^e \frac{\partial\psi_j^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial\omega}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^N h_{yj}^e \frac{\partial\psi_j^e}{\partial y} \right) \right] + \int_{\Omega} \left(\omega n^2 k_0^2 \sum_{j=1}^N h_{yj}^e \psi_j^e - \omega \beta^2 \sum_{j=1}^N h_{yj}^e \psi_j^e \right) dydx = 0. \quad (4-26)$$

La función ω se elige como una de las funciones base (ψ_i^e) del subespacio vectorial

$$\int_{\Omega} - \left[\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^N h_{xj}^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^N h_{xj}^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) \right] + \int_{\Omega} \left(\psi_i^e n^2 k_0^2 \sum_{j=1}^N h_{xj}^e \psi_j^e - \psi_i^e \beta^2 \sum_{j=1}^N h_{xj}^e \psi_j^e \right) dy dx = 0. \quad (4-27)$$

$$\int_{\Omega} - \left[\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^N h_{yj}^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^N h_{yj}^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) \right] + \int_{\Omega} \left(\psi_i^e n^2 k_0^2 \sum_{j=1}^N h_{yj}^e \psi_j^e - \psi_i^e \beta^2 \sum_{j=1}^N h_{yj}^e \psi_j^e \right) dy dx = 0. \quad (4-28)$$

Las expresiones 4-25 y 4-26 se pueden representar de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \left[- \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + \psi_i^e n^2 k_0^2 \psi_j^e - \psi_i^e \beta^2 \psi_j^e \right] dy dx \right\} h_j^e = 0, \quad (4-29)$$

$$0 = \sum_{j=1}^N K_{ij}^e h_j^e + \beta^2 \sum_{j=1}^N R_{ij}^e h_j^e, \quad (4-30)$$

donde

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega} \left[- \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + \psi_i^e n^2 k_0^2 \psi_j^e \right] dy dx, \quad (4-31)$$

$$R_{ij}^e = \int_{\Omega} \psi_i^e \psi_j^e dy dx, \quad (4-32)$$

son matrices cuadradas de $N \times N$ y simétricas. La expresión 4-30 representa el modelo de elementos finitos de las ecuaciones 4-8 y 4-9.

Una vez calculado los valores propios β o constante de propagación de los modos que viajan en la fibra, se podrá tener la representación de la distribución de la intensidad del campo eléctrico y magnético correspondiente a cada modo en la guía dieléctrica. El modelo 4-30 está contenido en la PDEtoolbox de MATLAB, y será usado para resolver el problema en forma numérica.

5 Fibras Ópticas

Es posible determinar una solución analítica para el problema de la propagación de la luz en fibras de índice escalonado. Tal desarrollo por lo general es complejo, aun tratándose de fibras con geometrías elementales como las que estamos estudiando. En este capítulo se hará todo el desarrollo analítico que conduce a la ecuación característica de los modos en una fibra óptica multimodo de salto de índice, se llegará a las formas explícitas de las componentes de los modos transversales eléctricos TE , transversales magnéticos TM y los modos híbridos. Se tratará, en lo posible, con detalles los procedimientos, brindado así una mejor comprensión del problema a solucionar.

5.1. Estudio teórico de la fibra óptica

La distinción entre guías de ondas metálicas y dieléctricas está en el mecanismo de reflexión responsable de limitar la energía. La guía metálica lo hace por reflexión de un buen conductor en el límite. En la guía de onda dieléctrica, esto se logra mediante la reflexión interna total, que se obtiene al hacer que el dieléctrico central esté hecho de un material de mayor índice de refracción que el dieléctrico circundante. En adelante, las dos regiones se denominarán núcleo y revestimiento [17]. El estudio teórico de la propagación de la luz en fibras multimodo de índice escalonado, como se mencionó, requiere de cálculos complicados. Sin embargo, la forma cilíndrica de la fibra ayuda en la simplificación de los cálculos.

La guía de onda dieléctrica cilíndrica consiste en un núcleo de constante dieléctrica alta ϵ_1 y radio a rodeado por un revestimiento de constante dieléctrica inferior ϵ_2 . Se supone que ambas regiones son aislantes perfectos con la permeabilidad magnética de espacio libre μ_0 . Dicha estructura puede tener un número infinito de modos, pero para valores dados de ϵ_1 , ϵ_2 y a solo un número finito de estos son modos de guía de onda que tienen sus campos localizados en la vecindad del núcleo. Los campos electromagnéticos, representados como una onda plana que viaja en la dirección del eje z en coordenadas cilíndricas, se expresan de la siguiente manera

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \vec{E}(r, \theta)e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (5-1)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z, t) = \vec{H}(r, \theta)e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (5-2)$$

donde $\vec{\mathbf{E}}(r, \theta)$ y $\vec{\mathbf{H}}(r, \theta)$ son fasores del campo eléctrico y magnético, respectivamente, β es la constante de propagación; generalmente cada modo que se propaga en la fibra posee un único valor de esta constante. En consecuencia, las ondas tienen una velocidad de fase $v = \omega/\beta$, donde ω la frecuencia angular. Con esta representación del campo eléctrico y magnético propagándose en la dirección del eje z , en un medio libre de cargas, con magnetización despreciable, la sustitución adecuada en las ecuaciones 5-1 y 5-2 en las ecuaciones de Maxwell 3-4 y 3-5, permiten deducir las expresiones para las componentes del campo eléctrico y magnético que viaja en la fibra óptica.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 j\omega \vec{\mathbf{H}}(r, t). \quad (5-3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \epsilon j\omega \vec{\mathbf{E}}(r, t). \quad (5-4)$$

Como el problema tiene simetría cilíndrica, el rotacional del campo eléctrico en la ecuación 5-3 en este sistema de coordenadas es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\theta & E_z \end{vmatrix} = \quad (5-5)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial z} \right] \hat{a}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial(E_z)}{\partial r} \right] \hat{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(E_r)}{\partial \theta} \right] \hat{a}_z.$$

Cada una de estas componentes se iguala a las componentes de 5-3 para obtener:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial z} \right] = -j\omega\mu_0 H_r, \quad (5-6)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 H_\theta, \quad (5-7)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -j\omega\mu_0 H_z. \quad (5-8)$$

Si se reemplazan las derivadas con respecto z en 5-6 y 5-7 se llega a:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial E_z}{\partial \theta} + jr\beta E_\theta \right] = -j\omega\mu_0 H_r, \quad (5-9)$$

$$j\beta E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} = j\omega\mu H_\theta, \quad (5-10)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -j\omega\mu_0 H_z. \quad (5-11)$$

Un procedimiento similar sobre la ecuación 5-4, conduce a:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + jr\beta H_\theta \right] = j\omega\epsilon E_r, \quad (5-12)$$

$$j\beta H_r + \frac{\partial H_z}{\partial r} = -j\omega\epsilon E_\theta, \quad (5-13)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = j\omega\epsilon E_z, \quad (5-14)$$

Los procedimientos que siguen se resumen en despejar todas las componente sin derivar, ya sean que provengan del conjunto formado por 5-9 - 5-11, para luego sustituir en el conjunto dado por 5-12 a 5-14, o viceversa; esto permite expresar todas las componentes, tanto del campo eléctrico como magnético, en términos de las derivadas de las componentes en z en ambos campos. En virtud de lo anterior, se encuentra que:

$$E_\theta = \frac{1}{h^2} \left[j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{j\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right] \quad (5-15)$$

$$H_\theta = -\frac{1}{h^2} \left[j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{j\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right] \quad (5-16)$$

$$E_r = -\frac{1}{h^2} \left[\frac{\omega\mu_0 j}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \quad (5-17)$$

$$H_r = -\frac{j}{h^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega\epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right] \quad (5-18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + h^2 E_z = 0 \quad (5-19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + h^2 H_z = 0, \quad (5-20)$$

donde $h^2 \equiv \omega^2\epsilon\mu_0 - \beta^2$.

Como las ecuaciones 5-19 y 5-20 son lineales, la solución se puede determinar con el uso del método de separación de variables [34]. En cada caso la solución planteada es un producto de dos funciones con variables independientes, $R(r)\Theta(\theta)$; la solución $R(r)$ con la dependencia del radio, y $\Theta(\theta)$ con la dependencia azimutal. Reemplazando esta solución en 5-19 se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + h^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (5-21)$$

Los miembros en ambos lados de 5-21 son iguales sólo si cada uno de ellos se iguala a una constante de separación. Por lo tanto, igualando cada miembro a la constante m^2 , se tiene:

$$\frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + h^2 r^2 = m^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}. \quad (5-22)$$

Resolviendo para Θ se llega a:

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos(m\theta) + C_2 \sin(m\theta). \quad (5-23)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración.

Ordenando la ecuación diferencial $\frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + h^2 r^2 = m^2$, se tiene:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (r^2 h^2 - m^2) R = 0, \quad m \geq 0 \quad (5-24)$$

La solución de 5-24 es una combinación lineal de las funciones de Bessel $J_m(rh)$ y $Y_m(rh)$, donde J_m y Y_m son las funciones de Bessel de primera y segunda especie [35, 36, 37], respectivamente, con $m = 0, 1, 2, \dots$. La solución general para la propagación de la onda electromagnética, dada por la ecuación diferencial de Bessel, es:

$$R(r) = C_3 J_m(rh) + C_4 Y_m(rh) \quad (5-25)$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración.

La figura 5-1 muestra que las funciones Y_m no están definidas en el origen de coordenadas. Como parte de la solución un requisito indispensable es que las soluciones estén definidas en el origen; es decir, la propagación del campo electromagnético incluye esta región de la fibra. Para resolver este problema, se toma $C_4 = 0$ en la solución general, por lo tanto, la solución 5-25 se reduce a:

$$R(r) = C_3 J_m(rh) \quad (5-26)$$

Así, la solución en el núcleo de fibra, tanto para $E_z(r, \theta, z)$ como para $H_z(r, \theta, z)$, es:

$$E_z(r, \theta, z) = C_5 J_m(rh_1) \sin(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad (5-27)$$

$$H_z(r, \theta, z) = C_6 J_m(rh_1) \cos(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad (5-28)$$

donde $h_1^2 \equiv \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - \beta^2$ y ϕ denota una fase inicial.

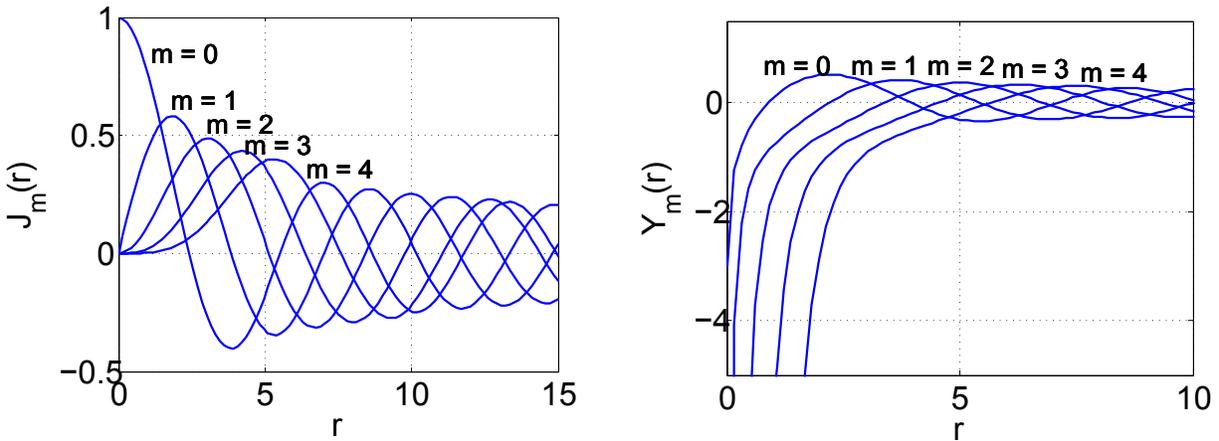


Figura 5-1: Funciones de Bessel ordinarias. (Izquierda) funciones J_m , (derecha) funciones Y_m .
Fuente. Autor

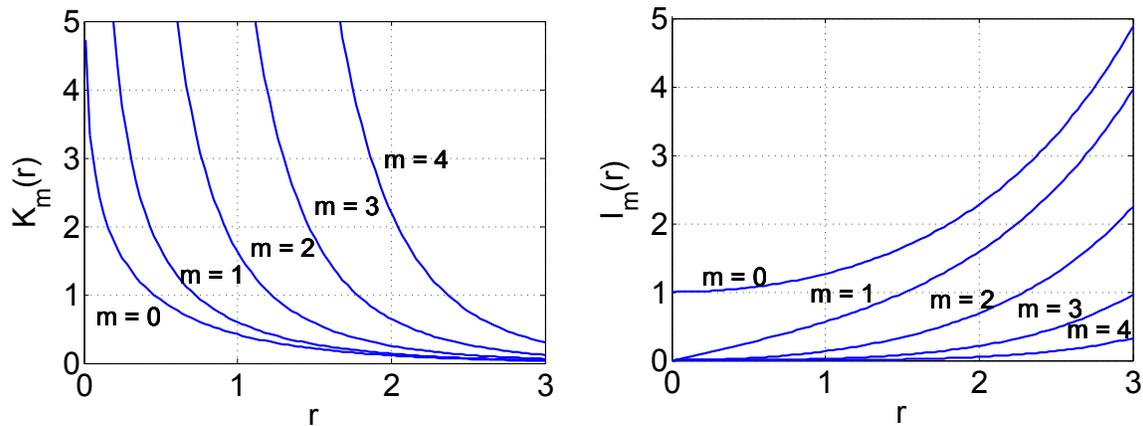


Figura 5-2: Funciones de Bessel modificadas. (Izquierda) funciones K_m , (derecha) funciones I_m .
Fuente. Autor

Dado que gran parte de la potencia de la onda electromagnética es guiada a través del núcleo, y solo una pequeña parte de la energía se expande más allá de este, una solución similar a 5-25 para el revestimiento no tiene sentido físico. Por lo tanto, en el revestimiento la solución de 5-24, es:

$$R(r) = C_7 K_m(rh) + C_8 I_m(rh), \quad (5-29)$$

donde $K_m(rh)$ y $I_m(rh)$ son las funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente, C_7 y C_8 son constantes de integración. Cabe aclarar que, para llegar a la solución 5-25 es necesario que $p^2 > 0$; mientras que para la solución 5-29, $p^2 < 0$. De la solución general 5-29 se elige el término que describe un comportamiento decreciente en las funciones de Bessel. En la figura 5-2 se nota que las funciones de Bessel dadas por el término K_m cumplen con esta condición. El problema queda resuelto si se hace $C_8 = 0$ en la solución general.

Finalmente, la solución que describe el comportamiento de las ondas electromagnéticas en el revestimiento, como una función del radio de la fibra, es:

$$R(r) = C_7 K_m(rh_2), \quad (5-30)$$

Las componentes longitudinales del campo eléctrico y magnético para $r > a$, donde a es el radio del núcleo de la fibra, es:

$$E_z(r, \theta, z) = C_5 K_m(rh_2) \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad (5-31)$$

$$H_z(r, \theta, z) = C_6 K_m(rh_2) \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad (5-32)$$

donde $h_2^2 \equiv \beta^2 - \omega^2 \epsilon_2 \mu_0$. Con h_1^2 y h_2^2 se construye el intervalo de búsqueda de la constante de propagación de los modos guiados en la fibra. Si $h_1^2 > 0$, se cumple: $\beta^2 < \omega^2 \epsilon_1 \mu_0$; con $h_2^2 < 0$ se cumple: $\beta^2 > \omega^2 \epsilon_2 \mu_0$. En consecuencia, se tiene para β^2 el intervalo dado por:

$$\omega^2 \epsilon_2 \mu_0 < \beta^2 < \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 \quad (5-33)$$

También se puede tener este intervalo solución para β^2 en términos de los índices de refracción del núcleo y el revestimiento, lo que resulta en cierto modo más útil

$$\omega^2 \epsilon_0 n_2^2 \mu_0 < \beta^2 < \omega^2 \epsilon_0 n_1^2 \mu_0 \quad (5-34)$$

Las ecuaciones 5-27, 5-28, 5-31 y 5-32 deben cumplir con las condiciones de continuidad para $r = a$. Para la componente del campo magnético en el núcleo y el revestimiento se tiene:

$$C_4 J_m(ah_1) \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} = B \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad (5-35)$$

$$C_7 K_m(ah_2) \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} = B \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad (5-36)$$

de donde se obtiene

$$C_4 = \frac{B}{J_m(ah_1)}, \quad (5-37)$$

$$C_7 = \frac{B}{K_m(ah_2)}, \quad (5-38)$$

lo que garantiza el mismo valor de las componentes cuando $r = a$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{J_m(ah_1)} J_m(rh_1) \cos(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (5-39)$$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{K_m(ah_2)} K_m(rh_2) \cos(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad r > a \quad (5-40)$$

En forma similar para E_z se tiene

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{J_m(ah_1)} J_m(rh_1) \sen(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (5-41)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{K_m(ah_2)} K_m(rh_2) \sen(m\theta + \phi) e^{-j\beta z}, \quad r > a \quad (5-42)$$

El resto de componentes también tiene una representación en el núcleo y en el revestimiento de la fibra, como se muestra en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$E_\theta(r, \theta, z) = \frac{1}{h_1^2} \left[j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{j\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right], \quad 0 \leq r \leq a \quad (5-43)$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = -\frac{1}{h_2^2} \left[j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{j\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right], \quad r > a \quad (5-44)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = -\frac{1}{h_1^2} \left[j\omega\epsilon_1 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{j\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right], \quad 0 \leq r \leq a \quad (5-45)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = \frac{1}{h_2^2} \left[j\omega\epsilon_2 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{j\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right], \quad r > a \quad (5-46)$$

$$E_r(r, \theta, z) = -\frac{j}{h_1^2} \left[\frac{\omega\mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} \right], \quad 0 \leq r \leq a \quad (5-47)$$

$$E_r(r, \theta, z) = \frac{j}{h_2^2} \left[\frac{\omega\mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} \right], \quad r > a \quad (5-48)$$

$$H_r(r, \theta, z) = -\frac{j}{h_1^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega\epsilon_1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right], \quad 0 \leq r \leq a \quad (5-49)$$

$$H_r(r, \theta, z) = \frac{j}{h_2^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega\epsilon_2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right], \quad r > a \quad (5-50)$$

5.1.1. Ecuación característica

Cada modo guiado en la fibra tiene un único valor de la constante de propagación β que lo caracteriza. Todos los modos guiados se encuentran en un intervalo, el cual está caracterizado por los índices de refracción de la fibra, $\omega^2 \epsilon_2 \mu_0 < \beta^2 < \omega^2 \epsilon_1 \mu_0$. Usando la condición de continuidad en $r = a$ para las componentes tangenciales E_θ , H_θ , E_z y H_z , es posible llegar a la ecuación de autovalores que hay que resolver para determinar la constante de propagación β . Antes de continuar, conviene hacer el siguiente cambio de nomenclatura:

$$h_1 a \equiv p \quad (5-51)$$

$$h_2 a \equiv q \quad (5-52)$$

$$\left(\frac{1}{J_m(h_1 a)} \right) \left(\frac{\partial J_m(h_1 r)}{\partial r} \right)_{r=a} = h_1 \frac{J'_m(h_1 a)}{J_m(h_1 a)} = h_1 f_m(h_1 a) \quad (5-53)$$

$$\left(\frac{1}{K_m(h_2 a)} \right) \left(\frac{\partial K_m(h_2 r)}{\partial r} \right)_{r=a} = h_2 \frac{K'_m(h_2 a)}{K_m(h_2 a)} = h_2 g_m(h_2 a) \quad (5-54)$$

Igualando la ecuación 5-43 con 5-44

$$\frac{1}{h_1^2} \left[j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{j\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right]_{r=a} = -\frac{1}{h_2^2} \left[j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} - j\beta \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right]_{r=a}, \quad (5-55)$$

reemplazando las derivadas se encuentra:

$$\frac{j\omega\mu_0}{h_1^2} \left[B h_1 f_m(h_1 a) \right] - \frac{j\omega m A}{h_1^2 a} = - \left(\frac{j\omega\mu_0}{h_2^2} \right) \left[B h_2 g_m(h_2 a) \right] + \left[\frac{j\beta m A}{h_2^2 a} \right], \quad (5-56)$$

en donde el término $\cos(m\theta + \phi)e^{-j\beta z}$ se cancela; ya que está presente en los dos miembros. Simplificando 5-56

$$\frac{B\omega\mu_0 f_m(p)}{p} - \frac{Am\beta}{p^2} = -\frac{B\omega\mu_0 g_m(q)}{q} + \frac{Am\beta}{q^2}, \quad (5-57)$$

de donde se tiene la razón

$$\frac{A}{B} = \frac{\omega\mu_0 \left(\frac{g_m(q)}{q} + \frac{f_m(p)}{p} \right)}{m\beta \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)}, \quad (5-58)$$

de las ecuaciones 5-45 y 5-46 se tiene la condición de continuidad

$$-\frac{1}{h_1^2} \left[j\omega\epsilon_1 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{j\beta}{a} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right]_{r=a} = \frac{1}{h_2^2} \left[j\omega\epsilon_2 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{j\beta}{a} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right]_{r=a}, \quad (5-59)$$

en donde el término $\text{sen}(m\theta + \phi)e^{-j\beta z}$ se cancelan en ambos miembros, simplificando la igualdad

$$\frac{B\beta m}{h_1 p} - \frac{\omega\epsilon_1 A f_m(p)}{h_1} = -\frac{B\beta m}{h_2 q} + \frac{\omega\epsilon_2 A g_m(q)}{h_2}, \quad (5-60)$$

de esta última expresión se encuentra la razón

$$\frac{A}{B} = \frac{m\beta \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)}{\omega \left(\frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} + \frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} \right)}. \quad (5-61)$$

Igualando las expresiones 5-58 y 5-61

$$\frac{\omega\mu_0 \left(\frac{g_m(q)}{q} + \frac{f_m(p)}{p} \right)}{m\beta \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)} = \frac{m\beta \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)}{\omega \left(\frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} + \frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} \right)}, \quad (5-62)$$

reagrupando los términos de 5-62

$$m^2 \beta^2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)^2 = \omega^2 \mu_0 \left(\frac{g_m(q)}{q} + \frac{f_m(p)}{p} \right) \left(\frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} + \frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} \right) \quad (5-63)$$

La expresión 5-63 se conoce como ecuación característica de los modos de propagación en fibras ópticas de salto de índice. Para cada m existe una ecuación característica diferente y, por lo tanto, un valor de la constante de propagación β también diferente. Para un m en particular se requiere hallar p y q tal que 5-63 se convierta en una identidad. No es posible hallar una solución analítica de la ecuación 5-63 que proporcione los valores de p y q , y por ende, el valor de la constante de propagación β tampoco puede ser calculado por este camino. La dificultad para resolver la ecuación de dispersión 5-62 queda superada con el uso de métodos numéricos.

5.1.2. Cálculo de los modos propagantes

Solo un conjunto finito de rayos en ciertos ángulos discretos mayores o iguales al ángulo crítico θ , como se ilustra en la figura 3-2, es capaz de propagarse a lo largo de una fibra. Estos ángulos

están relacionados con un conjunto de patrones de ondas electromagnéticas o distribuciones de campo llamadas modos que pueden propagarse a lo largo de una fibra. Cuando el diámetro del núcleo de la fibra es del orden de 8 a $10\mu m$, que es solo unas pocas veces el valor de la longitud de onda usada en las fibras de comunicación, entonces solo el único rayo fundamental que viaja recto a lo largo del eje puede propagarse en una fibra. Dicha fibra se denomina fibra monomodo. Las características operativas de las fibras de modo único no pueden explicarse mediante una imagen de rayos, sino que deben analizarse en términos de la teoría de ondas electromagnéticas. Las fibras con diámetros centrales más grandes (p. Ej., Mayores o iguales a $50\mu m$) admiten muchos rayos o modos de propagación y se conocen como Fibras multimodo [38].

Para entender como se referencia los modos de acuerdo con sus subíndices m y n , se observa que las funciones de Bessel J_m tiene un comportamiento oscilatorio, como se observa en la figura 5-1, lo cual produce n cortes en el eje de ordenada igual a cero, y por lo tanto hay n raíces para cada valor de m . El análisis es entonces limitado a un problema bidimensional que requiere de los dos enteros m y n .

Los modos de propagación en una fibra óptica de salto de índice pueden ser: transversales eléctricos TE ($E_z = 0$), transversales magnéticos TM ($H_z = 0$), que en términos de los enteros m y n se designan TE_{mn} y TM_{mn} respectivamente así como la constante β_{mn} de cada modo; estos se originan por los rayos meridionales, (rayos contenidos en un plano que pasa por el eje de la fibra), y los modos híbridos [19].

Los modos híbridos tienen seis componentes del campo electromagnético, dividiendo en dos grandes grupos: los modos HE_{mn} y EH_{mn} , en estos modos, la contribución de E_z y H_z son diferentes de cero, y se originan de la propagación helicoidal de los rayos. De esta manera, una descripción exacta de los modos es una tarea complicada. No obstante, el análisis se simplifica cuando los propósitos de la fibra son para las comunicaciones. Para estas tareas las fibras satisfacen que la diferencia relativa del índice de refracción Δ , definido como

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right], \quad (5-64)$$

donde n_1 y n_2 representan los índices de refracción del núcleo y el revestimiento respectivamente, es muy baja $\Delta \ll 1$. El tipo de propagación con esta aproximación es conocida como guiado débil en fibras ópticas. En efecto, Δ suele ser inferior a 0,03 para fibras de comunicación. Por lo tanto se pueden dar soluciones aproximadas para el conjunto completo de modos TE_{mn} , TM_{mn} , HE_{mn} y EH_{mn} mediante dos componentes polarizadas linealmente [39]. Estos modos polarizados linealmente (LP) no son modos exactos de la fibra, excepto el modo fundamental (orden más bajo). Sin embargo, como Δ en las fibras que acabamos de mencionar es muy pequeño, se producen pares de modos $HE-EH$ que tienen constantes de propagación casi

idénticas; se dice que tales modos son degenerados. cuando se presentan estos casos, los modos degenerados serán superiores si la constante es ligeramente mayor e inferiores para el modo de menor constante de propagación [40]. Las superposiciones de estos modos degenerados, caracterizados por una constante de propagación común, corresponden a modos LP particulares independientemente de sus configuraciones de campo HE , EH , TE o TM . Esta combinación lineal de modos degenerados obtenidos de la solución exacta, produce una simplificación útil en el análisis de fibras con $\Delta \ll 1$. La relación entre las designaciones de modo tradicionales HE , EH , TE y TM y las designaciones de modo LP_{mn} se muestra en la Tabla 5-1. La figura 5-3 muestra la configuración de los modos tradicionales LP y los modos exactos de los cuales proceden. Los modos TE tienen solo las componentes en coordenadas cilíndricas E_θ , H_r , y H_z

Tabla 5-1: Correspondencia entre el orden inferior en modos linealmente polarizados y los modos exactos tradicionales a partir de los cuales se forman

Linealmente polarizado	Exacto
LP_{01}	HE_{11}
LP_{11}	$HE_{21}, TE_{01}, TM_{01}$
LP_{21}	HE_{31}, EH_{11}
LP_{02}	HE_{12}
LP_{31}	HE_{41}, EH_{21}
LP_{12}	$HE_{22}, TE_{02}, TM_{02}$
LP_{mn}	$HE_{2m}, TE_{0m}, TM_{0m}$

mientras que los modos TM tienen las componentes H_θ , E_r y E_z . Los modos TE y TM son un caso particular que solo ocurren cuando $m = 0$, en este caso los campos son simétricos e independientes de la coordenada θ , para otro valor de m ($m \neq 0$) los modos serán híbridos. Para el valor de $m = 0$, caso en el cual se obtiene los modos TE y TM , la ecuación 5-59 se simplifica y toma la siguiente forma:

$$A\omega \left(\frac{\epsilon_1 f_0}{p} + \frac{\epsilon_2 g_0}{q} \right) = 0, \quad (5-65)$$

esta igualdad se satisface si $A = 0$. Sustituyendo el valor de A en la ecuación 5-57

$$B\omega\mu_0 \left(\frac{f_0}{p} + \frac{g_0}{q} \right) = 0 \quad (5-66)$$

y dividiendo ambos miembros por $B\omega\mu_0$:

$$\frac{f_0}{p} + \frac{g_0}{q} = 0 \quad (5-67)$$

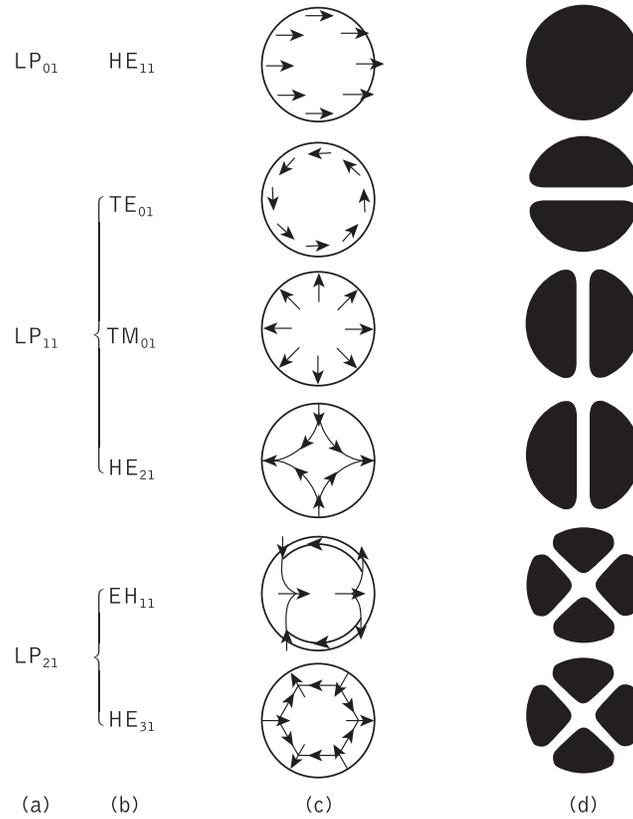


Figura 5-3: Las configuraciones de campo eléctrico para los tres modos LP más bajos ilustrados en términos de sus modos exactos constituyentes: (a) designaciones de modo LP ; (b) designaciones de modo exacto; (c) distribución del campo eléctrico de los modos exactos; (d) distribución de intensidad de E_x para los modos exactos que indican el perfil de intensidad del campo eléctrico para los modos LP correspondientes [40].

sustituyendo las definiciones $f_m = \frac{J'_m(h_1a)}{J_m(h_1a)}$, $g_m = \frac{K'_m(h_2a)}{K_m(h_2a)}$ y las relaciones de recurrencia

$$J'_m(hr) = \frac{m}{hr} J_m(hr) - J_{m+1}(hr) \quad (5-68)$$

$$K'_m(hr) = \frac{m}{hr} K_m(hr) - K_{m+1}(hr), \quad (5-69)$$

com $m = 0$ la ecuación 5-67 se convierte en:

$$\frac{J_1(h_1a)}{pJ_0(h_1a)} + \frac{K_1(h_2a)}{qK_0(h_2a)} = 0 \quad (5-70)$$

De acuerdo con las ecuaciones 5-41 y 5-42, con el valor de $m = 0$ y $A = 0$, la ecuación 5-70 corresponde a la ecuación característica de β_{0n} de los modos TE_{0n} .

La ecuación para los modos TM_{0n} se obtiene haciendo $B = 0$. Reemplazando el valor de B en 5-60 se tiene

$$A\omega \left(\frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} + \frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} \right) = 0 \quad (5-71)$$

y como ni A ni ω pueden ser cero, 5-71 se convierte en:

$$\frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} + \frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} = 0, \quad (5-72)$$

sustituyendo las definiciones $f_m = \frac{J'_m(h_1 a)}{J_m(h_1 a)}$, $g_m = \frac{K'_m(h_2 a)}{K_m(h_2 a)}$ y las relaciones de recurrencia

$$J'_m(hr) = \frac{m}{hr} J_m(hr) - J_{m+1}(hr) \quad (5-73)$$

$$K'_m(hr) = \frac{m}{hr} K_m(hr) - K_{m+1}(hr), \quad (5-74)$$

con $m = 0$, la ecuación 5-72 se convierte en:

$$\frac{\epsilon_1 J_1(h_1 a)}{h_1 a J_0(h_1 a)} + \frac{\epsilon_2 K_1(h_2 a)}{h_2 a K_0(h_2 a)} = 0 \quad (5-75)$$

La solución de la ecuación 5-75 permite hallar los valores β_{0n} de los modos TM_{0n} en la fibra.

Los modos EH_{mn} y HE_{mn} tiene una constante de propagación β_{mn} , con $m > 1$, que se determinan con la solución de la ecuación característica 5-63.

De las condiciones que se deben cumplir en cada una de las ecuaciones características en los diferentes modos de propagación, también es necesario que se cumpla la siguiente relación:

$$p^2 + q^2 = a^2 \left(h_1^2 + h_2^2 \right) = \left((j\beta)^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - (j\beta)^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \right) a^2, \quad (5-76)$$

que simplificando

$$p^2 + q^2 = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) a^2 = V^2. \quad (5-77)$$

A V se le denomina frecuencia normalizada, o parámetro V [4]; el parámetro V es un número adimensional que define cuantos modos diferentes pueden haber simultáneamente en la fibra a

una frecuencia determinada, también está relacionado con la frecuencia de corte de los modos [41]. La expresión 5-74 se puede tener en términos de los índices de refracción, la longitud de onda de la fuente y el radio del núcleo de la fibra

$$V = \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \left[n_1^2 - n_2^2 \right]^{1/2} = \frac{2\pi a n_1}{\lambda_0} \sqrt{2\Delta} \quad (5-78)$$

A la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los índices de refracción en 5-75 se le da el nombre de apertura numérica y se designa como NA :

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (5-79)$$

Con las ecuaciones de dispersión definidas para los modos transversales eléctricos (TE_{0n}) y transversales magnéticos (TM_{0m}), el conjunto de componentes de los campos electromagnéticos en la región del núcleo y del revestimiento, en coordenadas cilíndricas, queda expresado de la siguiente manera:

Campos en el núcleo (modos TE_{0n})

$$E_z = E_r = H_\theta = 0$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = \frac{Bj\omega\mu_0}{h_1 J_0(ah_1)} J'_0(rh_1) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-80)$$

$$H_r(r, \theta, z) = -\frac{Bj\beta}{h_1 J_0(ah_1)} J'_0(rh_1) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-81)$$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{J_0(ah_1)} J_0(rh_1) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-82)$$

Campos en el revestimiento (modos TE_{0n})

$$E_z = E_r = H_\theta = 0$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = -\frac{Bj\omega\mu_0}{h_2 K_0(ah_2)} K'_0(rh_2) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-83)$$

$$H_r(r, \theta, z) = \frac{Bj\beta}{h_2 K_0(ah_2)} K'_0(rh_2) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-84)$$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{K_0(ah_2)} K_0(rh_2) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-85)$$

Campos en el núcleo (modos TM_{0n})

$$E_\theta = H_r = H_z = 0$$

$$E_r(r, \theta, z) = -\frac{Aj\beta}{h_1 J_0(ah_1)} J'_0(rh_1) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-86)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = -\frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_1 J_0(ah_1)} J'_0(rh_1) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-87)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{J_0(ah_1)} J_0(rh_1) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-88)$$

Campos en el revestimiento (modos TM_{0n})

$$E_\theta = H_r = H_z = 0$$

$$E_r(r, \theta, z) = \frac{Aj\beta}{h_2 K_0(ah_2)} K'_0(rh_2) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-89)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = \frac{Aj\omega\epsilon_2}{h_2 K_0(ah_2)} K'_0(rh_2) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-90)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{K_0(ah_2)} K_0(rh_2) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-91)$$

Usando las relaciones de recurrencia

$$J'_m(hr) = \frac{m}{hr} J_m(hr) - J_{m+1}(hr) \quad (5-92)$$

$$K'_m(hr) = \frac{m}{hr} K_m(hr) - K_{m+1}(hr) \quad (5-93)$$

Las componentes de los campos transversales eléctrico TE_{0n} y transversales magnéticos TM_{0n} , en el núcleo y en el revestimiento de la fibra, en términos de las funciones de Bessel sin derivar,

toman la siguiente forma:

Campos en el núcleo (modos TE_{0n})

$$E_z = E_r = H_\theta = 0$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = -\frac{Bj\omega\mu_0}{h_1 J_0(ah_1)} J_1(rh_1) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-94)$$

$$H_r(r, \theta, z) = \frac{Bj\beta}{h_1 J_0(ah_1)} J_1(rh_1) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-95)$$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{J_0(ah_1)} J_0(rh_1) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-96)$$

Campos en el revestimiento (modos TE_{0n})

$$E_z = E_r = H_\theta = 0$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = \frac{Bj\omega\mu_0}{h_2 K_0(ah_2)} K_1(rh_2) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-97)$$

$$H_r(r, \theta, z) = -\frac{Bj\beta}{h_2 K_0(ah_2)} K_1(rh_2) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-98)$$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{K_0(ah_2)} K_0(rh_2) \cos(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-99)$$

Campos en el núcleo (modos TM_{0n})

$$E_\theta = H_r = H_z = 0$$

$$E_r(r, \theta, z) = \frac{Aj\beta}{h_1 J_0(ah_1)} J_1(rh_1) \sin(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-100)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = \frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_1 J_0(ah_1)} J_1(rh_1) \sin(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-101)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{J_0(ah_1)} J_0(rh_1) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-102)$$

Campos en el revestimiento (modos TM_{0n})

$$E_\theta = H_r = H_z = 0$$

$$E_r(r, \theta, z) = -\frac{Aj\beta}{h_2 K_0(ah_2)} K_1(rh_2) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-103)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = -\frac{Aj\omega\epsilon_2}{h_2 K_0(ah_1)} K_1(rh_2) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-104)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{K_0(ah_2)} K_0(rh_2) \text{sen}(\phi) e^{-j\beta z} \quad (5-105)$$

5.2. Método aproximado para resolver la ecuación de dispersión para los modos híbridos

En una fibra óptica monomodo o multimodo de salto de índice, donde se cumple que $n_1 - n_2 \ll 1$, se pueden hacer las siguientes aproximaciones: $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ y $\beta^2 \approx \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$. La sustitución de estas cantidades en la ecuación de dispersión 5-63, hace que esta se simplifique en gran medida. En efecto, después de sustituir las aproximaciones en 5-63, esta toma la siguiente forma:

$$\left(\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \right) \left[\frac{f_m}{p} + \frac{g_m}{q} \right]^2 = m^2 \left(\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \right) \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2 \quad (5-106)$$

Usando las relaciones de recurrencia para las derivadas de las funciones de Bessel, la ecuación 5-106 es equivalente a tener:

$$\left[\frac{J_m}{p^2 J_m} - \frac{J_{m+1}}{p J_m} + \frac{K_m}{q^2 K_m} - \frac{K_{m+1}}{q K_m} \right]^2 = m^2 \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2 \quad (5-107)$$

nótese que se han usado las definiciones $f_m = \frac{J'_m(p)}{J_m(p)}$ y $g_m = \frac{K'_m(q)}{K_m(q)}$, simplificando se tiene:

$$\frac{J_{m+1}(p)}{p J_m(p)} = -\frac{K_{m+1}(q)}{q K_m(q)} \quad (5-108)$$

Para hallar una expresión equivalente a 5-108, pero que no contenga el signo negativo, se reemplaza en 5-63 las siguientes relaciones de recurrencia.

$$J'_m(p) = -\frac{m}{p}J_m(p) + J_{m-1}(p) \quad (5-109)$$

$$K'_m(q) = -\frac{m}{q}K_m(q) + K_{m-1}(q) \quad (5-110)$$

por lo tanto, otra forma simplificada de la ecuación de dispersión 5-63, es:

$$\frac{J_{m-1}(p)}{pJ_m(p)} = \frac{K_{m-1}(q)}{qK_m(q)} \quad (5-111)$$

Las ecuaciones reducidas 5-108 y 5-111, con $m \geq 1$, proporcionan, respectivamente, las soluciones para β_{mn} , siempre y cuando satisfagan la relación 5-77, de los modos EH_{mn} y HE_{mn} . Estas soluciones se usarán como comprobación de la validez del método numérico que se va a implementar; comparando los autovalores hallados de forma numérica con los que proporcionan las soluciones analíticas.

Tabla 5-2: Ecuación de dispersión de los modos guiados en una fibra óptica de salto de índice. Las ecuaciones de dispersión de los modos híbridos EH y HE corresponden a la aproximación de la ecuación 5-63

Designación de los modos ($n \geq 1$)	Ecuación de dispersión
TE_{0n}	$\frac{J_1(p)}{pJ_0(p)} + \frac{K_1(q)}{qK_0(q)} = 0$
TM_{0n}	$\frac{\epsilon_1 J_1(p)}{pJ_0(p)} + \frac{\epsilon_2 K_1(q)}{qK_0(q)} = 0$
$EH_{mn} (m \geq 1)$	$\frac{J_{m+1}(p)}{pJ_m(p)} + \frac{K_{m+1}(q)}{qK_m(q)} = 0$
$HE_{mn} (m \geq 1)$	$\frac{J_{m-1}(p)}{pJ_m(p)} - \frac{K_{m-1}(q)}{qK_m(q)} = 0$

De esta manera se tendrá una idea de la precisión del método numérico implementado, sobre todo para fibras que presentan una alta complejidad. La tabla 5-2 resume la designación de los

modos transversales y también la de los modos híbridos, al igual que la ecuación de dispersión de los modos.

Ahora se deducen las componentes de los campos eléctricos y magnéticos para estos modos, tanto en el núcleo de la fibra como en el revestimiento. Para hallar las expresiones de los campos correspondientes a los modos híbridos en el núcleo de la fibra, modos donde las componentes de E_z y H_z son diferente de cero, se toman las componentes que determinan la propagación de la luz en esta región.

Partiendo del conjunto formado por las ecuaciones 5-39, 5-41, 5-43, 5-45, 5-47 y 5-49, las cuales representan la propagación de las ondas electromagnética en el núcleo de la fibra, $0 \leq r \leq a$, y sustituyendo las derivadas en los casos donde se requiere en el conjunto dado, se llega a:

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{J_m(ah_1)} J_m(rh_1) \cos(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-112)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{J_m(ah_1)} J_m(rh_1) \sin(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-113)$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = \frac{1}{h_1^2} \left[\frac{Bj\omega\mu_0 h_1}{J_m(h_1 a)} J'_m(h_1 r) - \frac{Ajm\beta}{r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \cos(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-114)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = -\frac{1}{h_1^2} \left[\frac{Aj\omega\epsilon_1 h_1}{J_m(h_1 a)} J'_m(h_1 r) - \frac{Bjm\beta}{r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \sin(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-115)$$

$$E_r(r, \theta, z) = -\frac{j}{h_1^2} \left[-\frac{\omega\mu_0 Bm}{r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) + \frac{A\beta h_1}{J_m(h_1 a)} J'_m(h_1 r) \right] \sin(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-116)$$

$$H_r(r, \theta, z) = -\frac{j}{h_1^2} \left[\frac{B\beta h_1}{J_m(h_1 a)} J'_m(h_1 r) - \frac{Am\omega\epsilon_1}{r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \cos(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-117)$$

Con la relación de recurrencia 5-89, las componentes de los modos híbridos 5-114, 5-115, 5-116 y 5-117 toman la siguiente forma:

$$E_\theta(r, \theta, z) = \left[\frac{Bj\omega\mu_0}{h_1 J_m(h_1 a)} \left(-\frac{m}{h_1 r} J_m(h_1 r) + J_{m-1}(h_1 r) \right) - \frac{Amj\beta}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \cos(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-118)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = \left[\frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_1 J_m(h_1 a)} \left(\frac{m}{h_1 r} J_m(h_1 r) - J_{m-1}(h_1 r) \right) + \frac{Bmj\beta}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-119)$$

$$E_r(r, \theta, z) = \left[-\frac{A\beta j}{h_1 J_m(h_1 a)} \left(-\frac{m J_m(h_1 r)}{h_1 r} + J_{m-1}(h_1 r) \right) + \frac{Bmj\omega\mu_0}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-120)$$

$$H_r(r, \theta, z) = \left[-\frac{Bj\beta}{h_1 J_m(h_1 a)} \left(-\frac{m J_m(h_1 r)}{h_1 r} + J_{m-1}(h_1 r) \right) + \frac{Amj\omega\epsilon_1}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-121)$$

Las componentes E_z y H_z no sufren modificaciones; estas expresiones conservan la forma de 5-112 y 5-113 respectivamente. Se nota que en las ecuaciones 5-118, 5-119, 5-120 y 5-121 existe la presencia de las constantes A y B , para simplificar estas ecuaciones es preciso usar la relación que existe entre estas dos constantes, la cual se deriva de la ecuación 5-63, que para los modos HE es $B = -A\sqrt{\epsilon_1/\mu_0}$; y para los modos EH , $B = A\sqrt{\epsilon_1/\mu_0}$. Por lo tanto, para los modos híbridos HE , se tiene:

$$E_\theta(r, \theta, z) = \left[-\frac{Bmj\omega\mu_0}{h_1^2 r h_m(h_1 a)} J_m(h_r) + \frac{Bj\omega\mu_0}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) + \frac{Bmj\beta\sqrt{\mu_0/\epsilon_1}}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-122)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = \left[\frac{Amj\omega\epsilon_1}{h_1^2 r h_m(h_1 a)} J_m(h_r) - \frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) - \frac{Amj\beta\sqrt{\epsilon_1/\mu_0}}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-123)$$

$$E_r(r, \theta, z) = \left[\frac{Amj\beta}{h_1^2 r} J_m(h_1 r) - \frac{A\beta j}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) - \frac{Am\sqrt{\epsilon_1/\mu_0}j\omega\mu_0}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-124)$$

$$H_r(r, \theta, z) = \left[\frac{Bmj\beta}{h_1^2 r} J_m(h_1 r) - \frac{B\beta j}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) - \frac{Bm\sqrt{\mu_0/\epsilon_1}j\omega\epsilon_1}{h_1^2 r J_m(h_1 a)} J_m(h_1 r) \right] \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-125)$$

Reemplazando $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_1}$ en las ecuaciones anteriores, se tiene finalmente para las componentes de los modos HE_{mn} , con $m \geq 1$:

$$E_\theta(r, \theta, z) = \frac{Bj\omega\mu_0}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-126)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = -\frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-127)$$

$$E_r(r, \theta, z) = \frac{Bj\omega\mu_0}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-128)$$

$$H_r(r, \theta, z) = \frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_1 J_m(h_1 a)} J_{m-1}(h_1 r) \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-129)$$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{J_m(ah_1)} J_m(rh_1) \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-130)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{J_m(ah_1)} J_m(rh_1) \text{sen}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-131)$$

Siguiendo un procedimiento similar sobre las componentes de los campos en el revestimiento, $r > a$, representadas por el conjunto: 5-40, 5-42, 5-44, 5-46, 5-48 y 5-50, las expresiones de los campos para esta parte de la fibra son:

$$E_\theta(r, \theta, z) = -\frac{Bj\omega\mu_0}{h_2 K_m(h_2 a)} K_{m-1}(h_2 r) \text{cos}(m\theta + \phi) e^{-j\beta z} \quad (5-132)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = \frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_2K_m(h_2a)}K_{m-1}(h_2r)\text{sen}(m\theta + \phi)e^{-j\beta z} \quad (5-133)$$

$$E_r(r, \theta, z) = -\frac{Bj\omega\mu_0}{h_2K_m(h_2a)}K_{m-1}(h_1r)\text{sen}(m\theta + \phi)e^{-j\beta z} \quad (5-134)$$

$$H_r(r, \theta, z) = -\frac{Aj\omega\epsilon_1}{h_2K_m(h_1a)}K_{m-1}(h_2r)\text{cos}(m\theta + \phi)e^{-j\beta z} \quad (5-135)$$

$$H_z(r, \theta, z) = \frac{B}{K_m(ah_2)}K_m(rh_2)\text{cos}(m\theta + \phi)e^{-j\beta z} \quad (5-136)$$

$$E_z(r, \theta, z) = \frac{A}{K_m(ah_2)}K_m(rh_2)\text{sen}(m\theta + \phi)e^{-j\beta z} \quad (5-137)$$

Todas las formas explícitas anteriores de las componentes de los campos corresponden a los modos HE . Para encontrar expresiones de los modos EH , se debe tener en cuenta que la relación entre las constantes A y B , usada para simplificar los cálculos, cambia solo en el signo.

5.3. Constante de fase y frecuencia de corte de los modos en una fibra de índice escalonado

La ecuación 5-33 restringe a la constante β de cada modo de propagación a tomar valores exclusivamente dentro del rango

$$\beta_0n_2 < \beta_{mn} < \beta_0n_1, \quad (5-138)$$

donde β_0 es la constante de fase en el espacio libre a la misma frecuencia de operación. El valor de la constante de fase β para cada modo, a una frecuencia determinada, se obtiene resolviendo las relaciones simplificadas 5-108 y 5-111. Los valores de la constante de fase en el núcleo, $r < a$, se deduce a partir de la definición $h_1^2 = \omega^2\epsilon_1\mu_0 - \beta^2$, con $h_1 = p/a$, determinado a partir de la solución de la ecuación característica de cada modo:

$$\beta^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_1 - (p/a)^2, \quad (5-139)$$

por lo tanto,

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - (p/a)^2}, \quad (5-140)$$

en términos del índice de refracción del núcleo, se tiene:

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 n_1^2 - (p/a)^2} \quad (5-141)$$

De la ecuación anterior se deduce que $\beta < \beta_0 n_1$, lo que indica que β/β_0 toma valores entre n_2 y n_1 (como lo establece el intervalo dado por 5-34)

Un modo guiado puede o no propagarse a través de la fibra en función de la frecuencia normalizada V . Este parámetro establece el valor de la frecuencia o la longitud de onda que es necesario alcanzar para que un determinado modo de orden n pase de estar al corte (no propagarse en el interior del núcleo) a propagarse. Físicamente, la condición de corte de un modo representa la propagación de este en una región que se extiende más allá del revestimiento. Sin embargo, todos los modos que se propagan en el revestimiento decaen rápidamente, por esta razón, a estos modos se les conoce como **modos evanescentes**; los modos evanescentes se presentan al inicio de la fibra. En estos modos la onda tiene en la fase una constante de atenuación, y por lo tanto, como no se produce la propagación en el núcleo, lo cual solo se da si la constante de propagación es imaginaria pura, para la onda con atenuación la constante de fase esta compuesta por una parte real e imaginaria ($\beta = \beta_R - \alpha j$). Las soluciones para la propagación en el revestimiento están expresadas en términos de las funciones de Bessel de segunda especie. En términos de estas funciones, la propagación en el revestimiento de la fibra equivale a tener en la función de Bessel $K(q)$ un valor muy grande, lo cual se logra cuando q tome valores cercanos a cero.

Cuando un modo no se propaga por el núcleo de una fibra óptica, en cuyo caso se encuentra propagándose en el revestimiento, se dice que se encuentra en corte.

Es posible determinar una frecuencia de corte para cada modo propagante en la fibra. Esta frecuencia de corte es importante a la hora de determinar la fabricación de la fibra.

Determinemos la expresión para la frecuencia de corte para los diferentes modos. En la ecuación 5-108, para los modos EH_{mn} , que reescribimos a continuación,

$$\frac{J_{m+1}(p)}{pJ_m(p)} = -\frac{K_{m+1}(q)}{qK_m(q)}, \quad (5-142)$$

el término $\frac{K_{m+1}(q)}{qK_m(q)} \rightarrow \infty$ cuando $q \rightarrow 0$ ($m \geq 1$)

por lo tanto, si despejamos $J_m(p)$ de la ecuación 5-141, se encuentra que

$$J_m(p) = 0 \quad (\text{para } p \neq 0 \text{ y cuando } q \rightarrow 0)$$

Esta condición implica que hay que buscar los valores posibles de p que hacen que las funciones de Bessel $J_m(p)$ de la figura 5-1 tomen el valor cero. Para los modos HE_{mn} , la condición de corte es igual que en los modos EH . Con $q \rightarrow 0$, $V = p$ y la frecuencia de corte para los modos EH_{mn} , según 5-57, es

$$f_c \Big|_{EH_{mn}} = \frac{p_{mn}c}{2\pi a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}}, \quad (5-143)$$

donde p_{mn} son las raíces de las funciones de Bessel $J_{mn}(p)$, $m \geq 1$.

El modo HE_{11} posee frecuencia frecuencia cero, y se le conoce como modo dominante. Las fibras ópticas que propagan este único modo se denominan fibras monomodo. Los siguientes modos en propagarse son los modos TE_{01} y TM_{01} , cuando $V = 2,405$ (segunda raíz de $J_0(p)$). En la figura 5-4 se muestra el índice de refracción efectivo en función de la constante normalizada V . Se observa que la frecuencia de corte para algunos modos empiezan en puntos similares; estos modos dan origen a los modos linealmente polarizados.

Las fibras que propagan un solo modo, fibras monomodo, cumplen la siguiente condición:

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \left[n_1^2 - n_2^2 \right]^{1/2} < 2,405 \quad (5-144)$$

lo que se consigue modificando el radio del núcleo de la fibra o la longitud de onda de operación.

5.4. Desfase de grupo y factor de desfase modal

El medio dispersivo que compone la fibra óptica hace que los pulsos de luz que transitan por ella tengan diferentes velocidades de fase para cada frecuencia de la onda. En consecuencia, diferentes componentes de la onda viajan con diferentes velocidades y tienden a cambiar de fase entre sí [20]. El tiempo que tarda un pulso de luz en recorrer la unidad de longitud en una fibra óptica, está relacionado con la velocidad de grupo v_g , este tiempo se define como:

$$\tau_g = \frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} \quad (5-145)$$

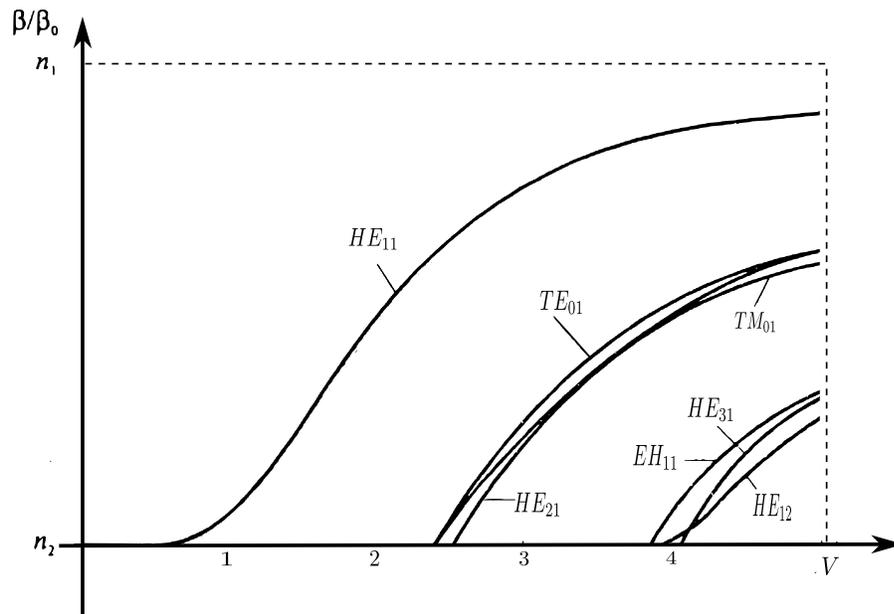


Figura 5-4: Constante de fase β normalizada en relación a la constante de fase en el espacio libre, en función de la frecuencia normalizada V [40].

La velocidad de grupo de un pulso de luz que se propaga en medio dieléctrico, como el que constituye una fibra óptica, está dada por:

$$v_g = c \left[n(\lambda) - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right]^{-1} \quad (5-146)$$

Por lo tanto, según la definición de índice de refracción, se puede definir el índice de grupo, para la onda plana, de la siguiente manera:

$$N_g = \frac{c}{v_g} = n(\lambda) - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda}, \quad (5-147)$$

de las ecuaciones 5-145 y 5-146 se tiene entonces para el tiempo de propagación del pulso de luz en la fibra:

$$\tau = \frac{1}{c} \left[n(\lambda) - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right] \quad (5-148)$$

El índice $n(\lambda)$ se conoce como índice de refracción efectivo, el cual está relacionado con la constante de propagación de los modos guiados en la fibra, en términos matemáticos, el índice de refracción efectivo se expresa como:

$$n_{efec}(\lambda) = \frac{\beta}{k_0} \quad (5-149)$$

El valor del índice de refracción efectivo de cada modo, calculado a partir del método numérico y la solución analítica, se usará para indicar el error cometido al usar el método de elementos finitos.

6 Simulación numérica y analítica de los modos normales

En este capítulo se describen los pasos para la simulación de los modos normales en una fibra multimodo de salto de índice. Se usará primero el método de elementos finitos contenido en la PDEtoolbox de MATLAB. Seguidamente se producirán las simulaciones de los mismos modos, pero ahora usando el desarrollo analítico. Para cada uno de los modos hallados, ya sea de forma numérica o analítica, se calcula la constante de pronación β , la cual a su vez será usada para determinar el índice de refracción efectivo, $n_{efec} = \beta/k_0$.

6.1. Uso de la PDEtoolbox de MATLAB

Para la solución numérica de la ecuación simplificada 3-34, el uso de la PDEtoolbox de MATLAB exige la definición de $n(x, y)$ en todo el dominio donde tiene solución la ecuación diferencial, las condiciones de frontera y las condiciones periódicas que se dan en la interfase núcleo-revestimiento de la fibra. En el caso del índice de refracción, este queda definido por una función a trozos, con valores constantes en el núcleo y en el revestimiento. La condición periódica queda definida por el índice de refracción. En cuanto a la condición de frontera, impuesta en el revestimiento, se asumirá una de tipo Dirichlet; ya que en la frontera del revestimiento los campos no tienen presencia.

Aprovechando la simetría circular, se define el índice de refracción de la siguiente manera:

$$n(r) = \begin{cases} n_1, & \text{si } 0 \leq r \leq a \\ n_2, & \text{si } r > a \end{cases} \quad (6-1)$$

donde r representa la distancia al origen del punto y viene dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6-2)$$

La figura 6-1 muestra la distribución del índice de refracción en el perfil bidimensional de una fibra óptica de salto de índice. Los índices tienen un valor de 1.5 y 1.49 en el núcleo y el revestimiento, respectivamente.

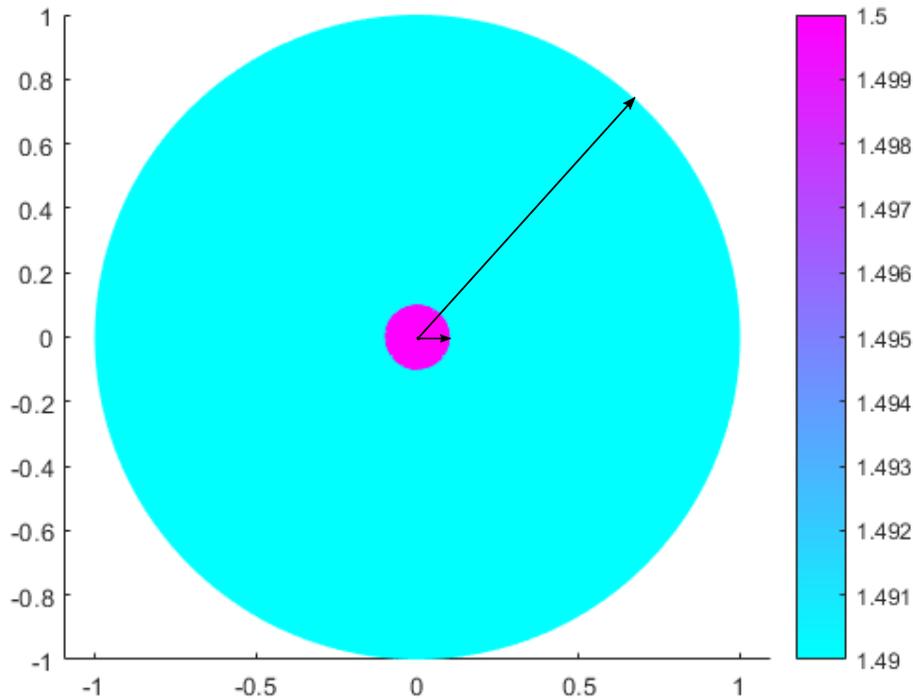


Figura 6-1: Perfil bidimensional de una fibra óptica de salto de índice, con radio de núcleo igual a $10\ \mu\text{m}$ y radio de revestimiento igual a $100\ \mu\text{m}$.

6.2. Resultados numéricos

Para la simulación de los modos normales se toma el modelo de autovalores contenido en la PDEtoolbox de MATLAB, el cual cumple con todos los requerimientos presentes en la ecuación simplificada 3-34. Se ha elegido un rango de longitud de onda que va desde 300nm hasta 1500nm , rango de operación de las fibras ópticas. En cuanto al radio del núcleo, este toma un valor de $10\ \mu\text{m}$, para el radio del revestimiento se ha elegido un valor de $100\ \mu\text{m}$.

La ecuación a resolver con el uso de la PDEtoolbox es:

$$\left(\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(\vec{x}) \right) h = \beta^2 h. \quad (6-3)$$

Esta ecuación representa la campo magnético longitudinal y transversal, con condición periódica definida por la función de índice de refracción, ecuación 6-1 y la condición de frontera $h = 0$. Las ecuaciones para las componentes del campo eléctrico, conservan la forma de las componentes anteriores.

El modelo escalar usado para la solución de la ecuación 6-3 corresponde al problema de valores propios:

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du. \quad (6-4)$$

Al comparar cada uno de los parámetros de entrada de la ecuación escalar de la PDEtoolbox con los correspondientes a la ecuación de autovalores 6-3, para el campo magnético, se tiene: $u = h$, $\beta^2 = \lambda$, $k_0^2 n^2 = a$, $d = 1$, $c = -1$; λ corresponde a los autovalores, y u representa la solución de la ecuación diferencial, ya sea del campo eléctrico o magnético.

El dominio bidimensional de la fibra se discretiza en una malla triangular; esta malla contiene 262144 triángulos y 131329 nodos, como se muestra en la figura 6-2. La subdivisión en elementos triangulares del dominio se logra con el uso del algoritmo de Delaunay, contenido en la **PDEtool** de MATLAB [42].

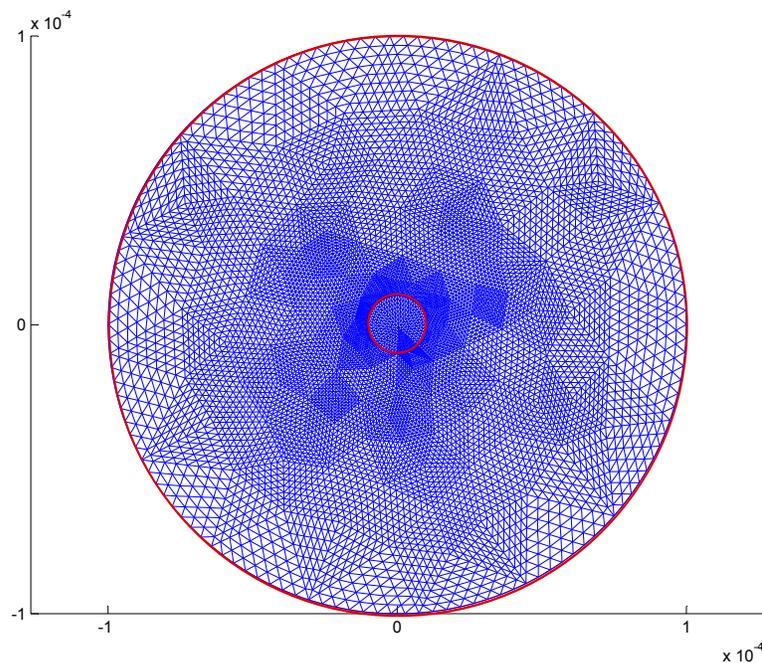


Figura 6-2: discretización en elementos finitos generado a partir de la PDEtool de MATLAB para el dominio bidimensional de una fibra óptica multimodo de salto de índice. Fuente. Autor

En la figura 6-3, se muestra la distribución de la intensidad de las componentes transversales del campo magnético de los modos exactos. En cada modo se señala la designación a la que corresponde, según sea superior o inferior. En la tabla 6-1 se dan los valores del índice de refracción efectivo n_{ef} hallados con el método de elementos finitos.

Tabla 6-1: Valores de índice de refracción efectivo n_{eff} de los modos de propagación hallados con el método de Elementos Finitos.

Modo	Índice de refracción efectivo (n_{eff})	Modo	Índice de refracción efectivo (n_{eff})
HE_{11}	1.499662777353362	HE_{42} (<i>inferior</i>)	1.494494456032950
HE_{21} (<i>superior</i>)	1.499144273979508	HE_{71} (<i>superior</i>)	1.494270438824711
HE_{21} (<i>inferior</i>)	1.499144209537793	HE_{71} (<i>inferior</i>)	1.494270036978934
HE_{31} (<i>superior</i>)	1.498463691016096	TE_{03} (<i>superior</i>)	1.494040990753720
HE_{31} (<i>inferior</i>)	1.498463627782162	TE_{03} (<i>inferior</i>)	1.494040858727723
HE_{12}	1.498226848161717	HE_{52} (<i>superior</i>)	1.492956740023383
HE_{41} (<i>superior</i>)	1.497630622522081	HE_{52} (<i>inferior</i>)	1.492954451099600
HE_{41} (<i>inferior</i>)	1.497630484510132	HE_{81} (<i>superior</i>)	1.492877196036477
TE_{01} (<i>superior</i>)	1.497141004312315	HE_{81} (<i>inferior</i>)	1.492876577906005
TE_{01} (<i>inferior</i>)	1.497140789869602	HE_{33} (<i>superior</i>)	1.492290184793672
HE_{51} (<i>superior</i>)	1.496651358521046	HE_{33} (<i>inferior</i>)	1.492289608857268
HE_{51} (<i>inferior</i>)	1.496650598847958	HE_{41}	1.492087048354352
HE_{32} (<i>superior</i>)	1.495893589629743	HE_{91} (<i>superior</i>)	1.491354137656512
HE_{32} (<i>inferior</i>)	1.495893544833187	HE_{91} (<i>inferior</i>)	1.491353308353822
HE_{13}	1.495666103076773	HE_{62} (<i>superior</i>)	1.491293596030964
HE_{61} (<i>superior</i>)	1.495529590540931	HE_{62} (<i>inferior</i>)	1.491293425768925
HE_{61} (<i>inferior</i>)	1.495529505146321	TE_{04} (<i>superior</i>)	1.490476171317825
HE_{42} (<i>superior</i>)	1.494494791319714	TE_{04} (<i>inferior</i>)	1.490475137627137

6.3. Resultados analíticos

Para hallar las simulaciones en forma analítica de los diferentes modo, es necesario resolver cada una de las ecuaciones que se muestran en la tabla 5-2. Con la solución de este conjunto de ecuaciones, el cual se hace numéricamente, (en este caso se ha usado el método de bisección), dando los valores de p y q que satisfacen la igualdad.

Ya que las expresiones para cada una de las componentes están dadas en coordenadas cilíndricas, y se quiere representaciones de las mismas en coordenadas cartesianas, se hace el cambio a este sistema de coordenadas. En las figura 6-4 se muestra la solución gráfica de cada ecuación de modos contenida en la tabla 5-2. Las asíntotas verticales vienen dadas por las raíces de $J(p) = 0$, los cortes de ambas curvas dan las constantes de propagación de los modos guiados por la fibra, que a su vez se usa para hallar el índice de refracción efectivo del modo guiado. El número de intersecciones viene dado por el valor de V , cuanto mayor sea este, mayor será el número de modos en la fibra. La figura 6-6 muestra los modos obtenidos por el método analítico; los datos de la fibra para la simulación analítica son los mismos que se han usado para la solución numérica. Cuando el número de modos propagantes en una fibra óptica es grande, se puede calcular por medio de la siguiente relación empírica

$$M \approx \left(\frac{V}{\pi/2} \right)^2 \quad (6-5)$$

En la tabla 6-2 se muestra cada valor de índice de refracción efectivo n_{eff} junto al modo que corresponde. Las figuras 6-6 corresponden a la distribución de las componentes del campo electromagnético hallados analíticamente.

La figura 6-5 (a) muestra la curva de índice de refracción efectivo $n_{eff} = \beta/k_0$ en función de la frecuencia normalizada V hallados con el método de elementos finitos y el método analítico. En ambos casos se nota el comportamiento asintótico hacia el valor del índice de refracción del núcleo. En la figura 6-5 (b) se presenta el error en porcentaje en función de la frecuencia normalizada V cometido al usar el método numérico, como se puede apreciar, este error no supera el 0.00005 % y disminuye conforme aumenta la frecuencia normalizada V ; estas curvas se pueden construir a partir del índice de refracción efectivo de un modo en particular, para este caso se ha elegido el modo HE_{11} , con variación en la longitud de onda que va desde los 300 nm a 1500 nm.

Tabla 6-2: Valores de índice de refracción efectivo n_{eff} de los modos de propagación hallados con el método analítico.

Modo	Índice de refracción efectivo (n_{eff})	Modo	Índice de refracción efectivo (n_{eff})
HE_{11}	1.49966295	HE_{42}	1.49452528
HE_{12}	1.49823043	HE_{52}	1.49300230
HE_{13}	1.49568637	HE_{61}	1.49554595
HE_{14}	1.49214753	HE_{62}	1.49135938
HE_{21}	1.49914523	HE_{71}	1.49429529
HE_{22}	1.49715007	HE_{81}	1.49291307
HE_{23}	1.49407854	HE_{91}	1.49140373
HE_{24}	1.49025138	TE_{01}	1.49914523
HE_{31}	1.49846633	TE_{02}	1.49715007
HE_{32}	1.49591174	TE_{03}	1.49407854
HE_{33}	1.49234837	TM_{03}	1.49407154
HE_{41}	1.49763609	HE_{51}	1.49666098

6.4. Modos evanescentes

Adicionalmente se han incluido los modos evanescentes, modos en el revestimiento, un objetivo que no estaba planteado en este estudio, sin embargo, con el uso del método de elementos finitos se pueden calcular fácilmente estos modos. Como se observa en la tabla, los valores del índice de refracción efectivo están fuera del intervalo formado por los dos índices de refracción. El modo fundamental HE_{11} tiene un valor de índice de refracción cercano al índice de refracción del revestimiento y van disminuyendo conforme aparecen más modos. Junto con los valores del índice de refracción efectivo. Estos modos se generaron usando el método de elementos finitos.

En la figura 6-7 se muestran algunos de los modos evanescentes hallados. En la tabla 6-3 se muestran los valores del índice de refracción efectivo para estos modos.

Tabla 6-3: Valores de índice de refracción efectivo n_{eff} de los modos evanescentes hallados con el método de Elementos Finitos.

Modo	Índice de refracción efectivo (n_{eff})	Modo	Índice de refracción efectivo (n_{eff})
HE_{11}	1.489992479245653	HE_{42} (<i>inferior</i>)	1.489931994013365
HE_{21} (<i>inferior</i>)	1.489988898343144	HE_{71} (<i>superior</i>)	1.489931993757278
HE_{21} (<i>superior</i>)	1.489988896123221	HE_{71} (<i>inferior</i>)	1.489926216834887
HE_{31} (<i>superior</i>)	1.489981797364093	TE_{03} (<i>superior</i>)	1.489916468927313
H_{31} (<i>inferior</i>)	1.489981797187431	TE_{03} (<i>inferior</i>)	1.489916450694986
HE_{12}	1.489971963357132	HE_{52} (<i>superior</i>)	1.489915672187437
HE_{41} (<i>superior</i>)	1.489971963043089	HE_{52} (<i>inferior</i>)	1.489915670167322
HE_{41} (<i>inferior</i>)	1.489967778141317	HE_{81} (<i>superior</i>)	1.489915325744090
TE_{01} (<i>superior</i>)	1.489961181314365	HE_{81} (<i>inferior</i>)	1.489915325256947
TE_{01} (<i>inferior</i>)	1.489961172289519	HE_{33} (<i>superior</i>)	1.489905325582802
HE_{51} (<i>superior</i>)	1.489960343561356	HE_{33} (<i>inferior</i>)	1.489905324555986
HE_{51} (<i>inferior</i>)	1.489960343116896	HE_{41}	1.489897022793616
HE_{32} (<i>superior</i>)	1.489950799845664	HE_{91} (<i>superior</i>)	1.489897020710593
HE_{32} (<i>inferior</i>)	1.489950799201693	HE_{91} (<i>inferior</i>)	1.489895124835502
HE_{13}	1.489947008093239	HE_{62} (<i>superior</i>)	1.489895123571124
HE_{61} (<i>superior</i>)	1.489947007764512	HE_{62} (<i>inferior</i>)	1.489882852889461
HE_{61} (<i>inferior</i>)	1.489934301675031	TE_{04} (<i>superior</i>)	1.489882851057621
HE_{42} (<i>superior</i>)	1.489934300676438	TE_{04} (<i>inferior</i>)	1.489877098081110

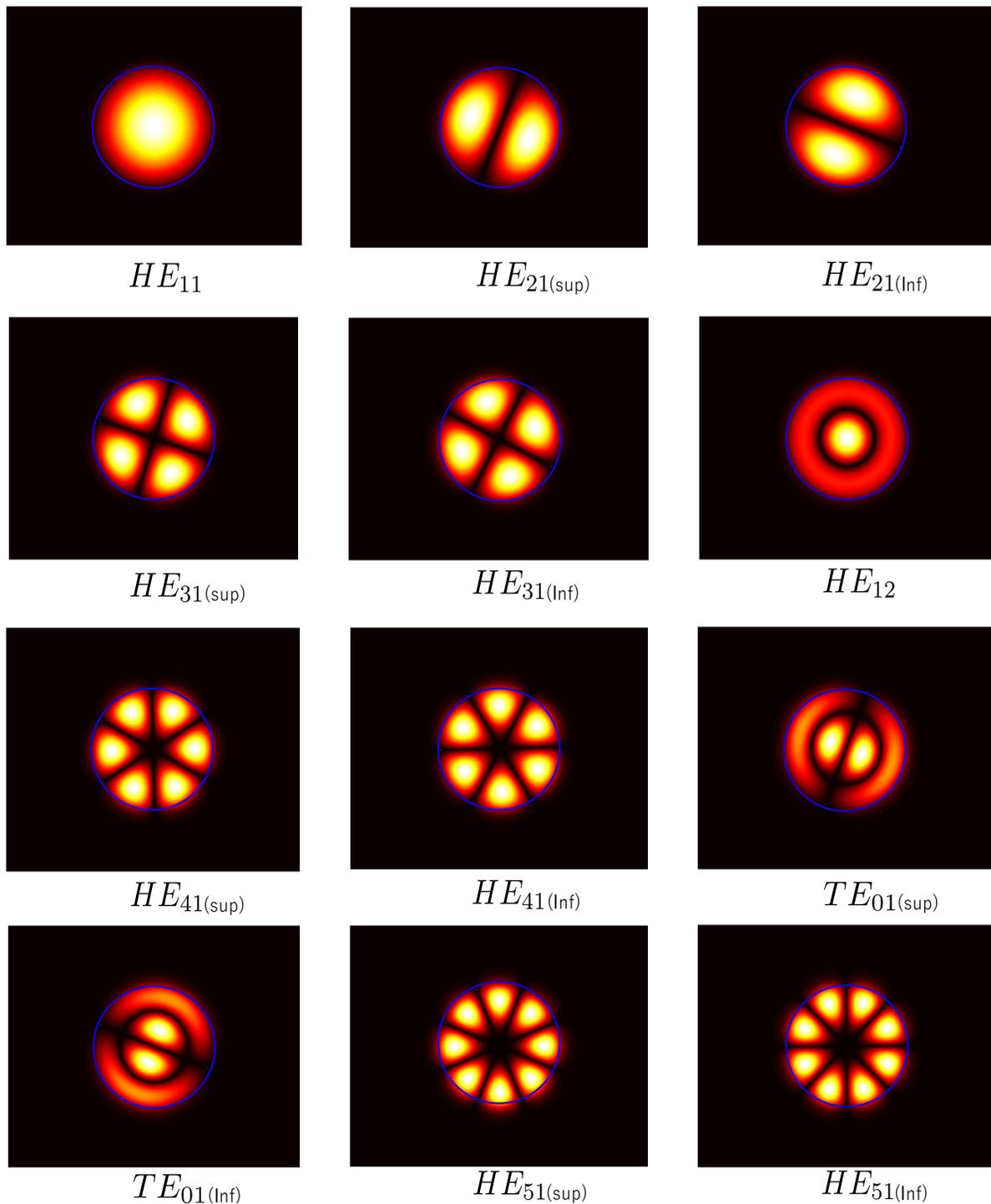


Figura 6-3: Modos normales de propagación en una fibra óptica de salto de índice hallados usando el método de Elementos Finitos, para valores de índice de refracción en el núcleo y revestimiento de 1.5 y 1.49, respectivamente, y una longitud de onda de 900nm . Fuente. Autor

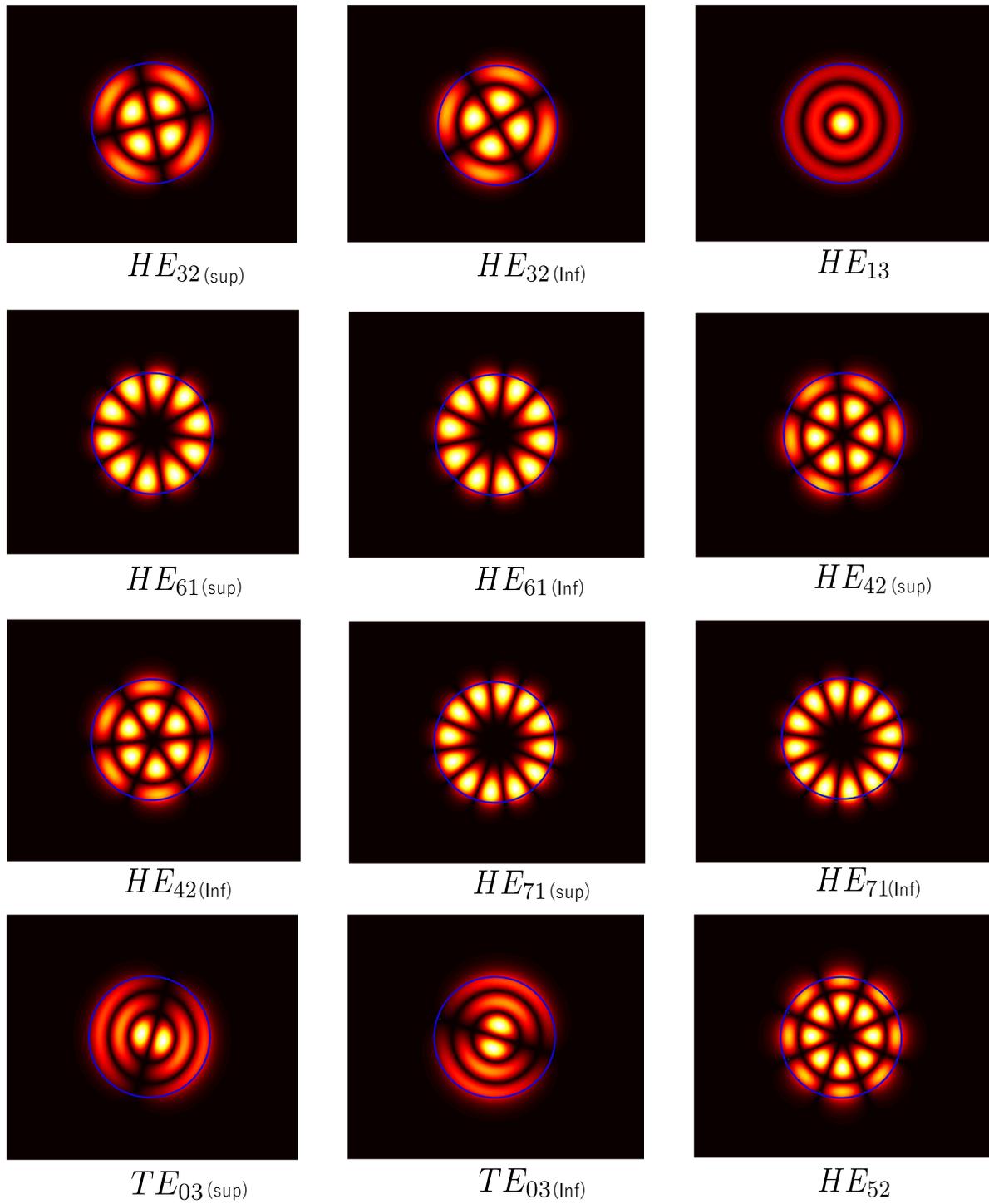


Figura 6-3 (continuación)

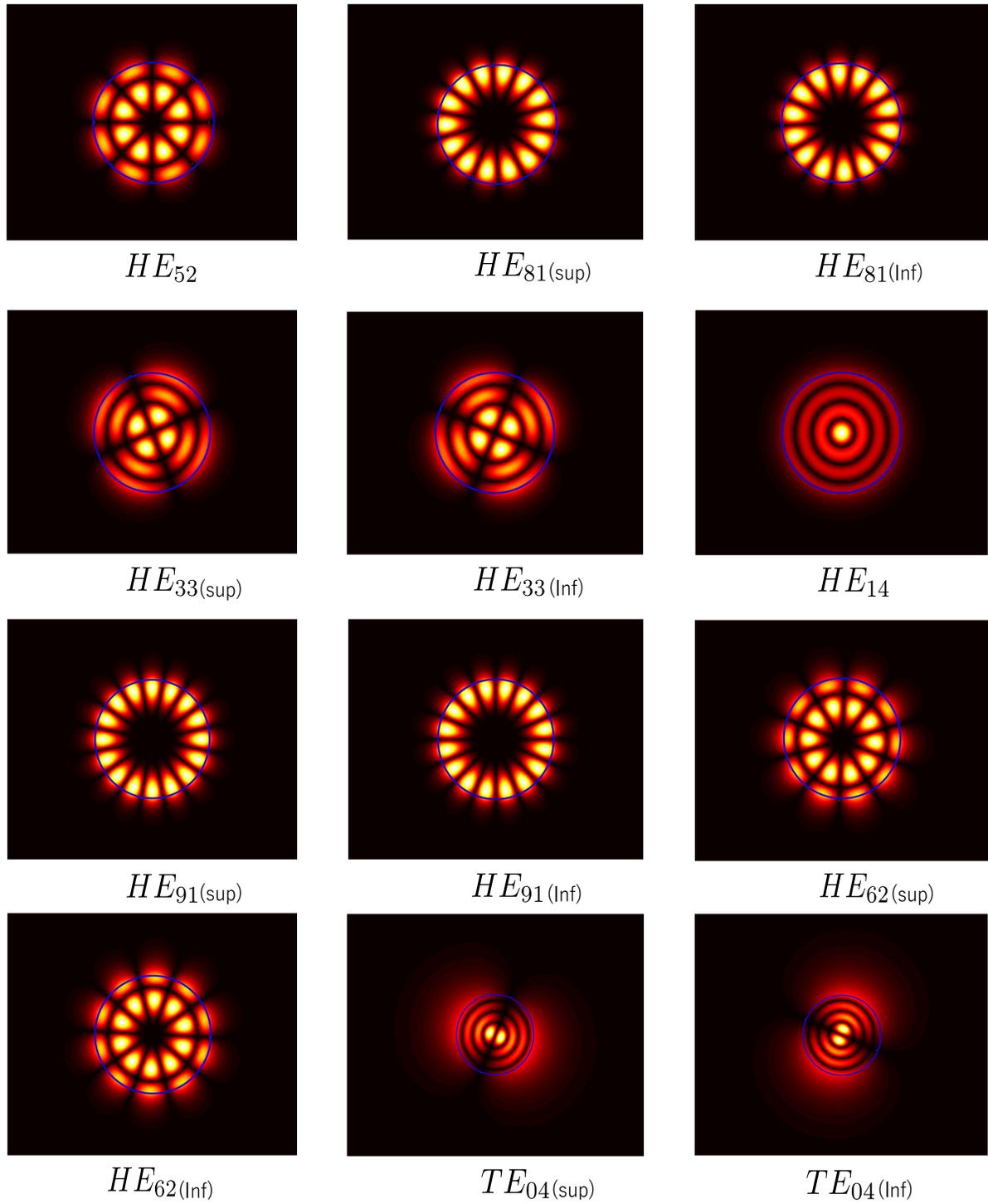


Figura 6-3 (continuación)

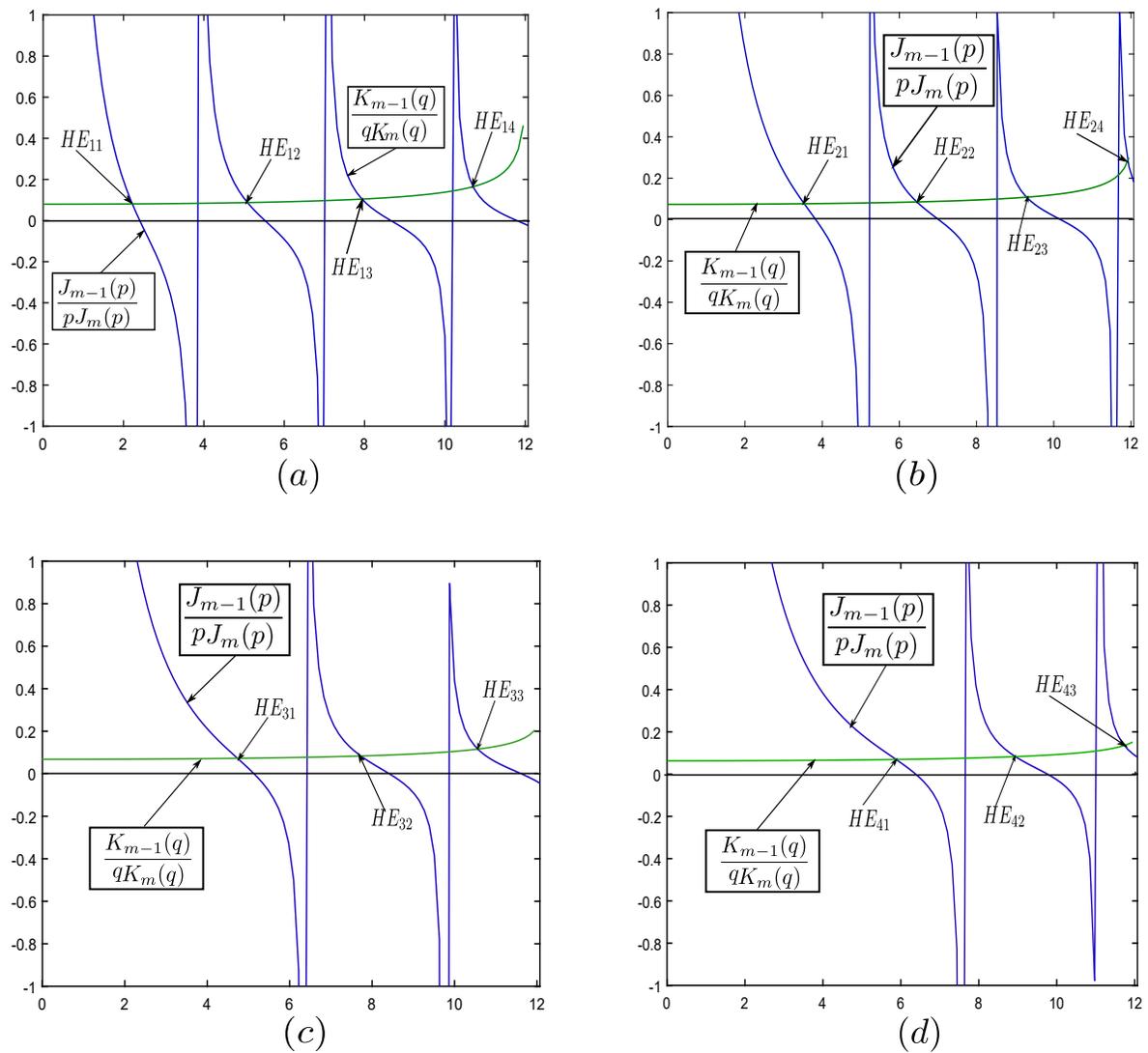


Figura 6-4: Solución gráfica de la ecuación trascendental $\frac{J_{m-1}(p)}{pJ_m(p)} - \frac{K_{m-1}(q)}{qK_m(q)} = 0$ para los modos HE_{mn} . Fuente. Autor

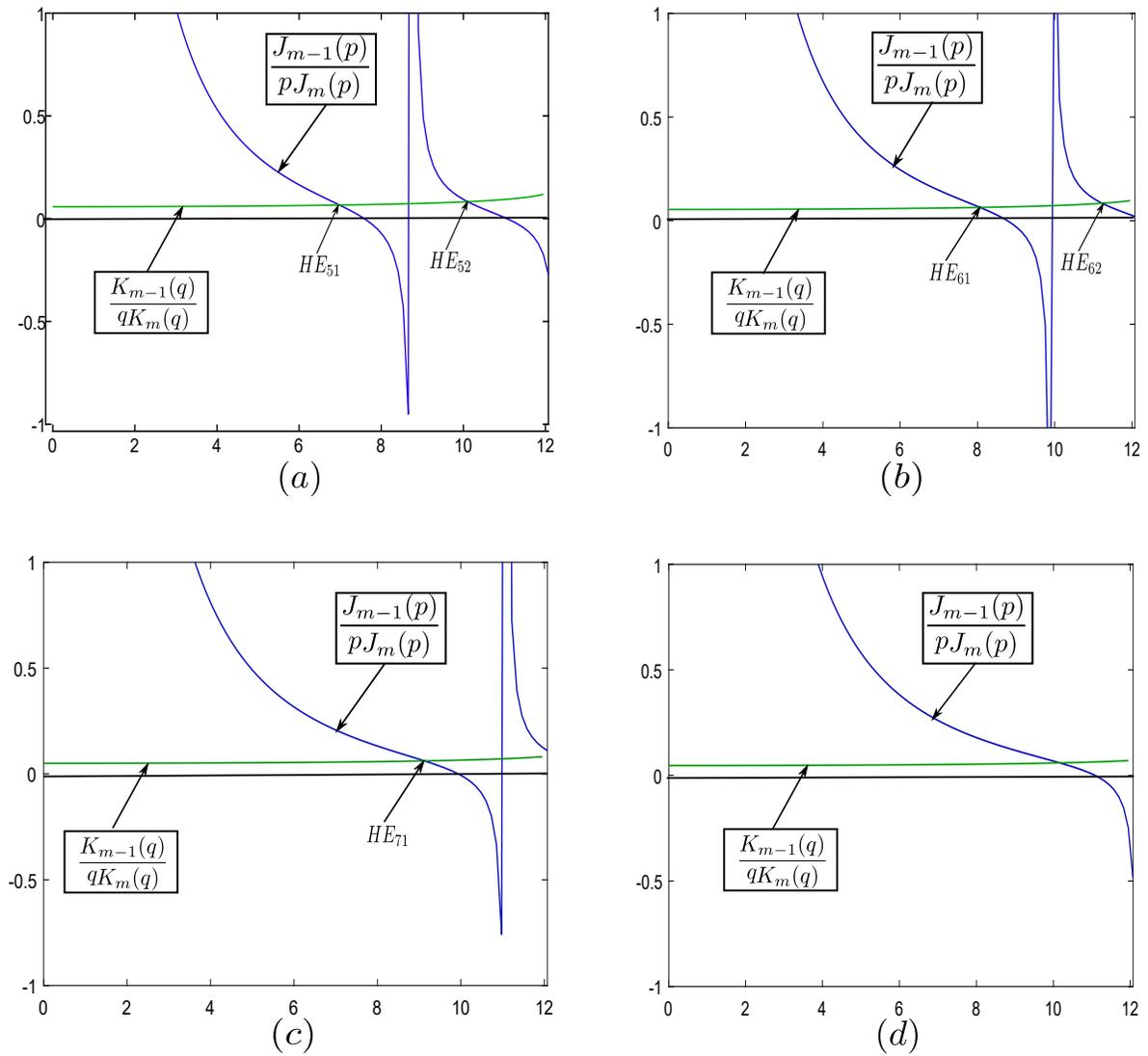


Figura 6-4 (continuación)

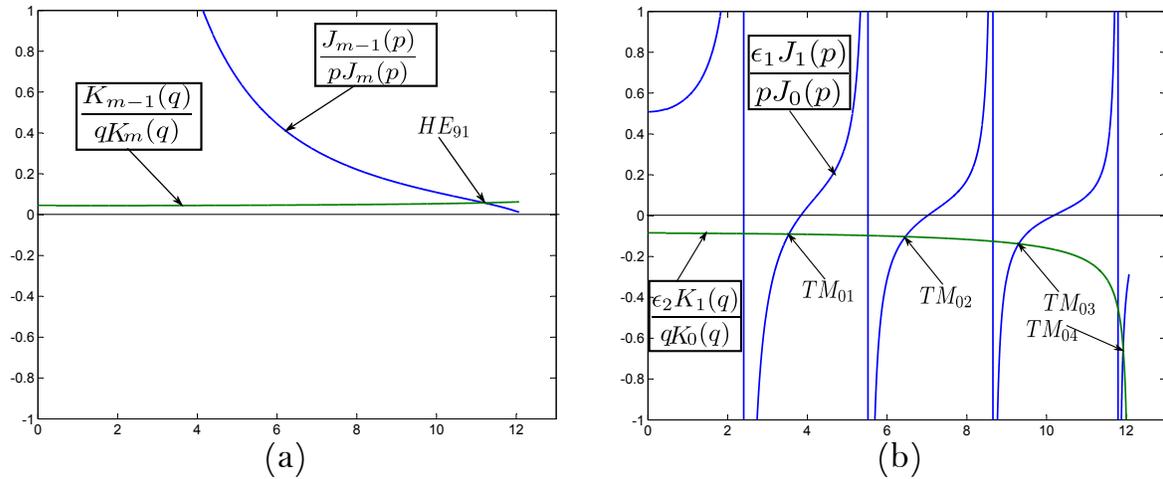
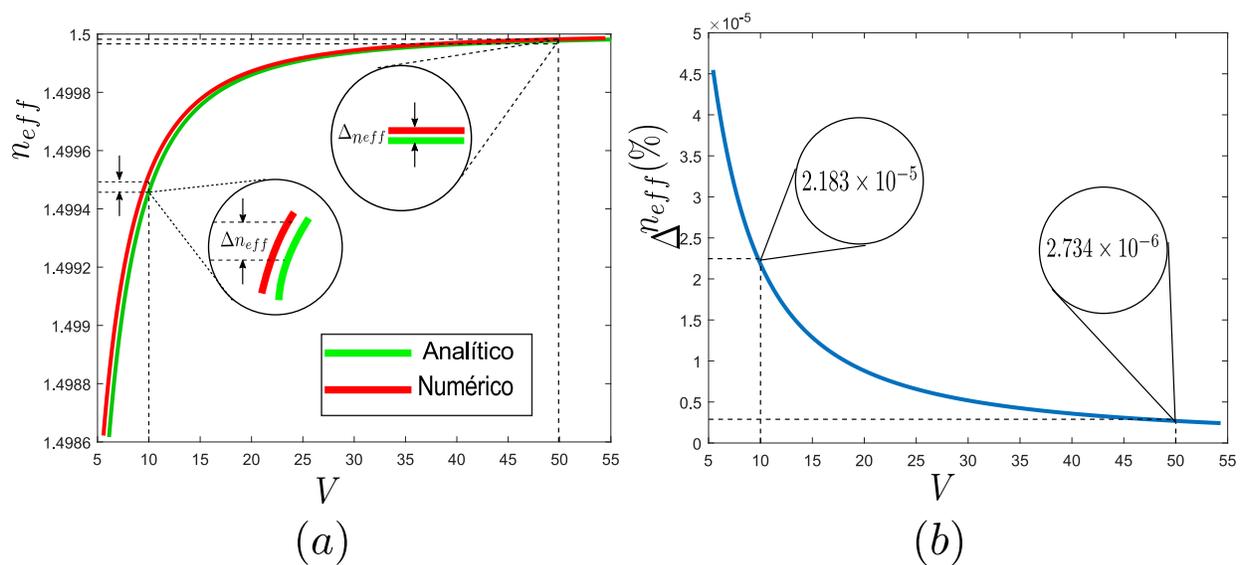


Figura 6-4 (continuación)

Figura 6-5: (a) Índice de refracción efectivo en función de la frecuencia normalizada V . (b) Error en % cometido al usar el método de elementos finitos. Fuente. Autor

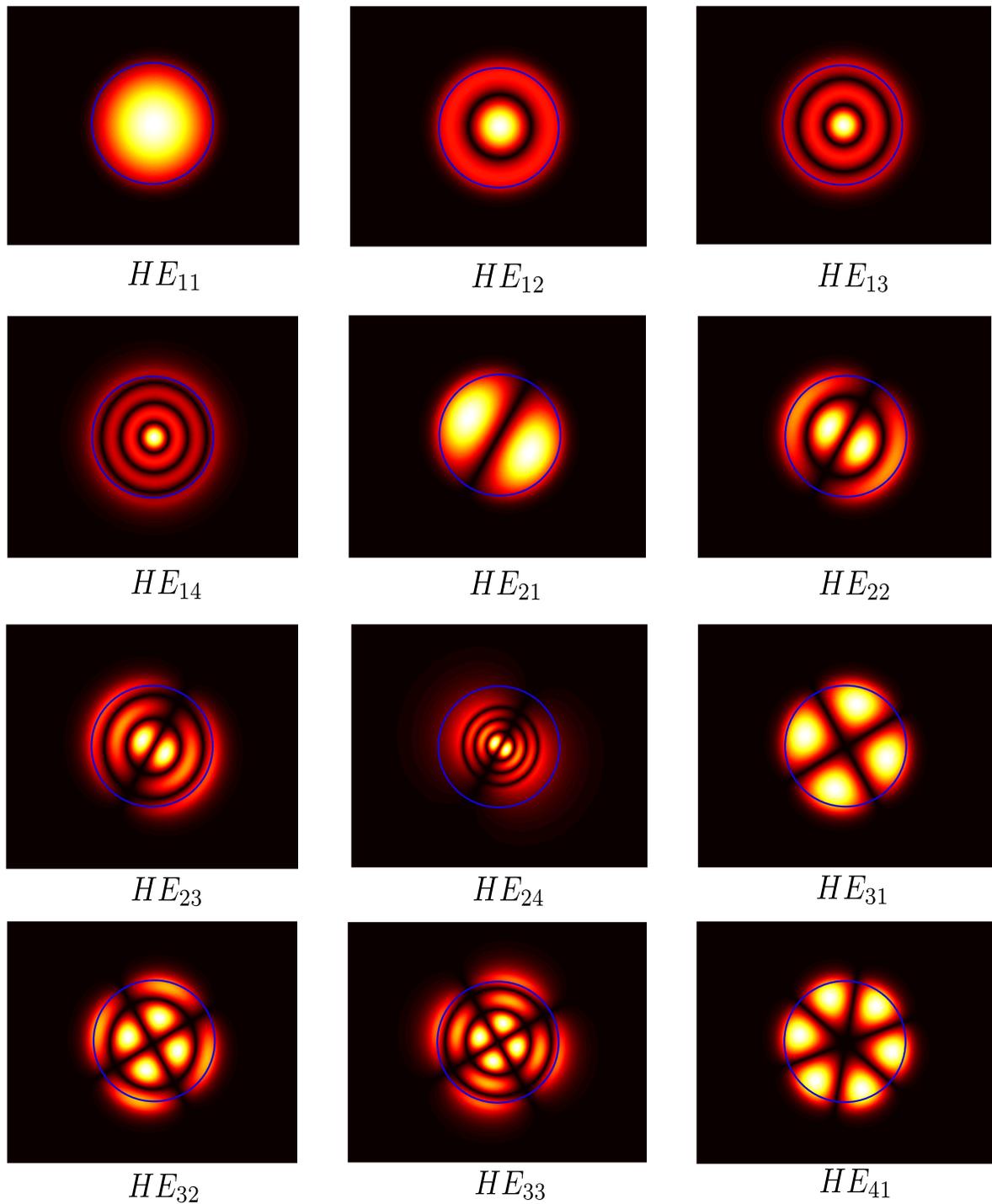


Figura 6-6: Modos normales de propagación hallados usando el método analítico, para valores de índice de refracción en el núcleo y revestimiento de 1.5 y 1.49, respectivamente, y una longitud de onda de $900nm$. Fuente. Autor

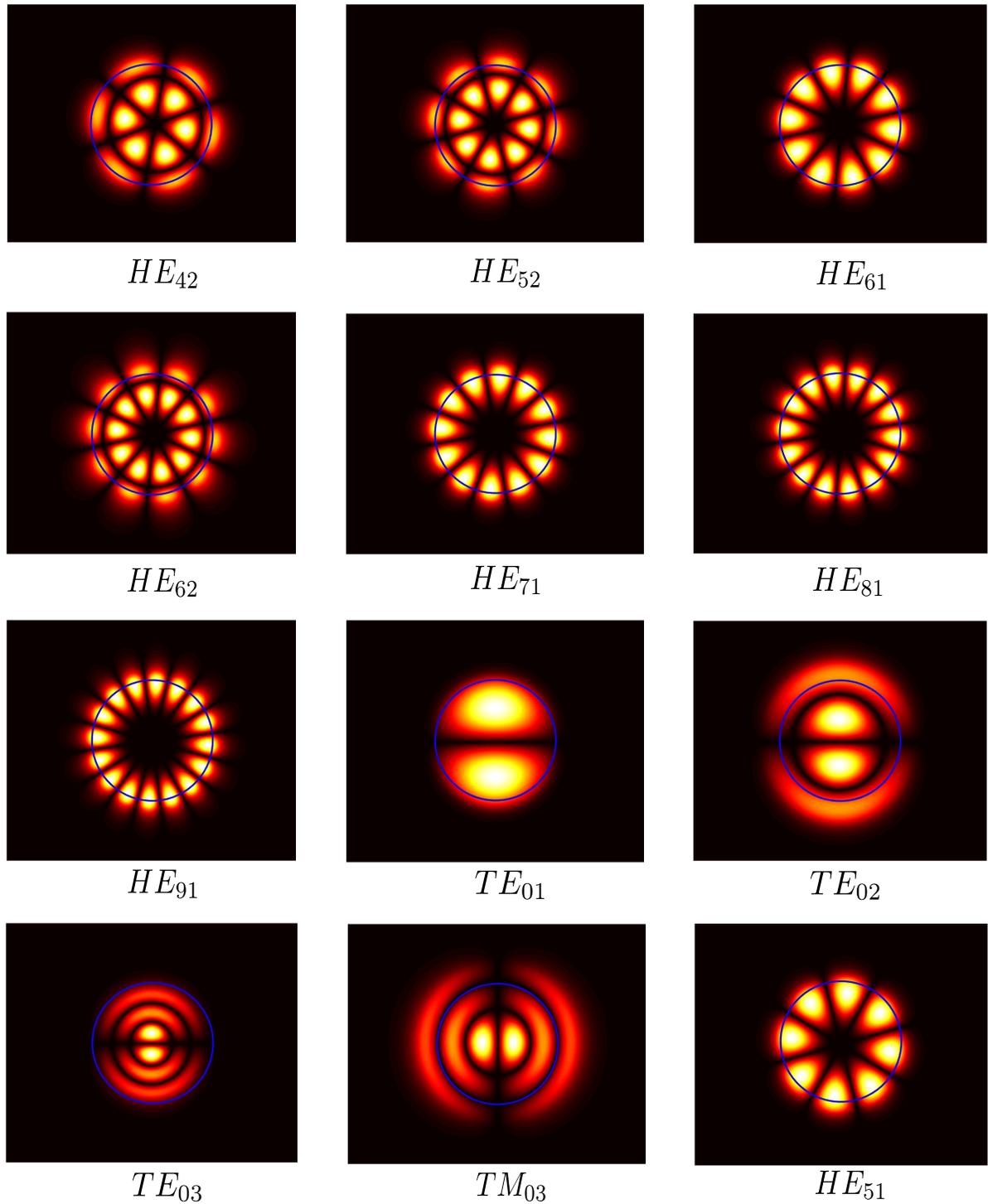


Figura 6-6 (continuación)

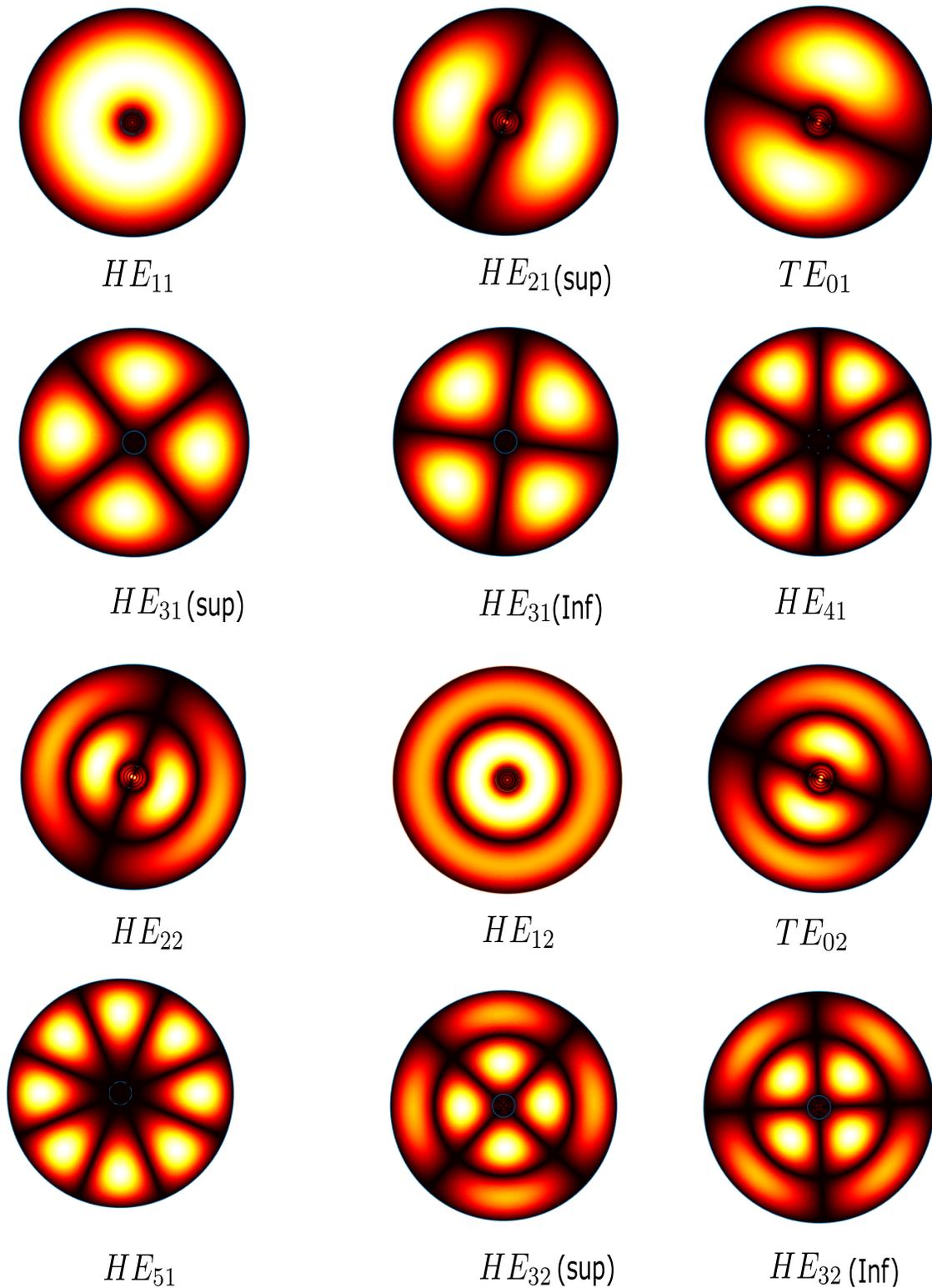


Figura 6-7: Modos evanescentes hallados usando el método de elementos finitos para valores de índice de refracción del revestimiento igual a 1.49 y una longitud de onda de 900nm . Fuente. Autor

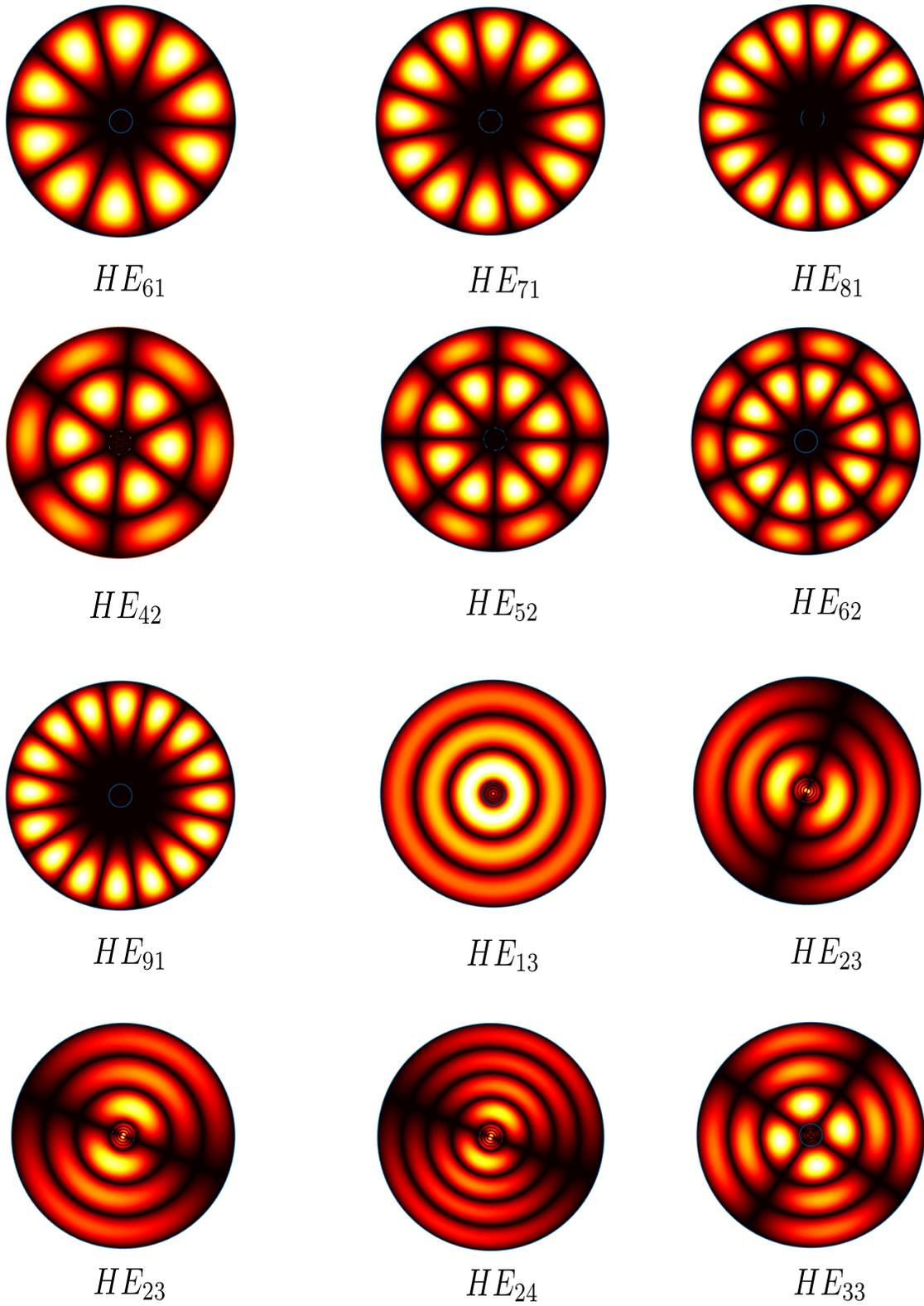


Figura 6-7 (continuación)

7 Conclusión

Las simulaciones de los modos normales en una fibra óptica de salto de índice realizadas en el presente trabajo, tanto analíticas como numéricas, son comparables entre sí y con los resultados en la literatura revisada; encontrándose una buena precisión en los cálculos del índice efectivo. De igual manera, este trabajo permite constatar las dificultades en cuanto a la representación numérica de los modos al hacer uso de la herramienta de elementos finitos del software Matlab para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, más precisamente aplicadas en fibras ópticas. Uno de los inconvenientes encontrados en este sentido, es la exigencia en el equipo de cómputo, además, un refinamiento muy grande en la geometría usada puede ocasionar demasiados valores, consumiendo recursos de memoria en el ordenador. En consecuencia, la eficacia del método dependerá de que tan bueno es el refinado de la malla y, por supuesto, del equipo de cómputo usado para desarrollar los procesos.

Los resultados obtenidos con el método numérico de los elementos finitos presentan un error que no supera el $6 \times 10^{-6} \%$, como se ve en la figura 6-5 (b), este error disminuye cuando aumenta la frecuencia normalizada V , que a su vez depende de la longitud de onda. Este hecho se debe a que el número de modos aumenta en el intervalo de búsqueda, por lo tanto la diferencia entre los índices de refracción efectivo calculado tanto por el método analítico como por el método numérico se hace más pequeño. Para la obtención de resultados fiables en el método de los elementos finitos se realizó un mallado fino en el dominio del problema.

Perspectivas de trabajo

Las fibras de cristal fotónico son de mucho interés por su increíble rendimiento y sus múltiples aplicaciones [43, 44, 45]. Las fibras de cristal fotónico se pueden utilizar como filtros [46], interruptores [47, 48], moduladores electro-ópticos [49, 50], convertidores de polarización [51], sensores [52], entre otros; debido a que son muy adecuados en la transmisión de datos con luz.

El hecho de que las fibras de cristal fotónico de núcleo de alto índice comparten muchas características comunes con las fibras ópticas convencionales, y adicionalmente que las tecnologías de fibra óptica han tenido un cambio revolucionario después de la invención de la fibra de cristal fotónico, permite que este presente trabajo abra la posibilidad de realizar estudios de simulacio-

nes numéricas en otro tipo de fibras: fibras de Bragg y fibras de cristal fotónico, lo que permitiría conocer el comportamiento de estas fibras y la propagación de modos en ellas. Para las simulaciones en este tipo de fibras, en donde la geometría tiene forma compleja, es preferible el uso de un método numérico, como el implementado aquí. Las dificultades en este tipo de soluciones radican en la construcción completa de algoritmos computacionales; no siempre es posible trasladar un modelo matemático a un software, y que este sea capaz de resolverlo. Los modelos escalares clásico son los mas comunes, siendo una dificultad las ecuaciones de tipo vectorial.

Apéndice A

PDEToolbox de MATLAB

En este primer apéndice describimos las funciones más importantes contenidas en la PDEToolbox de MATLAB, las cuales sirven para resolver problemas relacionados con algunas ecuaciones diferenciales parciales escalares en un dominio bidimensional. También describimos los pasos necesarios para resolver el problema de autovalores y que lleva a la solución escalar de la ecuación de Helmholtz para una fibra multimodo con salto de índice.

■ Datos de la fibra óptica multimodo

Se deben conocer los datos de la fibra que se va usar en la simulación, para ello existen dos opciones: ir introduciendo los datos en el entorno PDEtool según sean solicitados o cargar los datos desde un fichero previamente construido.

■ Construcción de la geometría

La generación de la geometría es algo que lo resuelve la PDEToolbox de MATLAB. Hay tres formas de crear geometría bidimensional. Dos se basan en modelos CSG (Constructive Solid Geometry), que combinan formas básicas.

- Utilice la aplicación PDE Modeler para dibujar formas básicas (rectángulos, círculos, elipses y polígonos) y combínelas con intersecciones y uniones establecidas para obtener la geometría final. Luego puede exportar la geometría a su espacio de trabajo MATLAB o continuar trabajando en la aplicación. Para obtener más información, consulte “Creación de geometría 2-D en la aplicación PDE Modeler”

- Utilice la función `decs` para crear geometría en la línea de comando de la siguiente manera:
- Especificar matrices que representan las formas básicas (rectángulos, círculos, elipses y polígonos).
- Asigne una etiqueta a cada forma. Hay tres formas de crear geometría bidimensional. Dos se basan en CSG (Constructive Solid Geometría), que combinan formas básicas.
- Utilice la aplicación PDE Modeler para dibujar formas básicas (rectángulos, círculos, elipses y polígonos) y combinarlos con la intersección y las uniones establecidas para obtener la geometría. Luego puede exportar la geometría a su espacio de trabajo MATLAB o continuar para trabajar en la aplicación. Para obtener más información, consulte “Creación de geometría 2-D en la aplicación PDE Modeler”
- Utilice la función `decs` para crear geometría en la línea de comando de la siguiente manera:
- Especificar matrices que representan las formas básicas (rectángulos, círculos, elipses y polígonos).
- Dale a cada forma una etiqueta.
- Especificar una “fórmula de conjunto” que describa las intersecciones, uniones y diferencias de conjunto de las formas básicas. `decs` te permite describir cualquier geometría que puedas hacer a partir de las formas básicas (rectángulos, círculos, elipses y polígonos). Para obtener más información, consulte “Creación de geometría 2-D en Línea de comando”.
- Especifique una función que describa la geometría. La función debe tener el formato descrita en “Función parametrizada para la creación de geometría 2-D”.
- Especificar una “fórmula de conjunto” que describa las intersecciones, uniones y diferencias de conjunto de las formas básicas. `decs` te permite describir cualquier geometría que puedas hacer a partir de las formas básicas (rectángulos, círculos, elipses y polígonos). Para obtener más información, consulte “Creación de geometría 2-D en Línea de comando”.
- Especifique una función que describa la geometría. La función debe tener el formato descrita en “Función parametrizada para la creación de geometría 2-D”.

Cómo decidir un método de creación de geometría

1. Utilice la aplicación PDE Modeler si puede (geometría simple).
2. Utilice la función `decs` para geometrías que sean algo complejas pero que puedan describirse en términos de las formas básicas.
3. Utilice una función de descripción de geometría si no puede utilizar los otros métodos.

Creación de geometría 2 D con comandos de líneas

Para obtener información básica sobre la construcción de geometría 2-D, consulte “Tres formas de crear geometría 2-D” Para describir su geometría a través del modelado de geometría sólida constructiva (CSG), utilice tres estructuras de datos.

1. Una matriz cuyas columnas describen las formas básicas. Cuando exporta geometría desde la aplicación PDE Modeler, esta matriz tiene el nombre predeterminado `gd` (descripción de la geometría). Consulte “Crear formas básicas”
2. Una matriz cuyas columnas contienen nombres para las formas básicas. Rellene las columnas con ceros o 32 (espacios en blanco) para que cada columna tenga la misma longitud. Consulte “Crear nombres para las formas básicas”
3. Un conjunto de caracteres que describen las uniones, intersecciones y diferencias de conjunto de las formas básicas que forman la geometría. Consulte “Establecer fórmula”

Crear nombres para las formas básicas

Para crear una fórmula que describa las uniones e intersecciones de formas básicas, necesita un nombre para cada forma básica. Dé los nombres como una matriz cuyas columnas contienen los nombres de las columnas correspondientes en la matriz de forma básica. Rellene las columnas con 0 o 32 si es necesario para que cada una tenga la misma longitud. Una forma sencilla de crear los nombres es especificando una matriz de caracteres cuyas filas contienen los nombres, y luego tomar la transposición. Utilice la función `char` para crear la matriz. `char` rellena las filas según sea necesario para que todas tengan la misma longitud. Continuando con el ejemplo, asigne nombres a las tres formas.

Conjunto de formulas

Obtenga la geometría final escribiendo un conjunto de caracteres que describa las uniones e intersecciones de formas básicas. Utilice `+` para unión, `*` para intersección, `-` para diferencia de conjuntos y paréntesis para agrupación. `+` y `*` tienen la misma precedencia de agrupación. `-` tiene mayor precedencia de agrupación.

Crear geometría y eliminar límites en las fronteras

Una vez que haya creado las formas básicas, les haya dado nombres y haya especificado una fórmula establecida, cree la geometría utilizando `decsg`. A menudo, también elimina algunos o todos los límites de fronteras resultantes.

8 Bibliografía

- [1] Ajoy Ghatak Arun Kumar. *Polarization of Light With Applications in Optical Fiber*. SPIE, 2009.
- [2] Francisco José Blanco Rodríguez. *simulación Vectorial de Modos Normales en Fibras de Cristal Fotónico*. 2006.
- [3] Ajawad I Haija, Muhammad Zillulhaq Numan, and W Larry Freeman. *Concise optics: concepts, examples, and problems*. CRC Press, 2018.
- [4] John D. Love Allan W. Snyder. *Optical Waveguide Theory*. Chapman and Hall, 1983.
- [5] D. Hondros and P. Debye. Electromagnetic waves along long cylinders of dielectric. *Ann. Phys*, pages 465–476, 1999.
- [6] Gerd Keiser. *Optical communications essentials*. Wiley-IEEE Press, 2006.
- [7] O. Schriever. Electromagnetic waves in dielectric wires. *Ann. Phys.*, 63(7), pages 645–673, 1920.
- [8] K. C. Kao and G. A. Hockham. Dielectric-fibre surface waveguides for optical frequencies. *Proc. IEE*, 113, pages 1151–1158, 1966.
- [9] T. Yamazuki and M. Yoshiyagawa. Fabrication of low-loss, multicomponent glass fibers with graded index and pseudo-step-index borosilicate compound glass fibers. *Dig. Int. Conf. on Integrated Optics and Optical Fiber Communications, Osaka*, pages 617–620., 1977.
- [10] K. J. Beales, C. R. Day, W. J. Duncan, J. E. Midwinter and G. R. Newns. Preparation of sodium borosilicate glass fibers for optical communication. *Proc. IEE*, 123, pages 591–595, 1976.
- [11] Maimon, T.H. Optical and Microwave-Optical Experiments in Ruby. *Phys. Rev. Lett*, pages 564–5655, 1960.
- [12] M. Yousif Jamro John M. Senior. *Optical Fiber Communications*. Pearson Education Limited, 2009.
- [13] A. Werts. Propagation de la lumière cohérente dans les fibres optiques. *L'Onde Electr.*, 46,, pages 967–980, 1966.

-
- [14] F. P. Kapron, D. B. Keck and R. D. Maurer. Radiation losses in optical waveguides. *Appl. Phys. Lett.*, 10, pages 423--425, 1970.
- [15] J. K. Shaw. *Mathematical Principles of Optical Fiber Communication*. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [16] Kurtz, R.M. Mutual injection locking: A new architecture for high-power solidstate laser arrays. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, pages 578–586, 2005.
- [17] E. Snitzer. Cylindrical Dielectric Waveguide Modes. *J. Opt. Soc. Am.*, 51, pages 91–498, 1961.
- [18] J. Schroeder, R. Mohr, P. B. Macedo and C. J. Montrose. Rayleigh and Brillouin scattering in K_2O-SiO_2 glasses. *J. Am. Ceram. Soc.*, 56, pages 510–514, 1973.
- [19] Bahaa EA Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, 2019.
- [20] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [21] Roger F Harrington. *Time-harmonic electromagnetic fields*. McGraw-Hill, 1961.
- [22] Tsutomu Kitoh Kenji Kawano. *Introduction to Optcal Waveguide Analisis*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [23] Hyo J. Eom. *Electromagnetic Wave Theory for Boundary-Value Problems. An Advanced Course on Analytical Methods*. Springer, 2006.
- [24] Carl TA Johnk. *Teoría electromagnética: campos y ondas*. Limusa,, 1999.
- [25] Jian-Ming Jin. *Theory and computation of electromagnetic fields*. John Wiley & Sons, 2011.
- [26] Wei-Chih Wang. *Electromagnetic wave theory*. Wiley, New York, 1986.
- [27] Inc. R2017a The MathWorks. *Partial Differential Equation Toolbox™*. 2017.
- [28] INC MATHWORKS. *Partial differential equation toolbox user's guide'*. *The Math-Works, Inc*, 2019.
- [29] Darrell W Pepper and Juan C Heinrich. *The finite element method: basic concepts and applications*. Taylor & Francis, 2005.
- [30] Junuthula Narasimha Reddy. *An introduction to the finite element method*. New York, 1993.
- [31] Mark S Gockenbach. *Finite-dimensional linear algebra*. CRC Press, 2010.
- [32] Jian-Ming Jin. *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2015.

-
- [33] J. N. REDDY. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford University Press, United States, 2004.
- [34] Kwong-Tin Tang. *Mathematical methods for engineers and scientists*, volume 1. Springer, 2007.
- [35] Larry C Andrews and Larry C Andrews. *Special functions of mathematics for engineers*. McGraw-Hill New York, 1992.
- [36] Milton Abramowitz, Irene A Stegun, and Robert H Romer. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, 1988.
- [37] Frank WJ Olver, Daniel W Lozier, Ronald F Boisvert, and Charles W Clark. *NIST handbook of mathematical functions hardback*. Cambridge university press, 2010.
- [38] John M Senior and M Yousif Jamro. *Optical fiber communications: principles and practice*. Pearson Education, 2009.
- [39] Detlef Gloge. Weakly guiding fibers. *Applied Optics*, 10(10):2252-2258, 1971.
- [40] Katsunari Okamoto. *Fundamentals of optical waveguides*. Academic press, 2006.
- [41] Rodolfo Neri Vela. *Lineas de Transmisi3n*. McWraw-Hill, 1999.
- [42] Inc.R2017a The MathWorks. *Mathematics*. 2017.
- [43] Emmanuel K Akowuah, Terry Gorman, Huseyin Ademgil, Shyqyri Haxha, Gary K Robinson, and Jenny V Oliver. Numerical analysis of a photonic crystal fiber for biosensing applications. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 48(11):1403-1410, 2012.
- [44] Ahmet Yasli, Emmanuel K Akowuah, Shyqyri Haxha, and Huseyin Ademgil. Photonic crystal fiber based surface plasmon sensor design and analyze with elliptical air holes. In 2016 HONET-ICT, pages 75-78. IEEE, 2016.
- [45] HY Fu, Chuang Wu, MLV Tse, Lin Zhang, Kei-Chun Davis Cheng, Hwa Yaw Tam, Bai-Ou Guan, and Chao Lu. High pressure sensor based on photonic crystal fiber for downhole application. *Applied optics*, 49(14):2639-2643, 2010.
- [46] Mohammad Arjmand, Reza Talebzadeh, et al. Optical filter based on photonic crystal resonant cavity. *Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications*, 9(January-February 2015):32-35, 2015.
- [47] Kiazand Fasihi. High-contrast all-optical controllable switching and routing in nonlinear photonic crystals. *Journal of Lightwave Technology*, 32(18):3126-3131, 2014.

- [48] Kaiyu Cui, Qiang Zhao, Xue Feng, Yidong Huang, Yongzhuo Li, Da Wang, and Wei Zhang. Thermo-optic switch based on transmission-dip shifting in a double-slot photonic crystal waveguide. *Applied Physics Letters*, 100(20):201102, 2012.
- [49] Jan-Michael Brosi, Christian Koos, Lucio Claudio Andreani, Michael Waldow, Juerg Leuthold, and Wolfgang Freude. High-speed low-voltage electro-optic modulator with a polymer-infiltrated silicon photonic crystal waveguide. *Optics Express*, 16(6):4177–4191, 2008.
- [50] Md Faizul Huq Arif, Kawsar Ahmed, Sayed Asaduzzaman, and Md Abul Kalam Azad. Design and optimization of photonic crystal fiber for liquid sensing applications. *Photonic Sensors*, 6(3):279–288, 2016.
- [51] HaiFeng Xuan, Jun Ma, Wa Jin, and Wei Jin. Polarization converters in highly birefringent microfibers. *Optics express*, 22(3):3648–3660, 2014.
- [52] Yang-Hua Chang, Ying-Yan Jhu, and Chien-Jang Wu. Temperature dependence of defect mode in a defective photonic crystal. *Optics Communications*, 285(6):1501–1504, 2012.