



DISEÑO DE UN ALGORITMO EMPLEANDO METODOS NUMERICOS PARA SOLUCIONAR LA ECUACION DE ONDA EN UN MEDIO ELASTICO BIDIMENSIONAL

Jessica Andrea Lopez Duarte

Universidad de pamplona
Facultad de ingeniería y arquitectura, Departamento E.E.S.T
Pamplona, Colombia
2017

DISEÑO DE UN ALGORITMO EMPLEANDO METODOS NUMERICOS PARA SOLUCIONAR LA ECUACION DE ONDA EN UN MEDIO ELASTICO BIDIMENSIONAL

Jessica Andrea Lopez Duarte

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título
de:

Ingeniera de Sistemas

Director:

PH.D. Carlos Arturo Parra Ortega

Codirector:

PH.D. Francisco Cabrera Zambrano

Grupo de Investigación:

PANGEA, SIIS

Universidad de Pamplona

Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Departamento E.E.S.T

Pamplona, Colombia

2017

*El peligro radica en que nuestro poder para
dañar o destruir el medio ambiente, o al
prójimo, aumenta a mucha mayor velocidad
que nuestra sabiduría en el uso de ese poder.*

Hawking, Stephen

Agradecimientos

Gracias a los integrantes del semillero de investigación *pangea* y *SIS* de la Universidad de Pamplona quienes me ayudaron en mi formación como investigadora. A los profesores Francisco Cabrera y Jesús Duran quienes fueron los principales impulsores para que yo desarrollara este tema y me acompañaron en la formación de las bases del trabajo con investigaciones previas.

Quisiera agradecer al Ph. D. Carlos Arturo Parra y PH.D. Francisco Cabrera, quien me asesoraron en el desarrollo de la tesis, y por último y no menos importante a mis padres quienes me han apoyado en todo el camino de formación como profesional.

Este trabajo lo dedico a mi papá Tairo Lopez y mi tía Amparo Duarte quienes desde el cielo me acompañaron en la sustentación Q.E.P.D.

Resumen

Se presenta una solución numérica de la ecuación de onda en medios elásticos. Debido a que la onda se transmite en un medio elástico se tomara como punto de partida para el modelado las ecuaciones elasticodinamicas que describen de una mejor manera el movimiento de la onda en este tipo de medio, estas ecuaciones están escritas en operadores temporales y espaciales. Las derivadas con respecto al tiempo se resuelven empleando una aproximación de segundo orden mientras que las del espacio se resuelven utilizando una aproximación de cuarto orden a través de operadores de diferencias finitas centrados. El modelo se establece mediante el uso de la velocidad y la tensión en una cuadrícula discreta y escalonada, el cual tiene en cuenta la deformación generada en el medio debido a la tensión y el impacto de la onda en el mismo. Se analizará matemáticamente este efecto de deformación teniendo en cuenta los coeficientes de lame, la reflexión y transmisión de la onda para ver el comportamiento natural de onda. Dado el hecho de que el modelado de la onda es computacional se limita el campo de propagación por lo cual se realiza una absorción en los bordes para poder visualizar la onda como en un medio real donde la onda va perdiendo fuerza con el paso del tiempo.

Palabras clave: Diferencias Finitas (DF), Medio Elástico, Tensión, Deformación, Modelado sísmico.

Abstract

A numerical solution of the wave equation in elastic media is presented. Because the wave is transmitted in an elastic medium, the elasticodynamic equations that better describe the movement of the wave in this type of medium are taken as the starting point for modeling. These equations are written in temporal and spatial operators. The derivatives with respect to time and space are solved using a second order approximation through finite difference operators centered. The model is established by the use of speed and tension in a discrete and stepped grid, which takes into account the deformation generated in the medium due to the voltage and the impact of the wave in it. This deformation effect will be mathematically analyzed taking into account the lick coefficients, reflection and transmission of the wave to see the natural wave behavior. Given the fact that the modeling of the wave is computational, the propagation field is limited, which is why an absorption is made at the edges to be able to visualize the wave as in a real medium where the wave loses strength with the passage of time steppedstep Definiciones de step adjetivo having or formed into a step or series of steps. a building with stepped access verbo lift and set down one's foot or one foot after the other in order to walk somewhere or move to a new position.

Keywords: Finite Differences (DF), Elastic Medium, Tension, Deformation, Seismic Modeling.

Contenido

	Pág.
Contenido	
1. Estado del Arte	5
1.1 Trabajos Internacionales	5
1.2 Trabajos Locales	8
2. Métodos Numéricos	10
2.1 Método de Diferencias Finitas	10
2.2 Método Espectral	12
2.3 Método Pseudo-espectral.....	16
3. Ondas	21
3.1 Ondas Elásticas	21
3.1.1 Tipos de Ondas	21
3.1.2 Principios de la teoría de la elasticidad	22
3.1.3 Ley de Hooke	23
3.2 Ecuación de la onda.....	24
3.3 Ecuación de la onda elástica.....	25
4. Modelado de la onda elástica bidimensional	29
4.1 Modelamiento de variables.....	30
4.2 Modelamiento de la ecuación	32
5. Resultados	33
6. Conclusiones y recomendaciones	37
6.1 Conclusiones.....	37
6.2 Recomendaciones.....	37

Lista de figuras

	Pág.
Figura 1 Levantamiento.....	2
Figura 2 Estructuras del Subsuelo.....	2
Figura 3 Malla discretizada.....	11
Figura 4 Onda Armonica	24
Figura 5 Propagación de la Onda.....	34
Figura 6 Absorción de bordes	35

Introducción

A mediados del 2016 se generó una emergencia en el municipio de Vélez, Santander. Por el desbordamiento de una represa, debido a que los encargados de la construcción de esta hicieron caso omiso a los informes de viabilidad del terreno por lo cual se terminó fracturando la estructura del muro de contención y colapsando el sistema de compuertas. Estos casos suelen presentarse con regularidad en nuestra sociedad actual por lo cual se ve necesario el uso de la tecnología que nos permita conocer la estructura del suelo para realizar construcciones que sean seguras reduciendo la generación de desastres y también generando información para el mejor aprovechamiento de los suelos. Debido a que las exploraciones sísmicas son de gran costo monetario y computacional figura1 (por el costo de los instrumentos de levantamientos topográficos ¹y el tamaño que ocupa la información que estos levantamientos generan) son de gran ayuda las simulaciones. En ella se pueden emplear diferentes métodos que mejoren la visualización de las estructuras del subsuelo y el reconocimiento de algunas limitaciones que se pueden obtener en los levantamientos debido a las diferentes estructuras que se pueden presentar en el subsuelo.

En la actualidad los levantamientos son empleados tanto en ingeniería civil para la construcción de edificaciones como para las geociencias². Estos estudios nos permiten tener el conocimiento de las estructuras del subsuelo que nos pueden generar problemas al crear asentamiento de sociedad en diversos sectores como el conocimiento de estructuras que puedan ser de provecho para la sociedad como lo son las cúpulas de sal, acumulaciones de gas natural o petróleo figura 2.

¹ Levantamiento topográfico: es un grupo de información que permiten generar un plano del terreno con buen detalle y mayor exactitud posible de las características del terreno.

² Geociencia: Campo del conocimiento que se enfoca en el estudio de la tierra.



Figura 1 Levantamiento

Se puede ver la realización de un levantamiento en el cual se requiere una fuente que genere una onda de gran intensidad y varios geófonos que recolecten la información.

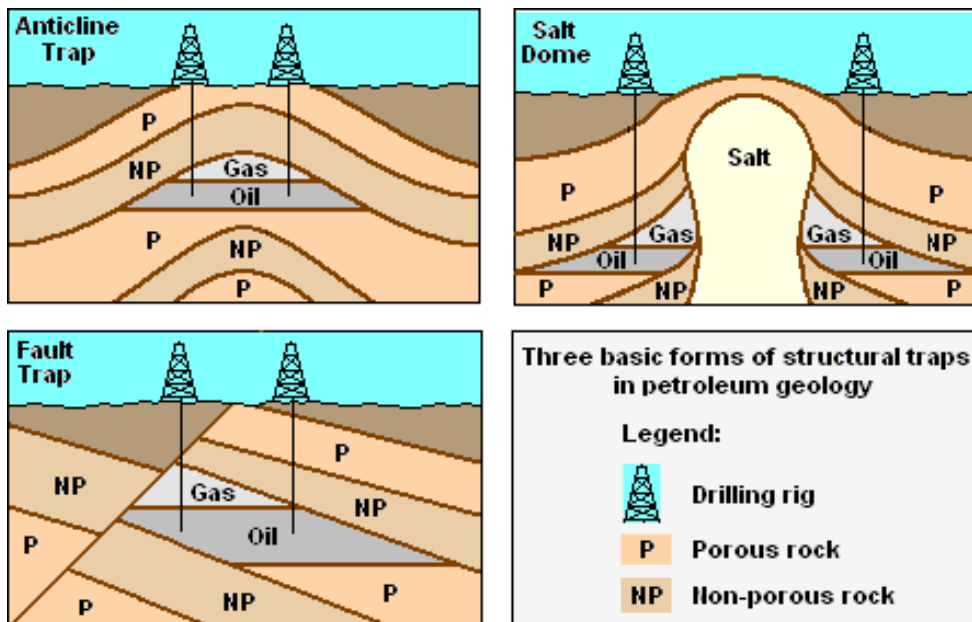


Figura 2 Estructuras del Subsuelo

Se pueden observar las diferentes estructuras que se pueden encontrar en el subsuelo como lo son los cúmulos de sal, gas y crudo.

Para el aprovechamiento de los recursos naturales se hace necesario que se tenga información lo más exacta posible ya que al momento de su extracción los errores de cálculos pueden generar sobrecostos o daños medio ambientales. Pensando en estos problemas y en los beneficios que se pueden obtener al realizar exploraciones en el

subsuelo se requiere que existan métodos de tratamientos de datos que den cada vez mayor claridad y exactitud a la información obtenida en cada levantamiento que se realiza. Se analizarán algunos métodos numéricos que permitan el tratamiento a gran cantidad de datos y generen un manejo que permita el acoplamiento de la simulación para que en un futuro se puedan emplear a los datos generados en los levantamientos reales, por lo cual es necesario tener en cuenta que en los levantamientos reales las reflexiones que se presentan están generadas por los cambios drásticos de densidades entre los materiales que componen los suelos y que por lo tanto la simulación debe buscar métodos que disminuyan las reflexiones computacionales que se presentan por el uso de las mallas (matriz).

Este trabajo hace parte de un macro proyecto realizado por la Universidad de Pamplona, Ecopetrol, Colciencias y otras universidades en el cual se desea avanzar en el modelamiento de la imagen del subsuelo. Previamente se trabajó en el modelado de la ecuación de la onda acústica. Debido a que en la realidad las ondas al viajar por las diversas capas del subsuelo se enfrentan a tensiones y deformaciones se vuelven ondas elásticas por lo cual se planteó el modelado de dichas ondas, para poder lograr esto se hace emplea el uso de métodos numéricos (como lo es el método de diferencias finitas), ya que apoyándose en varios estudios previos se han mirado que por su tipo de movimiento son ecuaciones complejas estas no se pueden tratar con algoritmos sencillos y por lo tanto requiere de solución por medio de los métodos numéricos, como lo muestra Virieux[1] y puede evidenciarse en el estado del arte.

Por lo cual en el primer capítulo se realiza un pequeño estado del arte mostrando varios trabajos que fueron de apoyo y se clasifican como trabajos internacionales y locales. En el segundo capítulo se describen algunos métodos que son propicios para el modelado de ecuaciones complejas, en el tercer capítulo se describe lo que es una onda, la ecuación de la onda, el sistema de ecuaciones elástico dinámicas y su formulación.

En el cuarto capítulo se muestra el modelado de las ecuaciones elástico dinámicas empleando el método de diferencias finitas y el manejo de la absorción de bordes, y por último se mostrarán algunas conclusiones y observaciones para próximos trabajos.

1.Estado del Arte

En este capítulo se mostrara el estado del arte del estudio de las ciencias computacionales orientadas a la geofísica, teniendo como enfoque principal el modelado de las ondas a través de diversos medios y diferentes tipos de ondas, así como su representación en dos dimensiones, clasificándolos en trabajos locales e internacionales.

1.1 Trabajos Internacionales

Iniciando con el trabajo de Alberto Silva L., Herling Gonzalez A. y William Agudelo quienes realizaron el trabajo MODELADO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS BASADO EN ALGORITMO FDTD EN PARALELO en el cual hablan de : *“Los algoritmos de malla intercalada fueron creados para guardar una mejor estabilidad y eficiencia en diferencias finitas dominio temporales (FDTD), en nuestro caso esta técnica es usada para modelar las propagaciones de ondas sísmicas, esquema que permite reproducir la fenomenología de la dinámica sísmica en medios heterogéneos. Como la solución de las ecuaciones de ondas son computacionalmente costosas, presentamos una propuesta general para paralelizar y acelerar la solución.”*[2]. A partir de este trabajo se profundizo en el tema con el trabajo de Alan R. Levander FOURTH-ORDER FINITE-DIFFERENCE P-SV SEISMOGRAMS quien dice: *“I describe the properties of a fourth-order accurate space, second-order accurate time two-dimensional P-Sk' finite-difference scheme based on the Madariaga- Virieux staggered-grid formulation. The numerical scheme is developed from the first-order system of hyperbolic elastic equations of motion and constitutive laws expressed in particle velocities and stresses. The Madariaga-Virieux staggered-grid scheme has the desirable quality that it can*

correctly model any variation in material properties, including both large and small Poisson's ratio materials, with minimal numerical dispersion and numerical anisotropy. Dispersion analysis indicates that the shortest wavelengths in the model need to be sampled at 5 gridpoints/wavelength. The scheme can be used to accurately simulate wave propagation in mixed acoustic-elastic media, making it ideal for modeling marine problems. Explicitly calculating both velocities and stresses makes it relatively simple to initiate a source at the free-surface or within a layer and to satisfy free-surface boundary conditions. Benchmark comparisons of finite-difference and analytical solutions to Lamb's problem are almost identical, as are comparisons of finite-difference and reflectivity solutions for elastic-elastic and acoustic-elastic layered models."[3], el trabajo de Kelter, Amber C y Bancroft, John C WAVE PROPAGATION IN AN ANISOTROPIC MEDIUM CHARACTERISTICS OF P, SV, AND SH diciendo: *"Two methods of approximating phase and group velocities in an anisotropic medium are explored. Wavefront shapes and expected diffractions from a scatterpoint are investigated. It was found that the popular approximations given by Thomsen in 1986 lose accuracy when compared to more exact solutions; this is especially evident for the case of SV-waves.*

INTRODUCTION Most models in exploration seismology presume that the earth is isotropic — that is, seismic velocities do not vary with direction. However, individual crystals and most common earth materials are observed to be anisotropic with elastic parameters that vary with orientation. Thus, it would be surprising if the earth was completely isotropic. It seems that seismologists have been somewhat cautious in considering the full effects of anisotropy. There are many reasons for this, including the greater computational complexity and lack of computing power, the difficulty of inverting data for a larger number of elastic constants, and in some cases, a lack of compelling evidence for the existence of anisotropy. However, lately it has become apparent that anisotropy is evident in many parts of the earth and therefore anisotropic studies are becoming an increasingly important aspect of seismological research (Shearer, 1999).

REVIEW OF ANISOTROPY Hooke's law was formulated by Love (1927). When an elastic wave propagates through rocks

the displacements are in accordance with Hooke's Law namely the stress and strain are related through a constitutive relation that can be written"[4], los trabajos de Virieux, Jean W-WAVE PROPAGATION IN HETEROGENEOUS MEDIA VELOCITY-STRESS FINITE-DIFERENCE METHOD en el cual dice: "A new finite-difference (FD) method is presented for modeling SH-wave propagation in a generally hetero- geneous medium. This method uses both velocity and stress in a discrete grid. Density and shear modulus are similarly discretized, avoiding any spatial smoothing. Therefore, boundaries will be correctly modeled under an implicit formulation. Standard problems (quarter- plane propagation, sedimentary basin propagation) are studied to compare this method with other methods. Finally a more complex example (a salt dome inside a two-layered medium) shows the effect of lateral propa- gation on seismograms recorded at the surface. A corner wave. always in-phase with the incident wave, and a head wave will appear, which will pose severe problems of interpretation with the usual vertical migration meth- ods."[5] y P-SV WAVE PROPAGAATION IN HETEROGENEOUS MEDIA: VELOCITY-STRESS FINITE-DIFFERENCE METHOD en el cual dice: "I present a finite-difference method for modeling P-SV wave propagation in heterogeneous media. This is an extension of the method I previously proposed for modeling SH-wave propagation by using velocity and stress in a discrete grid. The two components of the velocity cannot be defined at the same node for a complete staggered grid: the stability condition and the P-wave phase velocity dispersion curve do not depend on the Poisson's ratio, while the S-wave phase velocity dispersion curve behavior is rather insensitive to the Poisson's ratio. Therefore, the same code used for elastic media can be used for liquid media, where S-wave velocity goes to zero, and no special treatment is needed for a liquid-solid"[1], el trabajo de Manuel Loaiza Ramirez en MODELADO Y SIMULACION DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN MEDIOS HETEROGÉNEOS CON MÉTODOS ESPECTRALES DE CHEBYSHEV en el cual dice: "Una onda elástica es una perturbación tensional que se propaga a lo largo de un medio elástico, el cual puede ser un sólido o un fluido ideal. La propagación de ondas elásticas es el mecanismo sobre el cual se basan los ensayos no destructivos con ultrasonido.

Estos consisten en transmitir energía en forma de onda a través de los materiales a ser examinados y estimar dicho medio a partir de la energía transmitida o reflejada.”[6] Y el trabajo de Fiona Hall y Yanghua Wang ELASTIC WAVE MODELLING BY AN INTEGRATED FINITE DIFFERENCE METHOD quien dice: “We have developed a finite difference method for modelling the elastic wave equation in the time domain, based on integrating the elastic parameters. In this method, we adopt the strategy of integrating the elastic parameters over a limited space; so, it is suitable for wave propagation modelling in fractured media, for which we use an equivalent media with the elastic coefficients averaged over a fractured space. This elastic parameters integration allows us to reduce the five simultaneous equations usually used to describe the velocity and stress propagation to just two, in terms of velocity alone, providing a significant saving in computational memory. In this paper, we discuss the derivation and computational implementation of the method for 2-D media, including the seismic source and both reflecting and absorbing boundary conditions, and illustrate it with some synthetic models of heterogeneous, anisotropic and fractured media.”

1.2 Trabajos Locales

Mostrando el trabajo de Guillen, Alejandro, Cabrera, Francisco H, Torres, Jairo A, Duran, Jesus E NUMERICAL MODELING OF HETEROGENEOUS MEDIA FOR THE COMPRESIONAL WAVE USING HIGH-ORDER FINITE-DIFFERENCES en el cual dice: “A numerical solution to the wave equation in heterogeneous acoustic media is presented in this research article. The differential equation for the compressional field was written in terms of spatial derivatives and derivative from of spatial operator time. Initially, it presents a general method to achieve the approximations for approximating the operator spatial differentials of second order. This approximation is calculated using the values of the field at a point P of the computational grid and its adjacent points according to the degree of approximation used. It was subsequently implemented in a computational algorithm where the initial conditions of the field of P were set; a seismic source was implemented; and

the corresponding numeric scheme was developed. The temporal part of the derivatives were solved using a second order approximation through centered operators. In the spatial derivatives, different orders of approximation were used starting with a second, fourth, sixth, eighth and tenth order, respectively. The conditions of stability and numerical dispersion were treated to prevent error growth exponentially and generation of numerical artifacts. The graph of numerical dispersion for the different values for the passage of spatial and temporal mesh were presented. Finally the numerical solutions using different orders of approximation on simple geological models compared."[7] y mi trabajo en compañía de Francisco H. Cabrera, Jairo A. Torres, Jesus E. Durán en IMPLEMENTATION OF PSEUDOSPECTRAL METHOD FOR THE SOLUTION OF THE WAVE EQUATION IN ACOUSTIC MEDIA AND COMPARISON WITH FINITE-DIFFERENCE METHOD en el cual se dice: "A numerical solution to the wave equation in heterogeneous acoustic media is presented. This equation is written by spatial and temporal differential operators for field compressional P, this field is a function of the spatial and time coordinates. The derivative with respect to time is solved using an approximation of second order through operators of centered finite-differences. Furthermore the partial derivatives are calculated using pseudospectral method. This method applies the Fourier transform to obtain the field (P) in wave number domain. The benefit of using this method is associated with reduced numerical dispersion using a higher mesh step in compared when using operators of finite differences where it is shown reduction the computational total cost for pseudospectral method. A comparison between this method and the finite difference method for some simple models in two dimensions is presented. Finally the results of the numerical dispersion and the computational cost of these methods are presented." Dichos trabajos fueron presentados en 1er congreso panamericano de mecánica computacional PANACM 2015

2. Métodos Numéricos

Los métodos numéricos son procedimientos para obtener una solución aproximada a problemas empleando únicamente cálculos aritméticos sencillos. El uso de este método es poder generar un algoritmo con pasos lógicos y básicos que de forma repetitiva permitan el acercamiento a una solución aproximada.

Estos métodos facilitan la implementación del mismo en medios computacionales siendo de gran ayuda para las investigaciones científicas y los estudios de fenómenos reales ya que dichos fenómenos son por lo general de formulación matemática compleja.

2.1 Método de Diferencias Finitas

Este método permite obtener una aproximación de las derivadas parciales empleando expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un espacio de puntos limitados que por lo general constituyen una malla finita. La ecuación diferencial parcial es reemplazada por un número finito de operaciones en términos de la variable dependiente en los puntos seleccionados que son las nuevas incógnitas.

Las ecuaciones deben ser continuas al momento de generar la malla para poder obtener los valores de las incógnitas en cada uno de los nodos³.

La aproximación de la primera derivada de $f(x, z)$ esta dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+\Delta x, z) - f(x, z)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x, z) - f(x - \Delta x, z)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

³ Se tomata como nodo el punto de la malla en un tiempo t , en una distancia x y en una profundidad y .

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+1/2\Delta x, z) - f(x-1/2\Delta x, z)}{\Delta x} \quad (2.3)$$

Las dos primeras ecuaciones son las menos exactas ya que los valores que se manejan son más alejados del valor en el instante actual. En la ecuación (2.1) hacia adelante se toman los valores del nodo actual, el nodo siguiente y el nodo siguiente a este, y en la (2.2) hacia atrás se toman el nodo actual y los dos predecesores, lo cual hace que la formula se resuelva con los datos de anteriores o siguientes únicamente. En la ecuación (2.3) centrada se toman los valores anterior y siguiente siendo esta una aproximación más exacta que las dos anteriores, permitiendo la obtención de los nodos $x(i, j)$, $x(i + 1, j)$ y $x(i - 1, j)$ aproximación actual, siguiente y anterior de la ecuación respectivamente en el eje horizontal, como se muestra en la figura 3.

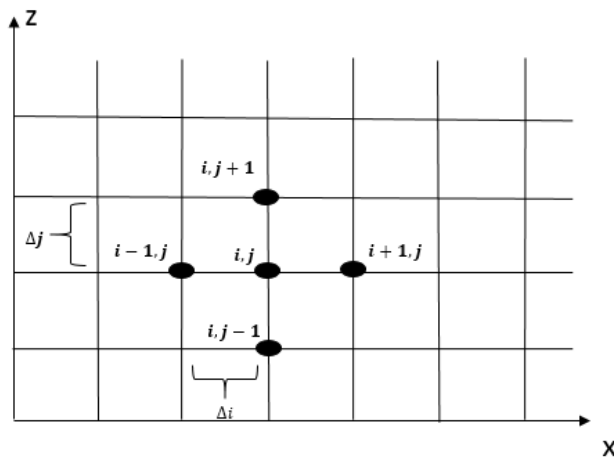


Figura 3 Malla discretizada

Malla con separaciones Δj y Δi en el cual se muestran los nodos para los del ejes z y x con diferencias centradas.

La aproximación para la segunda derivada empleando DF centradas está dada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+\Delta x, z) - 2f(x, z) + f(x-\Delta x, z)}{\Delta x^2} \quad (2.4)$$

Para emplear el método de DF lo primero que hay que hacer es crear la malla para así tener el espacio delimitado donde se resolverá la ecuación. Por lo cual se discretiza el área en nodos, los cuales están separado a una distancia $h = \Delta x, \Delta z$ y Δt esto solo para nuestro caso particular en el cual se desea que la malla sea cuadrada.

Esta malla permite desarrollar $F(x, z)$ en serie de Taylor alrededor del nodo.

$$F(x + h, z) \approx F(x, z) + \frac{\partial F(x, z)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} * \frac{h^2}{2} \quad (2.5)$$

$$F(x - h, z) \approx F(x, z) - \frac{\partial F(x, z)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} * \frac{h^2}{2} \quad (2.6)$$

Se suma la ecuación (2.5) y (2.6) miembro a miembro

$$F(x + h, z) + F(x - h, z) = 2F(x, z) + \frac{2\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} * \frac{h^2}{2} \quad (2.7)$$

Se despeja $\frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2}$ para poder obtener la ecuación de DF centrada:

$$\frac{2\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} * \frac{h^2}{2} = F(x + h, z) + F(x - h, z) - 2F(x, z) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} = \frac{F(x+h, z) - 2F(x, z) + F(x-h, z)}{h^2} \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta que se tomó a h como $h = \Delta x = \Delta z$ entonces la ecuación (2.9) representa la expresión para el eje x y la ecuación (2.10) para el eje z .

$$\frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} = \frac{F(x, z+h) - 2F(x, z) + F(x, z-h)}{h^2} \quad (2.10)$$

Este método tiene mayores ventajas sobre otros métodos en cuanto a exactitud de resultados, facilidad en su preparación de modelos y una fuente sísmica, en la reducción del efecto de fronteras artificiales que son impuestas por las limitantes computacionales, y sin dificultar el manejo del modelado computacional.

2.2 Método Espectral

Los métodos espectrales son una herramienta muy poderosa para resolver las EDP. Cuando se pueden utilizar, son el método de elección si se necesita alta

resolución espacial en múltiples dimensiones. Para un código de precisión finita de segundo orden en tres dimensiones, el aumento de la resolución por un factor de 2 en cada dimensión requiere ocho veces más puntos de malla, y mejora el error típicamente por un factor de 4. En un código espectral, aumento en la resolución a menudo da una mejora de un factor de 10^6 . Incluso para problemas unidimensionales, los métodos espectrales sorprenden con su poder y eficiencia. Los métodos espectrales funcionan bien para soluciones lisas. Para discontinuidades como los choques son malas. Incluso pequeñas irregularidades (como una discontinuidad en alguna derivada de alto orden de la solución) pueden estropear la convergencia de los métodos espectrales.

La diferencia clave entre los métodos de diferencias finitas y los métodos espectrales es que en los métodos de diferencias finitas se aproxima la ecuación que se intenta resolver, mientras que en los métodos espectrales se aproxima a la solución que se intenta encontrar. Mientras que la diferenciación finita reemplaza la ecuación continua por una ecuación en puntos de malla, un método espectral expresa la solución como una expansión truncada en un conjunto de funciones de base:

$$f(x) \cong f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) \quad (2.11)$$

Diferentes opciones de funciones de base y métodos de cálculo de a_n dan diferentes formas de los métodos espectrales.

Ilustramos la idea de los métodos espectrales con un ejemplo. Considere la ecuación de onda unilateral en una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.12)$$

Con condiciones de frontera en $[0, 2\pi]$ y condición inicial

$$u(t = 0, x) = f(x) \quad (2.13)$$

Se obtiene la solución analítica espectral expandiendo u en una serie de Fourier,

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{inx} \quad (2.14)$$

Substituyendo esta expansión en la ecuación 0 da

$$\frac{da_n}{dt} = i n a_n \quad (2.15)$$

Con solución

$$a_n(t) = a_n(0)e^{int} \quad (2.16)$$

Se obtiene $a_n(0)$ de la condición inicial: Expandiendo

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t)e^{inx} \quad (2.17)$$

De lo que se puede deducir que

$$a_n(0) = f_n \quad (2.18)$$

Por ejemplo, suponga que

$$f(x) = \sin(\pi \cos x) \quad (2.19)$$

Lo que da una solución analítica

$$u(t, x) = \sin[\pi \cos(x + t)] \quad (2.20)$$

Los coeficientes espectrales en la solución (2.14) son

$$a_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\pi \cos x) e^{-inx} dx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} J_n(\pi), \quad n \text{ impar} \quad (2.21)$$

En una versión numérica de la solución espectral, se trunca la expansión en $n = N$.

Y la media de error cuadrático para $u_N(t, x)$ se calcula como

$$L_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x) - u_N(t, x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{|n|>N} a_n(0) e^{inx} e^{int} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{|n|>N} |a_n(0)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

Ahora $J_n(\pi)$ va a cero exponencialmente como $n \rightarrow \infty$, por lo que el error disminuye exponencialmente con N para cualquier $t \geq 0$. Esta es la característica dominante de un buen método espectral, una que se debe buscar siempre. Por el contrario, un método de diferencias finitas de segundo orden tiene un error que se escala como $\frac{1}{N^2}$.

Esta convergencia exponencial de los métodos espectrales se establece cuando uno ha resuelto las características principales de la solución. En el ejemplo anterior, las funciones de Bessel pasan rápidamente a cero una vez $n > \sim \pi$, que corresponde a tener aproximadamente π funciones de base por longitud de onda. Puede mostrar que esta es una propiedad general de los métodos espectrales. Por

el contrario, la diferenciación finita precisa de segundo orden necesita aproximadamente 20 puntos por longitud de onda para una precisión del 1%. Además, una vez que se resuelve la solución, la precisión mejora mucho más rápidamente con métodos espectrales.

Hay tres propiedades de las funciones e^{inx} que son cruciales para esta solución analítica espectral, que es sólo la técnica de separación de variables:

1. Son un conjunto completo de funciones de base.
2. Cada función de base por sí misma obedece las condiciones de frontera.
3. Son funciones propias del operador en el problema $d = dx$.

Como veremos, sólo la propiedad 1 es esencial para los métodos espectrales numéricos. Los métodos espectrales no se limitan a series de Fourier - una amplia selección de funciones pueden ser usadas.

Para calcular a_n hay tres formas básicas, que pueden compararse considerando el residuo cuando la expansión 0 se sustituye en la ecuación que está tratando de resolver:

1. *Método Tau.* Aquí se requiere que a_n sea calculado de modo que las condiciones de contorno sean satisfechas, y que el residuo sea ortogonal a tantas de las funciones de base como sea posible.
2. *Método de Galerkin.* En este caso se combinan las funciones de base en un nuevo conjunto, cada una de las cuales satisface las condiciones de contorno. Luego haga el residuo ortogonal a tantas de las nuevas funciones de base como sea posible. (Esto es esencialmente lo que se hace cuando se separan las variables en la resolución de un EDP, como lo hicimos para la ecuación 0. Usualmente se comienza con funciones de base que ya satisfacen las condiciones de contorno individualmente.
3. *Colocación o método pseudoespectral.* Como en el método tau, requieren que se cumplan las condiciones de contorno, pero hacen que el cero residual se encuentre en un conjunto de puntos adecuadamente elegidos.

La gran ventaja del método pseudoespectral es que es fácil de implementar para problemas no lineales. En lugar de trabajar con los coeficientes espectrales, como con los otros dos métodos, se trabaja con los valores de la solución en los puntos

de malla especiales asociados con las funciones de base (típicamente, los puntos de cuadratura gaussiana). Estos se llaman los *puntos de colocación*. A menudo decimos que estamos trabajando con la solución en el *espacio físico* en oposición al *espacio espectral*.

2.3 Método Pseudo-espectral

Los métodos pseudo-espectrales, también conocidos como métodos de representación discreta de variables (DVR), son una clase de métodos numéricos utilizados en matemáticas aplicadas y computación científica para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Los métodos pseudo-espectrales o de Fourier fue introducido a principios de los años setenta y aplicado a la propagación de ondas en 1982 por Kosloff y Baysal, este método emplea el método de diferencias finitas para solucionar las derivadas temporales con diferencias centradas y derivadas espaciales utilizando transformada de Fourier. Los métodos son más eficiente para modelos tridimensionales. Están estrechamente relacionados con los métodos espectrales, pero complementan la base por una base pseudoespectral adicional, que permite representar funciones en una cuadrícula en cuadratura. Esto simplifica la evaluación de ciertos operadores y puede acelerar considerablemente el cálculo cuando se utilizan algoritmos rápidos tales como la transformada rápida de Fourier.

Un método pseudoespectral es un método de *interpolación*: Se piensa en la representación

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) \quad (2.13)$$

Como un polinomio que interpola la solución. Se requiere que este polinomio de interpolación sea exactamente igual a la solución en los puntos de colocación $N + 1$. Si se hacen las cosas correctamente, entonces como $N \rightarrow \infty$, los errores entre los puntos tienden a cero exponencialmente rápido.

Considere una aproximación de diferencias finitas para d/dx en el centro de una malla igualmente espaciada, por ejemplo

$$\begin{aligned}
hf'(x) &= -\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h) + O(h^2) \\
&= \frac{1}{12}f(x-2h) - \frac{2}{3}f(x-h) + \frac{2}{3}f(x+h) - \frac{1}{12}f(x+2h) + O(h^4) \\
&= \dots
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Para las diferencias centradas como éstas, el límite cuando $N \rightarrow \infty$ de los pesos (coeficientes de f) es finito. Pero para las aproximaciones unilaterales, o parcialmente aproximaciones unilaterales, los pesos divergen. Puesto que uno tiene que utilizar tales aproximaciones cerca de los extremos de la malla, no es sorprendente que las aproximaciones de las diferencias finitas de orden alto tengan grandes errores cerca de los límites.

Pero supongamos que los puntos de la malla no están igualmente espaciados. En particular, supongamos que están más cerca junto a los extremos, como los puntos de cuadratura gaussiana. Entonces la aproximación de diferencias finitas es convergente cuando $N \rightarrow \infty$.

El método pseudoespectral da la derivada exacta del polinomio de interpolación que pasa a través de los datos en los puntos de la malla $N + 1$. Se obtiene el mismo resultado para un método de diferencia finita que utiliza todos los puntos de la malla $N + 1$, Esto se deduce de la singularidad del polinomio de interpolación, un polinomio de grado N a través de todos los puntos $N + 1$.

Con este punto de vista, se piensa en un método pseudoespectral como una forma de encontrar aproximaciones numéricas de alto orden a derivadas en puntos de malla. Entonces, al igual que los métodos de diferencias finitas, satisfaga la ecuación que desea resolver en los puntos de la malla.[8]

La discretización se hace en tiempo y espacio por medio de una malla de dimensiones finitas equidistante, con Δx , el tiempo se divide en intervalos Δz . Las derivadas espaciales se calculan utilizando las transformadas directas e inversas de Fourier, donde la información pasa del dominio espacial (x) al dominio de onda (k) y de la forma contraria. Dichas transformadas se denotan así:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \tag{2.15}$$

Para pasar del dominio espacial al dominio de onda, y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk \quad (2.15)$$

Para pasar del dominio de onda al dominio espacial.

Una propiedad de la transformada de Fourier es que la n -ésima derivada de la función espacial $f(x)$ tiene como transformada $(ik)^n F(k)$ donde cada $i^2 = -1$, así para la derivada de segundo orden de la función f tenemos una transformada directa de Fourier en el espacio $f(x)$ y una transformada inversa en número de onda $(ik)^2 F(k) = (-k)^2 F(k)$ y a partir de allí volver al dominio espacial con la segunda derivada.

$$f(x) \Rightarrow (ik)^2 F(k) = (-k)^2 F(k) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

Con suficiente poder de cómputo, este método puede aplicarse al modelado de propagación de ondas a partir de la ecuación de la onda y el uso de diferencias finitas. Este método requiere de menos puntos de muestreo por longitud de onda espacial, comparado con el esquema tradicional de diferencias finitas.

Las derivadas espaciales construidas con el método pseudo-espectral son exactas para los desplazamientos en la malla de cálculo. Para un problema en una región homogénea e infinita, las componentes de Fourier son características a la ecuación de onda y la frecuencia temporal de la solución será igual a la banda de frecuencia de la de fuente $S(x, y, t)$. Para las derivadas temporales la aproximación de las diferencias finitas verá una dispersión numérica que decrece cuando se disminuye el tamaño del intervalo de tiempo.

Cuando la densidad o la velocidad varían espacialmente, la banda de frecuencia de la solución de la ecuación de onda es igual a la banda de frecuencia de la fuente. Esto es porque una multiplicación por la velocidad en el dominio espacial corresponde a una convolución en la frecuencia espacial.

Una ventaja adicional del método pseudo-espectral sobre el de diferencias finitas para un medio 2D o 3D homogéneo es la dispersión es isotrópica, es decir, la frecuencia viajará a la misma velocidad en cada uno de los ángulos con respecto

a la malla, en lugar de ser anisotrópica (donde se debe considerar el ángulo) para altas frecuencias.

3. Ondas

Una onda es una perturbación que transmite energía sin generar un desplazamiento de materia y que luego de su paso por el medio perturbado dicho medio vuelve a su estado inicial. Esta perturbación que produce el movimiento es trasladada a las capas adyacentes transmitiendo la perturbación y haciendo que cada partícula oscile o vibre alrededor de una posición de equilibrio.

El frente de onda es el conjunto de partículas que son alcanzados simultáneamente por una onda. Los frentes de ondas pueden ser visualizados como círculos concéntricos que viajan alejándose de la fuente que origina la perturbación.

3.1 Ondas Elásticas

Es un tipo de onda mecánica que necesita un medio que tenga inercia y elasticidad, en este medio cada partícula se mueve alrededor de una sola posición de equilibrio, debido a sus propiedades elásticas. Existen dos tipos de ondas elásticas que son las ondas de cuerpo o de volumen y las ondas superficiales.

3.1.1 Tipos de Ondas

- Primarias o de comprensión: también conocidas como ondas P, estas son las que poseen mayor velocidad por lo cual son las que se registran primero. Al propagarse las partículas se mueven en el mismo sentido de la propagación por lo cual también son llamadas longitudinales.
- Secundarias o de corte: también conocidas como ondas S, estas ondas poseen menor velocidad que las ondas P. al propagarse las partículas se mueven perpendicularmente al sentido de la propagación. Se llaman SV si

las partículas se mueven de arriba abajo y SH si se mueven de forma horizontal. Llamadas también transversales.

3.1.2 Principios de la teoría de la elasticidad

Las perturbaciones en un medio elástico en función del tiempo producen cambios locales en esfuerzo y deformación. La relación entre estas dos está gobernado por las constantes elásticas, por lo cual la relación de estas perturbaciones con el tiempo lleva a la ecuación de las ondas elásticas. Por lo cual es necesario tener en cuenta lo que es esfuerzo y deformación.

El esfuerzo es la relación de la fuerza por el área en la que es aplicada:

$$esfuerzo = \frac{fuerza}{area} = \frac{F}{A} \quad (3.1)$$

Este esfuerzo se llama normal de comprensión si la fuerza es aplicada perpendicularmente al área, pero si la fuerza es aplicada tangencialmente se le llama cortante o de cizalla.

Por otra parte la deformación es el cambio relativo de dimensión o forma del cuerpo el cual está sujeto a esfuerzos. Se pueden producir dos tipos de deformaciones que son:

- Deformación primaria o elemental: también llamada normal. Según el eje cartesiano en que se produzca la fuerza se tendrá

$$\epsilon_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.4)$$

Donde $(\partial \mu, \partial y, \partial w)$ son los cambios en longitud en el eje coordenado (x, y, z) respectivamente.

Los cambios de dimensiones dados por deformaciones normales resultan de los cambios en volumen. Y este cambio por unidad de volumen es llamado dilatación y es representado de la siguiente manera:

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Deformación de cizalla: es la combinación de deformaciones en planos (xy, xz, yz)

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \quad (3.7)$$

3.1.3 Ley de Hooke

Esta ley establece que la deformación es directamente proporcional a la fuerza aplicada.

$$F = K * (x - x_0) \quad (3.8)$$

Donde F es el esfuerzo aplicado, K la constante de elasticidad, x_0 es la dimensión del cuerpo o medio sin deformación y x es el mismo cuerpo o medio pero con el esfuerzo y la deformación aplicada. Cuando se presentan varios esfuerzos se produce una deformación por cada esfuerzo de forma independiente. En medios isotrópicos⁴ la relación entre esfuerzo y deformación puede definirse de la siguiente manera:

$$\sigma_{ii} = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{ii} \quad \text{Donde } i = x, y, z \quad (3.9)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \varepsilon_{ij} \quad \text{Donde } i, j = x, y, z \text{ para } i \neq j \quad (3.10)$$

Donde λ y μ ⁵ son las constantes elásticas de Lamé, Δ es la dilatación y ε_{ii} & ε_{ij} son las deformaciones.

⁴ Medio Isotrópico: cuando las propiedades o características del medio no varían, o no dependen de la dirección en la cual se aplica la fuerza.

⁵ μ : es una medida de la deformación cortante, conocida como módulo de rigidez o cizalla. En medios líquidos no se presenta por lo cual su valor es 0.

3.2 Ecuación de la onda

Para obtener la ecuación de la onda se inicia desde la ecuación cinética fundamental la cual permite describir la ecuación de movimiento fundamental de una onda tomando un tren de ondas sinusoidales conocidas como armónicas ver Figura 4.

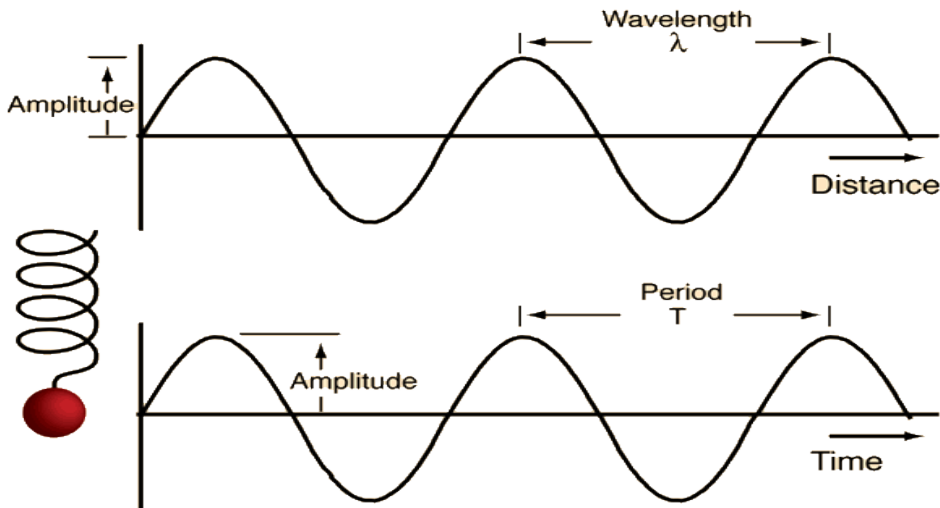


Figura 4 Onda Armonica

Una única onda armónica tomará la forma de una onda sinusoidal en función de la distancia. La onda sinusoidal de arriba es una onda transversal típicamente causada por una pequeña pelota que cae a una piscina en reposo.

La distancia entre dos máximos consecutivos de amplitud se conoce como longitud de onda λ . El número de ondas N generado será $N = f * t$, f siendo la frecuencia y t el tiempo.

La distancia recorrida D por la primera onda será $D = C * t$. El cociente N y D corresponden a la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{D}{N} = \frac{Ct}{ft} = \frac{C}{f} \quad (3.11)$$

De donde se obtiene la ecuación cinética fundamental de la teoría de ondas:

$$C = \lambda f \quad (3.12)$$

Para describir la ecuación de la onda de un sólido elástico es necesario recurrir a la ley de Newton

$$F = ma = \rho * \frac{d^2u}{dt^2} \quad (3.13)$$

Como la fuerza depende de la segunda derivada respecto al tiempo, si el esfuerzo es uniforme no hay fuerza por esta razón se puede recurrir entonces a la ley de Hooke, que relaciona el esfuerzo en términos de la deformación.

Para un medio donde el desplazamiento es $\mu(x, t)$

$$\rho * \frac{d^2u}{dt^2} = m * a = \frac{d}{dx} \left(E * \frac{du}{dx} \right) = E \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) \quad (3.14)$$

Como la velocidad de la onda longitudinal es

$$C\rho = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{por lo tanto} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C\rho^2 * \frac{d^2u}{dx^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

Esta ecuación puede satisfacer para cualquier onda en una sola dimensión que se propaga sin dispersión o sin variación de forma[9]

3.3 Ecuación de la onda elástica

La ecuación de deformación-de desplazamiento como su nombre lo indica es la que muestra la relación entre la dispersión y variación.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

Para materiales elásticos la ecuación constitutiva es la que plantea la relación entre las tensiones y las deformaciones dada por la ley de Hooke mediante la ecuación:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.17)$$

C_{ijkl} Tensor de elasticidad

Para medios isotrópicos el tensor de elasticidad se puede expresar a partir del tensor de Kronecker:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \quad (3.18)$$

Donde λ y μ son el primer y segundo parámetro de Lamé donde:

$$\lambda = C_{11} - 2C_{44} \quad (3.19)$$

$$\mu = C_{44} \quad (3.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.18) en (3.17) se obtiene la ley de Hooke para un medio isotrópico:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.16) en (3.21):

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.22)$$

Si la ecuación (3.22) se deriva con respecto a x_j se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (3.23)$$

Si se agrupa por términos semejantes se obtiene la ecuación de la onda elástica de la siguiente manera:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.24)$$

O en forma vectorial:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

El laplaciano vectorial cumple la igualdad:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.26)$$

Si se substituye (3.26) en (3.25) se obtiene una forma alterna de la ecuación de onda elástica:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.27)$$

Teniendo en cuenta que la teoría de Helmholtz establece que el vector de desplazamiento \mathbf{u} puede expresarse en términos de un potencial escalar ϕ y de un vectorial ψ de la siguiente forma:

$$u = \nabla\phi + \nabla \times \psi \quad (3.28)$$

Donde:

$$\nabla \times \nabla\phi \equiv 0 \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \psi \equiv 0 \quad (3.30)$$

Substituyendo (3.28) en (3.27):

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot (\nabla\phi + \nabla \times \psi) + \mu\nabla \times \nabla \times (\nabla\phi + \nabla \times \psi) +$$

$$F = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla\phi + \nabla \times \psi) \quad (3.31)$$

A partir de (3.30) y de que $\nabla \cdot \nabla\phi \equiv \nabla^2\phi$ y la ecuación (3.31) se puede llevar a la forma:

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi - f_E \right) + \nabla \times \left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu\nabla^2\psi - f_v \right) = 0 \quad (3.32)$$

Donde f_E y f_v son los potenciales escalar y vectorial de F respectivamente.

Dado que en la ecuación (3.32) el primer término es escalar y el segundo vectorial, los dos términos por separado deben ser igual a cero por separado, por lo tanto la propagación de la onda elástica puede expresarse equivalentemente a partir de ecuaciones de onda de sus potenciales escalar y vectorial, es decir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{c_L^2} \nabla^2 \phi + \frac{1}{\rho} f_E \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{c_T^2} \nabla^2 \psi + \frac{1}{\rho} f_v \quad (3.34)$$

Donde

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad (3.35)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.36)$$

(tomado de [2])

4. Modelado de la onda elástica bidimensional

La onda elástica se va a modelar emplear el método de DF. Tomamos como punto de partida la ecuación de onda elástica (2.24) y debido al tipo de onda entonces se tienen en cuenta los parámetros de Lamé ya que ellos varían con respecto a la posición (4.1):

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.1)$$

Por lo tanto la ecuación de la onda elástica es:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

En este caso como la onda elástica se propaga en un medio lineal e isotrópico se puede expresar por el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \sigma_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se deriva con respecto al tiempo las ecuaciones (4.3) cambiando las variables u_x y u_z de desplazamiento por v_x y v_z variables de velocidad y generando un sistema de ecuaciones de primer grado que es:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\
\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\
\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para minimizar la complejidad de las ecuaciones y reducir el tiempo computacional, se omiten las tensiones realizando una sustitución de las tres últimas ecuaciones del conjunto de ecuaciones (4.4) que derivan de la ley de Hooke y las dos primeras del conjunto de ecuaciones (4.3) las cuales derivan de la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u \tag{4.5}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u \tag{4.6}$$

4.1 Modelamiento de variables

Se emplea el método de diferencias finitas de segundo orden para el tiempo y el espacio.

Teniendo en cuenta la ecuación (4.5) se emplea el método de diferencias finitas de segundo orden para el primer término derivativo espacial al cual se le identifica como A y se obtiene:

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \tag{4.7}$$

Donde C_1 es la constante que acompaña las derivadas de una sola variable

Se define una función auxiliar Q de la siguiente manera

$$Q = C_1 \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.8}$$

Y se realiza la aproximación de diferencias finitas de segundo orden de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x^n_i) = \frac{1}{\Delta x} (Q(x^n_{i-1}) - 2Q(x^n_i) + Q(x^n_{i+1})) \quad (4.9)$$

Luego de realizar la aproximación de la función auxiliar (4.7) se obtiene la siguiente expresión:

$$Q_{i+q} = \left(\int_{-x_{i-(q-s+1)}}^{x_{i-(q-s+1)}} C_1 dx \right)^{-1} (u_{i-(q-s+1)} - u_{i-(q-s+1)}) \quad (4.10)$$

Por lo cual las diferencias finitas para la expresión espacial es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x_i, z_j, n\Delta t) \\ &\approx a_{i+1,j} (u^n_{i+2,j} - u^n_{i,j}) - 2a_{i,j} (u^n_{i+1,j} - u^n_{i-1,j}) \\ &\quad + a_{i-1,j} (u^n_{i-2,j} - u^n_{i,j}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Donde

$$a_{i+q,j} = \frac{1}{h} \left(\int_{-x_{i-(q-s+1)}}^{x_{i-(q-s+1)}} \frac{dx}{C_1(x, z_j)} \right)^{-1} \quad (4.12)$$

Para los términos de derivada mixta es ligeramente diferente considerando la siguiente ecuación:

$$B = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) u \quad (4.13)$$

Definiendo la ecuación auxiliar como:

$$Q = C_2 \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.12)$$

Se aplica las diferencias finitas como en la ecuación (4.9) y se realiza la integración con respecto al eje z y obteniendo la función auxiliar como:

$$Q_{i+q,j} = \left(\int_{-z_{j-1}}^{z_{j+1}} \frac{dz}{C_2(x, z_j)} \right)^{-1} (u_{i+q,j+1} - u_{i+q,j-1}) \quad (4.13)$$

Por lo tanto la expresión de la derivada espacial mixta es:

$$B = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x_i, z_j, n\Delta t) \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \approx & b_{i+1,j}(u^n_{i+2,j+1} - u^n_{i+2,j-1}) - 2b_{i,j}(u^n_{i+1,j+1} - u^n_{i+1,j-1}) \\ & + b_{i-1,j}(u^n_{i-2,j+1} - u^n_{i-2,j-1}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Donde

$$b_{i+q,j} = \frac{1}{h} \left(\int_{-z_{j-1}}^{z_{j+1}} \frac{1}{c_2(x_i,z)} dz \right)^{-1} \quad (4.16)$$

Las derivadas del tiempo se modelan empleando las diferencias finitas de segundo orden de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, z_j, t_n)}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (4.17)$$

4.2 Modelamiento de la ecuación

Ya finalizado el modelado de las diferentes variables de las ecuaciones (4.5) y (4.6) dichas ecuaciones se pueden presentar como:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\rho_{i,j}} (A + B + C + D) + 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} \quad (4.18)$$

$$w_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\rho_{i,j}} (A' + B' + C' + D') + 2w_{i,j}^n - w_{i,j}^{n-1} \quad (4.19)$$

Donde u y w representan a u_x y u_z antes mencionadas, las variables A, B, C, D, A', B', C' y D' son las variables espaciales y están dadas por (4.11) y (4.14), a partir de ellas se pueden construir las demás variables de la misma manera. [10]

5. Resultados

Para demostrar la validez del modelado de la onda, se procedió a realizar la implementación de la misma creando un algoritmo en el cual se simula la onda elástica a través del subsuelo en un medio isotrópico bidimensional.

Dicho algoritmo fue realizado en Matlab con el método de Diferencias Finitas de segundo orden tanto para la parte temporal como para la espacial. Teniendo como fuente con una frecuencia de 20 Hz localizada en la parte superior para simular el levantamiento de información en la vida real, generando una onda la cual viaja a través del medio con una velocidad constante.

El medio se modelo como una malla finita de 500 x 500 unidades y un intervalo entre cada punto del espacio calculado a partir de la frecuencia de la fuente. El algoritmo se encarga de calcular el estado de la malla en cada instante de tiempo con un step o dt calculado a partir de la condición de estabilidad:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}} v_p \Delta x \quad (5.1)$$

Esta condición es importante ya que al usar los métodos números se crea una inestabilidad numérica debido a las expansiones podrían crecer indefinidamente y se requiere de un límite establecido a los valores que pueda tomar.

Se podría pensar en la malla como una serie de hojas apiladas en la que cada una representa el estado del medio y el movimiento de la onda en un instante de tiempo, la unión de estas “hojas” permiten observar la propagación de la onda a través del medio y determinar cuando el medio cambia debido a su reflexión Figura 5.

El método de diferencias finitas permite determinar las componentes espacial y temporal de la deformación que genera la energía de la fuente en las partículas del medio.

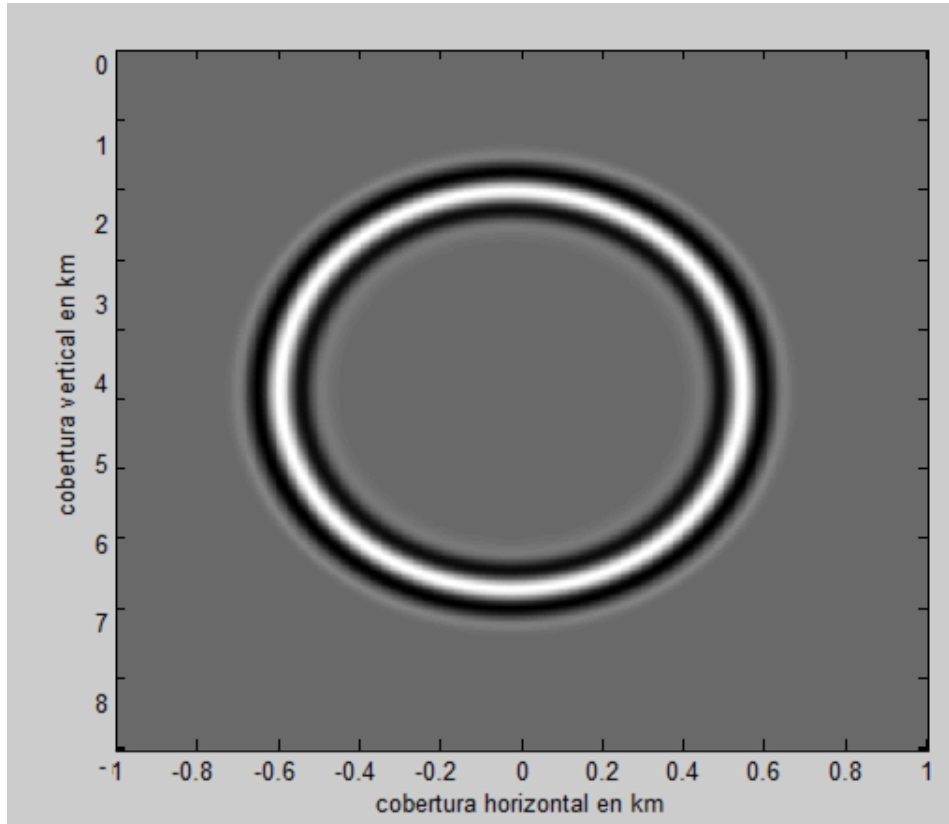


Figura 5 Propagación de la Onda

Computacionalmente es necesario limitar el tamaño de la malla debido a los recursos de procesamiento limitados, por lo cual se establece en el código el tamaño de la malla en la que se realiza el modelado.

Con el paso de tiempo ya establecido con el step se soluciona la onda para cada punto de la malla en sus posiciones anterior, siguiente y actual por lo cual es manejado de la siguiente manera

```

Para cada paso de malla (step)
  ondaPFutura= diferenciasFinitas( eq(4.18))
  absorberBordes(ondaPFutura)
  Generar grafico(ondaPFutura)
  ondaPPasada= ondaPPresente
  ondaPPresente= ondaPFutura

diferenciasFinitas(onda)
  para cada componente en onda
    diferenciasFinitasComponente(componente)

```

```
diferenciasFinitasComponente(componente)
  Si componente es A o D
    Aplica ecuación (4.11)
  Si no
    Aplica ecuación (4.14)
absorberBordes(onda)
  Si onda en borde
    Onda * factorAtenuante
```

Se emplea un método de absorción de bordes puesto que en la vida real una onda se propagaría indeterminadamente hasta perder su energía. En este caso el método de propagación de bordes se encarga de reducir las reflexiones generadas por los bordes de la malla creando un margen al borde de la malla donde se anula la energía de la onda Figura6.

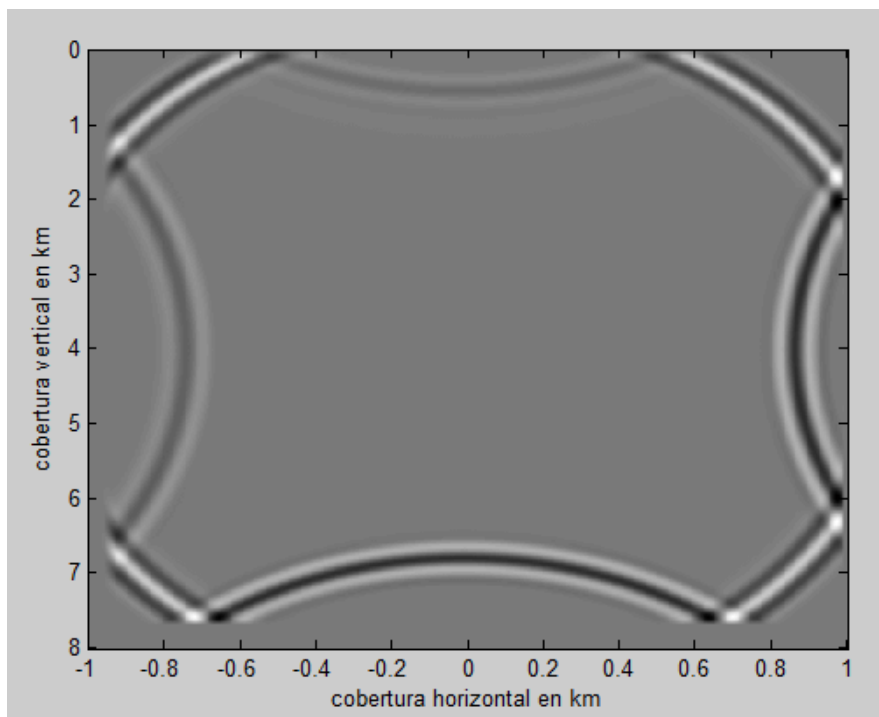


Figura 6 Absorción de bordes

Se puede observar la diferencia de intensidad en las reflexiones de los bordes superior e izquierdo con los bordes inferiores y derecho, los primeros poseen el método de absorción de bordes y los segundos no lo poseen.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

- Se identificó que los métodos más propicios son los métodos de diferencias finitas, el método espectral y el método pseudo-espectral ya que estos son los más empleados y con ellos se pueden obtener resultados con mayor exactitud.
- El método de diferencias finitas permite tener un mejor manejo al momento de modelarlo computacionalmente y el manejo de la absorción de bordes en comparación a los demás métodos.
- El método de atenuación de los bordes puede ser mejorado ya que este no elimina por completo las reflexiones que se crean en los bordes.

6.2 Recomendaciones

- Se recomienda que para trabajos futuros se miren los métodos de elementos finitos y el método pseudo-espectral ya que estos también son usados recurrentemente (siendo el de mayor uso de los dos el segundo) y realizar ciertas comparaciones con el método de diferencias finitas en sus diferentes órdenes.
- Sería ideal mirar nuevos lenguajes como lo es Python, ya que este posee librerías que son de mucha ayuda al momento de realizar diferentes tipos de procedimientos matemáticos.

A. Anexo: Código Matlab

El código base fue tomado de trabajos previos en los cuales se modelaba la onda en un medio acústico y solo se modificaron las partes importantes en donde se modela la onda

```
%grupo PANGEA.....
clear all
home
Nx=500;%numero depuntos en x
Nz=500;%numero depuntos en z
Tx=15;
Tz=15;
aa=Nz-Tz;
bb=Nx-Tx;
Rho=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de rho
lamda=zeros(Nz,Nx);%CAMPO lamda
mu=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de miu
P1=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de onda P pasado
P2=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de onda P presente
P3=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de onda P futuro
AP=zeros(Nz,Nx);%Componente variable unica de P
BP=zeros(Nz,Nx);%Componente variable mixta de P
CP=zeros(Nz,Nx);%Componente variable mixta de P
DP=zeros(Nz,Nx);%Componente variable unica de P
S1=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de onda S pasado
S2=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de onda S presente
S3=zeros(Nz,Nx);%CAMPO de onda S futuro
AS=zeros(Nz,Nx);%Componente variable unica de S
BS=zeros(Nz,Nx);%Componente variable mixta de S
CS=zeros(Nz,Nx);%Componente variable mixta de S
DS=zeros(Nz,Nx);%Componente variable unica de S
xini=-1;%kilometros coberturahorizontal
xfinal=1;%kilometros cobertura horizontal
zini=0;%kilometros
zfinal=8;% kilometros
ddx=(xfinal-xini)/Nx;
ddz=(zfinal-zini)/Nz;
xx=xini:ddx:xfinal;
zz=zini:ddz:zfinal;
Tout=600;%numero deiteraciones
Freq=20;%(Hz)Frecuencia fundamental
cmax=1;
cmin=99999.0;
c= ones(Nz,Nx);
```

```

%pregunta=input('Medio homoganeo 1 o capas planas y paralelas 2
Sinclinal 3 reflector inclinado 4 : ');
pregunta=1;
if pregunta== 1
    %velo=input('valor de velocidad en mts/seg del medio homoganeo :
');
    velo=4500;
    c=velo*c;
end
if pregunta==2
    for i=1:Nx
        for j=1:round(Nz/4)
            c(j,i)=2000;
        end
        for j=round(Nz/4)+1:Nz/2
            c(j,i)=3000;
        end
        for j=Nz/2:Nz
            c(j,i)=4000;
        end
    end
end
if pregunta== 3
    %sinclinal
    c= ones (Nz,Nx);
%imagesc(xx,zz,c);colormap(gray);
imagesc(c);colormap(gray);
[X,Y] = ginput(5);

%line([X(1), X(2)]', [Y(1),Y(2)]');
%line([X(2), X(3)]', [Y(2),Y(3)]');
%line([X(3), X(4)]', [Y(3),Y(4)]');
%line([X(4), X(5)]', [Y(4),Y(5)]');
PP=polyfit(X,Y,4);
%xx1=X(1):0.005:X(5);
xx1=X(1):X(5);
NN=length(xx1);
zz1=PP(1)*xx1.^4+PP(2)*xx1.^3+PP(3)*xx1.^2+PP(4)*xx1.^1+PP(5);
for kk=1:NN-1
    line([xx1(kk), xx1(kk+1)]', [zz1(kk),zz1(kk+1)]');
end
for i=1:Nx
    for j=1:Nz
        vv=PP(1)*i^4+PP(2)*i^3+PP(3)*i^2+PP(4)*i.^1+PP(5);
        if j>vv
            c(j,i)=4000;
        else
            c(j,i)=2000;
        end
    end
end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if pregunta== 4
    %reflector inclinado
    c= ones (Nz,Nx);
%imagesc(xx,zz,c);colormap(gray);

```

```

imagesc(c);colormap(gray);
[X,Y] = ginput(2);

%line([X(1), X(2)]', [Y(1),Y(2)]');
%line([X(2), X(3)]', [Y(2),Y(3)]');
%line([X(3), X(4)]', [Y(3),Y(4)]');
%line([X(4), X(5)]', [Y(4),Y(5)]');
PP=polyfit(X,Y,1);
%%%*****
xx1=X(1):X(2);
NN=length(xx1);
zz1=PP(1)*xx1+PP(2);
for kk=1:NN-1
    line([xx1(kk), xx1(kk+1)]', [zz1(kk),zz1(kk+1)]');
end
for i=1:Nx
    for j=1:Nz
        vv=PP(1)*i+PP(2);
        if j>vv
            c(j,i)=4000;
        else
            c(j,i)=2000;
        end
    end
end
end
%%%*****
end
%%%fin de inclinado.....
imagesc(c)%visualizar como imagen el campo de velocidades
title('Haga click en la posicion de la fuente');
[X,Y] = ginput(1);
x0=round(X);%localizacion de la fuente
z0=round(Y);%localizacion de la fuente
cmax=4000;cmin=2000;
%seis puntos por longitud de onda
dx=cmin/(12*Freq);
%condicion de estabilidad
dt=dx/(cmax*sqrt(2));
%calcular el numero de Courant en cada punto
for i=1:Nx
    for j=1:Nz
        G(j,i)=(c(j,i)*dt/dx)*(c(j,i)*dt/dx);
    end
end
end
%.....
t0=1/Freq;
w0=2*pi*Freq;
%implementacion de la fuente
for tStep=1:Tout
    k=tStep;
    t(k)=(tStep-1)*dt-t0;
    arg1=min(15,(w0*t(k)/2)*(w0*t(k)/2));
    arg2=min(15,(w0*(t(k)+pi/w0)/2)*(w0*(t(k)+pi/w0)/2));
    arg3=min(15,(w0*(t(k)-pi/w0)/2)*(w0*(t(k)-pi/w0)/2));
    amp=(1-2*arg1)*exp(-arg1);
    amp=amp-0.5*(1-2*arg2)*exp(-arg2);
end

```

```

amp=amp-0.5*(1-2*arg3)*exp(-arg3);
F(k)=amp;
end
%.....
%figure
%plot(t,F)
%Transformada de Fourier de la Ricker
fs=Tout;
m = length(F);           % Window length
n = pow2(nextpow2(m));   % Transform length
y = fft(F,n);           % DFT
f = (0:n-1)*(fs/n);     % Frequency range
power = y.*conj(y)/n;   % Power of the DFT
y0 = fftshift(y);       % Rearrange y values
f0 = (-n/2:n/2-1)*(fs/n); % 0-centered frequency range
power0 = y0.*conj(y0)/n; % 0-centered power
%figure
y0 = fftshift(y);       % Rearrange y values
f0 = (-n/2:n/2-1)*(fs/n); % 0-centered frequency range
power0 = y0.*conj(y0)/n; % 0-centered power
%plot(f0,power0)
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Power')
%title('\bf 0-Centered Periodogram')
%La transformada de Fourier fue calculada en base a una función del prof
%Nestor del Dpto de Física UP
Tout
for tStep=1:Tout
    tStep
    (tStep-1)*dt
    tt(tStep)=(tStep-1)*dt;
    for i=2:Nx-2
        for j=2:Nz-2
            Ax=(AP(j,i+1)*(P2(j,i+1)-P2(j,i)))-(2*AP(j,i)*(P2(j,i+1)-
P2(j,i-1)))+(AP(j,i-1)*(P2(j,i-1)-P2(j,i)));
            Bx=(BP(j,i+1)*(P2(j+1,i+2)-P2(j-1,i+2)))-
(2*BP(j,i)*(P2(j+1,i+1)-P2(j-1,i+1)))+(BP(j,i-1)*(P2(j+1,i-2)-P2(j-1,i-
2)));
            Cx=(CP(j+1,i)*(P2(j+2,i+1)-P2(j+2,i-1)))-
(2*CP(j,i)*(P2(j+1,i+1)-P2(j+1,i-1)))+(CP(j-1,i)*(P2(j-2,i+1)-P2(j-2,i-
1)));
            Dx=(DP(j+1,i)*(P2(j+1,i)-P2(j,i)))-(2*DP(j,i)*(P2(j+1,i)-
P2(j-1,i)))+(DP(j-1,i)*(P2(j-1,i)-P2(j,i)));
            Az=(AS(j,i+1)*(P2(j,i+1)-P2(j,i)))-(2*AS(j,i)*(P2(j,i+1)-
P2(j,i-1)))+(AS(j,i-1)*(P2(j,i-1)-P2(j,i)));
            Bz=(BS(j,i+1)*(P2(j+1,i+2)-P2(j-1,i+2)))-
(2*BS(j,i)*(P2(j+1,i+1)-P2(j-1,i+1)))+(BS(j,i-1)*(P2(j+1,i-2)-P2(j-1,i-
2)));
            Cz=(CS(j+1,i)*(P2(j+2,i+1)-P2(j+2,i-1)))-
(2*CS(j,i)*(P2(j+1,i+1)-P2(j+1,i-1)))+(CS(j-1,i)*(P2(j-2,i+1)-P2(j-2,i-
1)));
            Dz=(DS(j+1,i)*(P2(j+1,i)-P2(j,i)))-(2*DS(j,i)*(P2(j+1,i)-
P2(j-1,i)))+(DS(j-1,i)*(P2(j-1,i)-P2(j,i)));
            P3(j,i)=(G(j,i)*(Ax+Bx+Cx+Dx))+2*P2(j,i)-P1(j,i);
            S3(j,i)=(G(j,i)*(Az+Bz+Cz+Dz))+2*P2(j,i)-P1(j,i);
        end
    end
end

```

```

        P3(z0,x0)=P3(j,i)+F(tStep);
        S3(z0,x0)=S3(j,i)+F(tStep);
        imagesc(xx,zz,P3+0.00001*c);colormap(gray);
        hold on
        imagesc(xx,zz,S3+0.00001*c);colormap(gray);
        xlabel('cobertura horizontal en km');
        ylabel('cobertura vertical en km');
    drawnow;
    pause(0.01);
    %atenuar arriba.....
    for j=1:Tz
        P3(j,:)=P3(j,:)*exp(-(0.015*(Tz-j)));
        P2(j,:)=P2(j,:)*exp(-(0.015*(Tz-j)));
        P1(j,:)=P1(j,:)*exp(-(0.015*(Tz-j)));
    end
    %atenuar abajo.....
    %for j=Nz-Tz:Nz
%    P3(j,:)=P3(j,:)*exp(-abs(0.015*(j-aa)));
%    P2(j,:)=P3(j,:)*exp(-abs(0.015*(j-aa)));
%    P1(j,:)=P1(j,:)*exp(-abs(0.015*(j-aa)));
    %end
    %atenuar izquierda.....
    for i=1:Tx
        P3(:,i)=P3(:,i)*exp(-(0.015*(Tx-i)));
        P2(:,i)=P2(:,i)*exp(-(0.015*(Tx-i)));
        P1(:,i)=P1(:,i)*exp(-(0.015*(Tx-i)));
    end
    %atenuar derecha.....
    %for i=1:Nx-Tx:Nx
%    P3(:,i)=P3(:,i)*exp(-abs(0.015*(i-bb)));
%    P2(:,i)=P2(:,i)*exp(-abs(0.015*(i-bb)));
%    P1(:,i)=P1(:,i)*exp(-abs(0.015*(i-bb)));
    %end

    P1=P2;
    P2=P3;
    S1=S2;
    S2=S3;
    AP=P3*(lamda+(2*mu));
    BP=P3*lamda;
    CP=P3*mu;
    DP=P3*mu;
    AS=P3*(lamda+(2*mu));
    BS=P3*lamda;
    CS=P3*mu;
    DS=P3*mu;
    for j =1:Nx;
        sismo(tStep,j)=P3(Tz+1,j);
    end

end
xx1=xx(1:length(xx)-1);
figure
imagesc(xx1,tt,sismo);colormap(gray);
if pregunta==2
title('Sismograma sintetico para dos reflectores');

```

```
end
if pregunta==1
    title('Sismograma sintetico para un medio homoganeo');
end
if pregunta==3
    title('Sismograma sintetico para un sinclinal');
end
if pregunta==4
    title('Sismograma sintetico para un reflector inclinado');
end
xlabel('Cobertura horizontal en Km');
ylabel('Tiempo de propagacion en seg');
figure;
imagesc(sismo);
title('Haga click en la posicion donde visualizar la traza');
[X,Y] = ginput(1);%tomar una traza del sismograma
traza= sismo(:,round(X));
figure
plot(tt,traza);
xlabel('Tiempo en seg');
ylabel('Amplitud');
```

Bibliografía

- [1] J. Virieux, "P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method," *Geophysics*, vol. 51, no. 4, p. 889, 1986.
- [2] A. S. L, H. G. A, and W. Agudelo, "Modelado de la propagación de ondas sísmicas basado en algoritmo fdtd en paralelo," *Mecánica Comput. Vol XXVIII*, p. 7, 2009.
- [3] A. R. Levander, "Fourth-order finite-difference P-W seismograms," *Geophysics*, vol. 53, no. 11, p. 12, 1988.
- [4] A. C. Kelter and J. C. Bancroft, "Wave propagation in an anisotropic medium Characteristics of P, SV, and SH wave propagation in an anisotropic medium," *CREWES Res. Rep. —*, vol. 16, 2004.
- [5] J. Virieux, "W - wave propagation in heterogeneous media : Velocity - stress finite - difference method."
- [6] M. L. RAMÍREZ, "Modelado y Simulación de la Propagación de Ondas Elásticas en Medios Heterogéneos con Métodos Espectrales de Chebyshev," p. 74, 2011.
- [7] A. Guillen, F. H. Cabrera, J. A. Torres, and J. E. Duran, "NUMERICAL MODELING OF HETEROGENEOUS MEDIA FOR THE COMPRESIONAL WAVE USING HIGH-ORDER FINITE-DIFFERENCES," p. 12, 2015.
- [8] W. H. Press, *Numerical Recipes*. .
- [9] C. Rosales, "Sobre el comportamiento sísmico de los depósitos de suelos del área de Cañaveralejo, Cali, Colombia," Universidad del Valle, 2001.
- [10] F. Hall and Y. Wang, "Elastic wave modelling by an integrated finite difference method," no. December, pp. 104–114, 2017.