

*Trabajo de Grado para optar al título de Físico*

# FUNDAMENTACIÓN FÍSICA DEL FENÓMENO EL NIÑO-OSCILACIÓN DEL SUR

*Presentado por:*

Sandra Milena Mendoza Cruz



UNIVERSIDAD DE PAMPLONA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA  
2019

*Trabajo de Grado para optar al título de Físico*

# FUNDAMENTACIÓN FÍSICA DEL FENÓMENO EL NIÑO-OSCILACIÓN DEL SUR

*Presentado por:*

Sandra Milena Mendoza Cruz

*Director del Trabajo*

Francisco Cabrera Zambrano

*Doctor en Ciencias Naturales-Geofísica*



UNIVERSIDAD DE PAMPLONA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA  
2019

*Dedicada a mi madre:  
**Rosita Cruz Hernandez.**  
Quien ha sido  
mi fuente de inspiración y  
el impulso permanente.*

*“Lo que sabemos es una gota de agua;  
lo que ignoramos es el océano”.*  
**Isaac Newton**

---

# Agradecimientos

La vida se encuentra llena de desafíos y uno de ellos es la universidad. Tras verme dentro de ella, me he dado cuenta que más allá de ser un desafío, es un pilar fundamental no solo para mi entendimiento del campo en el que me he visto inmersa, sino para lo que concierne a la vida y mi futuro. Agradecida con esta casa de estudios como lo es la Universidad de Pamplona y en especial al equipo de trabajo que conforma el Departamento de Física y Geología. También, al cuerpo de docentes que con su esmero, entusiasmo y pasión por la ciencia, más allá de un apoyo académico aportaron a mi vida sus experiencias propias y un deleite en el estudio de la física.

Cabe destacar mi más sincero agradecimiento y reconocimiento por su ayuda al PhD. Francisco Cabrera Zambrano, quien desde un principio me brindó la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento, así como también haberme tenido toda la paciencia del mundo, explicarme casi que con plastilina para guiarme durante todo el desarrollo de la tesis. Fue su insistencia en el trabajo que me condujo a interesarme mucho en el tema y dedicarle el tiempo que requiere para poder culminar uno más de los objetivos propuestos en mi paso por la academia.

Por último, pero no menos importante a mis compañeros(as), tanto del programa de física como de las ingenierías, agradecerles no solo por la ayuda brindada, sino por los breves momentos en los que convivimos y compartimos varios cafés. Entre los más destacados se encuentran: Karoll Parada, Carlos Hernández, Matilde Portilla y Rocio Meneses.

Gracias a Dios por todas estas personas.

*Sandra Milena Mendoza Cruz, 2019.*

# Resumen

En este trabajo se presenta una descripción general del fenómeno El Niño Oscilación del Sur (El Niño-Southern Oscillation, ENSO), con base a una acuciosa recopilación bibliográfica, destacándose cada uno de los factores atmosféricos y oceánicos, que contribuyen en el desarrollo de una fase cálida El Niño, o por el contrario una fase fría La Niña. ENSO es uno de los ejemplos del sistema climático, que solo puede ser interpretado a partir del acoplamiento dinámico; entre la atmósfera y el océano. En muchos casos, trae efectos de corta duración en el tiempo y en otros casos, puede ser el inicio de un episodio de El Niño/La Niña. Por medio de la observación directa en la región del océano Pacífico y los modelos numéricos acoplados, ha sido posible el estudio de la naturaleza oscilatoria del fenómeno ENSO. Asimismo, su influencia en la circulación oceánica y atmosférica a escala global. Los modelos a estudiar son el oscilador con retardo y el oscilador recarga-descarga. Un análisis cualitativo y una implementación computacional a las ecuaciones diferenciales, que caracterizan dichos modelos, han sido útiles para examinar la existencia de soluciones periódicas. La identificación de las variables climáticas y las principales retroalimentaciones involucradas, son el soporte para entender el fenómeno ENSO, a partir de los procesos físicos que tienen origen en la franja ecuatorial del océano Pacífico; región de fuerte acoplamiento. Se observó que una perturbación inicial de la temperatura superficial del mar (SST, por sus siglas en inglés), no puede crecer sin límite y es necesario un mecanismo, que interrumpa este aumento. El mecanismo consiste en el ajuste del océano, ya sea por el tiempo de propagación de las ondas ecuatoriales o por la recarga/descarga del contenido de calor, en las aguas superficiales del océano. Aparte de suspender el crecimiento de la SST, los mecanismos actúan para darle un comportamiento oscilatorio a las soluciones de los modelos estudiados.

**Palabras claves:** ENSO, retroalimentación, derivada material, plano beta, modelos conceptuales, anomalía, bombeo de Ekman, transporte de Sverdrup, bifurcación de Hopf, ONI, SOI.

# Contenido

Capítulos	Página
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Ecuaciones de movimiento en la dinámica de fluidos geofísicos</b>	<b>4</b>
2.1 La aproximación del plano beta ecuatorial . . . . .	9
2.2 Ecuaciones de aguas poco profundas . . . . .	10
2.2.1 Modelo de $1\frac{1}{2}$ capa . . . . .	14
<b>3 El sistema climático</b>	<b>16</b>
3.1 Circulación atmosférica . . . . .	17
3.1.1 Celda de Hadley . . . . .	17
3.1.2 Celda de Walker . . . . .	18
3.2 Circulación oceánica . . . . .	20
3.2.1 La capa Ekman . . . . .	21
3.2.2 Transporte de Sverdrup . . . . .	25
3.3 Ondas ecuatoriales . . . . .	27
3.3.1 Ondas Kelvin . . . . .	28
3.3.2 Ondas Rossby . . . . .	30
3.3.3 Las ondas ecuatoriales como uno de los factores clave para explicar ENSO . . . . .	37
<b>4 Modelos físico-matemáticos para simular el fenómeno ENSO</b>	<b>38</b>
4.1 Modelo oscilador con retardo . . . . .	38
4.1.1 Solución numérica del Modelo oscilador con retardo . . . . .	42
4.1.2 Comparación de periodicidades . . . . .	45
4.1.3 Osciladores acoplados con retardo . . . . .	47
4.2 Modelo oscilador recarga-descarga . . . . .	49
4.2.1 Solución numérica del Modelo oscilador recarga-descarga . . . . .	54
4.2.2 Obtención del modelo con retardo a partir del modelo recarga-descarga . . . . .	56
4.3 Episodios fríos y cálidos del ciclo Enso . . . . .	58
<b>5 Conclusiones</b>	<b>66</b>

# Lista de Figuras

2.1	<i>La componente x de la fuerza del gradiente de presión que actúa sobre un elemento fluido. . . . .</i>	5
2.2	<i>La tensión aplicada a una losa elemental de fluido de profundidad <math>\delta z</math>. . . . .</i>	7
2.3	<i>Sistema de coordenada esférica para direcciones y velocidades. Las componentes x, y y z apuntan en la dirección donde varía la longitud <math>\lambda</math>, latitud <math>\varphi</math> y altura z, respectivamente. . . . .</i>	8
2.4	<i>Representación del plano tangente a la superficie de la Tierra. (a) Componentes del vector rotación <math>\vec{\Omega}</math> en el plano. (b) el vector de rotación en la vertical local <math>\vec{\Omega}</math> es paralelo al vector <math>\hat{k}</math>. . . . .</i>	9
2.5	<i>Diagrama esquemático del flujo inestable de un fluido homogéneo sobre un fondo irregular y la notación correspondiente. . . . .</i>	11
2.6	<i>Esquema para el caso de dos fluidos superpuestos de diferente densidad. . . . .</i>	14
3.1	<i>Algunos procesos naturales del sistema climático de la Tierra y la conexión atmósfera-océano. . . . .</i>	16
3.2	<i>Esquema de las principales características de la circulación atmosférica. . . . .</i>	18
3.3	<i>Circulación de Walker. (a) Condiciones normales. (b) Condiciones El Niño. . . . .</i>	19
3.4	<i>Esquema del perfil vertical en el océano desde el punto de vista para la circulación a gran escala. Donde <math>w_{Ek}</math> es el bombeo/ succión de Ekman y <math>S_u</math> el transporte de Sverdrup. . . . .</i>	20
3.5	<i>Estructura de la capa superficial de Ekman. (a) La figura se dibuja para el hemisferio norte (<math>f &gt; 0</math>), la velocidad del agua esta en función de la profundidad. (b) Vista superior, el transporte promedio de agua superficial en la capa Ekman está en ángulo recto con los vientos predominantes. . . . .</i>	21
3.6	<i>Influencia de los vientos alisios en el Pacífico ecuatorial. (a) Dirección del transporte Ekman según el hemisferio. (b) Corriente ascendente producto de la divergencia del transporte Ekman cerca del ecuador impulsado por vientos alisios del este. . . . .</i>	22
3.7	<i>Esquema de las fuerzas en equilibrio. A y B denotan regiones de alta y baja presión a una altura dada. La velocidad horizontal es: <math>\vec{u}_h = \vec{u}_g + \vec{u}_{Ek}</math>, donde <math>\vec{u}_g = (u_g, v_g)</math> indica la velocidad debido al viento geostrófico y <math>\vec{u}_{Ek} = (u_{Ek}, v_{Ek})</math> la velocidad Ekman producto del esfuerzo de fricción del viento sobre la superficie del océano (componente ageostrófica). . . . .</i>	23
3.8	<i>Diagrama esquemático de los vientos zonales medios en el Pacífico (hemisferio Norte) con los transportes Ekman norte-sur. . . . .</i>	26
3.9	<i>Relación de dispersión para las ondas ecuatoriales. . . . .</i>	34
3.10	<i>Las primeras cinco funciones de estructura meridional <math>\bar{v}_n = e^{-y'^2/2} \mathcal{H}_n(y')</math>. . . . .</i>	35
3.11	<i>Corriente en chorro polar en el hemisferio norte. . . . .</i>	36

3.12	<i>Ondas ecuatoriales Kelvin y Rossby en el océano Pacífico ecuatorial.</i> . . . . .	37
4.1	<i>Representación gráfica del comportamiento cíclico de ENSO.</i> . . . . .	39
4.2	<i>Diagrama de fase <math>(\alpha, \delta)</math> del oscilador con retardo obtenido a partir del análisis de estabilidad lineal.</i> . . . . .	43
4.3	<i>Solución <math>T</math> vs <math>t</math> para (a) <math>\sigma_R \approx -0.44</math> y <math>\sigma_I \approx -0.94</math>. La solución es <b>estable</b> para un retardo <math>\delta = 1</math>. (b) <math>\sigma_R \approx 0.06</math> y <math>\sigma_I \approx -0.64</math>. La solución es <b>casi neutra</b> para un retardo <math>\delta = 2</math>. (c) <math>\sigma_R \approx 0.19</math> y <math>\sigma_I \approx -0.35</math>. La solución es <b>inestable</b> para un retardo <math>\delta = 4</math>. (d) un retardo <math>\delta = 3</math> y <math>\delta = 6</math>.</i> . . . . .	44
4.4	<i>Solución <math>T</math> vs <math>t</math> para (a) <math>\alpha = 0.5</math>. (b) <math>\alpha = 0.6</math>. (c) <math>\alpha = 0.7</math>. (d) <math>\alpha = 0.8</math> y <math>\alpha = 0.9</math>.</i> . . . . .	45
4.5	<i>Espectro de Potencia cuando (a) el retardo es <math>\delta = 1</math>. (b) el retardo es <math>\delta = 2</math>. (c) el retardo es <math>\delta = 3</math>. (d) el retardo es <math>\delta = 4</math>.</i> . . . . .	46
4.6	<i>Solución numérica de la ecuación 4.10, con (a) <math>\delta = 2</math>. (b) <math>\delta = 4</math>.</i> . . . . .	47
4.7	<i>Solución numérica de la ecuación 4.10, tomando el acoplamiento entre regiones (a) <math>\gamma = 0.1</math>. (b) <math>\gamma = 0.2</math>.</i> . . . . .	48
4.8	<i>Solución numérica de la ecuación 4.10, para retardos (a) <math>\delta_1 = 2</math> y <math>\delta_2 = 1</math>. (b) <math>\delta_1 = 3</math> y <math>\delta_2 = 2</math>.</i> . . . . .	48
4.9	<i>Bosquejo de las diferentes etapas del modelo oscilador recarga-descarga.</i> . . . .	49
4.10	<i>Valores propios en función del coeficiente de acoplamiento relativo <math>\mu</math>.</i> . . . . .	54
4.11	<i>(a) Solución numérica <math>H_W</math> en metros, línea discontinua color azul y <math>T_E</math> en <math>^{\circ}\text{C}</math>, línea continua color verde. (b) Espectro de frecuencias para <math>T_E</math>. (c) Trayectoria de la solución en el plano fase <math>(H_W, T_E)</math>. (d) Anomalía de la profundidad media de la termoclina.</i> . . . . .	55
4.12	<i>Solución numérica de 4.25 cuando <math>\mu = \mu_c = 2/3</math>. El retraso tiene un valor de <math>\delta = 2.89</math> meses.</i> . . . . .	56
4.13	<i>Solución numérica de 4.25 para <math>\delta = 3</math> y (a) <math>\mu = 0.4</math>. (b) <math>\mu = 0.7</math>.</i> . . . . .	57
4.14	<i>El Pacífico Tropical, incluyendo la definición de las cuatro regiones de El Niño.</i> . . . . .	58
4.15	<i>Índice SST Niño 3.4. Los años de color negro: evento fuerte El Niño, rojo: evento muy fuerte El Niño y azul: evento fuerte La Niña.</i> . . . . .	60
4.16	<i>El ONI para El Niño y La Niña en función de las estaciones.</i> . . . . .	62
4.17	<i>(a) Espectro de potencia para FMA. (b) Espectro de potencia para MJJ. (c) Espectro de potencia para JJA. (d) La anomalía de SST en la serie temporal, para FMA, MJJ y JJA.</i> . . . . .	64
4.18	<i>Serie temporal desde 1950 hasta 2018 de la SST en las regiones Niño 1+2, 3 y 4. Además la variación del Índice Oscilación Sur.</i> . . . . .	65

# Lista de Tablas

2.1	<i>Valores del parámetro de Coriolis y su gradiente meridional, tabulado en función de la latitud</i> [13]. . . . .	10
4.1	<i>Datos del ONI para la década de 1950.</i> . . . . .	59
4.2	<i>Datos del ONI para la década de 1960.</i> . . . . .	60
4.3	<i>Datos del ONI para la década de 1970.</i> . . . . .	60
4.4	<i>Datos del ONI para la década de 1980.</i> . . . . .	61
4.5	<i>Datos del ONI para la década de 1990.</i> . . . . .	61
4.6	<i>Datos del ONI para la década 2000.</i> . . . . .	62
4.7	<i>Datos del ONI desde 2010 hasta 2018.</i> . . . . .	62
4.8	<i>Clasificación de un evento extremo en el ENSO.</i> . . . . .	63

# 1

## Introducción

El Niño-Oscilación del Sur es un fenómeno climático natural y es el resultado de la interacción entre el océano Pacífico Tropical y la atmósfera que lo rodea. Exactamente, en la franja ecuatorial del océano Pacífico, donde se presentan los diferentes procesos dinámicos y termodinámicos. Siendo este lugar, la región del fuerte acoplamiento entre el océano y la atmósfera. En un principio, “El Niño” hacía referencia a una eventual corriente oceánica cálida, sobre las aguas frías y ricas en nutrientes, que sostienen la cadena alimenticia en la costa oeste de América del Sur. El concepto por parte de los peruanos (particularmente los pescadores de la zona de Paita y Pucallpa) frente al fenómeno, surgió ya que este acontecimiento se hacía más visible después de la época navideña, haciendo referencia al nacimiento del Niño Jesús<sup>1</sup>. Esta anomalía en la SST es lo que comúnmente corresponde al aspecto oceánico de ENSO. La “Oscilación del Sur” es la variación de la presión atmosférica entre el Pacífico oriental-occidental. El meteorólogo británico Gilbert Walker fue quien la descubrió y hace parte de la componente atmosférica de ENSO[17]. Una medida del gradiente de presión atmosférica localizado entre Tahiti, en el Pacífico central y Darwin, en Australia; es el Índice Oscilación Sur (SOI, por sus siglas en inglés). Esta diferencia horizontal de presión, impulsa los llamados vientos alisios, que soplan desde el este a lo largo del ecuador en condiciones normales.

La contraparte de El Niño, se conoce como La Niña, donde la SST es más fría de lo común en la parte oriental del Pacífico Tropical. Los vientos alisios se intensifican y la termoclina presenta una pendiente más pronunciada de lo normal. La termoclina como una variable de ENSO, es una de las capas del océano y de rápida transición que divide las aguas cálidas en la parte superior de las aguas frías y profundas. Hoy en día, se habla de El Niño y La Niña como las fases extremas de ENSO, ante un evento cálido y frío, respectivamente. De este modo, la componente oceánica del fenómeno, se caracteriza por la aparición de fuertes anomalías positivas (durante El Niño) o negativas (durante La Niña) en la SST del océano Pacífico.

Los vientos alisios y la presión atmosférica en el Pacífico ecuatorial tienden a covariar con la SST. Los vientos fluyen desde una zona de alta presión hasta una de menor presión. Estos son los que determinan el fortalecimiento/debilitamiento de la celda de Walker; que es un bucle de circulación atmosférica en el plano  $x - z$ . Normalmente, en el occidente del Pacífico ecuatorial la SST es cálida y, por ende, el aire cálido sube, presentándose mayor humedad y bajas presiones; en consecuencia, se presentan pre-

---

<sup>1</sup>En 1891, Luis Carranza fue el primero quien realizó la primera descripción de un evento El Niño, en un artículo científico, refiriéndose a los sucesos de ese mismo año.

cipitaciones. Con respecto al océano Pacífico oriental, la SST es fría, la presión es alta y, por lo tanto, se evidencia un clima seco. En cuanto al océano, la profundidad de termoclina en el oeste es mayor que en la parte oriental. Esta toma una forma inclinada, es decir, la termoclina en el este del Pacífico ecuatorial tiende a estar muy cerca de la superficie. Por otro lado, a lo largo de los bordes orientales del océano Pacífico, por ejemplo, las costas de Perú y Chile se lleva a cabo un fenómeno oceanográfico que se conoce como surgencia costera, la cual consiste en el ascenso de agua más fría y densa de una superficie inferior; desde profundidades generalmente menores de 100-200 metros a la superficie superior en condiciones normales. En el proceso, el agua más caliente que está en la superficie, se mueve al fondo y es reemplazada por las aguas frías y ricas en nutrientes.

Durante un evento de El Niño, la anomalía cálida de la SST en el oriente trae a su vez una baja presión en dicho lugar y, por lo tanto, el SOI es negativo. Por su parte, los vientos alisios ecuatoriales del Pacífico, se vuelven mucho más débiles e incluso en algunas ocasiones tienden a invertir su dirección. Al igual que los vientos alisios, la celda de Walker se debilita, de modo que tienden a predominar los vientos del oeste; desplazando las aguas cálidas y a su vez las precipitaciones, hacia el Pacífico oriental. Al haber mayor cantidad de agua en la parte oriental, la termoclina se profundiza y en el occidente asciende unos cuantos metros, en consecuencia, toma una forma casi horizontal. La surgencia costera en el oriente trae agua desde la misma profundidad que en condiciones normales, pero ya no es tan fría, debido a que se encuentra por encima de la termoclina. En la Figura 3.3 se ilustran los procesos para las condiciones normales y las condiciones de El Niño. En un evento de La Niña, se manifiestan características reforzadas de un estado neutro.

Jacob Bjerknes, meteorólogo de origen noruego, formuló la hipótesis en 1969, de que la interacción entre el océano y la atmósfera era esencial para ENSO. Este hecho se ha conocido hasta el día de hoy como la hipótesis de Bjerknes, la cual se basa en una retroalimentación positiva del acoplamiento océano-atmósfera; lleva al fenómeno ENSO a una fase cálida y una vez alcanzado un estado de madurez, se requiere de un mecanismo que detenga el crecimiento de la anomalía en la SST. Un esquema representativo de la retroalimentación de Bjerknes cuando se presenta la fase El Niño, se visualiza en la parte superior de la Figura 4.1, iniciando con la retroalimentación positiva, es decir, una anomalía cálida de la SST. En la parte inferior se encuentra la Fase de La Niña, pero con los signos de las anomalías invertidas y el fortalecimiento de las variables, como en condiciones normales.

La variabilidad climática interanual del fenómeno ENSO, ha sido estudiada por la comunidad científica, por medio de modelos numéricos<sup>2</sup> que incluyen todas las variables relevantes en la atmósfera y el océano. Entre los modelos conceptuales que se conocen actualmente están: el oscilador con retardo, el oscilador recarga-descarga, el oscilador del Pacífico occidental, el oscilador advectivo-reflectivo y un modelo general que unifica los cuatro modelos mencionados anteriormente[25]. Este trabajo está enfocado en el estudio de los modelos oscilador con retardo y oscilador recarga-descarga. La mayoría de los estudios realizados en las ecuaciones diferenciales características

---

<sup>2</sup>Los modelos numéricos son modelos matemáticos, que se corren en computadoras y se basan en las ecuaciones de los fluidos y la termodinámica aplicadas a la atmósfera y/o los océanos.

---

de un modelo en particular, se han centrado en obtener información sobre el balance energético global o el funcionamiento fundamental del fenómeno ENSO en la región del Pacífico Tropical. Aunque, los impactos de lo que sucede en esta región se sienten en otros lugares a nivel global, por medio de las denominadas teleconexiones. Se ha encontrado que dichos modelos establecen una aproximación con lo que realmente sucede, es decir, para parámetros realistas conducen a oscilaciones del fenómeno ENSO en un periodo de 3-7 años[23].

El presente trabajo comprende siete capítulos conformados de la siguiente manera: capítulo 1 parte introductoria, en el capítulo 2 se deducen las ecuaciones de movimiento en la dinámica de los fluidos geofísicos, a partir de una descripción Lagrangiana, las cuales son un sistema de ecuaciones no lineal debido al término advectivo/convectivo. Estas ecuaciones son importantes en el estudio de la dinámica y circulación; tanto en el océano como en la atmósfera, tomando como referencia un plano cartesiano, denominado el plano beta. Cuando se habla de la dinámica del océano, el estudio se orienta a la actividad de las ondas ecuatoriales, haciendo una aproximación de aguas poco profundas en un modelo de  $1\frac{1}{2}$  capa.

En el capítulo 3, se presenta el sistema climático y como se encuentran conectados la atmósfera y el océano. Dentro de la circulación global atmosférica, se encuentra la celda de Hadley, donde se forman los vientos alisios. Este movimiento de aire se da desde los  $30^\circ$  de latitud en dirección al ecuador. En el Pacífico ecuatorial, los vientos alisios hacen parte de la circulación de Walker. Por otro lado, en la circulación oceánica se encuentra el bombeo de Ekman y la relación de Sverdrup. Estos procesos consisten en reponer el agua del Pacífico occidental, que ha sido empujada por los vientos, o por el contrario que exista la convergencia de aguas superficiales cuando se establece una acumulación de agua cálida en dicha zona del océano. También, en este capítulo se describe la dinámica e importancia de las ondas ecuatoriales Kelvin y Rossby. Estas ondas se encuentran tanto en la atmósfera como en el océano y existen cuando el medio de propagación presenta una estratificación estable.

En el capítulo 4, se analiza los modelos conceptuales oscilador con retardo y oscilador recarga-descarga. El primer modelo que se aborda en este trabajo, está fundamentado en una ecuación diferencial ordinaria, no lineal y con un término de retardo. Este modelo combina las retroalimentaciones positivas y negativas, propuestas por Bjerknes. En el segundo modelo, no se tiene en cuenta la dinámica de las ondas ecuatoriales, sino que se enfoca en la anomalía de profundidad de termoclina. Una variación de la misma, es producto del ajuste en el océano, es decir, la recarga de aguas cálidas en el occidente durante un estado neutro, prepara la región acoplada para la ocurrencia de un evento El Niño y es cuando los vientos zonales, descargan el contenido de calor hacia el este del Pacífico ecuatorial. Además, este capítulo incluye los episodios fríos y cálidos del ciclo ENSO, en el cual se analiza la SST en diferentes regiones del Pacífico Tropical desde 1950-2018. Los datos históricos monitoreados en tiempo real a lo largo de estos años, son útiles para dar una descripción cualitativa de las anomalías de la SST y del SOI, para comprender el paso de un evento cálido/frío a la normalidad o a una fase contraria.

Finalmente, en el capítulo 5 se encuentran las conclusiones.

---

# Ecuaciones de movimiento en la dinámica de fluidos geofísicos

Estas ecuaciones determinan como fluye y evoluciona un fluido, ya sea en la atmósfera o en el océano cuando se le aplican fuerzas al calentarse/enfriarse. Considerando una pequeña parcela de fluido (o elemento material), esta satisface la ecuación de conservación de momento, es decir, la ecuación de movimiento basada en la segunda Ley de Newton. Hay dos formas de describir el movimiento de un fluido. En la descripción *Lagrangiana*, las partículas fluidas se siguen a medida que se mueven a través de un campo de flujo<sup>1</sup>. En la descripción *Euleriana*, las características de un campo de flujo se controlan en ubicaciones fijas o regiones estacionarias del espacio. La descripción Lagrangiana es la que habitualmente se utiliza, para plantear las ecuaciones de la mecánica de fluidos[12].

La conservación de momento da lugar a lo que efectivamente es la ley de fuerza de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a} = d\vec{q}/dt$ . El cambio de movimiento de una masa fluida, cambia en el tiempo, debido a la suma de las fuerzas que actúan sobre ella. El cambio en el tiempo se toma siguiendo el movimiento de la parcela fluida y, por lo tanto, está representado por la derivada material:

$$\frac{D(m\vec{v})}{Dt} = \sum \vec{F} \quad (2.1)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza total que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$ ,  $\vec{v}$  es la velocidad y  $D/Dt$  es la derivada material de una propiedad del fluido<sup>2</sup>, por ejemplo temperatura, presión, densidad o salinidad (en este caso un campo de velocidad). Asumiendo que

<sup>1</sup> En el movimiento de un fluido para cada instante, se puede definir en cada punto del espacio con un vector velocidad, que es el de la partícula fluida que pasa por él en ese momento. El conjunto de todos estos vectores constituyen el campo.

<sup>2</sup>La derivada siguiendo al punto material que se mueve con el fluido, es una representación matemática de la siguiente forma:  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ , donde la **velocidad del fluido** se obtiene al derivar el vector posición  $\vec{r}$  con respecto al tiempo, es decir  $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt = dx/dt\hat{i} + dy/dt\hat{j} + dz/dt\hat{k}$   
 $\Rightarrow \vec{v}(t) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ . Por ejemplo, para cualquier propiedad física  $\gamma$  de la parcela del fluido,  $\gamma$  es una función del tiempo y el espacio, de modo que  $\frac{D\gamma}{Dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\gamma$ , corresponde a la tasa de cambio temporal de la cantidad física  $\gamma$ , medida por un observador que se mueve con la parcela de fluido. El primer termino en el lado derecho, lleva por nombre derivada local o euleriana. La parte advectiva (o convectiva)  $\vec{v} \cdot \nabla\gamma$ , es la tasa de cambio de  $\gamma$  que ocurre cuando las partículas fluidas se mueven de un lugar a otro.

la masa es constante, la ecuación 2.1 toma la siguiente forma

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{f}_m \quad (2.2)$$

donde  $\vec{f}_m$  es la fuerza por unidad de masa.

Sobre una parcela de fluido, pueden actuar una gran cantidad de fuerzas para acelerarla o desacelerarla. Las de mayor importancia son: gradiente de presión, fuerza de Coriolis, gravedad y fricción. Debido a que la Tierra es un sistema giratorio, se deben tener en cuenta las fuerzas inerciales, Coriolis y centrífuga. De modo que, la ecuación 2.2, se escribe como

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{g} + \vec{F}_r \quad (2.3)$$

Una breve descripción de las fuerzas implicadas en 2.3 se describe a continuación:

- La *fuerza gradiente de presión* (FGP). Consiste en las variaciones o diferencias de presión en una dirección dada. Pueden ocurrir en el interior o en la frontera de un fluido. Esta por su parte tiene componentes verticales y horizontales, la componente vertical está más o menos equilibrada con la fuerza de gravedad (equilibrio hidrostático) y la componente horizontal esta equilibrada con la fuerza de Coriolis (equilibrio geostrófico). La FGP impulsa el fluido desde regiones de alta a baja presión.

Considerar un elemento de volumen infinitesimal de fluido,  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ , centrado en el punto  $x_0, y_0, z_0$  como se observa en la Figura 2.1

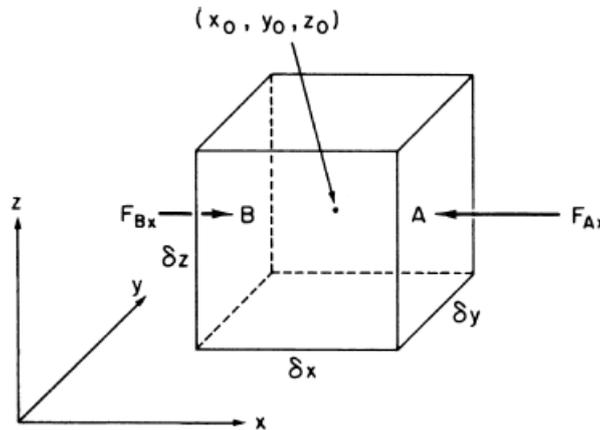


Figura 2.1: La componente  $x$  de la fuerza del gradiente de presión que actúa sobre un elemento fluido.

Si la presión en el centro del elemento de volumen, está designada por  $p_0$ , entonces la presión en la pared etiquetada como A, se puede expresar como

$$p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \text{términos de mayor orden} \quad (2.4)$$

$$F_{Ax} = - \left( p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta x \delta z \quad (2.5)$$

De manera similar la fuerza de presión que actúa sobre el elemento de volumen en la pared B es solo

$$F_{Ax} = + \left( p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \quad (2.6)$$

Por lo tanto, la componente en  $x$  de la fuerza, que actúa sobre el volumen es

$$F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2.7)$$

o de otra manera

$$\frac{F_x}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.8)$$

las componentes  $x$  e  $y$

$$\frac{F_y}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{F_z}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.9)$$

De modo que, FGP total por unidad de masa es

$$\frac{\vec{F}_{GP}}{m} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (2.10)$$

El signo menos, surge porque la fuerza de presión se dirige hacia el interior de un elemento de volumen, infinitesimal de fluido.

- La aceleración debido a las fuerzas inerciales esta dada por:

$$a_I = -2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

donde  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra ( $|\vec{\Omega}| = 2\pi / (86,164s) = 7,292 \times 10^{-5} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ). El primer término en el lado derecho es la *aceleración de Coriolis*,  $2\vec{\Omega} \times \vec{v} = (2\Omega \text{sen}\varphi u, -2\Omega \text{sen}\varphi v, 0)$ . Un objeto que se mueve en la Tierra, a lo largo de un camino norte-sur, sufrirá una desviación aparente hacia la derecha, en el hemisferio norte y hacia la izquierda, en el hemisferio sur. Esto se conoce como el efecto Coriolis. La fuerza de Coriolis no es una fuerza aplicada físicamente, sino una fuerza aparente que actúa sobre los objetos, que se mueven en un marco de referencia acelerado. En este caso, la aceleración no se debe a un cambio de velocidad, sino a un cambio de dirección. Esta fuerza afecta significativamente los movimientos a gran escala, de la atmósfera y el océano en la Tierra.

El segundo término es la *aceleración centrífuga* ( $\Omega^2 \vec{r}$ ), la cual es combinada con la fuerza gravitacional de Newton  $\vec{g}_{grav}$ . Por lo tanto, la gravedad efectiva es  $\vec{g} \equiv \vec{g}_{eff} = \vec{g}_{grav} + \Omega^2 \vec{r}$ .

- $\vec{F}_r$  denota fuerzas similares a la fricción por unidad de masa, debido al arrastre turbulento o al arrastre de superficie en las parcelas de aire, que soplan a lo largo de una superficie. La influencia de la fricción, se concentra mucho en los contornos del fluido, siendo de vital importancia los contactos del mar, con la atmósfera y el fondo marino. La capa límite superior; que está en contacto con el aire, recibe el nombre de capa Ekman, la cual se discutirá en la subsección 3.2.1. Expresando  $\vec{F}_r$  en términos de la tensión o esfuerzo de fricción del viento  $\tau^3$ , se tiene:

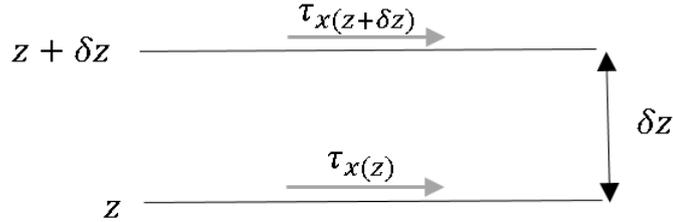


Figura 2.2: La tensión aplicada a una losa elemental de fluido de profundidad  $\delta z$ .

Considere la Figura 2.2 que muestra un estrés variando en profundidad y que actúa sobre un cuerpo del océano. La componente  $x$  de la fuerza, que actúa a la profundidad  $z$ , por unidad de área horizontal en la capa debajo es  $\tau_x(z)$ . La losa de espesor  $\delta z$  en el nivel  $z$ , está sometida a una fuerza por unidad de área horizontal  $\tau_x(z + \delta z)$  en su superficie superior, pero también somete las capas debajo de ella a una fuerza  $\tau_x(z)$ , por unidad de área horizontal. Por consiguiente, la fuerza neta por unidad de área horizontal que siente la capa es  $\tau_x(z + \delta z) - \tau_x(z)$ .

Como la losa tiene un grosor  $\delta z$ , tiene un volumen  $\delta z$  por unidad de área horizontal; y si la losa tiene una densidad uniforme  $\rho$ , tiene una masa  $\rho \delta z$  por unidad de área horizontal. Por lo tanto, la fuerza por unidad de masa,  $F_{rx}$ , sentida por la losa es

$$\begin{aligned} F_{rx} &= \frac{\text{Fuerza por unidad de área}}{\text{masa por unidad de área}} \\ &= \frac{\tau_x(z + \delta z) - \tau_x(z)}{\rho \delta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.11)$$

para un espesor de losa pequeña. Es posible obtener una relación similar para  $F_{ry}$  y, por lo tanto, escribir:

$$\vec{F}_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} \quad (2.12)$$

para el vector de tensión horizontal  $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ .

<sup>3</sup>La tensión del viento es la fricción debida al viento que sopla sobre la superficie del mar. Transfiere el momento horizontal al mar creando corrientes.

Expandiendo la derivada en 2.3 y escribiendo las componentes en un sistema de coordenadas cartesianas, resulta la ecuación de movimiento aproximada, para circulaciones horizontales a gran escala:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (2.13b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.13c)$$

donde  $\vec{v} = (u, v, w)$  representa el campo de velocidad,  $\rho$  la densidad y  $p$  la presión. La fuerza de fricción está expresada en términos de la tensión del viento  $\vec{\tau}$ , como una fuerza aplicada debido a la acción del viento sobre el océano. Además, el término  $f$  se conoce como el *parámetro de Coriolis* igual a  $f = 2\Omega \sin\varphi$ . Debido a la forma "esférica" de la Tierra,  $f$  depende de la latitud  $\varphi$  como se observa en la Figura 2.3. Notar que  $\Omega \sin\varphi$  es la componente vertical de la velocidad de rotación de la Tierra. En las fuerzas de inercia se ha descuidado los movimientos verticales al establecer  $w = 0$ , ya que  $w \ll v$ .

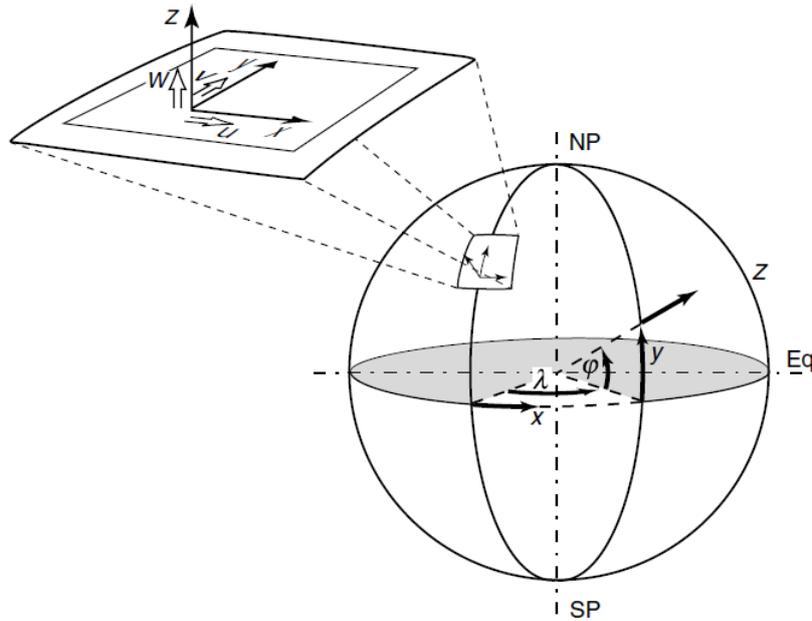


Figura 2.3: Sistema de coordenada esférica para direcciones y velocidades. Las componentes  $x, y$  y  $z$  apuntan en la dirección donde varía la longitud  $\lambda$ , latitud  $\varphi$  y altura  $z$ , respectivamente.

Imagen adaptada de: *Climate Change and Climate Modeling* de Neelin, 2011.

## 2.1 La aproximación del plano beta ecuatorial

Existen ciertos movimientos con una escala menor a la global, que “sienten” la esfericidad de la Tierra y por ello, los cambios en el parámetro de Coriolis. De manera que, es adecuado usar una representación cartesiana localizada de las ecuaciones. Definir un plano tangente a la superficie de la Tierra es adecuado (ver Figura 2.4), a una latitud  $\varphi_0$  y sobre el mismo, demarcar un sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Así que, para pequeños desplazamientos en el plano  $(x, y, z) \approx (R\lambda \cos\varphi_0, R(\varphi - \varphi_0), z)$ , donde  $R$  es el radio de la Tierra. Las componentes de la velocidad  $\vec{v}$ , en el plano tangente son  $u, v$  y  $w$  aproximadamente en el este-oeste, norte-sur y dirección vertical, respectivamente[24].

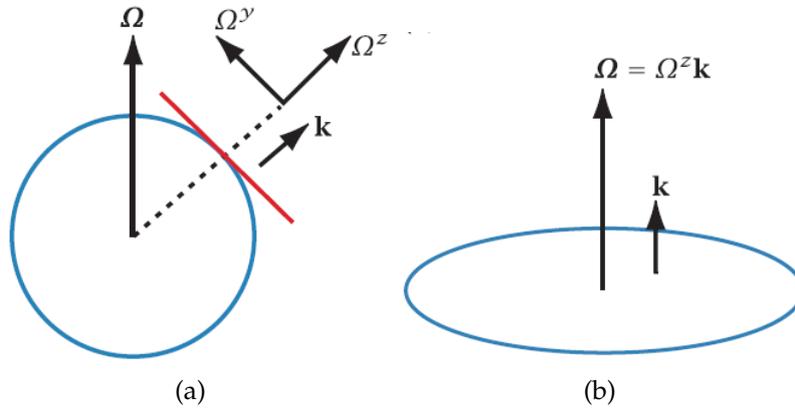


Figura 2.4: Representación del plano tangente a la superficie de la Tierra. (a) Componentes del vector rotación  $\vec{\Omega}$  en el plano. (b) el vector de rotación en la vertical local  $\vec{\Omega}$  es paralelo al vector  $\hat{\mathbf{k}}$ .

Imagen adaptada de: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* de Vallis, 2017.

Una forma simplificada, sería permitir que el parámetro de Coriolis cambie con la latitud, pero de manera lineal. Expandiendo el parámetro de Coriolis alrededor de una latitud  $\varphi_0$ , se obtiene

$$f = 2\Omega \sin\varphi \approx 2\Omega \sin\varphi_0 + 2\Omega(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi_0 \equiv f_0 + \beta y \quad (2.14)$$

donde

$$\beta \equiv \left. \frac{df}{dy} \right|_{\varphi_0} = \left( \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} \right)_{\varphi_0} = \frac{2\Omega}{R} \cos\varphi_0, \quad y = R(\varphi - \varphi_0) \quad (2.15)$$

Aquí, se ha relacionado  $y$  con la latitud  $\varphi$ , usando el hecho de que  $dy = R d\varphi$  y  $f_0 = 2\Omega \sin\varphi_0$  es el parámetro de Coriolis de referencia. La aproximación  $f = f_0 + \beta y$ , se conoce como la *aproximación del plano beta (plano- $\beta$ )*. Por lo tanto,  $\beta$  es la variación norte-sur de la fuerza de Coriolis o dicho de otra forma, el gradiente meridional en el parámetro de Coriolis. Los valores de  $f$  y  $\beta$  en latitudes seleccionadas se exponen en la Tabla 2.1.

Latitud	$f(\times 10^{-4}s^{-1})$	$\beta(\times 10^{-11}s^{-1}m^{-1})$
90°	1.46	0
60°	1.26	1.14
45°	1.03	1.61
30°	0.73	1.98
10°	0.25	2.25
0°	0	2.28

Tabla 2.1: Valores del parámetro de Coriolis y su gradiente meridional, tabulado en función de la latitud[13].

Para movimientos cerca del ecuador, las aproximaciones  $\sin\varphi \approx \varphi$ ,  $\cos\varphi \approx 1$ , pueden ser útiles, dando lugar a la aproximación del *plano beta ecuatorial*. La mitad de la Tierra se encuentra en latitudes menores a 30° y el error porcentual máximo en la aproximación anterior en ese rango de latitudes es solo del 14% [10]. Cerca del ecuador el parámetro de Coriolis se vuelve muy pequeño, entonces

$$f = 2\Omega \sin\varphi \approx \beta y \approx 2\Omega\varphi \quad (2.16)$$

donde  $\beta \equiv \partial f / \partial y \approx 2\Omega/R$  y  $y = R\varphi$ , cerca del ecuador.

## 2.2 Ecuaciones de aguas poco profundas

Las ecuaciones de aguas poco profundas, usualmente describen una capa delgada de un fluido con densidad constante, bajo equilibrio hidrostático. Esta configuración es el modelo más simple en la dinámica de fluidos y puede ampliarse a un caso general; donde se tenga en cuenta múltiples capas de fluidos con distintas densidades, que se encuentran una encima de la otra. El conjunto de varias capas significa un fluido estratificado, siendo lo que verdaderamente ocurre en la realidad tanto en el océano, como en la atmósfera. Además, la aproximación de aguas poco profundas, hace énfasis a los movimientos con una extensión horizontal, suficientemente grande en comparación con la escala vertical. Por ejemplo, el océano Pacífico es aproximadamente, tres ordenes de magnitud más amplias que profundas, puesto que el ancho es del orden de 19800 km desde Indonesia, hasta la costa de Colombia y alcanza una profundidad media de 4280 m.

Considerar que el océano es una capa de agua homogénea, espesor medio  $H$ , con altura de la superficie libre  $\eta$  y  $b$  la elevación inferior. El fondo del océano tiene una altura  $z = -H + b$  y un espesor de la capa local igual a  $h = H + \eta - b$  (ver Figura 2.5). Para movimientos con escalas horizontales grandes, el término de aceleración vertical es mucho más pequeño que la extensión horizontal, es decir  $Dw/Dt \approx 0$ . Por lo tanto, la ecuación de velocidad vertical 2.13c se convierte en un equilibrio, entre el gradiente de presión vertical y la gravedad<sup>4</sup>

<sup>4</sup>En la atmósfera,  $dP/dz$  es la variación de la presión con la altitud, en términos de la densidad del aire. La presión obedece a la ecuación diferencial  $\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{mg}{K_B T}P$ , llamada la **ecuación Barométrica**, donde  $K_B$  es la constante de Boltzmann y la ecuación de estado en términos de la densidad es  $\rho =$

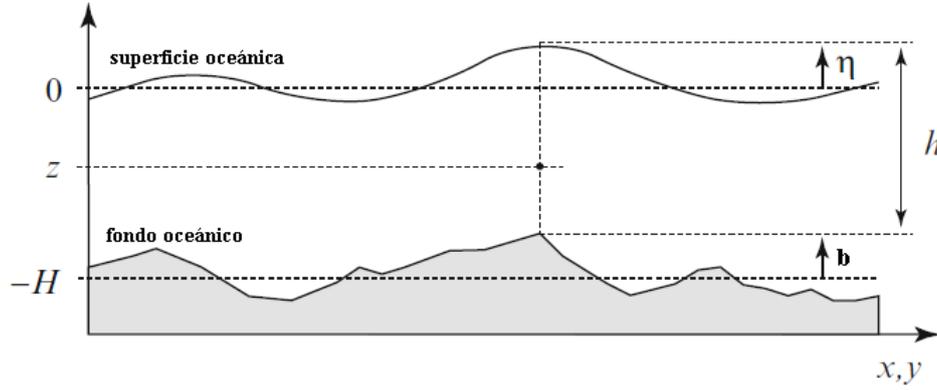


Figura 2.5: Diagrama esquemático del flujo inestable de un fluido homogéneo sobre un fondo irregular y la notación correspondiente.

Imagen adaptada de: *Introduction to Climate Modelling* de Stocker, 2011.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.17)$$

Esto implica que el océano (o atmósfera) está en *equilibrio hidrostático*.

En estas condiciones, la presión hidrostática a la altura  $z$  dentro de la capa de agua, viene dada por

$$p(x, y, z, t) = -\rho g z + p_0$$

En la parte superior del fluido,  $z = \eta$ , la presión está determinada por el peso del fluido suprayacente y se supone que esto es insignificante. Por lo tanto,  $p = 0$  en  $z = \eta$ , dando

$$p(x, y, z, t) = \rho g (\eta(x, y, t) - z)$$

Por lo tanto, el gradiente horizontal de presión es independiente de la altura, es decir

$$\vec{\nabla} p = \rho g \vec{\nabla} \eta$$

donde el operador gradiente en *constante*  $z$  es

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}}$$

Los gradientes de presión  $\partial p / \partial x$  y  $\partial p / \partial y$  son los siguientes

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.19)$$

Se observa que el gradiente de presión horizontal, es independiente de la altura  $z$ , entonces  $\partial u / \partial t$  y  $\partial v / \partial t$  deben ser independientes de  $z$ , lo que implica que  $u$  y  $v$  no

---

$pm / K_B T$ .

La solución viene dada por  $p(z) = p(0) \exp(-mg / K_B T) z \Rightarrow p(z) = p(0) \exp(-z / H)$

Lo que indica que la presión disminuye exponencialmente con la altura, para una atmósfera isotérmica.

varían en profundidad y por consiguiente, permanecen independientes de  $z$  en todos los momentos posteriores.

Las ecuaciones de movimiento horizontal 2.13a y 2.13b, sin tener en cuenta el esfuerzo de fricción del viento, quedan de la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fv \quad (2.20a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu \quad (2.20b)$$

donde se han descuidado los movimientos verticales.

Para determinar la velocidad vertical, se integra la ecuación de continuidad<sup>5</sup> sobre la totalidad de la profundidad del fluido, es decir, en esta ocasión se tiene en cuenta los movimientos verticales:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int_{\eta}^{-H+b} dz + [w]_{\eta}^{-H+b} = 0, \\ & = \int_{\eta}^{-H+b} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{\eta}^{-H+b} \frac{\partial v}{\partial y} dz + w(-H+b) - w(\eta) = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Utilizando la regla de Leibniz<sup>6</sup>, donde los límites de integración son funciones de  $x$  y  $y$ , es decir,  $z_1 = z_1(x, y) = -H + b(x, y)$  y  $z_2 = \eta(t, x, y) = z_1(x, y) + h(t, x, y)$ . Además, las velocidades  $u$  y  $v$  son constantes, de manera tal que

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{-H+b} \frac{\partial u}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^{-H+b} u dz + u \frac{\partial b}{\partial x} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial [u(\eta) - u(-H+b)]}{\partial x} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial b}{\partial x} \\ &= \frac{\partial [u(H + \eta - b)]}{\partial x} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial b}{\partial x} \\ &= \frac{\partial (uh)}{\partial x} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial b}{\partial x}. \\ \int_{-H+b}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz &= \frac{\partial (vh)}{\partial y} + v \frac{\partial b}{\partial y} - v \frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>La variación temporal de la masa por unidad de volumen viene dada por  $d\rho/dt = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ , se conoce como la *ecuación de continuidad de masa*, e indica que el flujo de masa que entra a un elemento de fluido, es igual a la salida de masa del sistema. Para un fluido incompresible, la densidad es constante y la ecuación de continuidad se simplifica a la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

<sup>6</sup>Regla para la diferenciación de una integral definida. Para una integral de la forma

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz, \text{ la derivada de esta integral se puede expresar como}$$

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz + f(b(x), x) \cdot b'(x) - f(a(x), x) \cdot a'(x).$$

entonces 2.21 queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + u \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w(-H + b) - w(\eta) = 0. \quad (2.22)$$

La diferencia entre la velocidad vertical en la parte inferior  $w = (-H + b)$  y la velocidad vertical en la superficie  $w(\eta)$ , corresponde al cambio de altura por unidad de tiempo de la columna de agua entre  $-H + b$  y  $\eta$ , por lo tanto la derivada material de la altura  $h(t, x, y) = H + \eta(t, x, y) - b(x, y)$  queda como

$$\begin{aligned} w(-H + b) - w(\eta) &= \frac{Dh}{Dt} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - u \frac{\partial b}{\partial x} - v \frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.23)$$

reemplazando 2.23 en 2.22 rinde a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0$$

ya que  $h = H + \eta - b$ , donde  $H$  y  $b$  son independientes del tiempo

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (2.24)$$

La ecuación de movimiento 2.20 junto con la ecuación de continuidad 2.24, conforman las ecuaciones de movimiento con la aproximación de aguas poco profundas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fv \quad (2.25a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu \quad (2.25b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad h = H + \eta - b. \quad (2.25c)$$

Este sistema de ecuaciones se aplica, tanto a la atmósfera como al océano. Sin embargo, lleva por nombre modelo de aguas poco profundas.

### 2.2.1 Modelo de $1\frac{1}{2}$ capa

Considerar una capa superior cálida de densidad  $\rho_1$  y profundidad  $h = \eta_0 - \eta_1$ , que se superpone a una capa inferior inactiva de densidad  $\rho_2 > \rho_1$ , profunda y fría como se muestra en el esquema de la Figura 2.6. Aquí  $\eta_0$  y  $\eta_1$  representan la superficie libre e interface entre las capas (es decir, la termoclina), respectivamente.

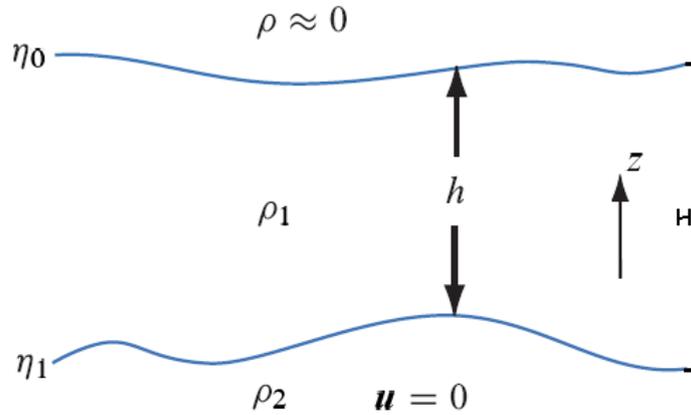


Figura 2.6: Esquema para el caso de dos fluidos superpuestos de diferente densidad. Imagen adaptada de: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* de Vallis, 2017.

Una aproximación de tapa rígida asume una superficie fija, la presión ya no es uniforme, porque la tapa rígida debe proporcionar una fuerza para mantener la superficie plana[24]. El imponer una tapa rígida en la parte superior del mar, permite descartar las ondas que se propagan a lo largo de la superficie.

La presión en la capa inferior se obtiene al integrar la ecuación hidrostática. Para un nivel  $z$  en la capa más baja, se tiene

$$p_2 = \rho_1 g(\eta_0 - \eta_1) + \rho_2 g(\eta_1 - z) + p$$

La formulación de tapa rígida, establece  $\eta_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} p_2 &= -\rho_1 g \eta_1 + \rho_2 g(\eta_1 - z) + p \\ &= \rho_1 g h - \rho_2 g(h + z) + p, \quad h = \eta_0 - \eta_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aquí,  $p$  es la fuerza de presión de la tapa rígida. Entonces queda como

$$\vec{\nabla} p_2 = -g(\rho_2 - \rho_1) \nabla h + \vec{\nabla} p$$

El gradiente horizontal  $\vec{\nabla} p_2 = 0$ , bajo la suposición de capa inmóvil, de modo que

$$\vec{\nabla} p = -\rho_1 g' \vec{\nabla} h \quad (2.27)$$

donde  $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$  es la gravedad reducida, y por lo regular  $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 \ll 1$  y  $g' \ll g$ .

Aplicando las ecuaciones de aguas poco profundas 2.25, teniendo en cuenta lo siguiente:

1. Considerar campos de flujo lento, que evolucionan relativamente rápido. En el caso de una perturbación, la información puede viajar más rápido que las partículas de fluido; de manera que, el fluido se observa desde el punto de vista como un campo de onda. Por lo tanto, los términos advectivos en las variables dinámicas  $u$ ,  $v$  y  $h$  se ignoran[7].
2. Como los procesos más importantes ocurren en la franja ecuatorial del océano Pacífico, el parámetro de Coriolis es  $f \approx \beta y$  como en 2.16.

De modo que, aplicando las ecuaciones de aguas poco profundas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.28b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.28c)$$

Este sistema se denomina ecuaciones de aguas poco profundas, bajo gravedad reducida en un plano  $\beta$ . Estas ecuaciones son útiles, para la descripción de la dinámica en las ondas ecuatoriales a estudiar en la sección 3.3.

## El sistema climático

Los principales componentes del sistema climático y algunas de las formas en que interactúan, se resumen en la Figura 3.1. El sistema climático consta de cinco subsistemas: la atmósfera, la hidrosfera, la criosfera, la biosfera y la litosfera. La componente de rápida variación y la más activa desde el punto de vista energético es la *atmósfera*. La *hidrosfera*, incluye los océanos y todos los reservorios de agua en forma líquida, los cuales son la mayor fuente de humedad para la precipitación e intercambian gases; como el  $\text{CO}_2$  y partículas de sal con la atmósfera. La *criosfera*, es la parte congelada de la superficie de la Tierra; esta abarca glaciares, nieve e hielo marino. La *biosfera*, es toda la zona gaseosa, sólida y líquida de la superficie terrestre que está ocupada por los seres vivos. La *litosfera* o Tierra "sólida", está formada por el fondo marino, los continentes e islas. El clima es consecuencia del equilibrio, que se produce en la interacción entre esos cinco componentes[20].

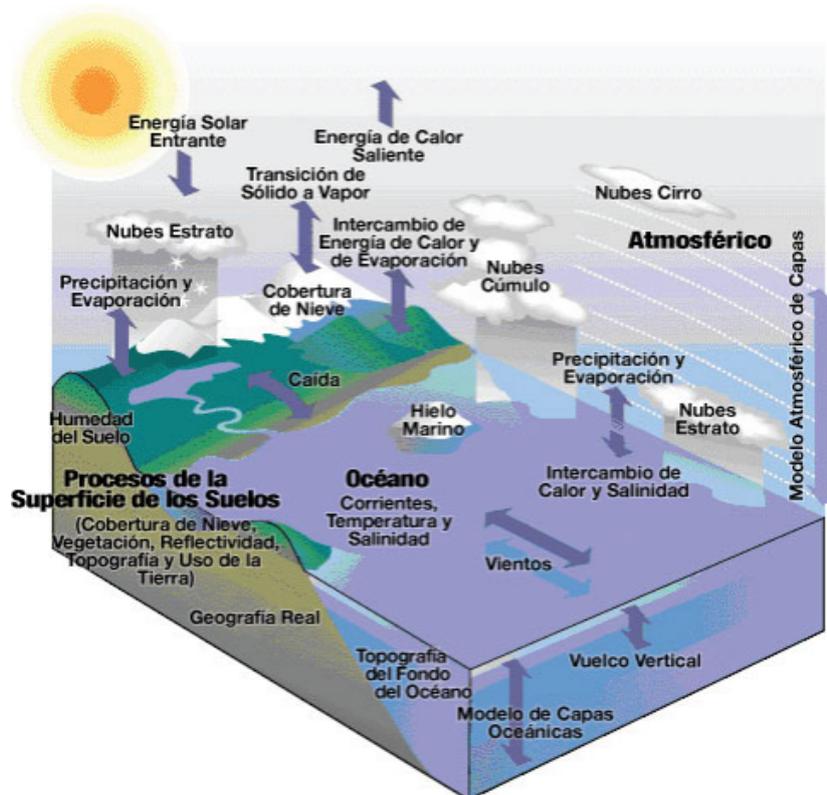


Figura 3.1: Algunos procesos naturales del sistema climático de la Tierra y la conexión atmósfera-océano.

Dentro de estos componentes hay una gran cantidad de procesos climáticos. La radiación solar, tiende a atravesar la atmósfera y ser absorbida en la superficie terrestre a unos 10 metros superiores del océano. El calentamiento solar actúa sobre el océano, para crear una capa superficial cálida, que en la mayoría de las regiones es menos densa que las aguas frías y profundas que se encuentran por debajo; en tal caso tienden a permanecer cerca de la superficie. Este es un ejemplo de cómo están conectados la atmósfera y los océanos.

## 3.1 Circulación atmosférica

La circulación del viento en la atmósfera es impulsada por la rotación de la Tierra, y el desigual calentamiento entre el ecuador y los polos. La mayor parte de la energía proveniente del Sol, llega a la zona del ecuador; lo que genera variaciones de temperatura, entre esta zona y los polos. Las grandes masas de aire se mueven, debido a la diferencia de presión, que se establece entre las distintas latitudes; por lo tanto, el aire se desplaza desde las zonas de la Tierra, donde existen altas presiones (menos calentamiento), hacia las zonas con bajas presiones (mayor calentamiento). En el estudio del fenómeno ENSO, las circulaciones atmosféricas de mayor importancia, son la celda de Hadley y la celda de Walker, debido a que, estas tienen lugar en las regiones tropicales[15].

### 3.1.1 Celda de Hadley

La celda de Hadley es un patrón de circulación atmosférica, en las zonas tropicales, que consiste en el ascenso de aire caliente en el ecuador<sup>1</sup>, coincidiendo con la Zona de Convergencia Intertropical (ZCIT)<sup>2</sup>, luego fluye hacia los polos, hasta latitudes de unos 30° en ambos hemisferios y desciende a la altura de los subtropicos, que corresponde a las altas presiones subtropicales y regresando al ecuador, para completar la celda de Hadley. Esto produce los *vientos alisios del noreste*, en el hemisferio norte y los *vientos alisios del sudeste*, en el hemisferio sur. La fuerza de Coriolis afecta, la dirección del flujo de viento. La fuerza de Coriolis en el hemisferio norte, gira los vientos hacia la derecha; en el hemisferio sur gira los vientos hacia la izquierda.

Una circulación análoga ocurre, entre las latitudes 30° y 60°, formando la *celda de Ferrel* que circula en dirección opuesta a la celda de Hadley. Esta celda produce *vientos del oeste*, predominantes en la superficie, dentro de estas latitudes. El viento predominante en la troposfera media y superior; es del oeste, en casi todas las latitudes, excepto en zonas ecuatoriales, donde la fuerza de Coriolis es débil. Los vientos del oeste son producidos por el contraste de temperatura, entre el ecuador y los polos. En los trópicos cálidos la presión disminuye, gradualmente en la columna de aire; que en las zonas polares más frías y densas. Por lo tanto, en un mismo nivel sobre los trópicos, se tienen presiones más altas que en zonas polares. Esto produce a un

---

<sup>1</sup>La línea del ecuador es la zona más cálida de la tierra, es una zona de baja presión. El aire más caliente asciende hasta llegar a la troposfera donde no puede seguir ascendiendo y comienza a enfriarse de una forma gradual mientras se desplaza en dirección a los polos.

<sup>2</sup>La ZCIT es una franja de bajas presiones ubicada en la zona ecuatorial, donde convergen los vientos alisios del hemisferio norte con los del hemisferio sur.

nivel de altura fijo, un gradiente de presión, desde el ecuador hacia los polos. El aire tropical se movería hacia los polos, por efecto de esta fuerza de presión; pero, la fuerza de Coriolis cambia la dirección del flujo. Cuando se alcanza el equilibrio entre ambas fuerzas, se produce el viento con una importante componente hacia el oeste, generando los vientos del oeste o westerlies.

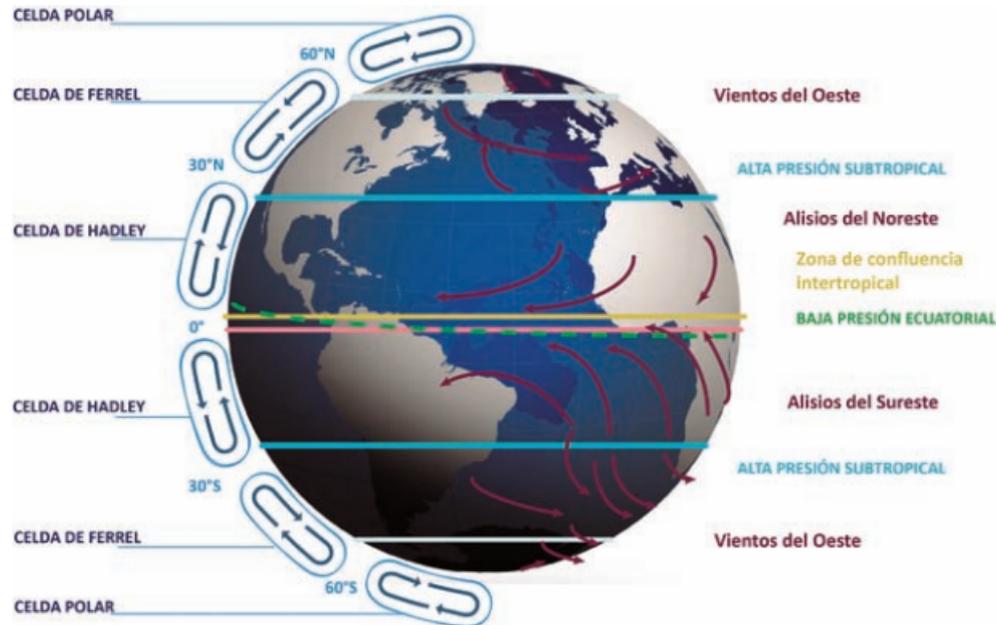


Figura 3.2: Esquema de las principales características de la circulación atmosférica.

Por último, en las regiones polares de la Tierra, entre latitudes de 60° hasta 90°, se encuentra la *celda polar*; cerrando de esta manera el sistema de circulación.

### 3.1.2 Celda de Walker

La celda o circulación de Walker, es una circulación de tipo zonal, es decir, en el sentido este-oeste-este en el ecuador, sobre el océano Pacífico. Es el resultado del gradiente de SST y de la presión atmosférica. Estas variaciones constituyen la circulación de Walker, y los vientos alisios juegan un papel importante ya que, determinan la dirección del bucle. Los vientos son impulsados por la diferencia de presión atmosférica, existente en la región de acoplamiento.

En océano Pacífico Tropical en la parte occidental, se presentan fuertes precipitaciones; producto de una SST cálida y una baja presión atmosférica, que caracteriza esta región. Por otro lado, en el sector oriental predominan condiciones secas, asociadas a una SST relativamente fría y una alta presión atmosférica, de dicha zona. Los vientos normalmente fluyen, desde áreas de mayor a menor presión; se dirigen hacia el oeste y una vez llegan al Pacífico occidental, se produce un movimiento ascendente, sobre el agua tibia, alcanzando la troposfera<sup>3</sup>. La troposfera inferior se caracteriza, por ser

<sup>3</sup>La troposfera es la capa más inestable de la atmósfera y allí tienen lugar la mayor parte de fenómenos meteorológicos, debido a que en ella se encuentra el 90% del vapor de agua y los núcleos de condensación necesarios para la formación de las nubes.

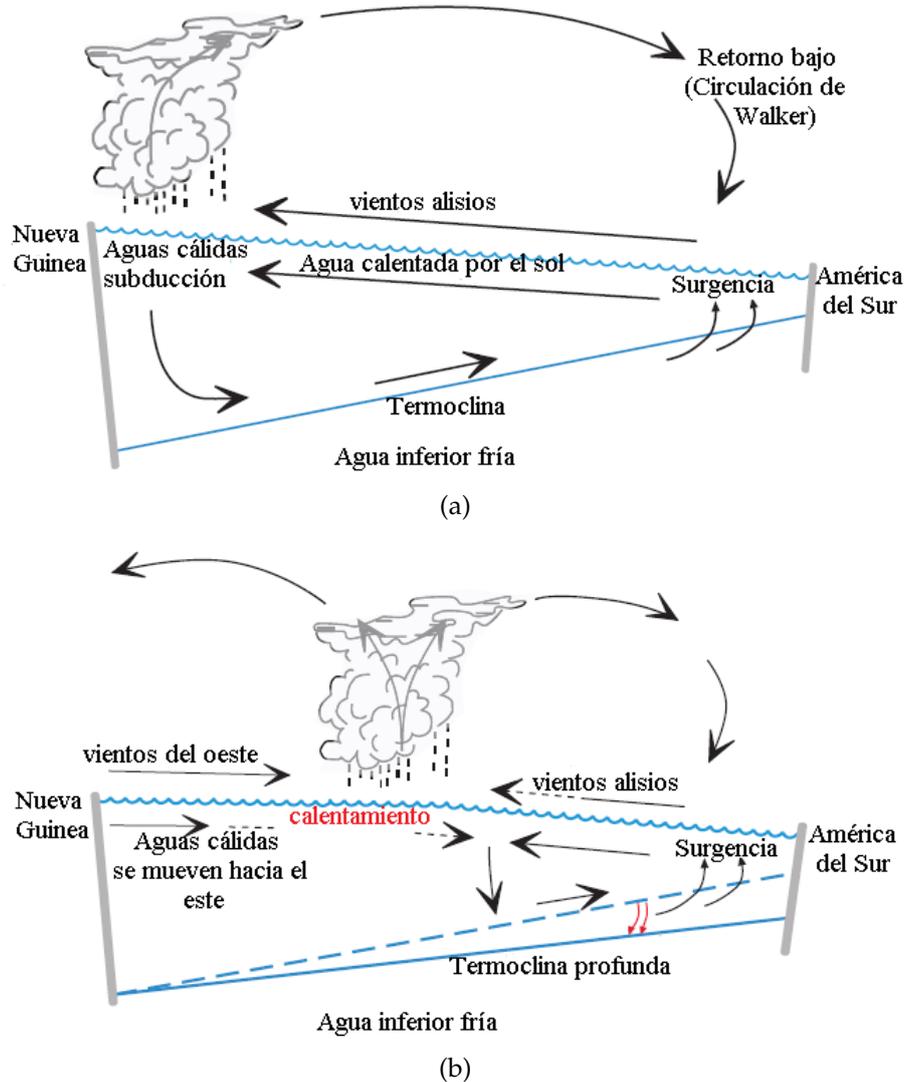


Figura 3.3: *Circulación de Walker. (a) Condiciones normales. (b) Condiciones El Niño.*  
 Imagen adaptada de: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* de Vallis, 2017.

relativamente cálida en la rama ascendente y fría en su rama descendente. Entonces, se genera subsidencia (descenso) de aire sobre el agua fría del Pacífico oriental, cerrando de esta manera la celda de circulación. Esto significa que la circulación de Walker es una circulación térmicamente directa, que convierte la energía potencial disponible, en energía cinética de los movimientos atmosféricos.

En la Figura 3.3(a) se aprecia un esquema generalizado, de las características más importantes de esta circulación zonal en condiciones normales, y para la fase de El Niño se muestra en la Figura 3.3(b). En condiciones de La Niña, la circulación de walker se caracteriza, como una versión mejorada del estado neutral, es decir, un fortalecimiento de los vientos alisios y una SST más fría de lo común.

## 3.2 Circulación oceánica

En el océano existen diversos mecanismos que generan las corrientes oceánicas (se denomina así a las masas de agua en los océanos en movimiento), aplicando este término por lo general, cuando el agua fluye horizontalmente. Sin embargo, las masas de agua se pueden mover verticalmente, ya sea por descenso o ascenso del agua; en este último esta como ejemplo la subida de agua a la superficie, conocido como afloramiento costero. Algunos de los mecanismos mas importantes son: la fuerza gravitatoria ejercida por la luna y el Sol, las diferencias en la presión atmosférica a nivel del mar, la tensión del viento sobre la superficie del mar, y la convección resultante del enfriamiento y la evaporación de la atmósfera.

Por otro lado, las fuerzas que actúan en el océano son la gravedad terrestre y la presión: la primera varía con la latitud y la profundidad, y la segunda depende de la densidad. Las diferencias de densidad son el resultado de los cambios, en la temperatura y salinidad; que conllevan a una estratificación continua del océano.

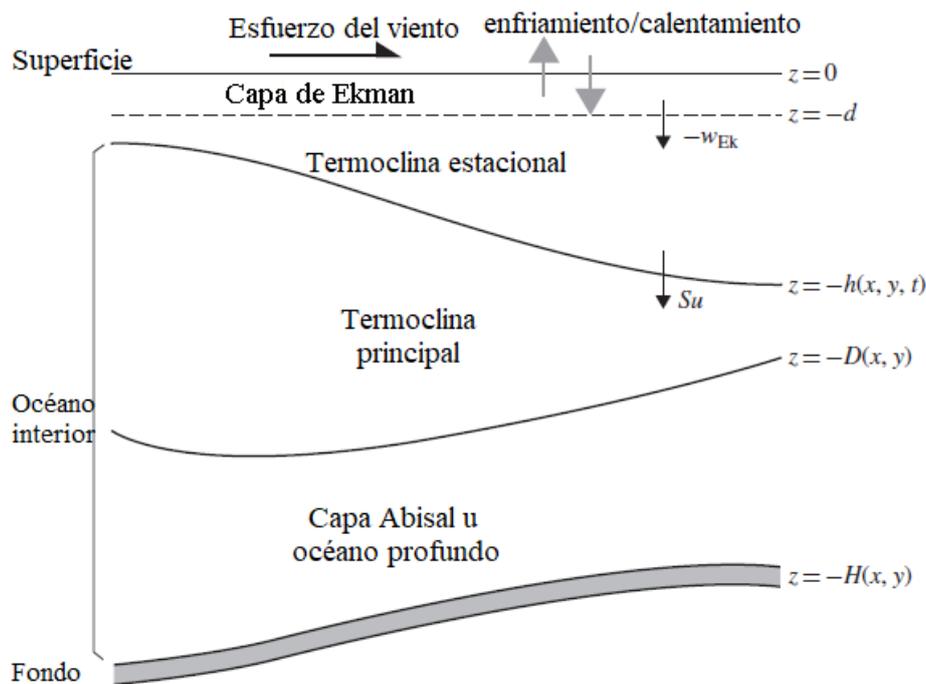


Figura 3.4: Esquema del perfil vertical en el océano desde el punto de vista para la circulación a gran escala. Donde  $w_{Ek}$  es el bombeo/ succión de Ekman y  $S_u$  el transporte de Sverdrup. Imagen adaptada de: *An Introduction to Geophysical Fluid Dynamics* de Cushman B. & Beckers J., 2001.

En el océano la columna de agua, puede dividirse en cuatro regiones como se muestra en la Figura 3.4, donde las profundidades de las capas no están a escala; el océano profundo es mucho mayor que las otras capas. En la parte superior se encuentra la *capa límite de mezcla*, con una profundidad de 10 m, que se acciona por la fuerza del viento en la superficie y se caracteriza por  $(\partial\rho/\partial z \simeq 0)$ . Por debajo se encuentra la *termoclina estacional*, una capa cuya estratificación vertical es máxima al final del verano y desaparece en invierno, por el enfriamiento convectivo y la mezcla de los vientos

muy fuertes. Esta situada aproximadamente, entre 50 y 150 m de profundidad, dependiendo de la temporada. Por debajo se encuentra la *termoclina principal*, se nutre del agua que queda cuando la termoclina estacional se retira; está permanentemente estratificada ( $\partial\rho/\partial z \neq 0$ ) y su espesor es del orden de 500–1000 m. El espacio del océano que esta compuesto por la mayor parte de agua, es la *capa abisal*<sup>4</sup>, y se encuentra entre aproximadamente 1000 m de profundidad. El fondo del océano, a unos 5000 m debajo de la superficie. Cuando se considera la termoclina principal y la capa abisal juntamente, forman el interior oceánico[7].

### 3.2.1 La capa Ekman

Hay dos procesos que impulsan la circulación oceánica, el viento como uno de los principales impulsores y la convección; la cual consiste en el transporte de calor, mediante el movimiento de un fluido. Los vientos predominantes cerca de la superficie del océano, están fluyendo exactamente sobre la capa mixta, que esta en contacto directo con la atmósfera. Los efectos del viento sobre el océano es inducir, a través del bombeo o succión de Ekman<sup>5</sup>, un patrón de movimiento vertical indicado por  $w_{Ek}$  en la Figura 3.4.

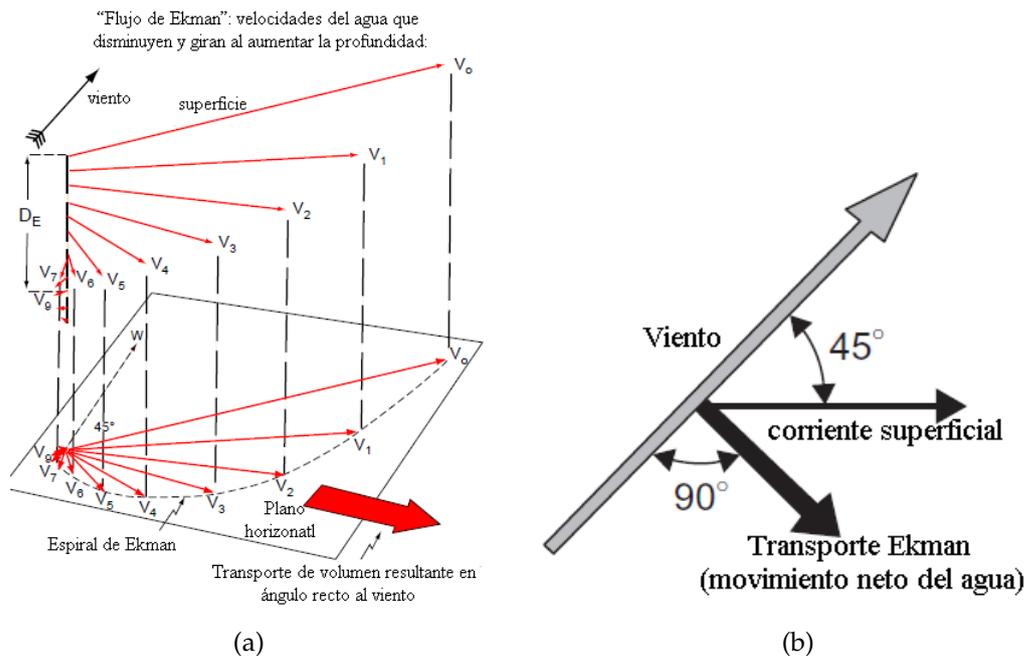


Figura 3.5: Estructura de la capa superficial de Ekman. (a) La figura se dibuja para el hemisferio norte ( $f > 0$ ), la velocidad del agua esta en función de la profundidad. (b) Vista superior, el transporte promedio de agua superficial en la capa Ekman está en ángulo recto con los vientos predominantes\*.

\* Imagen adaptada de: *Descriptive Physical Oceanography: An Introduction* de Talley L., Pickard G., Emery W. & Swift J., 2011.

<sup>4</sup>Capa abisal o abismal, es la región del océano con ausencia de luz solar y su movimiento es lento.

<sup>5</sup>Las corrientes horizontales pueden llevar propiedades hacia y desde la capa mixta en un proceso conocido como subducción. *Hundimiento* se conoce como bombeo Ekman. La *surgenia* a veces se denomina succión Ekman.

Por lo tanto, la capa Ekman es una región donde las columnas verticales de agua, son afectadas por el movimiento de las aguas superficiales, impulsadas por el viento. El agua no se mueve en la misma dirección que el viento empuja las aguas superficiales, en realidad el flujo en la capa superficial, se dirige hacia la derecha del viento en el hemisferio norte (y hacia la izquierda en el hemisferio sur), a un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la dirección del viento; debido a la fuerza de Coriolis como se muestra en la Figura 3.5. En el hemisferio norte, cada capa delgada dentro de la capa superficial, empuja la que está debajo un poco más hacia la derecha y con una velocidad más pequeña que la capa superior. Esto crea una “espiral de Ekman” con velocidades decrecientes al aumentar la profundidad, formando un movimiento neto de agua, en un ángulo de  $90^\circ$  con respecto al viento.

Como el viento varía de un lugar a otro, también lo hace el transporte Ekman, formando zonas de convergencia y divergencia de aguas superficiales. Una región de convergencia, fuerza el agua superficial hacia abajo en un proceso llamado *hundimiento*. Mientras que una región de divergencia, extrae agua desde abajo hacia la capa superficial de Ekman en un proceso conocido como *surgencia*. La surgencia ecuatorial debido al transporte Ekman, es el resultado del esfuerzo de fricción del viento hacia el oeste. Estos causan el transporte Ekman, hacia el norte (sur) del ecuador en el hemisferio norte (sur), como se observa en la Figura 3.6. Esto da como resultado una corriente ascendente a lo largo del ecuador, a pesar que el rotacional del esfuerzo de fricción del viento es pequeño, debido a la dependencia del parámetro de Coriolis en la ecuación 3.7.

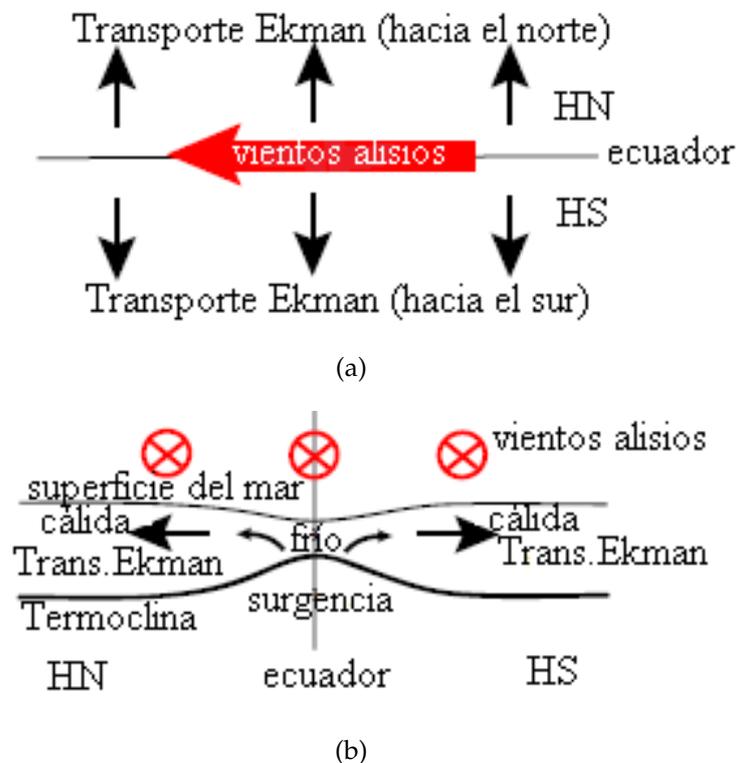


Figura 3.6: Influencia de los vientos alisios en el Pacífico ecuatorial. (a) Dirección del transporte Ekman según el hemisferio. (b) Corriente ascendente producto de la divergencia del transporte Ekman cerca del ecuador impulsado por vientos alisios del este \*.

Dentro de la capa Ekman, la tensión del viento está equilibrada por la fuerza de Coriolis y la FGP. Este equilibrio de fuerzas se expresa como:

$$-fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (3.1a)$$

$$fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (3.1b)$$

En el caso donde el equilibrio de fuerzas está dado por la FGP y la fuerza de Coriolis, se conoce como flujo geostrófico; que consiste en una aproximación del viento real. Considerando la fuerza de fricción  $\vec{F}_r$ , junto con la fuerza de Coriolis; ambas ayudan a mantener un equilibrio con la FGP. Por lo tanto, el viento ya no se dirige a lo largo de las isobaras<sup>6</sup>. En la Figura 3.7, la línea punteada es la suma vectorial de  $\vec{F}_r$  y la fuerza de Coriolis, la cual está equilibrada por la FGP.

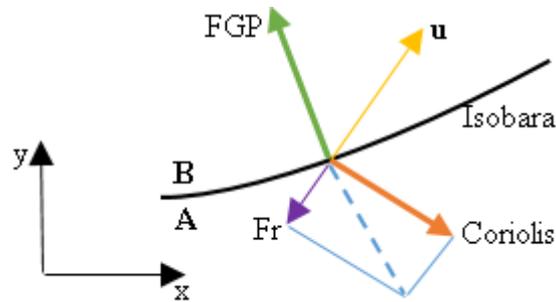


Figura 3.7: Esquema de las fuerzas en equilibrio. A y B denotan regiones de alta y baja presión a una altura dada. La velocidad horizontal es:  $\vec{u}_h = \vec{u}_g + \vec{u}_{Ek}$ , donde  $\vec{u}_g = (u_g, v_g)$  indica la velocidad debido al viento geostrófico y  $\vec{u}_{Ek} = (u_{Ek}, v_{Ek})$  la velocidad Ekman producto del esfuerzo de fricción del viento sobre la superficie del océano (componente ageostrófica).

El transporte de masa lateral sobre la capa Ekman  $M_{Ek}$ , se define como la integral de velocidad Ekman  $u_{Ek}$ ,  $v_{Ek}$  desde la superficie  $z = 0$ , (aquí,  $\tau = \tau_{viento}$ ). A una profundidad  $z = -d$ <sup>7</sup>, la tensión del viento es  $\tau = 0$  como se observa en la Figura 3.4 (el subíndice *Ek* hace referencia a la componente ageostrófica, en honor a Ekman quien introdujo el esfuerzo de fricción del viento). Las componentes del transporte de masa Ekman son las siguientes:

$$M_{Ekx} = \int_{-d}^0 \rho u_{Ek} dz, \quad M_{Eky} = \int_{-d}^0 \rho v_{Ek} dz \quad (3.2)$$

El equilibrio entre la fuerza de Coriolis y la tensión del viento se deriva de la ecuación 3.1

$$\rho f v_{Ek} = -\frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (3.3a)$$

<sup>6</sup>Las isobaras son curvas de igual o constante presión en un espacio determinado.

<sup>7</sup>La base de la capa Ekman alcanza una profundidad de 100 m. Por debajo de dicha capa, la circulación oceánica se desvanece a cierta profundidad sin movimiento, donde los vientos no accionan la misma circulación, que en la superficie del mar.

$$\rho f u_{Ek} = \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (3.3b)$$

Calculando los transportes de masa Ekman, realizando una integración de 3.3 en 3.2

$$\begin{aligned} f \int_{-d}^0 \rho u_{Ek} dz &= f M_{Ekx} = \int_{-d}^0 d\tau_y \\ f M_{Ekx} &= \tau_y|_{z=0} - \tau_y|_{z=-d} \\ f M_{Ekx} &= \tau_{viento_y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} f \int_{-d}^0 \rho v_{Ek} dz &= f M_{Eky} = - \int_{-d}^0 d\tau_x \\ f M_{Eky} &= - \tau_x|_{z=0} + \tau_x|_{z=-d} \\ f M_{Eky} &= - \tau_{viento_x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Puesto que la masa debe conservarse, la variabilidad espacial del transporte de masa Ekman, conduce a velocidades verticales en la parte superior de la capa Ekman. Integrando la ecuación de continuidad a través de la capa Ekman, es decir en la vertical:

$$\begin{aligned} \int_{-d}^0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^0 u_{Ek} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^0 v_{Ek} dz &= - \int_{-d}^0 \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial M_{Ekx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{Eky}}{\partial y} \right) &= -w(0) + w(-d) \end{aligned}$$

Dado que  $w = 0$  en la superficie del mar, entonces la divergencia del transporte en la capa Ekman, resulta en una velocidad vertical en el fondo de la misma, por lo tanto:

$$\frac{\partial M_{Ekx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{Eky}}{\partial y} = -\rho w(-d) \quad (3.6a)$$

$$\vec{\nabla}_h \cdot \vec{M}_{Ek} = -\rho w_{Ek} \quad (3.6b)$$

donde la velocidad vertical  $w_{Ek}$  es la base de la capa Ekman  $z = -d$ , como se puede ver en la Figura 3.4. La ecuación 3.6b afirma que la divergencia horizontal del transporte de masa Ekman, conduce a una velocidad vertical en la capa limite de mezcla del océano.

Tomando el transporte de masa Ekman 3.4, 3.5 en 3.6b, se tiene

$$\begin{aligned} w_{Ek} &= -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_{viento_y}}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_{viento_x}}{f} \right) \right] \\ w_{Ek} &= -rot_z \left( \frac{\vec{\tau}}{\rho f} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

La cual lleva por nombre velocidad vertical o *bombeo de Ekman*. Se observa que la velocidad depende del rotacional de  $(\tau_{viento}/f)$ , pero  $\tau_{viento}$  varía más que  $f$ . Por lo cual,  $w_{Ek}$  esta directamente relacionada con la tensión del viento.

### 3.2.2 Transporte de Sverdrup

A lo largo de la franja ecuatorial los vientos alisios, inducen un transporte de aguas superficiales, es decir, un transporte de masa del fluido tanto en la dirección zonal, como en la dirección meridional<sup>8</sup>. El desplazamiento de la columna de fluido a una nueva latitud, se conoce como transporte de Sverdrup. Esta circulación oceánica juega un papel importante en el proceso *recarga/descarga*, que se discutirá en la sección 4.2.

En el estudio del bombeo de Ekman, no se tuvo en cuenta la existencia de gradientes de presión horizontal. Sverdrup propuso un modelo más completo, incluyendo los gradientes de presión de manera que, el equilibrio de las fuerzas corresponde a las ecuaciones 3.1: Presión = Coriolis + fricción

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f\rho v + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -f\rho u + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (3.8b)$$

Integrando estas ecuaciones desde la superficie  $z = 0$ , hasta  $z = -h$ , como se muestra en la Figura 3.4 (profundidad donde el movimiento forzado por el viento, es nulo  $\tau(-h) = 0$ ). En donde  $h$  puede ser mayor a la profundidad de la capa Ekman, permitiendo la existencia de corrientes geostróficas, que alcanzan incluso hasta el fondo del océano. En analogía con los transportes de masa 3.2, Sverdrup definió:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \int_{-h}^0 \frac{\partial p}{\partial x} dz, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{-h}^0 \frac{\partial p}{\partial y} dz \quad (3.9a)$$

$$M_x \equiv \int_{-h}^0 \rho u(z) dz, \quad M_y \equiv \int_{-h}^0 \rho v(z) dz \quad (3.9b)$$

La solución a estas ecuaciones se expresa en términos de los transportes de masa  $M_x$  y  $M_y$ , en la capa impulsada por el viento, que se extiende hasta una supuesta profundidad de no movimiento. A diferencia del fondo, en la parte superior del océano el esfuerzo de fricción del viento  $\tau = \tau_{viento}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= fM_y + \tau_{viento_x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -fM_x + \tau_{viento_y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Realizando una diferenciación cruzada (respecto a  $x$  e  $y$ ) de las ecuaciones 3.10 y restando los términos de presión, toman la misma forma y son anulados. Además, la fuerza de Coriolis responde a la rotación de la Tierra; de modo que, la variación es

<sup>8</sup> $x$ : dirección zonal (este-oeste),  $y$ : dirección meridional (norte-sur).

latitudinal y no meridional (solo depende de  $y$ , por lo tanto  $\partial f / \partial M_x = 0$ ). Entonces, se obtiene:

$$\underbrace{\frac{df}{dy}}_{\beta} M_y = \frac{\partial \tau_{viento_y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{viento_x}}{\partial y}$$

$$\beta M_y = \text{rot}_z(\tau_{viento}) \tag{3.11}$$

Este resultado se conoce como la relación de Sverdrup o el *transporte de Sverdrup*. Explica cómo el viento produce una circulación más profunda en el océano, es decir, el desplazamiento de la columna de fluido a una nueva latitud.

El transporte de masa total esta dado por la componente geostrófica y ageostrófica, como:

$$M_x = M_{Gx} + M_{Ekx}, \quad M_y = M_{Gy} + M_{Eky}$$

y esta relacionada con la ecuación 3.10, de la siguiente forma:

$$f M_{Gy} = f \int_{-h}^0 \rho v_G dz = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad f M_{Eky} = -\tau_{viento_x}$$

$$f M_{Gx} = f \int_{-h}^0 \rho u_G dz = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad f M_{Ekx} = \tau_{viento_y} \tag{3.12}$$

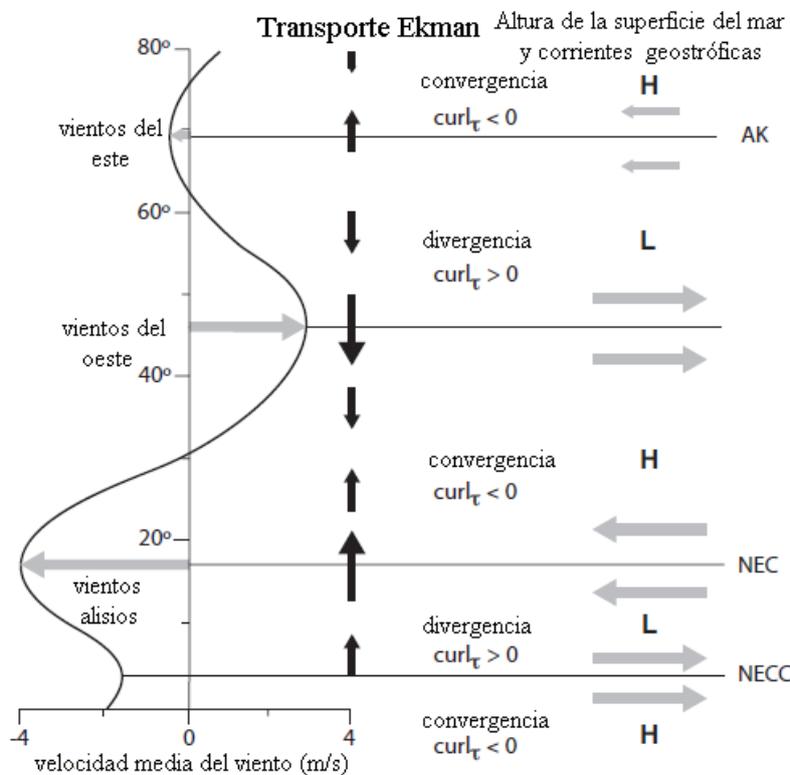


Figura 3.8: Diagrama esquemático de los vientos zonales medios en el Pacífico (hemisferio Norte) con los transportes Ekman norte-sur.

Imagen adaptada de: *Introduction to Physical Oceanography* de Stewart R., 2008.

De la Figura 3.8, se puede observar que el mayor transporte, se da longitudinalmente (este-oeste, o viceversa) que latitudinalmente. La convergencia (*divergencia*) del transporte conduce a la corriente descendente (ascendente), que produce una capa gruesa de agua tibia en el kilómetro superior de la columna de agua y en un alto nivel del mar (*bajo nivel del mar*). Los gradientes medios de presión norte-sur asociados con las altas y bajas presiones, están equilibrados por la fuerza de Coriolis de las corrientes geostróficas este-oeste en el océano superior, como se observa en la parte derecha de la figura.

Las líneas horizontales indican regiones donde el rotacional de la tensión del viento zonal cambia de signo. Además, AK: es la Corriente de Alaska, NEC: Corriente Ecuatorial del Norte y NECC: Contracorriente Ecuatorial del Norte.

Según el transporte de Sverdrup 3.11, el esfuerzo de fricción del viento produce el flujo meridional divergente en el ecuador, como se muestra en la parte inferior de la figura (NECC hacia el este, siendo más fuerte en el hemisferio norte); este transporte a su vez induce un flujo zonal hacia el este, más fuerte en la parte occidental de la cuenca.

### 3.3 Ondas ecuatoriales

Las ondas ecuatoriales son un tipo de perturbaciones a gran escala que están atrapadas, alrededor de la región ecuatorial; es decir, se desintegran lejos de la región ecuatorial, y pueden tener origen tanto en el océano como en la atmósfera. Las ondas ecuatoriales atmosféricas, son provocadas por convección tropical y el esfuerzo de fricción del viento sobre la superficie del mar; los cuales inducen las ondas ecuatoriales oceánicas. La existencia de ondas en el océano, generan variaciones en la termoclina, según las ecuaciones lineales de aguas poco profundas en un plano beta ecuatorial. Se justifica el uso de dichas ecuaciones debido a que, la longitud de onda es mucho más larga que la profundidad de una o ambas capas de fluido y porque la geometría cartesiana, permite una mejor descripción en las latitudes bajas.

Entre las ondas ecuatoriales más importantes en la circulación oceánica y la dinámica del fenómeno ENSO, se encuentran las ondas Kelvin y Rossby, que se propagan hacia el este y hacia al oeste, respectivamente. Debido a que estas perturbaciones tienen longitudes de onda y períodos muy largos, la fuerza de Coriolis les afecta significativamente. En este trabajo se hace énfasis en las ondas oceánicas que calientan o enfrían el agua, que se encuentra cerca de la termoclina ecuatorial. Sin embargo, las ondas Rossby en la atmósfera, resultan importantes para la comprensión de las denominadas teleconexiones, ya que transportan información a través del sistema terrestre[4].

En general, el estudio se concentra en las ondas internas, en especial las *ondas baroclínicas*, las cuales se propagan a lo largo de una región con un fuerte gradiente de densidad (por ejemplo, la termoclina). Por otra parte, la propagación de las ondas a lo largo de la superficie se denominan *ondas barotrópicas*, que se caracterizan por viajar más rápido que las ondas baroclínicas; pero, estas últimas poseen amplitudes mucho mayores que las ondas barotrópicas[6]. No obstante, las ondas de superficie son un caso particular de las ondas en una interfaz, entre dos fluidos. Suceden en el

límite donde la densidad de la capa superior (la del aire) es menor, que la densidad de la capa inferior (la del agua)[22]. Es por eso que en el modelo de  $1\frac{1}{2}$  capa, es apropiado una aproximación de tapa rígida, con el fin de descuidar las ondas superficiales, las cuales son importantes en el estudio de las mareas[9].

### 3.3.1 Ondas Kelvin

La onda Kelvin es un movimiento ondulatorio que existe en presencia de rotación y un límite lateral, que permita su propagación. Además, depende de la gravedad y de una estratificación estable, para mantener una oscilación gravitacional. Estas ondas suelen estar atrapadas en el ecuador o a lo largo de un borde vertical; como las costas o cadenas montañosas. La onda Kelvin ecuatorial tiene una propagación unidireccional, estando en todas partes paralelo al ecuador. A lo largo del ecuador, la onda Kelvin viaja de oeste a este en ambos hemisferios. Tiene una amplitud máxima en el ecuador y esta disminuye exponencialmente, tanto al norte como al sur del ecuador, es decir, se dirige hacia los polos en los bordes orientales del océano.

La condición de onda Kelvin es que la velocidad meridional se desvanece en todas partes ( $v = 0$ ), debido a la presencia de una pared vertical. Entonces las ecuaciones 2.28, se reducen al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.13a)$$

$$\beta y u = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.13b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.13c)$$

Para obtener posibles soluciones de la onda Kelvin, derivar 3.13a, con respecto a  $t$ ; 3.13c, con respecto a  $x$  y sumando se llega a la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= g' H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Siendo  $c = \sqrt{g'H}$ , la velocidad de fase. La ecuación 3.14 describe la propagación de ondas no dispersivas, unidimensionales y posee la solución general de la forma:

$$u = F'(x + ct, y) + G'(x - ct, y) \quad (3.15)$$

Consiste en la suma de dos ondas en direcciones opuestas. Reemplazando 3.15 en 3.13a ó 3.13c, se obtiene para  $h$ :

$$\begin{aligned} h &= \frac{c}{g'} [-F'(x + ct, y) + G'(x - ct, y)] \\ h &= \sqrt{\frac{H}{g'}} [-F'(x + ct, y) + G'(x - ct, y)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

La estructura de las funciones  $F'$  y  $G'$ , se determina mediante el uso de la ecuación restante, es decir, 3.13b. Combinando 3.15 y 3.16 en

$$\beta y u = -g' \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$-g' \sqrt{\frac{H}{g'}} \frac{\partial F'}{\partial y} + g' \sqrt{\frac{H}{g'}} \frac{\partial G'}{\partial y} + \beta y F' + \beta y G' = 0$$

y separando se obtiene la forma en que  $F'$  y  $G'$  varían con  $y$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{Hg'} \frac{\partial F'}{\partial y} - \beta y F' &= 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial y} &= \beta y (g'H)^{-1/2} F' \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{Hg'} \frac{\partial G'}{\partial y} + \beta y G' &= 0 \\ \frac{\partial G'}{\partial y} &= -\beta y (g'H)^{-1/2} G' \end{aligned} \quad (3.18)$$

con soluciones

$$F' = F(x + ct) e^{(\beta/2c)y^2}, \quad (3.19a)$$

$$G' = G(x - ct) e^{-(\beta/2c)y^2} \quad (3.19b)$$

donde  $R_{EC} = (c/\beta)^{1/2}$ , es el radio de deformación de Rossby ecuatorial<sup>9</sup>. Se deduce que, la solución  $F'$  es una función creciente lejos de la pared, y no cumple la condición de limite (dicha solución tiene un aumento exponencial en amplitud lejos del ecuador), por lo que su aproximación no sería realista y debe eliminarse. Pero, la solución que decae en la dirección  $y^2$  positiva, es la que viaja en la dirección  $x$  positiva (hacia el este). La solución con sentido físico, es la onda que decae exponencialmente a medida que aumenta la distancia desde el ecuador.

$$u = e^{-(\beta/2c)y^2} G(x - ct) \quad (3.20a)$$

$$v = 0 \quad (3.20b)$$

$$h = \sqrt{H/g'} e^{-(\beta/2c)y^2} G(x - ct) \quad (3.20c)$$

Aquí,  $G$  es una función arbitraria. La velocidad zonal tiene la misma estructura espacial que la termoclina, y la velocidad meridional es cero. Esto muestra que la onda Kelvin solo se propaga hacia el este, ya que  $G$  es solo una función de  $(x - ct)$  y no de  $(x + ct)$ , proporcionando la relación de dispersión lineal; entre la frecuencia y el

<sup>9</sup>Escala fundamental de longitud para la dinámica ecuatorial. Para longitudes de onda más largas que  $L_R$ , el efecto de la rotación es importante.

número de onda zonal, al reemplazar una solución sinusoidal ( $\sim e^{i(kx-\omega t)}$ ) para  $u$  en la ecuación de onda 3.14. Entonces  $\omega = kc$ , donde se observa que la onda Kelvin no se dispersa a lo largo de la trayectoria ( $c_g = \partial\omega/\partial k$ ). Estas son ondas Kelvin que se desintegran exponencialmente lejos del límite.

Calculando el radio de deformación para una latitud de  $10^\circ$  y  $60^\circ$  (el valor de  $\beta$  está en la Tabla 2.1). Para valor típico de la profundidad media de la capa superior  $H=150$  m, se halla la gravedad reducida; la cual tiene un valor de  $g'=0.0294$   $ms^{-2}$ , con el término  $\rho_2 - \rho_1/\rho_1=0.003$ [19]. Entonces la velocidad es  $c = 2.1$   $ms^{-1}$  y el radio de deformación a una latitud  $10^\circ N$  o  $10^\circ S$  es  $L_R \approx 305$  km. En el caso de una latitud comprendida entre  $60^\circ N$  o  $60^\circ S$ , el radio de deformación es igual a  $L_R \approx 429$  km. Deduciendo que en latitudes mayores la amplitud de la onda aumenta.

### 3.3.2 Ondas Rossby

Las ondas Rossby u ondas planetarias, son una de las soluciones de la ecuación de momento para un fluido, afectado por la rotación terrestre. Estas ondas oscilan cerca del ecuador, viajando mucho más lento que las ondas Kelvin, porque reaccionan a las variaciones de la fuerza de Coriolis con la latitud; el llamado efecto beta. Las ondas Rossby tienen longitudes de onda, con decenas a miles de kilómetros. Además, los movimientos de las partículas en las ondas Rossby son *transversales*. Por otro lado, la velocidad horizontal de la onda Rossby (la cantidad de tiempo que tarda la onda en atravesar la cuenca oceánica), depende de la latitud en la que viaja. En el Pacífico por ejemplo, las ondas más cercanas al ecuador, pueden tardar meses o un año en cruzar el océano y podría tomar diez años en cruzar el Pacífico a  $30^\circ N$  o  $30^\circ S$ [6]. El movimiento vertical de las ondas Rossby, es pequeño a lo largo de la superficie del océano y grande a lo largo de la termoclina más profunda[16].

Considerar la versión linealizada de las ecuaciones de aguas poco profundas, con el fin de buscar soluciones para ondas latitudinales de la forma  $v = \tilde{v}(y)e^{i(kx-\omega t)}$ , con frecuencia  $\omega > 0$  y número de onda  $k$ , en la dirección  $x$ .

Buscando soluciones de onda plana con propagación zonal de la forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}(y) \\ \tilde{v}(y) \\ \tilde{h}(h) \cdot e^{\pm i\pi/2} \end{bmatrix} \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (3.21)$$

Fueron especificadas  $u$  y  $h$  en fase entre si, pero  $v$  esta en cuadratura con ellas. Por lo tanto, reemplazando en el sistema 2.28

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.22a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.22b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.22c)$$

Entonces queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\omega\tilde{u} + \beta y\tilde{v} - kg'\tilde{h} = 0 \quad (3.23)$$

$$\omega\tilde{v} + \beta y\tilde{u} = 0 \quad (3.24)$$

$$-\omega\tilde{h} + Hk\tilde{u} + H\tilde{v}_y = 0 \quad (3.25)$$

donde se ha utilizado la notación  $\tilde{v}_y = \partial\tilde{v}/\partial y$ . Realizando las siguientes operaciones:

$$1. \partial/\partial y \cdot 3.23 + k \cdot 3.24$$

$$\beta\tilde{v} + \beta y\tilde{v}_y + \omega k\tilde{v} + \beta ky\tilde{u} = 0 \quad (3.26)$$

$$2. \omega \cdot 3.24 + g'\partial/\partial y \cdot 3.25$$

$$\omega^2\tilde{v} + \omega\beta y\tilde{u} + g'H\tilde{v}_{yy} = 0 \quad (3.27)$$

$$3. \omega \cdot 3.23 - kg' \cdot 3.25$$

$$\omega^2\tilde{u} + \omega\beta y\tilde{v} - k^2g'H\tilde{u} - kg'H\tilde{v}_y = 0 \quad (3.28)$$

$$4. kg'H \cdot 3.26 - \omega \cdot 3.27$$

$$-\omega g'H\tilde{v}_{yy} + kg'H\beta y\tilde{v}_y + (kg'H\beta + \omega k^2g'H - \omega^3)\tilde{v} + (k^2g'K\beta y - \omega^2\beta y)\tilde{u} = 0 \quad (3.29)$$

$$5. 3.29 + \beta y \cdot 3.28$$

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy^2} + \left[ \left( \frac{\omega^2}{g'H} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} \right) - \frac{\beta^2}{g'H}y^2 \right] \tilde{v} = 0$$

o

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy^2} + \frac{\beta^2}{c^2}(Y^2 - y^2)\tilde{v} = 0 \quad (3.30)$$

donde

$$Y^2 = \frac{g'H}{\beta^2} \left[ \frac{\omega^2}{g'H} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} \right] \quad (3.31)$$

Como resultado una ecuación diferencial, ordinaria, no lineal, para la amplitud  $\tilde{v}$ . De acuerdo con 3.30, si  $y < Y$ , admite soluciones oscilatorias en  $y$ , pero si  $y > Y$ , se obtienen soluciones en descomposición. Ahora,  $Y$  es el ancho de la "guía de onda ecuatorial". El valor mínimo de  $Y$ , ocurre cuando  $k = -\beta/2\omega$ .  $Y$  depende de varias propiedades de la onda, como la longitud de onda, frecuencia, y la variación de  $\beta$  con escalas similares a  $R_{EC} \sim 250Km$  en  $2.2^\circ$  de latitud[24].

Una vez más, suponiendo que las ondas se desintegran lejos del ecuador ( $v \rightarrow 0$ ; cuando  $y \rightarrow \pm\infty$ ), la ecuación 3.30 plantea un problema de valor propio, igual que la ecuación de Shrödinger para un oscilador armónico simple. Las condiciones de contorno se cumplen, solo cuando la parte constante del coeficiente entre corchetes satisface la relación

$$\boxed{(\omega/c)^2 - k^2 - \beta k/\omega = (2n+1)\beta/c; \quad n = 0, 1, 2, \dots} \quad (3.32)$$

Es posible demostrar que la solución general es de la forma

$$\tilde{v}_n \propto \mathcal{H}_n(y')e^{-y'^2/2}, \quad y' = y/R_{EC}$$

Los polinomios de Hermite multiplicados por una función Gaussiana, son una forma de función de cilindro parabólico. Las primeras funciones de estructura meridional, están representadas en la Figura 3.10. La sustitución de esta forma en la ecuación diferencial para  $\tilde{v}$ , conduce a la relación de dispersión 3.32, para varios tipos de ondas ecuatoriales. De hecho, este es un conjunto de relaciones de dispersión correspondientes a un grupo discreto de estructuras meridionales  $\mathcal{H}_n(\xi)$ , los “polinomios de Hermite”[10]

Entonces la ecuación diferencial en términos del radio de deformación ecuatorial, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy^2} + \frac{1}{R_{EC}^4}(Y^2 - y^2)\tilde{v} = 0 \quad (3.33)$$

donde

$$R_{EC} = \sqrt{c/\beta}, \quad Y^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega}\right) R_{EC}^4 = (2n + 1)R_{EC}^2$$

y

$$\begin{aligned} y' &= y/R_{EC}, \quad Y' = Y/R_{EC} \\ \Rightarrow \frac{1}{R_{EC}^2} \frac{d^2\tilde{v}}{dy'^2} + \frac{1}{R_{EC}^4}(Y'^2 - y'^2)\tilde{v}R_{EC}^2 &= 0 \end{aligned}$$

De modo que

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dy'^2} + (Y'^2 - y'^2)\tilde{v} = 0 \quad (3.34)$$

Cuya solución es  $\tilde{v}_n = \mathcal{H}_n e^{-y'^2/2}$ , la cual debe conducir a la relación de dispersión  $Y'^2 = 2n + 1$ .

usando

$$\frac{d\mathcal{H}_n}{dy'} = 2n\mathcal{H}_{n-1}$$

y

$$y'\mathcal{H}_n = n\mathcal{H}_{n-1} + \frac{\mathcal{H}_{n+1}}{2}$$

Calculando la derivada de  $\tilde{v}$  con respecto a  $y'$

$$\frac{d\tilde{v}}{dy'} = \frac{d\mathcal{H}_n}{dy'} e^{-y'^2/2} - y'\mathcal{H}_n e^{-y'^2/2} = \left[ \frac{d\mathcal{H}_n}{dy'} - y'\mathcal{H}_n \right] e^{-y'^2/2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}}{dy'} &= \left[ 2n\mathcal{H}_{n-1} - \left( n\mathcal{H}_{n-1} + \frac{\mathcal{H}_{n+1}}{2} \right) \right] e^{-y'^2/2} \\ &= \left[ n\mathcal{H}_{n-1} - \frac{\mathcal{H}_{n+1}}{2} \right] e^{-y'^2/2} = [y'\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n+1}] e^{-y'^2/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\tilde{v}}{dy'^2} &= \left[ \mathcal{H}_n + y' \frac{d\mathcal{H}_n}{dy'} - \frac{d\mathcal{H}_{n+1}}{dy'} - y'(y'\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n+1}) \right] e^{-y'^2/2} \\
&= [\mathcal{H}_n + 2y'n\mathcal{H}_{n-1} - 2(n+1)\mathcal{H}_n - y'^2\mathcal{H}_n + y'\mathcal{H}_{n+1}] e^{-y'^2/2} \\
&= [\mathcal{H}_n + y'(2n\mathcal{H}_{n-1} - y'\mathcal{H}_n + \mathcal{H}_{n+1}) - 2(n+1)\mathcal{H}_n] e^{-y'^2/2} \\
&= [-\mathcal{H}_n - 2n\mathcal{H}_n + y'^2\mathcal{H}_n] e^{-y'^2/2}
\end{aligned}$$

Reemplazando en 3.34, da lugar a

$$[y'^2 - (2n+1)]\mathcal{H}_n e^{-y'^2/2} + (Y'^2 - y'^2)\mathcal{H}_n e^{-y'^2/2} = 0$$

con  $Y'^2 = 2n+1$

Por lo tanto, la estructura meridional de las soluciones para la ecuación 3.30, se describe por las funciones de Hermite:

$$\tilde{v} = (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-1/2} \mathcal{H}_n(\xi) e^{-\beta/2c y'^2}, \quad \xi \equiv (\beta/c)^{1/2} y' \quad (3.35)$$

En cuanto a la relación de dispersión 3.32, para frecuencias altas el término  $\beta k/\omega$ , se ignora para obtener

$$\omega^2 = c^2 k^2 + (2n+1)\beta c \quad (3.36)$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Esta es una relación de dispersión para ondas inerciales de gravedad<sup>10</sup>, también llamadas ondas Poincaré atrapadas ecuatorialmente, que se propagan en cualquier dirección.

Para bajas frecuencias el término en 3.32 es pequeño y en consecuencia, las curvas de dispersión están dadas aproximadamente por

$$\omega = - \frac{\beta k}{k^2 + \left( \frac{2n+1}{R_{EC}^2} \right)} \quad (3.37)$$

Un número de onda  $k$  negativo, significa que las ondas Rossby se propagan hacia el oeste. Pero, la velocidad de grupo depende de la longitud de onda.

Considerando dos límites de estas ondas

- *Ondas cortas de baja frecuencia*, con  $k \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ . La relación de dispersión 3.37 se convierte en

$$\omega = -\frac{\beta}{k}$$

La velocidad de fase y la velocidad de grupo, en este límite están dadas por

$$V_f = -\beta/k^2, \quad V_g = \beta/k^2$$

Por lo tanto, la velocidad de fase es hacia el oeste, pero la velocidad de grupo y la dirección de propgación de la energía, es hacia al este.

En la práctica las ondas Rossby son de poca importancia porque son dispersivas, lentas y tienden a disiparse.

<sup>10</sup>Las ondas de gravedad llevan este nombre, debido a que la fuerza de restauración es la gravedad que actúa sobre las parcelas desplazadas verticalmente en la interfaz aire-mar.

- *Ondas largas de baja frecuencia*, con  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ . La relación de dispersión 3.37 es de la forma

$$\omega = -\frac{ck}{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Representa ondas que solo se propagan hacia el oeste, cuya velocidad de fase está dada por  $c/(2n+1)$ . En consecuencia, la onda Rossby con  $n=1$  viaja hacia el oeste y la velocidad es  $1/3$  de la velocidad de la onda Kelvin. Es necesario una onda Kelvin de aproximadamente 2.5 meses y una onda Rossby de 7.5 meses, para cruzar el Pacífico[8]. También son ondas no dispersivas e importantes cerca de los límites occidentales, donde se superponen para crear corrientes limítrofes occidentales.

Introducir en la relación de dispersión 3.32, cantidades adimensionales para la frecuencia

$$\hat{\omega} = \omega / (\beta c)^{1/2}$$

y el número de onda

$$\hat{k} = k(c/\beta)^{1/2}$$

Así que, la relación de dispersión no dimensional queda de la siguiente forma

$$\hat{\omega} - \hat{k}^2 - \frac{\hat{k}}{\hat{\omega}} = (2n+1) \quad (3.38)$$

En la Figura 3.9, se trazan las curvas de dispersión para  $n = 0, 1, 2, 3$ . El grupo superior de curvas en color azul, corresponde a las ondas de gravedad, las cuales se propagan hacia el este como al oeste. Las ondas Rossby con longitud de onda larga ( $k < 0$ ), están representadas por líneas discontinuas en la parte inferior. La onda Yanai (curva de color magenta), se comporta como una onda Rossby, para frecuencias pequeñas y como una onda de gravedad inercial, para frecuencias grandes[10]. Por ultimo, las ondas Kelvin con  $n = -1$  (línea diagonal de color rojo), se propaga solo a lo largo de un límite.

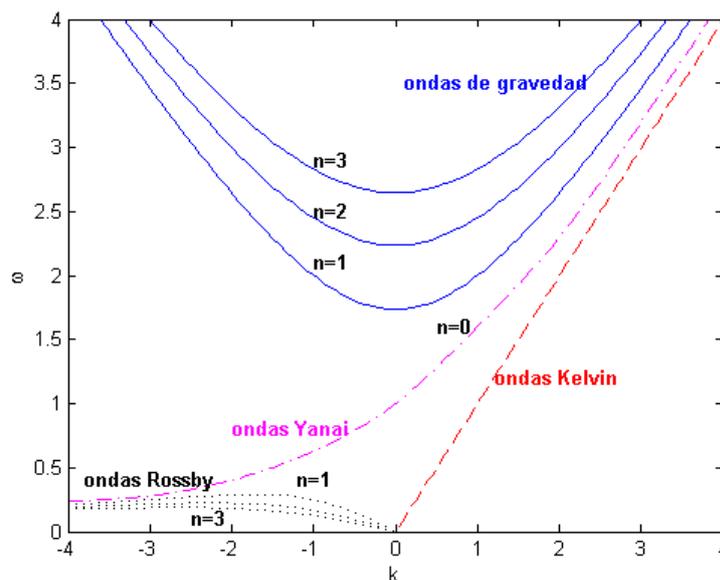


Figura 3.9: Relación de dispersión para las ondas ecuatoriales.

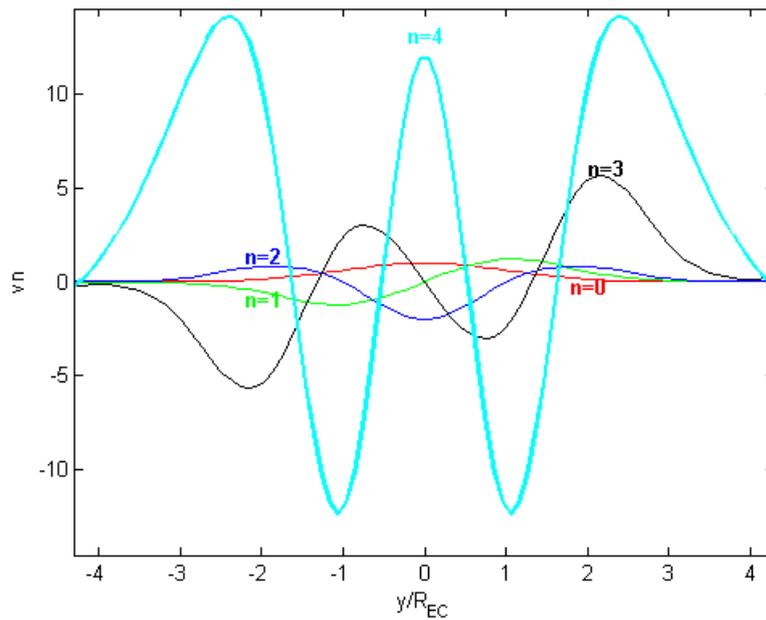


Figura 3.10: Las primeras cinco funciones de estructura meridional  $\tilde{v}_n = e^{-y^2/2} \mathcal{H}_n(y')$ .

De la Figura 3.10 para  $n$  impar, corresponde a los modos asimétricos de las ondas Rossby, no hay flujo meridional cruzando el ecuador. El flujo converge o diverge lejos del ecuador, lo que produce una estructura simétrica de las anomalías de la termoclina. Como se puede ver en esta imagen, las ondas están confinadas a una región comparable con el radio de deformación ecuatorial  $R_{EC}$ . Por lo tanto, las ondas Rossby también se encuentran atrapadas ecuatorialmente[8].

### Ondas Rossby atmosféricas

Las ondas Rossby en la atmósfera, se caracterizan por una gran longitud de onda y elevada amplitud; de modo que, unas pocas cubren todo un hemisferio. Se ubican en una región con un importante gradiente térmico. En superficie se asocian con el frente polar y en altura, con la corriente en chorro<sup>11</sup>. Las ondulaciones horizontales (o meandros) a gran escala, que se desarrollan en la corriente en chorro polar, se conocen como ondas Rossby (ver Figura 3.11)[6]. Siendo estas ondas el mecanismo básico mediante el cual se producen influencias remotas en la atmósfera. Las ondas también se asocian con los contrastes térmicos, entre las latitudes altas y bajas. Además, entre las regiones con déficit de energía y con exceso. Un chorro rápido separa las masas de aire y evita su intercambio, por lo que resulta una circulación con pocas ondas de baja amplitud. Cuando el chorro reduce su velocidad, meandriza y favorece los intercambios de masas de aire, con amplias ondas de Rossby. El movimiento lento de las ondas con amplitud grande, a menudo resulta en patrones climáticos persistentes

<sup>11</sup>Una corriente en chorro (jet stream en inglés), es un flujo de aire rápido y estrecho que se encuentra a lo largo de un eje casi horizontal, en la alta troposfera o en la estratosfera[6]. Son vientos que viajan alrededor del planeta en dirección desde el oeste, debido a la rotación terrestre, tanto en el hemisferio norte como en el sur. Las corrientes en chorro son producto de dos factores: el calentamiento atmosférico por radiación solar; que produce las células de circulación Polar, Ferrel y Hadley a gran escala y la acción de la fuerza de Coriolis, que actúa sobre esas masas en movimiento.

y bastante largos. Las ondas Rossby como tal ayudan a transferir el calor de los trópicos, hacia los polos y el aire frío hacia los trópicos, en un intento por devolver la atmósfera al equilibrio.

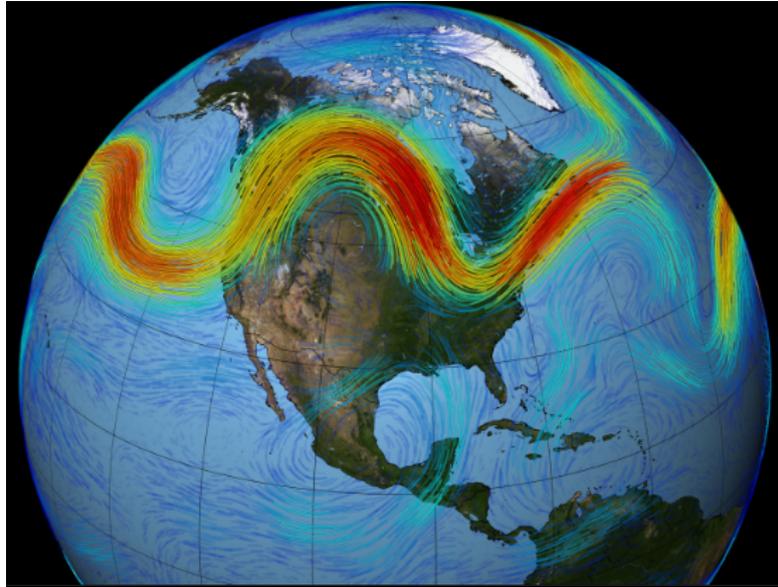


Figura 3.11: *Corriente en chorro polar en el hemisferio norte.*

Imagen extraída de: <https://oceanservice.noaa.gov/facts/rossby-wave.html>

Tanto en el hemisferio norte como en el hemisferio sur, existe una corriente en chorro polar y subtropical. En la Figura 3.11 se observa la corriente en chorro polar, en la región de  $50^{\circ}$ - $60^{\circ}$  de latitud. Los colores representan la velocidad del viento, que va desde el más lento (colores azul claro) al más rápido (rojo oscuro). Estos flujos de aire estrechos y rápidos, pueden alcanzar velocidades de circulación muy altas de 200 y 400 km/h.

Los impactos en otras partes del mundo, es lo que comúnmente se denomina, como las teleconexiones. El fenómeno ENSO, trae efectos no solo en el Pacífico Tropical, sino que influye en la variabilidad climática, en varios lugares a la vez. Tales efectos incluyen cambios en la temperatura y la precipitación sobre los E.E.U.U., Sudamérica, Australia, sudeste de Asia e India, y África. Las regiones en otros lugares del mundo, son afectadas principalmente cuando ocurre una fase cálida del ciclo ENSO[19]. Las causas para la fase fría tienden a ser de menor magnitud y, por lo tanto, tienen efectos más débiles. Los cambios en los patrones atmosféricos, están influenciados por la convección y la liberación de calor latente asociada en el Pacífico ecuatorial. Durante El Niño, la convección que normalmente se encuentra en el occidente es desplazada hacia el este del Pacífico ecuatorial; la fuente de calentamiento atmosférico se mueve con la lluvia. Esto lleva a cambios generalizados en la circulación atmosférica y los patrones climáticos fuera del Pacífico Tropical; incluidas las perturbaciones en la presión atmosférica. A medida que las regiones convectivas migran hacia el este a lo largo del ecuador, traen lluvia a las islas normalmente áridas del Pacífico central. La falta de lluvia en el Pacífico occidental, provoca sequía en Indonesia y Australia.

### 3.3.3 Las ondas ecuatoriales como uno de los factores clave para explicar ENSO

La actividad de las ondas Kelvin y Rossby ecuatoriales, desempeñan un papel importante en el océano, estas por su parte, contribuyen en el cambio de la anomalía de la SST, cuando ocurre un evento cálido de ENSO. Las ondas Kelvin de enfriamiento, son aquellas con propagación hacia el este del Pacífico ecuatorial y son las encargadas de finalizar un evento cálido, al romper con el crecimiento de la inestabilidad[2].

En la actualidad el estudio se centra en las ondas Kelvin y Rossby, en el océano y su impacto en la dinámica del Pacífico ecuatorial. Para un análisis de los procesos oceánicos, actualmente se utiliza información por medio del monitoreo satelital y modelos numéricos[19].

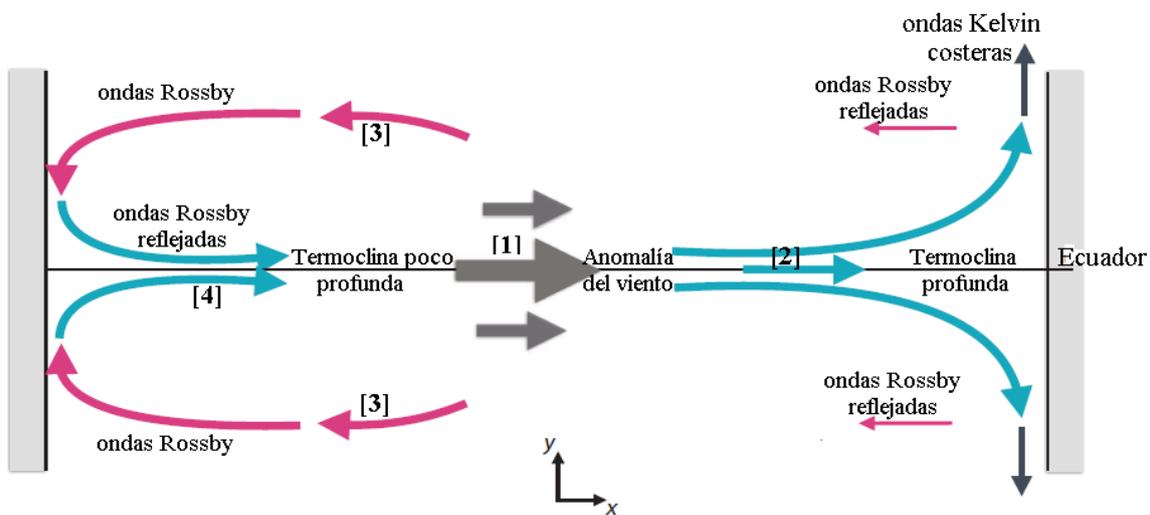


Figura 3.12: Ondas ecuatoriales Kelvin y Rossby en el océano Pacífico ecuatorial. Imagen adaptada de: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* de Vallis, 2017.

En la naturaleza los principales cambios del viento, se producen en el centro del océano Pacífico ecuatorial, mientras que los cambios de SST se concentran más hacia el este[18]. En la región acoplada se origina inicialmente, una perturbación cálida de la SST. En la Figura 3.12 se ilustra el proceso, donde en principio, un aumento de la SST ejerce anomalías de los vientos del oeste en el Pacífico central [1], forzando (es decir, generadas directamente por perturbaciones del viento) ondas Kelvin cálidas (descendentes), que viajan hacia la parte oriental en 1-2 meses, donde la profundización de la termoclina induce un sobrecalentamiento del agua oceánica y comienza un evento de El Niño[2]. Cuando una onda Kelvin ecuatorial alcanza el límite oriental, no solo se divide y viaja hacia el polo a lo largo de la costa; sino que, puede reflejarse parcialmente como una onda Rossby. Además, las anomalías de los vientos generan ondas Rossby frías, fuera del ecuador [3], con una propagación hacia el oeste y se reflejan desde el límite occidental, como ondas Kelvin frías ecuatoriales [4]. Al llegar a las costas de Sudamérica unos meses más tarde, y dado que las anomalías de la termoclina para las ondas Kelvin reflejadas [4], tienen un signo opuesto a las ondas Kelvin forzadas directamente [2], proporcionan una retroalimentación negativa para el sistema acoplado.

## Modelos físico-matemáticos para simular el fenómeno ENSO

Para explicar el crecimiento de una inestabilidad en la SST y el movimiento de las aguas en el Pacífico Tropical; producto de las perturbaciones atmosféricas y oceánicas, algunos autores han planteado modelos conceptuales, que incluyen un proceso de retroalimentación aire-mar. Un modelo conceptual es una representación de un sistema dinámico, elaborado de la composición de conceptos que se utilizan para ayudar a conocer, comprender o simular, un tema o fenómeno natural que representa el modelo. En ocasiones se denominan modelos de juguete, ya que se forman después de un proceso de conceptualización o generalización, es decir, ideas abstractas de fenómenos en el mundo real.

Los procesos y aspectos de las circulaciones atmosféricas y oceánicas, discutidos en el capítulo anterior, que dan forma al clima; están incluidos de alguna forma en los modelos acoplados. Una interpretación de los modelos, permite explicar las oscilaciones regulares con periodos interanuales, que se asemejan a el fenómeno ENSO. Aquí, se estudiarán los modelos oscilador con retardo y oscilador recarga-descarga, examinando la estabilidad de las soluciones, a partir del análisis de los valores propios.

### 4.1 Modelo oscilador con retardo

El modelo oscilador con retardo de Suárez y Schopf (1988)[21], fue el primer modelo conceptual que suministro una descripción de la naturaleza (cuasi) oscilatoria de ENSO, a través de la dinámica de las ondas ecuatoriales. El fenómeno El Niño-Oscilación del Sur, es regido por la interacción de varios mecanismos no lineales, que se pueden estudiar por medio de una ecuación diferencial con retardo; proporcionando un modelo que explica las oscilaciones regulares de la SST en el Pacífico oriental. Denotar  $T$  como la anomalía de temperatura, es decir, la diferencia entre un valor instantáneo (o promedio a corto plazo) y el normal (o medio a largo plazo). Este modelo está representado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT(t)}{dt} = aT(t) - bT(t - \Delta) - cT^3(t) \quad (4.1)$$

donde las constantes de escala  $a$ ,  $b$  tienen unidades de  $(yr^{-1})$  y  $c$  ( $^{\circ}C^{-2}yr^{-1}$ ).

Los tres términos en el lado derecho de esta ecuación se pueden interpretar de la siguiente manera:

1. El término  $aT(t)$ , representa los mecanismos de retroalimentación positiva del acople océano-atmósfera, que ocasionan una inestabilidad con el parámetro  $a > 0$ ; su tasa de crecimiento. El desarrollo de esta inestabilidad produce grandes anomalías positivas de la SST, es decir, que la SST crecería sin límite.
2. El término  $bT(t - \Delta)$ , proporciona una retroalimentación negativa con retardo, dada por la reflexión de la onda Rossby en el oeste. Es por eso que  $\Delta$  (yr, en años) vendría siendo el tiempo de viaje del modo Rossby, desde el Pacífico central, hasta el límite occidental; más el tiempo de viaje del modo Kelvin reflejado, desde el límite occidental; hasta el oriente (ver Figura 3.12). Dado que hay muchas ondas Rossby con diferentes velocidades involucradas,  $\Delta$  es un promedio ponderado por la contribución de todos los modos de Rossby[18].
3. El término de amortiguación no lineal  $cT^3(t)$ , representa todos los demás procesos disipativos en el sistema; por ejemplo, el calor cedido por la superficie del mar a la atmósfera y los procesos húmedos en la atmósfera, que impiden un aumento o disminución en la SST sin límite[24].

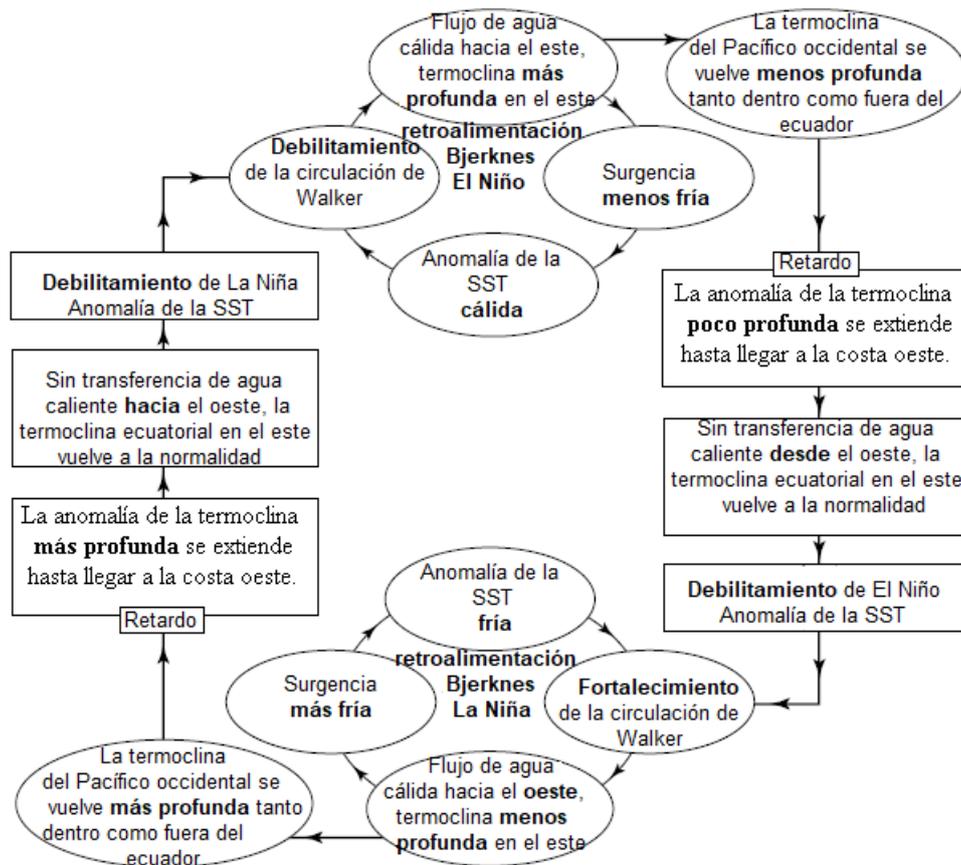


Figura 4.1: Representación gráfica del comportamiento cíclico de ENSO. Imagen adaptada de: *Climate Change and Climate Modeling* de Neelin, 2011.

En la figura 4.1, se muestra el ciclo completo de ENSO. Los bucles superior e inferior (óvalos), comprenden los mismos mecanismos para la fase cálida y fría. En los

lados izquierdo y derecho se encuentran los mecanismos, para una fase de transición. En un evento de El Niño, ocurre un equilibrio entre las anomalías de los vientos y la anomalía de profundidad de termoclina en el occidente del océano Pacífico, es decir, los vientos del oeste han llevado el agua suficiente hacia el este y, por lo tanto, la termoclina se eleva, estando más cerca de la superficie. En ese momento es cuando finaliza, la retroalimentación positiva de la profundidad de termoclina en el este sobre la SST. El sistema acoplado entra en un debilitamiento, para que actúe un mecanismo que funcione como retroalimentación negativa y, por ende, pase a la siguiente fase de ENSO.

A continuación, se realiza un cambio de variable para llevar la ecuación 4.1 a una forma más sencilla, definiendo

$$t' = at \quad (i) \quad T' = \sqrt{\frac{c}{a}} T \quad (ii)$$

y tomando constantes:

$$\alpha = \frac{b}{a} \quad (iii) \quad \delta = a\Delta \quad (iv)$$

Reemplazando en

$$\begin{aligned} \frac{dT'}{dt'} &= \frac{dT'}{dT} \frac{dT}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ \frac{dT'}{dt'} &= \left( \sqrt{\frac{c}{a}} \right) [aT - bT(t - \Delta) - cT^3] \cdot \frac{1}{a} \\ \frac{dT'}{dt'} &= \frac{1}{a} aT \sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c}{a}} bT(t - \Delta) - \frac{1}{a} cT^3 \sqrt{\frac{c}{a}} \\ \frac{dT'}{dt'} &= \sqrt{\frac{c}{a}} T - \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{b}{a} T(t - \Delta) - \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} T^3 \end{aligned}$$

De (ii) se tiene que  $T = \sqrt{a/c} T'$ , por lo que la ecuación toma la siguiente forma

$$\frac{dT'}{dt'} = T' - \alpha T'(t' - \delta) - T'^3$$

Con frecuencia se utiliza el modelo oscilador con retardo en su forma adimensional y se omite el primado[5]. Entonces

$$\boxed{\frac{dT(t)}{dt} = T(t) - \alpha T(t - \delta) - T^3(t)} \quad (4.2)$$

donde  $\delta > 0$  y  $\alpha > 0$  es la constante de acoplamiento, que mide la amplitud de la señal con retardo[3, 21].

Si bien la ecuación 4.2, no puede ser resuelta analíticamente. La dificultad está en el historial (es decir, el retardo de tiempo) y existirían infinitas raíces; por lo que, la ecuación característica es una ecuación algebraica trascendente. De modo que, se

estudiará la estabilidad de la versión linealizada de dicha ecuación; analizando el comportamiento cerca de un punto de equilibrio. Estos se obtienen de la siguiente manera

$$T - T^3 - \alpha T(t - \delta) = 0$$

implica que  $T(t) = T(t - \delta)$  para todo  $t$ :

$$T - T^3 - \alpha T = 0 \Rightarrow T(1 - T^2 - \alpha) = 0$$

Teniendo como raíces  $T_0 = 0$ ,  $T_{1,2} = \pm\sqrt{1 - \alpha}$ . La solución  $T_0$ , corresponde a un estado normal; mientras que  $T_1$  una anomalía positiva (calentamiento) y  $T_2$  una anomalía negativa (enfriamiento). Las soluciones pueden ser estables o inestables, dependiendo del valor que tomen los parámetros  $(\alpha, \delta)$ . El análisis se realizará para el punto de equilibrio  $T_1 = \sqrt{1 - \alpha}$ . Considerando una pequeña perturbación  $T_P = T - T_1$ , se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{dT_P}{dt} = (1 - 3T_1^2)T_P - \alpha T_P(t - \delta)$$

Reemplazando  $T_1$

$$\frac{dT_P}{dt} = (1 - 3(\sqrt{1 - \alpha})^2)T_P - \alpha T_P(t - \delta)$$

$$\frac{dT_P}{dt} = (3\alpha - 2)T_P - \alpha T_P(t - \delta) \quad (4.3)$$

Suponiendo una solución de la forma  $T_P(t) = T_P(0)e^{\sigma t}$ , donde  $\sigma$  es un valor complejo, dado por  $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ .

$$\begin{aligned} \sigma T_P(0)e^{\sigma t} &= (3\alpha - 2)T_P(0)e^{\sigma t} - \alpha T_P(0)e^{\sigma(t - \delta)} \\ \sigma &= (3\alpha - 2) - \alpha e^{-\sigma\delta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Notar que esta es una ecuación trascendental compleja, que satisface ecuaciones que involucran funciones seno y coseno.

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_R + i\sigma_I &= (3\alpha - 2) - \alpha e^{-(\sigma_R + i\sigma_I)\delta} \\ &= (3\alpha - 2) - \alpha e^{-\sigma_R\delta} \cdot e^{-i\sigma_I\delta} \\ &= (3\alpha - 2) - \alpha e^{-\sigma_R\delta} [\cos(\sigma_I\delta) - i\text{sen}(\sigma_I\delta)] \end{aligned}$$

$$\sigma = \underbrace{(3\alpha - 2) - \alpha e^{-\sigma_R\delta} \cos\sigma_I\delta}_{\sigma_R} + i \underbrace{\alpha e^{-\sigma_R\delta} \text{sen}(\sigma_I\delta)}_{\sigma_I}$$

$$\sigma_R = (3\alpha - 2) - \alpha e^{-\sigma_R\delta} \cos\sigma_I\delta \quad (4.5a)$$

$$\sigma_I = \alpha e^{-\sigma_R\delta} \text{sen}(\sigma_I\delta) \quad (4.5b)$$

Cuando  $\sigma_R = 0$ , la solución  $T_P = T_P(0)e^{i\sigma_I t}$  es puramente oscilatoria y el punto fijo no es estable ni inestable, por lo cual tiene una frecuencia finita de  $2\pi/\sigma_I$ .

$$0 = (3\alpha - 2) - \alpha \cos\sigma_I\delta \Rightarrow \cos\sigma_I\delta = \frac{3\alpha - 2}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{3\alpha - 2}{\alpha}\right) &= \sigma_I \delta \\ \delta &= \frac{\arccos\left(\frac{3\alpha - 2}{\alpha}\right)}{\sigma_I} \end{aligned} \quad (4.6)$$

y

$$\sigma_I = \sqrt{\alpha^2 \text{sen}^2 \sigma_I \delta}$$

Utilizando la identidad  $\text{sen}^2 \sigma_I \delta = 1 - \text{cos}^2 \sigma_I \delta$

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sqrt{\alpha^2 \left[1 - \left(\frac{3\alpha - 2}{\alpha}\right)^2\right]} \\ \sigma_I &= \sqrt{\alpha^2 - (3\alpha - 2)^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Reemplazando 4.7 en 4.6, da como resultado soluciones neutrales, que ocurren a lo largo de un número infinito de curvas de la forma:

$$\delta = \frac{2\pi n \mp \arccos\left(\frac{3\alpha - 2}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - (3\alpha - 2)^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.8)$$

Dado que  $T$ , representa la solución de la ecuación 4.2 y  $T_1 + T_p$ , es la solución perturbada; por lo tanto, dados  $\alpha$  y  $\delta$ , la solución de la versión linealizada queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_p \\ T &= \sqrt{1 - \alpha} + T_p(0)e^{\sigma_R t} e^{i\sigma_I t} \end{aligned} \quad (4.9)$$

El propósito es analizar la ecuación 4.9 cerca de un punto fijo, la cual va a depender de los valores que tengan  $\sigma_R$  y  $\sigma_I$ . Si la solución se encuentra muy lejos del punto fijo, o si la condición inicial comienza muy distante de este; hace referencia a la inestabilidad de dicha solución para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\delta$ .

### 4.1.1 Solución numérica del Modelo oscilador con retardo

En esta sección se procede a estudiar el comportamiento de la ecuación 4.2, trazando la solución numérica y la solución analítica (o versión linealizada) 4.9. Las soluciones ocurren a lo largo de un número infinito de curvas, dadas por la ecuación 4.8. En la Figura 4.2, existen dos regímenes de variabilidad: estables e inestables, que están separados por una curva neutral aguda (para  $n = 0$  línea color rojo), en el plano  $\alpha, \delta$ [5]. Se trazan las curvas hasta  $n = 1$  (línea discontinua color azul).

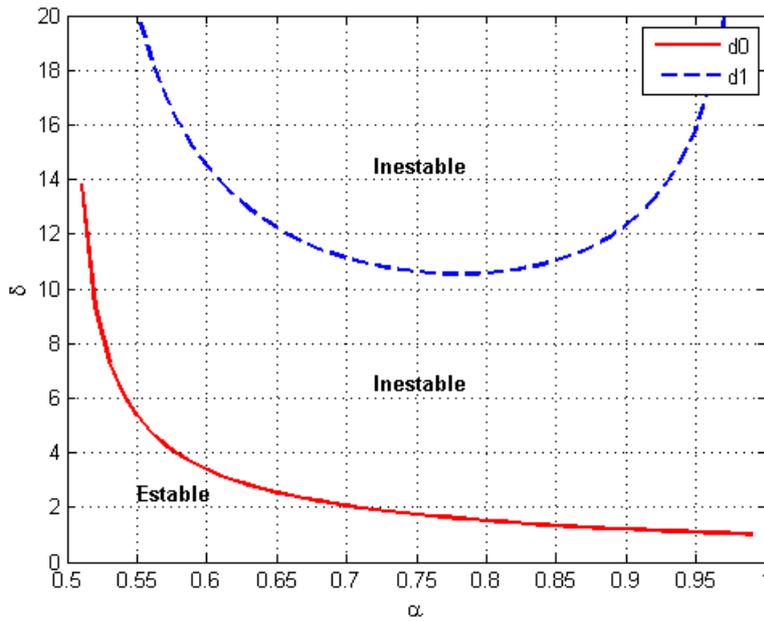


Figura 4.2: Diagrama de fase  $(\alpha, \delta)$  del oscilador con retardo obtenido a partir del análisis de estabilidad lineal.

Para evitar la inestabilidad de la solución en 4.3, es necesario que  $\alpha$  sea menor que la unidad; para que el primer término en la misma, sea pequeño en comparación con el término de retardo. Si fuera más grande que el término de retardo, este siempre dominaría y, por ende, la solución sería estable. Cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , el punto fijo es estable,  $\sigma_I = 0$  y la solución es una exponencial decreciente, sin importar el valor de las condiciones iniciales.

El siguiente paso consiste en resolver el sistema de ecuaciones dado por 4.5a y 4.5b; una vez encontrados los valores de  $\sigma_R$  y  $\sigma_I$ , se reemplazan en la ecuación 4.9, para analizar la estabilidad, eligiendo valores de  $(\alpha, \delta)$ , tanto por encima como debajo de la curva neutra.

Elegir  $\alpha = 0.75$ , para distintos valores de retardo  $\delta$ , donde  $sol_N$  y  $sol_L$  corresponden a la solución numérica y linealizada, respectivamente. La perturbación inicial es de  $T_P(0) = 0.05$ ; de modo que, la condición inicial  $T(0)$ , para realizar la solución numérica, va a ser  $T_1$  mas la perturbación (sería el punto fijo). Entonces, el punto fijo depende únicamente del valor que tome  $\alpha$ .

De la Figura 4.3 se deduce que para un retardo  $\delta = 1$ , las soluciones muestran en un comienzo el fenómeno El Niño, que término rápidamente y no volvió a haber más un evento cálido. La solución numérica como la linealizada, convergen rápidamente al punto fijo  $T_1 = 0.5$ , y son muy cercanas entre si. Cuando el retardo es  $\delta = 2$ , el fenómeno no presenta un comportamiento parecido a un tiempo posterior, donde la solución empieza a tener una conducta oscilatoria. Para  $\delta \geq 2$ , existe una separación entre  $sol_N$  y  $sol_L$ , teniendo un comportamiento oscilatorio, donde la periodicidad aumenta a medida que, el retardo se vuelve más grande, como se muestra en las Figuras 4.3(c) y 4.3(d).

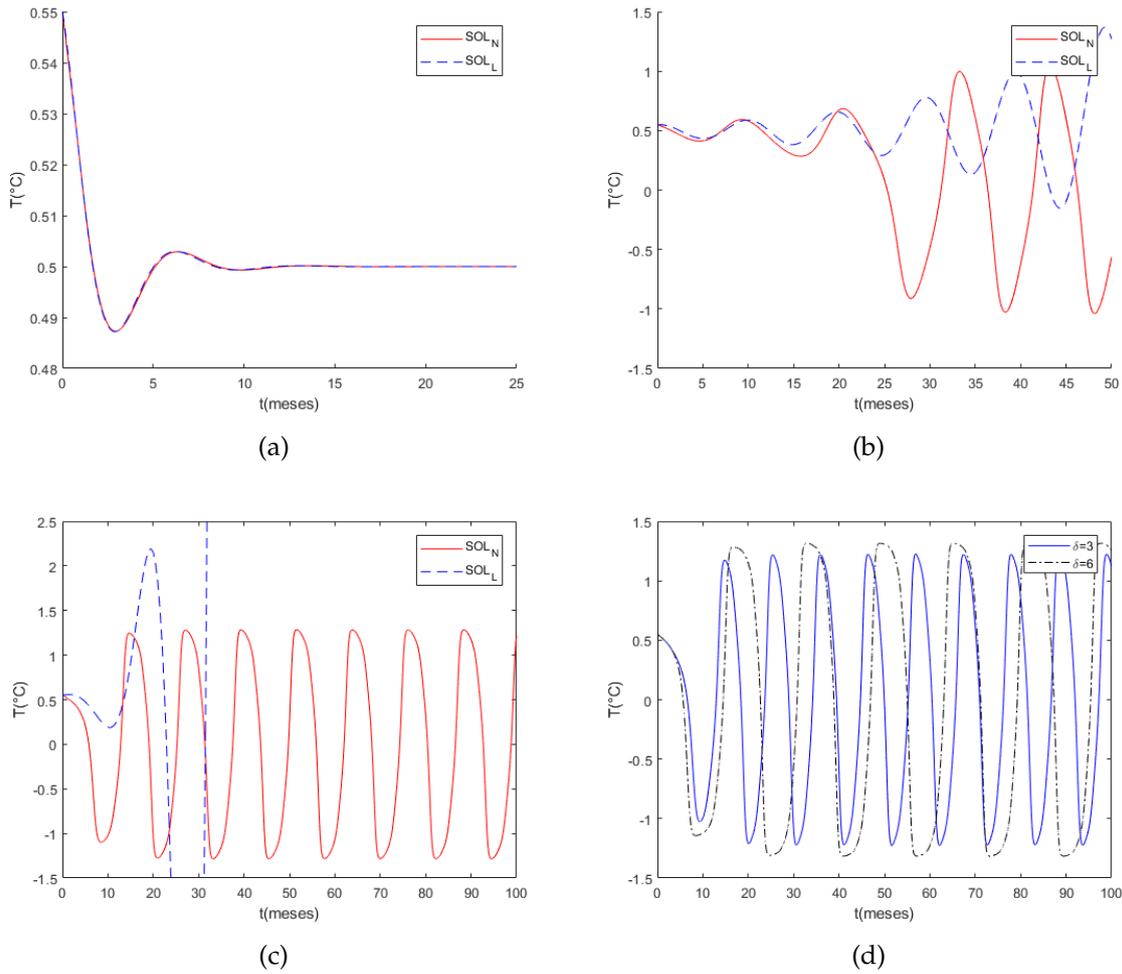


Figura 4.3: Solución  $T$  vs  $t$  para (a)  $\sigma_R \approx -0.44$  y  $\sigma_I \approx -0.94$ . La solución es **estable** para un retardo  $\delta = 1$ . (b)  $\sigma_R \approx 0.06$  y  $\sigma_I \approx -0.64$ . La solución es **casi neutra** para un retardo  $\delta = 2$ . (c)  $\sigma_R \approx 0.19$  y  $\sigma_I \approx -0.35$ . La solución es **inestable** para un retardo  $\delta = 4$ . (d) un retardo  $\delta = 3$  y  $\delta = 6$ .

A continuación, se hace el mismo ejercicio manteniendo invariable el retardo. Seleccionando  $\delta = 2$  y variando el valor de  $\alpha$  en un intervalo  $[0.5, 1]$ . Según la Figura 4.2, para un valor de  $\delta = 2$ , las soluciones se encuentran dentro de la región estable, cuando  $\alpha$  esta comprendida entre 0.5 y 0.7.

Los valores de  $\sigma_R$  y  $\sigma_I$ , se ilustran en la siguiente tabla:

$\alpha$	$\sigma_R$	$\sigma_I$
0.5	-0.30	-0.89
0.6	-0.15	-0.81
0.7	-0.01	-0.71
0.8	0.13	-0.56
0.9	0.26	-0.30

Se observa que  $\sigma_R < 0$ , cuando esta dentro de la región estable; fuera de ella toma valores positivos y las soluciones son oscilatorias. En las Figuras 4.4 (a)- (c), se

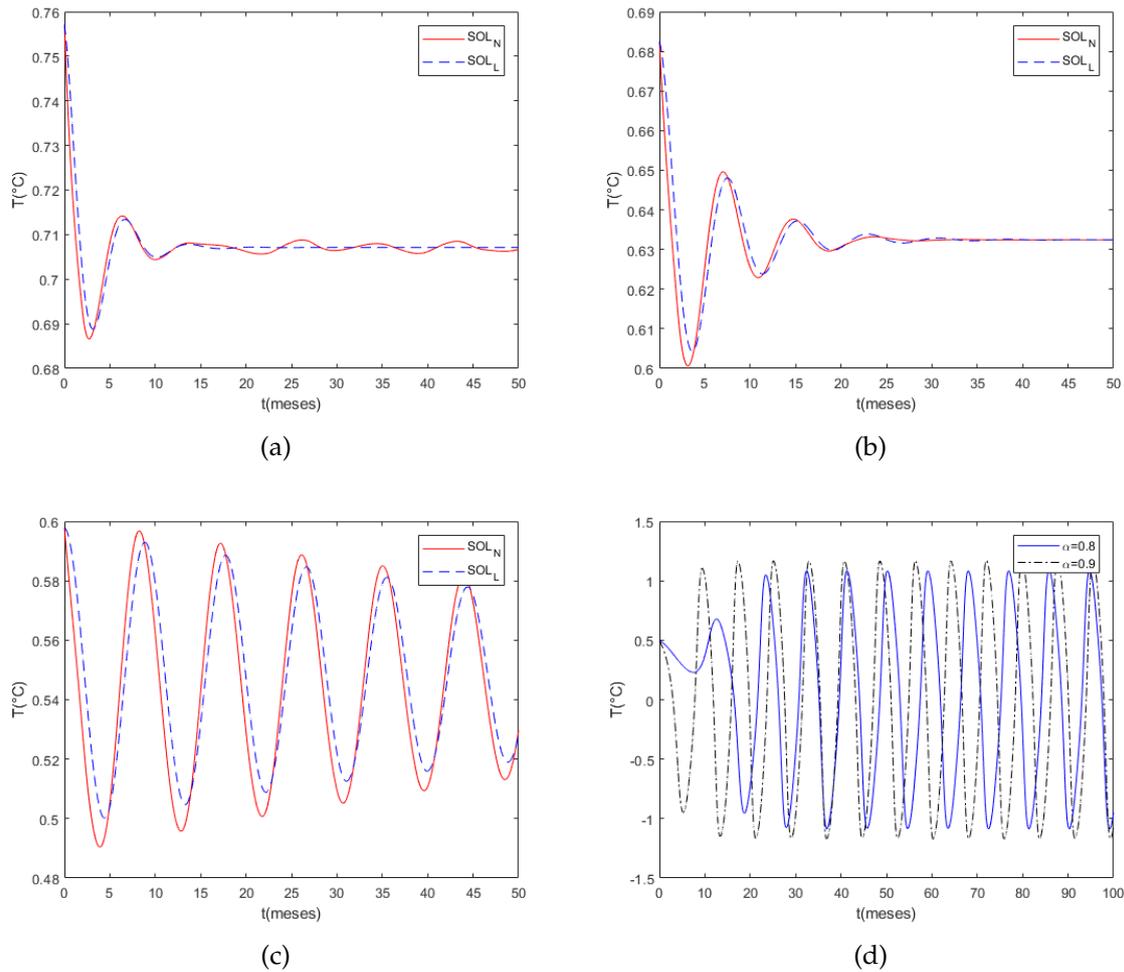


Figura 4.4: Solución  $T$  vs  $t$  para (a)  $\alpha = 0.5$ . (b)  $\alpha = 0.6$ . (c)  $\alpha = 0.7$ . (d)  $\alpha = 0.8$  y  $\alpha = 0.9$ .

presentan soluciones con un decaimiento oscilatorio. Mientras que, en 4.4 (d), surgen soluciones oscilatorias y para cada valor del parámetro  $\alpha$ , permite que la amplitud de estas varié; es decir, al aumentar  $\alpha$ , la amplitud de la solución también es mayor y se nota el cambio a pesar que, la variación del parámetro  $\alpha$  es pequeña.

### 4.1.2 Comparación de periodicidades

En resumen, la solución del modelo oscilador con retardo, produce o no oscilaciones para una cantidad de valores  $\alpha$  y  $\delta$ . El término de retardo, induce dichas oscilaciones y disminuye un poco el crecimiento de la perturbación inicial.

Para analizar la periodicidad del modelo oscilador con retardo; variando el retardo  $\delta$ , este conduce a escalas de tiempo similares a las que tiene el fenómeno ENSO; siempre y cuando los parámetros tomen valores que estén dentro de la región inestable.

En promedio las ondas Rossby, tardan en ir desde el Pacífico central ( $120^\circ$  el punto medio de la región Niño 3.4), hasta el límite occidental, 262 días; las ondas Kelvin unos 87 días en llegar al este del Pacífico oriental. [5]. Entonces, con dicha información es posible calcular el valor del parámetro  $a$ . Por lo tanto, el retardo total es  $\Delta = 349$

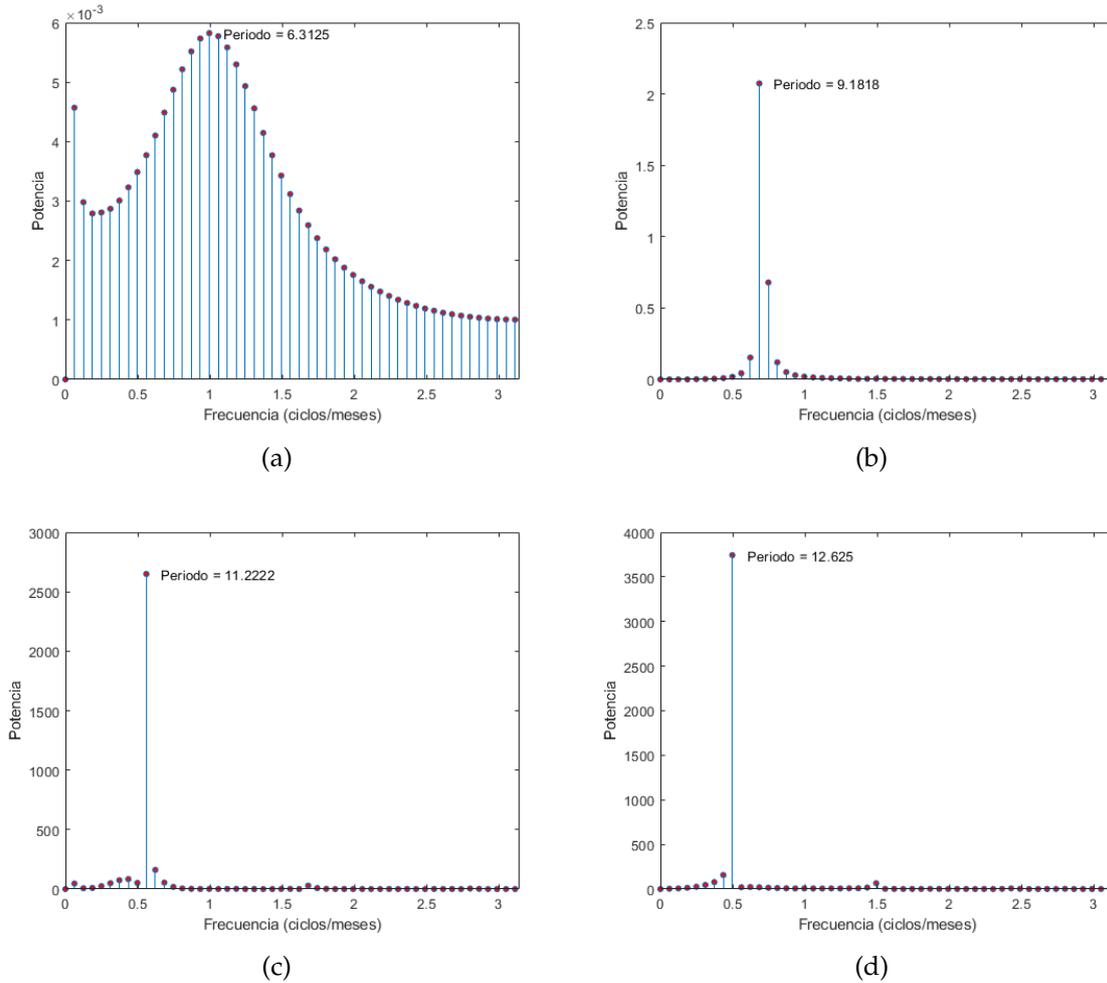


Figura 4.5: Espectro de Potencia cuando (a) el retardo es  $\delta = 1$ . (b) el retardo es  $\delta = 2$ . (c) el retardo es  $\delta = 3$ . (d) el retardo es  $\delta = 4$ .

días  $\approx 0.956$  yr y el parámetro de escala  $a = \delta/\Delta \approx 3.14$  yr $^{-1}$ ; el cual toma diferentes valores de acuerdo al valor que se elija para  $\delta$ .

Realizando una transformada de Fourier a la solución numérica  $T(t)$ , para valores de  $\alpha = 0.7$  y distintos retardos  $\delta$  durante 100 años, se observan los espectros de potencia en la Figura 4.5.

Por ejemplo, con  $\delta = 3$ , el periodo es  $\tau'_p \approx 11.22$ ; el cual corresponde a un periodo real de  $\tau_p = \tau'_p/a \approx 3.5$  años. Este valor está dentro del intervalo de una ocurrencia del fenómeno El Niño; por lo que, el modelo es una buena aproximación, para distintos valores de  $\alpha$  y  $\delta$ , siempre y cuando estén fuera de la región estable. Para un retardo  $\delta = 1$ , el periodo es igual a  $\tau_p = 2.01$  años, es decir, que esta en la región estable. Con  $\delta = 2$ , se obtuvo un periodo  $\tau_p = 2.92$  años, estando los valores de  $(\alpha, \delta)$  en todo el límite de las regiones, como se observa en la Figura 4.2.

### 4.1.3 Osciladores acoplados con retardo

En el estudio de la dinámica del acoplamiento de dos osciladores con términos de retardo, se incluyen dos regiones a lo largo de la franja ecuatorial. Las nuevas regiones acopladas son El Niño 3, para el primer oscilador y el Niño 4, para el segundo oscilador (ver Figura 4.14); para los cuales cada uno tiene la forma de la ecuación 4.2.

$$\frac{dT_1}{dt} = T_1 - \alpha T_1(t - \delta) - T_1^3 + \gamma T_2 \quad (4.10a)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = T_2 - \alpha T_2(t - \delta) - T_2^3 + \gamma T_1 \quad (4.10b)$$

Al considerar  $\alpha$  y  $\delta$  iguales, se hace bajo la conjetura de que las regiones, están muy próximas entre si y, por lo tanto, se encuentran en el mismo régimen fuerte del océano Pacífico. En realidad, estos parámetros son muy distintos en cada región; el tiempo que tarda la onda en viajar desde  $T_1$ , hasta el límite occidental y volver a la región donde se encuentra la anomalía de SST, va a ser mayor que el de  $T_2$ . Por otro lado, el coeficiente adicional  $\gamma > 0$ , hace referencia al flujo de energía que tiende a enfriar una región y calentar la otra, si una de ellas es más cálida que la otra[5].

En primer lugar, se procede a solucionar el sistema de ecuaciones, cuando los parámetros  $\delta$  y  $\alpha$  son iguales. En la Figura 4.6, se observa que los osciladores acoplados idénticos inicialmente presentan un desfase de  $\pi$ , y al cabo de un tiempo oscilan con el mismo periodo; confirmando que la temperatura de los dos osciladores es igual en dicha región.

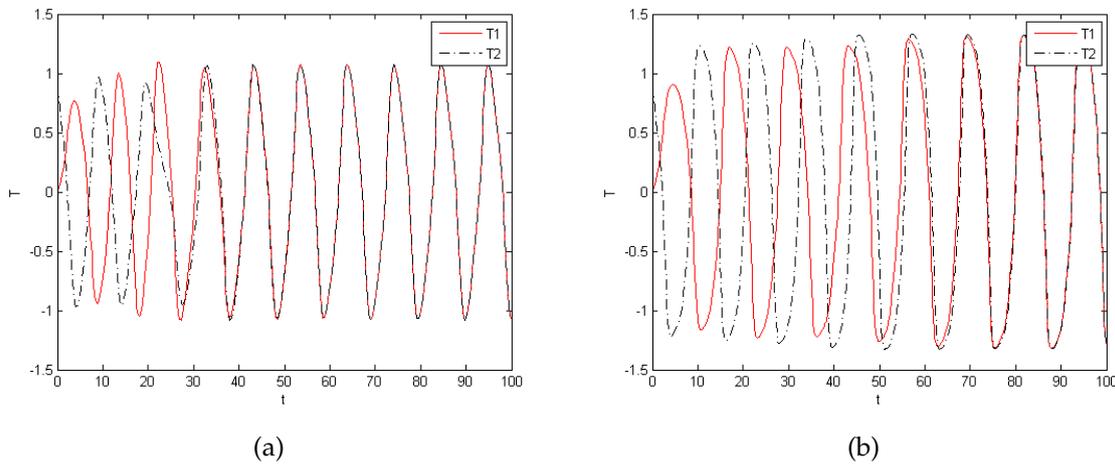


Figura 4.6: Solución numérica de la ecuación 4.10, con (a)  $\delta = 2$ . (b)  $\delta = 4$ .

Realizando de nuevo la solución numérica del conjunto de ecuaciones 4.10, tomando el valor de  $\alpha = 0.5$  para la región 1,  $\alpha = 0.75$  para la región 2. Además, tomar un retardo  $\delta = 4$  igual para las dos regiones y el acoplamiento  $\gamma$  tomará distintos valores. Para diferentes tamaños del acoplamiento océano-atmósfera  $\alpha$ , el oscilador correspondiente a la región 1, tiene una conducta irregular con amplitudes variables, cuando  $\gamma$  tiene valores iguales a 0.1 y 0.2, como se examina en la Figura 4.7. Un valor

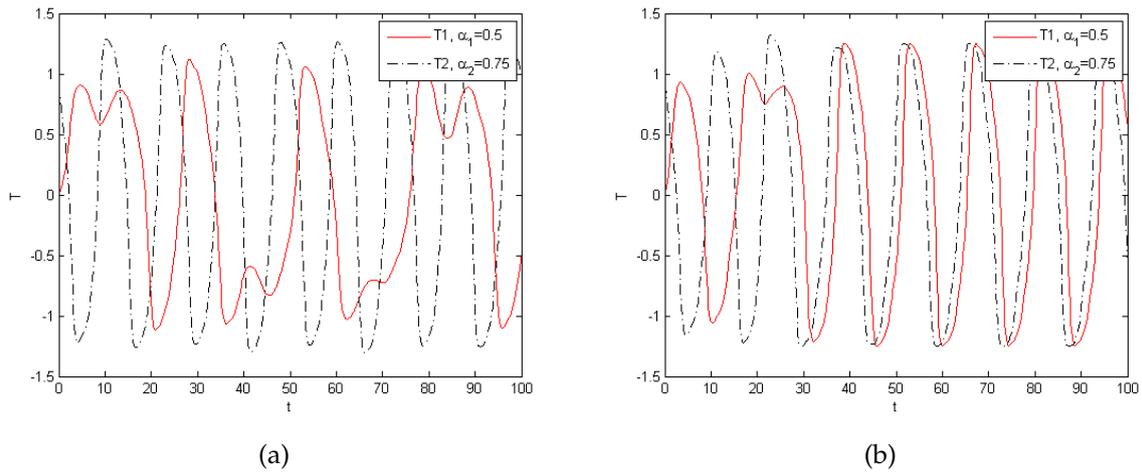


Figura 4.7: Solución numérica de la ecuación 4.10, tomando el acoplamiento entre regiones (a)  $\gamma = 0.1$ . (b)  $\gamma = 0.2$ .

grande del parámetro  $\gamma$ , tiende a llevar los dos osciladores a tener la misma temperatura.

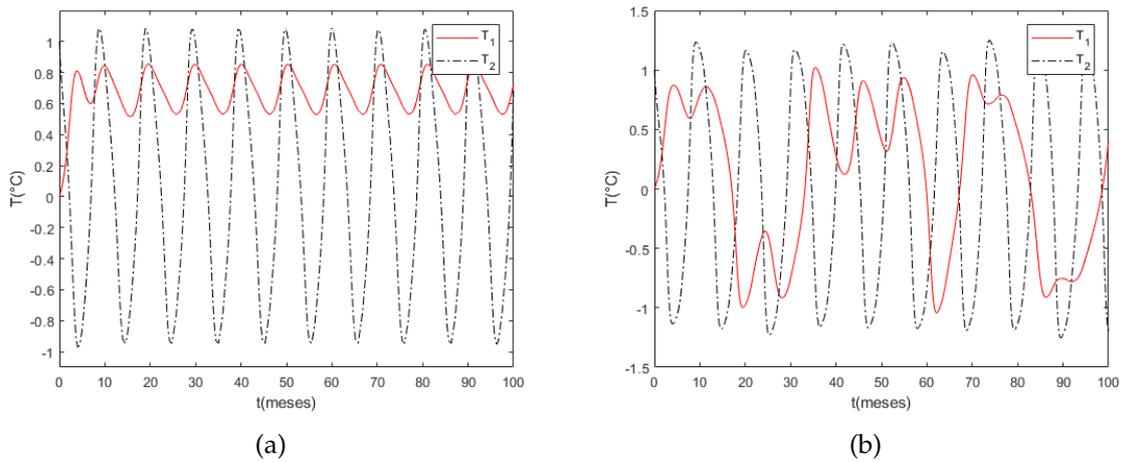


Figura 4.8: Solución numérica de la ecuación 4.10, para retardos (a)  $\delta_1 = 2$  y  $\delta_2 = 1$ . (b)  $\delta_1 = 3$  y  $\delta_2 = 2$ .

Considerar que los dos osciladores acoplados son totalmente diferentes, donde  $\delta_1 > \delta_2$ ,  $\gamma = 0.1$  y  $\alpha_i$ , toma los mismos valores que en los anteriores ejercicios. Para este caso, en que el tiempo de retardo del primer oscilador es mayor que el del segundo, las oscilaciones de color rojo en la Figura 4.8(b), muestran una forma irregular como en la Figura 4.7(a). Mientras que, la señal de color negro punteada, correspondiente al segundo oscilador, son similares entre si. Un retardo de tiempo grande para el primer oscilador, afecta la solución del segundo oscilador; esta tiene una amplitud y un periodo mayor.

## 4.2 Modelo oscilador recarga-descarga

En el modelo de “recarga-descarga” propuesto por Jin 1997 (en adelante J97), enfatiza la importancia para una inversión de fase del ciclo ENSO, con la acumulación (es decir, la carga) y liberación (es decir, la descarga), del contenido de calor del océano Pacífico, en la franja ecuatorial. La carga y la descarga, se generan por el desequilibrio entre el contenido de calor (volumen de agua cálida) del océano zonal medio y el esfuerzo de fricción del viento en el ecuador. El papel de la propagación y reflexión de las ondas del océano, queda implícito en este paradigma teórico. El modelo J97, se diferencia del modelo oscilador con retardo en dos aspectos principales: (i) consta de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales y (ii) la oscilación surge del tiempo requerido, para un equilibrio en la ecuación de la SST. De igual forma por el ajuste del océano, es decir, la escala de tiempo para la acumulación/liberación en el contenido de calor en el océano Pacífico.

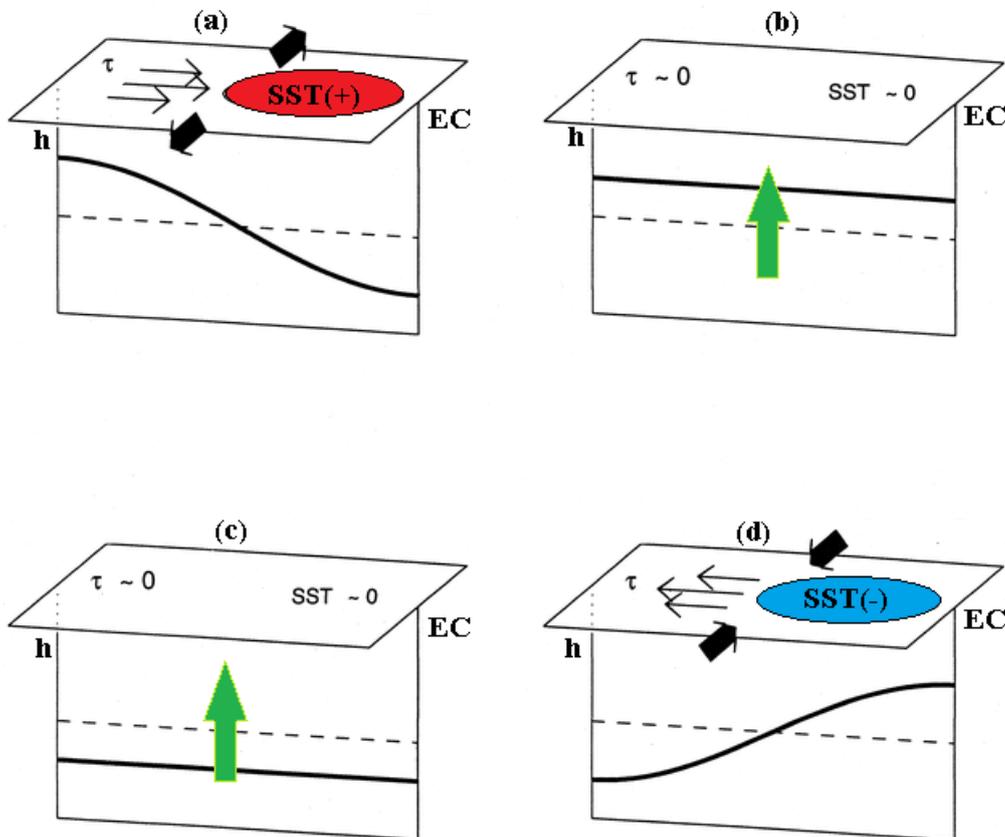


Figura 4.9: Bosquejo de las diferentes etapas del modelo oscilador recarga-descarga. Imagen modificada de Jin 1997a. La oscilación avanza en el sentido de las agujas del reloj.

El modelo de J97, percibe varias características sobresalientes del fenómeno ENSO. La acumulación de agua caliente en el Pacífico occidental, actúa como condición previa necesaria para el desarrollo de El Niño. Los vientos alisios del este, empujan el contenido de agua cálida del océano superior, hacia el oeste; profundizando la termoclina en esta región y acumulando gradualmente una cantidad de agua caliente.

Considerar nuevamente una anomalía positiva de la SST, en la parte centro-este del Pacífico Tropical, que induce una respuesta de vientos predominantes del oeste. La

pendiente de la termoclina es modificada, producto del ajuste del océano y se obtiene una termoclina más profunda en el este, y más superficial en el oeste. Debido a la profundización de la termoclina en el Pacífico oriental, la anomalía de la SST se extiende (hipótesis de Bjerknes) y lleva la oscilación a una fase cálida extrema, como se observa en el panel superior izquierdo de la Figura 4.9(a). En consecuencia, la anomalía de tensión del viento que viene del oeste, está en equilibrio con la fuerza de gravedad asociada a una menor inclinación de la termoclina ecuatorial; pero, simultáneamente mantiene un proceso de descarga continua del contenido de calor ecuatorial[14].

La profundidad media de la termoclina zonal se vuelve negativa, a través de la cuenca, como resultado de la divergencia del transporte de Sverdrup (flechas gruesas), y parte del contenido de calor ecuatorial se traslada a regiones fuera del ecuador (es decir, la descarga). Este proceso hace que la termoclina ecuatorial se aplane y reduce la anomalía de temperatura del este. En consecuencia, la anomalía de la tensión del viento se desvanece  $\tau \sim 0$ . Además, una termoclina poco profunda, permite que las aguas frías sean bombeadas a la capa superficial por surgencia climatológica (flechas color verde) y la normalización de la SST; tal como se ilustra en la Figura 4.9(b), la fase de transición calor a frío. Esto causa una anomalía negativa en la SST, que conduce a través de la amplificación a la fase fría del ciclo como en la Figura 4.9(d). Los vientos alisios se fortalecen, teniendo como resultado una termoclina más profunda en el oeste, y más superficial en el este del Pacífico Tropical. Mediante el ajuste del océano, se recarga el contenido de calor ecuatorial (ahora, la convergencia del transporte de Sverdrup) y conduce a una fase de transición, con una anomalía de termoclina ecuatorial positiva 4.9(c).

El modelo J97, es interpretado por la profundidad de la termoclina occidental y oriental, la tensión del viento central y la SST en el Pacífico oriental. Todas estas variables son clave en el ENSO y se representan como anomalías relativas a la media climatológica.

Desde el punto de vista de la dinámica ENSO, los procesos que establecen la profundidad media de la termoclina, se producen en escalas de tiempo largas. Si los vientos ecuatoriales se desvanecen, la profundidad de la termoclina sería de unos 100 metros, e independiente de la longitud[11]. Pero, cuando se presentan vientos hacia el oeste, surge un desplazamiento de agua hacia el oeste en el ecuador, se acumula contra la pared vertical en el Pacífico occidental, hasta que la fuerza hacia el oeste ejercida por el viento se equilibra con la fuerza hacia el este, ejercida por la presión; debido al mayor peso del agua en el oeste. Si en un tiempo cualquiera dejara de existir los vientos, el agua fluiría hacia el este, hasta que se restablecieran las condiciones de la Figura 4.9(b). Dicho de otra manera, la fuerza gradiente de presión horizontal, que acompaña a la inclinación de la profundidad de termoclina a lo largo del ecuador, está en un equilibrio Sverdrup con la fuerza de fricción de los vientos. Este cuasibalace conduce a una relación lineal de la siguiente forma

$$H_E = H_W + \hat{\tau} \quad (4.11)$$

donde  $\hat{\tau}$  es proporcional al esfuerzo del viento, integrado por zonas en la franja ecuatorial.  $H_E$  y  $H_W$  representan la anomalía de la profundidad de termoclina en el este y en el oriente del Pacífico Tropical, respectivamente. Esta relación indica que

la pendiente anómala, es proporcional a la fuerza de fricción del viento. En el caso de El Niño, se tiene una pendiente negativa, es decir,  $-(H_E + H_W) = \hat{\tau}$ , y en La Niña, la pendiente es positiva; los vientos son en la dirección negativa, de la forma  $(H_E + H_W) = -\hat{\tau}$ .

La siguiente ecuación propuesta por J97, se encamina a los cambios de profundidad en la termoclina, promediados sobre el Pacífico occidental, durante el ajuste de toda la cuenca; es decir, la carga o descarga del contenido de calor, asociada a las anomalías de viento, que tienen lugar en el Pacífico occidental al central[11].

$$\frac{dH_W}{dt} = -rH_W - \wp\hat{\tau} \quad (4.12)$$

El primer término en el lado derecho, representa los procesos de ajuste del océano, que actúan a una velocidad  $r$ . La tasa de crecimiento  $r$ , representa colectivamente la amortiguación del sistema oceánico superior, a través de la mezcla y pérdida de energía ecuatorial en las corrientes de la capa límite, en los lados este y oeste de la cuenca oceánica. El término  $\wp\hat{\tau}$ , representa el transporte de Sverdrup, a través de la cuenca. Por lo tanto, las ecuaciones 4.11 y 4.12, dan una descripción general del cuasi-equilibrio, entre la inclinación de la termoclina y el esfuerzo del viento, es decir, el ajuste oceánico ecuatorial, como el mecanismo primordial para una transición de fase en el ENSO.

Las variaciones de la SST se presentan, fundamentalmente más hacia el centro y el este del Pacífico Tropical. La magnitud de los vientos alisios, puede reforzar la anomalía de SST, al perturbar las corrientes ascendentes y la advección horizontal. Así que, una ecuación que represente la anomalía de SST, viene representada por  $T_E$  promediada sobre el Pacífico ecuatorial del centro al este

$$\frac{dT_E}{dt} = -cT_E + \gamma H_E + \delta_s \tau_E \quad (4.13)$$

El término  $-cT_E$ , significa un debilitamiento de la anomalía de SST, con una tasa de amortiguación colectiva  $c$ . Los términos segundo y tercero son los procesos de retro-alimentación ascendente y advectiva de la termoclina, respectivamente; donde  $\tau_E$  es el esfuerzo de fricción del viento localizado donde se encuentra la anomalía de SST,  $\gamma$  y  $\delta_s$  son coeficientes de retroalimentación para la termoclina y el bombeo de Ekman.

La anomalía de los vientos, está directamente relacionada con la SST del Pacífico centro al este, de la siguiente forma:

$$\hat{\tau} = bT_E, \quad \tau_E = b'T_E \quad (4.14)$$

donde  $b$  y  $b'$  son coeficientes de acoplamiento.

De modo que, una combinación de las ecuaciones 4.11-4.14, proporciona el modelo oscilador recarga-descarga, que consta de dos ecuaciones de pronóstico y dos ecuaciones de diagnóstico[14].

$$\frac{dH_W}{dt} = -rH_W - \wp b T_E \quad (4.15a)$$

$$\frac{dT_E}{dt} = RT_E + \gamma H_W \quad (4.15b)$$

$$\hat{t} = bT_E \quad (4.15c)$$

$$H_E = H_W + \hat{t} \quad (4.15d)$$

donde  $R = \gamma b + \delta_s b' - c$ . En analogía a la ecuación con retardo del modelo anterior,  $R$  describe los procesos de retroalimentación positiva de Bjerknes de la interacción océano-atmósfera.

Entonces el sistema 4.15a-4.15b, resulta en dos ecuaciones lineales de primer orden, con dos incógnitas; que puede ser escrito en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} H'_W \\ T'_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -\wp b \\ \gamma & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_W \\ T_E \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

o abreviadamente

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = A\vec{Y};$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -r & -\wp b \\ \gamma & R \end{pmatrix}; \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} H_W \\ T_E \end{pmatrix}$$

la matriz  $A$  del sistema se llama *matriz de coeficientes*. Los posibles valores propios del sistema de ecuaciones se hallan como

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\lambda^2 + (r - R)\lambda + \wp b\gamma - rR = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-(r - R) \pm \sqrt{(r - R)^2 - 4(\wp b\gamma - rR)}}{2} \\ &= \frac{(R - r)}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2 - 2rR + R^2 - 4\wp b\gamma + 4rR}}{2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{(R - r)}{2} \pm i\sqrt{\wp b\gamma - (R + r)^2/4} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Así que, los valores propios son de la forma  $\lambda = a \pm i\omega$ , cuyas raíces son complejas. La parte real o tasa de crecimiento, conduce a una inestabilidad, cuando se cumple que  $(R - r)/2 > 0$ . Entre tanto  $\wp b\gamma$ , representa el mecanismo de recarga y permite oscilación cuando la frecuencia  $\omega = \sqrt{\wp b\gamma - (R + r)^2/4}$  es real. El esfuerzo de fricción es pequeño en el Pacífico oriental y, por ende, la corriente ascendente de Ekman  $\delta_s$  es pequeña, por lo que se puede despreciar. Por lo tanto, la frecuencia va a depender en gran medida del término  $\gamma b$  y entonces  $R = \gamma b - c$ [11].

Una ecuación de oscilación se obtiene a partir de 4.15a y 4.15b[14]. Diferenciando 4.15b con respecto a  $t$  y reemplazando 4.15a, da lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d^2T_E}{dt^2} &= R\frac{dT_E}{dt} + \gamma\frac{dH_W}{dt} \\ &= R\frac{dT_E}{dt} + \gamma[-rH_W - \wp bT_E] \\ &= R\frac{dT_E}{dt} - \gamma rH_W - \gamma\wp bT_E\end{aligned}\quad (4.18)$$

A partir de 4.15b se encuentra que

$$\gamma rH_W = r\frac{dT_E}{dt} - rRT_E$$

reemplazando en 4.18

$$\begin{aligned}\frac{d^2T_E}{dt^2} - R\frac{dT_E}{dt} + r\frac{dT_E}{dt} - rRT_E + \gamma\wp bT_E &= 0 \\ \frac{d^2T_E}{dt^2} - (R - r)\frac{dT_E}{dt} + (\wp b\gamma - rR)T_E &= 0\end{aligned}\quad (4.19)$$

Se observa la importancia del término  $\wp b\gamma$ , el cual es de gran importancia, y tiende a producir un comportamiento oscilatorio con un periodo  $P = 2\pi/\omega$  de la forma

$$P = 2\pi[\wp b\gamma - (R + r)^2/4]^{\frac{1}{2}}\quad (4.20)$$

Es necesario saber el valor de los parámetros en el sistema 4.15a-4.15b, para poder obtener una solución. El coeficiente  $b$ , es una medida de la pendiente de la termoclina, que está en equilibrio con el esfuerzo de fricción del viento producida por la anomalía de SST. J97 introdujo un coeficiente relativo  $\mu$  como

$$b = b_0\mu\quad (4.21)$$

El parámetro  $\mu$  estará comprendido entre 0 y 1.5, abarcando los casos fuertemente acoplados y desacoplados. Los demás parámetros se eligen de tal manera, que el sistema queda no dimensionalizado. Los valores son para  $c = 1$ ,  $\gamma = 0.75$ ,  $r = 0.25$ ,  $\wp = 0.125$  y  $b_0 = 2.5$ [11]. Entonces, un reemplazo en 4.17, hace posible hallar los valores propios como

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{\left(\frac{15}{8}\mu - \frac{5}{4}\right)}{2} \pm i\sqrt{\frac{15}{64}\mu - \frac{225}{256}\mu^2 + \frac{45}{64}\mu - \frac{9}{64}} \\ &= \left(\frac{15}{16}\mu - \frac{5}{8}\right) \pm i\sqrt{-\frac{225}{256}\mu^2 + \frac{15}{16}\mu - \frac{9}{64}} \\ &= \left(\frac{15}{16}\mu - \frac{5}{8}\right) \pm i\sqrt{-\frac{225}{256}\left(\mu^2 - \frac{16}{15}\mu + \frac{4}{25}\right)} \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{15}{16}\left(\frac{2}{3} - \mu \pm i\sqrt{(\mu - \mu_1)(\mu_2 - \mu)}\right)\end{aligned}\quad (4.22)$$

donde

$$\mu_1 = (8 - \sqrt{28})/15, \quad \mu_2 = (8 + \sqrt{28})/15 \quad (4.23)$$

Los resultados se muestran en el siguiente apartado, para distintos valores de  $\mu$ , que admiten soluciones inestables y oscilatorias.

#### 4.2.1 Solución numérica del Modelo oscilador recarga-descarga

Un análisis de los valores permitidos, para que el coeficiente de acoplamiento relativo  $\mu$ , lleve las soluciones a un proceder oscilatorio; se analiza a continuación y conlleva al estudio de la naturaleza de los valores propios.

En la Figura 4.10, se gráficán los valores propios 4.22, que están identificados por las curvas con puntos de color negro. En el punto en que el coeficiente de acoplamiento relativo  $\mu = 0$ , el sistema de ecuaciones de J97, tiene dos *modos reales* en descomposición que se unen cuando  $\mu = \mu_1 \approx 0.18$ . Luego, estos dos modos se fusionan en un *modo oscilatorio complejo*, a medida que el coeficiente de acoplamiento aumenta  $\mu > \mu_1$ . Un valor más grande hasta llegar a  $\mu = \mu_2 \approx 0.89$ ; el oscilador se divide en dos *modos reales* nuevamente. Uno de ellos es creciente, producto de la retroalimentación de Bjerknes y el otro modo presenta una tasa de crecimiento negativa. Por otro lado, la curva con puntos de color rojo, representa la tasa de crecimiento para la frecuencia, es decir, la parte imaginaria de uno de los valores propios. Esta curva se intercepta con el modo complejo en  $\mu = 0.35$ .

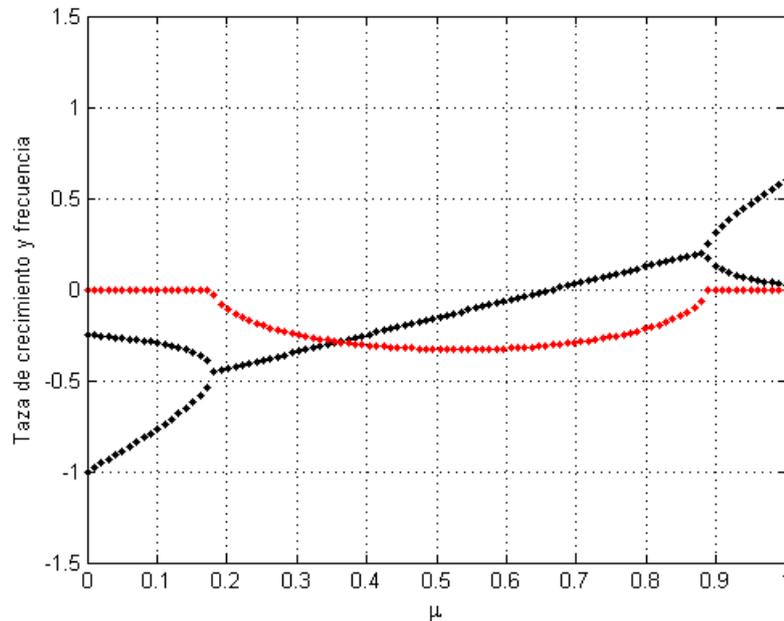


Figura 4.10: Valores propios en función del coeficiente de acoplamiento relativo  $\mu$ .

Para que la solución del sistema de ecuaciones 4.15a-4.15b sea oscilatoria, los valores propios deben ser complejos. La región donde  $\lambda_{1,2}$  se juntan en un solo modo oscilatorio; tiene la parte real negativa, por lo tanto, las soluciones para  $H_W$  y  $T_E$ ,

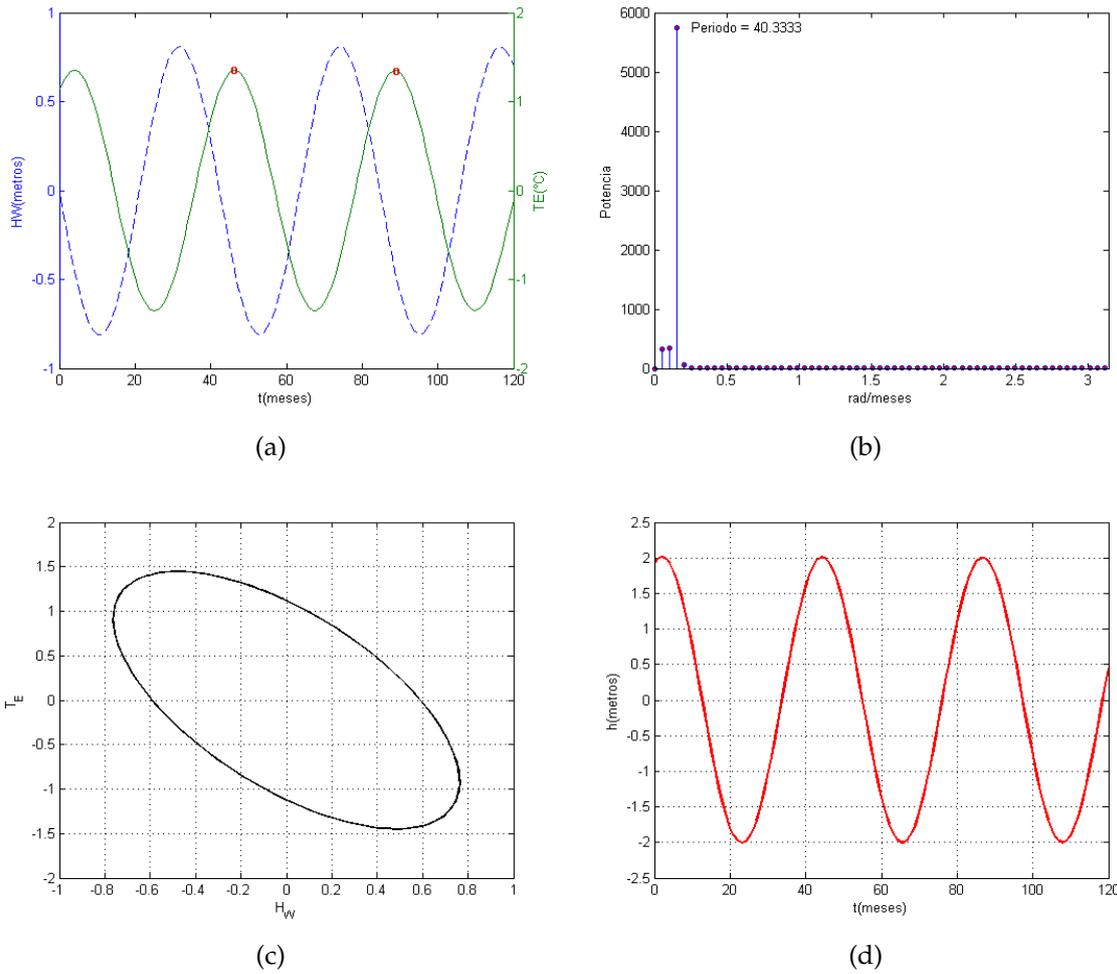


Figura 4.11: **(a)** Solución numérica  $H_W$  en metros, línea discontinua color azul y  $T_E$  en  $^{\circ}\text{C}$ , línea continua color verde. **(b)** Espectro de frecuencias para  $T_E$ . **(c)** Trayectoria de la solución en el plano fase  $(H_W, T_E)$ . **(d)** Anomalía de la profundidad media de la termoclina.

decaen rápidamente y no exhibe oscilación periódica alguna.

En la Figura 4.11(a), se trazan las soluciones para  $H_W$  y  $T_E$  con un valor de acoplamiento relativo  $\mu = 2/3$ , y condiciones iniciales para  $H_W(0) = 0$  m y  $T_E(0) = 1.125$   $^{\circ}\text{C}$ . La tasa de crecimiento para un acoplamiento crítico  $\mu_c = 2/3$ <sup>1</sup> es nula (caso particular que tiene esta característica), solo existe una frecuencia crítica  $\omega_c = \sqrt{\rho\gamma} = \sqrt{3/32} = 0.3062$ ; lo que indica una oscilación armónica perfecta. Por otro parte, se observa que la solución  $T_E$ , presenta un periodo de aproximadamente 40.33 meses que equivalen a 3.36 años, como se observa en la Figura 4.11(b). En cuanto a la Figura 4.11(c), se examina una órbita elíptica, centrada en el origen característica de las soluciones periódicas. Por último, la Figura 4.11(d) muestra el comportamiento para la anomalía de profundidad media de termoclina zonal, calculada como  $h = H_W + b_0\mu T_E$ . La amplitud de  $h$  varía de  $\pm 2$  metros; cuando  $h = 2$ , corresponde al estado de transición

<sup>1</sup>Bifurcación de Hopf: es un punto crítico donde la estabilidad de un sistema cambia y surge una solución periódica. Más exactamente, es una bifurcación local en la que un punto fijo de un sistema dinámico pierde estabilidad, ya que un par de valores propios conjugados complejos de la linealización alrededor de un punto fijo, cruza el eje imaginario del plano complejo.

entre un evento cálido a uno frío y  $h = -2$ , para una transición viceversa, tal como se observa en las Figura 4.9(d).

## 4.2.2 Obtención del modelo con retardo a partir del modelo recarga-descarga

El modelo oscilador con retardo puede escribirse de una forma muy relacionada con el oscilador de recarga-descarga. La ecuación  $T_E$  4.15b, es modificada considerando que la anomalía de la profundidad de termoclina del Pacífico occidental, es negativamente proporcional a la SST del Pacífico oriental, con un retardo de tiempo  $\delta$ . La ecuación  $H_W$  es modificada, reemplazando  $H_W$  como

$$\begin{aligned} H_W &= -\wp[\hat{\tau}(t - \delta)] \\ &= -\wp b_0 \mu T_E(t - \delta) \end{aligned} \quad (4.24)$$

combinando 4.24 con 4.15b, conduce a la forma familiar del oscilador con retardo lineal

$$\frac{dT_E}{dt} = RT_E - \hat{b}T_E(t - \delta) \quad (4.25)$$

donde  $\hat{b} = \sqrt{\gamma\wp b_0\mu}$  y  $R = \gamma b_0\mu - c$  ( $\wp, \gamma, b_0$  y  $c$  son los mismos que se utilizaron en el apartado anterior). Cuando el parámetro  $\mu = \mu_c$ , J97 define  $\delta$  como

$$\delta = \arctan(\omega_c/r)/\omega_c \quad (4.26)$$

donde  $\omega_c = \sqrt{3/32}$ . La solución se muestra en la Figura 4.12, donde se observa una solución periódica como era de esperarse.

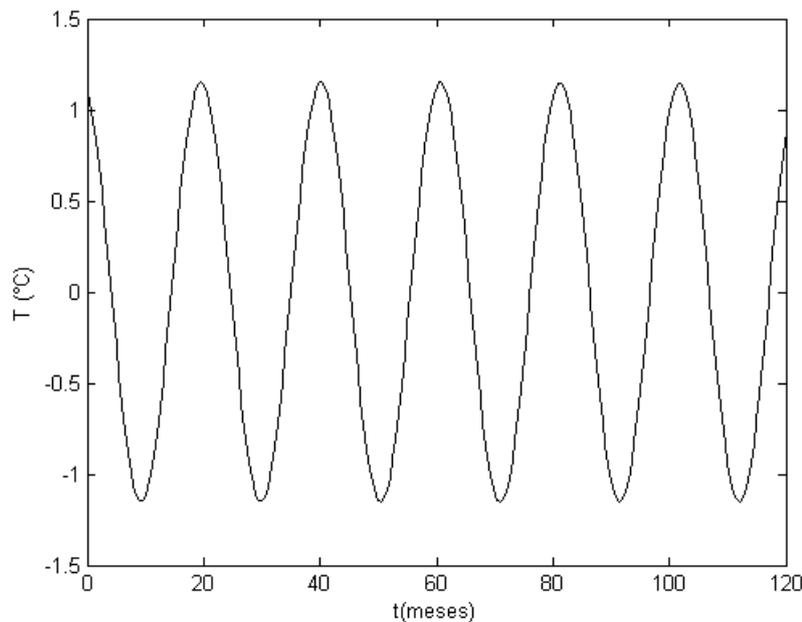


Figura 4.12: Solución numérica de 4.25 cuando  $\mu = \mu_c = 2/3$ . El retraso tiene un valor de  $\delta = 2.89$  meses.

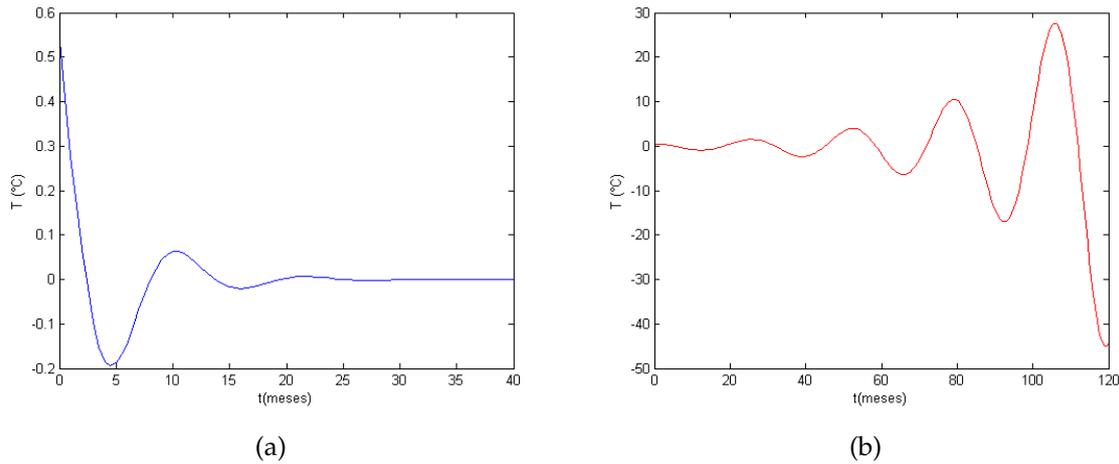


Figura 4.13: Solución numérica de 4.25 para  $\delta = 3$  y (a)  $\mu = 0.4$ . (b)  $\mu = 0.7$ .

En la Figura 4.13, se escogen valores del parámetro  $\mu$  igual a 0.4 (menor que  $\mu_c$ ) y 0.7 (mayor que  $\mu_c$ ). De acuerdo con la ecuación de valores propios 4.22, la solución de color azul (rojo) tiene valores propios de la forma  $\lambda_{1,2} = -0.2500 \pm 0.3062i$  ( $\lambda_{1,2} = 0.0313 \pm 0.2915i$ ). Se observa que, en la Figura 4.13(a) la solución presenta un decaimiento oscilatorio, puesto que la tasa de crecimiento es negativa y la frecuencia es igual a  $\omega_c$ ; hace posible una pequeña oscilación. En relación al modelo oscilador con retardo de Suárez y Schopf, la solución es estable como en la Figura 4.3(a). De hecho, se establece una relación con el valor de  $\sigma_R$  y la tasa de crecimiento en los valores propios del modelo de J97, ambos tienen cantidades negativas.

Un crecimiento oscilatorio se muestra en la Figura 4.13(b), puesto que la parte real de los valores propios es positiva y del mismo modo que en la Figura 4.13(a), tiene un parecido a la solución del modelo con retardo, como en la Figura 4.3(b), donde el comportamiento es casi neutro y  $\sigma_R$  es positivo (casi cero). Por lo que, se concluye que la solución tiene periodicidad, sólo cuando el parámetro de acoplamiento relativo  $\mu$ , es igual a la bifurcación de Hopf  $\mu_c = 2/3$ , es decir, que los valores por encima o por debajo de este punto crítico, no tendrían sentido.

### 4.3 Episodios fríos y cálidos del ciclo Enso

Para una mayor comprensión, de cómo se desarrollan los eventos El Niño/La Niña del ciclo ENSO, a lo largo del océano Pacífico ecuatorial, se han definido cuatro regiones para el muestreo de datos de la SST. De oeste a este, estas regiones se muestran en la Figura 4.14 y han sido denominadas como: Regiones Niño 4, Niño 3.4, Niño 3 y Niño 1+2.

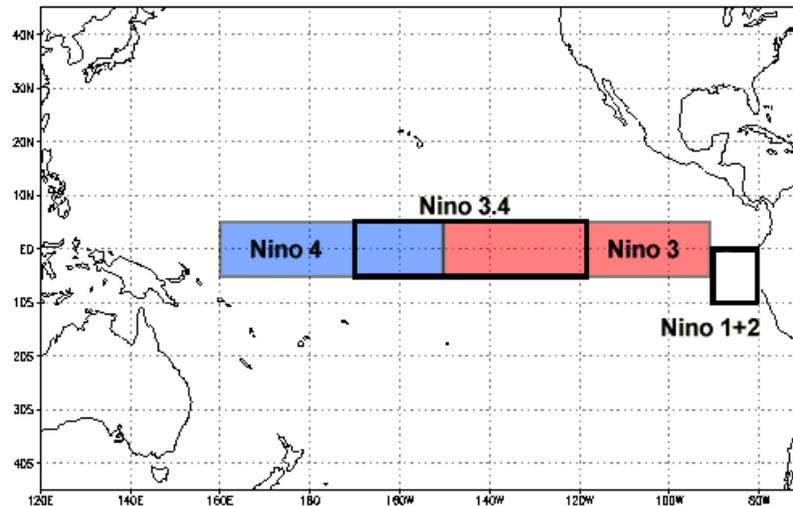


Figura 4.14: El Pacífico tropical, incluyendo la definición de las cuatro regiones de El Niño.

Imagen extraída del sitio web de la NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration): <https://www.ncdc.noaa.gov/teleconnections/enso/indicators/sst/>

Las áreas están definidas de la siguiente manera:

- Niño 1 + 2 (0°-10°S, 90°W-80°W): La región Niño 1 + 2 es la más pequeña de las regiones del niño SST, y corresponde a la región costera de Sudamérica. Este índice tiende a tener la mayor varianza de los índices de Niño SST.
- Niño 3 (5°N-5°S, 150°W-90°W): Esta región fue el centro de atención para monitorear y predecir El Niño, pero luego los investigadores descubrieron, que la región clave para las interacciones acopladas océano-atmósfera para ENSO, se encuentra más al oeste.
- Niño 3.4 (5°N-5°S, 170°W-120°W): Se puede considerar que las anomalía del Niño 3.4, representa el promedio de la SST ecuatorial en todo el Pacífico; desde aproximadamente la línea de datos, hasta la costa sudamericana. El índice de Niño 3.4 normalmente utiliza una media móvil de 5 meses, y los eventos de El Niño o La Niña se definen cuando las SST de Niño 3.4 superan los +/- 0.5 °C durante un período de seis meses o más.
- Niño 4 (5°N-5°S, 160°E-150°W): El índice del Niño 4, captura anomalías de SST en el Pacífico ecuatorial central. Esta región tiende a tener menos varianza, que las otras regiones de El Niño.

Basado en la SST de la región Niño 3.4 del Pacífico Tropical, se definió un índice que recibe el nombre de *Índice de El Niño Oceánico* (en adelante ONI, del inglés Oceanic Niño Index). Este índice, se define como una media móvil de tres meses consecutivos de la SST en esta región. Un estado El Niño, se caracterizará por un ONI positivo, igual o mayor que  $+0.5$  °C. Un estado La Niña, se caracterizará por un ONI negativo, menor o igual que  $-0.5$  °C. Todos los valores que queden entre esos dos; serán estados neutrales. Para que se consideren condiciones El Niño o La Niña, estas anomalías de la SST se deben mantener, como mínimo en cinco estaciones. Las estaciones abarcan tres meses, y estos meses se superponen unos con otros, es decir: diciembre, enero y febrero (DJF) sería la primera estación; enero, febrero y marzo (JFM), la segunda; febrero, marzo y abril (FMA) la tercera y así sucesivamente. En la Figura 4.15 se gráfica los datos desde el año 1950 hasta 2018 del ONI<sup>2</sup>, extraídos de: [https://origin.cpc.ncep.noaa.gov/products/analysis\\_monitoring/ensostuff/ONI\\_v5.php](https://origin.cpc.ncep.noaa.gov/products/analysis_monitoring/ensostuff/ONI_v5.php) Como se muestra en las siguientes tablas:

De las tablas 4.1-4.7, se puede observar que la alternancia entre las fases cálidas y frías es bastante irregular. Sin embargo, es necesario visualizar el espectro de potencia de las señales para cada estación, y determinar la existencia hacia una escala temporal preferida, para la recurrencia típica de ENSO. Si realmente hay una oscilación dominante, se produce un pico de potencia en esa frecuencia. En las Figuras 4.17(a)-(c), hay un pico espectral de 1.1, 1.3 y 1.7 ciclos por año, para los meses FMA, MJJ y JJA, respectivamente. Los picos más altos, comprenden periodos de 6,5 y 4 años; que particularmente en dichas épocas del año, las anomalías frías/cálidas de la SST, son más prominentes para cualquier año. No obstante, son potencias altas desde periodos de aproximadamente 3 años.

Año	DJF	JFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDJ
1950	-1.5	-1.3	-1.2	-1.2	-1.1	-0.9	-0.5	-0.4	-0.4	-0.4	-0.6	0.8
1951	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0	1.2	1.0	0.8
1952	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.0	-0.1	0.0	0.2	0.1	0.0	0.1
1953	0.4	0.6	0.6	0.7	0.8	0.8	0.7	0.7	0.8	0.8	0.8	0.8
1954	0.8	0.5	0.0	-0.4	-0.5	-0.5	-0.6	-0.8	-0.9	-0.8	-0.7	-0.7
1955	-0.7	-0.6	-0.7	-0.8	-0.8	-0.7	-0.7	-0.7	-1.1	-1.4	-1.7	-1.5
1956	-1.1	-0.8	-0.6	-0.5	-0.5	-0.5	-0.6	-0.6	-0.5	-0.4	-0.4	-0.4
1957	-0.2	0.1	0.4	0.7	0.9	1.1	1.3	1.3	1.3	1.4	1.5	1.7
1958	1.8	1.7	1.3	0.9	0.7	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.5	0.6
1959	0.6	0.6	0.5	0.3	0.2	-0.1	-0.2	-0.3	-0.1	0.0	0.0	0.0

Tabla 4.1: Datos del ONI para la década de 1950.

<sup>2</sup>La Administración Nacional Oceánica y Atmosférica (NOAA), es una agencia científica del Departamento de Comercio de los Estados Unidos, cuyas actividades se centran en las condiciones de los océanos y la atmósfera. El monitoreo del Pacífico tropical y ecuatorial (por ser un área extensa y remota que rara vez es visitada por barcos), se hace por medio de un conjunto de boyas, para medir las variables oceanográficas y meteorológicas

Año	DJF	JFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDJ
1960	-0.1	-0.1	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1
1961	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.1	-0.1	-0.3	-0.3	-0.2	-0.2
1962	-0.2	-0.2	-0.2	-0.3	-0.3	-0.2	0.0	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4
1963	-0.4	-0.2	0.2	0.3	0.3	0.5	0.9	1.1	1.2	1.3	1.4	1.3
1964	1.1	0.6	0.1	-0.3	-0.6	-0.6	-0.6	-0.7	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8
1965	-0.6	-0.3	-0.1	0.2	0.5	0.8	1.2	1.5	1.9	2.0	2.0	1.7
1966	1.4	1.2	1.0	0.7	0.4	0.2	0.2	0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3
1967	-0.4	-0.5	-0.5	-0.4	-0.2	0.0	0.0	-0.2	-0.3	-0.4	-0.3	-0.4
1968	-0.6	-0.7	-0.6	-0.4	0.0	0.3	0.6	0.5	0.4	0.5	0.7	1.0
1969	1.1	1.1	0.9	0.8	0.6	0.4	0.4	0.5	0.8	0.9	0.8	0.6

Tabla 4.2: Datos del ONI para la década de 1960.

Año	DJF	JFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDJ
1970	0.5	0.3	0.3	0.2	0.0	-0.3	-0.6	-0.8	-0.8	-0.7	-0.9	-1.1
1971	-1.4	-1.4	-1.1	-0.8	-0.7	-0.7	-0.8	-0.8	-0.8	-0.9	-1.0	-0.9
1972	-0.7	-0.4	0.1	0.4	0.7	0.9	1.1	1.4	1.6	1.8	2.1	2.1
1973	1.8	1.2	0.5	-0.1	-0.5	-0.9	-1.1	-1.3	-1.5	-1.7	-1.9	-2.0
1974	-1.8	-1.6	-1.2	-1.0	-0.9	-0.8	-0.5	-0.4	-0.4	-0.6	-0.8	-0.6
1975	-0.5	-0.6	-0.7	-0.7	-0.8	-1.0	-1.1	-1.2	-1.4	-1.4	-1.6	-1.7
1976	-1.6	-1.2	-0.7	-0.5	-0.3	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.8
1977	0.7	0.6	0.3	0.2	0.2	0.3	0.4	0.4	0.6	0.7	0.8	0.8
1978	0.7	0.4	0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4	-0.4	-0.3	-0.1	0.0
1979	0.0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.0	0.0	0.2	0.3	0.5	0.5	0.6

Tabla 4.3: Datos del ONI para la década de 1970.

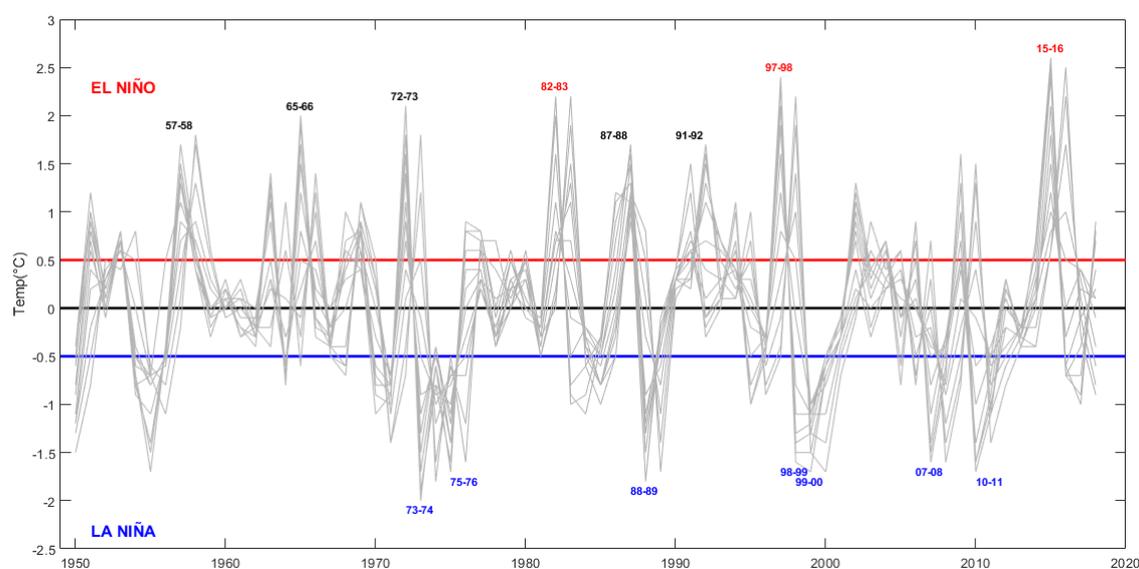


Figura 4.15: Índice SST Niño 3.4. Los años de color negro: evento fuerte El Niño, rojo: evento muy fuerte El Niño y azul: evento fuerte La Niña.

Año	DJF	JFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDJ
1980	0.6	0.5	0.3	0.4	0.5	0.5	0.3	0.0	-0.1	0.0	0.1	0.0
1981	-0.3	-0.5	-0.5	-0.4	-0.3	-0.3	-0.3	-0.2	-0.2	-0.1	-0.2	-0.1
1982	0.0	0.1	0.2	0.5	0.7	0.7	0.8	1.1	1.6	2.0	2.2	2.2
1983	2.2	1.9	1.5	1.3	1.1	0.7	0.3	-0.1	-0.5	-0.8	-1.0	-0.9
1984	-0.6	-0.4	-0.3	-0.4	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.2	-0.6	-0.9	-1.1
1985	-1.0	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.6	-0.5	-0.5	-0.4	-0.3	-0.3	-0.4
1986	-0.5	-0.5	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.2	0.4	0.7	0.9	1.1	1.2
1987	1.2	1.2	1.1	0.9	1.0	1.2	1.5	1.7	1.6	1.5	1.3	1.1
1988	0.8	0.5	0.1	-0.3	-0.9	-1.3	-1.3	-1.1	-1.2	-1.5	-1.8	-1.8
1989	-1.7	-1.4	-1.1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.3	-0.3	-0.2	-0.2	-0.2	-0.1

Tabla 4.4: Datos del ONI para la década de 1980.

Año	DJF	JFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDJ
1990	0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4	0.4	0.3	0.4	0.4
1991	0.4	0.3	0.2	0.3	0.5	0.6	0.7	0.6	0.6	0.8	1.2	1.5
1992	1.7	1.6	1.5	1.3	1.1	0.7	0.4	0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.1
1993	0.1	0.3	0.5	0.7	0.7	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.0	0.1
1994	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	0.7	1.0	1.1
1995	1.0	0.7	0.5	0.3	0.1	0.0	-0.2	-0.5	-0.8	-1.0	-1.0	-1.0
1996	-0.9	-0.8	-0.6	-0.4	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4	-0.4	-0.5
1997	-0.5	-0.4	-0.1	0.3	0.8	1.2	1.6	1.9	2.1	2.3	2.4	2.4
1998	2.2	1.9	1.4	1.0	0.5	-0.1	-0.8	-1.1	-1.3	-1.4	-1.5	-1.6
1999	-1.5	-1.3	-1.1	-1.0	-1.0	-1.0	-1.1	-1.1	-1.2	-1.3	-1.5	-1.7

Tabla 4.5: Datos del ONI para la década de 1990.

El umbral se divide en eventos *débiles* (con una anomalía 0.5 a 0.9 de la SST), *moderados* (1.0 a 1.4), *fuertes* (1.5 a 1.9) y *muy fuertes* ( $\geq 2.0$ ). Para que un evento se clasifique como débil, moderado, fuerte o muy fuerte, debe haber igualado o excedido el umbral, durante al menos tres periodos, de tres meses superpuestos consecutivamente. En la Tabla 4.8 se ilustran los años, con la clasificación según la magnitud del evento.

Año	DJF	JFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDJ
2000	-1.7	-1.4	-1.1	-0.8	-0.7	-0.6	-0.6	-0.5	-0.5	-0.6	-0.7	-0.7
2001	-0.7	-0.5	-0.4	-0.3	-0.3	-0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.3
2002	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.4	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.3	1.1
2003	0.9	0.6	0.4	0.0	-0.3	-0.2	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4
2004	0.4	0.3	0.2	0.2	0.2	0.3	0.5	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7
2005	0.6	0.6	0.4	0.4	0.3	0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.3	-0.6	-0.8
2006	-0.8	-0.7	-0.5	-0.3	0.0	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.9
2007	0.7	0.3	0.0	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.8	-1.1	-1.4	-1.5	-1.6
2008	-1.6	-1.4	-1.2	-0.9	-0.8	-0.5	-0.4	-0.3	-0.3	-0.4	-0.6	-0.7
2009	-0.8	-0.7	-0.5	-0.2	0.1	0.4	0.5	0.5	0.7	1.0	1.3	1.6

Tabla 4.6: Datos del ONI para la década 2000.

Año	DJF	JFM	FMA	MAM	AMJ	MJJ	JJA	JAS	ASO	SON	OND	NDJ
2010	1.5	1.3	0.9	0.4	-0.1	-0.6	-1.0	-1.4	-1.6	-1.7	-1.7	-1.6
2011	-1.4	-1.1	-0.8	-0.6	-0.5	-0.4	-0.5	-0.7	-0.9	-1.1	-1.1	-1.0
2012	-0.8	-0.6	-0.5	-0.4	-0.2	0.1	0.3	0.3	0.3	0.2	0.0	-0.2
2013	-0.4	-0.3	-0.2	-0.2	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4	-0.3	-0.2	-0.2	-0.3
2014	-0.4	-0.4	-0.2	0.1	0.3	0.2	0.1	0.0	0.2	0.4	0.6	0.7
2015	0.6	0.6	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.5	2.6
2016	2.5	2.2	1.7	1.0	0.5	0.0	-0.3	-0.6	-0.7	-0.7	-0.7	-0.6
2017	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.4	0.4	0.2	-0.1	-0.4	-0.7	-0.9	-1.0
2018	-0.9	-0.8	-0.6	-0.4	-0.1	0.1	0.1	0.2	0.4	0.7	0.9	0.8

Tabla 4.7: Datos del ONI desde 2010 hasta 2018.

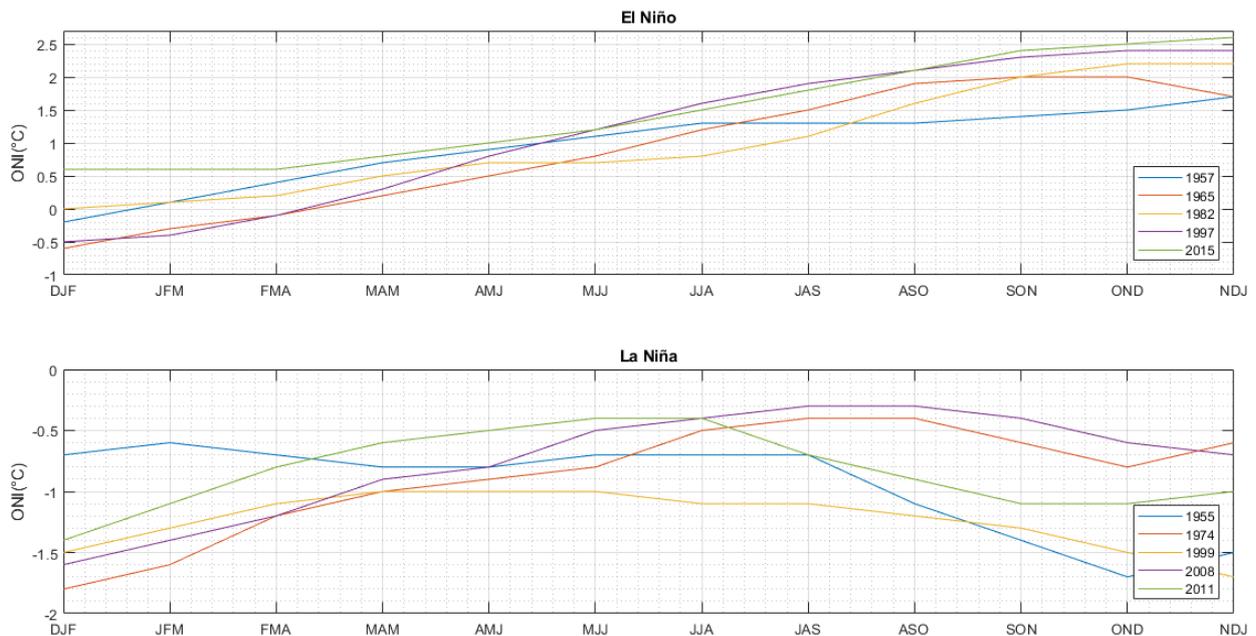


Figura 4.16: El ONI para El Niño y La Niña en función de las estaciones.

El Niño				La Niña		
Débil	Moderado	Fuerte	Muy Fuerte	Débil	Moderado	Fuerte
1953-54	1951-52	1957-58	1982-83	1954-55	1955-56	1973-74
1958-59	1963-64	1965-66	1997-98	1964-65	1970-71	1975-76
1969-70	1968-69	1972-73	2015-16	1971-72	1995-96	1988-89
1976-77	1986-87	1987-88		1974-75	2011-12	1998-99
1977-78	1994-95	1991-92		1983-84		1999-00
1979-80	2002-03			1984-85		2007-08
2004-05	2009-10			2000-01		2010-11
2006-07				2005-06		
2014-15				2008-09		
2018-19				2016-17		
				2017-18		

Tabla 4.8: Clasificación de un evento extremo en el ENSO.

Esto indica que el fenómeno ENSO, tiene características (débil, moderado, fuerte o muy fuerte) que se repiten en distintos años. Por ejemplo, en 1951 tuvo la peculiaridad de ser un año de El Niño moderado. En 1953, la oscilación es débil y vuelve a haber un fase cálida en 1957-58, pero pertenece a un evento de El Niño fuerte. De modo que, el fenómeno ENSO exhibe oscilaciones que parecen seguir un patrón regular, sin embargo no tienen un periodo fijo; estas oscilaciones se denominan cuasi-periódicas<sup>3</sup>. Los estudios y los datos recolectados durante años, señalan que el fenómeno ENSO, tiene un periodo en algún lugar entre 3-7 años, y una densidad espectral máxima de alrededor de 4 años en su mayoría.

Los eventos extremos que han generado un gran impacto a lo largo de los años y que están bien documentados de El Niño; ocurrieron en 1957-1958, 1965-66, 1972-73, 1977-78, 1982-83, 1997-98 y 2002-03. Los eventos de 1982-83, 1997-98 y 2015-16, fueron los más grandes registrados, desde la década de 1880. Para la Niña son los años de 1955-56, 1973-74, 1998-99, 2000, 2007-08 y 2010-11. De acuerdo con la descripción del "Scientific Committee on Oceanic Research" (SCOR) de la UNESCO, se habla de El Niño cuando aparecen aguas anormalmente calientes en la costa oeste de América del sur, con valores iguales o superiores a los 12°C[1]. De modo que, se puede producir un evento de El Niño "pequeño" durante un año, pero si las anomalías se extienden ocasionalmente, se conoce como la condición de El Niño.

En la Figura 4.16 se muestran algunos episodios fuertes, tanto para El Niño como La Niña y los muy fuertes, que capturaron la atención de la comunidad científica en esa época. A comienzo de los años 1957, 1982 y 1997, se encontraba la SST en condiciones normales, apareciendo una anomalía tenue, y finalmente alcanzo valores de 1.7, 2.2 y 2.4 °C, respectivamente. Para el año de 1965, venía un debilitamiento de la fase fría y en la quinta estación, inicia el crecimiento positivo de la SST hasta llegar a los 2.0 °C. La continuación de una perturbación cálida a finales del año 2014, fue persistente durante todo el año 2015, llegando a tener un valor la SST de hasta 2.6

<sup>3</sup>Un fenómeno cuasiperiódico "oscila" una y otra vez mostrando cada cierto tiempo un aspecto similar al que tuvo el sistema previamente.

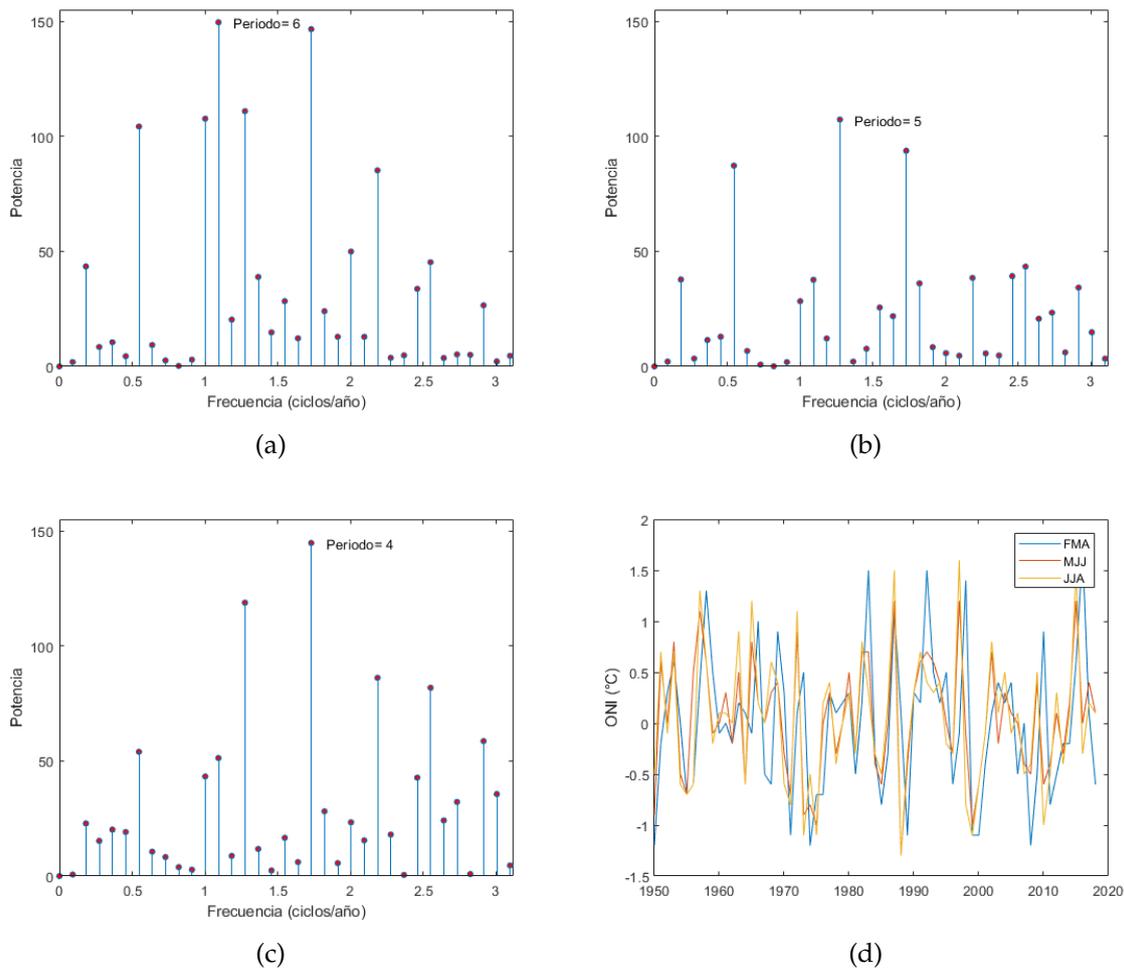


Figura 4.17: (a) Espectro de potencia para FMA. (b) Espectro de potencia para MJJ. (c) Espectro de potencia para JJA. (d) La anomalía de SST en la serie temporal, para FMA, MJJ y JJA.

°C. Entre los eventos de La Niña, se encuentra que para el año 1955, se considera el evento moderado; disminuyó la SST hasta un valor  $-1.5$  °C. Por el contrario, los años 1974, 1999, 2008 y 2011, fueron fuertes y la SST descendió para valores de  $-1.8$ ,  $-1.7$ ,  $-1.6$  y  $-1.4$  °C, respectivamente.

Según los datos de la NOAA, los episodios de La Niña no han presentado la misma intensidad, que los de El Niño. La SST tan sólo ha alcanzado temperaturas de  $2.0$  °C por debajo del umbral, mientras que, en los eventos muy fuertes de El Niño, la SST ha tenido temperaturas hasta de  $2.6$  °C. Por otro lado, el calentamiento/enfriamiento de las aguas oceánicas, para dar inicio a un año de El Niño/La Niña, se han presentado después de la tercera estación; siendo débil y aumentando gradualmente, hasta tener un máximo de la SST en los últimos meses del año. La anomalía continuaba para el siguiente año y disminuía en las próximas 3-5 estaciones. Luego, para dar paso a un estado neutro, la SST se mantenía de 1-4 estaciones y continuaba a la siguiente fase del ciclo ENSO. A principios de la década de 1950, se mantenía un episodio moderado de La Niña y se establecieron las condiciones normales; después de la octava estación, hasta finales del año 1954. En esos cuatro años hubieron dos eventos débiles

de El Niño y uno de La Niña, como se observa en la Tabla 4.1.

Los años 1955-56, nuevamente surgió La Niña moderada y entre las 3 últimas estaciones de 1956, y las primeras del año 1957; la SST se mantuvo neutra, para dar inicio a un fuerte episodio de El Niño en 1957-58. Algo similar en 1986-87, donde ocurrió un evento moderado El Niño, dos estaciones de neutralidad y un año fuerte de La Niña en 1988-89. En cambio en la década de 1960, hubo dos episodios moderados de El Niño y uno fuerte en medio de estos; pero, entre ellos se establecieron condiciones normales y un evento débil de La Niña.

Mientras tanto, en 1970-71 se establecía La Niña moderada, y permaneció durante todo el año de 1971, pero disminuyendo. Las condiciones normales en la SST, duro tres estaciones para dar paso a un episodio fuerte de El Niño. En la década actual ocurrió un evento de La Niña fuerte a mitad del año 2010 y principio del año 2011. La SST varió de forma irregular, hasta tener un valor habitual durante tres años. Luego, aconteció uno de los eventos más destacados de El Niño muy fuerte, en el año 2015-2016. En el 2015 el crecimiento de la SST, fue en todo el año y disminuyo a mitad del año 2016; dando paso a las condiciones normales, habiendo uno que otro episodio débil de la Niña.

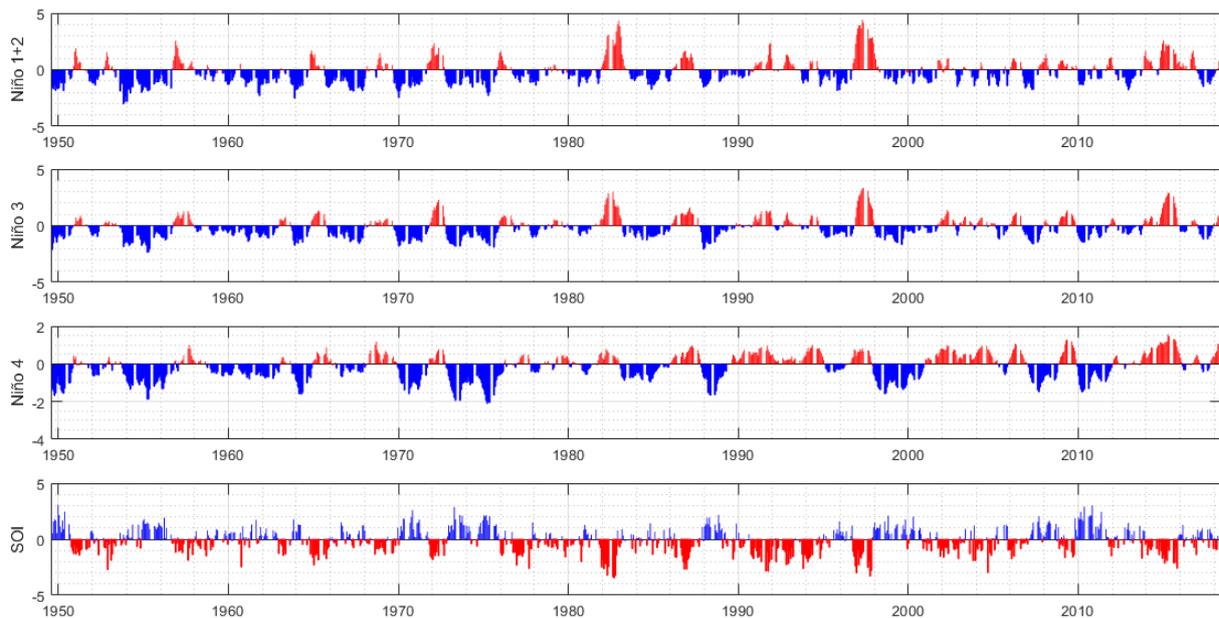


Figura 4.18: Serie temporal desde 1950 hasta 2018 de la SST en las regiones Niño 1+2, 3 y 4. Además la variación del Índice Oscilación Sur.

En la Figura 4.18, se observa la SST en tres regiones del océano Pacífico Tropical y el SOI, donde el tiempo está dado, desde el año 1950 hasta el 2018. A grandes rasgos no muestran muchos cambios; pero, si se ve con detalle algunas regiones, se diferencian de otras en gran manera. Por ejemplo, en el año 1983 las anomalías del SOI, las del Niño 1+2 y 3 son muy parecidas, en comparación con el índice Niño 4. La SST tuvo grandes temperaturas en la parte oriental del Pacífico. Lo contrario ocurrió en el año 2010, la SST fue más caliente en el oeste del Pacífico. Por otro lado, la fase negativa del SOI (El Niño), representa una presión de aire por debajo de lo normal en Tahití, y una presión de aire por encima de lo normal en Darwin.

## 5

# Conclusiones

- Los modelos estudiados en este trabajo, sirven para la comprensión del fenómeno natural ENSO.
- Los dos modelos conllevan a que algunas de las variables de estudio ( $SST$ ,  $H_W$ ); para valores específicos de los parámetros, presenten un comportamiento oscilatorio.
- En el modelo oscilador con retardo, pequeñas variaciones de  $\alpha$ , contribuyen en la amplitud de las soluciones; por lo que en efecto mide la amplitud de la señal con retardo. En cuanto al retardo  $\delta$ , las soluciones empiezan a tener un comportamiento oscilatorio cuando  $\delta \geq 2$  y  $\alpha \geq 0.8$ , cuyos valores están justo en la curva que delimita la región estable de la inestable.
- En el modelo recarga-descarga, el análisis se centró en variar el parámetro de acoplamiento relativo  $\mu$ , donde el único valor  $\mu_c = 2/3$ , proporcione soluciones periódicas.
- En la clasificación de los episodios del fenómeno ENSO, los eventos moderados no tienen una duración tan prolongada, como un evento fuerte o muy fuerte, presentan anomalías en ocho estaciones aproximadamente.
- El análisis de los datos proporcionados por la NOAA, indican que los eventos de La Niña durante los últimos años, no han presentado la misma intensidad o magnitud que un evento cálido o viceversa; puede ser más leve o fuerte.
- Una transformada de Fourier a las estaciones FMA, MJJ y JJA, sirvió para ratificar que las oscilaciones del fenómeno ENSO, varían en el intervalo de tiempo 3-7 años. No tiene un periodo único establecido, y por eso se estima que tiene una variabilidad cuasi-periódica; característica de algunos sistemas dinámicos.
- Como sugerencia para trabajos posteriores, estudiar los diferentes modelos del fenómeno ENSO.
- La realización de este trabajo de grado, sirvió en la formación académica de la estudiante en el área de la Física del medio ambiente.

# Bibliografía

- [1] ARNTZ W., FAHRBACH & EBERHARD, (1996). *El Niño : Experimento Climático de la Naturaleza*. México: Fondo De Cultura Económica.
- [2] BATTISTI D. S., (1988). *The dynamics and thermodynamics of a warm event in a coupled atmosphere/ocean model*. J. Atmos. Sci.,45,2889-2919.
- [3] BATTISTI D. S. & HIRST A. C., (1988). *Interannual variability in a Tropical Atmosphere-Ocean Model: Influence of the Basic State, Ocean Geometry and Nonlinearity*, J. Atmos. Sci., 46, 1687-1712.
- [4] BJERKNES, J., (1969). *Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific*. Mon. Wea. Rev., 97, 163–172.
- [5] BOUTLE I., TAYLOR R. & ROEMER R., (2006). *El Niño and the delayed action oscillator*. American Journal of Physics 75(1):15-24.
- [6] BROWN E., COLLING A., PARK D., PHILLIPS J., ROTHERY D. & WRIGHT J., (2001). *Ocean Circulation*. Oxford, Reino Unido: Butterworth Heinemann.
- [7] CUSHMAN B. R. & BECKERS J. M., (2011). *An Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. San Diego, United States :Elsevier Inc. All rights reserved.
- [8] FEDOROV A.V. & BROWN J.N., (2009). *Ecuadorial Waves*, New Haven, USA: Elsevier Ltd. All rights reserved.
- [9] FIGUEROA D., (2004). Capitulo 9: *Ondas y Mareas*, in *Biología Marina y Oceanografía: Conceptos y Procesos*. Ed. C. Werlinger, Consejo Nacional del Libro y la Lectura, Universidad de Concepción, Concepción.
- [10] GILL A. E., (1982). *Atmosphere-Ocean Dynamics Academic*. New York: Academic Press.
- [11] JIN F-F, (1997). *An Equatorial Ocean Recharge Paradigm for ENSO. Part I: Conceptual Model.*, J. Atmos. Sci. vol. 54, Issue 7, pp.811-829.
- [12] KUNDU P. K.,COHEN I. M. & DOWLING D. R., (2015). *Fluid Mechanics*. USA: Academic Press, Edición 5.
- [13] MARSHALL J. & PLUMB R. A., (2007). *Atmosphere, Ocean, and Climate Dynamics: An Introductory Text*. USA: Academic Press.
- [14] MECHOSO,C., J. NEELIN, & J.Y. YU, (2003), *Testing simple models of ENSO*, J. Atmos. Sci., 60, 305–318.

- 
- [15] NEELIN, J. DAVID, (2011). *Climate Change and Climate Modeling*. Cambridge University Press, Los Angeles.
- [16] PEDLOSKY J., (2003). *Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [17] PIZARRO, O., & A. MONTECINOS, (2004). Capítulo 11: *El Niño y la Oscilación del Sur, in Biología Marina y Oceanografía: Conceptos y Procesos*. Ed. C. Werlinger, Consejo Nacional del Libro y la Lectura, Universidad de Concepción, Concepción.
- [18] SARACHIK E.S. & CANE M.A., (2010). *The El Niño–Southern Oscillation Phenomenon*. New York, USA :Cambridge University Press.
- [19] STEWART R. H, (2008). *Introduction to Physical Oceanography*. Texas A & M University: Copyright.
- [20] STOCKER T., (2011). *Introduction to Climate Modelling*. USA: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [21] SUÁREZ M. J. & SCHOPF P. S., (1988). *A delayed action oscillator for ENSO*, J. Atmos. Sci. 45, 3283–3287.
- [22] SUTHERLAND B. R., (2010). *Internal Gravity Waves*. USA: Cambridge University Press, Edición 1.
- [23] TALLEY L. D., PICKARD G. L., EMERY W. J. & SWIFT J. H.,(2011). *Descriptive Physical Oceanography: An Introduction*. Burlington : Elsevier Science.
- [24] VALLIS G.K.,(2017). *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*. New York: Cambrigde University Press, 2 edición.
- [25] WANG C., (2018). *A review of ENSO theories*, National Science Review, volumen 5, páginas 813–825.