

La dispersión (anti)neutrino-electrón como estudio de interacciones no estándares del neutrino



Ninibed Yelitza Gonzalez Villamizar

Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Pamplona, Norte de Santander , Colombia
2022

La dispersión (anti)neutrino-electrón como estudio de interacciones no estándares del neutrino



Ninibed Yelitza Gonzalez Villamizar

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Físico

Director(a):

Título Ph.D Blanca Cecilia Cañas Orduz

Línea de Investigación:

Física de partículas elementales. Física Teórica

Universidad de Pamplona
Facultad de Ciencias Básicas
Pamplona, Norte de Santander, Colombia

2022

Una de las más grandes y más importantes herramientas del físico teórico es el cubo de basura.

Richard P. Feynman.

Agradecimientos

A mi tutora, la Dra. Blanca Cecilia Cañas Orduz, ya que sin sus conocimientos, paciencia, compromiso y motivación, este trabajo no hubiese sido fácil de realizar. Sus explicaciones y consejos siempre fueron fundamentales para realizar lo que hoy he logrado en este trabajo de investigación. Gracias por todas sus palabras de aliento, cuando más las necesitaba y por estar para mí cuando mis horas de trabajo se hacían confusas. Siempre estaré eternamente agradecida y llena de admiración hacia usted.

A mi familia, ya que ustedes han sido siempre el motor que impulsa mis sueños, quienes siempre estuvieron a mi lado en los días y noches más difíciles durante mis horas de estudio. Mis amados padres, hermanos y compañero de vida, siempre han sido mi ejemplo a seguir y hoy cuando concluyo mis estudios de pregrado, les dedico a ustedes este logro como una meta más que conquiste. Me siento muy orgullosa de que estén a mi lado en este momento tan importante.

A mis amigas y compañeros, ya que hoy culminan una de las mejores aventuras de mi vida, y no puedo dejar de agradecerles por su apoyo y compañía, por todo el tiempo que compartimos juntos y por esas largas horas de estudio. Gracias por siempre estar ahí.

Resumen

Durante el desarrollo de esta tesis, se abordó el estudio fenomenológico de las interacciones no estándar (INE) asociadas a física nueva (FN) en el sector de neutrinos. Para llevar a cabo esta investigación, en primer lugar, se estudió la dispersión (anti)neutrino-electrón bajo el Modelo Estándar (ME) de la física de partículas elementales y posteriormente se analizó posibles interacciones adicionales a las del ME y el impacto que tienen dichas INE de los neutrinos con la materia en la dispersión (anti)neutrino-electrón. Esta última parte de la investigación, abarcó un estudio estadístico sobre el análisis de datos experimentales y su implementación en los códigos numéricos usando el lenguaje FORTRAN que permitió obtener cotas a los parámetros de INE.

Palabras clave: Interacciones No Estándar (INE), Física Nueva (FN), Modelo Estándar (ME), neutrinos, dispersión, (anti)neutrino, interacciones.

Abstract

During the development of this thesis, the phenomenological study of non-standard interactions (INS) associated with new physics (NF) in the neutrino sector was addressed. To carry out this research, firstly, electron (anti)neutrino scattering was studied under the Standard Model (SM) of elementary particle physics and subsequently possible additional interactions to those of the EM were analyzed and the impact that said interactions have. INE of neutrinos with matter in (anti)neutrino-electron scattering. This last part of the research included a statistical study on the analysis of experimental data and its implementation in the numerical codes using the FORTRAN language, which allowed obtaining bounds for the INS parameters.

Lista de Figuras

2-1.	Partículas del Modelo Estándar con algunas de sus propiedades tales como el espín, la carga y la masa.	4
3-1.	Espectro energético para el proceso de desintegración beta. Se muestra el espectro observado y el que se esperaría en el caso en que solo se emitiera el electrón. . . .	9
3-2.	Desintegración beta del neutrón.	10
3-3.	Proceso de desintegración β^+ en un núcleo con la emisión de neutrinos y positrones.	11
3-4.	Ilustración esquemática del montaje experimental para la detección de neutrinos utilizado por Cowan y Reines. Un tanque de agua cargado con $CdCl_2$ está rodeado de centelladores de líquido. Se utilizan para una medida de coincidencia de los fotones de aniquilación de 511 keV y de los rayos- emitidos por la captura de neutrones en Cd	14
3-5.	Vista esquemática de la producción de neutrinos por las interacciones de protones de rayos cósmicos en la atmósfera con generación de piones y muones.	16
4-1.	Ilustración simbólica de la dispersión de dos cuerpos en el marco de reposo de la partícula objeto.	21
4-2.	Diagramas de la dispersión $\nu_e - e^-$. A la izquierda de la figura se observa el diagrama de la dispersión por corriente cargada (bosón W), y a la derecha la dispersión por corriente neutra (bosón Z).	27
4-3.	Diagramas para la dispersión $\bar{\nu}_e - e^-$ dada a través de la corriente carga (bosón W) así como el intercambio de la corriente neutra (bosón Z)	41
5-1.	Diagrama de Feynman INE de neutrinos descrita genéricamente como interacción de cuatro fermiones con nuevos acoplamientos.	49
5-2.	Diseño del laboratorio de neutrinos Kuo-Sheng, junto con el núcleo del reactor y el edificio.	51
5-3.	Diseño del blindaje de KSNL. Se aplican estructuras similares a las paredes trasera y delantera. Se colocaron detectores y blindajes internos en el volumen objetivo interno	51
5-4.	Espectro de antineutrinos de reactor para los isótopos ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{241}Pu	53

5-5.	Número de eventos en función de la energía de retroceso del electrón T . La línea a trazos y la línea continua corresponden a los valores esperados a partir del ME y el mejor ajuste de los datos experimentales respectivamente.	55
5-6.	Sensibilidad del parámetro ε_{ee}^{eL} a través del análisis χ^2	56
5-7.	Sensibilidad del parámetro ε_{ee}^{eR} a través del análisis χ^2	57
5-8.	Sección eficaz diferencial en función de la energía de retroceso del electrón.	58
F-1.	La dispersión neutrino-electrón ilustrada esquemáticamente en el marco de reposo del electrón inicial.	79

Lista de Tablas

2-1.	Interacciones de las partículas.	5
4-1.	Valores de los acoplamientos vectoriales y axiales de los fermiones en el ME [1]. . .	28
5-1.	Sección eficaz para $\bar{\nu}_e - e$ publicadas por TEXONO	50
5-2.	Coefficientes $\alpha_{k\ell}$ del polinomio de orden 5 para el espectro de antineutrinos de los elementos $K = {}^{235}\text{U}, {}^{239}\text{Pu}, {}^{238}\text{U}, {}^{241}\text{Pu}$	53
5-3.	Espectro de antineutrinos para $E < 2\text{MeV}$, en unidades de $\bar{\nu}_e/(\text{MeV fisión})$	54

Contenido

Agradecimientos	VI
Resumen	VII
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XI
1. Introducción	1
2. El Modelo Estándar	3
2.1. Partículas Elementales	3
2.1.1. Fermiones	3
2.1.2. Bosones	5
2.2. Interacciones Fundamentales en el ME	5
3. Física de Neutrinos	7
3.1. El Postulado de Pauli	7
3.1.1. Fermi y la desintegración β	8
3.2. Experimento de retroceso nuclear de Rodeback y Allen	12
3.3. Descubrimiento del neutrino por Cowan y Reines	13
3.4. Fuentes de neutrinos	14
4. La Dispersión (anti)neutrino-electrón	20
4.1. Regla de oro para la Dispersión	20
4.2. $ \mathcal{M} ^2$ para la dispersión neutrino-electrón	25
4.3. $ \mathcal{M} ^2$ para la dispersión antineutrino-electrón	41
4.4. sección transversal diferencial para las dispersiones (anti)neutrino-electrón en términos de la energía de retroceso del electrón	44
4.4.1. Cálculo para el neutrino	44
4.4.2. Cálculo para el antineutrino	45
5. Interacciones No-Estándares	48
5.1. Cotas a los parámetros de INE en experimentos de reactores	50
5.1.1. Medición de la dispersión antineutrino-electrón	50

5.1.2. Análisis χ^2	52
6. Conclusiones	59
A. Apéndice: Desarrollo de la Integral delta	61
B. Apéndice: Reglas de Feynman para el modelo estándar Electro débil	62
B.1. Líneas Externas	62
B.2. Líneas Internas	63
B.3. Vértices	64
C. Apéndice: Identidad de Fierz	65
D. Apéndice: Matrices Gamma de Dirac	74
E. Apéndice: Demostración de la propiedad del símbolo de levi-civita	76
F. Apéndice: Productos Escalares en el Marco de Reposo del Electrón.	78
G. Apéndice: Energía de retroceso máxima del Electrón.	81
Bibliografía	84

1. Introducción

El estudio de los neutrinos ha jugado un papel muy relevante no solo a la hora de confirmar predicciones teóricas del Modelo Estándar (ME), sino también en la búsqueda de nueva física (NF). Una de las evidencias más claras de NF que tenemos hasta la fecha, se conoce como *oscilaciones de neutrinos*, este fenómeno fue descubierto por dos experimentos terrestres, Super-Kamiokande [2] en Japón y SNO [3] en Canadá, en 1998 y 2002, respectivamente. Estos experimentos midieron los flujos de neutrinos astrofísicos, provenientes de las colisiones de los rayos cósmicos con los núcleos de la atmósfera terrestre y de las reacciones termonucleares dentro del sol, respectivamente. Este gran descubrimiento dio solución a dos grandes problemas en la física de neutrinos, conocidos como, *la anomalía atmosférica y la anomalía solar*, donde se registraron déficits de neutrinos con respecto a las predicciones teóricas. Para su consecución se requirió determinar con gran precisión los flujos astrofísicos, además conocer el mecanismo de propagación de estas partículas y por supuesto el desarrollo de la tecnología necesaria para poder detectarlas correctamente.

Este descubrimiento de oscilaciones de neutrinos avivó la comprensión de cómo los neutrinos ganarían pequeñas masas, cómo se mezclan, y de cómo se establecerían nuevas interacciones adicionales a las consideradas en el ME. Tales interacciones, a menudo llamadas *interacciones no estándar* (INE) de neutrinos, tendrán como objetivo determinar efectos subdominantes que revelen interacciones adicionales de los neutrinos con la materia.

Las INE de los neutrinos con la materia se han explorado en diferentes procesos, entre ellos se encuentra la dispersión anti neutrino-electrón, la cual se ha medido en experimentos de neutrinos a bajas energías que utilizan reactores como fuente de antineutrinos. Entre los experimentos que han medido esta reacción se encuentra, por ejemplo, los experimentos de Rovno[4] y Krasnoyarsk[5] en Rusia y, más recientemente, las mediciones de los experimentos MUNU[6] y TEXONO[7]. Siendo los datos de este último los que se tendrán en cuenta para realizar el análisis numérico y estadístico de esta investigación.

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio exhaustivo de la dispersión (anti)neutrino-electrón en el marco del ME, la cual se modifica en presencia de física más allá de este modelo. Para este estudio fenomenológico de física nueva se propone una Lagrangiana efectiva que describe interacciones adicionales a las del ME en el proceso (anti)neutrino-electrón, en el cual se redefinen las constantes de acoplamiento agregando los parámetros de INE. Posteriormente se realiza un análisis estadístico con el fin de obtener cotas a las INE.

El presente trabajo de investigación está estructurado en 6 capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se realiza la fundamentación teórica del ME, las partículas que lo componen, sus características más importantes y la manera en cómo interactúan en el universo.

El capítulo 3 se presenta una recopilación histórica de la física de los neutrinos, desde su postulado, su descubrimiento y las fuentes de neutrinos que se conocen hoy en día.

En el capítulo 4 se introduce el concepto de dispersión y posteriormente se realiza cálculo analítico de manera detallada de las secciones transversales diferenciales de neutrinos y antineutrinos del electrón en la teoría electrodébil. También se expresa la sección transversal con respecto a la energía de retroceso del electrón, para extraer parámetros del ME.

En el capítulo 5, se introducen las INE asociadas a nueva física y se presenta el Lagrangiano efectivo que las describe. Así mismo se exponen las principales características del experimento de la colaboración TEXONO, seguidamente se analiza la dispersión antineutrino-electrón por medio de un análisis χ_2 donde se tendrán en cuenta las restricciones dadas por los experimentos actuales en el marco del ME y los parámetros de las INE en las que se presentan cotas actualizadas para los parámetros " ϵ_{ee}^{eL} " y " ϵ_{ee}^{eR} ".

En el Capítulo 6, se dan las conclusiones de esta Tesis de trabajo de grado.

Finalmente, se incluyeron siete Apéndices, en el Apéndice A se realiza el desarrollo de la integral delta; en el Apéndice B se muestran las reglas de Feynman para el Modelo Estándar electrodébil; en el Apéndice C se realizó la demostración de la identidad de Fierz; en el Apéndice D se muestran las propiedades de las matrices Gamma de Dirac; en el Apéndice E se realizó la demostración de la propiedad del símbolo de levi-civita, en el Apéndice F se realizó el cálculo de los productos escalares en el marco de reposo del electrón en función de la energía de retroceso del electrón; en el Apéndice G se realizó el cálculo de la energía de retroceso máxima del electrón.

2. El Modelo Estándar

A partir del descubrimiento del electrón por J.J Thomson en 1897, comenzó una nueva era de la física, llamada física de partículas elementales. Al destruirse la teoría del átomo como componente fundamental de la materia, surgió la pregunta sobre qué otras partículas podrían estar dentro del átomo. Con el uso de aceleradores de partículas de alta energía se sondeó a escalas de longitud más y más pequeñas, equivalentes a energías cada vez más altas, lo que llevó al descubrimiento de todo un "zoológico" de nuevas partículas, que finalmente llevaron a la teoría del ME de física de partículas actualmente aceptado[8, 9].

El ME es la teoría de campos cuánticos que describe las interacciones electromagnética, fuerte y débil (excepto la gravedad). Uno de los descubrimientos más exitosos ha sido el de la partícula perdida durante mucho tiempo, el bosón de Higgs, predicho por el ME y el cual se dio el 4 de julio del 2012 [10, 11]. Aunque todavía existen fenómenos inexplicables, el ME logra explicar vastos resultados experimentales.[12, 13]

2.1. Partículas Elementales

Las partículas elementales en el ME se clasifican de acuerdo con sus espines en: *fermiones* (partículas de espín semientero) y *bosones* (partículas de espín entero). Los fermiones están agrupados en *leptones* y *quarks*. Los bosones incluyen a los fotones, gluones, bosones W^\pm cargado y Z^0 neutro, que son partículas de espín 1 y el bosón de higgs que tiene espín cero.

2.1.1. Fermiones

Los leptones se dividen en leptones cargados: electrón (e), muón (μ) y tau (τ) y sus contrapartes neutras: neutrino del electrón (ν_e), neutrino del muón (ν_μ) y neutrino del tau (ν_τ). También existen seis antileptones, con el signo de la carga eléctrica opuesto al de su respectivo leptón, por ejemplo, el antileptón del electrón es el positrón, el cual tiene carga eléctrica +1. Teniendo en cuenta esto hay 12 leptones en total.

Del mismo modo, hay seis *sabores* de quarks. Los quarks se denominan: Up (arriba), Down (abajo), Charm (extraño), Strange (encantado), Bottom (inferior) y Top (superior), y se denotan por las primeras letras de sus nombres. En el ME, los quarks son fermiones de espín 1/2, con cargas eléctricas fraccionarias respecto a la carga fundamental del electrón. La dificultad con la investigación experimental de los quarks es que nunca se ha observado un quark aislado. Los quarks están



Figura 2-1.: Partículas del Modelo Estándar con algunas de sus propiedades tales como el espín, la carga y la masa.

siempre confinados en sistemas compuestos, llamados *hadrones*, que se extienden sobre distancias de alrededor de 1 fm [14].

Los sistemas de quarks más elementales son los *bariones*, partículas compuestas de tres quarks y los *mesones* partículas compuestas de un quark y un antiquark [9]. En particular, el protón y el neutrón son bariones. Los mesones son esencialmente un quark y un antiquark, unidos por el campo de interacción fuerte. El protón contiene básicamente dos quarks up y uno down (uud), y el neutrón dos quarks down y uno up (udd). El protón es el único barión estable. El neutrón es un poco más masivo que el protón, aproximadamente $1.3 \text{ MeV}/c^2$, y en el espacio libre decae a un protón a través de la interacción débil: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, con una vida media de aproximadamente 15 minutos[13].

Todos los mesones son inestables. Los mesones más ligeros son los π -mesones o *piones* π^+ y π^- los cuales tienen carga eléctrica y están compuestos por pares de (ud) y $(\bar{u}\bar{d})$, respectivamente. El mesón π^0 es neutro y es una superposición cuántica de $(u\bar{u})$ y $(d\bar{d})$ con la misma probabilidad [14].

Interacción	Fuerza de Acoplamiento	Mediador	Spin
1. Electromagnética	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \cong \frac{1}{137}$	fotón	1
2. Débil	$G_F \cong 1,16 \times 10^{-5} GeV^{-2}$	Bosón débil	1
3. Fuerte	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \cong 0,1$	Gluon	1
4. Gravitacional	$G_N \cong 6,71 \times 10^{-39} (GeV/c)^{-2}$	Gravitón	2

Tabla 2-1.: Interacciones de las partículas.

2.1.2. Bosones

Este tipo de partículas (elementales) se caracterizan por poseer un espín entero y por mediar las interacciones (a excepción del bosón de Higgs) descritas en el ME (fuerza fuerte, débil y electromagnética). En el ME encontramos los siguientes bosones: ocho gluones, los bosones W^\pm y Z^0 y el fotón. Adicionalmente el bosón de Higgs.

2.2. Interacciones Fundamentales en el ME

En el universo existen 4 interacciones fundamentales, de las cuales tres están descritas en el ME [15]:

- Interacción electromagnética mediada por fotones sin masa ($m_\gamma = 0$) con spin= 1.
- Interacción débil mediada por bosones débiles masivos ($m_W \cong 80,4 \frac{GeV}{c^2}$, $m_Z \cong 91,2 \frac{GeV}{c^2}$) con spin= 1.
- Interacción fuerte mediada por gluones sin masa ($m_g = 0$) con spin= 1.

La interacción gravitacional está fuera de juego para la física de partículas porque es extremadamente débil en comparación con las otras interacciones.

La interacción electromagnética mediada por el fotón γ tiene una larga historia de investigación y está descrita por la electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés). Es la teoría de gauge que tiene la simetría abeliana $U(1)$. QED está formulada en el marco de la teoría cuántica de campos y es renormalizable, es decir, varias divergencias originadas a partir de las integrales de bucle en los órdenes superiores de la teoría de perturbaciones pueden renormalizarse en masas físicas y funciones de onda de partículas. Debido a la pequeñez de la constante de acoplamiento $\alpha = e^2/4\pi \cong 1/137$, la perturbación funciona bien para QED [16].

La interacción fuerte está mediada por gluones que tienen cargas de color. Dado que los quarks también tienen cargas de color, los gluones pueden acoplarse a los quarks. La teoría de campo para

la interacción fuerte se formula en la teoría de Gauge no abeliana con simetría de color $SU(3)_c$ y se denomina cromodinámica cuántica (QCD, por sus siglas en inglés). La constante de acoplamiento de QCD tiene un comportamiento conspicuo para una variación del cuadrado de transferencia de cantidad de movimiento Q^2 .

La teoría de las interacciones débiles formulada originalmente por Fermi, fue desarrollada en la década de 1950 y está descrita por la interacción corriente-corriente con corrientes $V - A$. Funciona bien para procesos de baja energía. Desafortunadamente, la teoría no es renormalizable a pesar de su pequeña constante de acoplamiento. Esto se debe al hecho de que el acoplamiento de Fermi G_F tiene la dimensión de $[masa]^{-2}$. Por lo tanto, la interacción de Fermi debe considerarse como el modelo efectivo para procesos débiles que funcionan solo en la región de baja energía. En el estudio dedicado de la física de interacción débil en la década de 1960, se superaron muchas dificultades teóricas en la interacción débil. Finalmente se formuló una hermosa teoría renormalizable, basada en la imagen unificada de interacciones débiles y electromagnéticas, en el marco de la teoría de norma no abeliana con simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (el subíndice L significa que los campos participan en la interacción son zurdos e Y denota la hipercarga débil), que ahora se denomina modelo estándar electrodébil [17].

Las interacciones débiles y electromagnéticas están formuladas por la teoría de gauge con simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$, además, las interacciones fuertes están descritas por la teoría de gauge con simetría de color $SU(3)_c$. Por lo tanto, uno puede esperar naturalmente que todas estas interacciones de partículas elementales deban ser descritas por la teoría de gauge con alguna simetría interna G , es decir, el Lagrangiano tiene que ser invariante bajo las transformaciones de gauge de G . El ejemplo más simple es tomar la simetría grupo G sea un producto directo de cada simetría, $G = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. La teoría resultante se denomina modelo estándar de la física de partículas. El principio importante en la formulación es que la teoría de gauge, debe ser renormalizable y libre de anomalías, y la ruptura de la simetría debe ocurrir espontáneamente.[16, 18]

3. Física de Neutrinos

Los neutrinos son partículas fundamentales del ME, tienen espín semientero y no tienen carga eléctrica. Vienen en tres tipos de sabores; neutrino del electrón, neutrino del muón y neutrino del tau. Interaccionan únicamente a través de la interacción débil, lo cual ha constituido un reto desde el punto de vista experimental, para el estudio de sus propiedades.

Desde su hipótesis y posterior descubrimiento, el comportamiento del neutrino ha sido fuera de lo común. En contraste con la forma usual de descubrir nuevas partículas, es decir, por medio de experimentos, el neutrino se postuló primero teóricamente. La historia del neutrino comenzó con la investigación del decaimiento beta [8].

3.1. El Postulado de Pauli

El espectro energético de los electrones en la desintegración β fue uno de los más grandes desafíos de la época (a finales de 1800) para los físicos. Bohr explicaba el espectro continuo de energía simplemente como un resultado estadístico global resultante de la desintegración β de miles de núcleos. Por el contrario, si la energía debía conservarse estrictamente en cada una de las desintegraciones, ¿Cómo explicar que los electrones se emitieran con cualquier valor de energía?. La única respuesta que encontró Pauli, en 1930, fue admitir que junto con el electrón se emitía otra partícula, no detectada, de modo que la energía total disponible se repartía entre ambas. Esta fue la hipótesis de Pauli; un desesperado intento por encontrar una explicación plausible al extraño espectro del decaimiento beta.

Pauli introdujo su nueva partícula neutra como un nuevo constituyente del núcleo atómico, el cual estaría constituido por tres partículas: el protón (el más pesado y con carga positiva), el electrón (ligero y con carga negativa) y el nuevo neutrón (también ligero y sin carga eléctrica). La hipótesis de Pauli pretendía resolver simultáneamente las dos grandes dificultades que existían en aquellos momentos:

- explicar el espectro energético continuo en el proceso de desintegración β .
- describir los valores del momento magnético, espín y estadística de los núcleos atómicos.

En 1932 Chadwick, descubrió el neutrón como nuevo constituyente básico del átomo. Esta partícula era muy distinta a la que anteriormente había introducido Pauli. Aunque no tenía carga eléctrica,

su masa era muy similar a la del protón, es decir, mucho más pesada que la propuesta por Pauli. La nueva teoría consideraba como únicos constituyentes de los núcleos a los protones y neutrones. De este modo tanto el espín como la estadística de los diversos núcleos atómicos podían describirse de modo satisfactorio. Al mismo tiempo, esta nueva imagen del núcleo implicaba que en el proceso de desintegración β tanto los electrones como las hipotéticas partículas de Pauli eran creados en el mismo proceso de decaimiento. La realidad del neutrón fue aceptada rápidamente, y por lo tanto, se buscó un nuevo nombre para referirse a la partícula de Pauli. Fue Fermi quien la denominó neutrino (el pequeño neutrón).

El neutrino parecía una simple conjetura de un físico que permitía mantener el principio de conservación de la energía. Pero aún siendo esto muy importante, era necesario encontrar un modo en el que la partícula fantasma se pusiera en evidencia. Este fue el objetivo durante los siguientes veinticinco años.

3.1.1. Fermi y la desintegración β

Uno de los resultados experimentales que se presentó durante la conferencia Solvay en 1933, fue el espectro energético de la desintegración β medido con una gran precisión. El interés era determinar dicho espectro en la zona de valores máximos de la energía del electrón. La razón era simple. Si la energía solo se conservaba de modo estadístico, como defendía Bohr, la distribución energética se debía extender de modo continuo y sin fin.

Por el contrario, si realmente se emitía el neutrino introducido por Pauli, el espectro tendría que mostrar un corte abrupto para cierto valor de energía (como se puede ver en la figura 3-1). Este corte indicaría que existía otra partícula que se llevaba el resto de energía. Las evidencias experimentales son muy claras: existía un manifiesto límite superior en el espectro energético de electrones. Pauli tenía razón, y así pudo hacer público a su postulado, añadiendo que la masa del neutrino podría ser compatible con un valor prácticamente nulo.

La reivindicación del postulado de Pauli fue el punto de partida en la teoría de Fermi. Este comenzó identificando claramente a los protagonistas del proceso: protones, neutrones, electrones y los elusivos neutrinos. Además, se percató de una clara simetría que podía establecer entre protones y neutrones, partículas similares en masa, pero una con carga eléctrica (protón) y la otra neutra (neutrón). Concluyó que existía una simetría similar entre los electrones y los neutrinos. En este caso se trataba de partículas mucho más ligeras, y también, unas con carga eléctrica y las otras (neutrinos) neutras. Fermi concluyó que el proceso de desintegración beta consistía básicamente en la transformación de un neutrón en un protón con la consiguiente emisión del electrón y el neutrino (figura 3-2). La emisión del electrón era necesaria para que la carga eléctrica se conservase.

La presencia del neutrino era prescindible para que el momento angular también pudiese conser-

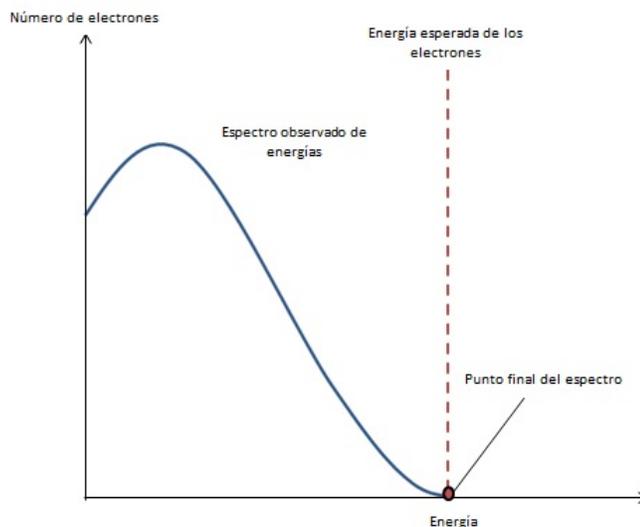


Figura 3-1.: Espectro energético para el proceso de desintegración beta. Se muestra el espectro observado y el que se esperaría en el caso en que solo se emitiera el electrón [19].

vase. En aquellos años ya se conocía que el espín del neutrón era semientero, al igual que el del protón y el del electrón. Las reglas de acoplamiento del momento angular mostraban claramente que el neutrón solo podría transformarse en un número impar de partículas con espín semientero. Así pues, era necesario que un nuevo fermión acompañase a la pareja protón-electrón. Por otra parte, la simetría encontrada por Fermi le permitió explicar también de modo natural el proceso por el cual era el protón el que podía transformarse directamente en neutrón, positrón y neutrino (ver figura 3-3).

El proceso satisfacía todas las leyes de conservación necesarias y su descripción no era muy distinta a la desintegración beta normal. De este modo, Fermi proporcionó por primera vez una imagen coherente para el proceso β^+ (producción de positrones a partir del decaimiento de los protones en los núcleos atómicos) descubierto ese mismo año por el matrimonio Joliot-Curie.

La imagen de Fermi resultó de inestimable ayuda para comenzar a visualizar el proceso de desintegración radiactiva; sin embargo, ¿Cómo tenía lugar? ¿Por qué se producía? estas eran preguntas que aún necesitaban una respuesta. Y este fue el siguiente paso en la contribución de Fermi. En el año 1933 algunos físicos, Dirac, Jordan, Heisenberg, el mismo Pauli, habían realizado diversos estudios sobre la interacción entre la radiación y la materia. Aunque surgieron numerosos problemas que solo pudieron resolverse muchos años después, con el desarrollo de la moderna teoría cuántica de la interacción electromagnética, la conocida electrodinámica cuántica, lo cierto es que en 1933 ya se habían puesto los cimientos para explicar la íntima relación entre la radiación y la materia. Así, se habían explicado procesos que difícilmente podían describirse por la mecánica cuántica, y en los cuales ciertos átomos podían emitir radiación electromagnética y, al mismo tiempo, podían

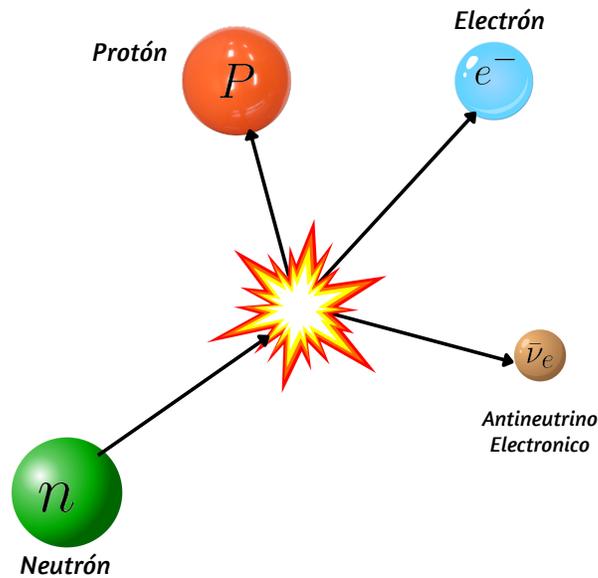


Figura 3-2.: Desintegración beta del neutrón.

absorber radiación. En el primer caso aparecía radiación, es decir, se creaban fotones; en el segundo caso sucedía lo contrario, desaparecían los fotones. Fermi considero que estos procesos no podían ser muy diferentes a la producción de la radiación beta. Por consiguiente, describió el decaimiento beta como un proceso en el que se creaban el protón, el electrón y el neutrino en el estado final.

Estas partículas no preexistían en los núcleos atómicos, se originaban en el propio proceso de desintegración. En el esquema de Fermi, en un momento determinado el neutrón se transformaba de modo espontáneo en un protón, un electrón y neutrino.

Este proceso tenía lugar en un punto determinado del espacio, es decir, de acuerdo con la imagen de Fermi, las cuatro partículas involucradas en el, ocupaban la misma posición en un instante determinado. La desintegración del protón en un neutrón, un positrón y un neutrino, sucedía de modo similar. Posteriormente, los protones y neutrones permanecían en el núcleo atómico debido a la intensa fuerza existente entre ellos (se denomina interacción fuerte y es la responsable de mantener unidos a todos los protones y neutrones en el seno de los núcleos atómicos), mientras que los electrones, positrones y neutrinos eran emitidos dando lugar a la radiación beta.

Obsérvese que la transformación del neutrón en protón, o a la inversa, implicaba una modificación en el número total de protones existentes en el núcleo atómico, lo cual significaba que surgía un nuevo elemento químico. Respecto a por qué tenían lugar dichos procesos, la razón era simplemente la búsqueda de la máxima estabilidad. El proceso de decaimiento beta se producía de modo espontáneo porque el sistema nuclear final era más estable, es decir, su masa era menor que la del sistema inicial. la diferencia de masas se emitía en forma de radiación. Esta razón era similar a la

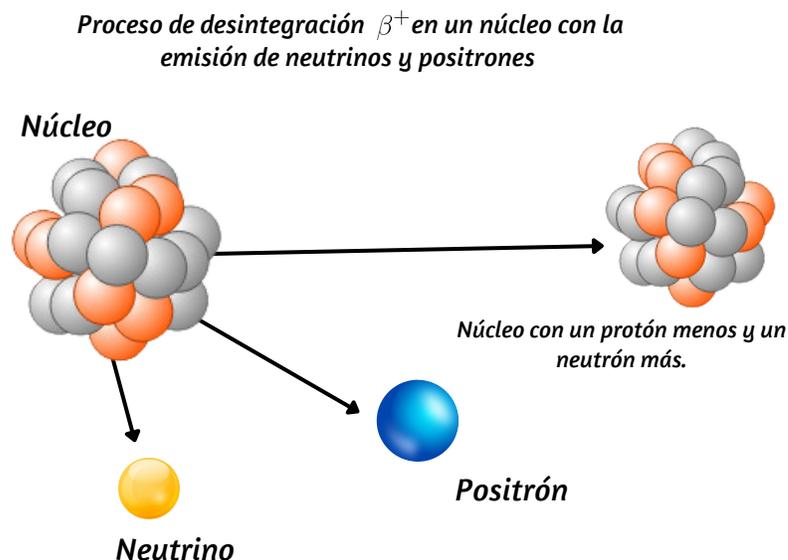


Figura 3-3.: Proceso de desintegración β^+ en un núcleo con la emisión de neutrinos y positrones.

que explicaba porque un átomo excitado decaía en su estado fundamental desprendiéndose de su diferencia de energía a través de la emisión de radiación electromagnética.

La teoría de Fermi no solo proporcionó una primera explicación de cómo tenía lugar el proceso de desintegración beta, sino que también permitió calcular la forma del espectro de energías del electrón que pudo compararse directamente con los resultados experimentales.

La predicción de Fermi estaba perfectamente de acuerdo con el experimento, reproduciendo incluso el corte abrupto que se observaba en un cierto valor máximo de la energía del electrón. Esta teoría fue un éxito rotundo, hasta el extremo de que todavía hoy en día se explica en las facultades de física como primera introducción a la teoría de la desintegración beta.

Después de la observación de líneas discretas en el decaimiento de partículas α y γ , a partir de los núcleos atómicos, fue una sorpresa cuando J Chadwick descubrió un espectro de energía continua de electrones emitidos en el decaimiento β . La interpretación siguió dos líneas; una asumía electrones primarios con una distribución de energía continua (seguida principalmente por C D Ellis) y la otra asumía procesos secundarios, que amplían una energía de electrones inicialmente discreta (seguida principalmente por L Meitner). Para resolver la cuestión, se realizó una medición calorimétrica que debía dar como resultado la energía media de los electrones (si C D Ellis tenía razón) o la energía máxima (si L Meitner tenía razón). Esto se puede entender de la siguiente manera: decaimiento β se describe hoy en día por el decaimiento de tres cuerpos:

$$M(A, Z) \rightarrow D(A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e,$$

donde $M(A, Z)$ describe el núcleo materno y $D(A, Z + 1)$ su hija [8].

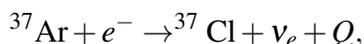
El decaimiento real es el de un neutrón en un protón, electrón y antineutrino. Para el decaimiento en reposo de $M(A, Z)$ la energía del electrón debería estar entre $E_{min} = m_e$ y utilizando la conservación de energía $E_{max} = m_M - m_D$. En la ecuación anterior, la energía cinética de retroceso T_D del núcleo hijo fue despreciada y $m_M - m_D = T_D + E_e + E_\nu = 0$ (suponiendo: $m_\nu = 0$). Por lo tanto, si sólo hay electrones en el estado final, la medición calorimétrica siempre debería de dar como resultado $E_{max} = m_M - m_D$ [8].

El experimento se realizó utilizando el decaimiento β del isótopo RaE (hoy conocido como ^{210}Bi) con un valor Q de transición nuclear de 1161keV . La medición dio como resultado un valor de $344000\text{eV} \pm 10\%$, que respalda claramente la primera explicación. L Meitner, aún no convencido, repitió el experimento y finalizando con un valor de transición nuclear de $337000\text{eV} \pm 6\%$ confirmando el origen primario del espectro electrónico continuo [8]. Para explicar esta observación sólo dos soluciones parecían ser posibles: o bien la ley de conservación de energía sólo es válida estadísticamente en tal proceso (preferida por N Bohr) o bien adicional al electrón, se emitía una nueva partícula adicional indetectable (más tarde llamada el neutrino por E Fermi) que se lleva la energía adicional (preferido por W Pauli).

Había una segunda razón para la propuesta de Pauli de otra partícula, la conservación del momento angular. Se observó que en el decaimiento β , si el átomo madre lleva un espín entero/fraccional, entonces la hija también lo hace, lo que no puede explicarse por la emisión de un solo electrón de $\text{spin} - \frac{1}{2}$. En una famosa carta fechada el 4 de diciembre de 1930, W Pauli propuso su solución al problema; en el decaimiento beta, una nueva partícula de $\text{spin} - \frac{1}{2}$ (a la que hoy en día llamamos el neutrino) se produjo junto con el electrón. De esta manera el espectro continuo se puede entender: tanto el electrón como el neutrino comparten la energía de transición de manera que la suma de ambos siempre corresponde a la energía de transición completa. Poco después se descubrió el neutrón, la comprensión del decaimiento β cambió rápidamente y esto llevó a E Fermi a desarrollar su exitosa teoría del decaimiento β . Los primeros experimentos para apoyar la noción de neutrino llegarían unos 20 años más tarde.

3.2. Experimento de retroceso nuclear de Rodeback y Allen

La primera evidencia experimental de neutrinos se encontró en la captura de electrones (EC) de ^{37}Ar :



donde Q tiene un valor de 816 keV. Debido a que el proceso sólo tiene dos partículas en el estado final, la energía de retroceso del núcleo es fija. Utilizando la conservación de la energía y del momento, la energía de retroceso T_{Cl} viene dada por:

$$T_{Cl} = \frac{E_{\nu}^2}{2m_{Cl}} \approx \frac{Q^2}{2m_{Cl}} = 9,67eV,$$

porque la masa en reposo del átomo ^{37}Ar es mucho mayor que $Q \approx E_{\nu}$. Esta energía corresponde a una velocidad para el núcleo ^{37}Ar de $0,71\text{cm}\mu\text{s}^{-1}$. Por lo tanto, la velocidad de retroceso podría medirse mediante una medición de coincidencia retardada. Se inicia por los electrones Auger emitidos después de la captura de electrones y se detiene al detectar el núcleo en retroceso. Al utilizar una línea de retardo variable se debe observar una señal si el tiempo de retardo coincide con el tiempo de vuelo de los iones de retroceso. Con una longitud de vuelo de 6 cm, se esperaba un retraso de tiempo de $8,5\mu\text{s}$. De hecho, la señal de retroceso esperada podía ser observada a las $7\mu\text{s}$. Después de varias correcciones experimentales necesarias (por ejemplo, el movimiento térmico causó un efecto del 7% en la distribución de la velocidad), ambos números estaban de acuerdo. Poco después se repitió la medición con un espectrómetro mejorado y se midió una energía de retroceso de $T_{Cl} = (9,63 \pm 0,03)eV$ [8].

3.3. Descubrimiento del neutrino por Cowan y Reines

El descubrimiento finalmente tuvo lugar en reactores nucleares, que eran las fuentes de neutrinos más fuertes disponibles. La reacción básica de detección fue $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$. El principio de detección fue una medición coincidente de los fotones de 511 keV asociados con la aniquilación de positrones y una reacción de captura de neutrones unos pocos μs más tarde. Cowan y Reines usaron un tanque de agua con CdCl_2 disuelto rodeado de dos centelladores líquidos. Los centelladores líquidos detectan los fotones de la aniquilación de positrones así como los de la reacción $^{113}\text{Cd}(n, \gamma)^{114}\text{Cd}$ después de la captura de neutrones. El experimento se realizó en diferentes configuraciones y en diferentes reactores y finalmente resultó en el descubrimiento del neutrino.[8]

En 1953, en el reactor de Hanford (EE.UU.), utilizando alrededor de 300l de un centellador líquido y un escudo bastante pobre contra el fondo, se observó una señal vaga. El experimento se repitió en 1956 en el reactor del río Savannah en (EE.UU.) con 4200l de centellador, demostrando finalmente la existencia de neutrinos. La sección transversal promediada de la energía obtenida para la reacción $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ fue:

$$\bar{\sigma} = (11 \pm 2,6) \times 10^{44}\text{cm}^2,$$

cuando se revisó por completo, coincidió con la teoría V-A.

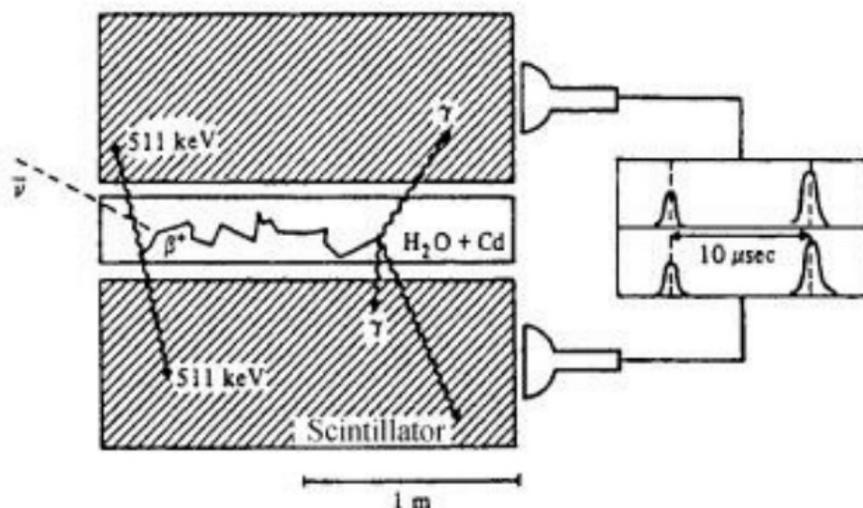


Figura 3-4.: Ilustración esquemática del montaje experimental para la detección de neutrinos utilizado por Cowan y Reines. Un tanque de agua cargado con $CdCl_2$ está rodeado de centelladores de líquido. Se utilizan para una medida de coincidencia de los fotones de aniquilación de 511 keV y de los rayos- emitidos por la captura de neutrones en Cd. Tomada de [20].

3.4. Fuentes de neutrinos

En general, las fuentes de neutrinos se pueden clasificar en naturales y artificiales. Además, las fuentes naturales y artificiales también se pueden dividir en más subgrupos con respecto a su origen como:

- **Neutrinos Solares**

El estudio experimental y teórico de los neutrinos solares es una de las principales áreas de investigación en física de neutrinos. El Sol es una fuente muy poderosa de neutrinos de electrones con energía del orden de $1MeV$, producido en las reacciones de fusión termonucleares en el núcleo solar. Dado que las interacciones de neutrinos con la materia son extremadamente débiles, prácticamente todos los neutrinos producidos en el núcleo del sol pasan sin ser perturbados a través del interior solar y fluyen en el espacio. El flujo de neutrino solar en la tierra es de aproximadamente $6 \times 10^{10} cm^{-2} s^{-1}$. A pesar de este flujo extremadamente grande, la detección de neutrinos solares es difícil y requiere grandes detectores debido a la pequeña sección transversal de la interacción de los neutrinos. Estos detectores deben colocarse bajo tierra para ser protegidos por rocas de rayos cósmicos cuyas interacciones en el detector superarían en gran medida en número y dominarían las interacciones de los neutrinos solares [8].

Los neutrinos solares se detectaron por primera vez en 1970 en el experimento de homestake, que ha monitoreado el flujo solar durante los próximos 24 años. A fines de la década de 1980, el experimento Kamiokande obtuvo la primera imagen de neutrinos solares en tiempo real. A partir de 1990, los experimentos GALLEX/GNO y SAGE han medido los neutrinos de baja energía producidos en el PP fundamental. A partir de fines de la década de 1990, los experimentos Super-Kamiokande y SNO han proporcionado importantes datos de alta precisión en la parte de alta energía del flujo de neutrinos solares.

La detección de neutrinos solares se considera hoy en día principalmente una actividad de los físicos de alta energía interesados en las propiedades de los neutrinos. Sin embargo, en nuestra opinión, es importante ser consciente de que el primer éxito de los experimentos de neutrinos solares es la detección de neutrinos solares y la prueba de que la teoría de la generación de energía termonuclear en las estrellas es correcta. El segundo éxito de los experimentos de neutrinos solares es el descubrimiento (homestake), confirmación (Kamiokande, GALLEX/GNO, SAGE, SUPER-KAMIOKANDE), y solución (SNO) del Problema de Neutrino Solar (SNP) a favor de las Oscilaciones de Neutrinos.

■ Neutrinos Atmosféricos

Los neutrinos atmosféricos son creados por las interacciones de los rayos cósmicos primarios con los núcleos en la atmósfera. Los primarios rayos cósmicos están compuestos principalmente por protones, con un pequeño componente de núcleos más pesados. Las interacciones de estos rayos cósmicos primarios con los núcleos en la atmósfera generan rayos cósmicos secundarios, que incluyen todos los hadrones y sus productos de decaimiento, con un espectro de energía que tiene un pico en la gama GeV y se extiende a una mayor energía con una ley de potencia aproximada. En particular, se producen muchos piones secundarios [1].

Como se ilustra en la figura 3-5, los piones se descomponen principalmente en los muones y los neutrinos de Muones.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu,$$

A altas energías, los kaones también contribuyen a la producción de neutrinos y muones. Los muones que se desintegran antes de tocar el suelo generan electrones, neutrinos electrónicos y neutrinos muónicos a través de los procesos.

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu,$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,$$

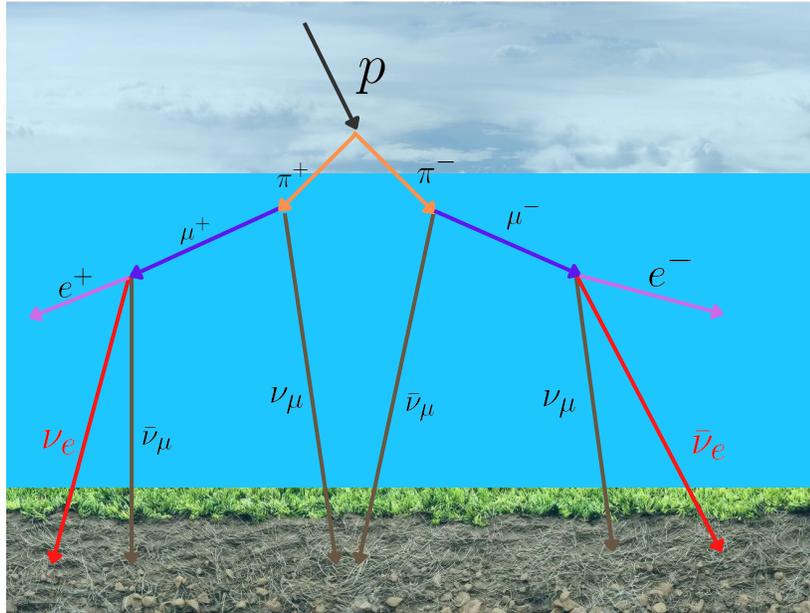


Figura 3-5.: Vista esquemática de la producción de neutrinos por las interacciones de protones de rayos cósmicos en la atmósfera con generación de piones y muones.

Los neutrinos generados en estas reacciones se denominan neutrinos atmosféricos. Aquellos con energías de alrededor de 100MeV a alrededor de 100GeV pueden detectarse en laboratorios subterráneos mediante dispersión en núcleos. Los detectores deben estar bajo tierra para proporcionar una buena protección contra el flujo de muones de rayos cósmicos secundarios, cuyas frecuentes interacciones abrumarían al detector [1].

■ Neutrinos de Supernova

Las supernovas (SNe) son explosiones extremadamente poderosas que acaban con la vida de algunas estrellas. Normalmente, algunas masas solares son expulsadas en el espacio interestelar con una energía cinética del orden de 10^{51} erg. El material eyectado contiene elementos pesados que son importantes para la evolución química de las galaxias, las estrellas, los planetas y la vida. Algunas SNe producen un remanente compacto, una estrella de neutrones o un agujero negro, que puede observarse. Históricamente, después de darse cuenta en la década de 1920 de que si las nebulosas espirales son sistemas estelares extra-galácticos, algunas de las novas observadas en estas nebulosas espirales han sido extremadamente brillantes, el estudio de SNe fue iniciado por W. Baade y F. Zwicky a principios de la década de 1930. Ya sugirieron que la fuente de la enorme cantidad de energía liberada en SNe es el colapso gravitacional de una estrella a una estrella de neutrones y que SNe puede ser fuente de rayos cósmicos. En los años siguientes, Zwicky y otros comenzaron a organizar búsquedas sistemáticas de SNe que han llevado al conocimiento actual de miles de SNe [1].

A principios de la década de 1960, Zwicky y sus colaboradores sugirieron el esquema de nomenclatura adoptado actualmente para SNe: cada supernova se designa con el prefijo SN seguido del año del descubrimiento, que va seguido, por una letra A mayúscula hasta la Z para las primeras 26 SNe descubiertas en un año determinado o las letras minúsculas aa, ab,... para el siguiente SNe descubierto en el mismo año. Algunas SNe que han explotado en nuestra galaxia han sido observadas a simple vista durante los últimos 2000 años. La más famosa es la supernova de 1054, que produjo la nebulosa del Cangrejo y el púlsar del Cangrejo. La supernova 1006 es la SN más brillante de todos los tiempos. Las últimas SNe galácticas se observaron a simple vista en 1572 (Tycho Brahe) y 1604 (Joannes Kepler). En los últimos siglos se han observado con telescopios muchas SNe que se producen en otras galaxias, ya que su emisión de luz es comparable a la de una galaxia entera. La supernova SN1987A, que se produjo el 23 de febrero de 1987 en la Gran Nube de Magallanes, es la mejor estudiada de todas las SNe y es la única que se detectó también mediante su explosión de neutrinos. Esta primera observación histórica de neutrinos producidos fuera del sistema solar (e incluso fuera de nuestra galaxia) es importante no solo para el estudio de la dinámica del SN, sino también para el estudio de las propiedades de los neutrinos (en particular, masas de neutrinos) [1].

■ Neutrinos de Reactores

Los reactores de fisión son abundantes fuentes de antineutrinos electrónicos producidos en las desintegraciones β de núcleos ricos en neutrones. La potencia de un reactor se debe principalmente a la fisión de cuatro isótopos: ^{235}U ($\sim 56\%$), ^{238}U ($\sim 8\%$), ^{239}Pu ($\sim 30\%$) y ^{241}Pu ($\sim 6\%$). Los antineutrinos electrónicos son producidos por la cadena de desintegraciones β de los productos de fisión. Dado que, en promedio, cada fisión produce alrededor de 200 MeV, con una liberación de alrededor de seis $\bar{\nu}_e$, el rendimiento del antineutrino electrónico es de aproximadamente $2 \times 10^{20} s^{-1}$ por cada GW_{th} de potencia térmica. Las centrales nucleares de agua ligera modernas típicas tienen varios núcleos de reactores, cada uno con una potencia térmica del orden de $3 GW_{th}$. Por lo tanto, la tasa total de producción de antineutrinos de una planta de energía nuclear típica es muy alta. Desafortunadamente, sin embargo, dado que el flujo de antineutrinos es isotrópico, disminuye rápidamente con la distancia. Obviamente, esto es un problema para los experimentos de oscilación de neutrinos, que requieren una distancia fuente-detector adecuada para revelar las oscilaciones. Este inconveniente se compensa parcialmente con la baja energía de los antineutrinos del reactor, del orden de unos pocos MeV , lo que implica una longitud de oscilación relativamente corta [1]. Una energía tan baja también implica que solo se puede investigar la desaparición de $\bar{\nu}_e$ en experimentos con reactores, ya que la energía no es suficiente para producir, en un detector, muones o taos a través de interacciones de corriente cargada. Las interacciones de corriente neutra de $\bar{\nu}_\mu$ y $\bar{\nu}_\tau$ producidas por oscilaciones son demasiado débiles para distinguirlas del fondo. El carácter de desaparición de los experimentos de oscilación de neutrinos

del reactor implica que es muy difícil medir una pequeña mezcla, lo que da una pequeña desaparición, debido a las fluctuaciones estadísticas de la señal .

Los antineutrinos electrónicos del reactor se detectan a través del proceso de desintegración inversa de neutrones $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, que Cowan y Reines ya utilizaron en su primera detección de electrón-antineutrinos producidos en la central eléctrica de Savannah River. Esta reacción libera una energía visible total $E_e + m_e$ donde E_e es la energía del positrón, que se aniquila inmediatamente con un electrón circundante. Esta energía se puede ver en los detectores de centelleo [1].

Los eventos de antineutrino se distinguen del fondo por la coincidencia de la señal del positrón inmediato con la señal retardada producida por la captura nuclear del neutrón. Despreciando la pequeña energía de retroceso del neutrón, las energías del neutrino y del positrón están relacionadas por:

$$E_\nu = E_e + T_n + m_n - m_p \simeq E_e + 1,293MeV$$

donde T_n es la energía cinética de retroceso del neutrón. El umbral de energía del neutrino está dado por:

$$E_\nu^{th} = \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p} \simeq 1,806MeV$$

■ Neutrinos de Aceleradores

Es posible producir haces de neutrinos usando aceleradores. Cuando los haces de electrones o protones inciden sobre un objetivo fijo, se producen hadrones, en su mayoría piones y kaones. Con ayuda de campos magnéticos, los mesones cargados se dirigen a un largo túnel en el que se descomponen en neutrinos. La energía de los neutrinos depende del haz de electrones o protones y varía entre MeV y TeV .

Los experimentos con aceleradores se pueden clasificar según el método de producción del haz de neutrinos: decaimiento de piones en vuelo, decaimiento de muones en reposo y descarga del haz. Además, los experimentos con haces de neutrinos generados por el decaimiento de piones en vuelo se clasifican en tres categorías [1]:

- Haz de banda ancha (WB): Estos son experimentos que tienen un haz de neutrinos de alta intensidad con un amplio espectro de energía que puede abarcar uno o dos órdenes de magnitud. Este tipo de haz es conveniente para investigar nuevas señales de oscilación en un amplio rango de valores de Δm^2 .

-
- Haz de banda estrecha (NB): Los haces de neutrinos de estos experimentos tienen un espectro de energía estrecho, que se obtiene seleccionando los momentos del pión y los kaones originales. La intensidad resultante del flujo de neutrinos de un haz NB se reduce en comparación con un haz WB obtenido del mismo haz de protones. Los haces de NB son convenientes para mediciones precisas de Δm^2 .
 - Fuera del eje (OA): Estos son experimentos que utilizan un haz WB de alta intensidad con el detector desplazado un pequeño ángulo con respecto al eje del haz, donde la energía del neutrino es casi monocromática.

4. La Dispersión (anti)neutrino-electrón

La dispersión (anti)neutrino electrón es un proceso electrodébil fundamental, el cual está descrito por el intercambio de los bosones vectoriales W y Z . En el orden más bajo de la teoría de la perturbación de la interacción débil, las interacciones neutrino-electrón involucran solo leptones libres, cuya amplitud de interacción se puede calcular exactamente usando las reglas de Feynman del ME.

La dispersión neutrino-electrón representa una forma prometedora y limpia de poner a prueba el ME, también permite explorar escenarios de física nueva, tal es el caso de las interacciones no-estándar. Para poder probar las predicciones del ME o posibles extensiones de este modelo, es necesario calcular la sección transversal de la dispersión neutrino-electrón. Esta cantidad física permite predecir cuantas interacciones tendrán lugar en un determinado experimento. Especialmente en los experimentos de neutrinos de baja energía, la sección transversal diferencial se obtiene con respecto a la energía de retroceso (T) del material (electrón), por lo tanto, se hace necesario calcular la sección transversal con respecto a la energía de retroceso, es decir, determinar $d\sigma/dT$. A continuación se presenta el cálculo detallado.

4.1. Regla de oro para la Dispersión

De la teoría cuántica de campos, se conoce la sección transversal diferencial del proceso $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$ dado por [9]:

$$d\sigma = |\mathcal{M}^2| \frac{S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} \left[\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right] \left[\frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right] \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (4-1)$$

donde, p_1, p_2, p_3 y p_4 son los cuadrimomentos correspondientes de las partículas. Los 3-vectores se denotan con signos vectoriales como \vec{p}_i , además E_3 y E_4 representan las energías de la partículas salientes de la interacción y S es el factor estadístico dado por $1/n!$, para n partículas idénticas en el estado final. La función delta (δ), en la ecuación (4-1) describe la conservación de la energía y el momento.

Para calcular la sección transversal diferencial del proceso, procedemos a calcular el producto entre los cuadvectores p_1 y p_2 que se encuentra dentro de la raíz de la ecuación (4-1). En el marco de reposo de la partícula 2 (partícula objeto), generalmente llamado marco de laboratorio, se tiene

que $E_2 = m_2$ y $\vec{p}_2 = 0$ (ver Figura 4-1). Además utilizando la relación relativista entre la energía y el momento $E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$ se encuentra que:

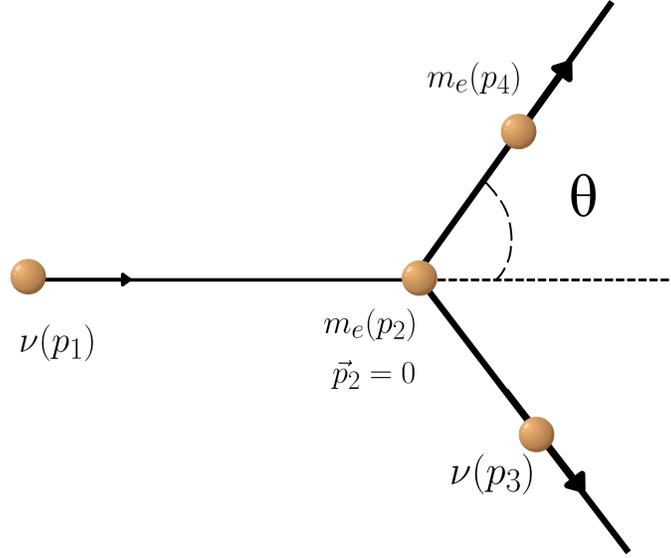


Figura 4-1.: Ilustración simbólica de la dispersión de dos cuerpos en el marco de reposo de la partícula objeto.

$$\begin{aligned}
 (p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2 &= ((E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 - (m_1 m_2)^2), \\
 &= ((E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot 0)^2 - (m_1 m_2)^2), \\
 &= ((E_1 m_2)^2 - (m_1 m_2)^2), \\
 &= E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2, \\
 &= m_2^2 (E_1^2 - m_1^2), \\
 &= m_2^2 |\vec{p}_1|^2.
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

Remplazando la ecuación (4-2) en (4-1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= |\mathcal{M}^2| \frac{S}{4\sqrt{m_2^2 |\vec{p}_1|^2}} \left[\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right] \left[\frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \\
 d\sigma &= |\mathcal{M}^2| \frac{S}{4m_2 |\vec{p}_1| (2\pi)^2 4} \left[\frac{d^3 \vec{p}_3}{E_3} \right] \left[\frac{d^3 \vec{p}_4}{E_4} \right] \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4),
 \end{aligned}$$

$$d\sigma = |\mathcal{M}^2| \frac{S}{4m_2 |\vec{p}_1| (2\pi)^2 4} \left[\frac{1}{E_3 E_4} \right] d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (4-3)$$

$$d\sigma = |\mathcal{M}^2| \frac{S}{4m_2 |\vec{p}_1| 2^2 \pi^2 4} \left[\frac{1}{E_3 E_4} \right] d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4),$$

$$d\sigma = |\mathcal{M}^2| \frac{S}{4m_2 |\vec{p}_1| 4\pi^2 4} \left[\frac{1}{E_3 E_4} \right] d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4),$$

$$d\sigma = |\mathcal{M}^2| \frac{S}{4m_2 |\vec{p}_1| 16\pi^2} \left[\frac{1}{E_3 E_4} \right] \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4,$$

como $E_2 = m_2$ y $\vec{p}_2 = 0$ entonces:

$$d\sigma = |\mathcal{M}^2| \frac{S}{64\pi^2 m_2 |\vec{p}_1|} \left[\frac{1}{E_3 E_4} \right] \delta(E_1 + m_2 - E_3 - E_4) \delta^3(p_1 - p_3 - p_4) d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4, \quad (4-4)$$

usando la relación energía-momento para eliminar los E_i podemos escribir la ecuación (4-4) como:

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\mathcal{M}^2| \frac{S}{64\pi^2 m_2 |\vec{p}_1|} \frac{1}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}} \times \dots \\ &\dots \times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} + m_2 - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right) \times \dots \\ &\dots \times \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4. \end{aligned} \quad (4-5)$$

Para obtener $d\sigma/dT$ integramos sobre $d^3 \vec{p}_3$ a partir de la ley de la conservación del momento podemos resolver \vec{p}_3 en el marco de reposo de la segunda partícula

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{p}_2^0 &= \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \\ \vec{p}_1 &= \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \\ \vec{p}_3 &= \vec{p}_1 - \vec{p}_4. \end{aligned} \quad (4-6)$$

Y para la energía E_3 tenemos:

$$\begin{aligned} E_3^2 &= |\vec{p}_3|^2 + m_3^2, \\ E_3 &= \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2}, \\ E_3 &= \sqrt{|\vec{p}_1 - \vec{p}_4|^2 + m_3^2}. \end{aligned} \quad (4-7)$$

reemplazando (4-6) y (4-7) en la ecuación (4-5) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\mathcal{M}^2| \frac{S}{64\pi^2 m_2 |\vec{p}_1|} \frac{1}{\sqrt{|\vec{p}_1 - \vec{p}_4|^2 + m_3^2} \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}} \times \dots \\ &\dots \times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} + m_2 - \sqrt{|\vec{p}_1 - \vec{p}_4|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right) \times \dots \\ &\dots \times \delta^3(\vec{p}_1 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_4) - \vec{p}_4) d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4. \end{aligned} \quad (4-8)$$

Teniendo en cuenta que la función $\delta(x)$ tiene un valor infinito en $x = 0$ y tiene un valor nulo en cualquier otro punto de tal manera que su integral es igual a 1, entonces:

$$d\sigma = |\mathcal{M}^2| \frac{S}{64\pi^2 m_2 |\vec{p}_1|} \frac{1}{\sqrt{|\vec{p}_1 - \vec{p}_4|^2 + m_3^2} \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}} \times \dots$$

$$\dots \times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} + m_2 - \sqrt{|\vec{p}_1 - \vec{p}_4|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right) d^3 \vec{p}_4. \quad (4-9)$$

Para realizar la integral sobre $d^3 \vec{p}_4$ usamos las coordenadas esféricas. El diferencial de volumen en esféricas se puede escribir como:

$$d^3 \vec{p}_4 = |\vec{p}_4|^2 \sin \theta d\theta d\phi d|\vec{p}_4|, \quad y \quad (4-10)$$

$$|\vec{p}_1 - \vec{p}_4|^2 = |\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4| \cos \theta. \quad (4-11)$$

Como necesitamos encontrar la sección transversal en términos de la energía de retroceso escribimos la ecuación (4-9) como:

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{p}_4|} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \left(\frac{|\mathcal{M}^2| S}{64\pi^2 m_2 |\vec{p}_1|} \frac{|\vec{p}_4|^2 \sin \theta}{\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}} \times \dots \right) \quad (4-12)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4| \cos \theta + m_3^2}} \times \dots$$

$$\times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} + m_2 - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_4|^2 |\vec{p}_4|^2 \cos \theta + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right).$$

Integrando ϕ y realizando el cambio de variable $u = \cos \theta$ y $du = -\sin \theta d\theta$, de tal manera que para los límites de integración se tendrá que si $\theta = 0$, entonces $u = 1$ y si $\theta = \pi$, entonces $u = -1$. Por lo tanto:

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{p}_4|} = 2\pi \frac{|\mathcal{M}^2| S}{64\pi^2 m_2 |\vec{p}_1|} \frac{|\vec{p}_4|^2}{\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}} \quad (4-13)$$

$$\dots \times \int_1^{-1} \frac{du}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u + m_3^2}}$$

$$\dots \times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} + m_2 - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_4|^2 |\vec{p}_4|^2 u + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right).$$

Usando la propiedad de inversión de los límites de integración nos queda

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d|\vec{p}_4|} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2 |\vec{p}_1|} \frac{|\vec{p}_4|^2}{\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}} \\
&\dots \times \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u + m_3^2}} \\
&\dots \times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2 + m_2} - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_4|^2|\vec{p}_4|^2u + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right).
\end{aligned} \tag{4-14}$$

Desarrollando la integral (véase en el Apéndice A) se obtiene:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u + m_3^2}} \\
&\dots \times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2 + m_2} - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_4|^2|\vec{p}_4|^2u + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right) \\
&= \frac{1}{|\vec{p}_1||\vec{p}_4|}.
\end{aligned} \tag{4-15}$$

Sustituyendo la ecuación (4-15) en la ecuación (4-14) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d|\vec{p}_4|} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2 |\vec{p}_1|} \frac{|\vec{p}_4|^2}{\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}} \frac{1}{|\vec{p}_1||\vec{p}_4|}, \\
&= \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2 |\vec{p}_1|^2} \frac{|\vec{p}_4|}{\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}}.
\end{aligned} \tag{4-16}$$

Como el objetivo es hallar la sección transversal diferencial en términos de la energía de retroceso del electrón, primero realizamos la integral de $d^3\vec{p}_3$ y para la colisión elástica se denota p_4 como el cuadrivector de la energía de retroceso del objetivo.

Tomando en cuenta la ecuación que relaciona la energía relativista E_4 , la energía en reposo $R = m_4$ y la energía de retroceso del electrón T obtendremos que:

$$E_4 = R + T \quad \Rightarrow \quad T = (E_4 - m_4).$$

Usando la relación relativista energía-momento, tenemos:

$$\begin{aligned}
E_4^2 - m_4^2 &= |\vec{p}_4|^2, \\
(E_4 - m_4)(E_4 + m_4) &= |\vec{p}_4|^2, \\
T(T + 2m_4) &= |\vec{p}_4|^2.
\end{aligned} \tag{4-17}$$

Una vez que diferenciamos ambos lados de la ecuación denotamos:

$$\begin{aligned}(2T + 2m_4)dT &= 2|\vec{p}_4|d|\vec{p}_4|, \\ (T + m_4)dT &= |\vec{p}_4|d|\vec{p}_4|.\end{aligned}\tag{4-18}$$

Dividiendo la ecuación (4-16) entre $|\vec{p}_4|$ a ambos lados de la ecuación tenemos:

$$\frac{d\sigma}{|\vec{p}_4|d|\vec{p}_4|} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2|\vec{p}_1|^2} \frac{|\vec{p}_4|}{|\vec{p}_4|\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}}.\tag{4-19}$$

Reemplazando la ecuación (4-18) en la ecuación (4-19) obtenemos $d\sigma/dT$ en el marco de reposo de la segunda partícula

$$\frac{d\sigma}{(T + m_4)dT} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2|\vec{p}_1|^2} \frac{1}{\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}},\tag{4-20}$$

como $E_4^2 = |\vec{p}_4|^2 + m_4^2$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{(T + m_4)dT} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2|\vec{p}_1|^2} \frac{1}{\sqrt{E_4^2}}, \\ \frac{d\sigma}{dT} &= (T + m_4) \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2|\vec{p}_1|^2} \frac{1}{E_4},\end{aligned}$$

Ya que $E_4 = T + m_4$. Finalmente la sección transversal diferencial puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dT} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi} \frac{S}{m_2|\vec{p}_1|^2}}.\tag{4-21}$$

4.2. $|\mathcal{M}|^2$ para la dispersión neutrino-electrón

En el ME los neutrinos solo tienen interacciones débiles. Estas están medidas a través de los bosones W^\pm y Z y los factores de vértice, las constantes g_Z y g_W pueden ser expresadas en términos del ángulo de *Weinberg*, θ_w , y la constante de estructura fina α como:

$$\begin{aligned}g_Z &= \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\theta_W \cos\theta_W}, \\ g_W &= \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\theta_W},\end{aligned}\tag{4-22}$$

donde $\alpha = e^2/4\pi$. Además la masa de los bosones de Gauge electrodébiles están relacionados como:

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W, \quad (4-23)$$

y la constante de acoplamiento de Fermi se define como:

$$G_F \equiv \frac{\sqrt{2} g_Z^2}{8 m_Z^2} \equiv \frac{\sqrt{2} g_W^2}{8 m_W^2}. \quad (4-24)$$

El propagador para los bosones Gauge unitarios W y Z son:

$$D_{\mu\nu} = \frac{-i \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \right)}{q^2 - M^2}, \quad (4-25)$$

donde q es la transferencia de cuadrimento y M es la masa de los bosones vectoriales y puede tomar valores para m_Z y m_W . En el límite de bajas energías ($q^2 \ll M^2$) el propagador del bosón vectorial masivo se reduce a:

$$D_{\mu\nu} = \frac{i q_{\mu\nu}}{M^2}. \quad (4-26)$$

La dispersión $\nu_e - e^-$ ocurre a través del intercambio de los bosones neutros Z y los bosones cargados W (ver Figura 4-2). La amplitud para el proceso puede ser escrita como la suma de las contribuciones de la amplitud de la corriente neutra y la amplitud de la corriente cargada para este proceso:

$$\boxed{\mathcal{M}_{\nu_e - e^-} = \mathcal{M}_{\nu_e - e^-}^{NC} - \mathcal{M}_{\nu_e - e^-}^{CC}}. \quad (4-27)$$

Haciendo uso de las reglas de Feynman (ver Apéndice B), se puede escribir la amplitud para la dispersión $\nu_e - e^-$ debido a la corriente neutra como:

$$-i \mathcal{M}_{\nu_e - e^-}^{NC} = \left[\bar{u}(p_3) \frac{-ig_Z}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu (c_V^{\nu} - c_A^{\nu} \gamma^5) u(p_1) \right] \frac{ig_{\mu\nu}}{m_Z^2} \left[\bar{u}(p_4) \frac{-ig_Z}{2 \cos \theta_W} \gamma^\nu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right] \quad (4-28)$$

$$\mathcal{M}_{\nu_e - e^-}^{NC} = \frac{g_Z^2}{4 \cos^2 \theta_W m_Z^2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (c_V^{\nu} - c_A^{\nu} \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right], \quad (4-29)$$

despejando m_Z y elevando al cuadrado la ecuación (4-23), se reemplaza en anterior y se obtiene:

$$\mathcal{M}_{\nu_e - e^-}^{NC} = \frac{g_Z^2}{4 m_W^2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (c_V^{\nu} - c_A^{\nu} \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right], \quad (4-30)$$

introduciendo los valores numéricos de c_V^{ν} y c_A^{ν} como se muestra en la tabla 4-1, tenemos:

$$\mathcal{M}_{\nu_e - e^-}^{NC} = \frac{g_Z^2}{8 m_W^2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right]. \quad (4-31)$$

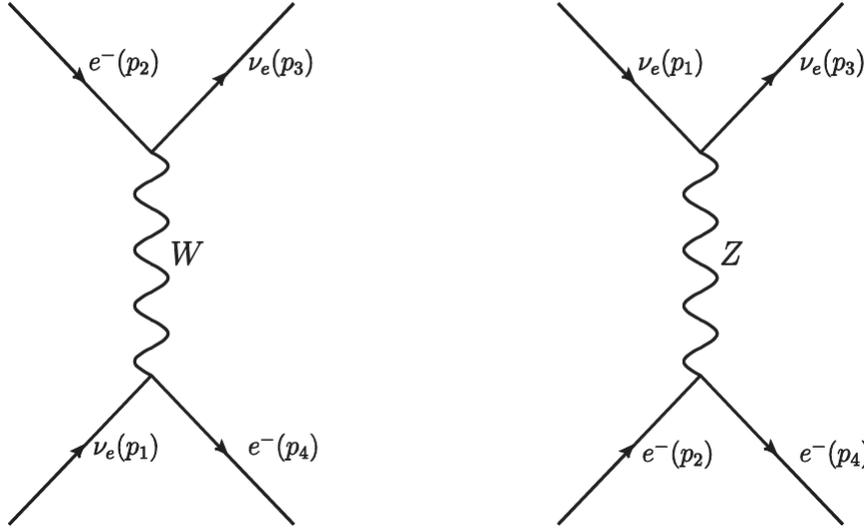


Figura 4-2.: Diagramas de la dispersión $\nu_e - e^-$. A la izquierda de la figura se observa el diagrama de la dispersión por corriente cargada (bosón W), y a la derecha la dispersión por corriente neutra (bosón Z).

Siguiendo las reglas de Feynman podemos construir la amplitud para la interacción de corriente cargada como:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{CC} &= \left[\bar{u}(p_4) \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \\
 &\quad \dots \times \frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2} \left[\bar{u}(p_3) \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right],
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

simplificando términos:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{CC} &= \frac{-ig_W^2}{8m_W^2} \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right], \\
 \mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{CC} &= \frac{g_W^2}{8m_W^2} \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right],
 \end{aligned} \tag{4-33}$$

Usando el reordenamiento de Fierz (ver la demostración en el Apéndice C), tenemos:

$$\mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{CC} = -\frac{g_W^2}{8m_W^2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right]. \tag{4-34}$$

Ya que los parámetros g_W y g_Z están relacionados con la constante de acoplamiento de Fermi, ecuación (4-24), podemos reescribir las contribuciones CC y NC en términos de la constante de acoplamiento de Fermi G_F , como:

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e, μ, τ	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w$	$-\frac{1}{2}$

Tabla 4-1.: Valores de los acoplamientos vectoriales y axiales de los fermiones en el ME [1].

Para la corriente Neutra tenemos:

$$\mathcal{M}_{\nu_e-e^-}^{NC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right], \quad (4-35)$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{\nu_e-e^-}^{NC} = \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right].} \quad (4-36)$$

Para la corriente cargada tenemos:

$$\boxed{\mathcal{M}_{\nu_e-e^-}^{CC} = -\frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right].} \quad (4-37)$$

Reemplazando en la amplitud en la ecuación 4-27, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\nu_e-e^-} &= \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right], \\ \mathcal{M}_{\nu_e-e^-} &= \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\left(\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right) \right], \\ \mathcal{M}_{\nu_e-e^-} &= \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu \left((c_V^e - c_A^e \gamma^5) + (1 - \gamma^5) \right) u(p_2) \right], \\ \mathcal{M}_{\nu_e-e^-} &= \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left(\bar{u}(p_4) \gamma_\mu \left[(c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right] u(p_2) \right). \quad (4-38) \end{aligned}$$

Para calcular la sección transversal necesitamos $|\mathcal{M}|^2$ y realizar la suma sobre los espines de las partículas finales.

Reescribiendo la ecuación (4-38) en términos de c_V^e y c_A^e obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (c_V^v - c_A^v \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (c_V^v - c_A^v \gamma^5) u(p_1) \right]^\dagger \\
&\quad \times \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) u(p_2) \right] \\
&\quad \times \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) u(p_2) \right]^\dagger, \tag{4-39}
\end{aligned}$$

a continuación, para simplificar la ecuación (4-39) definimos las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &\equiv \gamma^\mu (c_V^v - c_A^v \gamma^5), \\
\Gamma_2 &\equiv \gamma^\nu (c_V^v - c_A^v \gamma^5), \\
\Gamma_3 &\equiv \gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right), \\
\Gamma_4 &\equiv \gamma_\nu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right). \tag{4-40}
\end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación (4-39) en términos de las Γ tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_1 u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_2 u(p_1) \right]^\dagger \\
&\quad \times \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_3 u(p_2) \right] \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_4 u(p_2) \right]^\dagger, \tag{4-41}
\end{aligned}$$

usando la definición del espinor adjunto $\bar{u}(p_3) = u^\dagger(p_3) \gamma^0$ y $\bar{u}(p_4) = u^\dagger(p_4) \gamma^0$

$$\begin{aligned}
\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_1 u(p_1) \right] \left[u^\dagger(p_3) \gamma^0 \Gamma_2 u(p_1) \right]^\dagger \\
&\quad \times \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_3 u(p_2) \right] \left[u^\dagger(p_4) \gamma^0 \Gamma_4 u(p_2) \right]^\dagger, \\
\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_1 u(p_1) \right] \left[(u(p_1))^\dagger (\Gamma_2)^\dagger (\gamma^0)^\dagger (u^\dagger(p_3))^\dagger \right]^\dagger \\
&\quad \times \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_3 u(p_2) \right] \left[(u(p_2))^\dagger (\Gamma_4)^\dagger (\gamma^0)^\dagger (u^\dagger(p_4))^\dagger \right]^\dagger, \\
\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_1 u(p_1) \right] \left[(u(p_1))^\dagger (\Gamma_2)^\dagger \gamma^0 (u(p_3)) \right] \\
&\quad \times \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_3 u(p_2) \right] \left[(u(p_2))^\dagger (\Gamma_4)^\dagger \gamma^0 (u(p_4)) \right].
\end{aligned}$$

usando la propiedad $(\gamma^0)^2 = I_4$

$$\begin{aligned}
\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_1 u(p_1) \right] \left[(u(p_1))^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\Gamma_2)^\dagger \gamma^0 (u(p_3)) \right] \\
&\quad \times \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_3 u(p_2) \right] \left[(u(p_2))^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\Gamma_4)^\dagger \gamma^0 (u(p_4)) \right],
\end{aligned}$$

usando la definición del espinor adjunto $\bar{u}(p_1) = u^\dagger(p_1)\gamma^0$ y $\bar{u}(p_2) = u^\dagger(p_2)\gamma^0$

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 [\bar{u}(p_3)\Gamma_1 u(p_1)] \left[(\bar{u}(p_1))\gamma^0(\Gamma_2)^\dagger\gamma^0(u(p_3)) \right] \\ &\quad \times [\bar{u}(p_4)\Gamma_3 u(p_2)] \left[(\bar{u}(p_2))\gamma^0(\Gamma_4)^\dagger\gamma^0(u(p_4)) \right]. \end{aligned}$$

Usando la propiedad $\gamma^0(\Gamma)^\dagger\gamma^0 = \bar{\Gamma}$ y $\gamma^0(\Gamma_4)^\dagger\gamma^0 = \bar{\Gamma}_4$

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 [\bar{u}(p_3)\Gamma_1 u(p_1)] \left[(\bar{u}(p_1))(\bar{\Gamma}_2)(u(p_3)) \right] \\ &\quad \times [\bar{u}(p_4)\Gamma_3 u(p_2)] \left[(\bar{u}(p_2))(\bar{\Gamma}_4)(u(p_4)) \right]. \end{aligned} \quad (4-42)$$

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 &= \sum_{spins} 2G_F^2 [\Gamma_1 u(p_1)(\bar{u}(p_1))(\bar{\Gamma}_2)(u(p_3))\bar{u}(p_3)] \cdots \\ &\quad \cdots [\Gamma_3 u(p_2)(\bar{u}(p_2))(\bar{\Gamma}_4)(u(p_4))\bar{u}(p_4)]. \end{aligned} \quad (4-43)$$

Usando las relaciones de completitud [21]:

$$\sum_{spin} u(p_1)_\alpha \bar{u}(p_1)_\beta = (\not{p}_1 + m_1)_{\alpha\beta}, \quad (4-44)$$

$$\sum_{spin} u(p_2)_\alpha \bar{u}(p_2)_\beta = (\not{p}_2 + m_2)_{\alpha\beta}, \quad (4-45)$$

$$\sum_{spin} u(p_3)_\alpha \bar{u}(p_3)_\beta = (\not{p}_3 + m_3)_{\alpha\beta}, \quad (4-46)$$

$$\sum_{spin} u(p_4)_\alpha \bar{u}(p_4)_\beta = (\not{p}_4 + m_4)_{\alpha\beta}. \quad (4-47)$$

Reemplazando en la ecuación (4-43) tenemos:

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 = 2G_F^2 [\Gamma_1 (\not{p}_1 + m_1) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_3 + m_3) \Gamma_3 (\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma}_4 (\not{p}_4 + m_4)]. \quad (4-48)$$

Usando la identidad de casimir, podemos reescribir la ecuación anterior en términos de trazas como:

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e-e^-}^2 = 2G_F^2 Tr [\Gamma_1 (\not{p}_1 + m_1) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_3 + m_3)] Tr [\Gamma_3 (\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma}_4 (\not{p}_4 + m_4)], \quad (4-49)$$

como $\bar{\Gamma}$ esta definido como:

$$\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0, \quad (4-50)$$

reemplazando los valores de $\bar{\Gamma}_2$ y $\bar{\Gamma}_4$ en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2 &= \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\Gamma}_2 &= \gamma^0 \left[\gamma^\nu (c_V^\nu - c_A^\nu \gamma^5) \right]^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\Gamma}_2 &= \gamma^0 (c_V^\nu - c_A^\nu \gamma^5)^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger \gamma^0 \end{aligned} \quad (4-51)$$

Tomando en cuenta que: $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ y $\gamma^0 (\gamma^\nu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\nu$,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_2 &= (c_V^v + c_A^v \gamma^5) \gamma^0 (\gamma^\nu)^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\Gamma}_2 &= (c_V^v + c_A^v \gamma^5) \gamma^\nu.\end{aligned}\tag{4-52}$$

De manera similar $\bar{\Gamma}_4$,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_4 &= \gamma^0 \Gamma_4^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\Gamma}_4 &= \gamma^0 \left[\gamma_\nu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \right]^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\Gamma}_4 &= \gamma^0 \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right)^\dagger (\gamma_\nu)^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\Gamma}_4 &= \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma^0 (\gamma_\nu)^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\Gamma}_4 &= \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu.\end{aligned}\tag{4-53}$$

Usando las ecuaciones (4-40), (4-52) y (4-53) en la ecuación (4-49) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum_{spins} |\mathcal{M}|_{\nu_e e^-}^2 &= 2G_F^2 Tr \left[\overbrace{\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1 + m_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m_3)}^{T_1} \right] \\ &\times Tr \left[\underbrace{\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2 + m_2) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4 + m_4)}_{T_2} \right].\end{aligned}\tag{4-54}$$

Para evaluar las trazas es necesario tener en cuenta las propiedades de las matrices γ descritas en el Apéndice (D).

Evaluando la traza que denotamos como T_1

$$T_1 = Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1 + m_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m_3) \right].\tag{4-55}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned}T_1 &= Tr \left[\left(\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) + \gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (m_1) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) + \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (m_3) \right) \right],\end{aligned}\tag{4-56}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned}&= Tr \left[\left(\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right) \right. \\ &\quad + \left(\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (m_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right) \\ &\quad + \left(\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (m_3) \right) \\ &\quad \left. + \left(\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (m_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (m_3) \right) \right],\end{aligned}\tag{4-57}$$

Usando la propiedad $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

$$\begin{aligned}
T_1 &= Tr \left[\left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right] \right. \\
&\quad + (m_1) Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right] \\
&\quad + (m_3) Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu \right] \\
&\quad \left. + (m_1)(m_3) Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu \right] \right] \quad (4-58)
\end{aligned}$$

Con el fin de facilitar los cálculos a detalle dividimos T_1 como: $T_1 = T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14}$ donde:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
T_{12} &= (m_1) Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
T_{13} &= (m_3) Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu \right], \\
T_{14} &= (m_1)(m_3) Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu \right]. \quad (4-59)
\end{aligned}$$

Evaluamos T_{11}

$$\begin{aligned}
T_{11} &= Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
&= Tr \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
&= Tr \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 - c_V^v c_A^v \gamma^5 - c_V^v c_A^v \gamma^5 + (c_A^v \gamma^5)^2 \right) (\not{p}_1) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \quad (4-60) \\
&= Tr \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 - 2c_V^v c_A^v \gamma^5 + (c_A^v)^2 \right) (\not{p}_1) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
&= \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) Tr \left[\gamma^\mu (\not{p}_1) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right] + (2c_V^v c_A^v) Tr \left[\gamma^5 \gamma^\mu (\not{p}_1) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right].
\end{aligned}$$

Usando las siguientes identidades:

$$Tr \left[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3 \right] = 4 \left[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu} \right]. \quad (4-61)$$

$$\begin{aligned}
Tr \left[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha p_{1\alpha} \gamma^\nu \gamma^\beta p_{3\beta} \right] &= p_{1\alpha} p_{3\beta} Tr \left[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \right], \\
&= 4i \varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta}, \\
&= -4i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta}. \quad (4-62)
\end{aligned}$$

Reemplazando en T_{11} :

$$T_{11} = 4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu} \right] - 8(c_V^v c_A^v) i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta}. \quad (4-63)$$

Para T_{12} obtenemos:

$$\begin{aligned}
T_{12} &= (m_1) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
&= (m_1) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 + c_V^v c_A^v \gamma^5 - c_V^v c_A^v \gamma^5 - (c_A^v \gamma^5)^2 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
&= (m_1) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
&= (m_1) \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu (\not{p}_3) \right], \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4-64}$$

Donde se ha usado la propiedad donde la traza de un número impar de matrices gamma es cero

Para T_{13} obtenemos:

$$\begin{aligned}
T_{13} &= (m_3) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu \right], \\
&= (m_3) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) (\not{p}_1) \gamma^\nu \right], \\
&= (m_3) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 - c_V^v c_A^v \gamma^5 - c_V^v c_A^v \gamma^5 + (c_A^v \gamma^5)^2 \right) (\not{p}_1) \gamma^\nu \right], \\
&= (m_3) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 - 2c_V^v c_A^v \gamma^5 + (c_A^v)^2 \right) (\not{p}_1) \gamma^\nu \right], \\
&= (m_3) \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_1) \gamma^\nu \right] - 2(m_3) c_V^v c_A^v \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^5 (\not{p}_1) \gamma^\nu \right], \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4-65}$$

Para T_{14} obtenemos:

$$\begin{aligned}
T_{14} &= (m_1) (m_3) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left(c_V^v - c_A^v \gamma^5 \right) \left(c_V^v + c_A^v \gamma^5 \right) \gamma^\nu \right], \\
T_{14} &= (m_1) (m_3) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 + c_V^v c_A^v \gamma^5 - c_V^v c_A^v \gamma^5 - (c_A^v \gamma^5)^2 \right) \gamma^\nu \right], \\
T_{14} &= (m_1) (m_3) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left((c_V^v)^2 - (c_A^v \gamma^5)^2 \right) \gamma^\nu \right], \\
T_{14} &= (m_1) (m_3) \left((c_V^v)^2 - (c_A^v \gamma^5)^2 \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \right], \\
T_{14} &= (m_1) (m_3) \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) 4g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4-66}$$

Por lo tanto para T_1

$$\boxed{
\begin{aligned}
T_1 &= 4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu} \right] \\
&\quad + 8(c_V^v c_A^v) i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta} + (m_1) (m_3) \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) 4g^{\mu\nu}.
\end{aligned}
}$$

De manera similar para T_2 :

$$T_2 = \text{Tr} \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2 + m_2) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4 + m_4) \right]. \tag{4-67}$$

Expandiendo:

$$T_2 = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) + \gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) m_2 \right] \\ \left[(c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \gamma_\nu (\not{p}_4) + \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu m_4 \right], \quad (4-68)$$

$$T_2 = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right] \\ + \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) m_2 \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right] \\ + \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu m_4 \right] \\ + \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) m_2 \left((c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu m_4 \right], \quad (4-69)$$

por propiedad de las trazas

$$T_2 = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right] \\ + m_2 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right] \\ + m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu \right] \\ + m_2 m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu \right]. \quad (4-70)$$

Para facilitar los cálculos, dividimos T_2 como: $T_2 = T_{21} + T_{22} + T_{23} + T_{24}$

$$T_{21} = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{22} = m_2 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{23} = m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu \right], \\ T_{24} = m_2 m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu \right]. \quad (4-71)$$

Evaluamos T_{21}

$$T_{21} = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{21} = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{21} = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1)^2 - (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 - (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 + (c_V^e + 1)^2 (\gamma^5)^2 \right) (\not{p}_2) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{21} = Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1)^2 - 2 (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 + (c_V^e + 1)^2 \right) (\not{p}_2) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{21} = (c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 Tr \left[\gamma_\mu (\not{p}_2) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right] + 2 (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) Tr \left[\gamma^5 \gamma_\mu (\not{p}_2) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \quad (4-72)$$

usando las siguientes identidades

$$Tr [\gamma^\mu (\not{p}_1) \gamma^\nu (\not{p}_3)] = 4 [p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu}]. \quad (4-73)$$

$$\begin{aligned} Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha p_{1\alpha} \gamma^\nu \gamma^\beta p_{3\beta}] &= p_{1\alpha} p_{3\beta} Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta], \\ &= 4i \varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta}, \\ &= -4i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{21} &= 4 \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu}] \\ &\quad - 8 (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) i \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta}. \end{aligned} \quad (4-74)$$

para T_{22}

$$\begin{aligned} T_{22} &= m_2 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{22} &= m_2 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1)^2 + (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 - (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 - \left((c_A^e + 1) \gamma^5 \right)^2 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{22} &= m_2 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1)^2 - \left((c_A^e + 1) \gamma^5 \right)^2 \right) \gamma_\nu (\not{p}_4) \right], \\ T_{22} &= m_2 (c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 Tr [\gamma_\mu \gamma_\nu (\not{p}_4)], \\ T_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (4-75)$$

Para T_{23}

$$\begin{aligned} T_{23} &= m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu \right], \\ T_{23} &= m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) (\not{p}_2) \gamma_\nu \right], \\ T_{23} &= m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1)^2 - (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 - (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 + \left((c_A^e + 1) \gamma^5 \right)^2 \right) (\not{p}_2) \gamma_\nu \right], \\ T_{23} &= m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1)^2 - 2 (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) \gamma^5 + \left((c_A^e + 1) \gamma^5 \right)^2 \right) (\not{p}_2) \gamma_\nu \right], \\ T_{23} &= (c_V^e + 1)^2 + \left((c_A^e + 1) \gamma^5 \right)^2 m_4 Tr [\gamma_\mu (\not{p}_2) \gamma_\nu] - 2 (c_V^e + 1) m_4 Tr [\gamma_\mu (\not{p}_2) \gamma_\nu], \\ T_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (4-76)$$

Para T_{24} obtenemos:

$$\begin{aligned} T_{24} &= m_2 m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \left((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) \gamma_\nu \right], \\ T_{24} &= m_2 m_4 Tr \left[\gamma_\mu \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) \gamma_\nu \right], \\ T_{24} &= m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) Tr [\gamma_\mu \gamma_\nu], \\ T_{24} &= m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) 4 g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4-77)$$

Finalmente para T_2 encontramos que:

$$T_2 = 4 \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu}] + 8(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) i \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta} + 4m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) g_{\mu\nu}. \quad (4-78)$$

Para encontrar $|\mathcal{M}|^2$ necesitamos multiplicar T_1 y T_2 y contraer todos los términos, la multiplicación de $T_1 T_2$ se puede escribir como:

$$T_1 T_2 = (A_1^{\mu\nu} - A_2^{\mu\nu} + A_3^{\mu\nu}) (B_{1\mu\nu} - B_{2\mu\nu} + B_{3\mu\nu}). \quad (4-79)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_1^{\mu\nu} &= 4 \left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 \right) [p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu}], \\ A_2^{\mu\nu} &= 8(c_V^e c_A^e) i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta}, \\ A_3^{\mu\nu} &= 4(m_1)(m_3) \left((c_V^e)^2 - (c_A^e)^2 \right) g^{\mu\nu}, \\ B_{1\mu\nu} &= 4 \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu}], \\ B_{2\mu\nu} &= 8(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) i \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta}, \\ B_{3\mu\nu} &= 4m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4-80)$$

note que, $A_1^{\mu\nu}$, $A_3^{\mu\nu}$, $B_{3\mu\nu}$ son simétricas mientras que $A_2^{\mu\nu}$ y $B_{2\mu\nu}$ son antisimétricas con respecto a los índices μ, ν :

Expandiendo $T_1 T_2$

$$\begin{aligned} T_1 T_2 &= A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} - A_1^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} + A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} \\ &\quad - A_2^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} + A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} - A_2^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} \\ &\quad + A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} - A_3^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} + A_3^{\mu\nu} B_{3\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4-81)$$

los términos $A_1^{\mu\nu} B_{2\mu\nu}$, $A_3^{\mu\nu} B_{2\mu\nu}$, $A_2^{\mu\nu} B_{1\mu\nu}$, y $A_2^{\mu\nu} B_{3\mu\nu}$, se hacen cero debido a al multiplicación de los tensores de simétricos y antisimétricos.

Resolviendo para $A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 4 \left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 \right) [p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu}] \\ &\quad + 4 \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (4-82)$$

$$\begin{aligned} A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16 \left((c_V^e)^2 + (c_A^e)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) \\ &\quad [p_1^\mu p_3^\nu p_{2\mu} p_{4\nu} + p_1^\mu p_3^\nu p_{2\nu} p_{4\mu} - p_1^\mu p_3^\nu (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu} \\ &\quad + p_1^\nu p_3^\mu p_{2\mu} p_{4\nu} + p_1^\nu p_3^\mu p_{2\nu} p_{4\mu} - p_1^\nu p_3^\mu (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu} - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu}] \\ &\quad + p_{2\mu} p_{4\nu} - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu} + (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

En una forma compacta podemos escribir:

$$\begin{aligned}
A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) \\
&\quad (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2) \\
&\quad - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2) \\
&\quad + (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \\
&\quad - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) \\
&\quad 2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2) \\
&\quad - 2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - 2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \\
&\quad + 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) \\
&\quad 2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2) \\
&\quad - 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4),
\end{aligned}$$

$$A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} = 16 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)]$$

$$A_1^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} = 32 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)]. \quad (4-83)$$

Resolviendo para $A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu}$:

$$A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} = 16m_2m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}],$$

$$A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} = 16m_2m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - 4(p_1 \cdot p_3)],$$

$$A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} = 16m_2m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_3 - 4(p_1 \cdot p_3)],$$

$$A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} = 16m_2m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [2(p_1 \cdot p_3) - 4(p_1 \cdot p_3)],$$

$$A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} = 16m_2m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [-2(p_1 \cdot p_3)],$$

$$A_1^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} = -32m_2m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)]. \quad (4-84)$$

Resolviendo para $A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} &= 8(c_V^v c_A^v) i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{3\beta} 8(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) i \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta}, \\
A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} &= -64(c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1)(c_A^e + 1) p_{1\alpha} p_{3\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, \\
A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} &= -64(c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1)(c_A^e + 1) p_{1\alpha} p_{3\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}, \\
A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} &= -64(c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1)(c_A^e + 1) p_{1\alpha} p_{3\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} (-2) \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta \right), \\
A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} &= 128(c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1)(c_A^e + 1) \\
&\quad \times \left(p_{1\alpha} p_{3\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - p_{1\alpha} p_{3\beta} p_{2\alpha} p_{4\beta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta \right), \\
A_2^{\mu\nu} B_{2\mu\nu} &= 128(c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1)(c_A^e + 1) ((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)). \tag{4-85}
\end{aligned}$$

La demostración de $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = (-2) \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta \right)$ de la ecuación 4-85 se encuentran en el Apéndice (E)

Resolviendo para $A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 4(m_1)(m_3) \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) g^{\mu\nu} 4 \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) \dots \\
&\quad \dots [p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu}], \\
A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) \dots \\
&\quad \dots g^{\mu\nu} [p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu}], \\
A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [p_2 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_4 - 4(p_2 \cdot p_4)], \\
A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [2(p_2 \cdot p_4) - 4(p_2 \cdot p_4)], \\
A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= 16m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [-2(p_2 \cdot p_4)], \\
A_3^{\mu\nu} B_{1\mu\nu} &= -32m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_2 \cdot p_4)]. \tag{4-86}
\end{aligned}$$

Resolviendo para $A_3^{\mu\nu} B_{3\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
A_3^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} &= 4(m_1)(m_3) \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) g^{\mu\nu} 4m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) g_{\mu\nu}, \\
A_3^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} &= 16m_1 m_3 m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}, \\
A_3^{\mu\nu} B_{3\mu\nu} &= 64m_1 m_3 m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right). \tag{4-87}
\end{aligned}$$

Reemplazando en $T_1 T_2$

$$\begin{aligned}
T_1 T_2 = & 32 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
& - 32 m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)] \\
& + 128 (c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) ((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)) \\
& - 32 m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_2 \cdot p_4)] \\
& + 64 m_1 m_3 m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right), \tag{4-88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 T_2 = & 32 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
& - m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)] \\
& + 4 (c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) ((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)) \\
& - m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_2 \cdot p_4)] \\
& + 2 m_1 m_3 m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right).
\end{aligned}$$

(4-89)

Al promediar sobre los espines iniciales, se obtiene un factor 1/2 en lugar de 1/4 aunque los neutrinos son partículas de espín 1/2 . dado que los neutrinos viene en estado de helicidad único, es decir, helicidad=1, no abra ningún factor debido al cambio de espín de los neutrinos. el factor de 1/2 se debe únicamente al espín del electrón , por lo tanto podemos escribir el resultado del cuadrado de la amplitud promediada

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e e^-} = & \left(\frac{1}{2} \right) 2 G_F^2 32 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) \\
& [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
& - m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 + (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)] \\
& + 4 (c_V^v c_A^v) (c_V^e + 1) (c_A^e + 1) ((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)) \\
& - m_1 m_3 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_2 \cdot p_4)] \\
& + 2 m_1 m_3 m_2 m_4 \left((c_V^v)^2 - (c_A^v)^2 \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right), \tag{4-90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e-e^-} &= 32G_F^2 \underbrace{\left((c_V^{\nu})^2 + (c_A^{\nu})^2 \right)}_{\frac{1}{2}} \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
&\quad - m_2 m_4 \underbrace{\left((c_V^{\nu})^2 + (c_A^{\nu})^2 \right)}_{\frac{1}{2}} \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)] \\
&\quad + 4 \underbrace{(c_V^{\nu} c_A^{\nu})}_{\frac{1}{4}} (c_V^e + 1)(c_A^e + 1) ((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)) \\
&\quad - m_1 m_3 \underbrace{\left((c_V^{\nu})^2 - (c_A^{\nu})^2 \right)}_0 \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_2 \cdot p_4)] \\
&\quad + 2m_1 m_3 m_2 m_4 \underbrace{\left((c_V^{\nu})^2 - (c_A^{\nu})^2 \right)}_0 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right), \tag{4-91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e-e^-} &= 32G_F^2 \left(\frac{1}{2} \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
&\quad - m_2 m_4 \left(\frac{1}{2} \right) \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)] \\
&\quad + 4 \left(\frac{1}{4} \right) (c_V^e + 1)(c_A^e + 1) ((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)), \tag{4-92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e-e^-} &= 32G_F^2 \left(\frac{1}{2} \right) \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
&\quad - m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)] \\
&\quad + 2(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) ((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)), \tag{4-93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e-e^-} &= 16G_F^2 \left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
&\quad - m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) [(p_1 \cdot p_3)] \\
&\quad + 2(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - 2(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2), \tag{4-94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e-e^-} &= 16G_F^2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \underbrace{\left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 + 2(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) \right)}_{((c_V^e+1)+(c_A^e+1))^2} \\
&\quad + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \underbrace{\left((c_V^e + 1)^2 + (c_A^e + 1)^2 - 2(c_V^e + 1)(c_A^e + 1) \right)}_{((c_V^e+1)-(c_A^e+1))^2} \\
&\quad - m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) (p_1 \cdot p_3), \tag{4-95}
\end{aligned}$$

calculo de la amplitud de la dispersión $\nu_e - e^-$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e - e^-} &= 16G_F^2 ((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1))^2 (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4) \\ &\quad + ((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1))^2 (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \\ &\quad - m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) (p_1 \cdot p_3). \end{aligned} \quad (4-96)$$

4.3. $|\mathcal{M}|^2$ para la dispersión antineutrino-electrón

La dispersión $\bar{\nu}_e - e^-$ tiene lugar a través de la corriente cargada así como la corriente neutra. Sin embargo, la interacción con el bosón W toma lugar a través del canal-s a diferencia de la dispersión neutrino-electrón

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e - e^-} = \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e - e^-}^{NC} - \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e - e^-}^{CC}, \quad (4-97)$$

usando las reglas de Feynman, se puede escribir la amplitud para la dispersión $\bar{\nu}_e - e^-$ debido a la corriente neutra como:

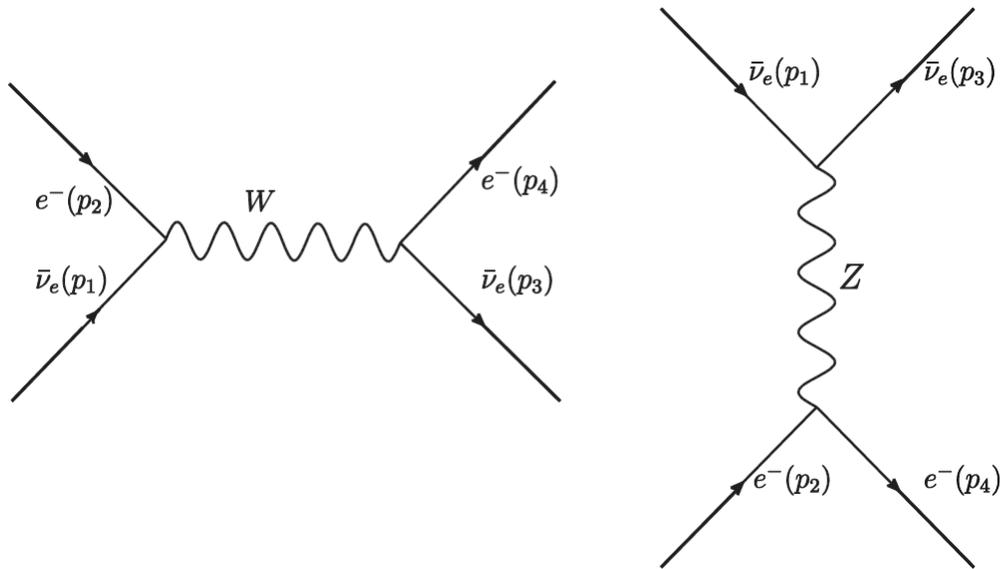


Figura 4-3.: Diagramas para la dispersión $\bar{\nu}_e - e^-$ dada a través de la corriente carga (bosón W) así como el intercambio de la corriente neutra (bosón Z)

$$-i \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e - e^-}^{NC} = \left[\bar{\nu}(p_1) \frac{-ig_Z}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu (c_V^{\nu} - c_A^{\nu} \gamma^5) \nu(p_3) \right] \frac{ig_{\mu\nu}}{m_Z^2} \left[\bar{u}(p_4) \frac{-ig_Z}{2 \cos \theta_W} \gamma^\nu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right], \quad (4-98)$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{NC} = \frac{g_Z^2}{4 \cos^2 \theta_W m_Z^2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (c_V^V - c_A^V \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right],$$

despejando m_Z y elevando al cuadrado la ecuación 4-23, se reemplaza en la ecuación anterior y se obtiene:

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{NC} = \frac{g_Z^2}{4 m_W^2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (c_V^V - c_A^V \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right]. \quad (4-99)$$

Introduciendo los valores numéricos de c_V^V y c_A^V como se muestra en la tabla **4-1**, tenemos:

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{NC} = \frac{g_Z^2}{8 m_W^2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right]. \quad (4-100)$$

Para la corriente cargada

$$-i \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{CC} = \left[\bar{u}(p_4) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \frac{ig_{\mu\nu}}{m_w^2} \left[\bar{\nu}(p_1) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right], \quad (4-101)$$

$$-i \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{CC} = \frac{-ig_w^2}{8m_w^2} \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right],$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{CC} = \frac{g_w^2}{8m_w^2} \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right],$$

usando el reordenamiento de Fierz (ver demostración en el Apéndice C), tenemos:

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{CC} = -\frac{g_w^2}{8m_w^2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right]. \quad (4-102)$$

Ya que los parámetros g_w y g_Z están relacionados con la constante de acoplamiento de Fermi, ecuación (4-24), podemos reescribir las contribuciones CC y NC en términos de la constante de acoplamiento de Fermi G_F , como:

Para la corriente neutra:

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{NC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right],$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{NC} = \frac{\sqrt{2} G_F}{2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right].} \quad (4-103)$$

Para la corriente cargada:

$$\boxed{\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{CC} = -\frac{\sqrt{2} G_F}{2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right].} \quad (4-104)$$

reemplazando en la amplitud:

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-} = \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{NC} - \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}^{CC}, \quad (4-105)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-} &= \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-} &= \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\left(\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-} = \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma_\mu \left((c_V^e - c_A^e \gamma^5) + (1 - \gamma^5) \right) u(p_2) \right],$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-} = \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{\nu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(p_3) \right] \left(\bar{u}(p_4) \gamma_\mu \left[(c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right] u(p_2) \right). \quad (4-106)$$

Reemplazando $\bar{\nu}(p_1) = \bar{u}(-p_1)$ y $\nu(p_3) = u(-p_3)$ en la ecuación anterior obtenemos:

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-} = \frac{\sqrt{2}G_F}{2} \left[\bar{u}(-p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(-p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\mu \left((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1) \gamma^5 \right) u(p_2) \right]. \quad (4-107)$$

Con las sustituciones de $p_1 \rightarrow -p_3$ y $p_3 \rightarrow -p_1$ en la ecuación anterior, resulta ser la misma ecuación que se obtuvo para la dispersión neutrino-electrón: $\langle |\mathcal{M}_{\nu_e e^-}|^2 \rangle$ (ver ecuación (4-96)),

de esta manera encontramos $\langle |\mathcal{M}_{\bar{\nu}_e e^-}|^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\bar{\nu}_e e^-} &= 16G_F^2 \left[((c_A^e + 1) + (c_V^e + 1))^2 (-p_3 \cdot p_2) (-p_1 \cdot p_4) \right. \\ &\quad + (c_A^e - c_V^e)^2 (-p_3 \cdot p_4) (p_2 \cdot -p_1) \\ &\quad \left. - m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) (p_1 \cdot p_3) \right], \end{aligned} \quad (4-108)$$

después de simplificar se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\bar{\nu}_e e^-} &= 16G_F^2 \left[((c_A^e + 1) + (c_V^e + 1))^2 (p_2 \cdot p_3) (p_4 \cdot p_1) \right. \\ &\quad + (c_A^e - c_V^e)^2 (p_4 \cdot p_3) (p_1 \cdot p_2) \\ &\quad \left. - m_2 m_4 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) (p_1 \cdot p_3) \right]. \end{aligned} \quad (4-109)$$

4.4. sección transversal diferencial para las dispersiones (anti)neutrino-electrón en términos de la energía de retroceso del electrón

Antes de profundizar en la derivación de las fórmulas de la sección transversal diferencial en términos de la energía de retroceso de la partícula objeto. Tomando en cuenta para la dispersión del neutrino del electrón ya que $|\mathcal{M}|^2$ contiene términos como $p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_4, p_2 \cdot p_3, p_3 \cdot p_4$ y $p_1 \cdot p_3$ es mejor expresar estos términos en términos de la energía en el marco de reposo del electrón inicial, los cálculos detallados se muestran en el (Apéndice F), los resultados obtenidos se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_3 &= m_\nu^2 + m_e T, \\ (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) &= m_e^2 (E_1 - T)^2, \\ (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) &= E_1^2 m_e^2. \end{aligned} \quad (4-110)$$

Recordemos que en el marco de reposo del electrón ya derivamos la sección transversal diferencial con respecto a la energía de retroceso del electrón

$$\frac{d\sigma}{dT} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{32\pi m_e |\vec{p}_1|^2}, \quad (4-111)$$

cuando despreciamos la masa del neutrino $E^2 - m^2 \stackrel{0}{=} p^2$

$$\frac{d\sigma}{dT} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{32\pi m_e E_1^2}. \quad (4-112)$$

4.4.1. Cálculo para el neutrino

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e-e^-} &= 16G_F^2 \left[((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1))^2 E_1^2 m_e^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 m_e^2 (E_1 - T)^2 \right. \\ &\quad \left. - m_e^2 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) m_\nu^2 + m_e T \right]. \end{aligned} \quad (4-113)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right)_{\nu_e-e^-} &= \frac{1}{32\pi m_e E_1^2} 16G_F^2 \left[((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1))^2 E_1^2 m_e^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 m_e^2 (E_1 - T)^2 \right. \\ &\quad \left. - m_e^2 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) m_\nu^2 + m_e T \right], \end{aligned} \quad (4-114)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right)_{\nu_e-e^-} &= \frac{G_F^2 m_e^2}{2\pi m_e E_1^2} \left[((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1))^2 E_1^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 (E_1 - T)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) m_\nu^2 + m_e T \right], \end{aligned} \quad (4-115)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\nu_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi E_1^2} \left[((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1))^2 E_1^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 (E_1 - T)^2 - \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) m_V^2 + m_e T \right], \quad (4-116)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\nu_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1))^2 \frac{E_1^2}{E_1^2} + (c_V^e - c_A^e)^2 \left(\frac{E_1}{E_1} - \frac{T}{E_1} \right)^2 - \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) \left(\frac{m_V^2}{E_1^2} + \frac{m_e T}{E_1^2} \right) \right], \quad (4-117)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\nu_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[((c_V^e + 1) + (c_A^e + 1))^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 \left(1 - \frac{T}{E_1} \right)^2 - \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) \left(\frac{m_e T}{E_1^2} \right) \right]. \quad (4-118)$$

4.4.2. Cálculo para el antineutrino

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\bar{\nu}_e-e^-} = 16G_F^2 \left[((c_A^e + 1) + (c_V^e + 1))^2 m_e^2 (E_1 - T)^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 m_e^2 E_1^2 - m_e^2 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) (m_V^2 + m_e T) \right]. \quad (4-119)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{1}{32\pi m_e E_1^2} 16G_F^2 \left[((c_A^e + 1) + (c_V^e + 1))^2 m_e^2 (E_1 - T)^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 m_e^2 E_1^2 - m_e^2 \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) (m_V^2 + m_e T) \right], \quad (4-120)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e^2}{2\pi m_e E_1^2} \left[((c_A^e + 1) + (c_V^e + 1))^2 (E_1 - T)^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 E_1^2 - \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) (m_V^2 + m_e T) \right], \quad (4-121)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[((c_A^e + 1) + (c_V^e + 1))^2 \left(\frac{E_1}{E_1} - \frac{T}{E_1} \right)^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 \frac{E_1^2}{E_1^2} - \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) \left(\frac{m_V^2}{E_1^2} + \frac{m_e T}{E_1^2} \right) \right], \quad (4-122)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[((c_A^e + 1) + (c_V^e + 1))^2 \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + (c_V^e - c_A^e)^2 - \left((c_V^e + 1)^2 - (c_A^e + 1)^2 \right) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right]. \quad (4-123)$$

Expresando c_V^e y c_A^e en términos del ángulo de mezcla débil, $\sin^2 \theta_w$ y utilizando los valores de la tabla **4-1** se reescribió la ecuación de la sección transversal diferencial para la dispersión antineutrino electrón como:

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[\left(\left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + 1 \right) \right)^2 \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + 1 \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)^2 \right) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right], \quad (4-124)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[\left(\left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w \right) \right)^2 \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + (2 \sin^2 \theta_w)^2 - \left(\left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right], \quad (4-125)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[(2 \sin^2 \theta_w + 1)^2 \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + (2 \sin^2 \theta_w)^2 - \left(\left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right) \right) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right], \quad (4-126)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{2\pi} \left[(1 + 4 \sin^2 \theta_w + 4 \sin^4 \theta_w) \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + (4 \sin^4 \theta_w) - \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + 4 \sin^4 \theta_w - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right], \quad (4-127)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{\pi} \left[\left(\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + 2 \sin^4 \theta_w \right) \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + (2 \sin^4 \theta_w) - (\sin^2 \theta_w + 2 \sin^4 \theta_w) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right], \quad (4-128)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{G_F^2 m_e}{\pi} \left[\left(\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w + 2 \sin^4 \theta_w \right) \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + (2 \sin^4 \theta_w) - (\sin^2 \theta_w + 2 \sin^4 \theta_w) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right], \quad (4-129)$$

así, obtenemos la sección diferencial en términos del ángulo de mezcla débil:

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{2G_F^2 m_e}{\pi} \left[\left(\frac{1}{4} + \sin^2 \theta_w + \sin^4 \theta_w\right) \left(1 - \frac{T}{E_1}\right)^2 + \sin^4 \theta_w - \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_w + \sin^4 \theta_w\right) \left(\frac{m_e T}{E_1^2}\right) \right], \quad (4-130)$$

donde G_F es la constante de Fermi, m_e es la masa del electrón, T es su energía cinética de retroceso y E_1 es la energía del neutrino incidente, la cual de ahora en adelante denotaremos como E_ν .

Reemplazando las constantes de acoplamiento donde, a nivel árbol, $g_L = \frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w$ y $g_R = \sin^2 \theta_w$ en la ecuación (4-130) se obtiene:

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\bar{\nu}_e-e^-} = \frac{2G_F^2 m_e}{\pi} \left[g_L^2 \left(1 - \frac{T}{E_\nu}\right)^2 + g_R^2 - g_L g_R \left(\frac{m_e T}{E_\nu^2}\right) \right]. \quad (4-131)$$

5. Interacciones No-Estándares

La evidencia convincente de las oscilaciones de neutrinos en las mediciones de neutrinos que provienen del sol, de colisiones de rayos cósmicos en la atmósfera, de reactores nucleares y de observaciones de neutrinos provenientes de aceleradores, implican masas y mezclas finitas de neutrinos [22] o algunas interacciones adicionales nuevas, diferentes de la interacción débil, no descritas por el ME. Tales interacciones, a menudo llamadas interacciones no estándar (INE) de neutrinos, si existen, son interesantes desde un punto de vista fenomenológico, ya que indican directamente la presencia de alguna nueva física más allá de ME. La posible presencia de INE fue señalada por primera vez por Wolfenstein [23, 24], seguido por los trabajos realizados en [25, 26] en la etapa inicial (antes del descubrimiento experimental de la oscilación de neutrinos [27] y luego, estudiado por un gran número de autores, por ejemplo, en [28, 29].

Las dispersiones de neutrinos y electrones son procesos puramente leptónicos con predicciones robustas ME [30]. Los experimentos sobre la dispersión de $\nu_e(\bar{\nu}_e) - e^-$ [31] han jugado un papel importante en las pruebas de ME y en los estudios de las propiedades intrínsecas y la oscilación de los neutrinos.

Los estudios experimentales sobre las propiedades e interacciones de los neutrinos son cruciales porque pueden arrojar luz sobre estas preguntas fundamentales y pueden brindar pistas o restricciones a los modelos de la nueva física. Los neutrinos provenientes de los reactores nucleares son una excelente fuente de neutrinos para abordar muchos de los problemas, debido a su alto flujo y disponibilidad, adicionalmente el modelo teórico del espectro de antineutrinos de reactor está bien establecido [32].

En el ME, la dispersión elástica $\nu_\alpha e \rightarrow \nu_\alpha e$, a bajas energías, está descrita por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{ME} = -2\sqrt{2}G_F(\bar{\nu}_\alpha\gamma^\mu L\nu_\alpha)[g_R(\bar{e}\gamma_\mu R e) + g_L(\bar{e}\gamma_\mu L e)], \quad (5-1)$$

donde $L, R = (1 \pm \gamma^5)/2$, son los proyectores de quiralidad, el subíndice α etiqueta los diferentes sabores de neutrinos y $g_R = \sin^2 \theta_W$, $g_L = \sin^2 \theta_W \pm \frac{1}{2}$, donde el signo inferior corresponde a $\nu_{\mu, \tau}$ (a partir del intercambio del bosón Z) y el signo superior para ν_e (a partir del intercambio de los bosones Z y W).

Fenomenológicamente, las INE de los neutrinos con los fermiones del ME, se pueden describir con un Lagrangiano efectivo de cuatro fermiones, donde se consideran interacciones a bajas energías

($q^2 \ll M_Z$). A lo largo de este capítulo asumiremos que los neutrinos tienen interacciones adicionales con el electrón (no consideradas en el ME), las cuales podrían estar mediadas por nuevos bosones de norma. Bajo este escenario la ecuación 5-1 se modifica y adopta la forma de un lagrangiano efectivo del tipo [33, 34]:

$$\mathcal{L}_{INE} = -2\sqrt{2}G_F \varepsilon_{\alpha\beta}^{fP} (\bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu L \nu_\beta) (\bar{f} \gamma_\mu P f), \quad (5-2)$$

donde f representa un fermión del ME de la primera generación: e , u o d , los estados de helicidad están dados por $P = L$ o R y las constantes adimensionales $\varepsilon_{\alpha\beta}^{fP}$ parametrizan la magnitud de estas nuevas interacciones con respecto a la constante de Fermi G_F . Estas interacciones no son necesariamente universales, y pueden ser diferentes para $\nu_\alpha = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$. En la Ec. (5-2) están incluidas interacciones que cambian sabor, las cuales están parametrizadas por $\varepsilon_{\alpha\beta}^{fP}$ con $\alpha \neq \beta$, como también interacciones sin cambio de sabor (interacciones no universales) con $\alpha = \beta$.

Para el análisis que presentaremos a continuación nos enfocaremos en la dispersión $\bar{\nu}_e - e^-$, es decir, considerando neutrinos provenientes de reactores nucleares, de tal manera que $\alpha = e$ y consideraremos los dos parámetros no-universales ε_{ee}^{eL} y ε_{ee}^{eR} .

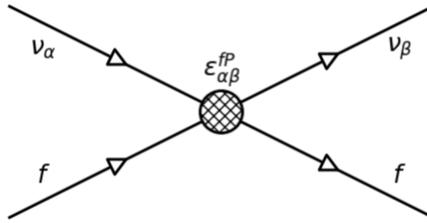


Figura 5-1.: Diagrama de Feynman INE de neutrinos descrita genéricamente como interacción de cuatro fermiones con nuevos acoplamientos.

La sección eficaz obtenida en el capítulo anterior Ec.(4-131) se modifica en presencia de física mas allá del ME, de igual manera que el lagrangiano que describe la interacción del neutrino con el electrón. En el formalismo de INE las constantes de acoplamiento g_L y g_R se redefinen agregando los parámetros ε_{ee}^{eL} y ε_{ee}^{eR} . En este caso la sección transversal diferencial, incluyendo las correcciones provenientes del Lagrangiano mostrado en la ecuación (5-2) vendrá dada por [35]:

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{2G_F^2 m_e}{\pi} \left[(g_R + \varepsilon_{ee}^R)^2 + \left\{ (g_L + \varepsilon_{ee}^L)^2 \left(1 - \frac{T}{E_\nu}\right)^2 \right\} - \left\{ (g_L + \varepsilon_{ee}^L) (g_R + \varepsilon_{ee}^R) \right\} m_e \frac{T}{E_\nu^2} \right], \quad (5-3)$$

donde m_e es la masa del electrón, T representa la energía de retroceso del electrón, y E_ν es la energía del antineutrino. Los acoplamientos del ME, a nivel de árbol, se definen como $g_L = \frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w$ y $g_R = \sin^2 \theta_w$.

5.1. Cotas a los parámetros de INE en experimentos de reactores

5.1.1. Medición de la dispersión antineutrino-electrón

La dispersión anti neutrino-electrón se ha medido en experimentos de neutrinos a bajas energías que utilizan reactores como fuente de antineutrinos. Entre los experimentos que han medido esta reacción se encuentra, por ejemplo, los experimentos de Rovno [4] y Krasnoyarsk [5] en Rusia y, más recientemente, las mediciones de los experimentos MUNU[6] y TEXONO[7]. Por otro lado, también se han realizado mediciones de la dispersión neutrino electrón utilizando neutrinos provenientes del decaimiento del muón [36, 37].

Con el objetivo de investigar las INE en la dispersión $\bar{\nu}_e - e^-$, escogeremos el experimento TEXONO para llevar a cabo el análisis estadístico que nos permitirá obtener restricciones a los parámetros ϵ_{ee}^{eL} y ϵ_{ee}^{eR} .

A continuación daremos un breve resumen del experimento TEXONO para después describir el análisis que hemos hecho de este experimento. Presentamos en la tabla 5-1 la medición más reciente llevada a cabo por la colaboración TEXONO de la dispersión anti neutrino-electrón.

Experimento	$E_\nu(\text{MeV})$	$T(\text{MeV})$	σ reportada
Texono[7]	$3.0 < E_\nu < 8.0$	$3.0 - 8.0$	$[1.08 \pm 0.21 \pm 0.16] \cdot \sigma_{SM}$

Tabla 5-1.: Sección eficaz para $\bar{\nu}_e - e$ publicadas por TEXONO

TEXONO

TEXONO (Taiwan Experiment on neutrino) construyó un laboratorio en la planta nuclear Kuo-Sheng en la costa norte de Taiwan [38], con el objetivo de estudiar física de neutrinos a bajas energías. El laboratorio de neutrinos está localizado a una distancia de 28 m del núcleo del reactor, con una potencia térmica de 2.9GW y un flujo promedio de $\bar{\nu}_e$ de $6.4 \times 10^{12} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. El sitio está en la planta baja del edificio del reactor a una profundidad de 10 m bajo el nivel del suelo, con una sobrecarga de aproximadamente 30 m de equivalente en agua. Un diagrama esquemático se muestra en la Fig. (5-2). El laboratorio cuenta con una estructura de blindaje de 50 toneladas

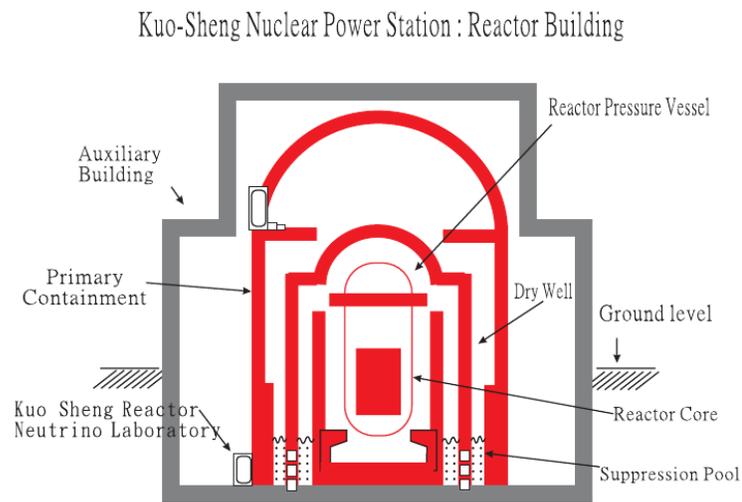


Figura 5-2.: Diseño del laboratorio de neutrinos Kuo-Sheng, junto con el núcleo del reactor y el edificio. Imagen tomada de [39].

representada esquemáticamente en la Fig.(5-3), que consta, de afuera hacia adentro, en paneles de centelleo de plástico de 2,5 cm de espesor con tubos fotomultiplicadores (PMT) para lectura de veto de rayos cósmicos, 15 cm de plomo, 5 cm de estructuras de soporte de acero inoxidable, 25 cm de polietileno cargado con boro y 5 cm de cobre de alta conductividad libre de oxígeno (OFHC).[39]

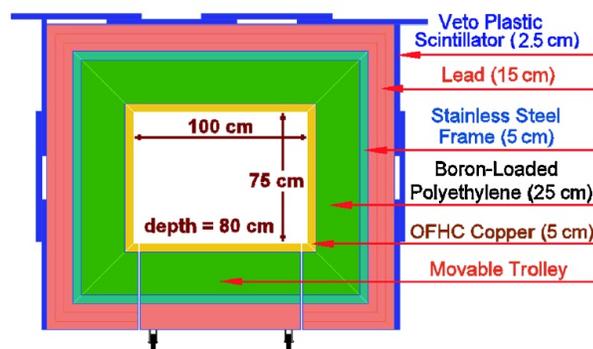


Figura 5-3.: Diseño de blindaje de KSNL. Se aplican estructuras similares a las paredes trasera y delantera. Se colocaron detectores y blindajes internos en el volumen objetivo interno, imagen tomada de [39].

5.1.2. Análisis χ^2

Para confrontar los datos experimentales con cualquier modelo teórico es necesario calcular el número de eventos. A continuación se presenta el análisis estadístico de la dispersión ($\bar{v}_e - e$) para el caso de los datos de TEXONO, considerando INE. El número total de eventos esperado está dado por la siguiente ecuación [40]:

$$N_i^{INE} = \kappa \int_{T_i}^{T_{i+1}} \int_{E_{thr}}^{E_{vmax}} \int_0^{T_{max}} \lambda(E_\nu) \frac{d\sigma}{dT}(\epsilon_{ee}^{eL}, \epsilon_{ee}^{eR}) R(T, T') dT dE_\nu dT', \quad (5-4)$$

donde κ es un factor que toma en cuenta el flujo total de neutrinos provenientes del reactor, el tiempo de exposición y el número de electrones en el detector. Los demás términos que aparecen en esta integral son descritos a continuación.

Espectro de energía de los antineutrinos $\lambda(E_\nu)$

Los reactores producen en sus núcleos cuatro tipos de isótopos (^{235}U , ^{239}Pu , ^{241}Pu y ^{238}U) estos determinan la distribución de los productos de fisión. Cada producto de fisión puede producir un espectro de antineutrinos determinado. En la presente investigación se tuvieron en cuenta dos configuraciones. La primera es el espectro de antineutrinos para energías $E_\nu > 2$ MeV ilustrado en la figura (5-4). Este espectro ha sido ampliamente estudiado y la forma del espectro sigue la prescripción dada en la referencia [32], según la cual

$$\lambda(E_\nu) = \sum_{\ell} f_{\ell} \lambda_{\ell}(E_\nu) = \sum_{\ell} f_{\ell} \exp \left[\sum_{k=1}^6 \alpha_{k\ell} E_\nu^{k-1} \right]. \quad (5-5)$$

Donde f_{ℓ} son los porcentajes de las mediciones de antineutrinos para cada isótopo y los valores de los coeficientes $\alpha_{k\ell}$ se encuentran en la tabla (5-2), los cuales están reportados en el artículo *Predicciones mejoradas de espectros de antineutrinos de reactores* [32]. La segunda configuración es para el caso de antineutrinos con energías $E_\nu < 2$ MeV, para este caso sólo hay cálculos teóricos del espectro de antineutrinos y fueron tomados de las referencias [41] (Ver Tabla5-3).

	$\ell = {}^{235}\text{U}$	$\ell = {}^{239}\text{Pu}$	$\ell = {}^{238}\text{U}$	$\ell = {}^{241}\text{Pu}$
k	$\alpha_{k\ell}$	$\alpha_{k\ell}$	$\alpha_{k\ell}$	$\alpha_{k\ell}$
1	3.217	6.413	4.833×10^{-1}	3.0251
2	-3.111	-7.432	1.927×10^{-1}	-3.204
3	1.395	3.535	-1.283×10^{-1}	1.428
4	-3.690×10^{-1}	-8.820×10^{-1}	-6.762×10^{-3}	-3.675×10^{-1}
5	4.445×10^{-2}	1.025×10^{-1}	2.233×10^{-3}	4.254×10^{-2}
6	-2.053×10^{-3}	-4.550×10^{-3}	-1.536×10^{-4}	-1.896×10^{-3}

Tabla 5-2.: Coeficientes $\alpha_{k\ell}$ del polinomio de orden 5 para el espectro de antineutrinos de los elementos $\ell = {}^{235}\text{U}$, ${}^{238}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{241}\text{Pu}$. Tomado de [32].

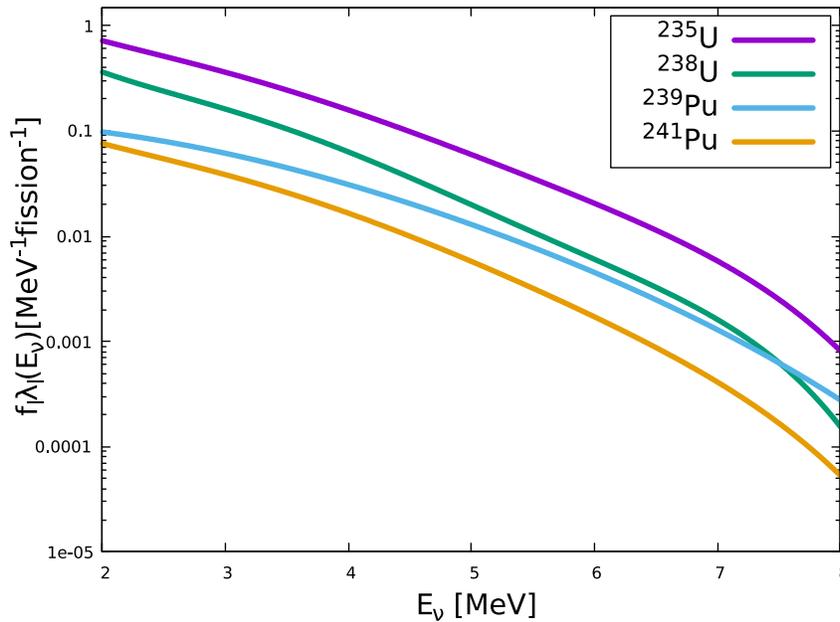


Figura 5-4.: Espectro de antineutrinos de reactor para los isótopos ${}^{235}\text{U}$, ${}^{238}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{241}\text{Pu}$.

La figura 5-4 nos muestra el comportamiento del espectro de antineutrinos de reactor para cada isótopo. Este espectro se representa como $\lambda_\ell(E_\nu) = f_\ell \lambda_\ell(E_\nu)$, para cada uno de los isótopos, donde $f_1 = 55\%$, $f_2 = 7\%$, $f_3 = 32\%$, $f_4 = 6\%$ son los porcentajes que aporta cada isótopo al espectro de antineutrinos de reactor, que corresponden a ${}^{235}\text{U}$, ${}^{238}\text{U}$, ${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{241}\text{Pu}$ respectivamente.

$E(\text{MeV})$	^{235}U	^{239}Pu	^{238}U	^{241}Pu
2.0	1.26	1.08	1.50	1.32
1.5	1.69	1.48	1.97	1.75
1.0	2.41	2.32	2.75	2.63
0.75	2.66	2.58	2.96	2.90
0.50	2.66	2.63	2.91	2.82
0.25	2.16	2.08	2.18	2.14
0.125	1.98	1.99	2.02	1.85
6.25×10^{-2}	0.61	0.64	0.65	0.59
3.12×10^{-2}	0.35	2.13	1.32	3.00
1.563×10^{-2}	0.092	0.56	0.35	0.79
7.813×10^{-3}	0.024	0.14	0.089	0.20

Tabla 5-3.: Espectro de antineutrinos para $E < 2\text{MeV}$, en unidades de $\bar{\nu}_e/(\text{MeV fisión})$ [41].

Función de resolución $R(T, T')$

La función de resolución de energía asociada al detector, $R(T, T')$, describe la posible diferencia que existe entre la energía de retroceso del electrón dispersado medida por el detector T' , y la energía real T ; de esta manera, la energía real T está distribuida alrededor de la energía medida del detector T' , de acuerdo a una distribución gaussiana, cuyo ancho se establece experimentalmente. Esta función de resolución está dada por [7]

$$R(T, T') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(T - T')^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (5-6)$$

donde $\sigma = \sigma(T) = 0,0325\sqrt{T/\text{MeV}}$, es la desviación típica o desviación estándar de la distribución gaussiana [42].

Energía de retroceso máxima $T_{max}(E_\nu)$

Conociendo de la cinemática de colisiones, que la Energía máxima de retroceso del electrón se obtiene cuando el electrón se dispersa hacia adelante. En el marco de laboratorio (ver figura 4-1). La energía de retroceso representa la máxima energía que puede transferir el neutrino al electrón. El proceso detallado para obtener la expresión de la energía de retroceso máxima dada una energía incidente E_ν se encuentra en la expresión (G-10) y puede ser escrita de la siguiente manera:

$$T_{max}(E_\nu) = \frac{2E_\nu^2}{m_e + 2E_\nu}, \quad (5-7)$$

por lo tanto, para una energía del neutrino incidente dada, la integral de la energía de retroceso del electrón tendrá como límite superior la energía aquí discutida.

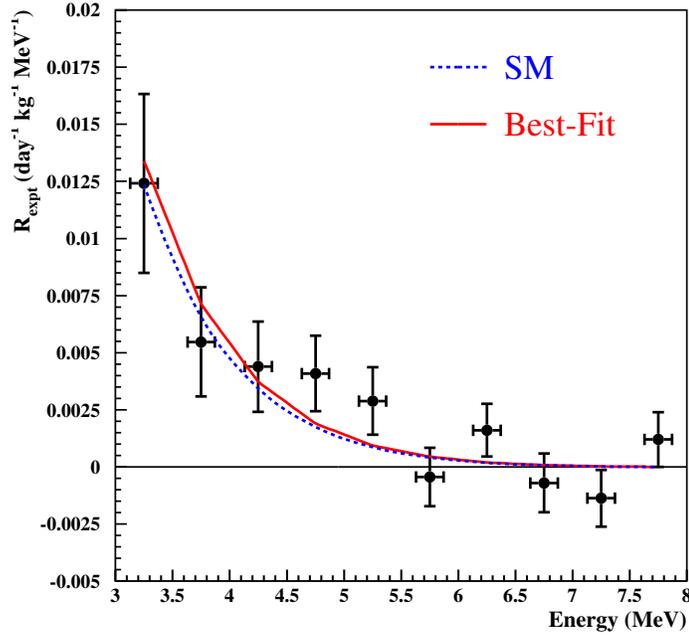


Figura 5-5.: Número de eventos en función de la energía de retroceso del electrón T . La línea a trazos y la línea continua corresponden a los valores esperados a partir del ME y el mejor ajuste de los datos experimentales respectivamente. Imagen tomada de [39]

Ajuste de datos

Teniendo en cuenta las expresiones anteriormente mencionadas, se tienen todos los elementos necesarios para realizar un análisis χ^2 del experimento TEXONO. Para ello debemos tener en cuenta que TEXONO reporta la medición de la dispersión antineutrino-electrón en el intervalo de energía de retroceso del electrón entre $3 < T < 8$ MeV, dividido en 10 bins de energía, con sus respectivos errores experimentales como se puede apreciar en la Fig. (5-5). A continuación se define la función χ^2 que utilizaremos para llevar a cabo el análisis estadístico, la cual está dada por

$$\chi^2(\varepsilon_{ee}^{eR}, \varepsilon_{ee}^{eL}) = \sum_i \frac{(N_i^{teo}(\varepsilon_{ee}^{eR}, \varepsilon_{ee}^{eL}) - N_i^{exp})^2}{\Delta_i^2}, \quad (5-8)$$

donde $i = 1, 2, \dots, 10$, de acuerdo a los 10 bins de energía reportados por TEXONO. N_i^{teo} corresponde a la predicción teórica considerando INE. N_i^{exp} son los datos experimentales reportados por

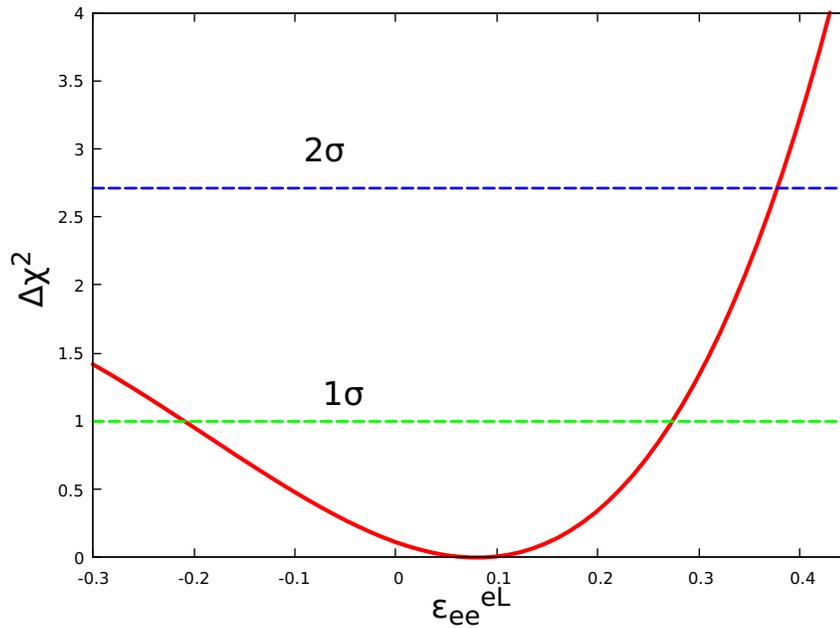


Figura 5-6.: Sensibilidad del parámetro ε_{ee}^{eL} a través del análisis χ^2 .

el experimento por cada bin de energía y Δ_i es el respectivo error estadístico en la medición.

A continuación se presentan los resultados del ajuste de los datos reportados por TEXONO para el caso de INE. Con el fin de obtener las restricciones a los parámetros ε_{ee}^{eR} , ε_{ee}^{eL} se hicieron dos análisis. Primero considerando que el parámetro ε_{ee}^{eR} era exactamente cero, mientras el parámetro ε_{ee}^{eL} se dejaba libre en el análisis. El resultado se presenta en la figura 5-6. Los límites encontrados al parámetro ε_{ee}^{eL} son los siguientes:

Para 1 σ :

$$-0,2093 < \varepsilon_{ee}^{eL} < 0,2716. \quad (5-9)$$

Para 2 σ :

$$\varepsilon_{ee}^{eL} < 0,3703. \quad (5-10)$$

En el segundo análisis se consideró que el parámetro ε_{ee}^{eL} era exactamente cero, mientras el parámetro ε_{ee}^{eR} se dejaba libre en el análisis. El resultado se presenta en la figura 5-7. Los límites al parámetro ε_{ee}^{eR} son los siguientes:

Para 1 σ :

$$-0,015 < \varepsilon_{ee}^{eR} < 0,0616. \quad (5-11)$$

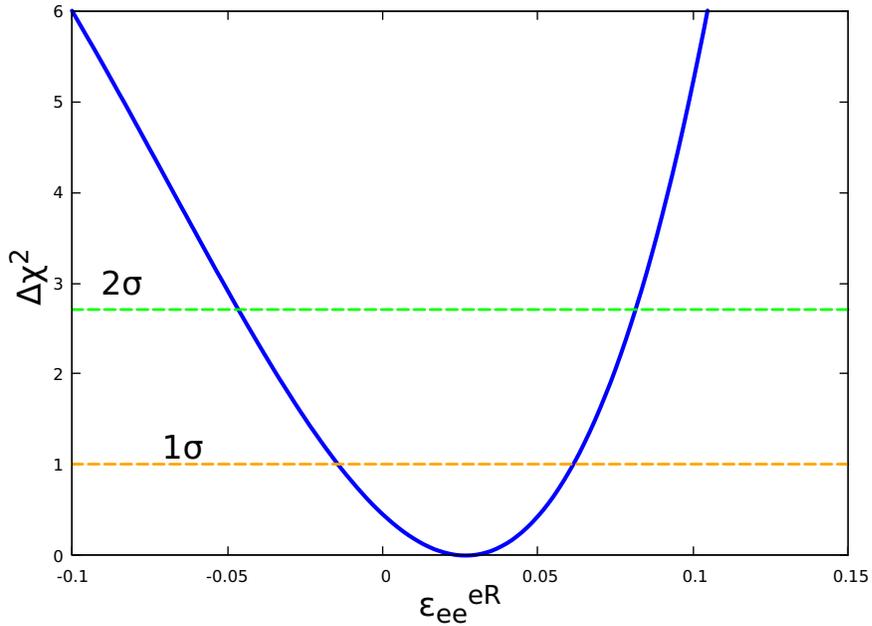


Figura 5-7.: Sensibilidad del parámetro ϵ_{ee}^{eR} a través del análisis χ^2 .

Para 2 σ :

$$\boxed{-0,0466 < \epsilon_{ee}^{eR} < 0,0816.} \quad (5-12)$$

Tomando en cuenta los resultados que obtuvimos para cada uno de los análisis, a continuación se presenta el comportamiento de la sección eficaz diferencial considerando diferentes valores de los parámetros de INE. Para obtener este resultado se calculó numéricamente la sección eficaz diferencial promediada con el espectro de antineutrinos de reactor la cual está dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{\left\langle \frac{d\sigma(T)}{dT} \right\rangle = \int_{E_v^{min}(T)}^8 \lambda(E_v) \frac{d\sigma(\epsilon_{ee}^{eR}, \epsilon_{ee}^{eL})}{dT} dE_v,} \quad (5-13)$$

donde $E_v^{min} = \frac{T}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2m_e}{T}} \right]$ (la demostración de esta ecuación está en el apéndice G).

Con el fin de analizar el impacto de los parámetros de INE en la sección eficaz se presenta en la figura 5-8 los resultados obtenidos. Por medio de la línea negra se muestra la predicción del ME para la sección eficaz; en este escenario ambos parámetros de INE son iguales a cero $\epsilon_{ee}^{eR} = \epsilon_{ee}^{eL} = 0$. A su vez se presentan cuatro escenarios en los cuales se elige uno de ellos igual a cero y el otro

asume un valor en las regiones encontradas en nuestros análisis. Podemos concluir de la figura 5-8 que la elección $\varepsilon_{ee}^{eL} = 0,38$ nos arroja la mayor desviación respecto a la predicción del ME.

A la fecha aún no se ha reportado evidencia concluyente de estas nuevas interacciones. No obstante, actualmente se están llevando a cabo numerosos esfuerzos, tanto teóricos como experimentales, con el objetivo de mejorar nuestro conocimiento de las interacciones neutrino materia. Como fruto de estas investigaciones se espera en un futuro cercano mejorar la sensibilidad de los experimentos a las INE. Dentro de las propuestas experimentales se encuentran ISODAR [43] y LENA [44] que podrían dar información complementaria, si ambas propuestas se realizan en un futuro. En el caso de ISODAR, se propone utilizar una fuente intensa de antineutrino ${}^8\text{Li}$ con una energía de antineutrino de hasta 14 MeV en combinación con el centellador liquido kamLAND [45]. La propuesta de LENA prevé utilizar una fuente de cromo de neutrinos, que proporciona un flujo de energía de neutrinos monocromáticos, $E_\nu = 0,747\text{MeV}$, situada en la parte superior de un detector cilíndrico de centelleo liquido de 100kT [44]. Estas no son las únicas propuestas para la dispersión de electrones con neutrinos, pero ilustran el potencial futuro de estos experimentos.

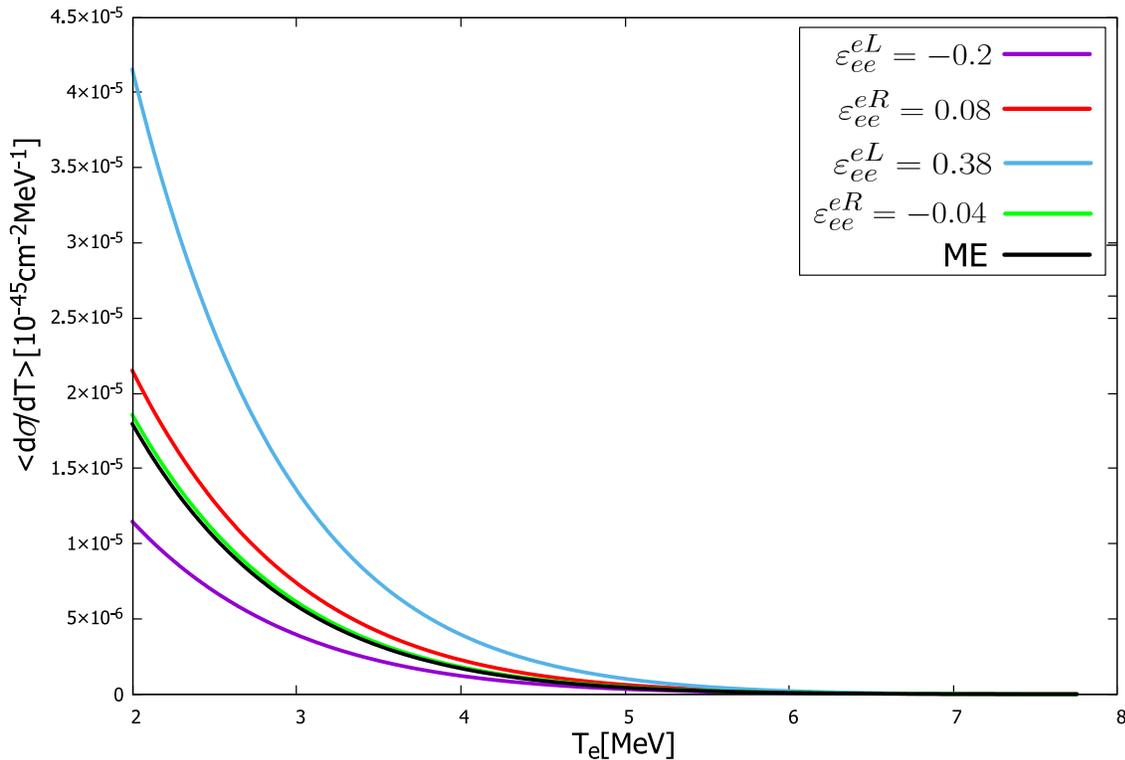


Figura 5-8.: Sección eficaz diferencial en función de la energía de retroceso del electrón.

6. Conclusiones

En el presente trabajo se planteó como objetivo general el estudio de la dispersión (anti)neutrino-electrón y su impacto en la determinación de interacciones no estándares en el sector de neutrinos. Con el propósito de cumplir exitosamente este trabajo de investigación se hizo necesario realizar una revisión bibliográfica que ayudó en la fundamentación teórica del Modelo Estándar, el cual describe con una sorprendente precisión experimental las interacciones fuerte, electromagnética y débil de las partículas elementales en el marco de la teoría cuántica de campos. Entre las partículas fundamentales de este modelo se encuentran los neutrinos, objeto de estudio en esta tesis. Actualmente la física de neutrinos se encuentra en una etapa de alta precisión. El fenómeno de oscilaciones de neutrinos implica que los neutrinos son partículas masivas, una clara señal que indica que el modelo estándar se debe extender, ya que dentro de este modelo los neutrinos no tienen masa. Determinar el mecanismo de generación de masa de estas partículas es una de las áreas de investigación más activas en la actualidad en la física de neutrinos. La interacción de los neutrinos en el modelo estándar está bien determinada por la interacción electrodébil. No obstante, tomando en cuenta que el modelo estándar no da cuenta de la masa del neutrino y por lo tanto se debe ampliar, surgen interrogantes muy interesantes, por ejemplo, podrían los neutrinos acoplarse a nuevos bosones mediadores. Fue justamente esta pregunta la que exploramos en esta tesis.

Para comprender los procesos electrodébiles fundamentales de la dispersión neutrino-electrón y antineutrino-electrón, se realizó una completa apropiación del formalismo físico-matemático, llevando a cabo el cálculo analítico de la sección eficaz en el Modelo Estándar para estas dos interacciones. Se partió de la regla de oro de Fermi para un proceso de dispersión, se construyó la amplitud \mathcal{M} a partir de los diagramas de Feynman para la corriente neutra y la corriente cargada. Este cálculo es el ingrediente principal para hallar la sección eficaz diferencial en términos de la energía de retroceso del electrón. Este resultado fue fundamental en el desarrollo de este trabajo de investigación, a partir de el y asumiendo sobre bases fenomenológicas se modificó la sección eficaz en presencia de nueva física más allá de este modelo. Las constantes de acoplamiento g_L y g_R se ven modificadas con los parámetros dados por un Lagrangiano efectivo de cuatro fermiones descrito fenomenológicamente en las interacciones no estándar de los neutrinos ϵ_{ee}^{eL} y ϵ_{ee}^{eR} .

Para indagar e investigar las interacciones no estándar en la dispersión antineutrino-electrón, se escogió el experimento TEXONO, del cual se tomaron las mediciones más recientes reportadas en este experimento. Con estos resultados se llevó a cabo el análisis estadístico χ^2 , donde se realizaron códigos en el lenguaje de programación FORTRAN, que permitieron calcular de forma

numérica el número de eventos esperado para el experimento TEXONO, obteniendo restricciones a los parámetros ε_{ee}^{eL} y ε_{ee}^{eR} . Con el fin de investigar el impacto de los parámetros de interacciones no estándar, se gráfico la sección eficaz diferencial en el modelo estándar y la sección eficaz modificada considerando diferentes valores de los parámetros ε_{ee}^{eL} y ε_{ee}^{eR} . Estos valores se tomaron de los intervalos de confianza obtenidos en el análisis estadístico con el objetivo de mostrar cuál de ellos presenta una mayor desviación respecto a la predicción del modelo estándar. Experimentos futuros tales como ISODAR y LENA tienen como objetivo mejorar la sensibilidad a las interacciones no estándar del neutrino y por qué no presentar evidencia concluyente de la existencia de estas nuevas interacciones.

A. Apéndice: Desarrollo de la Integral delta

$$I = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u + m_3^2}} \dots \times \delta \left(\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2 + m_2} - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2} \right). \quad (\text{A-1})$$

Usando la propiedad para la delta

$$\int h(x) \delta[f(x)] = \frac{h(x_0)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}}. \quad (\text{A-2})$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} \frac{df(u)}{du} &= - \left(|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u_0 + m_3^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \left(|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u_0 + m_3^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (-2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|) \\ &= \left(|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u_0 + m_3^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (|\vec{p}_1||\vec{p}_4|) \\ &= \frac{(|\vec{p}_1||\vec{p}_4|)}{\sqrt{\left(|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u_0 + m_3^2 \right)}}, \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Reemplazamos en la propiedad

$$I = \frac{\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u_0 + m_3^2}}}{\frac{(|\vec{p}_1||\vec{p}_4|)}{\sqrt{\left(|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_4|u_0 + m_3^2 \right)}}}, \quad (\text{A-4})$$

$$I = \frac{1}{|\vec{p}_1||\vec{p}_4|} \quad (\text{A-5})$$

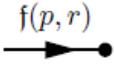
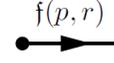
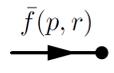
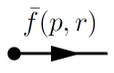
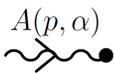
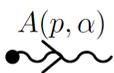
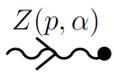
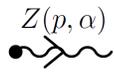
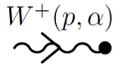
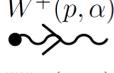
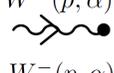
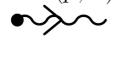
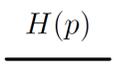
B. Apéndice: Reglas de Feynman para el modelo estándar Electro débil

Las reglas de Feynman para el calculo de la amplitud $|\mathcal{M}|^2$ a nivel de árbol de un proceso dado son las siguientes:

1. Dibujar todos los diagramas de árbol conectados que contribuyan al proceso, teniendo en cuenta las líneas externas que se muestran en la sección B.1, las líneas internas de B.2 y los vértices en B.3.
2. Para cada línea externa, anotar la cantidad correspondiente en la sección B.1
3. Para cada línea interna, escribir el propagador correspondiente en la sección B.2
4. Para vértice del diagrama, anotar la cantidad correspondiente en la sección B.3
5. Cumplir con la conservación de energía -momento en cada vértice del diagrama.
6. Asignar un factor relativo de -1 a los diagramas que difieren solo por un intercambio de so líneas externas, hay que tener en cuenta que el signo general es irrelevante.

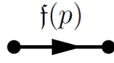
B.1. Lineas Externas

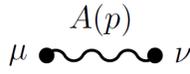
En las expresiones que se verán a continuación p es el momento de la partícula, r es el índice de espín de los fermiones y α es el índice de espín de los bosones de espín uno.

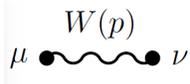
Fermión entrante f :		$\implies u_f^{(r)}(p)$	(B-1)
Fermión saliente f :		$\implies \bar{u}_f^{(r)}(p)$	(B-2)
Antifermión entrante \bar{f} :		$\implies \bar{v}_f^{(r)}(p)$	(B-3)
Antifermión saliente \bar{f} :		$\implies v_f^{(r)}(p)$	(B-4)
Fotón entrante:		$\implies \mathcal{E}^\alpha(p)$	(B-5)
Fotón saliente:		$\implies \mathcal{E}^{(\alpha)*}(p)$	(B-6)
Z entrante:		$\implies \mathcal{E}^{(\alpha)}(p)$	(B-7)
Z saliente:		$\implies \mathcal{E}^{(\alpha)*}(p)$	(B-8)
W^+ entrante:		$\implies \mathcal{E}^{(\alpha)}(p)$	(B-9)
W^+ saliente:		$\implies \mathcal{E}^{(\alpha)*}(p)$	(B-10)
W^- entrante:		$\implies \mathcal{E}^{(\alpha)}(p)$	(B-11)
W^- saliente:		$\implies \mathcal{E}^{(\alpha)*}(p)$	(B-12)
Higgs entrante o saliente:		$\implies 1$	(B-13)

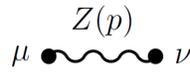
B.2. Líneas Internas

Las líneas internas son aquellas que se encuentran entre los vértices de los diagramas. Y para el modelo estándar electrodébil se tienen las siguientes.

Propagador del fermión:  $\implies G^{(f)}(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$ (B-14)

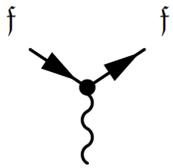
Propagador del fotón  $\implies G_{\mu\nu}^{(A)}(p) = i \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$ (B-15)

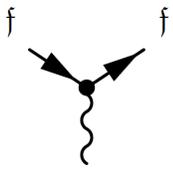
Propagador de W  $\implies G_{\mu\nu}^{(W)}(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_W^2}}{p^2 - m_W^2 + i\epsilon}$ (B-16)

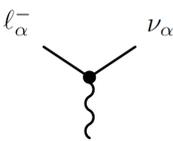
propagador del Z  $\implies G_{\mu\nu}^{(Z)}(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_Z^2}}{p^2 - m_Z^2 + i\epsilon}$ (B-17)

B.3. Vértices

Para esta sección tenemos que: q_f es la carga del fermión f en unidades de la carga elemental e , por lo tanto, $q_\nu = 0$, $q_e = q_\mu = q_\tau = -1$, $q_u = q_c = q_t = 2/3$, $q_d = q_s = q_b = -1/3$. Los coeficientes g_A^f , encuentran en la tabla (), donde $g \sin \theta_w = e$.

vértice EM :  $\implies -ieq_f \gamma_\mu$ (B-18)

vértice NC :  $\implies -i \frac{g}{2 \cos \theta_w} \gamma_\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5)$ (B-19)

vértice leptones CC:  $\implies -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma^5)$ (B-20)

C. Apéndice: Identidad de Fierz

En general, para los cálculos de los procesos físicos, el reordenamiento de los espinores de Dirac resulta muy útil, lo que se hace mediante las transformaciones de Fierz. Esto es especialmente ventajoso para el cálculo de la sección transversal de la dispersión $\nu_e - e^-$. Por lo tanto, será conveniente derivar las identidades de Fierz que valdrán para calcular $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\nu_e - e^-}$.

El producto de los biespinores se puede expandir como:

$$\bar{u}_\alpha u_\beta = \frac{1}{4} \sum_j (\Gamma_j)_{\beta\alpha} \bar{u} \Gamma_j u \quad (\text{C-1})$$

donde $\Gamma_i = \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, i\gamma^5 \gamma^\mu, \gamma^5\}$ es el conjunto completo de las matrices de Dirac. De hecho, si multiplicamos los dos lados de la ecuación (1) por $(\Gamma_i)_{\alpha\beta}$ y utilizamos $Tr \Gamma_i \Gamma_j = 2g_{ij}$ obtenemos obtenemos la identidad

Supongamos que tenemos que sustituir la $\bar{u}(p_4)$ por la $\bar{u}(p_3)$ en el siguiente producto de las corrientes:

$$I = \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(p_2) \right] \quad (\text{C-2})$$

Definamos $A^\mu = \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ y $B_\mu = \gamma_\mu (1 - \gamma^5)$, entonces “I” puede escribirse como:

$$I = \left[\bar{u}(p_4) A^\mu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3) B_\mu u(p_2) \right] \quad (\text{C-3})$$

Esta expresión se puede escribir escribiendo los índices explícitamente como:

$$I = \bar{u}(p_4)_\alpha (A^\mu)_{\alpha\beta} u(p_1)_\beta \bar{u}(p_3)_\rho (B_\mu)_{\rho\sigma} u(p_2)_\sigma \quad (\text{C-4})$$

Como queremos sustituir $\bar{u}(p_4)$ y $\bar{u}(p_3)$, escribamos esto de la siguiente forma

$$I = \bar{u}(p_3)_\rho u(p_1)_\beta \bar{u}(p_4)_\alpha u(p_2)_\sigma (A^\mu)_{\alpha\beta} (B_\mu)_{\rho\sigma} \quad (\text{C-5})$$

Utilizando la identidad de la ecuación (C-1) podemos escribir:

$$\bar{u}(p_3)_\rho u(p_1)_\beta = \frac{1}{4} \sum_i (\Gamma_i)_{\beta\rho} \bar{u}(p_3) \Gamma_i u(p_1) \quad (\text{C-6})$$

$$\bar{u}(p_4)_\alpha u(p_2)_\sigma = \frac{1}{4} \sum_j (\Gamma_j)_{\sigma\alpha} \bar{u}(p_4) \Gamma_j u(p_2)$$

Entonces, la ecuación (C-5) toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{1}{4} \sum_i (\Gamma_i)_{\beta\rho} \bar{u}(p_3) \Gamma_i u(p_1) \right] \left[\frac{1}{4} \sum_j (\Gamma_j)_{\sigma\alpha} \bar{u}(p_4) \Gamma_j u(p_2) \right] \left[(A^\mu)_{\alpha\beta} (B_\mu)_{\rho\sigma} \right] \\
I &= \frac{1}{16} \sum_i \sum_j \left[(\Gamma_i)_{\beta\rho} \bar{u}(p_3) \Gamma_i u(p_1) \right] \left[(\Gamma_j)_{\sigma\alpha} \bar{u}(p_4) \Gamma_j u(p_2) \right] \left[(A^\mu)_{\alpha\beta} (B_\mu)_{\rho\sigma} \right] \\
I &= \frac{1}{16} \sum_i \sum_j \left[(A^\mu)_{\alpha\beta} (\Gamma_i)_{\beta\rho} (B_\mu)_{\rho\sigma} (\Gamma_j)_{\sigma\alpha} \right] \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_i u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_j u(p_2) \right] \\
I &= \frac{1}{16} \sum_i \sum_j \left[(A^\mu) (\Gamma_i) (B_\mu) (\Gamma_j) \right]_{\alpha\alpha} \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_i u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_j u(p_2) \right] \quad (C-7) \\
I &= \frac{1}{16} \sum_i \sum_j Tr \left[A^\mu \Gamma_i B_\mu \Gamma_j \right]_{\alpha\alpha} \left[\bar{u}(p_3) \Gamma_i u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \Gamma_j u(p_2) \right]
\end{aligned}$$

En este caso tenemos que evaluar los 16 términos siguientes.

1. Para $i = 1 \rightarrow \Gamma_1 = \mathbb{1}$

a) $j = 1 \rightarrow \Gamma_1 = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\
I_{11} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\
I_{11} &= 0 \quad (C-8)
\end{aligned}$$

Donde utilizamos la relación de anticomutación $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ en el segundo paso y como $(1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5) = 0$, I_{11} es igual a cero.

b) $j = 2 \rightarrow \Gamma_2 = \gamma^\mu$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2) \right] \\
I_{12} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2) \right] \\
I_{12} &= 0 \quad (C-9)
\end{aligned}$$

c) $j = 3 \rightarrow \Gamma_3 = \sigma^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
I_{13} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \right] \left[\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \sigma^{\nu\rho} u(p_2) \right] \\
I_{13} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu \sigma^{\nu\rho} \right] \left[\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \sigma^{\nu\rho} u(p_2) \right] \\
I_{13} &= 0 \quad (C-10)
\end{aligned}$$

$$d) j = 4 \rightarrow \Gamma_4 = i\gamma^5 \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned} I_{14} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\mu \right] [\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\mu u(p_2)] \\ I_{14} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu i\gamma^5 \gamma^\mu \right] [\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\mu u(p_2)] \\ I_{14} &= 0 \end{aligned} \quad (C-11)$$

$$e) j = 5 \rightarrow \Gamma_5 = i\gamma^5$$

$$\begin{aligned} I_{15} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 u(p_2)] \\ I_{15} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \mathbb{1} \gamma_\mu i\gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \mathbb{1} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 u(p_2)] \\ I_{15} &= 0 \end{aligned} \quad (C-12)$$

2. Para $i = 2 \rightarrow \Gamma_2 = \gamma^\mu$

$$a) j = 1 \rightarrow \Gamma_1 = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \\ I_{21} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \\ I_{21} &= 2Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \\ I_{21} &= 2Tr \left[\gamma^\mu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \end{aligned} \quad (C-13)$$

donde usamos la identidad $Tr(AB) = Tr(BA)$ en el último paso. Además $Tr(\gamma_\mu \gamma^\mu = 4)$, por lo tanto I_{21} puede ser escrita como;

$$\begin{aligned} I_{21} &= 8Tr \left[(1 - \gamma^5) \gamma^\nu \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \\ I_{21} &= 8 \left[(Tr(\gamma^\nu) - Tr(\gamma^5 \gamma^\nu)) \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \\ I_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (C-14)$$

Esto por que la multiplicación de un número impar de matrices γ es cero.

$$b) j = 2 \rightarrow \Gamma_2 = \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ &= 2Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ &= 2Tr \left[(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \end{aligned} \quad (C-15)$$

Ya que $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$, podemos escribir a I_{22} como;

$$\begin{aligned} I_{22} &= 2Tr \left[\left(1 + \gamma^5\right) \left(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu\right) \gamma_\mu \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{22} &= \left(4g^{\mu\nu} Tr \left[\left(1 + \gamma^5\right) \gamma_\mu \gamma^\rho \right] - 2Tr \left[\left(1 + \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\rho \right] \right) \\ &\quad \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \end{aligned} \quad (C-16)$$

Usando $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{1}$ en la ecuación (C-16), I_{22} se convierte en,

$$\begin{aligned} I_{22} &= \left(4g^{\mu\nu} Tr [\gamma_\mu \gamma^\rho] + 4g^{\mu\nu} Tr [\gamma^5 \gamma_\mu \gamma^\rho] - 8Tr \left[\left(1 + \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma^\rho \right] \right) \\ &\quad \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{22} &= \left(4Tr [\gamma^\nu \gamma^\rho] + 4Tr [\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\rho] - 8Tr \left[\left(1 + \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma^\rho \right] \right) \\ &\quad \times [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \end{aligned} \quad (C-17)$$

Finalmente, usando $Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0$ y simplificando términos, podemos encontrar a I_{22} como;

$$\begin{aligned} I_{22} &= \left(4Tr [\gamma^\nu \gamma^\rho] - 8Tr \left[\left(1 + \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma^\rho \right] \right) [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{22} &= \left(4Tr [\gamma^\nu \gamma^\rho] - 8Tr [\gamma^\nu \gamma^\rho] - 8Tr [\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\rho] \right) [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{22} &= -4Tr [\gamma^\nu \gamma^\rho] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{22} &= -16g^{\nu\rho} [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \end{aligned} \quad (C-18)$$

c) $j = 3 \rightarrow \Gamma_3 = \sigma^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} I_{23} &= Tr \left[\gamma^\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma_\mu \left(1 - \gamma^5\right) \sigma^{\lambda\rho} \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \sigma^{\lambda\rho} u(p_2)] \\ I_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (C-19)$$

lo cual se debe al hecho de que la traza de las matrices de números impares es igual a cero.

d) $j = 4 \rightarrow \Gamma_4 = i\gamma^5 \gamma^\rho$

$$\begin{aligned} I_{24} &= Tr \left[\gamma^\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma_\mu \left(1 - \gamma^5\right) i\gamma^5 \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{24} &= -Tr \left[\gamma^\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma_\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^5 \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{24} &= Tr \left[\gamma^\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma_\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^5 \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)] \end{aligned} \quad (C-20)$$

donde en el último paso se usa $(1 - \gamma^5)\gamma^5 = (-1.\gamma^5)$. Ahora es fácil ver que la parte traza de la Ecuación C-20 es la misma que la Ecuación (C-15). Por lo tanto, usando el resultado de la Ecuación (C-18) obtenemos;

$$\begin{aligned} I_{24} &= Tr \left[\gamma^\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^\nu \gamma_\mu \left(1 - \gamma^5\right) \gamma^5 \gamma^\rho \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{24} &= -16g^{\nu\rho} [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)] \end{aligned} \quad (C-21)$$

$$e) j = 5 \rightarrow \Gamma_5 = i\gamma^5$$

$$\begin{aligned} I_{25} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)] \\ I_{25} &= 0 \end{aligned} \quad (C-22)$$

lo que nuevamente se debe a que la traza de matrices γ de números impares es igual a cero.

$$3. \text{ Para } i = 3 \rightarrow \Gamma_3 = \sigma^{\mu\nu}$$

$$a) j = 1 \rightarrow \Gamma_1 = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} I_{31} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \\ I_{31} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu \mathbb{1} \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2)] \\ I_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (C-23)$$

donde hemos usado $(1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5) = 0$.

$$b) j = 2 \rightarrow \Gamma_2 = \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned} I_{32} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\lambda \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\lambda u(p_2)] \\ I_{32} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu \gamma^\lambda \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\lambda u(p_2)] \\ I_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (C-24)$$

$$c) j = 3 \rightarrow \Gamma_3 = \sigma^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} I_{33} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\alpha\beta} \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \sigma^{\alpha\beta} u(p_2)] \\ I_{33} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu \sigma^{\alpha\beta} \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \sigma^{\alpha\beta} u(p_2)] \\ I_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (C-25)$$

$$d) j = 4 \rightarrow \Gamma_4 = i\gamma^5 \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned} I_{34} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\lambda \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\lambda u(p_2)] \\ I_{34} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu i\gamma^5 \gamma^\lambda \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\lambda u(p_2)] \\ I_{34} &= 0 \end{aligned} \quad (C-26)$$

$$e) j = 5 \rightarrow \Gamma_5 = \gamma^5$$

$$\begin{aligned} I_{35} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 u(p_2)] \\ I_{35} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \sigma^{\nu\rho} \gamma_\mu \gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \sigma^{\nu\rho} u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 u(p_2)] \\ I_{35} &= 0 \end{aligned} \quad (C-27)$$

4. para $i = 4 \rightarrow \Gamma_4 = i\gamma^5\gamma^\mu$

a) $j = 1 \rightarrow \Gamma_1 = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned}
I_{41} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\
I_{41} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\
I_{41} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\
I_{41} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\
I_{41} &= -2Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\
I_{41} &= 0
\end{aligned} \tag{C-28}$$

Esto se debe a que la traza de las matrices γ de números impares es igual a cero. Además, en el tercer paso observe que usamos $(1 - \gamma^5) \gamma^5 = -(1 - \gamma^5)$.

b) $j = 2 \rightarrow \Gamma_2 = \gamma^\mu$

$$\begin{aligned}
I_{42} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2) \right] \\
I_{42} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2) \right] \\
I_{42} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2) \right]
\end{aligned} \tag{C-29}$$

La ecuación C-29 es igual a la ecuación C-15. Por lo tanto;

$$I_{42} = -16g^{\nu\rho} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2) \right] \tag{C-30}$$

c) $j = 3 \rightarrow \Gamma_3 = \sigma^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
I_{43} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\lambda\rho} \right] \left[\bar{u}(p_3) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \sigma^{\lambda\rho} u(p_2) \right] \\
I_{43} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\lambda\rho} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \sigma^{\lambda\rho} u(p_2) \right] \\
I_{43} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\lambda\rho} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \sigma^{\lambda\rho} u(p_2) \right] \\
I_{43} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \sigma^{\lambda\rho} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \sigma^{\lambda\rho} u(p_2) \right] \\
I_{43} &= -2Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \sigma^{\lambda\rho} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \sigma^{\lambda\rho} u(p_2) \right] \\
I_{43} &= 0
\end{aligned} \tag{C-31}$$

$$d) j = 4 \rightarrow \Gamma_4 = i\gamma^5 \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned} I_{44} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\rho u(p_2) \right] \\ I_{44} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2) \right] \\ I_{44} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\rho \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2) \right] \end{aligned} \quad (C-32)$$

la ecuación (C-32) es similar a la Ecuación (C-15) por lo que podemos obtener;

$$I_{44} = -16g^{\nu\rho} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2) \right] \quad (C-33)$$

$$e) j = 5 \rightarrow \Gamma_5 = \gamma^5$$

$$\begin{aligned} I_{45} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \right] \left[\bar{u}(p_3) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 u(p_2) \right] \\ I_{45} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 u(p_2) \right] \\ I_{45} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 u(p_2) \right] \\ I_{45} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 u(p_2) \right] \\ I_{45} &= -2Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \gamma_\mu \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^5 u(p_2) \right] \\ I_{45} &= 0 \end{aligned} \quad (C-34)$$

5. para $i = 5 \rightarrow \Gamma_5 = \gamma^5$

$$a) j = 1 \rightarrow \Gamma_1 = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} I_{51} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\ I_{51} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\ I_{51} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \mathbb{1} \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \mathbb{1} u(p_2) \right] \\ I_{51} &= 0 \end{aligned} \quad (C-35)$$

$$b) j = 2 \rightarrow \Gamma_2 = \gamma^\nu$$

$$\begin{aligned} I_{52} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \right] \\ I_{52} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \right] \\ I_{52} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \gamma^\nu \right] \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \right] \\ I_{52} &= 0 \end{aligned} \quad (C-36)$$

$$c) j = 3 \rightarrow \Gamma_3 = \sigma^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} I_{53} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\mu\nu} \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \sigma^{\mu\nu} u(p_2)] \\ I_{53} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sigma^{\mu\nu} \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \sigma^{\mu\nu} u(p_2)] \\ I_{53} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \sigma^{\mu\nu} \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \sigma^{\mu\nu} u(p_2)] \\ I_{53} &= 0 \end{aligned} \tag{C-37}$$

$$d) j = 4 \rightarrow \Gamma_4 = i\gamma^5 \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned} I_{54} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\nu \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_2)] \\ I_{54} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) i\gamma^5 \gamma^\nu \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_2)] \\ I_{54} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \gamma_\mu i\gamma^5 \gamma^\nu \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_2)] \\ I_{54} &= 0 \end{aligned} \tag{C-38}$$

$$e) j = 5 \rightarrow \Gamma_5 = \gamma^5$$

$$\begin{aligned} I_{55} &= Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_2)] \\ I_{55} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_2)] \\ I_{55} &= -Tr \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \gamma^5 \right] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) i\gamma^5 \gamma^\nu u(p_2)] \\ I_{55} &= 0 \end{aligned} \tag{C-39}$$

como resultado, obtuvimos que los únicos términos que no desaparecen son I_{22} ; I_{24} ; I_{42} ; I_{44} . podemos escribir (C-7) como:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16} (I_{22} + I_{24} + I_{42} + I_{44}) \\ I_{ij} &= \frac{1}{16} (-16g^{\nu\rho} [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ &\quad - g^{\nu\rho} [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)] \\ &\quad - g^{\nu\rho} [\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\rho u(p_2)] \\ &\quad - g^{\nu\rho} [\bar{u}(p_3) \gamma^5 \gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4) \gamma^5 \gamma^\rho u(p_2)]) \end{aligned} \tag{C-40}$$

Una vez que simplificamos la Ecuación (C-40) obtenemos:

$$\begin{aligned}
I &= -([\bar{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)] [(p_4)\gamma_\nu u(p_2)]) \\
&+ [\bar{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4)\gamma^5\gamma_\nu u(p_2)] \\
&+ [\bar{u}(p_3)\gamma^5\gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)] \\
&+ [\bar{u}(p_3)\gamma^5\gamma^\nu u(p_1)] [\bar{u}(p_4)\gamma^5\gamma_\nu u(p_2)]
\end{aligned} \tag{C-41}$$

factorizando:

$$\begin{aligned}
I &= -[\bar{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)] \left[(\bar{u}(p_4)\gamma^5\gamma_\nu u(p_2)) + (\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)) \right] \\
&- [\bar{u}(p_3)\gamma^5\gamma^\nu u(p_1)] \left[(\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)) + (\bar{u}(p_4)\gamma^5\gamma_\nu u(p_2)) \right] \\
I &= -[\bar{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)] \left[(\bar{u}(p_4)(1+\gamma^5)\gamma_\nu u(p_2)) \right] \\
&- [\bar{u}(p_3)\gamma^5\gamma^\nu u(p_1)] \left[(\bar{u}(p_4)(1+\gamma^5)\gamma_\nu u(p_2)) \right] \\
I &= -\left[(\bar{u}(p_3)(1+\gamma^5)\gamma^\nu u(p_1)) \right] \left[(\bar{u}(p_4)(1+\gamma^5)\gamma_\nu u(p_2)) \right] \\
I &= -\left[\bar{u}(p_3)(1+\gamma^5)\gamma^\nu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4)(1+\gamma^5)\gamma_\nu u(p_2) \right]
\end{aligned} \tag{C-42}$$

reorganizando la ecuación (C-42), tenemos:

$$I = -\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu (1-\gamma^5)u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu (1-\gamma^5)u(p_2) \right] \tag{C-43}$$

Finalmente, se obtiene la siguiente

$$\begin{aligned}
&\left[\bar{u}(p_4)\gamma^\mu (1-\gamma^5)u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu (1-\gamma^5)u(p_2) \right] = \dots \\
&\dots = -\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu (1-\gamma^5)u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu (1-\gamma^5)u(p_2) \right]
\end{aligned} \tag{C-44}$$

D. Apéndice: Matrices Gamma de Dirac

Corresponden a matrices 4×4 , construidas a partir de las matrices de Pauli y de la matriz identidad

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_i = \beta \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D-1})$$

con

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D-2})$$

Sus principales propiedades son:

$$(\gamma^0)^2 = 1; \quad (\gamma^i)^2 = -1; \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0; \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (\text{D-3})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\nu\mu} \quad (\text{D-4})$$

donde $g^{\mu\nu}$, es el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D-5})$$

Por medio de las matrices γ , se define

$$\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D-6})$$

las matrices γ^5 , tiene las siguientes propiedades:

$$(\gamma^5)^2 = 1; \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5; \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0; \quad [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \quad (\text{D-7})$$

Los conjugados herméticos de estas matrices están dados por:

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger \quad (\text{D-8})$$

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -(\gamma^5)^\dagger \quad (\text{D-9})$$

$$\gamma^0 (\gamma^\mu \gamma^5) \gamma^0 = (\gamma^5 \gamma^\mu)^\dagger \quad (\text{D-10})$$

$$\gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 = (\sigma^{\mu\nu})^\dagger \quad (\text{D-11})$$

Las trazas de estas matrices están dadas por:

$$Tr1 = 4 \quad (D-12)$$

$$Tr\{\gamma^\nu\} = 0 \quad (D-13)$$

$$Tr\{\gamma^5\} = 0 \quad (D-14)$$

$$Tr\{\gamma^5\gamma^\nu\} = 0 \quad (D-15)$$

$$Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu} \quad (D-16)$$

$$Tr\{\sigma^{\mu\nu}\} = 0 \quad (D-17)$$

$$Tr\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 0 \quad (D-18)$$

$$Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \quad (D-19)$$

las identidades de contracción de las matrices están dados por:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \quad (D-20)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (D-21)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4\sigma^{\nu\rho} \quad (D-22)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \quad (D-23)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\theta\gamma_\mu = 2(\gamma^\theta\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\theta) \quad (D-24)$$

$$\gamma^\mu\sigma^{\nu\rho}\gamma_\mu = 0 \quad (D-25)$$

Teniendo en cuenta la notacion $\not{a} = \gamma_\nu a^\nu$, otras relaciones utiles relacionadas con las trazas son

$$Tr(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \quad (D-26)$$

$$Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \quad (D-27)$$

$$Tr(\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}a^\mu b^\nu c^\lambda d^\sigma \quad (D-28)$$

$$Tr(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2) = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu}] \quad (D-29)$$

$$Tr\left[\gamma^\nu(1 - \gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1 - \gamma^5)\not{p}_2\right] = 2Tr(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2) + 8\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta} \quad (D-30)$$

La traza de un numero impar de matrices γ_ν es cero. $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = +1(-1)$, para permutaciones pares(impares) de $\mu\nu\lambda\sigma$; y cero si se repiten índices. otro resultado importante es

$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\nu = -2\not{a} \quad (D-31)$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\nu = 4a \cdot b \quad (D-32)$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\nu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \quad (D-33)$$

E. Apéndice: Demostración de la propiedad del símbolo de levi-civita

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = - \begin{vmatrix} \delta_{\mu}^{\mu} & \delta_{\mu}^{\nu} & \delta_{\mu}^{\alpha} & \delta_{\mu}^{\beta} \\ \delta_{\nu}^{\mu} & \delta_{\nu}^{\nu} & \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\beta} \\ \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\nu} & \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\sigma}^{\beta} \\ \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\beta} \end{vmatrix} \quad (\text{E-1})$$

$$= \underbrace{\delta_{\mu}^{\mu} \begin{vmatrix} \delta_{\nu}^{\nu} & \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\beta} \\ \delta_{\sigma}^{\nu} & \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\sigma}^{\beta} \\ \delta_{\rho}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\beta} \end{vmatrix}}_1 - \underbrace{\delta_{\mu}^{\nu} \begin{vmatrix} \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\sigma}^{\beta} \\ \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\beta} \end{vmatrix}}_2 + \underbrace{\delta_{\mu}^{\alpha} \begin{vmatrix} \delta_{\nu}^{\mu} & \delta_{\nu}^{\nu} & \delta_{\nu}^{\beta} \\ \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\nu} & \delta_{\sigma}^{\beta} \\ \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\beta} \end{vmatrix}}_3 - \underbrace{\delta_{\mu}^{\beta} \begin{vmatrix} \delta_{\nu}^{\mu} & \delta_{\nu}^{\nu} & \delta_{\nu}^{\alpha} \\ \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\nu} & \delta_{\sigma}^{\alpha} \\ \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\alpha} \end{vmatrix}}_4 \quad (\text{E-2})$$

$$\begin{aligned} 1 &= (\delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\alpha}) - \delta_{\nu}^{\alpha}(\delta_{\sigma}^{\nu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\nu}) + \delta_{\nu}^{\beta}(\delta_{\sigma}^{\nu}\delta_{\rho}^{\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\nu}) \\ &= (\delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\alpha}) - (\delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\alpha}) + (\delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\beta}) \\ &= (\delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\beta}) \end{aligned} \quad (\text{E-3})$$

$$\begin{aligned} 2 &= \delta_{\mu}^{\nu} \left\{ \delta_{\sigma}^{\mu} (\delta_{\rho}^{\alpha}\delta_{\sigma}^{\beta} - \delta_{\rho}^{\beta}\delta_{\sigma}^{\alpha}) - \delta_{\nu}^{\alpha} (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\mu}) + \delta_{\nu}^{\beta} (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\mu}) \right\} \\ &= \delta_{\mu}^{\nu} \left\{ \delta_{\sigma}^{\mu} (\delta_{\rho}^{\alpha}\delta_{\sigma}^{\beta} - \delta_{\rho}^{\beta}\delta_{\sigma}^{\alpha}) - \delta_{\nu}^{\alpha} (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\mu}) + \delta_{\nu}^{\beta} (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\mu}) \right\} \\ &= \delta_{\mu}^{\nu} \left\{ \delta_{\sigma}^{\mu} (\delta_{\rho}^{\beta}\delta_{\sigma}^{\alpha} - \delta_{\rho}^{\alpha}\delta_{\sigma}^{\beta}) \right\} \\ &= (\delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\beta}) \end{aligned} \quad (\text{E-4})$$

$$\begin{aligned} 3 &= \delta_{\mu}^{\alpha} \left\{ \delta_{\nu}^{\mu} (\delta_{\sigma}^{\nu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\nu}) - (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\mu}) + \delta_{\nu}^{\beta} (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\nu}\delta_{\rho}^{\mu}) \right\} \\ &= \delta_{\mu}^{\alpha} \left\{ (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\mu}) - (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\mu}) + (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\mu}) \right\} \\ &= \delta_{\mu}^{\alpha} \left\{ (\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\mu}) \right\} \\ &= (\delta_{\sigma}^{\alpha}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta}\delta_{\rho}^{\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{E-5})$$

$$\begin{aligned}
4 &= \delta_\mu^\beta \left\{ \delta_\nu^\mu \left(\delta_\sigma^\nu \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\nu \right) - \left(\delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\mu \right) + \delta_\nu^\alpha \left(\delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\sigma^\nu \delta_\rho^\mu \right) \right\} \\
&= \delta_\mu^\beta \left\{ \left(\delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\mu \right) - \left(\delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\mu \right) + \left(\delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\mu \right) \right\} \\
&= \delta_\mu^\beta \left\{ \left(\delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\mu \right) \right\} \\
&= \left(\delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right)
\end{aligned} \tag{E-6}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} &= - \left\{ \left(\delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) - \left(\delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) + \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha \right) - \left(\delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) \right\} \\
&= - \left\{ \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha \right) - \left(\delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) \right\} \\
&= - \left\{ \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha \right) + \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha \right) \right\} \\
&= -2 \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha \right)
\end{aligned} \tag{E-7}$$

F. Apéndice: Productos Escalares en el Marco de Reposo del Electrón.

Dado que $|\mathcal{M}|^2$ contiene términos como $p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_4, p_1 \cdot p_4, p_2 \cdot p_3$ y $p_1 \cdot p_3$, calculamos estos términos en términos de la energía de retroceso del electrón, que es la cantidad observada en los experimentos con neutrinos de baja energía.

la dispersión $\nu - e^-$ antes y después de la interacción, se muestra de forma esquemática en la figura (F-1), en el marco de reposo del electrón inicial. En la dispersión elástica, $m_1 = m_3 = m_\nu$ y $m_2 = m_4 = m_e$. Podemos encontrar relaciones entre estos cuadrimomentos utilizando la conservación del momento de la energía, $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Elevando al cuadrado esta relación tenemos:

$$\begin{aligned}
 (p_1 + p_2)^2 &= (p_3 + p_4)^2 \\
 p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) &= p_3^2 + p_4^2 + 2(p_3 \cdot p_4) \\
 m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) &= m_3^2 + m_4^2 + 2(p_3 \cdot p_4) \\
 2(p_1 \cdot p_2) &= 2(p_3 \cdot p_4) \\
 (p_1 \cdot p_2) &= (p_3 \cdot p_4), \tag{F-1}
 \end{aligned}$$

de manera similar podemos relacionar $p_1 \cdot p_4$ con $p_2 \cdot p_3$

$$\begin{aligned}
 (p_1 - p_4)^2 &= (p_3 - p_2)^2 \\
 p_1^2 + p_4^2 - 2(p_1 \cdot p_4) &= p_3^2 + p_2^2 - 2(p_3 \cdot p_2) \\
 m_1^2 + m_4^2 - 2(p_1 \cdot p_4) &= m_3^2 + m_2^2 - 2(p_3 \cdot p_2) \\
 -2(p_1 \cdot p_4) &= -2(p_3 \cdot p_2) \\
 (p_1 \cdot p_4) &= (p_3 \cdot p_2), \tag{F-2}
 \end{aligned}$$

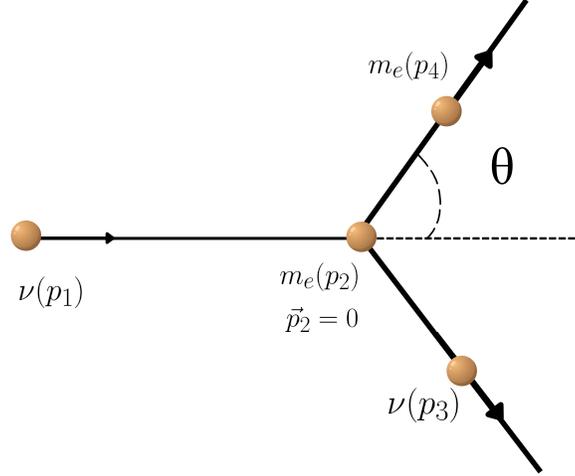


Figura F-1.: La dispersión neutrino-electrón ilustrada esquemáticamente en el marco de reposo del electrón inicial.

para $p_1 \cdot p_2$ obtenemos:

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2$$

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 m_2, \tag{F-3}$$

para $p_1 \cdot p_3$

$$p_2 \cdot p_3 = E_2 E_3 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3$$

$$p_2 \cdot p_3 = E_2 E_3$$

$$p_2 \cdot p_3 = E_2 (E_1 + E_2 - E_4)$$

$$p_2 \cdot p_3 = m_2 (E_1 + m_2 - E_4)$$

$$p_2 \cdot p_3 = m_2 (E_1 + m_4 - E_4)$$

$$p_2 \cdot p_3 = m_2 (E_1 - T), \tag{F-4}$$

de manera similar para $p_2 \cdot p_4$ obtenemos

$$p_2 \cdot p_4 = E_2 E_4 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_4$$

$$p_2 \cdot p_4 = E_2 E_4$$

$$p_2 \cdot p_4 = m_2 E_4$$

$$p_2 \cdot p_4 = m_2 E_4 = m_e E_4, \tag{F-5}$$

para encontrar $p_2 \cdot p_4$ es mejor empezar con la relacion $(p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$ entonces:

$$\begin{aligned}
 (p_1 - p_3)^2 &= (p_4 - p_2)^2 \\
 p_1^2 + p_3^2 - 2(p_1 \cdot p_3) &= p_4^2 + p_2^2 - 2(p_4 \cdot p_2) \\
 m_1^2 + m_3^2 - 2(p_1 \cdot p_3) &= m_4^2 + m_2^2 - 2(p_4 \cdot p_2) \\
 m_v^2 + m_v^2 - 2(p_1 \cdot p_3) &= m_2^2 + m_2^2 - 2(p_4 \cdot p_2) \\
 2m_v^2 - 2(p_1 \cdot p_3) &= 2m_2^2 - 2(p_4 \cdot p_2) \\
 m_v^2 - (p_1 \cdot p_3) &= m_2^2 - (p_4 \cdot p_2) \\
 (p_1 \cdot p_3) &= m_v^2 - m_2^2 + \underbrace{(p_4 \cdot p_2)}_{m_2 E_4} \\
 (p_1 \cdot p_3) &= m_v^2 - m_2^2 + m_2 E_4 \\
 (p_1 \cdot p_3) &= m_v^2 - m_2(m_2 + E_4) \\
 (p_1 \cdot p_3) &= m_v^2 + m_2(E_4 - m_4) \\
 (p_1 \cdot p_3) &= m_v^2 + m_2(T) \\
 (p_1 \cdot p_3) &= m_v^2 + m_e(T), \tag{F-6}
 \end{aligned}$$

asi para la dispersion elastica, llegamos a los siguientes resultados para los terminos incluidos en $|\mathcal{M}|^2$

$$\begin{aligned}
 (p_1 \cdot p_2) \cdot (p_3 \cdot p_4) &= (p_1 \cdot p_2)^2 \\
 (p_1 \cdot p_2) \cdot (p_3 \cdot p_4) &= E_1^2 m_2^2 = E_1^2 m_e^2, \tag{F-7}
 \end{aligned}$$

para el termino $(p_1 \cdot p_4) \cdot (p_2 \cdot p_3)$ usando la ecuación (F-2)

$$\begin{aligned}
 (p_1 \cdot p_4) \cdot (p_2 \cdot p_3) &= (p_2 \cdot p_3)^2 \\
 (p_1 \cdot p_4) \cdot (p_2 \cdot p_3) &= m_2^2 (E_1 - T)^2 \\
 (p_1 \cdot p_4) \cdot (p_2 \cdot p_3) &= m_e^2 (E_1 - T)^2, \tag{F-8}
 \end{aligned}$$

recopilando nuestros hallazgos

$ \begin{aligned} (p_1 \cdot p_3) &= m_v^2 + m_e(T). \\ (p_2 \cdot p_4) &= m_e E_4. \\ (p_1 \cdot p_4) \cdot (p_2 \cdot p_3) &= m_e^2 (E_1 - T)^2. \\ (p_1 \cdot p_2) \cdot (p_3 \cdot p_4) &= E_1^2 m_e^2. \end{aligned} $	$ \tag{F-9} $
--	-----------------

G. Apéndice: Energía de retroceso máxima del Electrón.

La energía de retroceso del electrón alcanza su valor máximo cuando el electro se dispersa hacia adelante. Para encontrar la energía de retroceso máxima en términos de la energía entrante de los neutrinos:

$$\begin{aligned}
 p_1 \cdot p_2 &= p_3 \cdot p_4 \\
 E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 &= E_3 E_4 - \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_4 \\
 E_1 E_2 &= E_3 E_4 - |\vec{p}_3| |\vec{p}_4| \cos(180) \\
 E_1 m_e &= E_3 E_4 + |\vec{p}_3| |\vec{p}_4|, \tag{G-1}
 \end{aligned}$$

en el que usamos el hecho de que m_2 está en reposo, por lo tanto $\vec{p}_2 = 0$ y $E_2 = m_2 = m_e$. Además, el ángulo entre \vec{p}_3 y \vec{p}_4 es de 180 grados para que la energía de retroceso sea máxima. (Recuerde $m_1 = m_3 = m_\nu$ y $m_2 = m_4 = m_e$).

Podemos escribir E_4 en términos de la energía de retroceso del electrón como:

$$E_4 = T + m_e. \tag{G-2}$$

Para escribir E_3 en términos de la energía de retroceso del electrón, comencemos primero con la conservación de la energía como.

$$\begin{aligned}
 E_3 &= E_1 + E_2 - E_4 \\
 E_3 &= E_1 + m_e - (T + m_e) \\
 E_3 &= E_1 - T. \tag{G-3}
 \end{aligned}$$

Una vez que despreciamos la masa del neutrino entonces;

$$|\vec{p}_3| = E_3 = E_1 - T, \tag{G-4}$$

siendo E_1 la energía del neutrino, entonces $E_1 = E_\nu$

$$|\vec{p}_3| = E_3 = E_\nu - T. \tag{G-5}$$

Usando la relación de dispersión podemos relacionar $|\vec{p}_4|$ con la energía de retroceso T de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 E_4^2 - m_e^2 &= |\vec{p}_4|^2 \\
 (E_4 - m_e)(E_4 + m_e) &= |\vec{p}_4|^2 \\
 T(T + m_e + m_e) &= |\vec{p}_4|^2 \\
 T(T + 2m_e) &= |\vec{p}_4|^2,
 \end{aligned} \tag{G-6}$$

entonces, obtenemos:

$$|\vec{p}_4| = \sqrt{T(T + 2m_e)}. \tag{G-7}$$

Una vez que colocamos las Ecuaciones (C.2) a (C.4) y (C.6) en la Ecuación (C.1) obtenemos;

$$\begin{aligned}
 E_V m_e &= E_3 E_4 + |\vec{p}_3| |\vec{p}_4| \\
 E_V m_e &= (E_V - T)(T + m_e) + (E_V - T) \sqrt{T(T + 2m_e)} \\
 E_V m_e &= E_1 T + E_V m_e - T^2 - m_e T + (E_V - T) \sqrt{T(T + 2m_e)} \\
 T^2 + m_e T - E_1 T &= (E_V - T) \sqrt{T(T + 2m_e)} \\
 T^2 + m_e T - E_V T &= (E_V - T) \sqrt{T(T + 2m_e)} \\
 \frac{T(T - E_V) + m_e T}{E_V - T} &= \sqrt{T(T + 2m_e)} \\
 -T + \frac{m_e T}{E_V - T} &= \sqrt{T(T + 2m_e)} \\
 T \left(\frac{m_e}{E_V - T} - 1 \right) &= \sqrt{T(T + 2m_e)},
 \end{aligned} \tag{G-8}$$

una vez que elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación anterior, encontramos:

$$\begin{aligned}
 T^2 \left(\frac{m_e}{E_V - T} - 1 \right)^2 &= T(T + 2m_e) \\
 T \left(\frac{m_e^2}{(E_V - T)^2} - \frac{2m_e}{E_V - T} + 1 \right) &= T + 2m_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m_e^2 T}{(E_\nu - T)^2} - \frac{2m_e T}{E_\nu - T} + T \right) &= T + 2m_e \\
\left(\frac{m_e^2 T}{(E_\nu - T)^2} - \frac{2m_e T}{E_\nu - T} \right) &= 2m_e \\
\left(\frac{m_e T}{(E_\nu - T)^2} - \frac{2T}{E_\nu - T} \right) &= 2 \\
\left(\frac{m_e T}{(E_\nu - T)^2} - \frac{2T(E_\nu - T)}{(E_\nu - T)^2} \right) &= 2 \\
m_e T - 2T(E_\nu - T) &= 2(E_\nu - T)^2 \\
m_e T - 2TE_\nu - 2T^2 &= 2E_\nu^2 + 2T^2 - 4E_\nu T \\
m_e T &= 2E_\nu^2 - 2E_\nu T \\
m_e T + 2E_\nu T &= 2E_\nu^2 \\
T(m_e + 2E_\nu) &= 2E_\nu^2, \tag{G-9}
\end{aligned}$$

por lo tanto, obtenemos la energía de retroceso máxima en términos de la energía del neutrino entrante como:

$$\boxed{T_{max} = \frac{2E_\nu^2}{(m_e + 2E_\nu)}} \tag{G-10}$$

Una vez que resolvemos la ecuación G-9 para E_1 , encontramos la energía mínima del neutrino necesaria para que el electrón tenga la energía de retroceso T como:

$$\begin{aligned}
2E^2 &= TM + 2ET \\
E^2 - ET &= \frac{TM}{2} \\
E^2 - ET - \frac{TM}{2} &= 0, \tag{G-11}
\end{aligned}$$

resolviendo la ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned}
a &= 1 \quad b = -T \quad c = -\frac{MT}{2} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{G-12}
\end{aligned}$$

finalmente la energía mínima del neutrino esta dada por:

$$\boxed{E_{\min} = \frac{T + \sqrt{T^2 + 2MT}}{2}} \tag{G-13}$$

Bibliografía

- [1] Carlo Giunti and Chung W. Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. 2007.
- [2] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1562–1567, 1998.
- [3] Q. R. Ahmad et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 89:011301, 2002.
- [4] AI Derbin et al. Limitations on the magnetic moment and charge radius of the electron-anti-neutrino. *JETP Lett*, 57:796, 1993.
- [5] GS Vidyakin et al. Jetp lett. 55 206 vidyakin gs et al 1992. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 55:212, 1992.
- [6] Z Daraktchieva, J Lamblin, O Link, C Amsler, M Avenier, C Brogini, J Busto, C Cerna, G Gervasio, P Jeanneret, G Jonkmans, D.H Koang, D Lebrun, F Ould-Saada, G Puglierin, A Stutz, A Tadsen, and J-L Vuilleumier. Limits on the neutrino magnetic moment from the mnu experiment. *Physics Letters B*, 564(3):190–198, 2003.
- [7] M. Deniz et al. Constraints on Non-Standard Neutrino Interactions and Unparticle Physics with Neutrino-Electron Scattering at the Kuo-Sheng Nuclear Power Reactor. *Phys. Rev. D*, 82:033004, 2010.
- [8] Kai Zuber. *Neutrino physics*. Taylor & Francis, 2020.
- [9] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. 1987.
- [10] Georges Aad and et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:1–29, 2012.
- [11] Serguei Chatrchyan and et al. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:30–61, 2012.
- [12] Keith A Olive, Kaustubh Agashe, Claude Amsler, Mario Antonelli, Jean-Francois Arguin, David M Asner, H Baer, Henry R Band, RM Barnett, Tullio Basaglia, et al. Review of particle physics. *Chinese physics C*, 38(9):090001, 2014.
- [13] P. A. Zyla and et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.

-
- [14] W Noel Cottingham and Derek A Greenwood. *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge university press, 2007.
- [15] Robert Mann. *An introduction to particle physics and the standard model*. Taylor & Francis, 2010.
- [16] Toshiyuki Morii, Chong-Sa Lim, and Soumyendra N Mukherjee. *The physics of the standard model and beyond*. World Scientific, 2004.
- [17] Gordon Kane. *Modern elementary particle physics: explaining and extending the standard model*. Cambridge University Press, 2017.
- [18] Paul Langacker. *The standard model and beyond*. Taylor & Francis, 2017.
- [19] Alexis Aguilar-Arevalo and Wolfgang Bietenholz. Neutrinos: Mysterious particles with fascinating features, which led to the physics nobel prize 2015. *arXiv preprint arXiv:1601.04747*, 2016.
- [20] Frederick Reines and Clyde L Cowan Jr. Free antineutrino absorption cross section. i. measurement of the free antineutrino absorption cross section by protons. *Physical Review*, 113(1):273, 1959.
- [21] Walter Greiner, Berndt Müller, et al. *Gauge theory of weak interactions*. Springer, 1996.
- [22] Boris Kayser. 13. neutrino mass mixing and flavor change. *Particle Data Group Rev*, 2008.
- [23] Lincoln Wolfenstein. Neutrino oscillations in matter. In *Solar Neutrinos*, pages 294–299. CRC Press, 2018.
- [24] Lincoln Wolfenstein. Neutrino oscillations and stellar collapse. *Physical Review D*, 20(10):2634, 1979.
- [25] José WF Valle. Resonant oscillations of massless neutrinos in matter. *Physics Letters B*, 199(3):432–436, 1987.
- [26] PI Krastev and JN Bahcall. Fcnc solutions to the solar neutrino problem. *arXiv preprint hep-ph/9703267*, 1997.
- [27] Yoshiyuki Fukuda, T Hayakawa, E Ichihara, K Inoue, K Ishihara, Hirokazu Ishino, Y Itow, T Kajita, J Kameda, S Kasuga, et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, 81(8):1562, 1998.
- [28] Maria Concepcion Gonzalez-Garcia, Marcelo M Guzzo, PI Krastev, Hiroshi Nunokawa, OLG Peres, V Pleitez, José Wagner Furtado Valle, and R Zukanovich Funchal. Atmospheric neutrino observations and flavor changing interactions. *Physical Review Letters*, 82(16):3202, 1999.

- [29] Animesh Chatterjee, Poonam Mehta, Debajyoti Choudhury, and Raj Gandhi. Testing non-standard neutrino matter interactions in atmospheric neutrino propagation. *Physical Review D*, 93(9):093017, 2016.
- [30] Jens Erler and Paul Langacker. Electroweak model and constraints on new physics. *arXiv preprint hep-ph/0407097*, 2004.
- [31] William J Marciano and Zohreh Parsa. Neutrino–electron scattering theory. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 29(11):2629, 2003.
- [32] Th A Mueller, D Lhuillier, Muriel Fallot, A Letourneau, S Cormon, M Fechner, Lydie Giot, Th Lasserre, J Martino, G Mention, et al. Improved predictions of reactor antineutrino spectra. *Physical Review C*, 83(5):054615, 2011.
- [33] Zurab Berezhiani, RS Raghavan, and Anna Rossi. Probing non-standard couplings of neutrinos at the borexino detector. *Nuclear Physics B*, 638(1-2):62–80, 2002.
- [34] Sacha Davidson, Carlos Peña Garay, Nuria Rius, and Arcadi Santamaria. Present and future bounds on non-standard neutrino interactions. *Journal of High Energy Physics*, 2003(03):011–011, mar 2003.
- [35] J. Barranco, O. G. Miranda, C. A. Moura, and J. W. F. Valle. Constraining non-standard interactions in $\nu(e)e$ or anti- $\nu(e)e$ scattering. *Phys. Rev. D*, 73:113001, 2006.
- [36] RC Allen, HH Chen, PJ Doe, R Hausammann, WP Lee, XQ Lu, HJ Mahler, ME Potter, KC Wang, TJ Bowles, et al. Study of electron-neutrino—electron elastic scattering at lampf. *Physical Review D*, 47(1):11, 1993.
- [37] LB Auerbach, RL Burman, DO Caldwell, ED Church, JB Donahue, A Fazely, GT Garvey, RM Gunasingha, R Imlay, WC Louis, et al. Measurement of electron-neutrino electron elastic scattering. *Physical Review D*, 63(11):112001, 2001.
- [38] Henry Tsz-King Wong. The texono research program on neutrino and astroparticle physics. *Modern Physics Letters A*, 19(13n16):1207–1214, 2004.
- [39] M Deniz, Shin-Ted Lin, V Singh, J Li, HT Wong, SELÇUK Bilmis, CY Chang, HM Chang, WC Chang, CP Chen, et al. Measurement of ν^-e -electron scattering cross section with a csi (tl) scintillating crystal array at the kuo-sheng nuclear power reactor. *Physical Review D*, 81(7):072001, 2010.
- [40] B. C. Canas, E. A. Garces, O. G. Miranda, M. Tortola, and J. W. F. Valle. The weak mixing angle from low energy neutrino measurements: a global update. *Phys. Lett. B*, 761:450–455, 2016.

-
- [41] VI Kopeikin, LA Mikaelyan, and VV Sinev. Reactor as a source of antineutrinos: Thermal fission energy. *Physics of Atomic Nuclei*, 67(10):1892–1899, 2004.
- [42] HT a Wong, HB Li, ST Lin, FS Lee, V Singh, SC Wu, CY Chang, HM Chang, CP Chen, MH Chou, et al. Search of neutrino magnetic moments with a high-purity germanium detector at the kuo-sheng nuclear power station. *Physical Review D*, 75(1):012001, 2007.
- [43] JM Conrad, MH Shaevitz, I Shimizu, J Spitz, M Toups, and L Winslow. Precision $\bar{\nu}_e$ -electron scattering measurements with isodar to search for new physics. *Physical Review D*, 89(7):072010, 2014.
- [44] Michael Wurm, John F. Beacom, Leonid B. Bezrukov, Daniel Bick, Johannes Blümer, Sandhya Choubey, et al. The next-generation liquid-scintillator neutrino observatory lENA. *Astroparticle Physics*, 35(11):685–732, 2012.
- [45] J. M. Conrad, M. H. Shaevitz, I. Shimizu, J. Spitz, M. Toups, and L. Winslow. Precision $\bar{\nu}_e$ -electron scattering measurements with isodar to search for new physics. *Phys. Rev. D*, 89:072010, Apr 2014.