UNIVERSIDAD DE PAMPLONA-COLOMBIA
SEDE-PAMPLONA
FACULTAD DE INGENIERÍAS Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

FUNDAMENTOS EN TEORÍA DE ERRORES PARA LA GESTIÓN METROLÓGICA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA Y CARRERAS AFINES

Tesis de grado para optar al título de ingeniero eléctrico

Autor:
OMAR ALDAHIR CALDERÓN VELAZCO

PAMPLONA-COLOMBIA
2021

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA-COLOMBIA
SEDE-PAMPLONA
FACULTAD DE INGENIERÍAS Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE ERRORES PARA LA GESTIÓN METROLÓGICA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA Y CARRERAS AFINES

Tesis de grado para optar al título de ingeniero eléctrico

Autor:
OMAR ALDAHIR CALDERÓN VELAZCO

Director:
Ph.D. Ing. ANTONIO GAN ACOSTA

PAMPLONA-COLOMBIA
2021

Firma autor trabajo de grado:

Omar Aldahir Calderón Velazco
cód. 1116872003

Firma director trabajo de grado:

Ph.D. Ms. Ing. Antonio Gan Acosta
Docente titular Universidad de Pamplona

Firma jurada 1:

Ms. Ing. Édison Andrés Caicedo Peñaranda
Director programa de ingeniería eléctrica universidad de pamplona

Firma jurada 2:

Ing. Pablo Alexander Santafé Gutiérrez
Doc. Universidad de pamplona

PAMLONA, 18 de diciembre de 2021

DEDICATORIA

Dedico este título profesional a la persona más importante en mi vida como lo es mi madre, "Silvina Velazco" para ella le doy todos los honores por ser la que ha estado toda la vida ayudándome y siendo el pilar más importante para que hoy en día pueda alcanzar mis sueños y metas.

También la dedico a mi Padre "Adel Calderón Culma" por todo el apoyo que me ha dado desde que nací y hasta la fecha de mi vida y de antemano a todos los que ayudaron de cualquier manera para que hoy por hoy pueda estar y llegar donde siempre he querido…

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento, para el Doctor, magister e ingeniero Antonio Gan Acosta, por todo el apoyo brindado para poder llevar a cabo con éxito la presente tesis de grado, también darles las gracias a todos mis docentes de carrera, por las enseñanzas transmitidas durante mi proceso de formación como ingeniero.

RESUMEN

Los fundamentos metrológicos orientados a la teoría de errores son una parte importante para el análisis de datos y estar seguros de llevar las mediciones correctamente. En la teoría de errores abarcaremos en contexto análisis de tipo estadístico y matemático, abordando un amplio número de fuentes informativas para recopilar información de alta calidad, y que contiene lo más importante para los cálculos de teoría de errores. Es claro que, al momento de realizar cualquier tipo de medición, vamos a presentar una serie de errores, para los cuales existen 2 variantes, una de ellas depende netamente del sistema o equipo de medición y la otra será consecuencia de accidentes que se puedan presentar, los cuales son causales por el personal operativo, por el medio en que se lleve a cabo la medición, la sensibilidad de los aparatos, etc. Aprenderá los conceptos fundamentales al momento de analizar errores en mediciones eléctricas y con esto usar las fórmulas matemáticas que designarán la incertidumbre en cada medida, el cálculo de probabilidades es de gran utilidad, aunque son una opción enfocada más que todo cuando no se tiene seguridad del sistema, o porque es un sistema muy cambiante.

ABSTRACT

Metrological fundamentals oriented to error theory are an important part of analyzing data and making sure you are taking measurements correctly. In the theory of errors, we will cover statistical and mathematical analysis in context, addressing a large number of informative sources to collect high-quality information, which contains the most important for error theory calculations. It is clear that, when carrying out any type of measurement, we are going to present a series of errors, for which there are 2 variants, one of them clearly depends on the measurement system or equipment and the other will be the consequence of accidents that may occur. , which are causal by the operating personnel, by the means in which the measurement is carried out, the sensitivity of the devices, etc. You will learn the fundamental concepts when analyzing errors in electrical measurements and with this use the mathematical formulas that will designate the uncertainty in each measurement, the calculation of probabilities is very useful, although they are a focused option more than anything when you are not sure of the system, or because it is a very changing system.

1 Introducción

El presente documento resume la información fundamental para realizar los cálculos necesarios en teoría de errores ya sea para la carrera de ingeniería eléctrica u otras disciplinas, enfocadas al conocimiento y obtención de datos precisos para un estudio determinado.

En el campo de la ingeniería y el estudio metrológico, se ha venido presentando información importante en el análisis de teoría de errores los cuales son fundamentales para el fácil manejo de datos y cálculos al momento de una medición, sin embargo hasta la fecha es una tarea ardua y complicada para las personas obtener información completa y detallada en un solo medio, para lo cual se desarrolló el siguiente libro en el que en un solo formato se abarcarán los conceptos y cálculos más relevantes e importantes en teoría de errores.

Desde la creación de las páginas web, en las últimas 2 décadas se ha dado un gran avance tecnológico en el que cualquiera persona puede tener un fácil acceso a la información en la web, para lo cual existe un universo de búsquedas en las cuales se cubre el aporte de millones de autores.

Teoría de errores: la base principal de la teoría de errores es la estadística y las probabilidades, por ello en este libro hablaremos primordialmente del cálculo, definiciones y conceptos importantes, los cuales deben estar claros y precisos justo antes de realizar una toma de datos, son necesarios ya que con esta base fundamental podemos hacer la vida más fácil además de lograr un fácil manejo de resultados, desde que nacemos hasta el presente estamos sometidos a un mundo cambiante, en el cual todo lo que asumimos es relativo hasta cierto punto de nuestra comprensión y los avances que lleve la ciencia para aportarnos y suplirnos de nuevas ideas y conceptos para así basarnos en algo que consideramos correcto, pero en realidad no exacto. La teoría de errores se desprende mediante un manejo de errores, en los cuales se busca mitigar el impacto que estos tienen sobre los datos y medidas que tomemos en nuestro entorno, esto quiere decir que no es saber porque la medida no es exacta, (porque quizás pasaríamos la vida entera queriendo saberlo y pueda que no logremos nada novedoso) sino la cercanía que ésta tendría y la posible mejor precisión que tengamos con respecto a un valor central o dato más probable.

INDICE GENERAL

2 Índice de figuras

3 Índice de tablas

4 Índice de ecuaciones

5 Planteamiento del problema

Actualmente existe una variedad de Contenidos informativos que se relacionan con la Teoría de errores, los cuales mencionan en términos generales como se deben aplicar, pero si nos enfocamos específicamente en los fundamentos básicos en teoría de errores para la gestión metrológica en ingeniería eléctrica, se ve la necesidad de obtener de manera detallada dichos Contenidos para ser aplicados en el ámbito profesional en ingeniería eléctrica.

6 Justificación

Nace de la necesidad de obtener la información detallada en lo que concuerda la teoría de errores en metrología eléctrica, ya que es algo que no existe hasta la fecha como un entorno, en el cual se tenga los fundamentos estadísticos completos, para el correcto análisis de las mediciones en ingeniería eléctrica y carreras afines.

Estos errores pueden detectarse teniendo en cuenta los factores involucrados y de lo que hablaremos que viene siendo el cálculo en teoría de errores.

7 Objetivos

7.1 Objetivo general

Establecer un sistema de conceptos y procedimientos de estadística y probabilidades, creando entornos cuánticos ajustados a la teoría de errores en el campo de la ingeniería eléctrica.

7.2 Objetivos específicos

- Estudiar los fundamentos de estadística y probabilidades asociados a la gestión metrológica en ingeniería eléctrica y carreras afines.
- Establecer un sistema de conceptos y procedimientos para la gestión metrología en ingeniería eléctrica y carreras afines.
- Diseñar e implementar entornos cuánticos con la formación en teoría de errores para gestión metrológica de ingeniería eléctrica y carreras afines.

7.3 Acotaciones

Se implementación de dos versiones de entornos cuánticos:

- Sitio de Google tecnologías asociadas.
- Plataforma Moodle.

Se entregará versiones de Microsoft Word y PDF.

7.4 Marco institucional

Se logra apreciar una amplia brecha en la que la información en teoría de errores se toca de forma muy superficial sin ampliar la gran importancia que tiene para el ingeniero el buen manejo y tratamiento de errores, es necesario comprender que básicamente en la gestión metrológica los fundamentos en teoría de errores serán de suma importancia y que realmente se ve la necesidad de estudiar este tema para así brindar un gran aporte para la institución.

7.5 Marco nacional

- Ley 379 1997, la cual expresa el buen manejo y uso de las estadísticas en el ámbito profesional y expresa claramente las obligaciones y estrategias a tener en cuenta en el omento del uso de esta rama tan importante de las matemáticas (Colombia, 2021).
- Ley 1581 2012, la cual es expedida por constitución para el buen manejo de datos e información (Colombia, 2021).
- NTC 3529-2 (ISO 5725-2): la cual aplica el estándar de diseño y buen manejo estadístico para la exactitud en mediciones y veracidad de los resultados (Icontec, 2021).

A nivel nacional se puede ver que los errores creados a partir de diseños de tipo ingenieril, han llevado a perdidas tanto económicas como humanas, en las que se han apreciado la falta de modelos de diseño (estadísticos y probabilísticos) además de los fundamentos en teoría de errores para mitigar el impacto que pueda crear los errores en la ingeniería, teniendo en cuenta que es algo que se frecuenta ver, se puede brindar un aporte en el que no solo estudiantes de ingeniería eléctrica puedan tomar como referencia para análisis de datos, sino que en general cualquier carrera que requiera dichos conocimientos pueda acceder.

7.6 Marco internacional

NSSDA, 1998: La cual establece el buen manejo de datos e información geodesia la cual requiere de una alta exactitud y precisión en las mediciones, ésta requiere de tratamiento estadístico, el cual hace parte del estándar en el que se lleva a cabo las siguientes resoluciones

ISO 19127: 2005

ISO / TS 19138: 2006

ISO 19156: 2011

FGDC-STD-007.1-1998

En el ámbito internacional podemos ver que las fuentes de información son demasiadas pero muy poco tocadas para el desarrollo ingenieril, son más frecuentadas en disciplinas como astronomía o geodesia, topografía entre otras, las cuales siempre van a requerir de análisis de tipo estadístico para modelar y crear datos precisos de múltiples mediciones, es evidente que se hace necesario consignar toda está gran variedad de fuentes y dar nuestro aporte ingenieril para el desarrollo de todas las carreras en general que requieran dicho tema (Anci WebStore, 2021), (CTN28, 2021).

8 Conceptos fundamentales y cálculos para propagación de errores

(Marco teórico)

8.1 Importancia de la teoría de errores

El error es parte de la naturaleza humana y una de las dimensiones esenciales del mundo y el universo en que vivimos. Si no somos capaces de reconocer y manejar adecuadamente los posibles errores de nuestras acciones físicas, no terminamos vivos ninguno de nuestros días.

No existe obra ingenieril o de cualquier profesión que pueda estar exenta de posibles errores, es algo que nos acompañará todo el tiempo. Por lo cual es necesario al menos tener una idea de cuáles son sus posibles tipos y formas de tratamiento para lo cual existen diferente variedad de métodos y procedimientos, los cuales nos ayudan a saber que tanto estamos fallando y así mismo que no sea un valor exageradamente fuera de lo normal (Tejero, 2018).

8.2 Errores groseros

Estos son cometidos debido a una distracción del personal encargado de las lecturas o toma de mediciones, se presentan justamente cuando hay un descuido en la observación y los datos no son los que se muestran estos podemos decir que se componen de la siguiente manera:

- Error de observación.
- Error de anotación de medidas.
- Error de cálculo.

Todos estos son los únicos errores que se puede eliminar de las mediciones ya que directamente haciendo la práctica con los procedimientos adecuados no van a existir si no se corrigen los resultados pueden ser muy diferentes a los esperados llegando a considerarse la presencia de otros errores (Casanova, 2019).

8.3 Error por truncamiento o discretización

Estos errores son el fruto de procesos finitos cuando en la realidad son datos infinitos, si usamos ecuaciones aproximadas o que no son las originales, esto producirá un error que quizás para el dimensionamiento que estemos manejando no sea el más grande pero que a una escala mayor serian demasiado grandes.

Un ejemplo muy común es basado en la fórmula de **Leibniz** para el cálculo del número pi **(π)**

Ecuación 1: *cálculo número (pi) Leibniz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$$

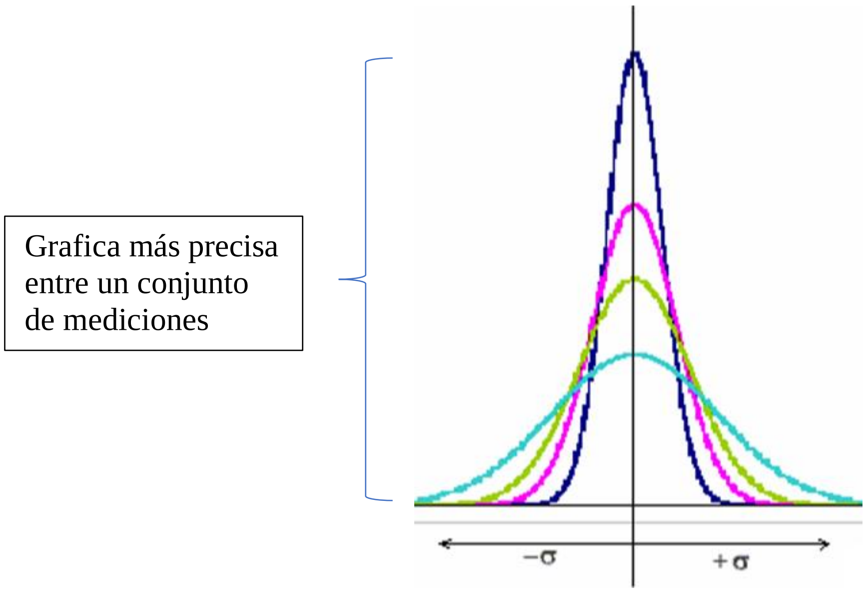
Por cada dato obtenido podemos apreciar un error de suma y resta, es este tratamiento de error al no tenerse en cuenta en los datos obtenidos al final obtendremos un dato aproximado.

Por esta razón como bien vimos en la realidad siempre estaremos expuestos al error, lo cual no indica que todo este mal, pero si es importante tener un límite dentro del cual colinde el valor real (Fernández, 2017).

8.4 Distribución normal

Esta se denomina así debido a los valores del error graficados según el orden en que se presenten y a su vez la ocurrencia con la cual se presenten, la forma es acampanada también denominada campana de gauss en la cual el pico máximo será el error más frecuente y dentro de cual estará el valor más probable que también podrá denominarse el valor verdadero. En la observación de la campana de gauss podemos saber que tan precisos están los valores, podemos asumir que si la campana es alta y estrecha obtenemos una gran precisión en las medidas, pero en cambio si la campana es ancha y baja, tendremos una mala precisión (Santana, 2005).

Figura 1: *distribución normal a diferente precisión*



Nota: distribución normal Tomado de: (Santana, 2005)

Un ejemplo claro de lo anterior es la gráfica que vemos a continuación, en la cual se presenta los datos obtenidos con diferentes multímetros de diferente precisión, en los cuales se diferencia los datos y por ende cada curva mostrará la efectividad en cada medida. (Santana, 2005).

8.5 Precisión y exactitud

Figura 2: *contexto de precisión y exactitud*

Nota: distribución de disparos y comparativa de exactitud y precisión. Tomado de, *(Santana, 2005)*

Estabilidad de las mediciones

El concepto de estabilidad en las mediciones, asumiendo que de los datos obtenidos tenemos un error sistemático el cual es constante a lo largo de todas las mediciones, si al cambiar los datos de las variables por valores pequeños deben percibirse cambios pequeños en el error, es ahí donde se asume que el sistema es estable, de lo contrario puede ser inestable cuando se altera el error o condicionalmente estable (Fernández, 2017).

Ecuación 2: *error de Escala*

$$\Delta \boldsymbol{E} = \pm \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{P}$$

De la ecuación 2 nos basamos para poder tener certeza de que las medidas tomadas concuerdan con el límite máximo de escala.

8.6 Desviación estándar o desviación típica (σ)

Para hallar σ lo primero que hacemos es calcular el valor promedio del conjunto y luego sumar los cuadrados de cada desviación que presentan los datos, para así poder dividir la suma total de cuadrados entre el número de observaciones (Rivera, 2017).

Ecuación 3: *cálculo desviación típica*

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}{\boldsymbol{n}}}$$

$\overline{\boldsymbol{x}}$**:** valor promedio de $\boldsymbol{x_i}$

$\boldsymbol{n}$**:** número de observaciones

Promedio o desviación estándar de una distribución uniforme o rectangular es:

$$\boldsymbol{\sigma_r} = \boldsymbol{x_0} \pm \frac{\mathbf{0.3}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \boldsymbol{p}$$

$\boldsymbol{x_0}$**:** valor medio de la muestra.

$\boldsymbol{n}$: tamaño de la muestra.

Por ende, el error asociado a tal distribución es:

$$\boldsymbol{\sigma_r} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}} = \pm\mathbf{0.3}$$

Ecuación 4: *desviación estándar de una distribución rectangular*

$$\boldsymbol{\sigma_r} = \pm\mathbf{0.3}\boldsymbol{p}$$

$\boldsymbol{\sigma_r}$**:** desviación estándar rectangular.

$\boldsymbol{p}$: es la precisión del instrumento que está usando.

Estos valores son dados, teniendo en cuenta una varianza dentro del rango de [0,1] para lo cual omitimos la demostración de dicha ecuación (Rivera, 2017).

8.7 Errores accidentales asociados al promedio

Según (Baird, 1991) se asume que se han recolectado algunas mediciones y que se ha realizado el cálculo del promedio de una muestra, después de esto podemos obtener la desviación promedio, del promedio de la siguiente manera:

Ecuación 5: *desviación promedio*

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} |xi - \bar{\boldsymbol{x}}|}{n}$$

Obteniendo este valor de desviación promedio de promedio, podemos calcular la confiabilidad que viene siendo la desviación promedio de la media (Rivera, 2017)**.**

Ecuación 6: *desviación promedio de la media*

$$\boldsymbol{dm} = \frac{\boldsymbol{d}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

La desviación estándar es la incertidumbre asociada a cada uno de ellos (Rivera, 2017)**.**

Ecuación 7: *desviación estándar neta del promedio*

$$\boldsymbol{\sigma}_{\frac{2}{m}} = \frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

Ecuación 8: *incertidumbre del promedio*

$$\boldsymbol{x} \coloneqq \overline{\boldsymbol{x}} \pm \boldsymbol{\sigma}_{\frac{2}{m}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}} \pm \frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

8.8 Propagación de errores o incertidumbres

8.8.1 *Errores absoluto relativo y porcentual*

El error relativo es igual a el cociente de la incertidumbre absoluta $\Delta\mathbf{x}$ entre el valor medido (Corchete, 2019).

Ecuación 9: *incertidumbre real o error absoluto*

$$\Delta_X = \boldsymbol{Xr} - \boldsymbol{Xm}$$

Ecuación 10: *error relativo*

$$\mathcal{E} = \frac{\textbf{Incertidumbre absoluta}}{\textbf{Valor medido}} = \frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}}$$

Ecuación 11: *error relativo porcentual*

$$\mathcal{E}_{\%} = \left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{|\ \boldsymbol{x}\ |}\right) * \mathbf{100}$$

$\boldsymbol{X}$: dato numérico obtenido mediante una medición.

$\boldsymbol{x}$: valor numérico obtenido mediante un cálculo.

$\Delta\boldsymbol{x}$**:** error absoluto o incertidumbre absoluta.

$\mathcal{E}$**:** error relativo o incertidumbre relativa.

$\varepsilon_{\%}$: incertidumbre porcentual (Rivera, 2017).

8.8.2 Cálculo diferencial del error

La intención es encontrar cómo se propaga el error al realizar cálculos u operaciones con ambas medidas, recordemos que, del cálculo diferencial de una variable (Rivera, 2017), para la derivada de una función:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = \frac{dz}{dx}$$

En algunos casos **h** es denotado por Δx, para relacionarlo con el error es un incremento arbitrario que experimenta la variable independiente, y que la diferencial de la función está dada por:

$$dz = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

X en el dominio de $f'(x)$ (Rivera, 2017)**.**

8.8.3 *Fórmulas simples para propagación de errores*

No todas las expresiones para el cálculo de errores son exactas, algunas son aproximaciones, esto pasa porque durante la demostración se simplificación términos pequeños (Asimov, 2020).

8.8.3.1 Error aproximado en la adición:

Ecuación 12: *expresión resultados de la suma*

$$\mathbf{S \pm \partial S = (x \pm \partial x) + (y \pm \partial y)}$$

$$\partial s = \partial x + \partial y$$

$$\mathbf{S \pm \partial S = (x - Y) + (\partial X + \partial y)}$$

$$\frac{\partial s}{s} = \frac{\partial x + \partial y}{x + y}$$

8.8.3.2 Error aproximado en la resta:

Ecuación 13: *expresión resultados de la resta*

$$\mathbf{R \pm \partial R = (x \pm \partial x) - (y \pm \partial y)}$$

$$\mathbf{R \pm \partial R = (x\text{-}Y) - (\partial X + \partial y)}$$

$$\boldsymbol{\partial s = \partial x + \partial y}$$

8.8.3.3 Error aproximado en el producto

Primero, desarrollemos como un producto de binomios, así:

$$\mathbf{P \pm \partial P = (x \pm \partial x)\,(y \pm \partial y) = \boldsymbol{xy \pm x\partial y \pm y\partial x + \partial x\partial y}}$$

$$\mathbf{P \pm \partial P = \boldsymbol{xy \pm (\,x\partial y + y\partial x) + \partial x\partial y}}$$

$$\mathbf{P \pm \partial P = \boldsymbol{xy \pm (x\partial y + y\partial x)}}$$

Donde se despreció el producto de los errores por ser pequeño respecto a los demás productos. La expresión anterior queda de la siguiente forma:

Ecuación 14: *expresión resultados de error en el producto*

$$\mathbf{P \pm \partial P = \boldsymbol{xy \pm (x\partial y + y\partial x)}}$$

$$\mathbf{\partial P = \boldsymbol{x\partial y + y\partial x}}$$

8.8.3.4 Error aproximado en la división

Teniendo en cuenta que la división nos da un valor y no es indeterminado aplicamos el siguiente análisis en caso de obtener una división de valores de la misma medida (Tejero, 2018).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2}$$

$$u = f(x); \quad v = g(x) =\neq 0$$

Omitiendo el procedimiento demostrativo, (Rivera, 2017, pág. 50) obtenemos la ecuación general para el cálculo de error en la división.

Ecuación 15: *error en la división*

$$D \pm \delta D = \frac{x \pm \delta x}{y \pm \delta y} = \frac{x}{y} \pm \left(\frac{\delta x}{y} + \frac{x * \delta y}{y^2}\right)$$

$$\delta D = \frac{\delta x}{y} + \frac{x * \delta y}{y^2} \ siempre\ que\ y \neq 0$$

8.8.3.5 Error aproximado de una función compuesta del tipo $z = x^n y^m$ de tipo 1

Dentro de un laboratorio de física, nos encontramos que se obtienen ecuaciones que implican el producto de variables elevadas a una potencia dada, Tenemos que **n** y **m** son números enteros o fracciones positivas o negativas. Antes de poder calcular un valor de la incertidumbre de dicha función, buscamos la simplificación de la ecuación según (Rivera, 2017, pág. 51), reformulamos la expresión $z = x^n y^m$ lo cual obtenemos:

$$\ln(z) = n * \ln(x) + m * \ln(y)$$

Posteriormente el diferencial es el siguiente, que sabemos que es la incertidumbre relativa.

$$\frac{\delta z}{z} = n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y}$$

Ecuación 16: *error función de tipo 1*

$$Z \pm \delta z = \mathbf{Xn} * \mathbf{Ym}\left[1 \pm (n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y})\right]$$

8.8.3.6 Error aproximado de una función, $z = \frac{x^p + y^q}{x^n y^m}$ = constante tipo 2

Tenemos que según (Rivera, 2017, pág. 52) “x” y “y” son cantidades distintas medidas de cero independientes entre sí y: n, m, p y q sean números reales no nulos. Usamos diferenciales, podemos encontrar sencillamente el error relativo de la expresión:

$$\boldsymbol{z = k\ \frac{x^p + y^q}{x^n y^m}}$$

Posteriormente su inverso multiplicativo. Por ejemplo, para el caso particular en **que *p* = *q* = *1***, la ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{z = k\ \frac{x + y}{x^n y^m}}$$

Donde *z* = *k*, lo cual es una constante que depende de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, con **$x \neq 0$ y $y \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq 0$** y **$n \neq m$**. continuando con la incertidumbre relativa de esta última expresión puede obtenerse así, Tenemos: (Rivera, 2017)

Ecuación 17. *incertidumbre relativa para ecu. De tipo 2*

$$\boldsymbol{k = \frac{x + y}{x^n y^m}}$$

8.8.3.7 Error aproximado de una función experimental del tipo $\boldsymbol{y = mx + b}$ tipo 3

Resulta que:

Ecuación 18: *ecuación de recta*

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Donde tenemos que: ***b*** = ordenada al origen, resulta ser una constante que se determina de una gráfica, por medio de ***x*** y ***y*,** recordando que: ***b = y - mx***, donde ***m*** = pendiente de la recta, Resulta que:

$$\delta b = \delta y + (x\ \delta m + m\ \delta x)$$

Posteriormente llevando secuencia nos queda la función de la siguiente manera:

Ecuación 19: *función de tipo 3*

$$b \pm \delta b = (y - mx) \pm (\delta y + [(x\ \delta m + m\ \delta x])$$

Nota: tomado de (Universitaria, 2016)

8.8.3.8 Error aproximado de una función experimental polinómica $y = Ax^m$ tipo 4

Tenemos y consideramos que A y m son constantes que de los cuales se obtienen generalmente de gráficas en papel **log-log,** y **m ≠ 1.**

Así tenemos que*:*

$$\delta m\ \frac{1}{In\ X}\left(\frac{\delta Y}{Y} + \frac{\delta A}{A} + m\frac{\delta x}{x}\right)\ y\ \ \delta A{=}A\ \left(\frac{\delta Y}{Y} + m + \frac{x}{x} + \delta m\ In\ x\right)$$

Considerando que debemos conocer **δm**, o ***δA***, debido a que estas ecuaciones dependen entre si una de la otra. Si se conocen una u otra, quedarían definidas ambiguamente, por lo que la función con su respectiva incertidumbre se establece como:

Ecuación 20*: incertidumbre función tipo 4*

$$y \pm \delta y = (A \pm \delta A)\ x^{m \pm dm}$$

Nota: tomado de *(Tejero, 2018)*

8.8.3.9 Error aproximado de una función tipo, ($z = sen\ x$) tipo 5

Con **x** en radianes procedemos a descomponer la ecuación tenemos que:

$$\delta z = \cos x\ sen\ \delta x$$

Dado que conocemos que las funciones: $\boldsymbol{sen\ x}$ y $\boldsymbol{cos\ x}$ se aproximan a sus valores límite si $\boldsymbol{x \rightarrow 0}$ (siendo estos valores: **cos** $\boldsymbol{x \rightarrow 1}$ **y** $\boldsymbol{sen\ x \rightarrow x}$**),** en consecuencia, y por lo anteriormente explicado, resulta que:

Ecuación 21: *incertidumbre ecuación tipo 5*

$$\mathbf{y} \pm \boldsymbol{\delta z} = \boldsymbol{sen\ x} \pm \boldsymbol{cos\ x\ sen\ \delta x}.$$

Nota: tomado de *(Rivera, 2017)*

8.8.3.10 Error aproximado de una función logarítmica ($z = ln\ x$) tipo 6

Sabiendo, y dado que: $\boldsymbol{z = ln\ x}$, tenemos:

$$\boldsymbol{\delta z} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dX}}(\boldsymbol{ln\ x}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{X}}\ \boldsymbol{\delta x}$$

Seguidamente tenemos la expresión de resultados:

Ecuación 22: *expresión resultados ecu tipo 6*

$$\boldsymbol{z \pm \delta z = (ln\ x) \pm \frac{\delta x}{x}}$$

Concluimos que para la función logaritmo natural, el error viene dado por:

Ecuación 23: *expresión error función tipo 6*

$$\boldsymbol{\delta Z = \frac{\delta x}{x}}$$

Nota: tomado de *(Rivera, 2017)*

8.8.3.11 Error de una función exponencial del tipo: ($z = e^x$) tipo 7

Resolvemos de manera simplificada, si $\boldsymbol{z = e^x}$ tenemos que:

Ecuación 24: *cálculo de error función de tipo 7*

$$\boldsymbol{\delta z = \frac{\delta x}{x}(e^x)\ \delta x = e^x \delta x}$$

Simplificando obtenemos la expresión de resultados para la función de tipo 7:

$$z \pm \delta z = e^x \pm e^x\, \delta x$$

Nota: tomado de *(Rivera, 2017)*

8.9 Análisis de error y tratamiento de datos obtenidos en el laboratorio

8.9.1 Única medida de magnitud

Se entiende que la sensibilidad del aparato de medida coincide con el valor del error absoluto (Corchete, 2019).

$$X \pm \Delta X \quad (\Delta X = S\text{ensibilidad})$$

8.9.2 Varias medidas de la misma magnitud

Es conveniente repetir varias veces la determinación del valor de la magnitud problema, ya que los resultados pueden presentarse muy dispersos (Corchete, 2019).

Para decidir el número de determinaciones se realizan siempre tres medidas de la magnitud (Corchete, 2019).

Se calcula el valor medio de estas tres medidas dado por:

$$x_3 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i x_i$$

Se halla la diferencia entre los valores extremos de las medidas, finalmente se obtiene la dispersión, T, que viene dado por:

Ecuación 25: *dispersión de datos*

$$T = \frac{D}{x_3} \times 100$$

Si la dispersión no es mayor que la sensibilidad del aparato de medida **D ≤ S**, entonces se toma como estimación el valor medio de las tres medidas $x3$ y como error absoluto la sensibilidad, pero si el valor de dispersión es mayor que la sensibilidad **D > S** aumentamos el número de medida de la magnitud (Corchete, 2019).

Tabla 1: *intervalo de confianza para medidas tomadas en el laboratorio*

Intervalo (%)	CRITERIO
$T \leq 2\%$	Bastan las tres medidas realizadas
$2\ \% < T \leq 8\ \%$	Para precisar los datos se deberán tomar al menos 3 medidas más.
$8\ \% < T \leq 15\ \%$	Hay que hacer un total de 15 medidas
$15\ \% \geq T$	Se requiere como mínimo 50 medidas

Nota: tomado de (Corchete, 2019)

Se toma como valor verdadero de la magnitud el valor medio de la misma sobre el número total de medidas realizadas:

- Si se han realizado tres medidas, se toma como error absoluto el valor de la sensibilidad del aparato.
- Si se han realizado seis medidas, se calcula el error de dispersión definido como **D6/4** y se asigna como error absoluto de las medidas.
- Si se realizan quince o más, el error absoluto se puede calcular por la expresión:

Ecuación 26: formula exacto error absoluto de 15 o más datos

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_N)^2}{N(N-1)}}$$

Donde:

Xn: valor normalizado

Xi: valor tomado

N: número de datos tomados

Nota: tomado de *(Corchete, 2019)*

8.9.3 Determinación del error de una magnitud medida indirectamente

Esta medida indirecta de magnitud se alcanza por la aplicación de una formula a un conjunto de medidas directas, que las relacionan con la magnitud problema. Debemos tener en cuenta ciertos valores al realizar los cálculos debido a que se presentan algunos errores, en lo posible evitar que afecten a la magnitud del error absoluto de la magnitud que queremos determinar (Corchete, 2019).

Para realizar el cálculo de error absoluto de F se procede obteniendo diferencia total (**F)** (Rivera, 2017)**.**

Ecuación 27: *cálculo de error absoluto mediante la derivada*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial X} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial Z} dz$$

Ahora asimilamos las diferentes diferenciales a los errores absolutos.

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial X}\right| \Delta X + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial F}{\partial Z}\right| \Delta Z + \cdots$$

Se presenta una notable simplificación.

$$F = x^a y^b z^c$$

En este caso podemos proceder del siguiente modo, tomando logaritmos Neperianos:

$$\text{In } F = a. \text{ In } x + b. \text{ In } y + c. \text{ In } z$$

Y obtenemos la diferencial:

$$d (\text{In } F) = a.d (\text{In } x) + b.\ d (\text{In } y) + c.\ d (\text{In } z)$$

Teniendo en cuenta la diferencial logarítmica

d (In u) = (du) / u

Tenemos que:

$$\frac{dF}{F} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + c\frac{dz}{z} + \cdots$$

Asimilando los diferenciales totales a los errores absolutos obtenemos:

$$\frac{\Delta F}{F} = a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y} + c\frac{\Delta z}{z} + \cdots$$

8.9.4 Ejemplo numérico del cálculo de errores.

Calculando el error de la magnitud F mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{F} = \frac{(X+y)z}{(u-b)w}$$

Medida de magnitud de variables con valores absolutos determinados de modo que:

X = 27.33 $\pm \mathbf{0.13}$

Y = 2.45 $\pm \mathbf{0.05}$

Z = 10.0 $\pm \mathbf{0.1}$

U = 50.2$\pm \mathbf{0.1}$

V = 1.033 $\pm \mathbf{0.012}$

W = 3.26 $\pm \mathbf{0.02}$

Nota: tomado de (*Universitaria, 2016*)**.**

Obtendremos el valor de la magnitud F y el error correspondiente a la misma, primeramente, tenemos

F = 1.8579

En segundo lugar, se obtiene el error mediante

$$\Delta F \left|\frac{\partial F}{\partial X}\right| \Delta X + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| \Delta u + \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right| \Delta v + \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right| \Delta w$$

Realizando cálculos obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{Z}{(u-v)w} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{z}{(u-v)w} \qquad \frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{(X+y)}{(u-b)w}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{-(x+y)z}{(u-v)^2 w} \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{(x+y)z}{(u-v)^2 w} \qquad \frac{\partial F}{\partial W} = \frac{-(X+y)z}{(u-v)w^2}$$

Nota: cálculos tomados de *(Rivera, 2017)***.**

Tras aplicar valores absolutos y realizar las operaciones numéricas obtenemos

$$\Delta F = 0.04458$$

El número máximo de cifras significativas del error absoluto

$$\Delta F = 0.04$$

La cifra significativa en el valor F es la segunda cifra decimal, finalmente expresamos

F= 1.86 $\pm$ **0.04**

Nota: tomado de *(Corchete, 2019)*

8.10 Graficación

En la graficación se trata el modelamiento de funciones o datos los cuales permiten hacer una comparativa más detallada en la que asociamos los datos obtenidos junto con los que podríamos obtener de manera real, gracias a la graficación podemos llevar a cabo una serie de correcciones en caso de obtener una figura un poco fuera de la realidad, también poder determinar en qué parte de la toma de datos se obtuvo algún valor fuera de lo normal y posibles errores, como los mencionados anteriormente. (Rivera, 2017)

"Dentro del campo de la graficación existe 3 tipos de métodos los cuales permiten la obtención de gráficas, estos difieren según el análisis que necesitemos". (Rivera, 2017)

8.10.1 Método gráfico

Este método es el más practico cuando queremos ilustrar de forma detallada los valores obtenidos en una medición, en caso que queramos mostrar, rectas, curvas, hipérbolas, parábolas etc. Sería el más conveniente. Pero debemos tener muy en cuenta que para el caso en que tengas una variable dependiente en función de otras variables independientes entre sí, no va a ser lo que esperamos, ya que en estos casos la gráfica estará proyectada en un plano tridimensional, por esta razón este método es aproximado (Rivera, 2017).

8.10.2 Método analítico

Este método es el más adecuado por no decir exacto, en el cual mediante computadoras y programas para manejo algebraico se lleva a la realización de modelamientos físicos de algún tipo de sistema (Rivera, 2017).

8.10.3 Método estadístico

Es la relación de los métodos anteriores, se lleva a cabo cuando no se logra tener una relación correcta de las variables con la teoría, al final es necesario el manejo de muchos datos, por esto, fijo requerirá de una computadora, además de quedar a disposición de la teoría ya que sería lo más adecuando cuando el experimento no conlleva a la realidad (Rivera, 2017).

El primer paso para todo grafico es identificar los diferentes escenarios que podemos obtener según los cálculos y ecuaciones basadas en los datos que estamos calculando y midiendo. Entre estos podemos encontrar, **relaciones lineales**, las cuales por lo general empiezan basándose en una ecuación punto pendiente de la forma **(y=mx+b)** y que en la mayoría de veces, aunque se busque linealizar lo ideal será ajustarla según los datos obtenidos. Las **Relaciones polinomiales,** en las cuales la premisa recae en la obtención de la ecuación que modela las curvas aplicando de antemano en algunas ocasiones el uso de regresión cuadrática y otros métodos matemáticos que conlleven a la ecuación general. Entre otras expresiones de funciones, existen las **exponenciales** y de tipo **logarítmicas**, también **periódicas** en las cuales se destacan las funciones **seno, coseno** y **tangente** (Rivera, 2017).

La mejor manera de ilustrar los datos obtenidos es mediante la tabulación en donde podemos aplicar el uso de Microsoft Excel entre otros programas los cuales contienen la mayoría de ayudas necesarias para el análisis de los datos (Tejero, 2018).

8.10.4 Ejemplo forma de tabulación:

Basándonos en la corriente el voltaje medido a través de un resistor, se obtienen los siguientes datos:

Tabla 2: expresión de resultados medidos

(I ± δI) A	**(V ± δV) V**
0.16 ± 0,003	1.00 ± 0,01
0.33 ± 0.005	2.10 ± 0.017
0.51 ± 0.008	3.01 ± 0.025
0.70 ± 0.011	4.20 ± 0.034
0.87 ± 0.013	5.10 ± 0.05
1.05 ± 0.016	6.01 ± 0.048
1.23 ± 0.019	7.00 ± 0.06
1.40 ± 0.022	8.02 ± 0.064

Nota: tomado de *(Rivera, 2017)*

Estos errores de escala mostrados, representan la variación en cada dato tomado, además de esto el fabricante provee este dato en sus equipos, en donde los podemos relacionar dependiendo del rango de medición tomado (Tejero, 2018).

8.10.5 Construcción de graficas

Los gráficos que estudiemos deben ajustarse a las siguientes normas:

1) Graficas en papel milimetrado con ejes bien trazados, en cuyo centro indicar la magnitud representada. sima
2) La variable independiente debe ir en abscisas y la dependiente en ordenadas.
3) Las escalas han de permitir una lectura rápida y sencilla.
4) Las escalas deben abarcar todo el intervalo de medidas
5) Sobre los ejes solo indicar los valores correspondientes a las divisiones de escala.
6) Los valores medidos se representan sobre el papel milimetrado por el punto correspondiente a sus dos coordenadas. En el caso de que x o Y sean despreciables en comparación con la escala utilizada, el rectángulo de error queda reducido a un simple segmento vertical u horizontal, según sea el caso.
7) Las gráficas han de ser líneas finas "continuas" nunca quebradas, que han de pasar por todos los rectángulos de error.

   (Rivera, 2017)

8.11 Errores asociados a las rectas adaptadas por el método de los mínimos cuadrados (MMC)

Con mucha reiteración, al graficar una cantidad de datos experimentales obtenemos una curva que bajo determinados y establecidos procedimientos simplificados pretendemos que nos lleve a una recta (expresada en su forma normal: $y = mx + b$). Conocida como *Método de los Mínimos Cuadrados (MMC)*) permiten obtener los parámetros relevantes del experimento, para calcular la pendiente de la recta (Corchete, 2019).

Para realizar el cálculo de la pendiente de la recta tenemos:

Ecuación 28: *pendiente de recta MMC*

$$\boldsymbol{m = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}}$$

Su respectiva ordenada se calcula con base en la siguiente ecuación:

Ecuación 29: *ordenada al origen MMC*

$$\boldsymbol{b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}}$$

La incertidumbre serían las siguientes pendientes:

Ecuación 30: *incertidumbre de la pendiente*

$$\boldsymbol{\delta m = Sy\ \left|\left(\frac{n}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\right)^{1/2}\right|}$$

La ordenada del origen está dada por:

Ecuación 31: *error de la ordenada al origen*

$$\boldsymbol{\delta b = Sy\ \left|\left(\frac{\sum x^2}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\right)^{1/2}\right|}$$

$$\boldsymbol{\delta b = \left[\left(\frac{1}{N} + \frac{\widetilde{x}^2}{\sum_{i=l}^{N}(X_i - \overline{x})2}\right)\left(\frac{\sum_{i=l}^{N}(yi - ax_i - b)2}{(N-2)}\right)\right]\frac{1}{2}}$$

Cuando la representación gráfica del fenómeno estudiado proporciona una distribución de los puntos experimentales en forma lineal, conviene determinar la ecuación de la recta que será expresión de la ley física que rige el fenómeno estudiado utilizando el método de mínimos cuadrados (Corchete, 2019). Además, es interesante obtener el coeficiente de correlación lineal “r”, que nos da una medida del grado de correlación entre los valores de las variables x e y (Draper, 1998).

La expresión de “r” es:

Ecuación 32: *coeficiente de correlación lineal*

$$r = \frac{N\sum_{i=l}^{N} X_i y_i - \sum_{i=l}^{N} X_i \sum_{i=l}^{N} y_i}{\left[\left(N\sum_{i=l}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=l}^{N} xi\right)2\right)\left(N\sum_{i=l}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=l}^{N} yi\right)2\right)\right]1/2}$$

Y varía entre 0 y $\pm$ 1

8.11.1 Método de interpolación de tablas

8.11.1.1 Interpolación en tablas de simple entrada

Las tablas de simple entrada nos proporcionan el valor de una variable dada *x* en función de otra z y viceversa (Corchete, 2019).

Tabla 3: *tabla simple entrada*

x_1	z_1
x_2	z_2

La relación que hay entre x y z puede escribirse según la formula lineal:

$$Z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

El error de z resulta ser:

Ecuación 33: *error variable Z interpolación tabla simple*

$$\Delta z = \left|\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\right| \Delta x$$

8.11.1.2 **Interpolación en tablas de doble entrada**

En estas tablas se proporciona el valor correspondiente a una tercera variable z relacionada con las dos anteriores (Honduras, 2016).

Tabla 4: *relación tabla doble entrada*

	y_1	y_2
x_1	z_{11}	z_{12}
x_2	z_{21}	z_{22}

Nota: tomado de *(Corchete, 2019)*

La relación aproximada que permite el cálculo de z es:

$$Z = z_{11} + \frac{z_{21}-z_{11}}{x_2-x_1}(x - x_1) + \frac{z_{12}-z_{11}}{y_2-y_1}(y - y_1)$$

El error de z resulta obtenible análogamente de la expresión:

Ecuación 34: *error variable Z interpolación de tabla doble entrada*

$$\Delta z = \left|\frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}\right| \Delta x + \left|\frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1}\right| \Delta y$$

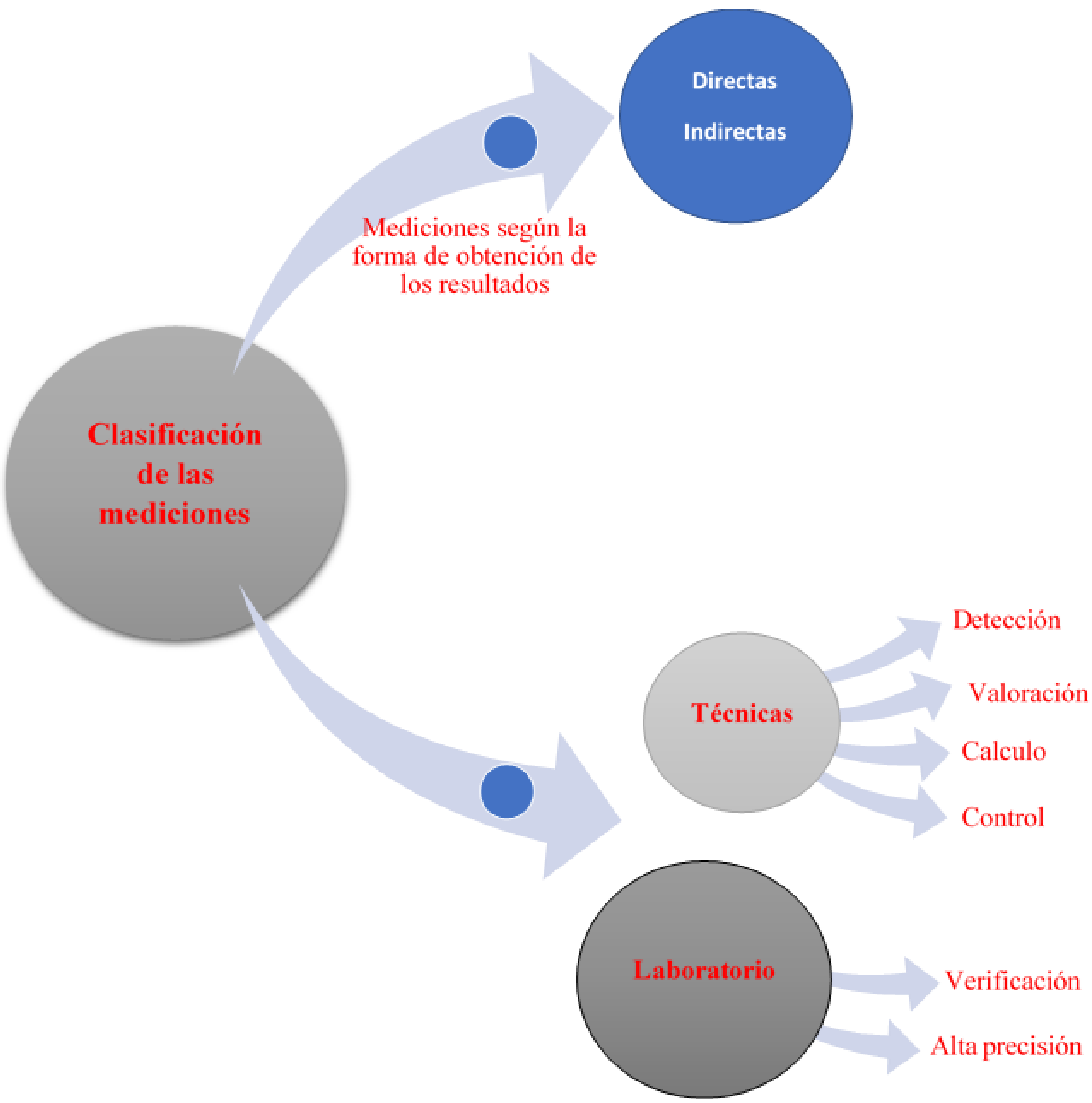
Nota: tomada de *(Rivera, 2017)*

9 Fundamentos de la Teoría de Errores

(Marco metodológico)

9.1 Clasificación de las mediciones.

Figura 3: *clasificación de las mediciones*



9.2 Conceptos básicos en teoría de errores para ingeniería eléctrica y carreras afines.

9.2.1 Error

Expresa el nivel de imperfección de una medición de forma cuantitativa y cualitativa (Española, 2021).

9.2.2 Equivocación

Está dado por una mala interpretación de resultados, como tal no es sinónimo de error (Española, 2021).

9.2.3 Dimensiones del error:

Se genera a través de la clasificación de errores obteniendo un rango para el cual está designada dicho valor (Acosta, 2011).

9.2.4 Magnitud física

Es la(s) propiedad(es) que pueda tener cualquier objeto físico, que permite que sea medible, esto lo basamos en un patrón que sea representado continuamente y así cuando se quiera medir se tendrá una referencia (Rivera, 2017).

9.2.5 Tamaño de la magnitud física

Es el aspecto cuantitativo de una magnitud física la cual define su dimensión (Acosta, 2011).

9.2.6 Valor de la magnitud física

Es la expresión del tamaño en unidades, de un sistema numérico (Acosta, 2011).

9.2.7 Valor verdadero de una magnitud física

Se define como una verdad absoluta que no requiere de datos, sino que es el valor de tendencia al cual se espera llegar ante esta situación, los seres humanos nunca podrán conocer el valor verdadero de una magnitud física. El error puede ser pequeño, pero siempre estará presente (Acosta, 2011).

9.2.8 Valor real de una magnitud física

Es el dato encontrado atreves de la medición, el cual se sitúa cerca del valor verdadero, de forma precisa y en algunos casos puede considerarse exacta o igual (Acosta, 2011).

9.2.9 Estadística y teoría de errores

La estadística es muy importante en el tratamiento de errores, ésta permite organizar y distribuir perfectamente los datos obtenidos de una medición, pero con frecuencia se ha hecho un uso abusivo de esta ciencia llegando a ser bastante juzgado por la ciencia (Acosta, 2011).

"Si tu experimento necesita de estadística, deberías haberlo hecho mejor".

(Rutherford, 2018)

"Las estadísticas deberían ser para el investigador más un método de pensar, que un mero procedimiento de cálculo". (Bartolomé Jódar)

La aplicación y uso de la teoría de errores, se debe a que os investigadores creen que mediante la matemática se comprueba de forma experimental, se vuelve un dato redundante cuando los experimentadores dicen que es precisada mediante la matemática (Acosta, 2011).

Si se utilizan más tratamientos estadísticos y matemáticos de los necesarios, se pierde mucho tiempo innecesariamente, con lo cual disminuye la calidad de las mediciones y aumentará significativamente la probabilidad de error, con esto no estamos diciendo que si se hace de la forma correcta no se presentaría una variación de la medida, pero si tendríamos algo más acorde a la realidad. **El estudio de la teoría de errores en los distintos tipos de mediciones puede ser una ayuda importante para no perder tiempo innecesariamente** (Acosta, 2011)**.**

El estricto uso que se hace de la teoría de errores, se debe a que las matemáticas creen que es una verdad comprobada por los investigadores en las experiencias, mientras que los experimentadores creen en ella, porque precisan que ha sido demostrada por los matemáticos. Si se utilizan más tratamientos estadísticos y matemáticos de los necesarios, se pierde mucho tiempo innecesariamente, con lo cual disminuye la calidad de las mediciones y aumentará significativamente la probabilidad de error, con esto no estamos diciendo que si se hace de la forma correcta no se presentaría una variación de la medida, pero si tendríamos algo más acorde a la realidad. El estudio de la teoría de errores en los distintos tipos de mediciones puede ser una ayuda importante para no perder tiempo innecesariamente (Acosta, 2011).

9.3 Clasificación general de la teoría de errores

Figura 4: *clasificación de errores*

- **Clasificación general de la teoría de errores**
  - Errores según la causa o motivo
    - Errores instrumentales
      - Error de escala
      - Error de calibración
    - Error de método
  - Errores por las condiciones del medio
    - Error fundamental
    - Error adicional
      - De apreciación
      - De posición
      - De cálculo o subjetivo
      - Otros
  - Errores por dependencia en la magnitud de medida
    - Error aditivo
    - Error multiplicativo
  - Errores basados en la forma matemática de su expresión
    - Error absoluto
    - Error relativo
      - Error relativo del error aditivo
      - Error relativo del error multiplicativo
      - Error relativo reducido
  - Errores por dependencia de su naturaleza
    - Error sistemático
    - Error causal
    - Error parasito o equivocación
  - Errores según la variación del tiempo
    - Error estático
    - Error dinámico
  - Errores de certificación

Nota: tomado de (Acosta, 2011)

9.3.1 Errores según la causa o motivo

9.3.1.1 Error Instrumental:

Aparece por el defectos o fallas en el equipo empleado para la medición, dentro de este tipo de error encontramos que los problemas más comunes son:

Límite de la escala: es más frecuente en equipos de medida Analógicos y su valor se calcula tomando la mitad del límite mínimo de resolución o precisión del dispositivo (**Ecuación 2**)

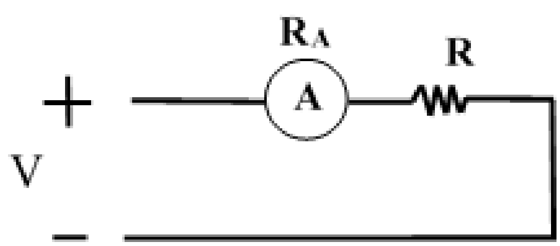
Errores de calibración: para evitarlos conviene hacer una revisión continua del instrumento de medición, algunas características a tener en cuenta son las siguientes:

- Revisar que sus perillas o botones operen correctamente según manual de uso.
- Cuantificar previamente el error de los instrumentos y compararlos con los calculados experimentalmente desde el primer uso y siempre que se utilicen.

9.3.1.2 Error de Método

Este se da, al aplicar formulas aproximadas en vez de las reales, puede constatar el cambio de la forma de la toma de datos y las ecuaciones.

Figura 5: *circuito serie con amperímetro*



Nota: (Elaboración propia).

En la **(Figura 1),** se puede apreciar teóricamente que la corriente para el circuito será:

Ecuación 35: *ley de Ohm*

$$I = \frac{V}{R}$$

Donde:

V; voltaje de la fuente.

R; resistencia del circuito.

(Acosta, 2011)

Al usar un dispositivo de medida para la corriente del circuito (Amperímetro) y teniendo en cuenta la teoría de errores, la ecuación para la ley de Ohm, nos queda así:

Ecuación 36: *cálculo de corriente con amperímetro*

$$I = \frac{V}{R + R_A}$$

En donde lo único que se tiene en cuenta es la resistencia interna del amperímetro, la cual si no se tiene en cuenta presentará un valor de corriente menos preciso o lo que podríamos considerar según la teoría como un error de método, en el cual estaríamos despreciando la influencia del dispositivo (Acosta, 2011).

9.3.2 Errores por las condiciones del medio

9.3.2.1 Error fundamental

Este error está presente cuando se emplea en condiciones normales, dado que es muy probables que se pueda presentar, también es conveniente asegurarse de que el sistema está en condiciones normales según la teoría (Acosta, 2011).

9.3.2.2 Error adicional

Comprende factores en los que involucra el medio de medición además de otras complicaciones que aumentan la incertidumbre en los resultados:

9.3.2.2.1 Error de observación

Este tipo de error se presenta debido a la fatiga o quizás cansancio del experimentador o encargado de realizar la práctica de medición, cuando suceden estos errores suele retrasar el proceso de análisis y no llegar a los datos adecuados, llegando incluso a pensar que fue falla de instrumental o de equipos de laboratorio (Acosta, 2011).

9.3.2.2.2 Error de cálculo

Hace referencia directamente a las ecuaciones de diseño del instrumento de calibración estos errores muchas veces surgen por el uso de aproximaciones de ecuaciones las cuales no son exactas (Acosta, 2011).

9.3.3 Errores por dependencia en la magnitud de medida

9.3.3.1 Error aditivo

Comprende la parte del error absoluto en el cual siempre se dará la misma medida con el mismo error, por esta razón es difícil saber en qué momento se presenta al aplicar una serie de mediciones en las cuales este no varía (Acosta, 2011).

9.3.3.2 Error multiplicativo

Este error depende directamente de la magnitud de referencia que se está midiendo, este se reconoce cuando el error absoluto se vuelve lineal durante todos los datos (Acosta, 2011).

9.3.4 Errores basados en la forma matemática de su expresión

9.3.4.1 Error absoluto

Es la diferencia entre un valor medido durante una práctica y un valor de referencia, el cual se considera como el mejor acercamiento al valor real, todo esto expresado en valor absoluto (**Ecuación 9)**.

9.3.4.2 Error relativo

Comprende parte del error absoluto, con la diferencia en que se divide en el valor medido. **(Ecuación 10).**

9.3.4.3 Error relativo reducido

Se emplea para condiciones en las que tenemos un valor normalizado el cual representará el dividendo en la (**Ecuación 10)** (Acosta, 2011).

9.3.5 Errores por dependencia de su naturaleza

9.3.5.1 Error sistemático

Este error será constante en toda la medición, la causa de este error no se puede conocer con precisión, dentro de este tipo de errores pertenecen los siguientes:

9.3.5.1.1 Error casual

Este error se presenta de forma casual, la cual no es frecuente, pero se ve afectado por las mediciones empleadas, se define según el nivel de la causa que lo produce (Acosta, 2011).

9.3.5.1.2 Error parásito

Es frecuente y muchas veces termina siendo la causa de un grave error en el análisis de datos, se presenta como un valor que está muy por encima de los valores o muestras de datos, al final si se presenta, simplemente no se tiene en cuenta (Acosta, 2011).

9.3.5.1.3 Errores ambientales

Este tipo de error surge directamente por la dinámica del mundo en que vivimos, nacen como parte de factores ambientales, entre ellos, la gravedad, la humedad, temperatura, etc. Que pueden generar una afección directa con respecto del experimento (Rivera, 2017).

9.3.6 Errores según la variación del tiempo

9.3.6.1 Error estático

Comprende un error en el sistema o entorno de medición en el cual la magnitud de medida es constante.

9.3.6.2 Error dinámico

Tomando como referencia el error estático, se define simplemente como un error en el sistema a medir en donde la magnitud de medida varia con respecto del tiempo (Acosta, 2011).

9.3.6.3 Error de certificación

Este error es fundamental e importante en las mediciones de laboratorio, ya que comprende el valor más aproximado del error en una medición, y su nombre se debe a un estándar que lo concibe como el más preciso (Acosta, 2011).

9.3.7 Concepto de exactitud en las mediciones eléctricas

La exactitud corresponde a la cantidad de error que pueda presentar una medida, ésta la podemos denotar como una aproximación al valor real de una medición el cual es desconocido, además de frecuentar en su análisis la existencia de errores sistemáticos ver ilustración.

Ejemplo 1:

Teniendo en cuenta un error absoluto de un metro ($\Delta X = 1m$) apreciamos 2 casos para evaluar de forma cuantitativa la calidad de la medición. Para ello calculamos el error relativo, que nos expresa la cantidad de error por unidad de la magnitud medida y lo expresamos en por ciento (Acosta, 2011).

Si quisiéramos medir el ancho de una mesa equivalente a 2 m.

$$\boldsymbol{\delta x = \frac{1\ m}{2\ m} = 0.5}$$

$$\boldsymbol{(0.5) * 100 = 50\%}$$

Si se midiera una distancia de 300 000 m

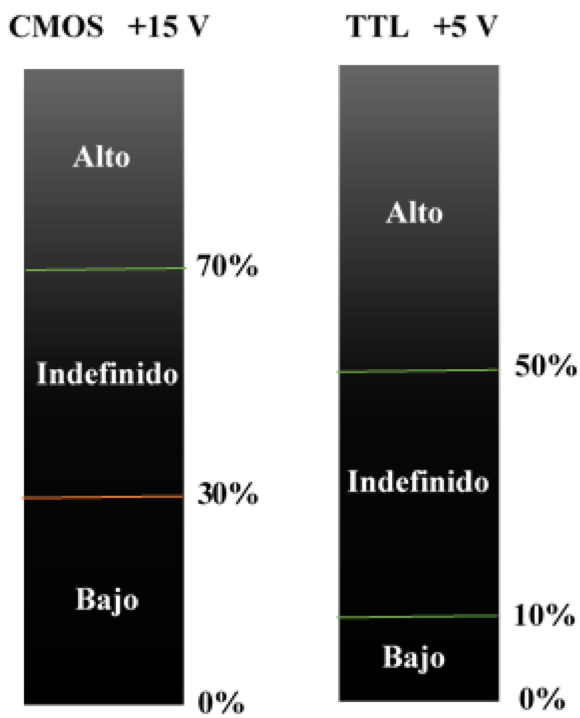
$$\delta x = \frac{1\ m}{300000\ m} = 0.0000033$$

$$(0.0000033) * 100 = 0.00033\%$$

Ejemplo 2:

En lógica digital, se observa que sus estados lógicos no están definidos de forma exacta, se aprecian de forma porcentual y por zonas (Acosta, 2011).

Figura 6: *familias lógicas digitales*



Nota: tomado de (Acosta, 2011)

9.3.8 Concepto de precisión en las mediciones eléctricas

La precisión es considerada como el nivel de dispersión con el cual están tomados una serie de datos, si estos datos son cercanos en su valor, se asume que es bastante precisos, aunque la precisión hace referencia directamente a una cualidad en las medidas, pero no podemos decir que por ser preciso sea exacto (Acosta, 2011).

Ejemplo 1: dado que la exactitud en la red eléctrica es muy mala, la mayoría de equipos en las industrias fabrican sus equipos para ser operados en rangos de tensión, podemos definir un voltaje de 110V para una lampará led, la exactitud será muy mala, pero la precisión si será bastante buena ya que los valores estarán muy cercanos unos de los otros.

Por tanto, la precisión es una categoría en la cual se consignan una serie de datos repetitivos (Acosta, 2011).

9.4 Errores en mediciones técnicas

Las mediciones técnicas son las que se ejecutan en los centros industriales de producción, especialmente en los talleres de mantenimiento. Con frecuencia con personal poco calificado que necesita de la orientación e instrucción de los ingenieros y especialistas.

Una medición de calidad es aquella que además de exacta es precisa, lo cual significa un uso óptimo de recursos materiales y tiempo (Acosta, 2011).

9.4.1 Teoría de errores en las mediciones de detección.

Este tipo de errores son muy usados en fábricas tecnológicas, sirven para detectar productos en mal estado.

Gracias a las mediciones de errores por detección es posible evitar más del 90% de las fallas en sistemas analógicos, además de ser utilizadas al 100 por cien en las digitales.

No requiere un gran número de datos ya que en principio se toma como base una medida o un rango en el cual estará dicha medida, a lo cual se dirá que basta con que esté allí.

Por ejemplo; si queremos medir una resistencia de 200KΩ, en un rango de 0 a 1KΩ, el resultado será infinito o un 1 a la izquierda, si tenemos en cuenta ese resultado lo primero que se pensaría es que la resistencia no existe, cuando en realidad lo que está mal es la escala de medida para él Óhmetro.

9.4.2 Teoría de errores en las mediciones de valoración.

En este caso se requiere conocer el orden de la magnitud a medir u objeto de medición, esta es muy parecida a las mediciones por detección, solo que con una mayor exactitud.

Se lleva a cabo como una medición por intervalos, en la que se resaltan los extremos de incertidumbre que presente la medida (Acosta, 2011).

9.4.3 Teoría de errores en las mediciones de cálculo.

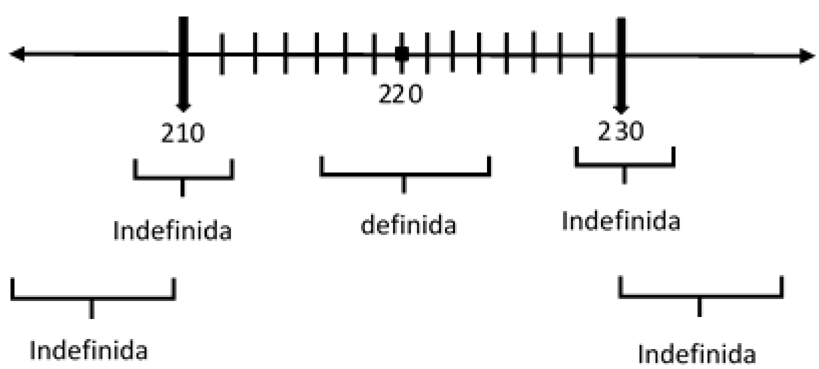
En estas mediciones se requiere un valor real numérico, que represente la magnitud objeto de medición. El cálculo de los errores depende de las necesidades del experimento (Acosta, 2011).

9.4.4 Teoría de errores en las mediciones de control.

En las mediciones de control es necesario utilizar la estimación por intervalo. Tanto las indicaciones de los instrumentos como los valores de las magnitudes, no pueden considerarse valores puntuales (Acosta, 2011).

Ejemplo: si quisiéramos medir una tensión con un intervalo de 208 a 230 V y está nos da cercana a la zona de incertidumbre, pueda llegar a quedar indefinida, así que la respuesta no sería coherente con los resultados analizados (Acosta, 2011).

Figura 7: *error en la medición de control*

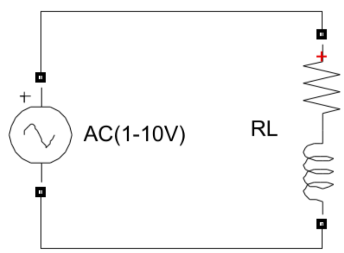


Nota: cuando se presenten mediciones indefinidas, la única respuesta ingenieril correcta es “no sé”, cual es el resultado de la medición; y la solución es repetir las mediciones con instrumentos de mayor exactitud. Obtenido de (Acosta, 2011),

9.5 Teoría de errores en las mediciones de laboratorio

Asumiendo que en el laboratorio queremos medir el valor de la corriente que fluye por la bobina y la resistencia basándonos en un circuito serie como el de la figura y esto variando el voltaje de la fuente de 1 a 10 V.

Figura 8: *circuito serie resistencia y bobina*



Nota: tomado de, *software Matlab 2017 (elaboración propia)*

Para este se toman 10 mediciones las cuales se repiten 3 veces para comprobar la precisión de los valores (Elaboración propia).

Tabla 5: *corriente medida en la resistencia*

V (fuente)	I1(A)	I2(A)	I3(A)
1	0.16	0.17	0.18
2	0.33	0.35	0.36
3	0.51	0.52	0.53
4	0.70	0.72	0.74
5	0.87	0.84	0.85
6	1.05	1.07	1.06
7	1.23	1.25	1.24
8	1.40	1.39	1.41
9	1.58	1.56	1.55

10	1.78	1.80	1.81

Nota: tablas datos ilustrativos obtenido de (elaboración propia)

En este caso carecemos de la consideración de cuál puede ser la principal afección, sabiendo que el voltaje fue constante en todos los casos, que el multímetro estaba en su escala adecuada y fue igual para todas las mediciones, por tanto, al final aplicamos el uso de la **estadística** para determinar cuál valor es el más aproximado en nuestro análisis calculando la media aritmética de los valores tomados (Elaboración propia).

Tabla 6: *media de los datos*

V (fuente)	I1(A)	I2(A)	I3(A)	I (promedio o media)
1	0.16	0.17	0.18	0.170
2	0.33	0.35	0.36	0.347
3	0.51	0.52	0.53	0.520
4	0.70	0.72	0.74	0.720
5	0.87	0.84	0.85	0.853
6	1.05	1.07	1.06	1.060
7	1.23	1.25	1.24	1.240
8	1.40	1.39	1.41	1.400
9	1.58	1.56	1.55	1.563
10	1.78	1.80	1.81	1.797

Nota: obtenido de (elaboración propia)

Como los datos obtenidos son muy pocos, la aplicación de un histograma no generaría una asíntota perfecta, a mayor número de datos mejor será la representación gráfica y por ende el error será menor asumiendo que no poseemos la existencia de errores instrumentales ni accidentales de lectura (Elaboración propia).

La ecuación principal para el
cálculo de la **desviación** o error residual es:

$$\boldsymbol{D = \bar{x} - xi}$$

Ej.

$$\boldsymbol{D = 0.170 - 0.16 = 0.010}$$

Las desviaciones con respecto a los datos obtenidos son las siguientes:

Tabla 7: *desviaciones*

Desviación		
0,010	0,000	-0,010
0,017	-0,003	-0,013
0,010	0,000	-0,010
0,020	0,000	-0,020
-0,017	0,013	0,003
0,003	-0,007	0,003
0,010	-0,010	0,000
0,000	0,010	-0,010
-0,017	0,003	0,013
0,017	-0,003	-0,013
0,000	0,000	0,000

Nota: obtenido de: (elaboración propia)

Siempre que se realice una medida de magnitud debemos tener en cuenta su estimación de error, si en dado caso no conocemos el valor verdadero se deben seguir ciertos procedimientos para hacer una estimación del valor "verdadero" como también la cota de error para así distinguir la determinación realizada. Hay dos casos muy importantes a tener en cuenta (Elaboración propia).

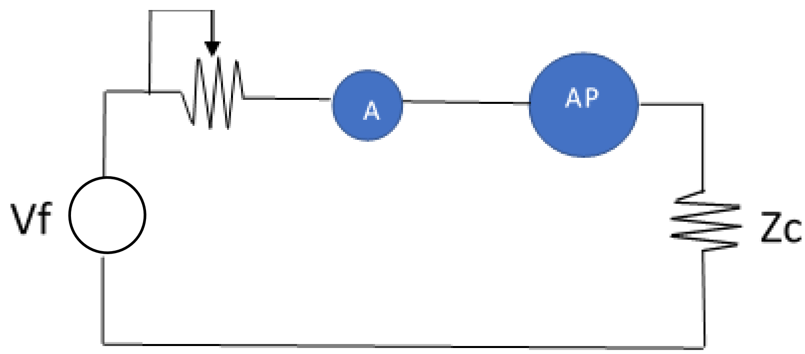
Las mediciones de laboratorio se ejecutan por personal altamente calificado, se dividen en dos categorías fundamentales las de verificación o calibración, cuyo objetivo es establecer los tiempos de funcionamiento y las mediciones de alta precisión que son usadas para diseñar y fabricar sistemas de medición en investigaciones científicas (Acosta, 2011).

9.6 Teoría de Errores en las Mediciones de Verificación.

9.6.1 Verificación.

Se utilizan para comprobar el estado de funcionamiento y la validez de la clase de precisión de los medios de medición.

Figura 9: v*erificación de amperímetros*



Nota: Obtenido de: (elaboración propia)

A: amperímetro de verificación.

AP: amperímetro del patrón.

Zc: carga Limitadora del circuito.

Selección de patrones, Criterio de selección: $\delta \mathbf{p} \leq \mathbf{N}^*\delta\mathbf{x}$

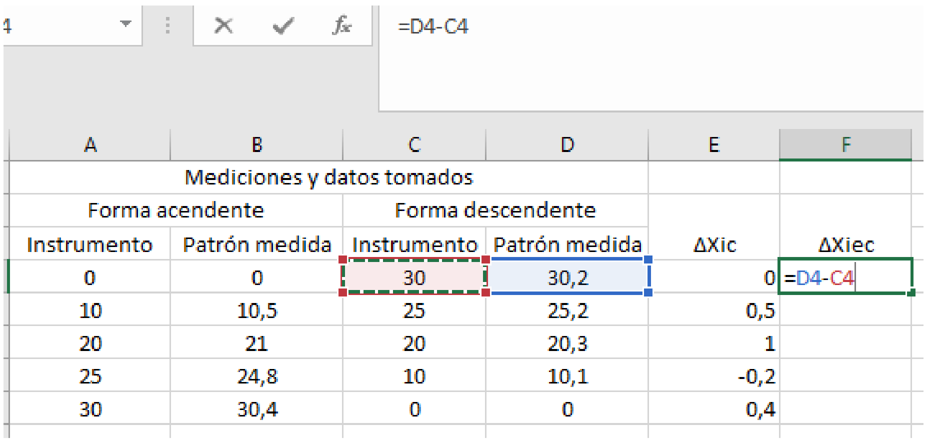
- N<1.
- Valor típico N = 2/3.
- Según la norma (Acosta, 2011).

9.6.2 Cálculo del error absoluto.

Para el análisis de error absoluto podemos recurrir a software en caso de tener una serie de datos tomados (Acosta, 2011).

Aplicando la **ecuación 9** podemos usar y calcular mediante Microsoft Excel los datos para la tabla.

Figura 10: *cálculo de error absoluto mediante Excel*



=D4-C4

A	B	C	D	E	F
Mediciones y datos tomados					
Forma acendente		Forma descendente			
Instrumento	Patrón medida	Instrumento	Patrón medida	ΔXic	ΔXiec
0	0	30	30,2	0	=D4-C4
10	10,5	25	25,2	0,5	
20	21	20	20,3	1	
25	24,8	10	10,1	-0,2	
30	30,4	0	0	0,4	

Nota: tomado de Microsoft Excel mediante el software se pueden analizar un gran número de datos en los cuales, con realizar el primer análisis, solo es cuestión arrastrar hasta abajo y se obtendrán los resultados para todos los datos tomados (Elaboración propia).

Tabla 8: *Idea Básica Cálculo del Error absoluto.*

Mediciones y datos tomados				ΔXic	ΔXiec
Forma acendente		Forma descendente			
Instrumento	Patrón medida	Instrumento	Patrón medida		
0	0	30	30,2	0	0,2
10	10,5	25	25,2	0,5	0,2
20	21	20	20,3	1	0,3
25	24,8	10	10,1	-0,2	0,1
30	30,4	0	0	0,4	0

Nota: los valores calculados son tomados usando la **ecuación 9 c**omo resultado de las mediciones mostradas en la **tabla 8**, se expresa el valor de error más alto y en valor absoluto (Acosta, 2011).

Los dispositivos menos precisos, aunque no obsoletos son analógicos ya que su escala de medida visual, aumenta la posibilidad de que el observador cometa un error accidental (Acosta, 2011).

9.6.2.1 Cifras significativas.

Observamos que el error absoluto está en el orden de las décimas, lo cual establece el número de cifras significativas con las cuales se pueden expresar los resultados de mediciones realizadas con este tipo de instrumentos. No tiene lógica o sentido matemático, hablar o expresar resultados en el orden de las centésimas o inferiores, si el error que introduce el instrumento está en el orden de las décimas o superiores (Acosta, 2011).

9.6.2.2 Clase de precisión.

Se presentan dos problemas, tomado como referencia la **ecuación 10**, asumimos los valores para el cálculo de error relativo de la siguiente manera:

Error adsoluto = **0.8** ; Valor referencia = **15**

$$\boldsymbol{Er = \frac{0.8}{15} = 0.0533333333}$$

Muchas cifras para expresar la clase de precisión (0.053333333); la mejor expresión se obtiene multiplicando el valor anterior por 100 y expresándolo en cifras porcentuales (Acosta, 2011).

$$\%\boldsymbol{Er = 0.0533333\ x\ 100}\% = \boldsymbol{5.3333333}\%$$

Aplicando la reducción de cifras significativas obtenemos el dato;

$$\%\boldsymbol{Er = 5.33}\%$$

Es necesario utilizar el valor de referencia tomado, (se utiliza el valor normalizado, en este caso el límite superior del campo de medición) (Acosta, 2011).

$$\%\boldsymbol{Ern} = \frac{\mathbf{0.8}}{\mathbf{20}} \boldsymbol{x}\mathbf{100} = \mathbf{4}\%$$

La gran mayoría de los instrumentos los presentan en su caratula y está dado para mostrar la precisión al momento de cada medición esto en el caso más crítico (Acosta, 2011).

Si **%Ern** ≤ **%Er** ⇒cumple el criterio por tanto se usaría. Validación (sello **amarillo).**

Si **%Ern** > **%Er** ⇒No cumple el criterio, por tanto, no es usado. Validación (sello **rojo).**

9.6.3 Teoría de errores en las mediciones de calibración.

En los centros metrológicos generalmente solo se comprueba el estado de funcionamiento de los medios de medición y su clase de precisión. Y se emite un criterio legal y oficial. Pero en los centros industriales, no siempre es necesario desechar un medio de medición, porque su clase de precisión esté ligeramente desigual a la legalmente oficial emitida por el fabricante. Puede asignársele una nueva clase de precisión, y utilizarse en los procesos donde esta sea suficiente. Por tanto, las mediciones de calibración se utilizan para asignar nueva clase de precisión a los medios de medición (Acosta, 2011).

9.6.4 Teoría de errores en las mediciones de alta precisión.

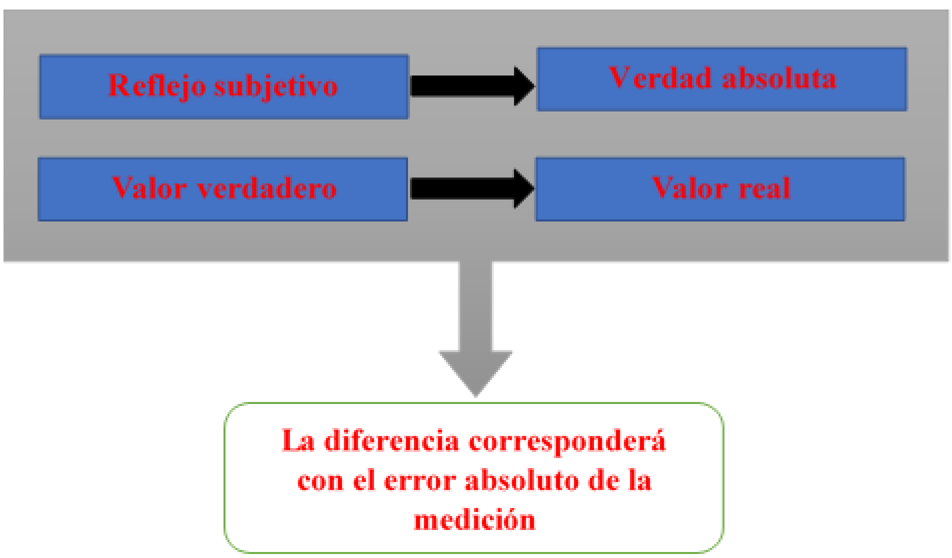
Las mediciones de alta precisión son realizadas por personal con alta preparación y se distinguen entre otros aspectos porque los resultados no de una medición en particular, sino de un conjunto de mediciones que pueden ser de mayor o menor amplitud en dependencia de las características del proceso que se esté investigando (Acosta, 2011).

Ejemplo: si queremos fabricar pantalones para una población determinada, no se puede medir una solo persona de esa población para definir el tamaño a fabricar debido a esto surgen un grupo de interrogantes a responder como; ¿cuántas personas se deberían medir?, porque es evidente que será imposible medirlas todas, para Estos casos la teoría de errores en la medición de magnitudes, ayudada de la teoría de las probabilidades y las estadísticas matemáticas, da solución a este tipo de problemas (Acosta, 2011).

9.6.4.1 Dimensiones de los errores en alta precisión.

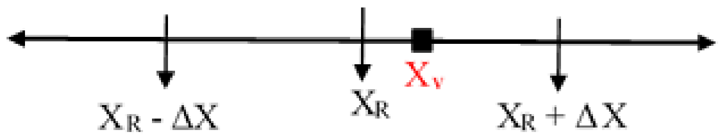
Son muy comúnmente afectadas por errores aleatorios, debido a esto siempre que se tomen más medidas se presentaran errores diferentes lo que llevan a un rango fuera del valor verdadero, una verdad absoluta corresponderá un reflejo subjetivo de la medición lo mismo que al definir un valor verdadero, éste corresponderá con un valor real (Acosta, 2011).

Figura 11: *diferencia entre los errores absolutos de medición*



Nota: El cual define el intervalo de incertidumbre en la medición. Obtenido de: (elaboración propia)

Figura 12: *incertidumbre de la magnitud*



Nota: obtenido de (elaboración propia)

Donde:

Xr: valor real.

Xv: valor verdadero

ΔX: error absoluto.

Aplicando la ecuación de error absoluto aparecen 2 inconvenientes (ecuación 9).

1. El valor verdadero **Xv** nunca se podrá conocer por lo mencionado anteriormente que corresponde directamente por la naturaleza del mundo en que vivimos, además de los cambios presentados constantemente y que nos obligan a modelar todo a medida que la teoría se vuelva obsoleta (Acosta, 2011).
2. El valor real **Xr** presenta variaciones en cada medición.

Es por esto que no será posible obtener un dato verídico del error absoluto, ya que el cálculo asociado a las mediciones técnicas de calibración y verificación no resulta lo suficientemente confiable en las mediciones de alta precisión.

Para solucionar el problema, se debe tomar un gran número de mediciones en las que se eliminen los errores causales y así poder llevar a cabo un tratamiento estadístico que permita obtener errores muy bajos (Acosta, 2011).

En esta unidad lo que se pretende es dar un enfoque más específico en el que ya lo que venimos viendo acerca del error absoluto y relativo, no es suficiente para análisis de alta precisión, si se quisiera conocer este dato de errores, primero es necesaria saber que son tomados a partir de un análisis estadístico en el que mediante una gráfica de distribución normal se obtiene de forma detallada y especifica los valores. Los principales criterios que evalúan la alta precisión en las mediciones son los siguientes:

Raíz media cuadrática: este equivale al valor real o el que más se aproxima a la realidad del sistema (Acosta, 2011).

Desviación estándar de población: nos será de gran utilidad para llevar a cabo el análisis de datos y graficación de histogramas (Acosta, 2011).

Error de la media: es necesario saber y comprender que con base en el valor central también recae un alto porcentaje de error, ya que es el considerado más cercano al valor real, por esto se hace necesario obtenerlo de una forma muy precisa (Acosta, 2011).

Intervalo de incertidumbre: en el cual definimos un rango dentro del cual estará el valor real de la medición y así evitando errores aleatorios (Acosta, 2011).

9.7 Fundamentos de estadística y probabilidad para ingeniería eléctrica y carreras afines.

La estadística es una ciencia fundamental para todas las mediciones en especial las de alta precisión. Pero no son el objeto central de este curso, solo se refieren los temas y 17 conceptos más necesarios e imprescindibles. En cursos especiales debe profundizarse en esta dirección (Acosta, 2011).

9.7.1 La media aritmética.

En matemáticas llamada media o también promedio, se define como la suma de toso los datos tomados en una medición esto entorno a una sola magnitud, para el cado de datos estadísticos poblacionales, recibe el nombre de media muestral (Acosta, 2011).

Ecuación 37: *media Aritmética*

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$$

Ejemplo: si durante 5 mediciones de voltaje en una fuente de alimentación que está en un rango de 110 a 130 V y con una diferencia de tiempo entre datos de 1 min, se obtienen los siguientes valores; 115.4, 116, 115.6, 117.2, 116.5, dado esto la media de estos valores será la siguiente:

$$\bar{X} = \frac{115.4 + 116 + 115.6 + 117.2 + 116.5}{5} \cong 116.14V$$

Se usa el símbolo $\bar{X}$ para la representación de muestras cerradas 0, y en el caso de muestras poblacionales se usa el símbolo µ (Acosta, 2011).

9.7.2 La mediana.

Es tomada a partir de una serie de datos medidos, en los que se tiene como gran importancia el orden de datos obtenidos, ya sea de forma ascendente o descendente, y que equivale al valor ubicado en la mitad o el promedio de los 2 valores centrales (Acosta, 2011).

Ecuación 38: *mediana*

$$Md = \frac{\frac{Xn}{2} + \frac{Xn}{2} + 1}{2}$$

Pasos para uso de la mediana en datos tomados:

1. Se deben ordenar los datos de forma ascendente o descendente de igual manera se llegará a la misma respuesta.

2. Si el número total de datos es impar la media corresponderá con el valor central el cual es el mimo dato medido.

En el caso particular en que el número de datos sea par pues se tendrán en cuenta 2 datos de los cuales será necesario obtener el promedio (Acosta, 2011).

Al final podemos establecer, que la mediana:

- Equivale a un valor siempre que se tenga un numero de datos.
- Es muy simple y sencilla de calcular.
- Los datos que son ubicados en los extremos no tienen gran efecto en el resultado de la mediana
- La notación usada para la media es, Md

Ejemplo; a partir de las siguientes corrientes de una fuente DC variable calculamos la mediana, **8; 6; 7; 9; 10; 11; 14; 12** [mA].

1. Se ordenan los datos: de menor a mayor debido a que la fuente está suministrando una carga la cual iba elevando su consumo en transcurso del tiempo (Acosta, 2011).
2. **(6,7,8,9,10,11,12,14) [mA]**
3. Se observa si el número de datos es un numero par e impar, como el total de datos es 8 quiere decir que se tendrán en cuenta los 2 valores centrales para calcular un promedio de los 2.

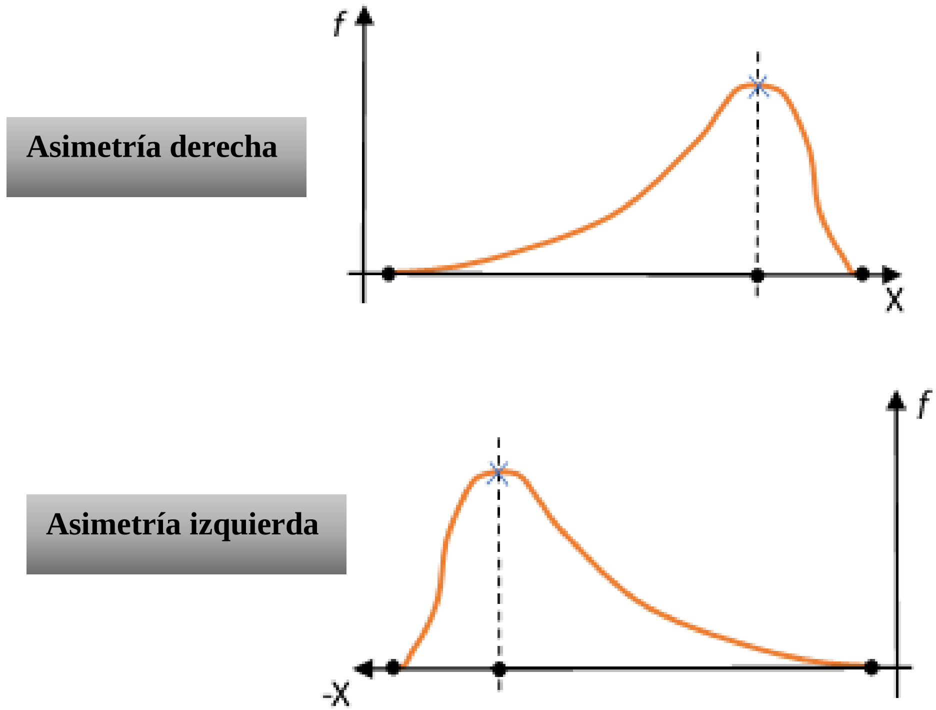
$$Md = \frac{9+10}{2} = 9.5\ mA$$

9.7.2.1.1 La moda.

Este dato se obtiene con mucha frecuencia, de allí recibe el nombre de moda, ya que es el que más se repite en los datos obtenidos (Acosta, 2011).

Ejemplo: 2.3, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7. Se tendrían 2 datos para la moda, 5 y 7, en este caso se recibe el nombre de bimodal al tener presente 2 valores con mayor frecuencia.

Figura 13: *moda*



En el caso de muestras simétricas la media, la mediana y la moda coinciden en su valor (Acosta, 2011).

9.7.2.1.2 Probabilidad.

La probabilidad es un dato que se calcula a partir del cual recaen muchas dudas y nunca se es un dato certero, solamente es una medida que puede ocurrir, pero no es seguro (Acosta, 2011).

Probabilidad experimental o frecuencia absoluta

Esta equivale a las veces que se obtuvo un evento o un cambio todo esto con respecto de un total de ensayos realizados (Acosta, 2011).

Frecuencia relativa

Representa la división entre las veces que se llevó a cabo el cambio (M) con respecto de las muestras tomadas (N) (Acosta, 2011).

Ecuación 39: *frecuencia relativa*

$$f = \frac{M}{N}$$

Probabilidad matemática

Ecuación 40: *probabilidad*

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{M}{N}$$

Siendo:

M: número de veces que se presentó un cambio.

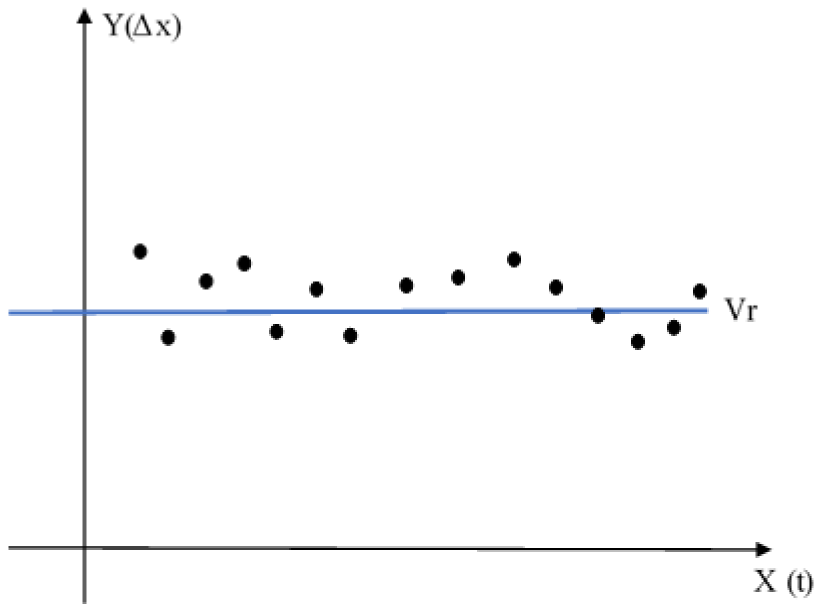
N: número total de datos.

Se opta por aplicarse cuando el número de datos es bastante grande y los cambios son muy probables (Acosta, 2011).

La probabilidad sería considerada como la tendencia a que ocurra un suceso, más no un dato confiable 100 por cien.

La probabilidad multiplicada por el número de ensayos entre mayor sea, mayor será la confiabilidad (Acosta, 2011).

9.7.2.1.3 Desviación



La variación en la medición se ve representada como la resta entre un valor medido y la media muestral de los datos (ver pág. 41-42).

$$\Delta X = Xi - \bar{X}$$

X̅: media aritmética o muestral de los datos tomados.

Xi: valor que obtiene después de cada medición.

Raíz media cuadrática

Se usa para no eliminar desviaciones con signo contrario, ésta permite hallar el indicador de evaluación y así tenerlas en cuenta para una mejor estimación del error (Acosta, 2011).

Ecuación 41: *valor eficaz*

$$\delta(rms) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(Xi - \bar{X}\right)^2}$$

- **Desviación típica**

Cómo se hace necesario la obtención de varios datos para el cálculo de la media, se termina asumiendo la dependencia entre la media y cada dato tomado, al final la precisión del medio se calcula a partir de una variación del resultado original y elevando al cuadrado la desviación estándar (Acosta, 2011).

Ecuación 42: *varianza*

$$\left(Xi - \bar{X}\right)^2$$

A partir de este hecho, se sabe que para una mejor apreciación del valor real es necesario restar 1 al número de datos y agregándolo a la ecuación del valor real, dando como resultado la siguiente expresión:

$$\delta(rms) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{i=n}\left(Xi - \bar{X}\right)^2}$$

.

Si **n >30 δ ≈ δrmc**

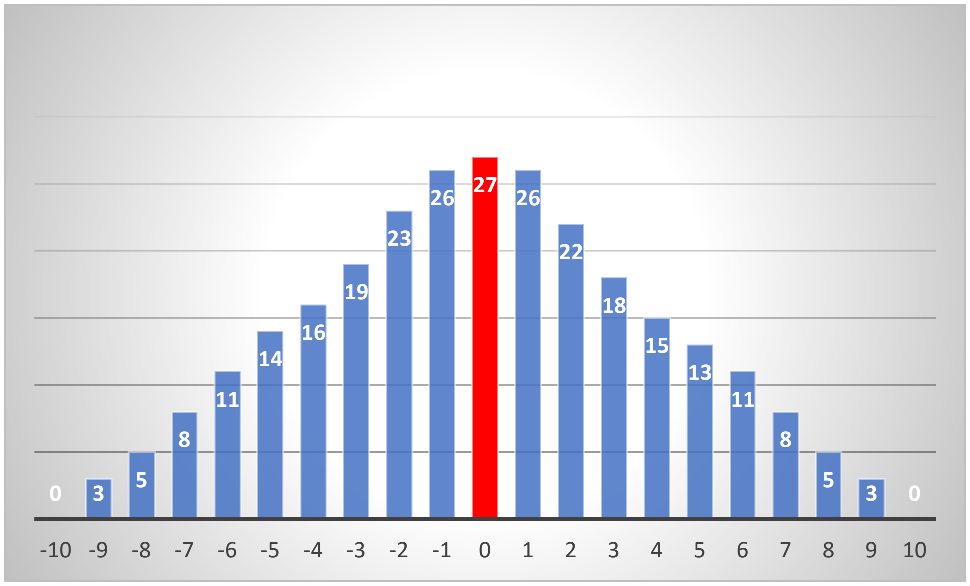
Para un mejor manejo de datos y graficación es aconsejable el uso de software especializado en cálculo de desviaciones además de las ecuaciones matemáticas previamente incluidas en el programa, un ejemplo de software muy común puede ser Microsoft Excel o SPSS.

Gracias a esta herramienta es posible graficar y mostrar de una mejor manera los datos y ayudar a reducir los errores (Acosta, 2011).

9.7.2.1.4 Histogramas.

Estos gráficos, nos permiten mostrar de forma específica los resultados tomados con base en la ley de distribución normal o de Gauss, así como el comportamiento de los resultados y cálculo de probabilidades en el cual se puede evidenciar la tendencia de los datos tomados.

Figura 14: *histogramas*



Nota: grafico obtenido a partir del uso de software Microsoft Excel (Elaboración propia)

ΔX: la variación presente en el histograma para el eje X representara la desviación de los datos, aplicando la ecuación de desviación estándar.

ΔY: la variación en el eje Y representará la ocurrencia con que se presenta el valor después de aplicado el análisis de desviación para todos los datos tomados.

El grafico mostrado anteriormente puede adoptar distintas formas, a partir de los datos tomados, dependerá netamente del tipo de sistema que se esté analizando, ya que en el caso de una campana de gauss es más para datos probables o aleatorios, de allí está forma (Acosta, 2011).

Tipos de histogramas:

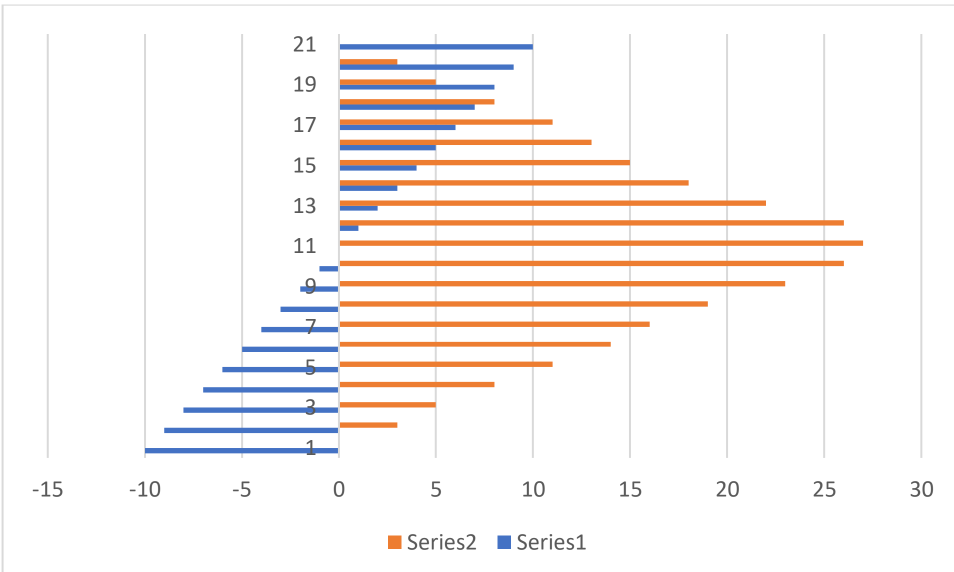
- **Diagramas de barras simples**

Este es igual al de la **Ilustración 6**, representa la desviación de los datos, en forma de barras sencillas, además de comprender los errores absoluto y relativo de una distribución normal de datos (Acosta, 2011).

- **Diagramas de barras compuesta**

Este ilustra de forma detallada y por grupos o categorías una serie de datos, en los que se hace una comparativa y se muestra la frecuencia con la que ocurren los eventos (Acosta, 2011).

Figura 15: *diagrama de barras compuestas*



Nota: obtenido de (elaboración propia)

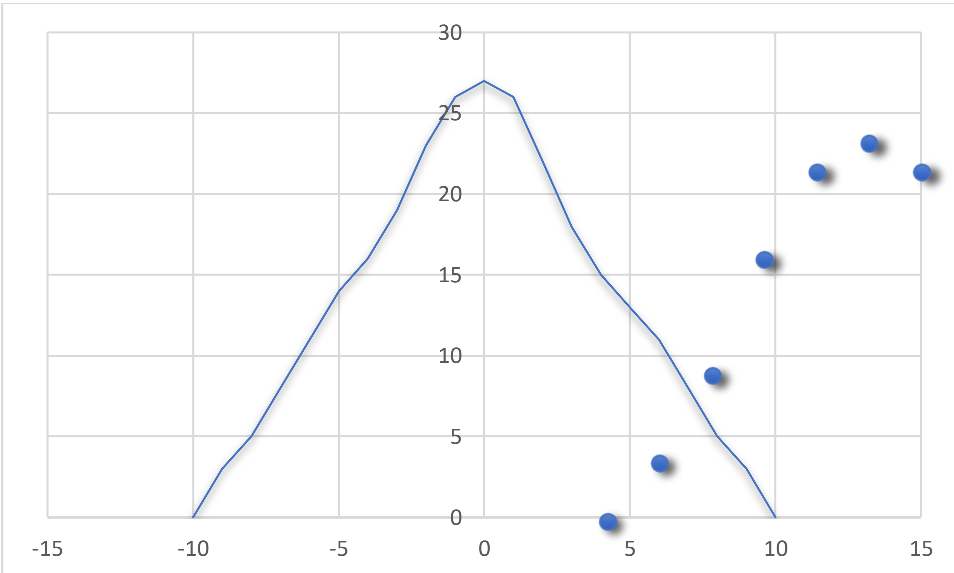
- **Diagramas de barras agrupadas**

Se usa de tal modo que represente la información en dos entradas, a partir de 2 variables, en las que se ilustra según los datos obtenidos la información detallada por cada grupo (Acosta, 2011).

- **Polígono de frecuencias**

Este ilustra de forma puntual, cada dato y mostrando linealmente los datos a graficar, se representan de forma tal que los datos de cada punto equivalen a la desviación y frecuencia de las medidas realizadas (Acosta, 2011).

Figura 16: *polígono de frecuencias*

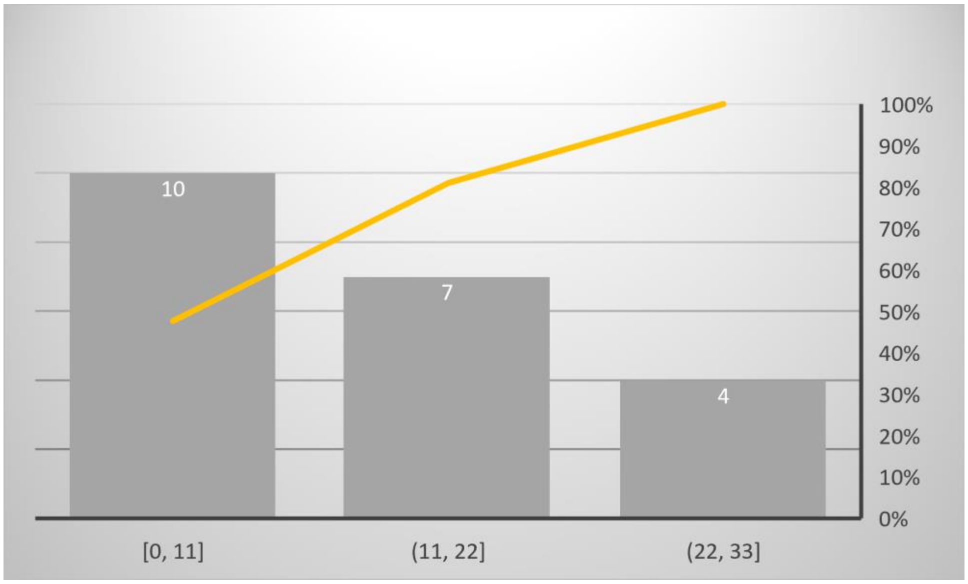


Nota: obtenido de (elaboración propia)

- **Ojiva porcentual**

Este representa de forma porcentual los datos, además de ser muy similar al polígono de frecuencias en el cual se grafican los datos a partir de la distribución porcentual de los datos (Acosta, 2011).

Figura 17: *ojiva porcentual*

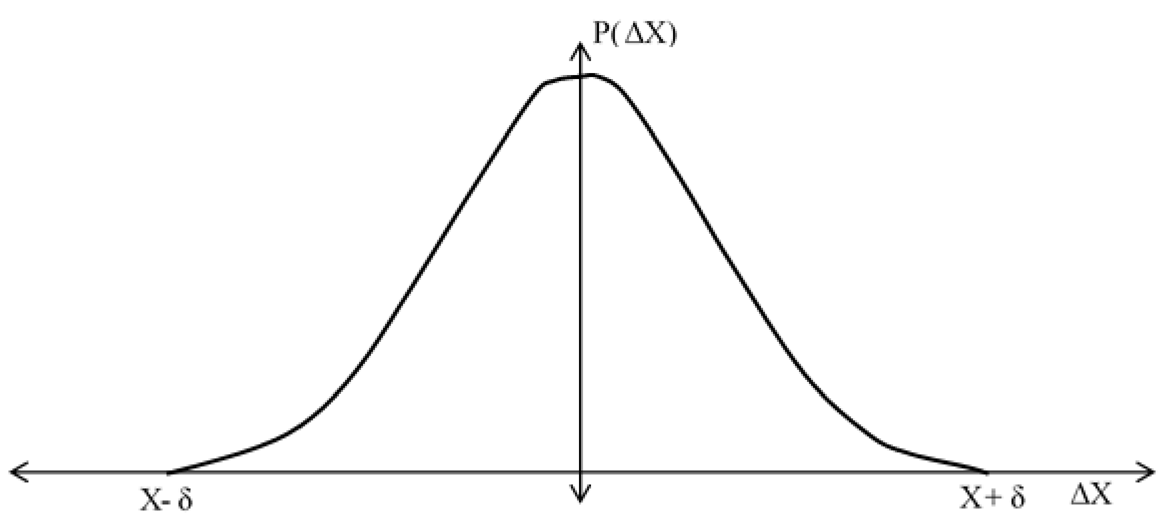


Nota: obtenido de (elaboración propia)

9.7.2.1.5 Ley de distribución de Gauss.

Las leyes de distribución normal sirven para expresar de forma gráfica los datos, además de adoptar cualquier tipo de geometría, o curva de datos, dependiendo de los datos pueden ser simétrica o asimétrica la campana (Acosta, 2011).

Figura 18: *valor central*



El valor central de la distribución, es la media aritmética.

Para evaluar la tendencia, se usa la desviación típica y el error presente en la media aritmética (Acosta, 2011).

Ecuación 43: *Ley de Gauss*

$$P(\Delta X) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{\Delta X^2}{2\delta^2}}$$

Intervalo de confianza

En la teoría de errores se observa la relación que existe entre el valor **rms** y el área de selección dentro del rango de la ley de distribución:

$$(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\delta} : \ \overline{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\delta}) \rightarrow \mathbf{68.3}\%$$

$$(\overline{\boldsymbol{X}} - \mathbf{2}\boldsymbol{\delta} : \ \overline{\boldsymbol{X}} + \mathbf{2}\boldsymbol{\delta}) \rightarrow \mathbf{95.4}\%$$

$$(\overline{\boldsymbol{X}} - \mathbf{3}\boldsymbol{\delta} : \ \overline{\boldsymbol{X}} + \mathbf{3}\boldsymbol{\delta}) \rightarrow \mathbf{99.7}\%$$

Propiedades de la ley de distribución normal

Los errores casuales de igual valor tendrán la misma probabilidad, debido a que los errores pequeños tienden a ser más probables comparado con los grandes, serán objeto de análisis para determinar el valor más cercano al valor verdadero (Acosta, 2011).

La zona bajo la curva y la delimitación del intervalo, corresponde a la frecuencia relativa, en la que se presenta un resultado.

En la teoría de probabilidades se demuestra que la zona bajo la curva equivale siempre a la unidad.

La constante e, equivale a la multiplicación de h por la desviación típica (Acosta, 2011).

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \ o \ lo \ que \ seria \ igual \ \boldsymbol{h\delta} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

Si h alcanzara el punto más alto la desviación típica dismuye por tanto se reducirá el ancho de la curva en este caso la desviación típica, resulta ser un valor que definirá la exactitud en los datos medidos (Acosta, 2011).

Probabilidad del valor verdadero

Mediante la ley de distribución de Gauss se puede tener certeza de que el valor real estará dentro del intervalo de la curva o campana, el cual será diferente de un múltiplo de δ (Acosta, 2011).

Ecuación 44: *probabilidad del valor verdadero*

$$P(\Delta Xi) = \int_{-\Delta x}^{+\Delta x} P(\Delta X), d\Delta X$$

Mediante el uso de Excel y SPSS se puede determinar la integral para los cálculos necesarios (Acosta, 2011).

9.7.2.1.6 Error de la media.

El error del valor medio se relaciona directamente con la desviación típica, por esta la variación del valor medio es un dato que debemos calcular (Acosta, 2011).

$$\Delta\bar{X} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

Reemplazando los valores y resolviendo se obtiene la siguiente ecuación, a partir de los datos tomados (Acosta, 2011).

$$\Delta\bar{X} = \sqrt{\frac{1}{n*(n-1)}\sum_{i=1}^{i=n}(Xi-\bar{X})^2}$$

Y el resultado de la medición se da considerando el error de la media:

$$X = (\bar{X} \pm \Delta X). P(X)$$

En donde el valor de X corresponde a la medida tomada por el instrumento (Acosta, 2011).

ΔX; es el error de la media.

P(x); es la probabilidad de que el valor real este dentro del rango de: $(\bar{X} \pm \Delta X)$

9.7.2.1.7 Análisis estadístico en mediciones de alta precisión

Para el análisis de datos obtenidos en el laboratorio, se hace necesario e imprescindible el análisis de teorías, y cálculos en los cuales vamos a referir los fundamentales (Acosta, 2011).

- **Teoría elemental del muestreo:**

Esta teoría se basa en el estudio de la relación existente entre una población determinada con respecto de la muestra que se determinó a partir de dicha población (Acosta, 2011).

- **Teoría de la correlación**:

Relaciona la vinculación entre cada variable, para determinar hasta que punto son directa e inversamente proporcionales según una ecuación que las describa o modele (Acosta, 2011).

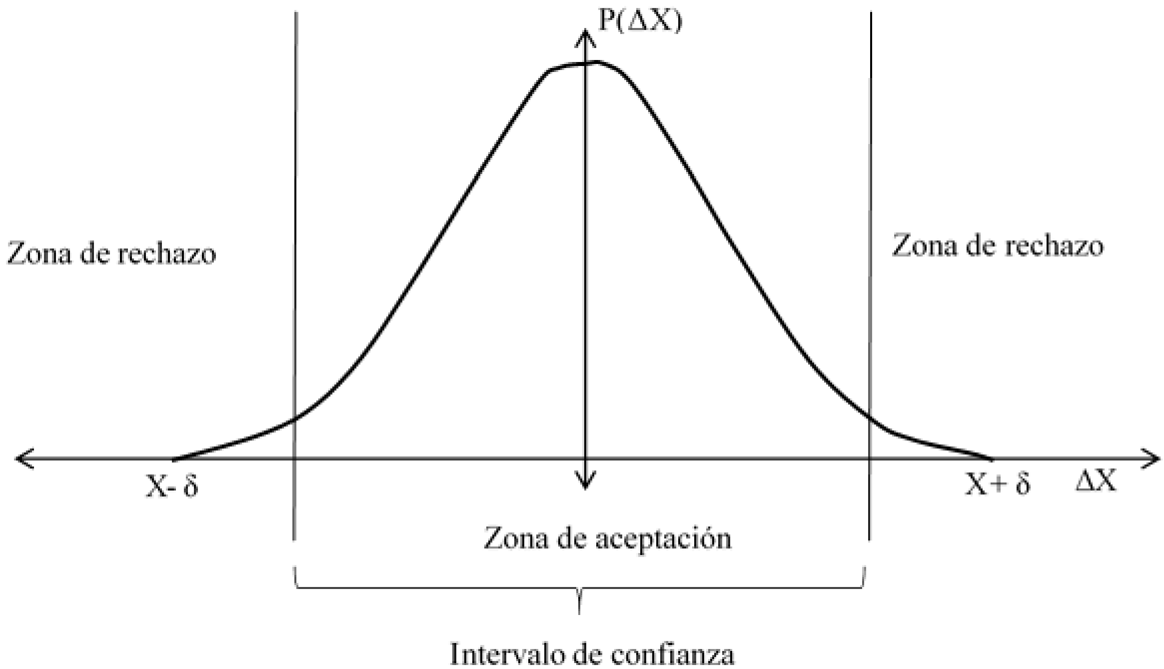
- **Decisión estadística y relación de hipótesis:**

A partir de una muestra determinada se tienen en cuenta el tratamiento estadístico correspondiente. Las pruebas realizadas se basan principalmente en histogramas teniendo en cuenta la ley de distribución de Gauss (Acosta, 2011).

La decisión para el análisis estadístico se define a partir de los siguientes procedimientos:

1. Establecer un intervalo de confianza.
2. Establecer la zona de aceptación.
3. Establecer la zona de rechazo.

Figura 19: *zonas de la ley de distribución normal*



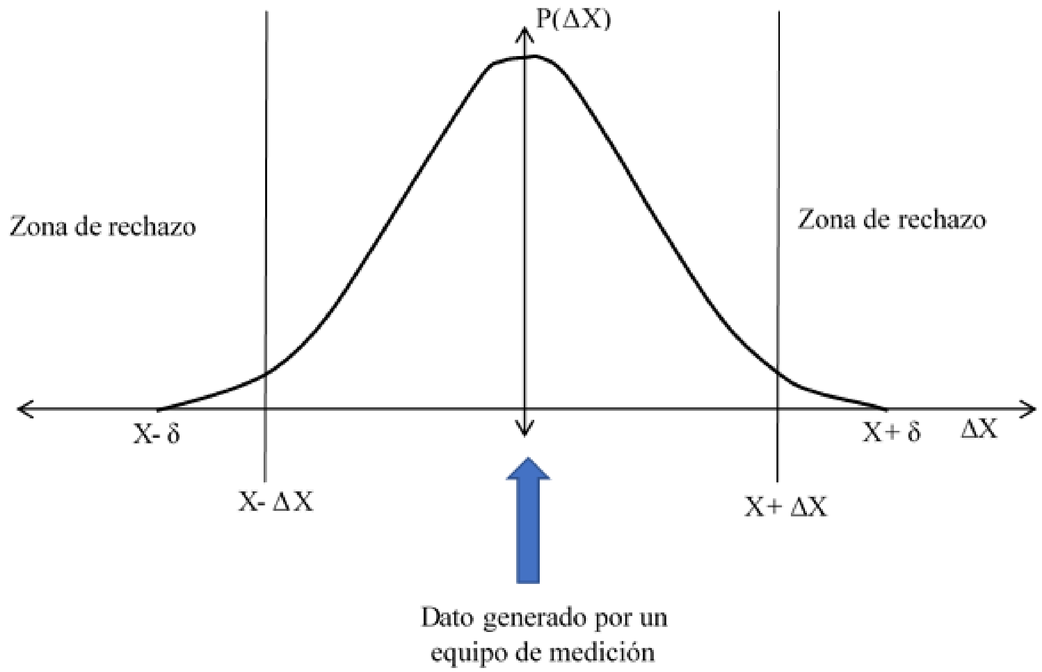
El tamaño del intervalo de confianza lo define la desviación típica de la distribución de datos, en las que se delimita la zona en la que se estará el valor real o verdadero de las mediciones (Acosta, 2011).

A partir de esta zona, (previamente definida y delimita) se parte con el análisis de los datos, en donde se realiza una comparativa para determinar si cada valor medido estará dentro de la zona, se ser correcto se tendrá en cuento, de lo contrario simplemente se rechaza y se continua con la toma de datos (Acosta, 2011).

A partir de allí se establece que el valor central de la distribución normal será el expresado por el instrumento de medición, por ende, corresponde a la media aritmética de los datos tomados en un determinado periodo de tiempo.

De aquí recae la duda sobre el valor verdadero que deberá tomar la magnitud que estemos midiendo, ya que éste hasta la fecha es algo que no podemos determinar, pero si estimar un rango en el que estará contenido (Acosta, 2011).

Figura 20: Indicación de un instrumento



Nota: obtenido de (Acosta, 2011)

Teoría de la estimación estadística:

Esta teoría nos expresa claramente la forma en que debemos expresar los resultados, ya sea a partir de un dato puntual o un rango como mencionaba anteriormente, en donde se estimaba la zona de aceptación (Acosta, 2011).

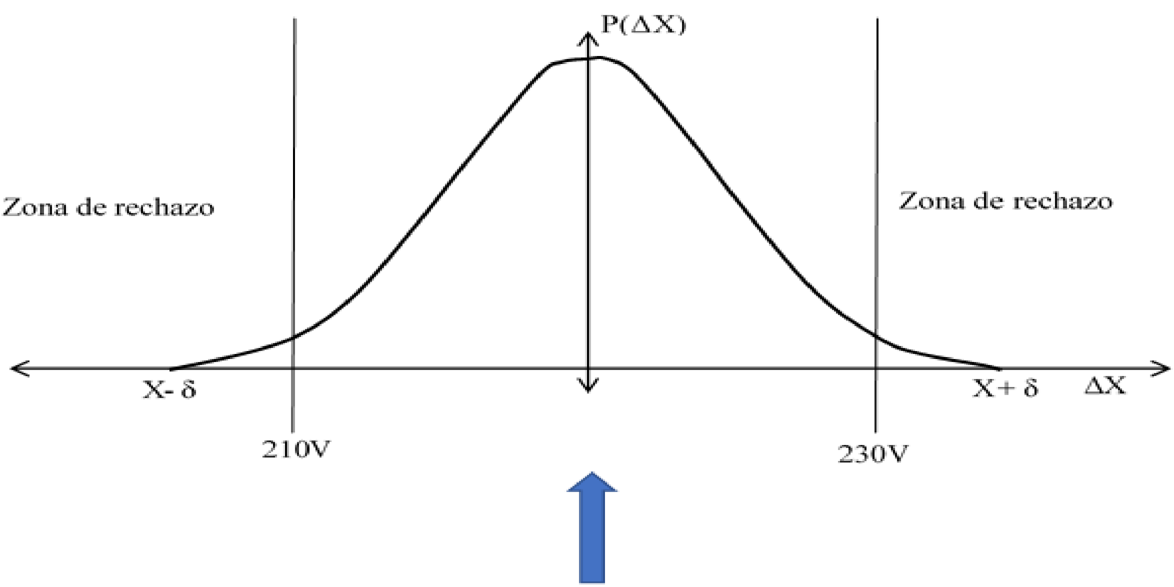
Estimación por intervalo o de Neyman

(Acosta, 2011).

La estimación de Neyman, nos dice que debemos tener en cuenta un rango sobre el cual estará contenido dicho valor real, de aquí se parte para la expresión final de la magnitud medida.

Ejemplo: si tenemos que determinar las protecciones necesarias para evitar una falla por sobre corriente en una subestación, se tendrá que estimar primeramente el rango de operación tanto máximo como mínimo, en el que la subestación opera de forma normal, partiendo de está medida se procede a definir el valor necesario para el cual la protección contra sobre corriente operará de forma correcta evitando así fallas tanto en el sitio como fuera del sitio.

Figura 21: *grafica intervalo de Neyman.*



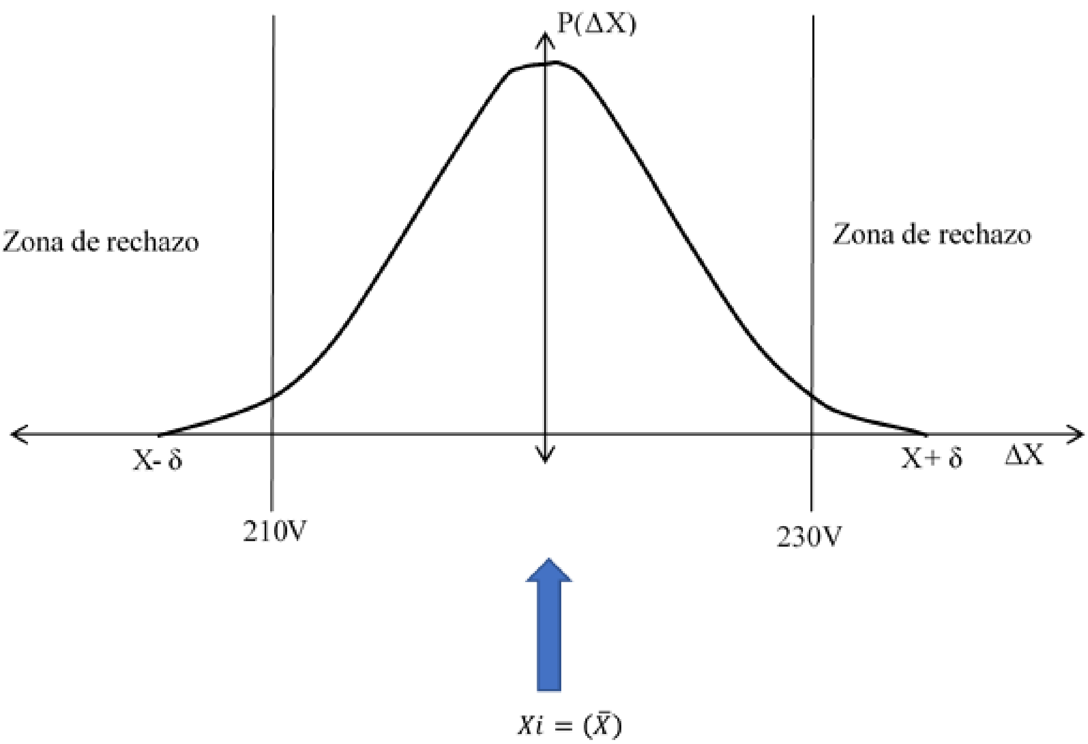
$$Xi = (\bar{X} + \Delta\bar{X}).P(\bar{X})$$
$$Xi = (220V + 10V).P(0.56)$$

En el grafico podemos apreciar el valor medio de la distribución, en la que estará el valor real de la magnitud (220V), más una variación de la medida de 10 Voltios y una probabilidad de 0.56 de que el valor verdadero (que por supuesto no sabemos) este dentro de este rango (Acosta, 2011).

Estimación puntual o de Fisher

Es muy útil cuando solo se quiere conocer el valor central de la distribución normal, dando así una respuesta precisa en la que simplemente es el valor central, si necesitamos una fuente para uso de algún circuito, basta con saber del valor promedio al que trabajará el equipo, de allí solo se selecciona la fuente que provea este valor. Un ejemplo común en el laboratorio es las fuentes de 12 V para instrumento DC, en los que solo es requerido que la fuente provea el valor de 12 voltios al momento de evaluar la salida de dicha fuente vemos que el valor no es exactamente 12 V pero que de alguna manera el fabricante la expresa puntualmente como una fuente de alimentación de con dichas características (Acosta, 2011).

Figura 22: *estimación Fisher*



Basados en la figura 9, al valor para la estimación puntual de Fisher es 220 V

9.7.2.2 Expresión de los resultados en alta precisión

A partir de las teorías estadísticas, nace la premisa de que siempre el valor real de una medición será la media de los resultados tomados agregando la variación de dicha medida:

$$X = \bar{X} \pm \delta$$

X; resultado final de la medición.

$\bar{X}$; media aritmética.

δ; desviación típica de los resultados.

Para concluir la unidad:

- El error absoluto de la medición se obtendrá a partir de la distribución normal en la que se estime ya sea mediante solo cálculos o histogramas el error presente y variación del valor verdadero (Acosta, 2011).
- El error relativo es depreciado en esta unidad, debido a que no muestra un dato relevante en las mediciones, en vez de usar éste se realizan los siguientes análisis que con llevan a una expresión de resultados de alta calidad:

1. raíz media cuadrada
2. desviación estándar.
3. error de la media.
4. probabilidad e intervalo de incertidumbre.

10 Análisis de impacto social

10.1 Impacto social para formación en ingeniería eléctrica y carreras afines

Gracias a la creación de entornos cuánticos basados en monografías simplificadas y precisas en la información, estaremos llevando un paso adelante el desarrollo de múltiples profesionales en un terreno en el que será tanto de fácil acceso, como de fácil comprensión para llevar a cabo el tratamiento de errores adecuado para la gestión metrológica en ingeniería eléctrica y carreras afines, además del avance tecnológico que permite llevar a los estudiantes a una mejora en sus habilidades y una mayor eficiencia en sus estudios.

10.2 Impacto en la diversidad cultural

Mediante la creación de entornos cuánticos en el sistema MEI podemos brindar un acceso libre además de fomentar el desarrollo de conocimientos en el área y afianzar la base en teoría de errores para la gestión metrológica.

10.3 Impacto a nivel profesional y científico

Nuestro aporte va a permitir que cualquier ingeniero que requiera analizar efectivamente una serie de datos, logre sus objetivos de una forma didáctica gracias a los entornos de sitios cuánticos creados, además de poder tener un acceso directo que le permitirá obtener todo en un solo lugar, en cuanto al terreno científico, estaremos dando un paso adelante en la era digital para el acceso a la información.

10.4 Impacto Económico

Mediante un análisis económico, se pudo apreciar que se estaría generando un ahorro significativo para cualquier estudiante que requiera de esta área en su vida profesional y laboral.

Figura 23: *impacto económico*

	Costos de un libro	
	Libro digital	Libro impreso
Transporte	0	50000 o más
Valor de libro	128.000	144.800
Total	**128.000**	**194.800**

Nota: información tomada de (Félix Cernuschi, 2021), (Icontec, 2021)

11 Resultados

Se cumplieron los objetivos 1,2 y 3 pactados para el presente TIG en donde se expresó claramente los procedimientos de estadística y probabilidades el estudio amplio realizada mediante diversas fuentes de información en las que se tomó los más importante abarcando todo lo fundamental y necesario para la formación ingenieril, además de esto se implementa el uso de sitios web como lo es Google sites y plataforma institucional de la universidad de pamplona, Moodle.

Se logró estudiar profundamente una parte del sistema de mediciones para ingenieros en la que hacia falta establecer lo más esencial y fundamental de la teoría de errores

Se aprecio que había una amplia brecha de información, en la que no existía un contenido enfocado directamente a la teoría de errores para ingeniería eléctrica y carreras afines.

12 Conclusiones

Los fundamentos en teoría de errores para la gestión metrológica en ingeniería eléctrica y carreras afines, es esencial en la formación en cualquier campo ingenieril

La teoría de errores siempre estará presente como la forma correcta de analizar medidas y propagación de errores, buscando reducirlos, más no eliminarlos.

La estadística y probabilidades no se puede lograr ver como un simple método de aproximación o corrección de dispersión, sirve en general para múltiples aplicaciones en las cuales podemos interactuar con el sistema o medio físico que deseamos saber y comprender su cambio durante el tiempo. Es vital siempre que vaya a requerir medidas precisas que tiendan a una verdad absoluta relativa, ya que, comprendiendo la realidad de la vida, nada es exacto, pero si podemos darle un enfoque coherente.

El sistema de entornos cuánticos, para la gestión de teoría de errores y compendio de información del sistema MEI, no estaba actualizada, gracias a esta nueva y completa versión mejorada, basados en una variedad de fuentes referenciales en las cuales se abarca la amplia brecha que se formaba con el tiempo y el ajuste en las necesidades de la educación en metrología tanta para ingeniería eléctrica como carreras afines gracias a esto podemos brindar un gran aporte para la insuficiencia que comprendía el contenido dado para dicho curso visto desde la universidad y a nivel nacional.

La creación de entornos cuantos basados en Google sites y plataformas como Moodle, permite la fácil transferencia de información gracias a la era digital en la que estamos, actualizando los métodos de estudio y la forma de comprensión para temas tan esenciales en ingeniería.

13 Referencias bibliográficas

Acosta, A. G. (2011). Teoría de errores. (A. G. Acosta, Ed.) *Entornos cuánticos*, *1*, 3. Recuperado el 21 de 10 de 2021, de https://sites.google.com/site/erroresup/

Asimov. (27 de 3 de 2020). Errores en las mediciones. *Errores en las mediciones*. Recuperado el 18 de 10 de 2021, de https://asimov.com.ar/wp-content/uploads/ER-M.pdf

Campuzano, A. V. (2016). Calculo numérico. Cartagena. Recuperado el 18 de 10 de 2021, de https://repositorio.upct.es/bitstream/handle/10317/5377/isbn9788460878674.pdf?sequence=4

Casanova, M. L. (2019). Topografía Plana. En L. C. M., *Mediciones a distancia*. Recuperado el 18 de 10 de 2021, de https://topodata.com/wp-content/uploads/2019/10/4-Topografi%CC%81a-Plana-CAP3.pdf

Corchete, V. (2019). *Análisis de error y tratamiento de datos obtenidos en el laboratorio.* (V. Corchete, Ed.) Recuperado el 22 de 10 de 2021, de https://www.researchgate.net/publication/335692027

Española, r. a. (26 de 10 de 2021). *Diccionario RAE*. Obtenido de https://dle.rae.es/error

Fernández, P. M. (16 de 03 de 2018). Teoría de errores. *Métodos numéricos 1*, 13-16. Recuperado el 23 de 10 de 2021, de https://catedras.facet.unt.edu.ar/mn1/wp-content/uploads/sites/67/2018/03/Teo_Errores_2017.pdf

Honduras, u. n. (2016). *Errores pie de rey, regla y Vernier.* Honduras: universidad autónoma de honduras. Recuperado el 21 de 10 de 2021, de https://wfuentes30.files.wordpress.com/2016/02/guc3ada-2-errores.pdf

Juan, u. n. (27 de 10 de 2016). Medidas Eléctricas. *Departamento de electrónica y automática*. Recuperado el 18 de 10 de 2021, de http://dea.unsj.edu.ar/electrotecnia/U3.pdf

Ramos, D. G. (16 de 8 de 2016). Errores en las investigaciones por muestreo. *Revista faculta de ciencias económicas y sociales*. Recuperado el 18 de 10 de 2021, de http://servicio.bc.uc.edu.ve/faces/revista/a8n16/8-16-2.pdf

Rivera, C. S. (2017). *Breve introducción a la Teoría de errores y la graficación* (primera ed., Vol. 1). (C. S. Rivera, Ed.) Ciudad de México, ciudad de México, México: universidad autónoma de Aguascalientes. Recuperado el 21 de 10 de 2021, de https://editorial.uaa.mx/docs/breve_introduccion_teoria_errores.pdf

Rutherford, E. (19 de 11 de 2018). *frases online.* Obtenido de https://100frases.com/autor/ernest-rutherford

Sánchez, I. (2016). Inferencia Estadística. *Universidad C arlos lll*. Recuperado el 18 de 10 de 2021, de https://www.ugr.es/~jsalinas/apuntes/C12.pdf

Santana, A. B. (2005). Medidas y errores. *Planimetría*, 38-40. Recuperado el 18 de 10 de 2021, de https://bdigital.uniquindio.edu.co/bitstream/handle/001/5932/Capitulo%202%20Errores.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Sevilla, M. J. (1993). Teoría de errores de observación. En M. J. Sevilla, *Física de la tierra* (Vol. 5, págs. 136-138). Madrid, España: Complutense. Recuperado el 21 de 10 de 2021, de https://revistas.ucm.es/index.php/FITE/article/download/FITE9393110133A/12422#:~:text=Se%20establece%20el%20concepto%20de,magnitud%20de%20los%20errores%20cometidos.

Tejero, F. D. (2018). Teoría de Errores. En d. d. agrimensura, *Fundamentos de instrumental.* Recuperado el 22 de 10 de 2021, de http://www.bibliotecacpa.org.ar/greenstone/collect/facagr/index/assoc/HASH01d2.dir/doc.pdf

Universitaria, f. (2016). Medidas longitud y errores. Recuperado el 22 de 10 de 2021, de https://www.upr.edu/humacao/wp-content/uploads/sites/6/2016/09/1st-Part-Experiment-01.pdf

González, P. J. D. E. Introducción a la Teoría de Errores de Medición. Recuperado el 22 de 10 de 2021, de: http://www.fisica.uns.edu.ar/albert/archivos/12/221/2979865071_laboratorio.pdf.

Trejo, J. L. T. Métodos Numéricos Introducción y Teoría de Errores. Recuperado el 22 de 10 de 2021, de: https://www.academia.edu/download/59904128/1.2._Introduccion_y_Teoria_de_Errores-MN_FISI-UNMSM_2019-I20190701-68215-4ov8kw.pdf

Gregori, V. G., & Sala, B. R. (2015). *Errores, optimización y resolución numérica de sistemas*. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia Recuperado el 22 de 10 de 2021, de: http://personales.upv.es/~broig/arxius/Indice-Errores%20optimizaci%C3%B3n%20y%20resoluci%C3%B3n%20num%C3%A9rica%20de%20sistemas.pdf

EE, L. L. (2003). Fe de errores. *Med Clin (Barc)*, *120*(5), 172-4. Recuperado el 22 de 10 de 2021, de: https://vdocuments.es/fe-de-errores-5867e277d8ceb.html

Velarde Zevallos, A. H. (2018). TEXTO: Medición de las principales magnitudes eléctricas con precisión, aplicando la teoría de errores en la utilización de los instrumentos de mediciones eléctricas. Recuperado el 22 de 10 de 2021, de: http://209.45.55.171/bitstream/handle/20.500.12952/3589/Velarde%20Zevallos_informe%20final%20electrica_2018.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Milanés, L. P. THE DIFFERENTIAL CALCULATION AND LASCOTES OF ERRORS IN INDIRECT MEASUREMENTS, IN THE EXPERIMENTAL WORK OF GENERAL PHYSICS. Recuperado el 22 de 10 de 2021, de:

https://scholar.archive.org/work/2bzzuks63nasdowsfgru5ggdji/access/wayback/http://opuntiabrava.ult.edu.cu/index.php/opuntiabrava/article/download/117/112/

Anci WebStore. (2021). *Ansi Web store standares de calidad*. Obtenido de https://webstore.ansi.org/Standards/ISO/ISOTS191272005

Colombia, C. d. (2021). *Funcion publica gobierno de colombia*. Obtenido de Funcion publica gobierno de colombia: https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma.php?i=49981

CTN28, C. (2021). *Normalización Española.* Obtenido de Normalización Española: https://www.une.org/encuentra-tu-norma/comites-tecnicos-de-normalizacion/comite?c=CTN%2028

Icontec. (2021). *Exactitud veracidad en metodos de medición*. Obtenido de Exactitud veracidad en metodos de medición: https://tienda.icontec.org/gp-exactitud--veracidad-y-precision--de-metodos-de-medicion-y-resultados-parte-2-metodo-basico-para-la-determinacion-de-repetibilidad-y-reproducibilidad-en-un-metodo-normalizado-de-medicion-ntc3529-2-1999.html

Anexos

Link video entorno cuántico mediante el uso de Google sites:

https://youtu.be/EsUW40hl4Ig

Link entorno cuántico Google sites para acceso a la información:

https://sites.google.com/view/teoria-de-errores-omar-caldern/p%C3%A1gina-principal

Link video entorno cuántico mediante el uso de la plataforma institucional Moodle:

https://youtu.be/AK1d1Cx2YKw

Link entorno cuántico en plataforma institucional Moodle:

https://vtaone.ciadti.co/course/view.php?id=312&section=5