



Universidad de Pamplona
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Programa Ingeniería Mecánica



PRÁCTICAS DOCENTE COMO MODALIDAD DE TESIS DE GRADO EN LA ASIGNATURA ESTÁTICA (168231)

Autor

MARLON POVEDA PACHÓN

Director

WILLIAM JAVIER MORA ESPINOSA

Codirector

GONZALO GUILLERMO MORENO CONTRERAS

PROGRAMA DE INGENIERÍA MECÁNICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA, MECATRÓNICA E INDUSTRIAL

FACULTAD DE INGENIERÍAS Y ARQUITECTURAS

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

PAMPLONA, diciembre 16 de 2019



TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO DE LA ASIGNATURA	3
JUSTIFICACIÓN	5
OBJETIVOS	5
OBJETIVO GENERAL	5
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	5
METODOLOGÍA	5
SISTEMA DE EVALUACIÓN	5
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	6



TABLA DE CONTENIDO ESTÁTICA

INTRODUCCIÓN A MECÁNICA VECTORIAL

UNIDAD 1

ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

FUERZAS EN EL PLANO

FUERZAS EN EL ESPACIO

UNIDAD 2

CUERPOS RÍGIDOS, SISTEMAS DE FUERZAS EQUIVALENTES

EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

MOMENTO CON RESPECTO A UN PUNTO

MOMENTO CON RESPECTO A UN EJE

REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UN PAR

REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE TORSIÓN SISTEMA DE EVALUACIÓN

NOTA: FINALIZACIÓN DEL PRIMER CORTE, VER CARPETA PRIMER_CORTE_TOTAL

UNIDAD 3

REACCIONES EN APOYOS BIDIMENSIONALES

REACCIONES EN APOYOS TRIDIMENSIONALES

UNIDAD 4

FUERZAS DISTRIBUIDAS, CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD

DETERMINACIÓN DE CENTROIDES POR INTEGRACIÓN

DETERMINACIÓN DE CENTROIDES DE ÁREAS COMPUESTAS

FUERZAS SOBRE SUPERFICIES DISTRIBUIDAS

CENTROS DE MASA DE SÓLIDOS POR REVOLUCIÓN

NOTA: FINALIZACIÓN DEL SEGUNDO CORTE, VER CARPETA SEGUNDO_CORTE_TOTAL



Universidad de Pamplona
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Programa Ingeniería Mecánica



UNIDAD 5
ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS
ARMADURA

UNIDAD 6
VIGAS
DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE
DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR
DIAGRAMA PARA CARGAS PUNTUALES
DIAGRAMA PARA CARGAS DISTRIBUIDAS
DIAGRAMA PARA CARGAS COMBINADAS

NOTA: FINALIZACIÓN DEL TERCER CORTE, VER CARPETA TERCER_CORTE_TOTAL



JUSTIFICACIÓN

La Estática es un área fundamental en la Ingeniería. El curso de Estática se basa en los conceptos de la Física y estudia las condiciones bajo las cuales los sistemas mecánicos están en equilibrio. Sus conceptos y métodos son útiles para cursos posteriores y para la Ingeniería en la práctica.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar en el estudiante de Ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma sencilla y lógica y la capacidad de aplicar en la solución de algunos principios básicos de la Mecánica Vectorial.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Aplicar el criterio del equilibrio de una partícula a problemas prácticos en los que intervienen fuerzas concurrentes mediante la utilización de vectores.
- Analizar el efecto de las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido y aprender a sustituir un sistema de fuerzas por un sistema equivalente más simple.
- Utilizar diagramas de sólido libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia entre los sistemas de fuerzas o entre los sistemas vectoriales.
- Determinar las fuerzas desconocidas que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas sobre éste por sus puntos de apoyo.

METODOLOGÍA

El profesor impartirá los conocimientos teóricos mediante clase magistral y se complementan con ejercicios prácticos. El estudiante previamente estudiará el tema a tratar en clase en la cual se aclararán las inquietudes y posteriormente se realizarán ejercicios de aplicación en grupo.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

Según el Reglamento Académico



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- **BEER Ferdinand P. And JHONSTON E. Russell Jr.** Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática. Mc Graw Hill.
- **HIBBELER Russell Charles.** Ingeniería Mecánica. Estática. Prentice Hall.
- **SANDOR Bela I.** Ingeniería Mecánica. Estática. Mc Graw Hill.
- **HUANG T.C.** Mecánica para Ingenieros. Tomo I. Estática. Fondo Educativo Interamericano S.A.
- **BEDFORD Anthony y FOWLER Wallace.** Mecánica para Ingeniería: Estática. Addison Wesley.
- **BORESI Arthur y Schmidt Richard.** Ingeniería Mecánica: Estática. Editorial Thomson.

UNIDAD N 1

ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

CLASE 1 y 2: REPASO, FUERZAS EN UN PLANO

- Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.
- RESUMEN

Resultante de dos fuerzas

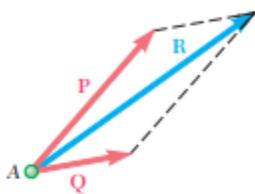


Figura 2.35

Componentes de una fuerza

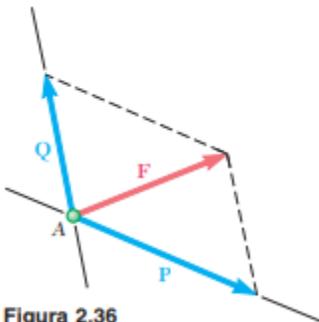


Figura 2.36

Componentes rectangulares. Vectores unitarios

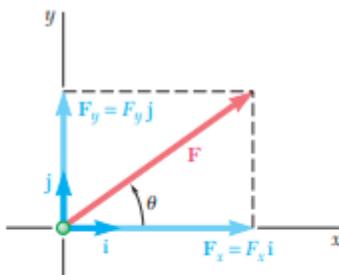


Figura 2.37

Resultantes de varias fuerzas coplanares

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas sobre partículas, es decir, sobre cuerpos de forma y tamaño tales que todas las fuerzas que actúan sobre ellos se puede suponer que se aplican en el mismo punto.

Las fuerzas son *cantidades vectoriales* que se caracterizan por un *punto de aplicación*, una *magnitud* y una *dirección*, y se suman de acuerdo con la *ley del paralelogramo* (figura 2.35). La magnitud y dirección de la resultante **R** de dos fuerzas **P** y **Q** se pueden determinar ya sea gráficamente o por trigonometría, utilizando sucesivamente la ley de los cosenos y la ley de los senos (problema resuelto 2.1).

Cualquier fuerza dada que actúe sobre una partícula puede descomponerse en dos o más *componentes*, es decir, se puede reemplazar por dos o más fuerzas que tengan el mismo efecto sobre la partícula. Se puede descomponer una fuerza **F** en dos componentes **P** y **Q** al dibujar un paralelogramo que tenga a **F** por su diagonal; entonces, las componentes **P** y **Q** son representadas por los dos lados adyacentes del paralelogramo (figura 2.36) y se pueden determinar ya sea en gráficas o por trigonometría (sección 2.6).

Se dice que una fuerza **F** se ha dividido en dos *componentes rectangulares* si sus componentes **F_x** y **F_y** son perpendiculares entre sí y se dirigen a lo largo de los ejes coordenados (figura 2.37). Al introducir los *vectores unitarios i* y *j* a lo largo de los ejes *x* y *y*, respectivamente, se escribe (sección 2.7)

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

y

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

donde *F_x* y *F_y* son las *componentes escalares* de **F**. Estas componentes, que pueden ser positivas o negativas, se definen por las relaciones

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Cuando se dan las componentes rectangulares *F_x* y *F_y* de una fuerza **F**, el ángulo θ que define la dirección de la fuerza se puede obtener al escribir

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

La magnitud *F* de la fuerza se puede obtener al resolver una de las ecuaciones (2.8) o al aplicar el teorema de Pitágoras y escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Cuando *tres o más fuerzas coplanares* actúan sobre una partícula, las componentes rectangulares de su resultante **R** se pueden

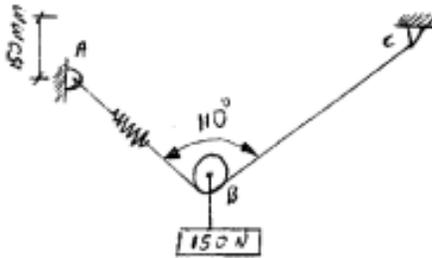
obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (sección 2.8). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.13)$$

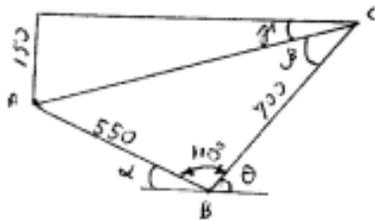
La magnitud y dirección de \mathbf{R} se pueden determinar entonces por relaciones similares a las ecuaciones (2.9) y (2.10) (problema resuelto 2.3).

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
Algebra de Vectores	<p>Presentación de conceptos.</p> <p>Manejo de funciones trigonométricas.</p> <p>Concepto sobre poleas y resortes.</p> <p>Ley del seno y del coseno.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 1, ANEXO 2).</p>	1	<p>Lectura sobre conversión de unidades.</p> <p>Lectura sobre método para la solución de problemas.</p>	2	1	Evaluación de los conceptos (QUIZ 1).
Fuerzas en el Plano	<p>Presentación de conceptos sobre fuerzas en un plano.</p> <p>Fuerza sobre una partícula.</p> <p>Resultante de dos fuerzas.</p> <p>Adición o suma de vectores (Ley del paralelogramo o Regla del triángulo).</p> <p>Descomposición de una o más fuerzas en sus componentes rectangulares.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 3, ANEXO 4, ANEXO 5, ANEXO 6).</p>	1	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Lectura sobre estática de partículas en 2D.</p>	2	1	Evaluación de los conceptos (QUIZ 1).

REPASO



Hallar la T_{BC} y F_R si
 $AB = 550 \text{ mm}$
 $BC = 700 \text{ mm}$



Por ley del coseno

$$AC^2 = 550^2 + 700^2 - 2 \cdot 550 \cdot 700 \cos 110^\circ$$

$$AC = 1027,5483 \text{ mm}$$

Aplicando ley del seno

$$\frac{\sin \beta}{550} = \frac{\sin 110}{AC} \Rightarrow \beta = 30,197^\circ$$

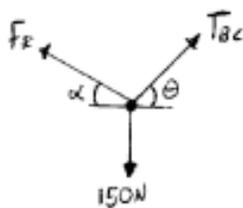
$$\sin \gamma = \frac{150}{AC}$$

$$\gamma = 8,4^\circ$$

$$\therefore \theta = \beta + \gamma = 38,597^\circ$$

$$\alpha = 180 - \theta - 110 = 31,403^\circ$$

Aplicando ΣF en B



$$\Sigma F_y = 0$$

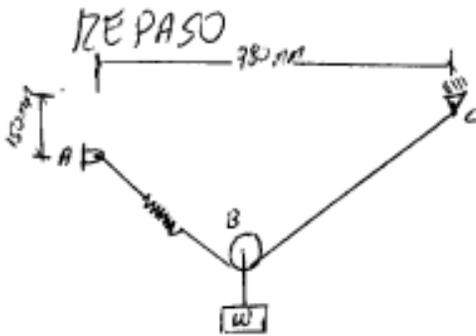
$$T_{BC} \sin 38,597 + F_R \sin 31,403 = 150$$

$$\Sigma F_x = 0$$

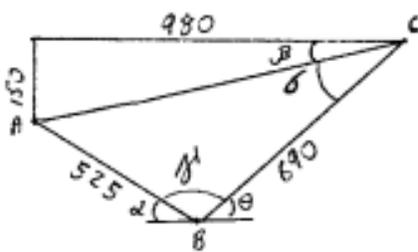
$$T_{BC} \cos 38,597 - F_R \cos 31,403 = 0$$

$$T_{BC} = 136,245 \text{ N} \quad \checkmark$$

$$F_R = 124,756 \text{ N} \quad \checkmark$$



El resorte AB de $K=1580 \text{ N/m}$, inicialmente mide 500 mm , si al colgar un peso W se estira hasta medir 525 mm . Determine la T_{BC} y W si la longitud BC es 690 mm .



$$\tan \beta = \frac{150}{980} \Rightarrow \beta = 8,7^\circ$$

$$AC^2 = 980^2 + 150^2 \Rightarrow AC = 991,4131 \text{ mm}$$

Por ley del coseno

$$AC^2 = 525^2 + 690^2 - 2 \cdot 525 \cdot 690 \cdot \cos \gamma$$

$$\gamma = 108,607^\circ$$

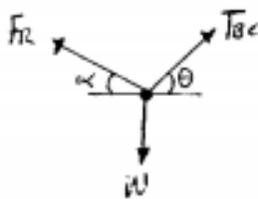
Por ley del seno

$$\frac{\sin \sigma}{525} = \frac{\sin \gamma}{AC} \Rightarrow \sigma = 30,1235^\circ$$

$$\therefore \theta = \beta + \sigma \Rightarrow \theta = 38,8235^\circ$$

$$\alpha = 32,5695^\circ$$

Aplicando ΣF en B.



$$F_R = K \Delta x$$

$$F_R = 1580 \frac{\text{N}}{\text{m}} [0,525 \text{ m} - 0,5 \text{ m}]$$

$$F_R = 39,5 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_{BC} \cos 38,8235^\circ - F_R \cos 32,5695^\circ = 0$$

$$T_{BC} = 42,7275 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

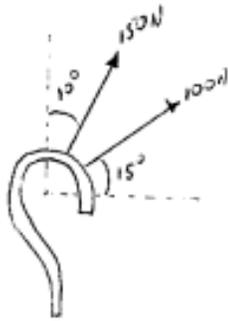
$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_R \sin 32,5695^\circ + T_{BC} \sin 38,8235^\circ = W$$

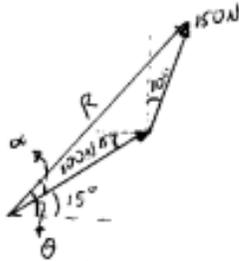
$$W = 48,05 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Estática de Partículas 2D

ej.



Determinar la Resultante de las dos fuerzas y su dirección.



Aplicando la ley del triángulo

Aplicando ley del coseno

$$R^2 = 100^2 + 150^2 - 2 \cdot 100 \cdot 150 \cdot \cos 115$$

$$R = 212,5524 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Aplicando ley del seno

$$\frac{\sin \alpha}{150} = \frac{\sin 115}{R}$$

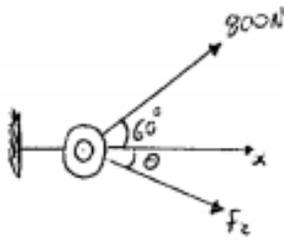
$$\alpha = 39,7611^\circ$$

Pero como la dirección de la resultante es θ

$$\theta = 15^\circ + \alpha$$

$$\theta = 54,7611^\circ$$

Estática de Partículas. 2D



Determine una ecuación para la F_2 en función de su dirección, si la resultante solo tiene componente en el eje x .
Determine la F_2 mínima y la Resultante.



Por ley del seno

$$\frac{\text{sen } \theta}{800} = \frac{\text{sen } 60}{F_2}$$

$$F_2 = \frac{800 \text{ sen } 60}{\text{sen } \theta} \quad \text{ec. de } f_2(\theta)$$

Para determinar $F_{2\text{min}}$ $\theta = 90^\circ$

$$\text{si } \theta \begin{cases} 30^\circ \rightarrow F_2 = 1385,64 \text{ N} \\ 60^\circ \rightarrow F_2 = 800 \text{ N} \\ 90^\circ \rightarrow F_2 = 692,82 \text{ N} \end{cases} ; \text{ está es la mínima.}$$



Aplicando ley del coseno

$$R^2 = 800^2 + 692,82^2 - 2 \cdot 800 \cdot 692,82 \cdot \cos 30$$

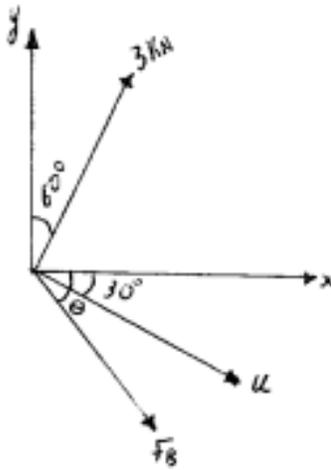
$$R = 400 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

Aplicando Pitágoras

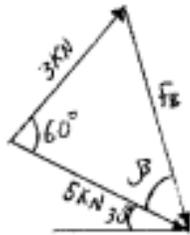
$$R^2 = 800^2 - 692,82^2$$

$$R = 400 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

Estática de Partículas. 2D



Si u está a lo largo del eje x , y su magnitud es de 5 kN, cuál es la magnitud de F_B y su dirección.



Aplicando ley del coseno

$$F_B^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60$$

$$F_B = \sqrt{19} \text{ kN}$$

$$F_B \approx 4,358 \text{ kN} \quad \blacktriangledown$$

Por ley del seno

$$\frac{\sin \beta}{3} = \frac{\sin 60}{F_B}$$

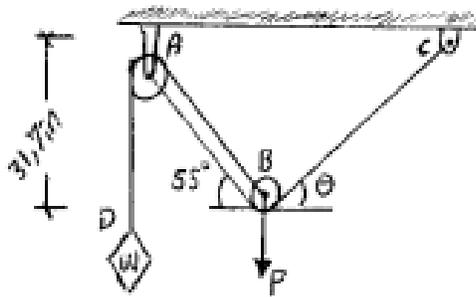
$$\beta = 36,586^\circ$$

$$\theta = 30^\circ + \beta$$

$$\theta = 66,586^\circ \quad \blacktriangledown$$

Estática de Partículas 2D

Determine la T_{ABC} y la carga P , si la distancia $\bar{cB} = 75 \text{ in}$ y $w = 80 \text{ kg}$



$$\text{sen } \theta = \frac{31,7}{75}$$

$$\theta = 25^\circ$$

DCL en D

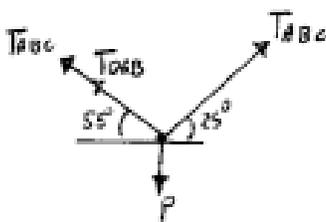


$$\sum F_y = 0$$

$$T_{DAB} - 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 0$$

$$T_{DAB} = 784,8 \text{ N}$$

DCL en B



$$\sum F_x = 0$$

$$-T_{DAB} \cos 55^\circ + T_{ABC} (\cos 25^\circ - \cos 55^\circ) = 0$$

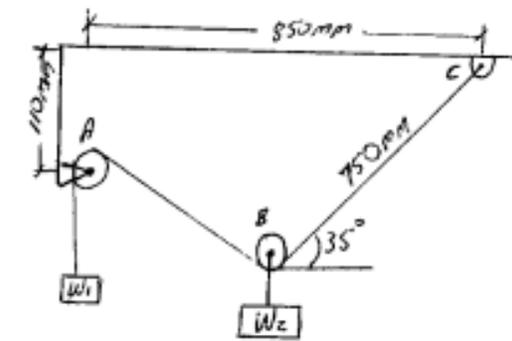
$$T_{ABC} = 1352,8715 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

$$\sum F_y = 0$$

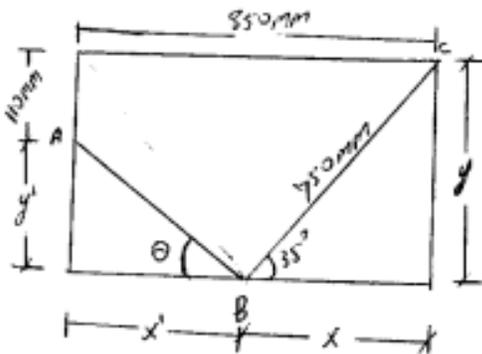
$$T_{ABC} (\sin 25^\circ + \sin 55^\circ) + T_{DAB} \sin 55^\circ = P$$

$$P = 2322,826 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

QUIZ 1



Determinar la T_{ABC} y W_1 , si $W_2 = 250N$



$$x = 750 \cos 35 \quad y = 750 \sin 35$$

$$x = 614,364 \text{ mm} \quad y = 430,1923 \text{ mm}$$

$$x' = 850 - x \quad y' = y - 110$$

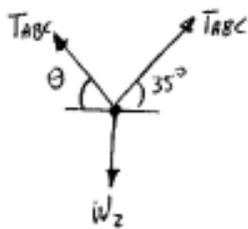
$$x' = 235,636 \text{ mm} \quad y' = 320,1923 \text{ mm}$$

$$\tan \theta = \frac{y'}{x'} \Rightarrow \theta = 53,65^\circ$$

DCL en W_1

$$\sum F_y = 0 \quad T_{ABC} = W_1$$

DCL en B



$$\sum F_y = 0$$

$$T_{ABC} (\sin 35 + \sin 53,65) = W_2$$

$$T_{ABC} = 181,3 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

$$W_1 = 181,3 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

UNIDAD N 1

ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

CLASE 3: FUERZAS EN EL ESPACIO

- Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.

RESUMEN

La magnitud y dirección de \mathbf{R} se pueden determinar entonces por relaciones similares a las ecuaciones (2.9) y (2.10) (problema resuelto 2.3).

Una fuerza \mathbf{F} en un espacio tridimensional se puede descomponer en componentes rectangulares F_x , F_y y F_z (sección 2.12). Al simbolizar por medio de θ_x , θ_y y θ_z , respectivamente, los ángulos que \mathbf{F} forma con los ejes x , y y z (figura 2.38), se tiene

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Fuerzas en el espacio

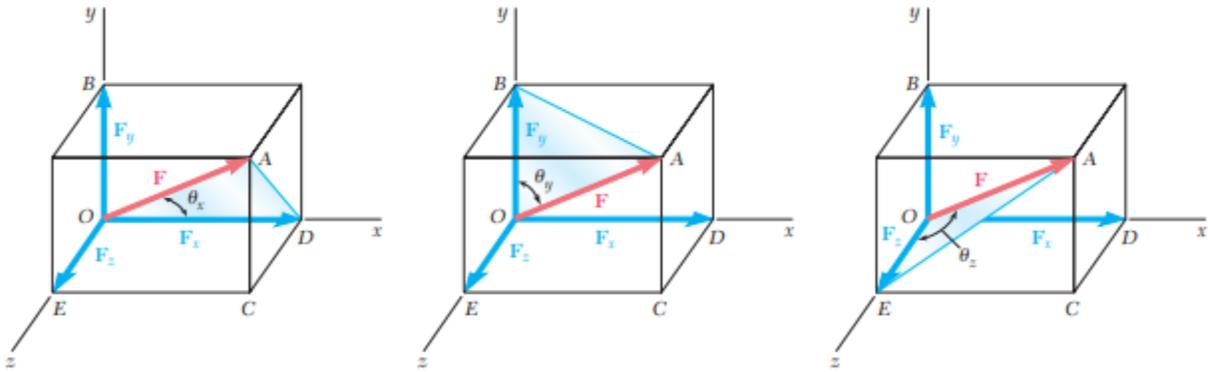


Figura 2.38

a)

b)

c)

Los cosenos de θ_x , θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* (direccionales) de la fuerza \mathbf{F} . Con la introducción de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

o

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

lo que demuestra (figura 2.39) que \mathbf{F} es el producto de su magnitud F y del vector unitario

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

Puesto que la magnitud de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a la unidad, se tiene que

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

Cuando las componentes rectangulares F_x , F_y y F_z de una fuerza \mathbf{F} se proporcionan, la magnitud F de la fuerza se encuentra al escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

y los cosenos directores de \mathbf{F} se obtienen a partir de las ecuaciones (2.19). Se tiene

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

Cuando una fuerza \mathbf{F} se define en un espacio tridimensional por medio de su magnitud F y de dos puntos M y N sobre su línea

Cosenos directores

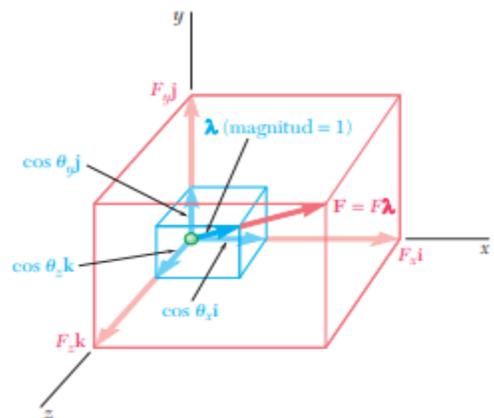


Figura 2.39

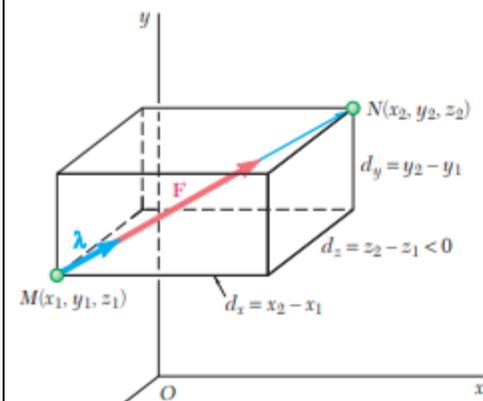


Figura 2.40

Resultante de fuerzas en el espacio

Equilibrio de una partícula

Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio en el espacio

de acción (sección 2.13), sus componentes rectangulares se pueden obtener de la siguiente manera: primero se expresa el vector \overline{MN} que une los puntos M y N en términos de sus componentes d_x , d_y y d_z (figura 2.40); se escribe

$$\overline{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} al dividir \overline{MN} entre su magnitud $MN = d$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overline{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Recordando que \mathbf{F} es igual al producto de F y $\boldsymbol{\lambda}$, se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de lo cual se desprende (problemas resueltos 2.7 y 2.8) que las componentes escalares de \mathbf{F} son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Cuando *dos o más fuerzas* actúan sobre una partícula en el *espacio tridimensional*, las componentes rectangulares de su resultante \mathbf{R} se pueden obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas (sección 2.14). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

La magnitud y dirección de \mathbf{R} se pueden determinar entonces a partir de relaciones similares a las ecuaciones (2.18) y (2.25) (véase problema resuelto 2.8).

Se dice que una partícula está en *equilibrio* cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero (sección 2.9). La partícula entonces permanecerá en reposo (si originalmente se encuentra en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si se encontraba originalmente en movimiento) (sección 2.10).

Para resolver un problema que se refiera a una partícula en equilibrio, primero se deberá dibujar un *diagrama de cuerpo libre* de la partícula que muestre todas las fuerzas que actúan sobre ella (sección 2.11). Si *sólo actúan tres fuerzas coplanares* sobre la partícula, se puede dibujar un *triángulo de fuerzas* para expresar que la partícula se encuentra en equilibrio. Este triángulo se puede resolver gráficamente o por trigonometría para no más de dos incógnitas (véase problema resuelto 2.4). Si se incluyen *más de tres fuerzas coplanares*, se deberán utilizar y resolver las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

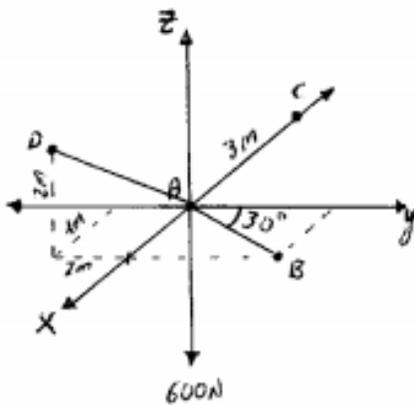
Cuando una partícula está en *equilibrio en el espacio tridimensional* (sección 2.15), deberán usarse y resolverse las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.9).

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
Fuerzas en el espacio	Presentación de conceptos sobre fuerzas en el espacio. Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio. Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción. Equilibrio de una partícula en el espacio. Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 7 , ANEXO 8 , ANEXO 9)	2	Lectura sobre lo visto en clase. Lectura sobre estática de partículas en 3D.	4	2	Evaluación de los conceptos (TALLER).

Fuerzas en el espacio



Determinar las tensiones en las cuerdas. Tener en cuenta que la longitud de las cuerdas es la misma para las 3.

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} [\sin 30^\circ \hat{i} + \cos 30^\circ \hat{j}]$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{3} [-3\hat{z}]$$

$$\vec{T}_{AD} = \frac{T_{AD}}{3} [1\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}]$$

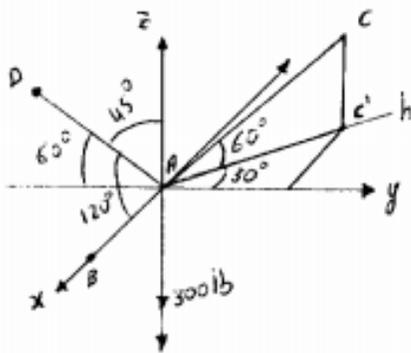
$$\sum F_x = 0 \quad \frac{1}{2}T_{AB} - T_{AC} + \frac{1}{3}T_{AD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}T_{AB} - \frac{2}{3}T_{AD} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad \frac{2}{3}T_{AD} = 600$$

$$\begin{aligned} \therefore T_{AD} &= 900 \text{ N} \\ T_{AC} &= 646,41 \text{ N} \\ T_{AB} &= 692,82 \text{ N} \end{aligned}$$

Fuerzas en el espacio



Determinar las tensiones en las cuerdas, por cosenos directores.

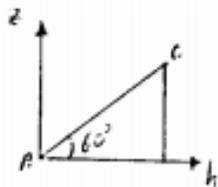
$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \hat{i}$$

$$\vec{T}_{AD} = T_{AD} [\cos 120^\circ \hat{i} - \cos 60^\circ \hat{j} + \cos 45^\circ \hat{k}]$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} [-\cos 60^\circ \cos 30^\circ \hat{i} + \cos 60^\circ \sin 30^\circ \hat{j} + \sin 60^\circ \hat{k}]$$

Para la T_{AC}

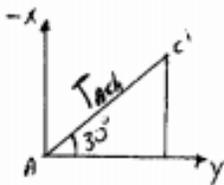
Plano zh



$$T_{ACz} = T_{AC} \sin 60^\circ$$

$$T_{Ach} = T_{AC} \cos 60^\circ$$

Plano xy



$$T_{ACx} = -T_{Ach} \cos 30^\circ = -T_{AC} \cos 60^\circ \cos 30^\circ$$

$$T_{ACy} = T_{Ach} \sin 30^\circ = T_{AC} \cos 60^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sum F_x = 0 \quad T_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{4} T_{AC} - \frac{T_{AD}}{2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{T_{AC}}{4} - \frac{T_{AD}}{2} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} T_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{AD} = 300$$

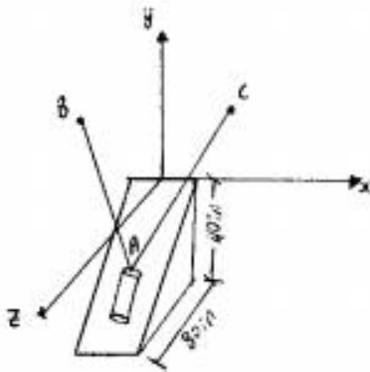
Solucionando el sistema 3x3

$$T_{AB} = 168,017 \text{ lb}$$

$$T_{AC} = 245,9865 \text{ lb}$$

$$T_{AD} = 123 \text{ lb.}$$

Fuerzas en el espacio



Determine la tensión en cada cuerda T_{AB} y T_{AC} , si la posición de los puntos son $A(0, -20, 40)$ in; $B(-40, 50, 0)$ in; $C(45, 40, 0)$ in. Suponga que no hay fricción en la rampa, y esta ejerce una fuerza normal al cilindro ($w=200$ lb).

Para determinar la \vec{N}



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 26,565^\circ$$

$$\alpha = 63,435^\circ$$

$$\vec{N} = N[\sin\alpha\hat{j} + \cos\alpha\hat{k}]$$

$$\vec{N} = N[\sin 63,435\hat{j} + \cos 63,435\hat{k}]$$

$$\vec{T}_{AB} = \frac{T_{AB}}{90}[-40\hat{i} + 70\hat{j} - 40\hat{k}]$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{85}[45\hat{i} + 60\hat{j} - 40\hat{k}]$$

$$\sum F_x = 0 \quad -\frac{4}{9}T_{AB} + \frac{9}{17}T_{AC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{7}{9}T_{AB} + \frac{12}{17}T_{AC} + N\sin 63,435 = 200$$

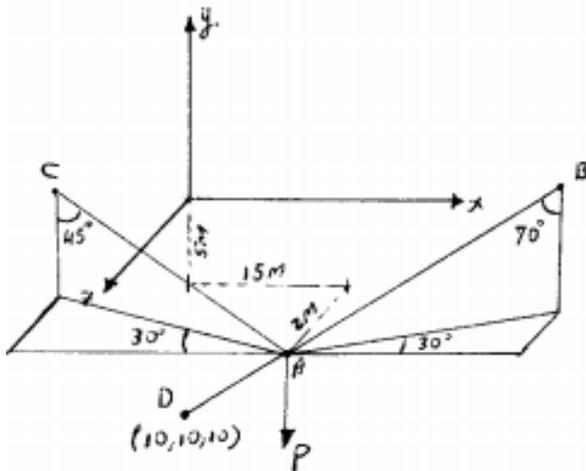
$$\sum F_z = 0 \quad -\frac{4}{9}T_{AB} - \frac{8}{17}T_{AC} + N\cos 63,435 = 0$$

$$T_{AB} = 65,587 \text{ lb} \quad \leftarrow$$

$$T_{AC} = 55,06 \text{ lb} \quad \leftarrow$$

$$N = 123,12 \text{ lb} \quad \leftarrow$$

TALLER FUERZAS EN EL ESPACIO.



Determine la fuerza en los elementos AB, AC y AD. Si la fuerza P es de 1600N.

$$A[15, -5, 2]$$

$$D[10, 10, 10]$$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} [\sin 70 \cos 30 \hat{i} + \cos 70 \hat{j} - \sin 70 \sin 30 \hat{k}]$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} [-\cos 45 \cos 30 \hat{i} + \sin 45 \hat{j} - \cos 45 \sin 30 \hat{k}]$$

$$\vec{T}_{AD} = \frac{T_{AD}}{\sqrt{314}} [-5 \hat{i} + 15 \hat{j} + 8 \hat{k}]$$

$$\sum F_x = 0 \quad \sin 70 \cos 30 T_{AB} - \frac{\sqrt{6}}{4} T_{AC} - \frac{5}{\sqrt{314}} T_{AD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \cos 70 T_{AB} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{AC} + \frac{15}{\sqrt{314}} T_{AD} = 1600$$

$$\sum F_z = 0 \quad \sin 70 \sin 30 T_{AB} - \frac{\sqrt{2}}{4} T_{AC} + \frac{8}{\sqrt{314}} T_{AD} = 0$$

$$T_{AB} = 1248,33 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 1658,937 \text{ N}$$

$$T_{AD} = 0$$

- Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.

○ RESUMEN

Principio de transmisibilidad

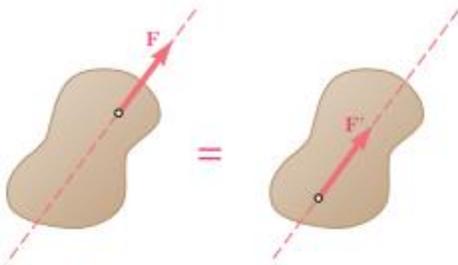


Figura 3.48

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas *externas* e *internas* [sección 3.2] y se vio que, de acuerdo con el *principio de transmisibilidad*, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción [sección 3.3]. En otras palabras, dos fuerzas \mathbf{F} y \mathbf{F}' , que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.48). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

Producto vectorial de dos vectores

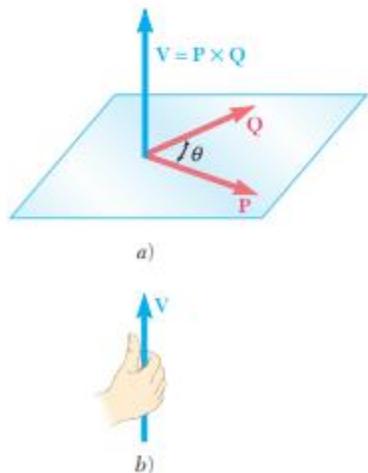


Figura 3.49

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* [sección 3.4]. El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a \mathbf{P} y a \mathbf{Q} (figura 3.49), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \text{ sen } \theta \quad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la parte terminal de \mathbf{V} verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector \mathbf{P} colineal con el vector \mathbf{Q} como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{V} —considerados en ese orden— forman una *triada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

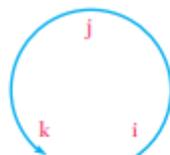


Figura 3.50

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Las componentes rectangulares del producto vectorial \mathbf{V} de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} fueron expresadas como sigue [sección 3.5]:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un punto O se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.51). Si se representa con θ el ángulo entre las líneas de acción de \mathbf{r} y \mathbf{F} , se encontró que la magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de \mathbf{F} .

Las componentes rectangulares del momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F} se expresaron [sección 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde x , y y z son las componentes del vector de posición \mathbf{r} (figura 3.52). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

En el caso más general del momento de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B , se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

Componentes rectangulares del producto vectorial

Momento de una fuerza con respecto a un punto

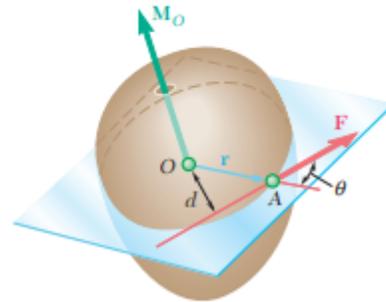


Figura 3.51

Componentes rectangulares del momento

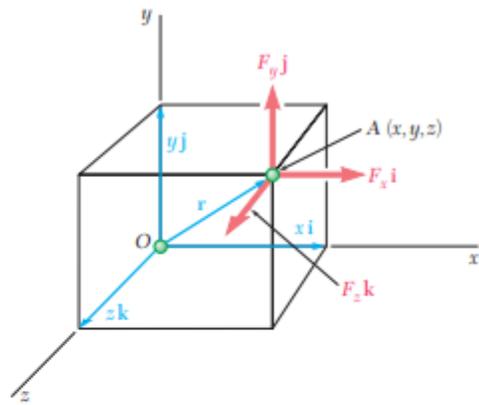


Figura 3.52

En el caso de *problemas que involucran únicamente a dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza \mathbf{F} se encuentra en el plano xy . Su momento \mathbf{M}_B con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

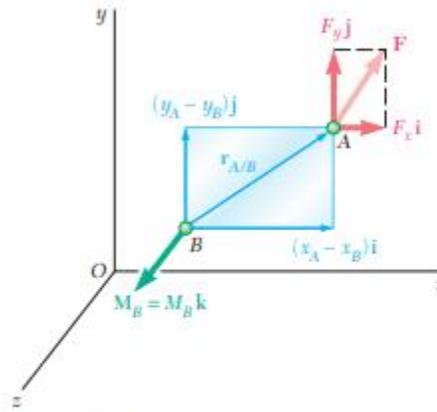


Figura 3.53

Producto escalar de dos vectores

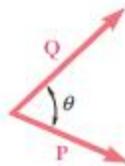


Figura 3.54

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

El *producto escalar* de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.9] se denotó por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura 3.54). Se expresó el producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

La *proyección de un vector P sobre un eje OL* (figura 3.55) se puede obtener formando el producto escalar de \mathbf{P} y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL . Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (3.36)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje OL con los ejes coordenados.

El *producto triple escalar* de los tres vectores \mathbf{S} , \mathbf{P} y \mathbf{Q} se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de \mathbf{S} con el producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.10]. Se mostró que

Proyección de un vector sobre un eje

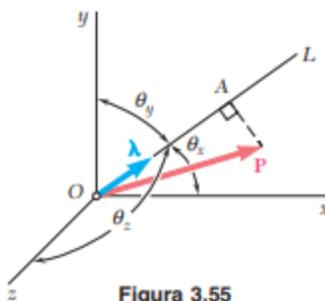


Figura 3.55

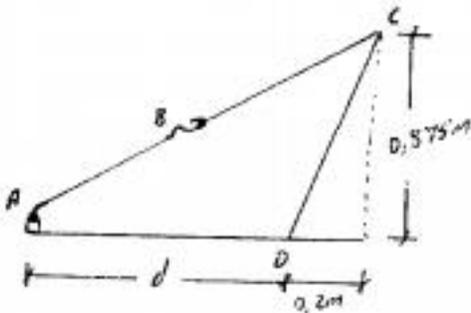
Producto triple escalar de tres vectores

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

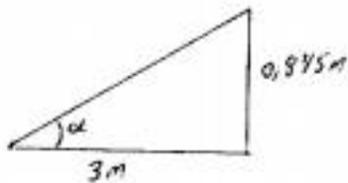
donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
<p>Equilibrio en dos dimensiones.</p> <p>Equilibrio en tres dimensiones.</p> <p>Momento con respecto a un punto.</p>	<p>Presentación de conceptos básicos sobre sistemas equivalentes de fuerza.</p> <p>Principio de transmisibilidad.</p> <p>Fuerzas equivalentes.</p> <p>Producto vectorial de dos vectores.</p> <p>Productos vectoriales expresados en términos de componentes rectangulares.</p> <p>Momento con respecto a un punto.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 10, ANEXO 11)</p>	4	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Lectura sobre sistemas equivalentes de fuerza.</p> <p>Lectura del Teorema de Varignon.</p> <p>Componentes rectangulares del momento de una fuerza.</p> <p>Producto escalar de dos vectores.</p>	8	2	Evaluación de los conceptos

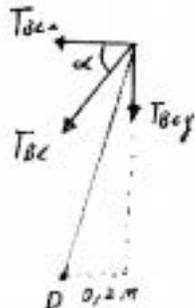
Momento con respecto a un punto



Determinar la T_{BC} si se sabe que se genera un momento alrededor de D de 960 Nm. $d = 2,8$ m.



$$\tan \alpha = \frac{0,875}{3} \Rightarrow \alpha = 16,2602^\circ$$



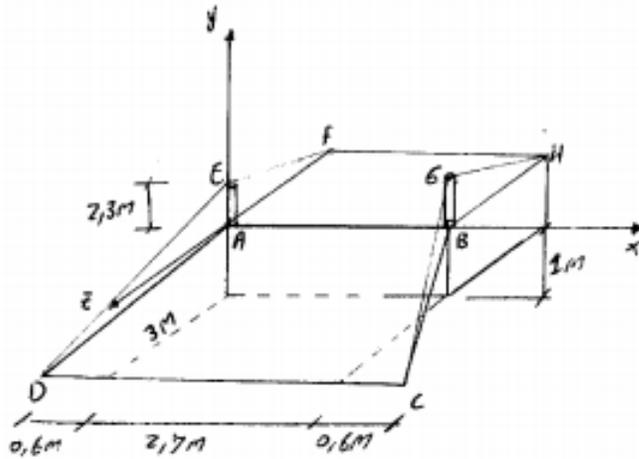
$$\sum M_D = 0$$

$$T_{BCx} \cdot 0,875 - T_{Bcy} \cdot 0,2 = 960$$

$$T_{BC} \cos \alpha \cdot 0,875 - T_{BC} \sin \alpha \cdot 0,2 = 960$$

$$T_{BC} = 1224,5 \text{ N} \quad \checkmark$$

Momento con respecto a un punto



La rampa se sostiene mediante cables en C y D. Si la tensión es de 810N, en cada uno. Determine el momento que genera el cable D alrededor de A, y el cable C alrededor de A.

Momento que genera el cable D respecto a A.

$$M_A = r_{AD} \times T_{DE}$$

$$r_{AD} = (-0,6\hat{i} - 1\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{T}_{DE} = \frac{810}{4,5} [0,6\hat{i} + 3,3\hat{j} - 3\hat{k}]$$

$$\vec{T}_{DE} = 108\hat{i} + 594\hat{j} - 540\hat{k}$$

$$M_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -0,6 & -1 & 3 \\ 108 & 594 & -540 \end{vmatrix} = [-1242\hat{i} - 248,4\hat{k}] \text{ Nm}$$

Momento que genera el cable C respecto a A.

$$M_A = r_{AC} \times T_{CB}$$

$$r_{AC} = [3,3\hat{i} - 1\hat{j} + 3\hat{k}]$$

$$\vec{T}_{CB} = \frac{810}{4,5} [-0,6\hat{i} + 3,3\hat{j} - 3\hat{k}] = -108\hat{i} + 594\hat{j} - 540\hat{k}$$

$$M_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3,3 & -1 & 3 \\ -108 & 594 & -540 \end{vmatrix} = [-1242\hat{i} + 1458\hat{j} + 1852,2\hat{k}] \text{ Nm.}$$

CLASE 6 Y 7: PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES, MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

- Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.

RESUMEN

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un eje OL [sección 3.11] se definió como la proyección OC sobre OL del momento \mathbf{M}_O de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.56), esto es, se definió como el producto triple escalar del vector unitario λ , el vector de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} :

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

Con el uso de la forma de determinante para el producto triple escalar, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje OL
 $x, y, z =$ componentes de \mathbf{r}
 $F_x, F_y, F_z =$ componentes de \mathbf{F}

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Se dice que *dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* [sección 3.12]. Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector \mathbf{M} perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.57).

Dos pares que tienen el mismo momento \mathbf{M} son *equivalentes*, esto es, dichos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado [sección 3.13]. La suma de dos pares también es un par [sección 3.14] y el momento \mathbf{M} del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 de los pares originales [problema resuelto 3.6]. Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el *vector de par*, igual en magnitud y dirección al momento \mathbf{M} del par [sección 3.15]. Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen O y se puede separar en componentes (figura 3.58).

Momento de una fuerza con respecto a su eje

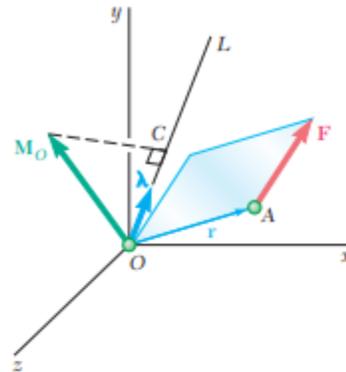


Figura 3.56

Pares

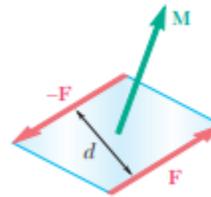


Figura 3.57

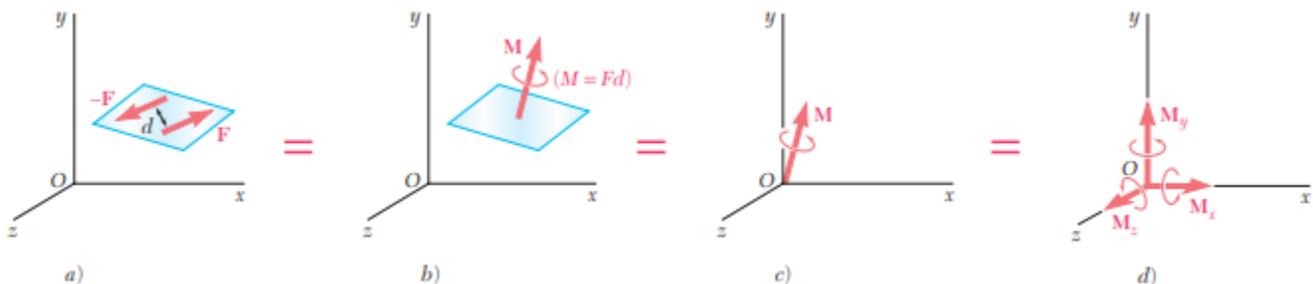
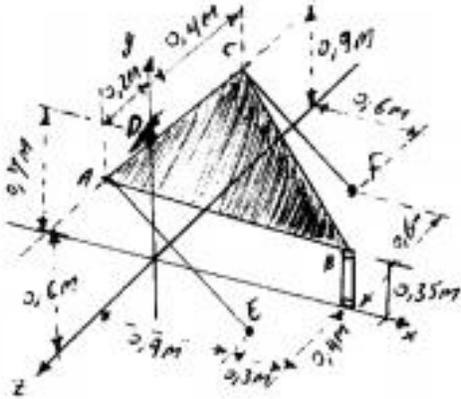


Figura 3.58

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
Momento de una fuerza con respecto a un eje dado.	<p>Presentación de conceptos básicos sobre producto triple mixto de tres vectores.</p> <p>Producto escalar de dos vectores.</p> <p>Producto vectorial de dos vectores.</p> <p>Momento de una fuerza con respecto a un eje dado.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 14, ANEXO 15)</p>	4	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Ejercicio 3.37 propuesto en el libro guía.</p> <p>Ejercicio 3.57 propuesto en el libro guía.</p>	8	2	Evaluación de los conceptos (QUIZ 2).

Momento con respecto a una línea.



La placa triangular se sostiene mediante rodillos en B y D, se mantiene en la posición mediante los cables AE y CF. Si la T_{AE} es 55 N, cuál es el momento con respecto a la línea DC; cuál sería si la T_{CF} es 33 N.

$$M_{D/B} = \lambda_{DB} \cdot (Y_{DA} \times T_{AE})$$

$$\lambda_{DB} = \frac{1,2\hat{i} - 0,35\hat{j} + 0\hat{k}}{1,25}$$

$$Y_{DA} = 0\hat{i} - 0,1\hat{j} + 0,2\hat{k}$$

$$\vec{T}_{AE} = \frac{55}{1,1} [0,9\hat{i} - 0,6\hat{j} + 0,2\hat{k}]$$

$$M_{D/B} = \begin{vmatrix} 0,96 & -0,28 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0,2 \\ 45 & -30 & 10 \end{vmatrix}$$

$$M_{D/B} = 2,28 \text{ Nm.}$$

$$M_{D/B} = \lambda_{DB} \cdot (Y_{DC} \times T_{CF})$$

$$\lambda_{DB} = 0,96\hat{i} - 0,28\hat{j} + 0\hat{k}$$

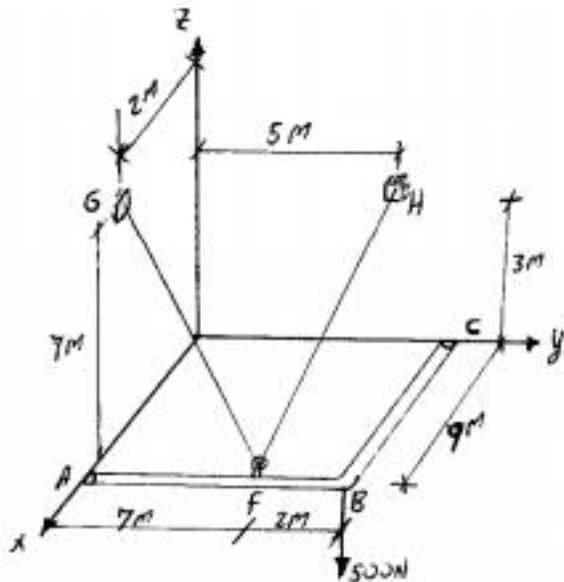
$$Y_{DC} = 0\hat{i} + 0,2\hat{j} - 0,4\hat{k}$$

$$\vec{T}_{CF} = \frac{33}{1,1} [0,6\hat{i} - 0,9\hat{j} - 0,2\hat{k}]$$

$$M_{D/B} = \begin{vmatrix} 0,96 & -0,28 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,4 \\ 18 & -27 & -6 \end{vmatrix}$$

$$M_{D/B} = -9,504 \text{ Nm.}$$

QUIZ MOMENTO RESPECTO A UNA LÍNEA



Si la $T_{FH} = 800\text{N}$, Determine el momento que genera la tensión y la fuerza de 500N alrededor de la línea que pasa por A y C.

$$M_{A/C} = \lambda_{AC} \cdot (r_{AF} \times T_{FH}) + \lambda_{AC} \cdot (r_{AB} \times F_{500})$$

$$\lambda_{AC} = \frac{-9\hat{i} + 9\hat{j} + 0\hat{k}}{9\sqrt{2}}$$

$$r_{AF} = 7\hat{i}$$

$$T_{FH} = \frac{800}{\sqrt{94}} [-9\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}]$$

$$r_{AB} = 9\hat{j}$$

$$M_{A/D} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -747,6 & -165,03 & 247,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix}$$

$$M_{A/D} = -1225,266 + 3182$$

$$M_{A/D} = 1956,734 \text{ Nm}$$

UNIDAD N 2

CUERPOS RÍGIDOS, SISTEMAS DE FUERZAS EQUIVALENTES

CLASE 8 Y 9: REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UN PAR, REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE TORSIÓN

- o Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- o Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.

RESUMEN

Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza

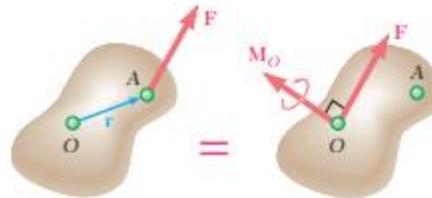


Figura 3.59

Sistema fuerza-par

Cualquier fuerza F que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O el cual consta de la fuerza F aplicada en O y un par de momento M_O , igual al momento de la fuerza F en su posición original con respecto a O [sección 3.16]; se debe señalar que la fuerza F y el vector de par M_O siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.59).

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Se concluye que [sección 3.17] cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado O , reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en O (figura 3.60) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener a la fuerza resultante R y al vector de par resultante M_O^R [problemas resueltos 3.8 al 3.11]. Obsérvese que, en general, la resultante R y el vector de par M_O^R no serán perpendiculares entre sí.

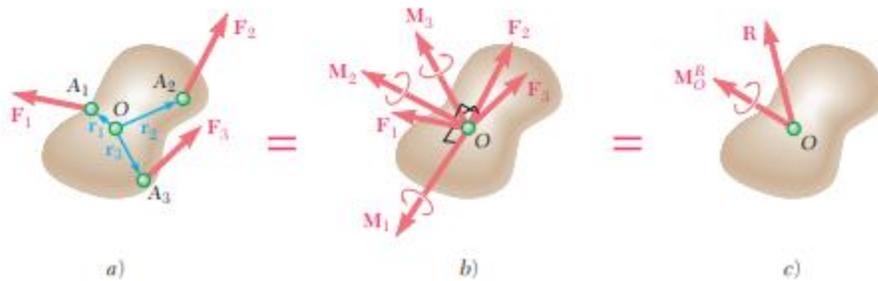


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de fuerzas

Con base en lo anterior, se concluyó [sección 3.18] que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas F_1, F_2, F_3, \dots y F'_1, F'_2, F'_3, \dots , son equivalentes si, y sólo si,*

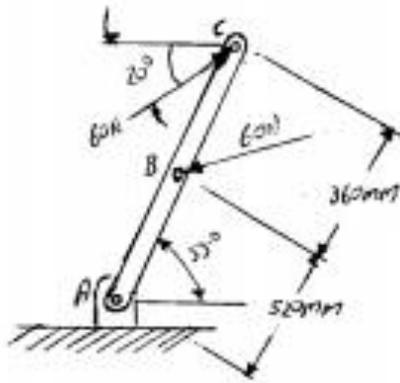
$$\Sigma F = \Sigma F' \quad \text{y} \quad \Sigma M_O = \Sigma M'_O \quad (3.57)$$

Si la fuerza resultante R y el vector de par resultante M_O^R son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante [sección 3.20]. Éste es el caso para sistemas que están constituidos por: *a)* fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b)* fuerzas coplanares [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o *c)* fuerzas paralelas [problema resuelto 3.11]. Si la resultante R y el vector de par M_O^R *no* son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede ser* reducido a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante R y un vector de par M_1 dirigido a lo largo de R [sección 3.21 y problema resuelto 3.12].

Reducción adicional de un sistema de fuerzas

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
<p>Reducción de un sistema de fuerzas a un par.</p> <p>Reducción de un sistema de fuerzas a una llave torsión.</p>	<p>Presentación de conceptos básicos sobre momento de un par.</p> <p>Pares equivalentes.</p> <p>Descomposición de una fuerza dada en una fuerza O y un par.</p> <p>Reducción de un sistema de fuerzas a un par.</p> <p>Reducción de un sistema de fuerzas a una llave torsión.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 16)</p>	4	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Aplicaciones de producto cruz y triple producto escalar.</p> <p>Desarrollo de ejercicios de momento y descomposición de fuerzas en 2 y 3 dimensiones.</p>	8	4	

Reducción de Fuerzas

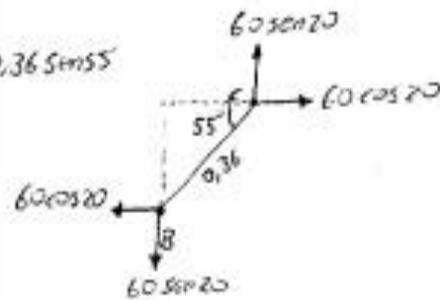


Determine el par generado por las fuerzas.

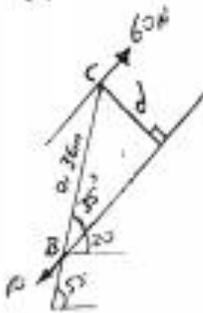
- Descomponiendo las fuerzas
- Distancia perpendicular entre fuerzas
- Sumando momento respecto a A.

$$a. \quad \sum M_B = 60 \operatorname{sen} 20^\circ \cdot 0,36 \operatorname{cos} 55^\circ - 60 \operatorname{cos} 20^\circ \cdot 0,36 \operatorname{sen} 55^\circ$$

$$M_B = -12,389 \text{ Nm.}$$



b.

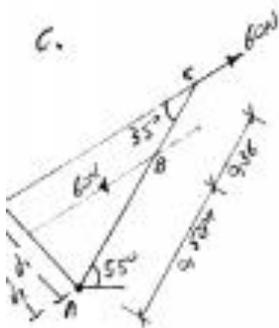


$$M_B = F \cdot d.$$

$$M_B = -60 \text{ N} \cdot 0,36 \operatorname{sen} 35^\circ$$

$$M_B = -12,389 \text{ Nm}$$

c.



$$\sum M_A = -60 \text{ N} \cdot d_1 + 60 \text{ N} \cdot d_2$$

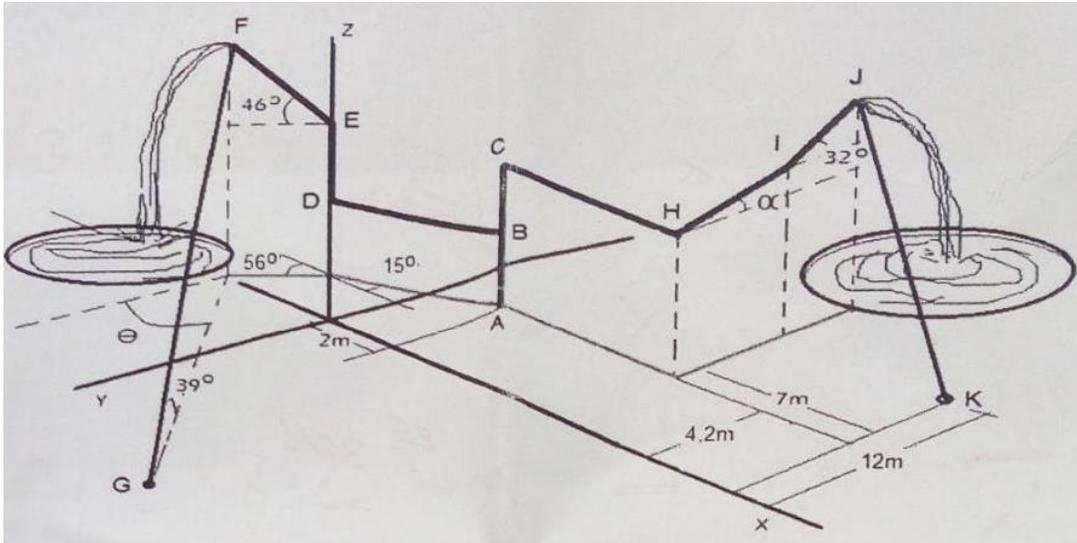
$$M_A = -60 \cdot 0,88 \operatorname{sen} 35^\circ + 60 \cdot 0,52 \operatorname{sen} 35^\circ$$

$$M_A = -12,389 \text{ Nm}$$

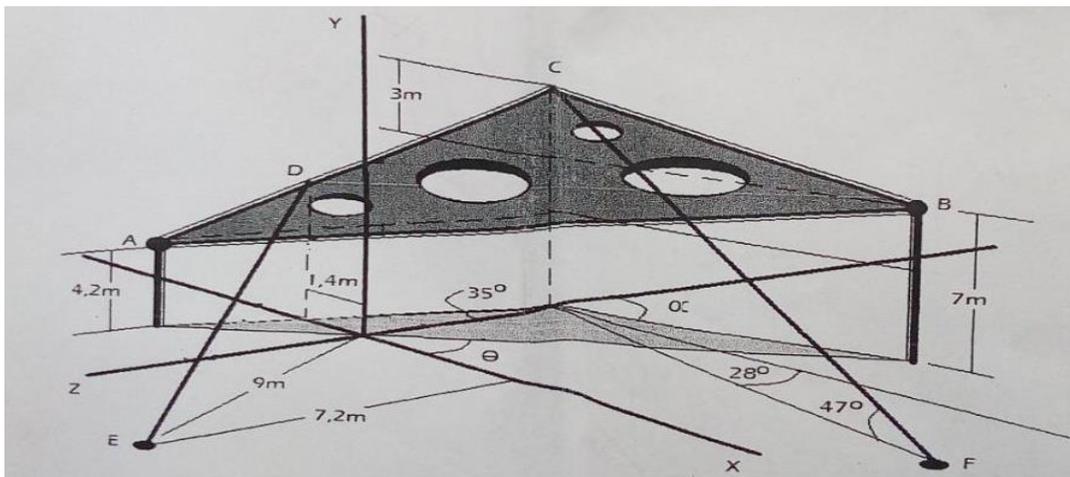
PRE-PARCIAL ESTÁTICA

Nombre _____

- En un sistema de alimentación de dos pozos se usa una tubería subterránea para descargar agua a cada uno, la tubería diseñada para este fin se muestra en la figura con dimensiones $AB=3,7\text{m}$, $BC=2\text{m}$, $CH=7,2\text{m}$ (paralelo al eje x), $HI=3,7\text{m}$, $IJ=2,1\text{m}$ (paralelo al eje y), $BD=7,8\text{m}$, $DE=3,5\text{m}$ y $EF=4,5\text{m}$, determine el valor de la tensión JK , si la tensión FG es de 36N y la magnitud del momento $M_A=64,2\text{ Nm}$ con un ángulo director en x de 141.89° , $\alpha = 24^\circ$, $\theta = 68^\circ$.



- Una escultura triangular de lados diferentes ABC con dimensiones de $BC=12\text{m}$, $AC=16\text{m}$ y $DA=6\text{m}$, se coloca sobre dos pivotes en A y C , dos cables BF y DE sostienen la escultura inclinada para que proyecte una sombra sobre el piso en forma de triángulo escaleno, determine el valor del momento respecto al eje AB , si la tensión en el cable CF es de 80N y en DE 72N . $\alpha = 57^\circ$, $\theta = 23^\circ$.



$$M_A = Y_{AS} \times T_{FE} + Y_{AS} \times T_{FK}$$

$$Y_{AS} (7,2 \hat{i} + (-3,7 \cos 24 - 2,1 \cos 32) \hat{j} + (3,7 + 2 + 5,7 \sin 24 + 7,1 \sin 32) \hat{k})$$

$$Y_{AS} = 7,2 \hat{i} - 5,16102 \hat{j} + 8,3177 \hat{k}$$

$$Y_{AF} = (-7,8 \cos 15 - 4,5 \cos 46 \cos 56) \hat{i} + (7,8 \sin 15 + 4,5 \cos 46 \sin 56) \hat{j} + (3,7 + 3,5 + 4,5 \sin 46) \hat{k}$$

$$Y_{AF} = -9,2822 \hat{i} + 4,61033 \hat{j} + 10,437 \hat{k}$$

$$T_{FE} = 36 (50,68 \cos 39 \hat{i} + \cos 68 \cos 39 \hat{j} - \sin 39 \hat{k})$$

$$T_{FE} = 25,940 \hat{i} + 10,4804 \hat{j} - 22,655 \hat{k}$$

$$J (9,2 \hat{i} - 9,36102 \hat{j} + 8,3177 \hat{k})$$

$$K (16,2 \hat{i} - 12 \hat{j})$$

$$T_{FK} = \frac{T_{FK}}{11,187} [7 \hat{i} - 2,63898 \hat{j} - 8,3177 \hat{k}]$$

$$M_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7,2 & -5,16102 & 8,3177 \\ 0,6257 & -2,157 & -0,7435 \\ \frac{T_{FK}}{11,187} & \frac{F_K}{5} & \frac{T_{FK}}{11,187} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -9,2822 & 4,61033 & 10,437 \\ 25,94 & 10,4804 & -22,65 \end{vmatrix}$$

$$M_A \cos \theta_x = M_{Ax} + M_{2x}$$

$$64,2 \cos 141,89 = 5,8 T_{FK} - 213,8332$$

$$T_{FK} = 28,16 \text{ N}$$

$$M_{AB} = \lambda_{AS} \cdot (Y_{BC} \times T_{CF}) + \lambda_{AS} \cdot (Y_{BD} \times T_{DE})$$

$$A (-3,557; 4,2; 10,219)$$

$$B (3,7453; 7; -8,3287)$$

$$C (0; 10; -2)$$

$$D (-1,4; 6,375; 0)$$

$$E (5,4; 0; 7,2)$$

$$\lambda_{AS} = \frac{18,2983 \hat{i} + 28 \hat{j} - 18,5437 \hat{k}}{26,2018} = 0,6983 \hat{i} + 0,1068 \hat{j} - 0,7077 \hat{k}$$

$$Y_{BC} = -9,7453 \hat{i} + 3 \hat{j} + 6,3287 \hat{k}$$

$$T_{CF} = 80 (\cos 47 \cos 28 \hat{i} - \sin 47 \hat{j} + \cos 47 \sin 28 \hat{k})$$

$$T_{CF} = 48,1735 \hat{i} - 58,5083 \hat{j} + 25,6143 \hat{k}$$

$$Y_{BD} = -11,1453 \hat{i} - 0,625 \hat{j} + 8,3287 \hat{k}$$

$$T_{DE} = \frac{7,2}{11,78} (6,8 \hat{i} - 6,375 \hat{j} + 17,2 \hat{k})$$

$$T_{DE} = 41,57 \hat{i} - 38,971 \hat{j} + 44,0143 \hat{k}$$

$$M_{AB} = \begin{vmatrix} 0,6983 & 0,1068 & -0,7077 \\ -9,7453 & 3 & 6,3287 \\ 48,1735 & -58,5083 & 25,6143 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0,6983 & 0,1068 & -0,7077 \\ -11,1453 & -0,6375 & 8,3287 \\ 41,57 & -38,971 & 44,0143 \end{vmatrix}$$

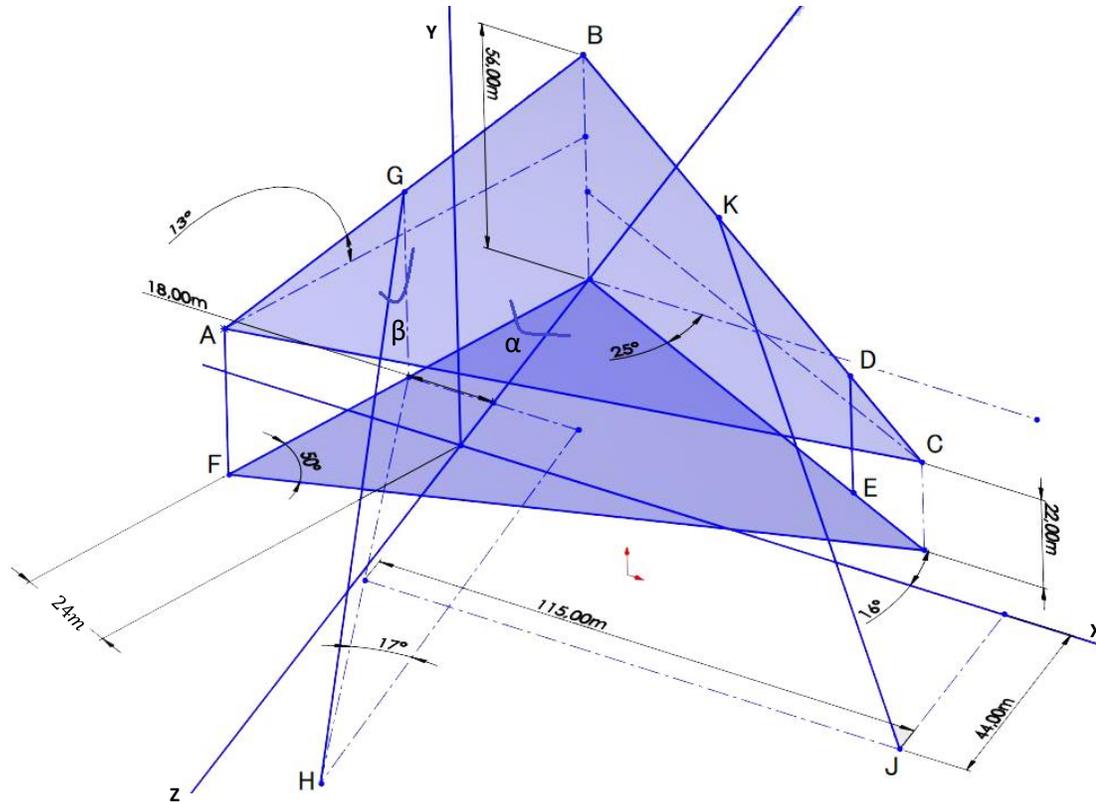
$$M_{AB} = 70,2071 + (-29,7128)$$

$$M_{AB} = 40,4943 \text{ N}\cdot\text{m}$$

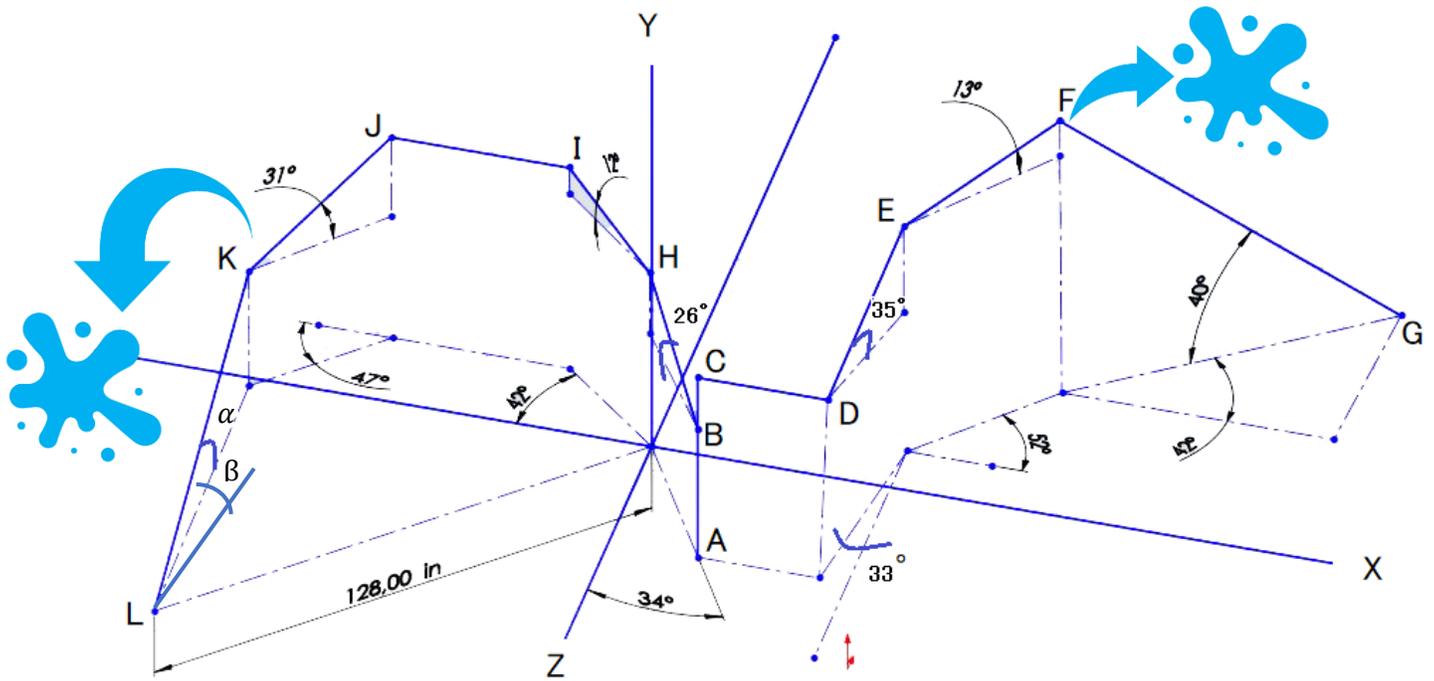
PARCIAL ESTÁTICA 2019_2

Nombre: _____ Fecha: _____ Nota: _____

Una escultura triangular de lados diferentes ABC con dimensiones de $AB=90\text{m}$, $BC=108\text{m}$, $BK=42\text{m}$, y $DC=23\text{m}$, se coloca sobre dos pivotes en AF y DE, dos cables GH y KF sostienen la escultura inclinada para que proyecte una sombra sobre el piso en forma de triángulo, determine el valor del momento respecto al eje AD, si la tensión en el cable GH es de 120N y en KJ es de 200N . $\alpha = 24^\circ$, $\beta = 70^\circ$.



1. En un sistema de alimentación de dos pozos se usa una tubería subterránea para descargar agua a cada uno, la tubería diseñada para este fin se muestra en la figura con dimensiones $AB=37$ in, $BC=15$ in, $CD=30$ in (paralelo al eje x), $DE=43$ in, $EF=45$ in, $BH=40$ in, $HI=35$ in, $IJ=42$ in (paralelo al eje x), $JK=44$ in ;determine el valor de la tensión FG , si la tensión KL es de 90 lb y la magnitud del momento $M_A=803.942$ lb.ft con un ángulo director en x de 101.22° $\alpha = 22^\circ$, $\beta=5^\circ$.

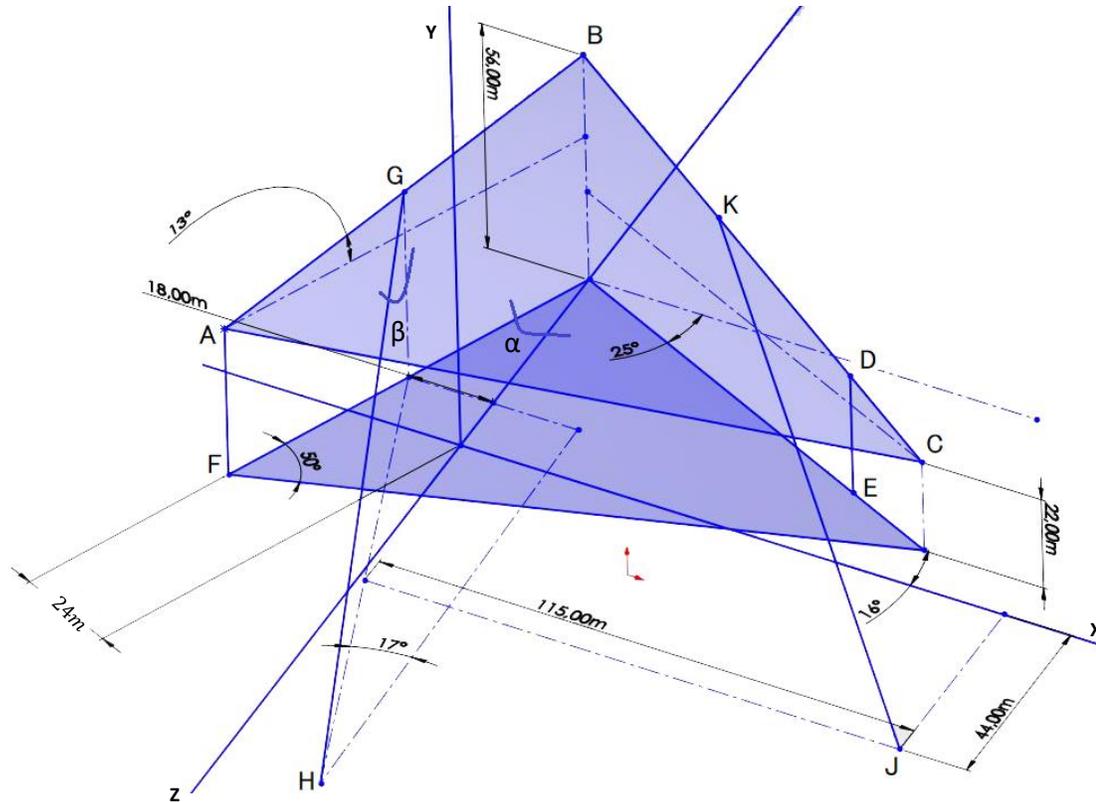




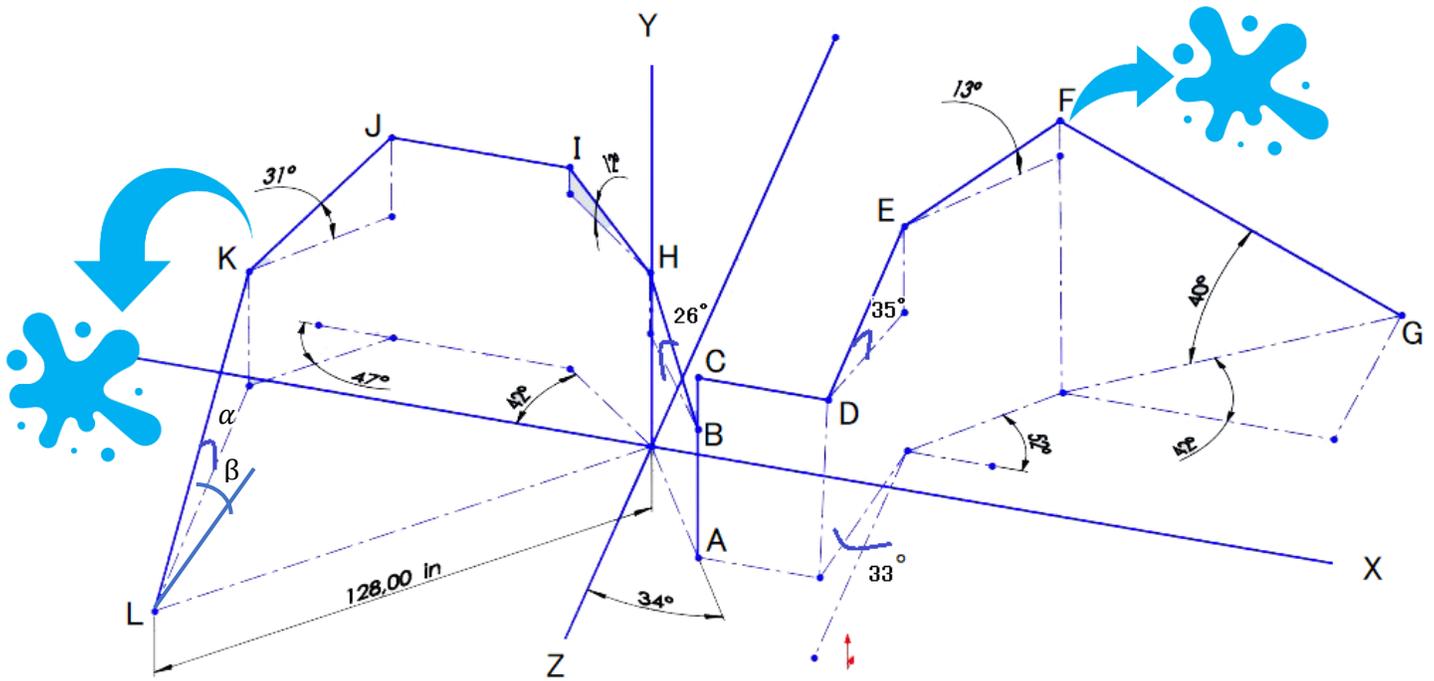
PARCIAL ESTÁTICA 2019_2

Nombre: _____ Fecha: _____ Nota: _____

Una escultura triangular de lados diferentes ABC con dimensiones de $AB=90\text{m}$, $BC=108\text{m}$, $BK=42\text{m}$, y $DC=23\text{m}$, se coloca sobre dos pivotes en AF y DE, dos cables GH y KF sostienen la escultura inclinada para que proyecte una sombra sobre el piso en forma de triángulo, determine el valor del momento respecto al eje AD, si la tensión en el cable GH es de 120N y en KJ es de 200N . $\alpha = 24^\circ$, $\beta = 70^\circ$.



1. En un sistema de alimentación de dos pozos se usa una tubería subterránea para descargar agua a cada uno, la tubería diseñada para este fin se muestra en la figura con dimensiones $AB=37$ in, $BC=15$ in, $CD=30$ in (paralelo al eje x), $DE=43$ in, $EF=45$ in, $BH=40$ in, $HI=35$ in, $IJ=42$ in (paralelo al eje x), $JK=44$ in ;determine el valor de la tensión FG , si la tensión KL es de 90 lb y la magnitud del momento $M_A=803.942$ lb.ft con un ángulo director en x de 101.22° $\alpha = 22^\circ$, $\beta=5^\circ$.



$$M_A = r_{AF} \times F_{FG} + r_{AK} \times T_{KL}$$

$$r_{AF} = (76,1758\hat{i} + 86,7866\hat{j} - 64,0926\hat{k})$$

$$r_{FG} = r_{FC} [\cos 40^\circ \cos 42^\circ - \sin 40^\circ\hat{j} - \cos 40^\circ \sin 42^\circ\hat{k}]$$

$$\vec{r}_{FG} = r_{FC} [0,5693\hat{i} - 0,6428\hat{j} - 0,5126\hat{k}] \quad A$$

$$\vec{r}_{FG} = 28,4641\hat{i} - 32,14\hat{j} - 25,6292\hat{k} \quad B$$

$$\vec{r}_{AK} = -113,2674\hat{i} + 39,15\hat{j} - 25,1299\hat{k}$$

$$r_{KL} = r_{KL} [\cos 22^\circ \sin 55^\circ\hat{i} - \sin 22^\circ\hat{j} + \cos 22^\circ \cos 55^\circ\hat{k}]$$

$$\vec{r}_{KL} = r_{KL} [0,08081\hat{i} - 0,374606\hat{j} + 0,92365\hat{k}] \quad B$$

$$\vec{r}_{KL} = 7,2728\hat{i} - 33,7146\hat{j} + 83,129\hat{k} \quad A$$

$$M_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 76,1758 & 86,7866 & -64,0926 \\ 0,5693 & -0,6428 & -0,5126 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -113,2674 & 39,15 & -25,1299 \\ 7,2728 & -33,7146 & 83,129 \end{vmatrix}$$

$$803,902 \cdot 12 \cos 120^\circ = -85,6855 T_{FG} + 2407,2958$$

$$-85,6855 T_{FG} = -4780,4$$

$$T_{FG} = 5016 \quad \leftarrow$$

$$M_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 76,1758 & 86,7866 & -64,0926 \\ 0,08081 & -0,374606 & 0,92365 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -113,2674 & 39,15 & -25,1299 \\ 7,2728 & -33,7146 & 83,129 \end{vmatrix}$$

$$803,902 \cdot 12 \cos 120^\circ = 128,0635 + 102,5886 T_{KL}$$

$$102,5886 T_{KL} = 9232,6703$$

$$T_{KL} = 9016 \quad \leftarrow$$

1.

$$M_{AD} = r_{AD} \cdot (r_{AC} \times F_{CA}) + r_{AD} \cdot (r_{AK} \times T_{KS})$$

$$A(-35,6681\hat{i} + 35,7544\hat{j} + 26,07\hat{k}) \quad A$$

$$A(-41,1695\hat{i} + 35,7544\hat{j} + 32,2911\hat{k}) \quad B$$

$$D(73,1191\hat{i} + 29,2407\hat{j} - 19,8088\hat{k}) \quad A$$

$$D(73,1191\hat{i} + 29,2407\hat{j} - 11,0414\hat{k}) \quad B$$

$$K(36,124\hat{i} + 42,77\hat{j} - 37,0574\hat{k}) \quad A$$

$$K(36,124\hat{i} + 42,77\hat{j} - 28,29\hat{k}) \quad B$$

$$J(115\hat{i} + 0\hat{j} + 44\hat{k})$$

$$r_{AD} = \frac{108,7872\hat{i} - 6,5139\hat{j} - 45,9798\hat{k}}{118,2453} \quad A$$

$$r_{AD} = \frac{144,2876\hat{i} - 6,5139\hat{j} - 43,3325\hat{k}}{122,40105} \quad A$$

$$B(-18\hat{i} + 45,793\hat{j} - 13,4762\hat{k}) \quad A$$

$$G(-15\hat{i} + 47,1483\hat{j} - 11,28436\hat{k}) \quad B$$

$$r_{AG} = 17,668\hat{i} + 19,0236\hat{j} - 39,5462\hat{k} \quad A$$

$$r_{AG} = 23,1695\hat{i} + 11,3439\hat{j} - 43,57546\hat{k} \quad B$$

$$\vec{r}_{CA} = 120(\cos 70^\circ \sin 15^\circ\hat{i} - \cos 70^\circ\hat{j} + \sin 70^\circ \cos 15^\circ\hat{k}) \quad A$$

$$\vec{r}_{CA} = 120(\sin 70^\circ \sin 15^\circ\hat{i} - \cos 70^\circ\hat{j} + \sin 70^\circ \cos 15^\circ\hat{k}) \quad B$$

$$r_{AK} = 71,7974\hat{i} + 7,02337\hat{j} - 63,1274\hat{k} \quad A$$

$$r_{AK} = 77,2989\hat{i} + 7,02337\hat{j} - 60,581\hat{k} \quad B$$

$$\vec{r}_{KS} = \frac{200 [78,8706\hat{i} - 42,77\hat{j} + 81,0574\hat{k}]}{120,9161} \quad A$$

$$T_{KS} = \frac{200 [78,8706\hat{i} - 42,77\hat{j} + 72,29\hat{k}]}{115,223} \quad A$$

$$M_{AD} = 88,1232 + 67,41855 T_{KS} \quad M_{AD} = 155,522 \text{ Nm}$$

$$M_{AD} = 522,3 + (-46,852) T_{KL} \quad M_{AD} = 475,448 \text{ Nm}$$

UNIDAD N 3

EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

CLASE 10: REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL.

- Dar soluciones de fondo, tanto en lo técnico como en lo práctico, a los problemas de diseño de obras industriales, mediante herramientas de dibujo.
- Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.

○ RESUMEN

Este capítulo estuvo dedicado al estudio del *equilibrio de cuerpos rígidos*, esto es, a la situación en la cual las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido *forman un sistema equivalente a cero* [sección 4.1]. Entonces, se tiene que

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Si se descomponen cada una de las fuerzas y cada uno de los momentos en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido a través de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar fuerzas desconocidas aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas por sus apoyos.

Cuando se resuelve un problema que involucra el equilibrio de un cuerpo rígido, es esencial considerar *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Por tanto, el primer paso en la solución del problema debe ser dibujar un *diagrama de cuerpo libre* que muestre al cuerpo en estudio y todas las fuerzas, conocidas o no, que actúan sobre el mismo [sección 4.2].

En la primera parte del capítulo se estudió el *equilibrio de una estructura bidimensional*; es decir, se supuso que la estructura considerada y la fuerza aplicada sobre ésta estaban contenidas en el mismo plano. Se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre la estructura por sus apoyos podían involucrar una, dos o tres incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.3].

En el caso de una estructura bidimensional, las ecuaciones (4.1) o las ecuaciones (4.2) y (4.3) se reducen a *tres ecuaciones de equilibrio*, las cuales son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

Ecuaciones de equilibrio

Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio de una estructura bidimensional

donde A es un punto arbitrario en el plano de la estructura [sección 4.4]. Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar tres incógnitas. A pesar de las tres ecuaciones de equilibrio (4.5) no se le pueden *añadir* ecuaciones adicionales, cualquiera de ellas puede ser *reemplazada* por otra. Por tanto, se pueden escribir conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio como

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.6)$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y , o

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.7)$$

donde los puntos A , B y C no deben ser colineales.

Equilibrio de cuerpos rígidos

Indeterminación estática

Restricciones parciales

Restricciones impropias

Cuerpo sujeto a dos fuerzas

Cuerpo sujeto a tres fuerzas

Como cualquier conjunto de ecuaciones de equilibrio se puede resolver para un máximo de tres incógnitas, no se pueden determinar por completo las reacciones en los apoyos de una estructura rígida bidimensional si éstas involucran *más de tres incógnitas*; entonces se dice que dichas reacciones son *estáticamente indeterminadas* [sección 4.5]. Por otra parte, si las reacciones involucran *menos de tres incógnitas*, no se mantendrá el equilibrio bajo condiciones generales de carga, entonces se dice que la estructura tiene *restricción parcial*. El hecho de que las reacciones involucren exactamente tres incógnitas no garantiza que las ecuaciones de equilibrio pueden resolverse para todas las incógnitas. Si los apoyos están ubicados de manera que las reacciones son *concurrentes o paralelas*, las reacciones son estáticamente indeterminadas y se dice que la estructura tiene *restricciones impropias*.

Se prestó atención a dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido. En la sección 4.6 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a dos fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos y se demostró que las resultantes \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 de estas fuerzas deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos* (figura 4.11), esta propiedad simplificará la solución de ciertos problemas en los capítulos posteriores. En la sección 4.7 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos y se demostró que las resultantes \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 de estas fuerzas deben ser *concurrentes* (figura 4.12) o *paralelas*. Esta propiedad proporciona un enfoque alternativo para la solución de problemas que involucren a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas [problema resuelto 4.6].

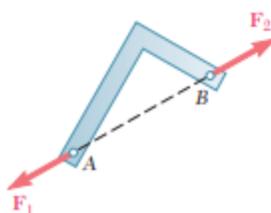


Figura 4.11

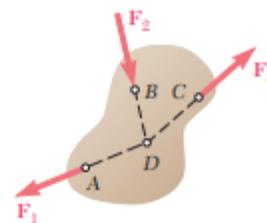
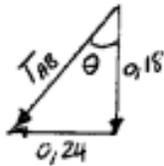
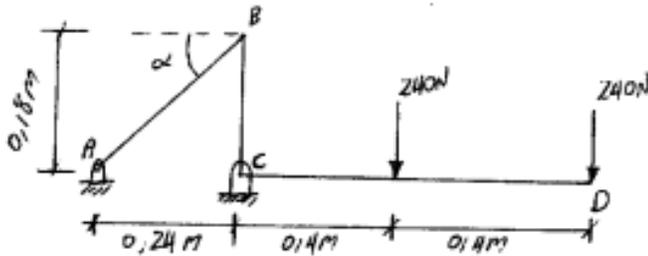


Figura 4.12

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
Reacciones en apoyos bidimensionales	<p>Diagrama de cuerpo libre.</p> <p>Reacciones en los puntos de apoyo y conexiones de una estructura bidimensional.</p> <p>Equilibrio de cuerpo rígido en dos dimensiones.</p> <p>Reacciones estáticamente indeterminadas. Restricciones parciales.</p> <p>Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 17, ANEXO 18, ANEXO 19)</p>	2	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Ejercicio 4.43 propuesto en el libro guía.</p> <p>Ejercicio 4.52 propuesto en el libro guía</p> <p>Desarrollo de ejercicios que permitan desarrollar agilidad en la ubicación de coordenadas y el cálculo de vectores unitarios e identificación de reacciones.</p>	4	2	Evaluación de los conceptos (QUIZ 3)

Reacciones 2D

Determinar las reacciones en C
y la T_{AB}



$$\tan \theta = \frac{0,24}{0,18}$$

$$\theta = 53,13^\circ$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-240 \cdot 0,4 - 240 \cdot 0,8 + T_{AB} \cos 36,87^\circ \cdot 0,18 = 0$$

$$T_{AB} = 2000 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

$$\sum F_x = 0$$

$$C_x - T_{AB} \cos 36,87^\circ = 0$$

$$C_x = 1600 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

$$\sum F_y = 0$$

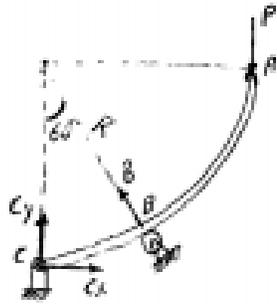
$$C_y - 240 - 240 - T_{AB} \sin 36,87^\circ = 0$$

$$C_y = 1680 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

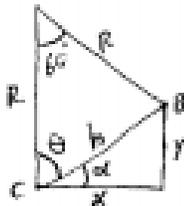
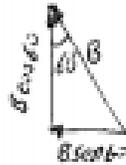
$$C^2 = C_x^2 + C_y^2$$

$$C = 2320 \text{ N} \quad \blacktriangledown$$

Reacciones 2D



Determinar las reacciones en los apoyos



Aplicando ley del coseno

$$h^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos 60$$

$$h = R$$

Aplicando ley del seno

$$\frac{\sin \theta}{R} = \frac{\sin 60}{h} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

entonces $\alpha = 30^\circ$

Hallar x y y .

$$\cos 30 = \frac{x}{h} \quad \wedge \quad \sin 30 = \frac{y}{h}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad y = \frac{R}{2}$$

Aplicando M_c

$$\sum M_c = 0 \quad -P \cdot R + B \cos 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R + B \sin 60 \cdot \frac{R}{2} = 0$$

$$B = \frac{PR}{\frac{\sqrt{3}}{2} R} \Rightarrow B = 1,1547 P \quad \blacktriangledown$$

$$\sum F_x = 0$$

$$C_x - B \sin 60 = 0$$

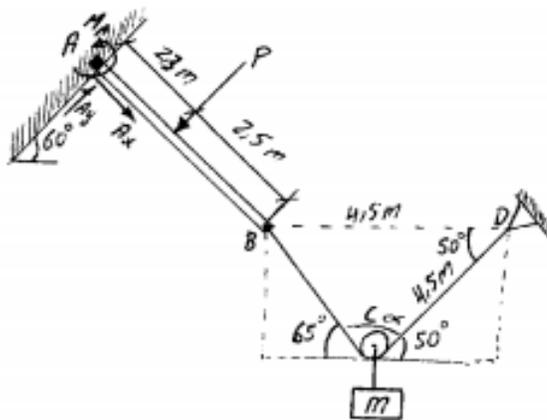
$$C_x = P$$

$$\sum F_y = 0$$

$$C_y + B \cos 60 = P$$

$$C_y = 0,4226 P \quad \therefore C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 1,0856 P$$

Reacciones 2D



Determinar las reacciones en A y la tensión de la cuerda si \overline{CD} es 4,5 m y B y D están a la misma altura, donde la distancia entre ellos es 4,5 m. La masa es de 50 kg, $P=120$ N.

Aplicando ley del coseno

$$\overline{BC} = \sqrt{4,5^2 + 4,5^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 4,5 \cdot \cos 50^\circ}$$

$$\overline{BC} = 3,8035 \text{ m}$$

Aplicando ley del seno

$$\frac{\sin \alpha}{4,5} = \frac{\sin 50^\circ}{\overline{BC}} \Rightarrow \alpha = 65^\circ$$

DCL Para la polea.



$$\sum F_y = 0 \quad T(\sin 65^\circ + \sin 15^\circ) = 490,5$$

$$T = 293,3 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - 120 \cdot 1,25 - 293,3 \cos 55^\circ \cdot 4,8 = 0$$

$$M_A = 1083,5038 \text{ Nm} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 120 - 293,3 \cos 55^\circ = 0$$

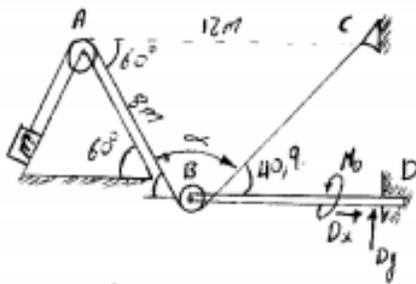
$$A_y = 288,23 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x + 293,3 \sin 55^\circ = 0$$

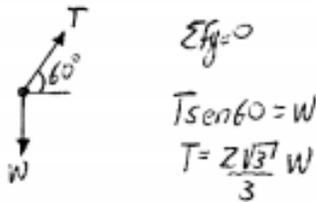
$$A_x = -240,257 \text{ N}$$

QUIZ REACCIONES 2D.



Determine las reacciones en el apoyo D y la masa (m), si la distancia de AB es 8m, de AC es 12m y están a la misma altura A y C. Tenga en cuenta que $W=5Dy$ y donde cuelga la masa la superficie es un triángulo equilátero.

DCL para la masa



$$\sum F_y = 0$$

$$T \sin 60 = W$$

$$T = \frac{2\sqrt{3}}{3} W$$

Aplicando ley del coseno determino BC

$$BC^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 60$$

$$BC = 4\sqrt{7} \text{ m}$$

Aplicando ley del seno determino α

$$\frac{\sin \alpha}{12} = \frac{\sin 60}{4\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha = 79,1^\circ$$

Aplicando $\sum F$ y $\sum M$ en la viga apoyada

$$\sum F_y = 0$$

$$T(\sin 60 + \sin 40,9) + D_y = 0$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} W (1,5207) + D_y = 0$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 5 D_y (1,5207) + D_y = 0$$

$$D_y = 0$$

Por lo tanto

$$D_y = 0$$

$$W = 0$$

$$m = 0$$

$$T = 0$$

$$D_x = 0$$

$$M_D = 0$$

UNIDAD N 3

EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

CLASE 11 y 12: REACCIONES EN APOYOS TRIDIMENSIONALES

- Dar soluciones de fondo, tanto en lo técnico como en lo práctico, a los problemas de diseño de obras industriales, mediante herramientas de dibujo.
- Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.
- **RESUMEN**

Equilibrio de un cuerpo tridimensional

En la segunda parte del capítulo se explicó el *equilibrio de un cuerpo tridimensional* y se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre el cuerpo por sus apoyos podía involucrar entre una y seis incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.8].

En el caso general del equilibrio de un cuerpo tridimensional, las seis ecuaciones escalares de equilibrio (4.2) y (4.3) listadas al principio de este repaso deben utilizarse y resolverse para *seis incógnitas* [sección 4.9]. Sin embargo, en la mayoría de los problemas estas ecuaciones se obtendrán de manera más conveniente si primero se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

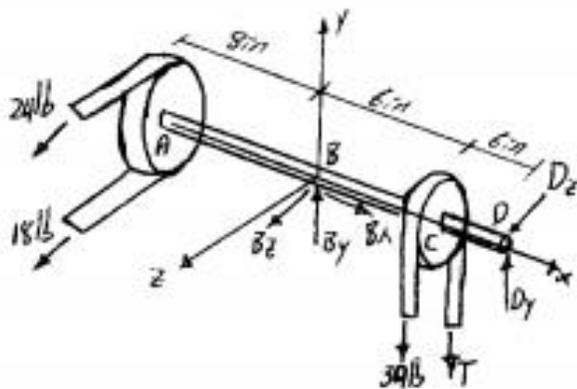
y se expresan las fuerzas \mathbf{F} y los vectores de posición \mathbf{r} en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Entonces, se pueden calcular los productos vectoriales, ya sea en forma directa o empleando determinantes, con el fin de obtener las ecuaciones escalares deseadas igualando a cero los coeficientes de los vectores unitarios [problemas resueltos 4.7 a 4.9].

Se ha señalado que es posible eliminar hasta tres componentes de reacción desconocidos del cálculo de $\Sigma \mathbf{M}_O$ en la segunda de las relaciones (4.1) por medio de una selección cuidadosa del punto O . Además, de la solución de algunos problemas se pueden eliminar las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual involucra el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a un eje AB que une a los puntos A y B [problema resuelto 4.10].

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*; cuando involucran menos de seis incógnitas, el cuerpo rígido está *parcialmente restringido*. Aunque existan seis o más incógnitas, el cuerpo rígido estará *impropiamente restringido* si las reacciones asociadas con los apoyos dados son paralelas o si intersecan la misma línea.

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
Reacciones en apoyos tridimensionales	<p>Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas.</p> <p>Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones.</p> <p>Reacciones en puntos de apoyo y conexiones para una estructura tridimensional.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 20, ANEXO 21)</p>	4	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Ejercicio 4.43 propuesto en el libro guía.</p> <p>Ejercicio 4.52 propuesto en el libro guía</p> <p>Desarrollo de ejercicios que permitan desarrollar agilidad en la ubicación de coordenadas y el cálculo de vectores unitarios e identificación de reacciones.</p>	8	4	Evaluación de los conceptos (QUIZ 4)

Reacciones 3D



Determinar las reacciones en los cojinetes de B y D. Si la polea A tiene un radio de 2,5 in y la polea C un radio de 2 in, suponiendo que la velocidad de giro es constante y el cojinete D no ejerce fuerza axial. Hallar la tensión T.

$$\Sigma M_B = 0$$

$$M_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -8 & -7,5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -8 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 0 & -2 \\ 0 & -T & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & -30 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & D_y & D_z \end{vmatrix}$$

$$M_B = -45\hat{i} + 144\hat{j} + 60\hat{k} + 192\hat{j} - 2T\hat{i} - 6T\hat{k} + 60\hat{i} - 180\hat{k} - 12D_z\hat{j} + 12D_y\hat{k}$$

$$\Sigma M_x = 0$$

$$-45 + 60 - 2T + 60 = 0 \Rightarrow T = 37,5 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$144 + 192 - 12D_z = 0 \Rightarrow D_z = 28 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

$$\Sigma M_z = 0$$

$$-6T - 180 + 12D_y = 0 \Rightarrow D_y = 33,75 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$B_x = 0 \quad \blacktriangleleft$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -30 - T + D_y + B_y = 0$$

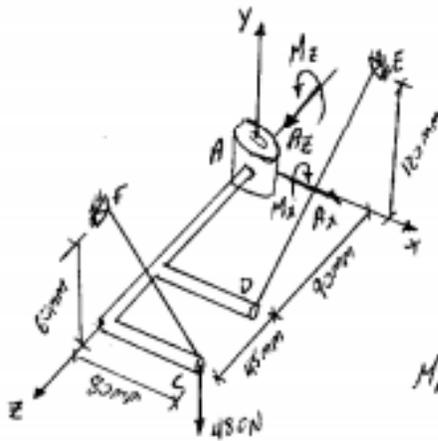
$$B_y = 33,75 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$B_z + D_z + 24 + 18 = 0$$

$$D_z = -70 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Reacciones 3D



Determinar las Reacciones en A y las tensiones en las cuerdas T_{CF} y T_{DE} , si el collarín permite movimiento a lo largo del eje Y y permite rotación sobre ese eje.

$\Sigma M_A = 0$

$$M_A = M_A + M_Z + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,08 & 0 & 0,135 \\ -0,8 & 0,6 & 0 \end{vmatrix} T_{CF} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,08 & 0 & 0,09 \\ 0 & 0,8 & -0,6 \end{vmatrix} T_{DE} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,08 & 0 & 0,135 \\ 0 & -480 & 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{T}_{CF} = T_{CF} \frac{(-0,08\hat{i} + 0,06\hat{j} + 0\hat{k})}{0,1}$

$\vec{T}_{DE} = T_{DE} \frac{(0\hat{i} + 0,12\hat{j} - 0,09\hat{k})}{0,15}$

$M_A = M_A + M_Z + T_{CF}(-0,081\hat{i} - 0,108\hat{j} + 0,048\hat{k}) + T_{DE}(-0,072\hat{i} + 0,048\hat{j} + 0,064\hat{k}) + 64,8\hat{i} - 38,4\hat{k}$

$\Sigma M_x = 0$

$M_x + 64,8 - 0,081 T_{CF} - 0,072 T_{DE} = 0$ ec. 1.

$\Sigma M_y = 0$

$-0,108 T_{CF} + 0,048 T_{DE} = 0$ ec. 2.

$\Sigma M_z = 0$

$M_z - 38,4 + 0,048 T_{CF} + T_{DE} - 0,064 = 0$ ec. 3.

$\Sigma F_x = 0$

$A_x + (-0,8 T_{CF}) = 0$ ec. 4.

$\Sigma F_y = 0$

$0,6 T_{CF} + 0,8 T_{DE} = 480$ ec. 5.

$\Sigma F_z = 0$

$-0,6 T_{DE} + A_z = 0$ ec. 6.

Solucionando el sistema 2x2 entre ec. 2 y ec. 5

$T_{CF} = 200N$

$T_{DE} = 450N$

Reemplazando

$A_x = 160N ; A_z = 270N$

$M_x = -16,2 Nm ; M_z = 0$

QUIZ REACCIONES 3D.

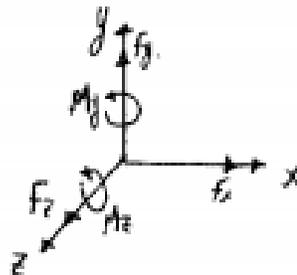
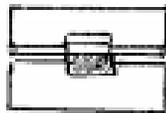
Dibuje un apoyo ó conexión que contenga 6 reacciones
y uno que contenga 5 reacciones.

Solución

Apoyo fijo



Bisagra que soporta carga axial y carga radial



UNIDAD N 4

FUERZAS DISTRIBUIDAS, CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD

CLASE 13 y 14: DETERMINACIÓN DE CENTROIDES POR INTEGRACIÓN, DETERMINACIÓN DE CENTROIDES DE ÁREAS COMPUESTAS

- Capacidad de comprensión y planteamiento de alternativas de solución de problemas que involucran el dibujo técnico.
 - Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
 - Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.
- **RESUMEN**

Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

Este capítulo estuvo dedicado primordialmente a la determinación del *centro de gravedad* de un cuerpo rígido, es decir, determinar el punto G donde una sola fuerza W , llamada el *peso* del cuerpo, se puede aplicar para representar el efecto de la atracción de la Tierra sobre el cuerpo en cuestión.

En la primera parte del capítulo se consideraron *cuerpos bidimensionales* como placas planas y alambres contenidos en el plano xy . Al sumar componentes de fuerza en la dirección vertical z y sumar momentos con respecto a los ejes horizontales x y y [sección 5.2], se derivaron las relaciones

$$W = \int dW \quad \bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad (5.2)$$

las cuales definen el peso del cuerpo y las coordenadas \bar{x} y \bar{y} de su centro de gravedad.

Centroide de un área o línea

En el caso de una *placa plana homogénea de espesor uniforme* [sección 5.3], el centro de gravedad G de la placa coincide con el *centroide* C del área A de la placa cuyas coordenadas están definidas por las relaciones

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

De manera similar, la determinación del centro de gravedad de un *alambre homogéneo de sección transversal uniforme* que está contenido en un plano, se reduce a la determinación del *centroide* C de la línea L que representa al alambre; así, se tiene

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

Primeros momentos

Se hace referencia a las integrales en las ecuaciones (5.3) como los *primeros momentos* del área A con respecto a los ejes x y y , los cuales se representan, respectivamente, con Q_y y Q_x [sección 5.4]. Así, se tiene

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

Los primeros momentos de una línea se pueden definir en forma similar.

Propiedades de simetría

La determinación del centroide C de un área o de una línea se simplifica cuando el área o la línea poseen ciertas *propiedades de simetría*. Si el área o la línea es simétrica con respecto a un eje, su centroide C se encuentra sobre dicho eje; si el área o la línea es simétrica con respecto a dos ejes, C está localizado en la inter-

sección de los dos ejes; si el área o la línea es simétrica con respecto a un centro O , C coincide con O .

Las áreas y los centroides de varias formas comunes están tabulados en la figura 5.8. Cuando una placa puede dividirse en varias de estas formas, las coordenadas \bar{X} y \bar{Y} de su centro de gravedad G se pueden determinar a partir de las coordenadas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ y $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$ de los centros de gravedad G_1, G_2, \dots de las diferentes partes [sección 5.5]. Al igualar, respectivamente, los momentos en relación a los ejes y y x (figura 5.24), se tiene que

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad (5.7)$$

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

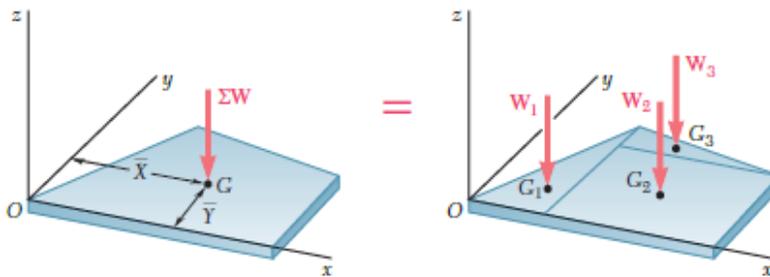


Figura 5.24

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, su centro de gravedad coincide con el centroide C del área de la placa y las ecuaciones (5.7) se reducen a

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A \quad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \quad (5.8)$$

De estas ecuaciones se obtienen los primeros momentos del área compuesta o pueden resolverse para las coordenadas \bar{X} y \bar{Y} de su centroide [problema resuelto 5.1]. La determinación del centro de gravedad de un alambre compuesto se lleva a cabo de forma similar [problema resuelto 5.2].

Cuando un área está limitada por curvas analíticas, las coordenadas de su centroide pueden determinarse por *integración* [sección 5.6]. Esto se puede realizar evaluando las integrales dobles en las ecuaciones (5.3) o evaluando una *sola integral* que emplea uno de los elementos de área mostrados en la figura 5.12 que tienen la forma de un rectángulo delgado o de un fragmento de círculo delgado. Al representar con \bar{x}_{el} y \bar{y}_{el} las coordenadas del centroide del elemento dA , se tiene que

Determinación del centroide por integración

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA \quad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA \quad (5.9)$$

Es ventajoso emplear el mismo elemento del área para el cálculo de los dos primeros momentos Q_y y Q_x ; además, el mismo elemento también se puede utilizar para determinar el área A [problema resuelto 5.4].

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
<p>Determinación de Centroides por Integración</p> <p>Determinación de Centroides de Áreas Compuestas</p> <p>Fuerzas sobre Superficies Distribuidas</p>	<p>Presentación de conceptos y desarrollo de ejercicios</p> <p>Ejercicios de aplicación identificando los diferentes tipos de centros de masa en 2 y tres dimensiones y su cálculo por integración</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 22, ANEXO 23, ANEXO 24, , ANEXO 25)</p>	4	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Desarrollo de ejercicios de centros de masa tanto por tabla como por integración</p> <p>Exposición de superficies sumergidas</p>	8	4	Evaluación de los conceptos (TALLER 3)

Determinación del centroide por áreas comunes

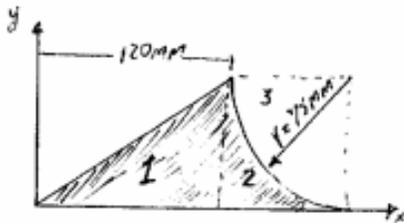


Fig	Área (mm ²)	\bar{x} (mm)	\bar{y} (mm)	$\bar{x}A$ (mm ³)	$\bar{y}A$ (mm ³)
Triángulo	4500	80	25	360000	112500
Rectángulo	5625	157,5	37,5	885937,5	210937,5
1/4 círculo	$-\frac{5625}{4}\pi$	163,17	43,17	-720862,97	-190719,2178
	$\Sigma A = 5707,135$			$\Sigma \bar{x}A = 525074,5$	$\Sigma \bar{y}A = 132718,28$

$$\bar{x} \Sigma A = \Sigma A \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A \bar{x}}{\Sigma A}$$

$$\bar{x} = \frac{525074,5 \text{ mm}^3}{5707,135 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{x} = 92,0031 \text{ mm}$$

$$\bar{y} \Sigma A = \Sigma A \bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A \bar{y}}{\Sigma A}$$

$$\bar{y} = \frac{132718,28 \text{ mm}^3}{5707,13 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{y} = 23,255 \text{ mm}$$

Determinación del centro de gravedad por áreas comunes

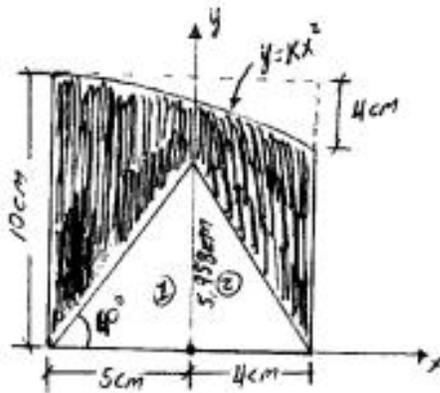


Fig.	Area (cm ²)	\bar{x} (cm)	\bar{y} (cm)	$\bar{x}A$ (cm ³)	$\bar{y}A$ (cm ³)
Rectángulo	90	-0,5	5	-45	450
Triángulo 1	-14,9	-5/3	1,9862	+24,83	-29,6
Triángulo 2	-11,9175	4/3	1,9862	-15,89	-23,6705
Adjunta.	-12	1,75	8,8	-21	-105,6
	$\Sigma A = 56,1825$			$\Sigma = -57,056$	$\Sigma = 291,1295$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A \bar{x}}{\Sigma A}$$

$$\bar{x} = \frac{-57,056 \text{ cm}^3}{56,1825 \text{ cm}^2}$$

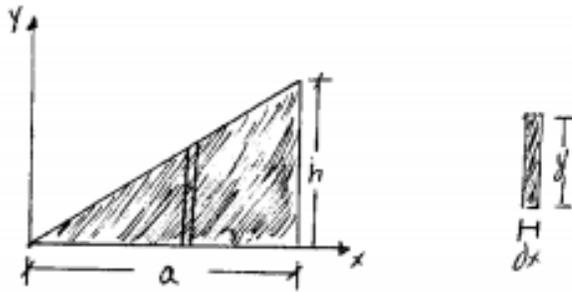
$$\bar{x} = -1,1147 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A \bar{y}}{\Sigma A}$$

$$\bar{y} = \frac{291,1295 \text{ cm}^3}{56,1825 \text{ cm}^2}$$

$$\bar{y} = 5,689 \text{ cm}$$

Determinación de Centróide Por integración



$$m = \frac{h - 0}{a - 0} = h/a$$

$$y = \frac{h}{a}x$$

$$\bar{x}_{el} = x$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{hx}{2a}$$

$$A\bar{x} = \int \bar{x}_{el} dA \quad ; \quad A\bar{y} = \int \bar{y}_{el} dA$$

$$dA = y dx$$

$$\int_0^a dA = \int_0^a \frac{hx}{a} dx \Rightarrow A = \frac{h}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a$$

$$A = \frac{ha}{2} \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{x}A = \int_0^a x \cdot \frac{hx}{a} dx \Rightarrow A\bar{x} = \frac{h}{a} \int_0^a x^2 dx$$

$$A\bar{x} = \frac{h}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a \Rightarrow \bar{x} \left[\frac{ha}{2} \right] = \frac{ha^2}{3}$$

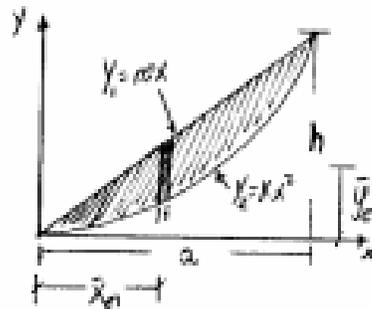
$$\bar{x} = \frac{2}{3}a \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{y}A = \int_0^a \frac{hx}{2a} \cdot \frac{hx}{a} \cdot dx \Rightarrow \bar{y}A = \frac{h^2}{2a^2} \int_0^a x^2 dx$$

$$\bar{y}A = \frac{h^2}{2a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a \Rightarrow \bar{y} \left[\frac{ha}{2} \right] = \frac{h^2a}{6}$$

$$\bar{y} = h/3 \quad \blacktriangleleft$$

Determinación de centroides por integración



$$y = \frac{h}{a}x - \frac{h}{a^2}x^2$$

$$y = \frac{h}{a^2}[ax - x^2]$$

$$\bar{x}_c = x \quad \bar{y}_c = \frac{\frac{h}{3}x + \frac{h}{6}x^2}{x} = \frac{h}{6} \left[\frac{ax + x^2}{x} \right]$$

Para $y_1 = mx$

$$m = \frac{h-0}{a-0} = \frac{h}{a}$$

$$y_1 = \frac{h}{a}x$$

Para $y_2 = kx^2$

$$h = a^2k$$

$$k = \frac{h}{a^2}$$

$$y = \frac{h}{a^2}x^2$$

$$dA = y dx$$

$$\int_0^A dA = \int_0^a \frac{h}{a^2} [ax - x^2] dx \Rightarrow A = \frac{h}{a^2} \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^a$$

$$A = \frac{h}{a^2} \left[\frac{a^3}{6} \right] = \frac{ha}{6} \quad \blacktriangledown$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_c dA \Rightarrow \bar{x}A = \int_0^a x \cdot \frac{h}{a^2} [ax - x^2] dx$$

$$\bar{x}A = \frac{h}{a^2} \int_0^a (ax^2 - x^3) dx \Rightarrow \bar{x}A = \frac{h}{a^2} \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] \Big|_0^a$$

$$\bar{x} \cdot \left[\frac{ha}{6} \right] = \frac{h}{a^2} \left[\frac{a^4}{12} \right] = \frac{ha^2}{12}$$

$$\bar{x} = \frac{a}{2} \quad \blacktriangledown$$

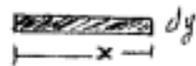
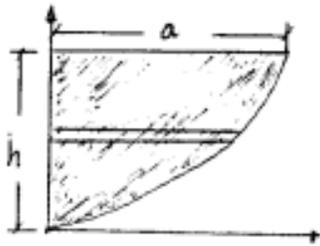
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_c dA \Rightarrow \bar{y}A = \int_0^a \frac{h[ax + x^2]}{2a^2} \cdot \frac{h[ax - x^2]}{a^2} dx$$

$$\bar{y}A = \frac{h^2}{2a^4} \int_0^a [(ax)^2 - (x^2)^2] dx \Rightarrow \bar{y}A = \frac{h^2}{2a^4} \left[\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right] \Big|_0^a$$

$$\bar{y} \left[\frac{ha}{6} \right] = \frac{h^2}{2a^4} \left[\frac{2a^5}{15} \right] = \frac{h^2 a}{15}$$

$$\bar{y} = \frac{2h}{5} \quad \blacktriangledown$$

Taller Determinación del centro de Gravedad por integración



$$y = Kx^3$$

$$h = Ka^3$$

$$K = \frac{h}{a^3}$$

$$y = \frac{h}{a^3} x^3$$

$$x = \frac{a}{h^{1/3}} y^{1/3}$$

$$\bar{x}_{c1} = \frac{x}{2} = \frac{h^{-1/3} a y^{1/3}}{2}$$

$$\bar{y}_{c1} = y$$

$$dA = x dy$$

$$\int_0^h dA = \int_0^h \frac{a}{h^{1/3}} y^{1/3} dy$$

$$A = \frac{a}{h^{1/3}} \left[\frac{3}{4} y^{4/3} \right]_0^h$$

$$A = ah^{-1/3} \cdot \frac{3}{4} h^{4/3}$$

$$A = \frac{3}{4} ah$$

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{c1} dA$$

$$\bar{y}A = \int_0^h y \frac{a}{h^{1/3}} y^{1/3} dy$$

$$\bar{y}A = \frac{a}{h^{1/3}} \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^h$$

$$\bar{y} \left[\frac{3}{4} ah \right] = \frac{a \cdot 3 \cdot h^2}{5}$$

$$y = \frac{4}{5} h$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{c1} dA$$

$$\bar{x}A = \int_0^h \frac{a}{2h^{1/3}} y^{1/3} \cdot \frac{a}{h^{1/3}} y^{1/3} dy$$

$$\bar{x}A = \frac{a^2}{2h^{2/3}} \int_0^h y^{2/3} dy$$

$$\bar{x}A = \frac{a^2}{2h^{2/3}} \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^h$$

$$\bar{x} \left[\frac{3}{4} ah \right] = \frac{3a^2 h}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{5} a$$

- Capacidad de comprensión y planteamiento de alternativas de solución de problemas que involucren el dibujo técnico.
- Poseer formación básica común, que se fundamente y apropie de los conocimientos científicos y la comprensión teórica para la formación de un pensamiento innovador e inteligente.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.

RESUMEN

276 Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad

Teoremas de Pappus-Guldinus

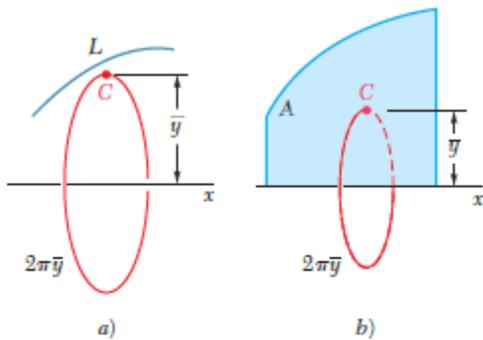


Figura 5.25

Cargas distribuidas

Los teoremas de Pappus-Guldinus relacionan la determinación del área de una superficie de revolución o el volumen de un cuerpo de revolución con la determinación del centroide de la curva generatriz o del área generatriz [sección 5.7]. El área A de la superficie generada al rotar una curva de longitud L con respecto a un eje fijo (figura 5.25a) es igual a

$$A = 2\pi\bar{y}L \quad (5.10)$$

donde \bar{y} representa la distancia desde el centroide C de la curva hasta el eje fijo. En forma similar, el volumen V del cuerpo generado al rotar un área A alrededor de un eje fijo (figura 5.25b) es igual a

$$V = 2\pi\bar{y}A \quad (5.11)$$

donde \bar{y} representa la distancia desde el centroide C del área hasta el eje fijo.

El concepto de centroide de un área también se puede utilizar para resolver otros problemas distintos de aquellos relacionados con el peso de placas planas. Por ejemplo, para determinar las reacciones en los apoyos de una viga [sección 5.8], se puede reemplazar una *carga distribuida* w por una carga concentrada W igual en magnitud al área A bajo la curva de carga y que pasa a través del centroide C de dicha área (figura 5.26). Se puede utilizar el mismo procedimiento para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre una *placa rectangular que está sumergida en un líquido* [sección 5.9].

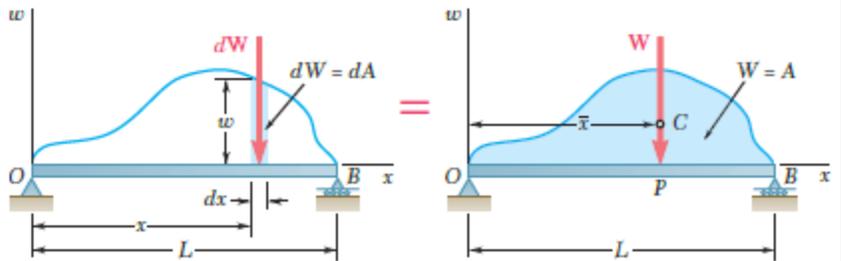
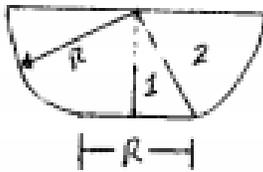


Figura 5.26

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
Aplicación del teorema de Pappus-Guldinus	Presentación de conceptos y desarrollo de ejercicios Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 26)	4	Lectura sobre lo visto en clase. Exposición de superficies sumergidas	8	4	Evaluación de los conceptos (TALLER 4)

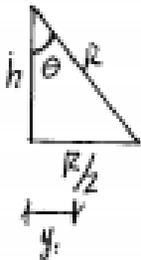
Superficies en revolución



Determine la capacidad en litros del recipiente
si $R = 250 \text{ mm}$

$$V = 2\pi [A_1 X_1 + A_2 Y_2]$$

Para 1



$$h^2 = R^2 - \left[\frac{R}{2}\right]^2 \Rightarrow h = \sqrt{250^2 - 125^2} = 216,5063 \text{ mm}$$

$$A_1 = \frac{h \cdot R/2}{2} = \frac{216,5063 \cdot 250}{4} = 13531,647 \text{ mm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$Y_1 = \frac{R/2}{3} = \frac{250}{6} = 41,6 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

Para 2.



$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = \pi/6$$

Primero determino θ de la figura 1.

$$\text{sen } \theta = \frac{R/2}{R} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

Por lo tanto el ángulo del arco es 60°

$$d_2 = \frac{2R \text{sen } \alpha}{3\alpha} = \frac{2 \cdot 250 \cdot \text{sen } 30}{3 \cdot \frac{\pi}{6}} = 159,155 \text{ mm}$$

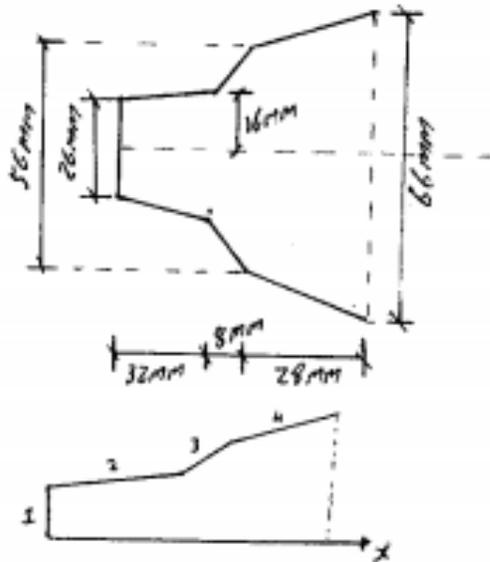
$$y_2 = d_2 \cos 30 = 137,8322 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

$$A_2 = \alpha R^2 = \frac{\pi}{6} (250)^2 = 32724,9234 \text{ mm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$V = 31883191,95 \text{ mm}^3 \cdot \left(\frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ mm}}\right)^3 \cdot \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ cm}^3}$$

$$V = 31,8832 \text{ L} \quad \blacktriangleleft$$

Taller Sólidos en revolución



El espesor de la figura es de 1 mm y es uniforme. Si el material es aluminio ($\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$), determine la masa del reflector.

$$A = 2\pi \bar{y} L = 2\pi \sum \bar{y} L$$

Para 1.

$$L_1 = 13 \text{ mm}$$

$$y_1 = 6,5 \text{ mm}$$

Para 2.

$$L_2 = \sqrt{32^2 + 3^2} = 32,1403 \text{ mm}$$

$$y_2 = 13 + 1,5 = 14,5 \text{ mm}$$

Para 3

$$L_3 = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13} \text{ mm}$$

$$y_3 = 16 + 6 = 22 \text{ mm}$$

Para 4

$$L_4 = \sqrt{28^2 + 5^2} = \sqrt{809} \text{ mm}$$

$$y_4 = 28 + 2,5 = 30,5 \text{ mm}$$

$$A = 2\pi (L_1 \bar{y}_1 + L_2 \bar{y}_2 + L_3 \bar{y}_3 + L_4 \bar{y}_4)$$

$$A = 2\pi (13 \cdot 6,5 + 32,1403 \cdot 14,5 + 4\sqrt{13} \cdot 22 + \sqrt{809} \cdot 30,5)$$

$$A = 10903,41305 \text{ mm}^2$$

$$V = A t$$

$$V = 10903,41305 \cdot 1$$

$$V = 10903,41305 \text{ mm}^3 \cdot \left(\frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}}\right)^3$$

$$V = 1,090341305 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

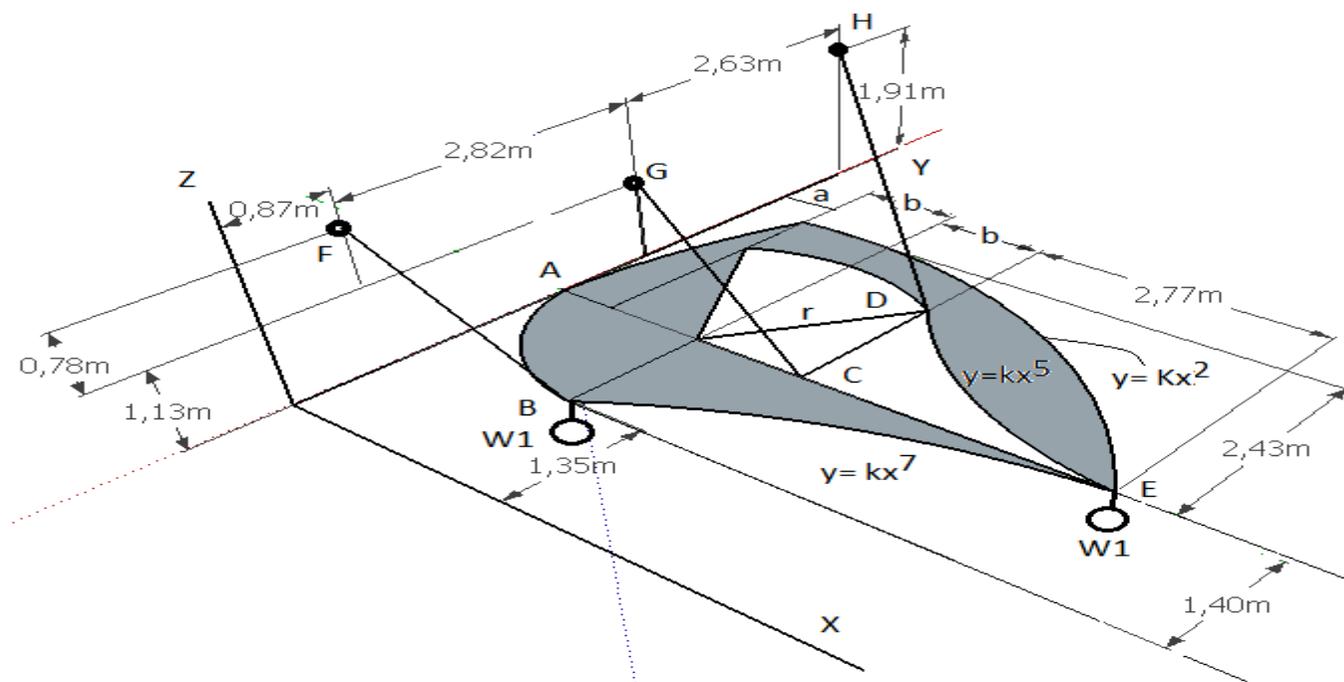
$$m = \rho V = 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,090341305 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$m = 0,03053 \text{ kg} \quad \blacktriangleleft$$

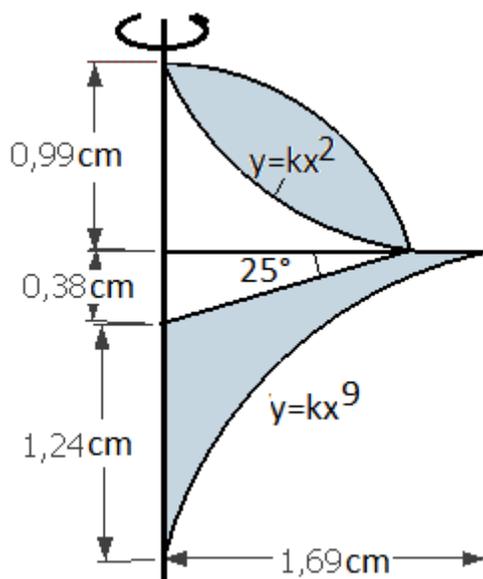
SEGUNDO PRE-PARCIAL DE ESTÁTICA

Nombre _____ Grupo _____

1. La placa mostrada tiene un peso de 250N y se soporta mediante una rotula en A y tres cables BF, CG y DH, además se le colocan dos solidos por revolución en B y E. Para estas condiciones, determine:
 - a) El peso del solido por revolución mostrado en la figura si tiene un peso específico de 12,5 N/cm³ (valor 1.0)
 - b) El centro de gravedad de la placa (valor 2.0), si $a=0,6\text{m}$ y $b=0,9\text{m}$ y $r=1,92\text{m}$.
 - c) El valor de las tensiones y las reacciones en A (valor 2.0)



ESQUEMA W1



Para el sólido en Revolución

fig.	Área (cm ²)	\bar{x} (cm)	$\bar{x}A$ (cm ³)
1	0,6337	0,346	0,22
2	-0,26895	0,2445	-0,06576
3	-0,15485	0,2716	-0,042069
4	0,27378	0,1536	0,042062

$$\Sigma \bar{x}A = 0,154235$$

$$V = 2\pi \Sigma \bar{x}A$$

$$V = 0,97 \text{ cm}^3$$

$$W = \rho V$$

$$W = 12,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}^3} \cdot 0,97 \text{ cm}^3$$

$$W = 12,125 \text{ N}$$

f.g	Área (m ²)	\bar{x} (m)	\bar{y} (m)	$\bar{x}A$ (m ³)	$\bar{y}(A)$ (m ³)
1	1,65	1,4263	-2,156	2,3698	-3,5574
2	0,64225	1,9077	-2,376	1,2252	-1,526
3	0,729	0,4	-3,56	0,2916	-2,59524
4	-1,8015	1,5	-3,98	-2,70225	7,17
5	-0,7632	2,1	-3,31533	-1,60272	2,53026
6	-0,783	2,7957	-3,225	-2,189	2,51538
7	11,1051	2,885	-3,965	32,04	-44,0317
8	-2,9727	4,285	-4,851	-12,6414	13,2314

$$\Sigma A = 7,80595$$

$$\Sigma \bar{x}A = 16,79123 \quad \Sigma \bar{y}A = -26,2633$$

$$\bar{x} = 2,15108 \text{ m}$$

$$\bar{y} = -3,3645 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 A & (0; -2,75; 0) \\
 B & (1,5; -1,35; 0) \\
 C & (2,4; -2,75; 0) \\
 D & (2,4; -4,416; 0) \\
 E & (5,17; -2,75; 0) \\
 F & (0; -0,87; 1,91) \\
 G & (0; -3,69; 1,13) \\
 H & (0; -6,32; 1,91)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{AB} &= (1,5 \hat{i} + 1,4 \hat{j} + 0 \hat{k}) \\
 Y_{AC} &= 2,4 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} \\
 Y_{AD} &= 2,4 \hat{i} - 1,696 \hat{j} + 0 \hat{k} \\
 Y_{AE} &= 5,17 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} \\
 \vec{T}_{BF} &= \frac{T_{BF}}{2,4756} (-1,5 \hat{i} + 0,48 \hat{j} + 1,91 \hat{k}) \\
 \vec{T}_{CG} &= \frac{T_{CG}}{2,8143} (-2,4 \hat{i} - 0,94 \hat{j} + 1,13 \hat{k}) \\
 \vec{T}_{DH} &= \frac{T_{DH}}{3,6} (-2,4 \hat{i} - 1,874 \hat{j} + 1,91 \hat{k})
 \end{aligned}$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1,5 & 1,4 & 0 \\ T_{BF} & -0,666 & 0,2 & 0,771 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2,4 & 0 & 0 \\ T_{CG} & -0,8528 & -0,334 & 0,4015 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2,4 & -1,696 & 0 \\ T_{DH} & -0,666 & -0,5205 & 0,5305 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2,15128 & -3,2645 & 0 \\ 0 & 0 & -230 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1,5 & 1,4 & 0 \\ 0 & 0 & -12,125 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12,125 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 M_A &= T_{BF} (1,08 \hat{i} - 1,1565 \hat{j} + 1,1484 \hat{k}) + T_{CG} (0 \hat{i} - 0,9636 \hat{j} - 0,8016 \hat{k}) + T_{DH} (-0,9 \hat{i} - 1,2732 \hat{j} - 2,38 \hat{k}) \\
 &+ (841,125 \hat{i} + 537,77 \hat{j}) + (-16,975 \hat{i} + 18,1875 \hat{j}) + 62,6962 \hat{j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum M_x = 0 & \quad 1,08 T_{BF} + 0 - 0,9 T_{DH} = -824,15 & T_{BF} &= 3281,32 \text{ N} \\
 \sum M_y = 0 & \quad -1,1565 T_{BF} - 0,9636 T_{CG} - 1,2732 T_{DH} = -618,6437 & T_{CG} &= -9708,832 \text{ N} \\
 \sum M_z = 0 & \quad 1,1484 T_{BF} - 0,8016 T_{CG} - 2,38 T_{DH} = 0 & T_{DH} &= 4853,305 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -0,666 T_{BF} - 0,8528 T_{CG} - 0,666 T_{DH} + R_x = 0$$

$$R_x = -3055,678 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 0,2 T_{BF} - 0,334 T_{CG} - 0,5205 T_{DH} + R_y = 0$$

$$R_y = -1372,868 \text{ N}$$

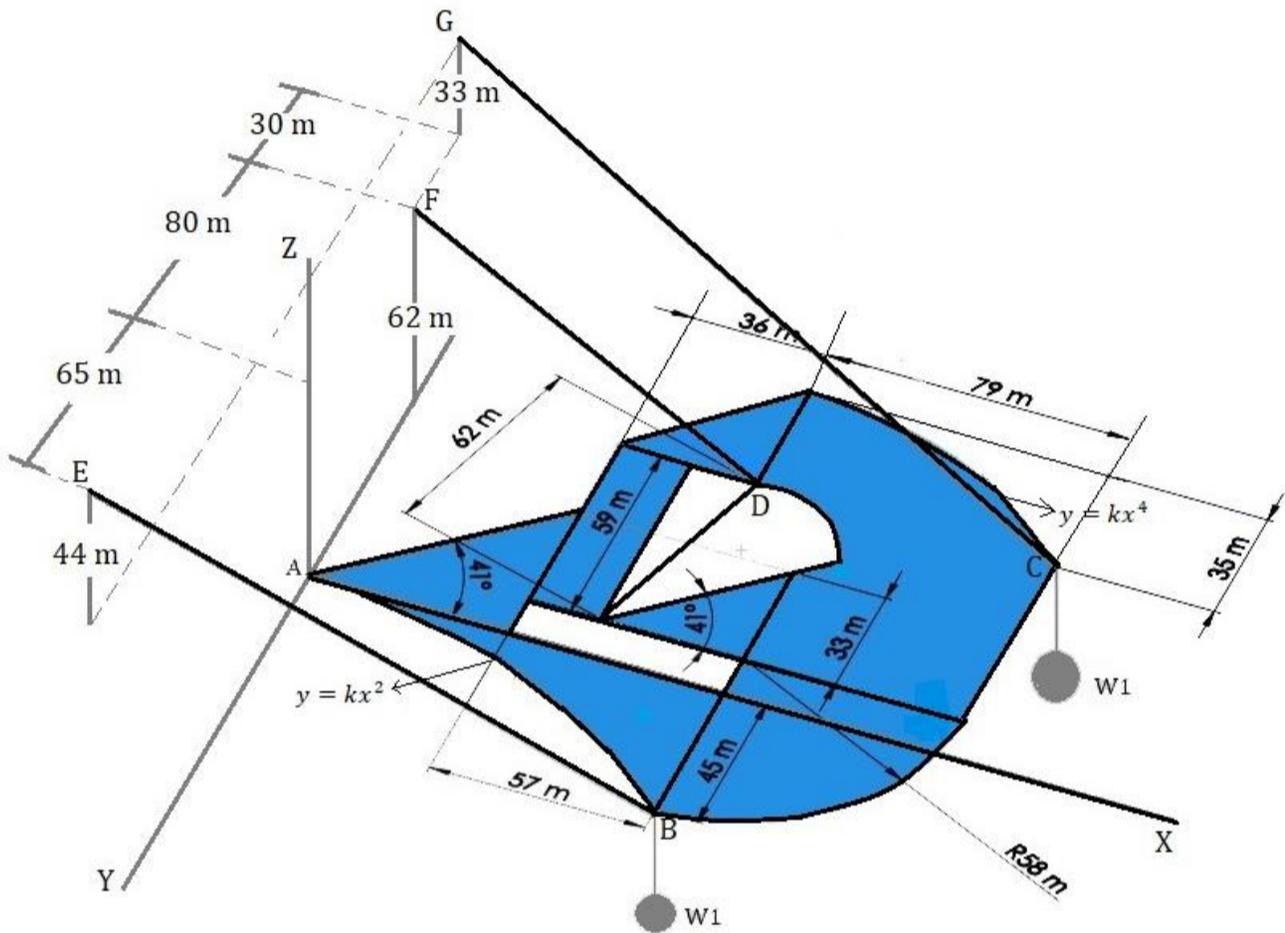
$$R_z = -1206,48 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0 \quad 0,771 T_{BF} + 0,4015 T_{CG} + 0,5305 T_{DH} + R_z = 0$$

SEGUNDO PARCIAL ESTÁTICA 2019_2

Nombre: _____ Fecha: _____ Nota: _____

1. La placa mostrada tiene un peso de 320MN y se soporta mediante una rotula en A y tres cables BE, CG y DF, además se le colocan dos sólidos por revolución en B y C. Para estas condiciones, determine:
 - a) El peso del sólido por revolución mostrado en la figura si tiene un peso específico de 25 N/cm³ (valor 1.0)
 - b) El centro de gravedad de la placa (valor 2.0)
 - c) El valor de las tensiones y las reacciones en A (valor 2.0)



ESQUEMA W1

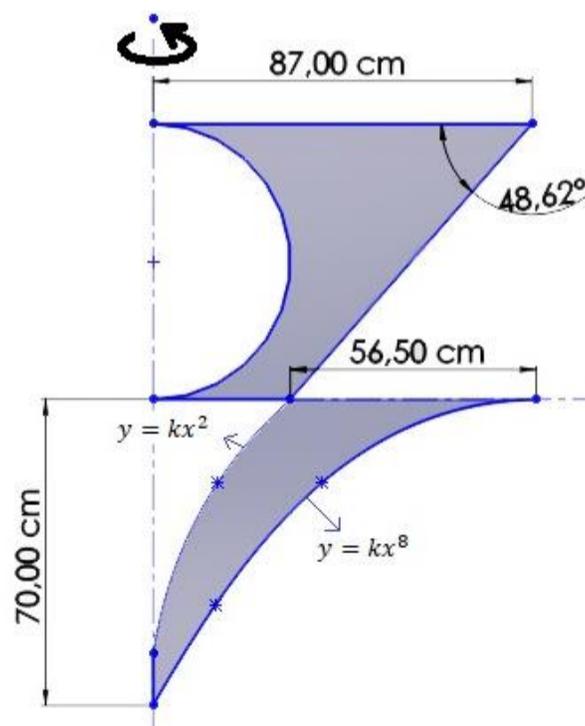


Fig	Área (cm)	\bar{x} (cm)	$A\bar{x}$ (cm)
I	5307	43,5	230854,5
II	-1723,25	68,16	-117468,2083
III	-1461,2333	12,7446	-18915,08333
IV	676,6	8,7	5887
V	-610	9,15	-5581,5

$$\Sigma A = 2189,2 \quad \Sigma A\bar{x} = 94776,70837$$

$$\bar{x} = 43,3 \text{ cm}$$

$$V = 2\pi \bar{x} \Sigma A$$

$$V = 595,6 \times 10^3 \text{ cm}^3$$

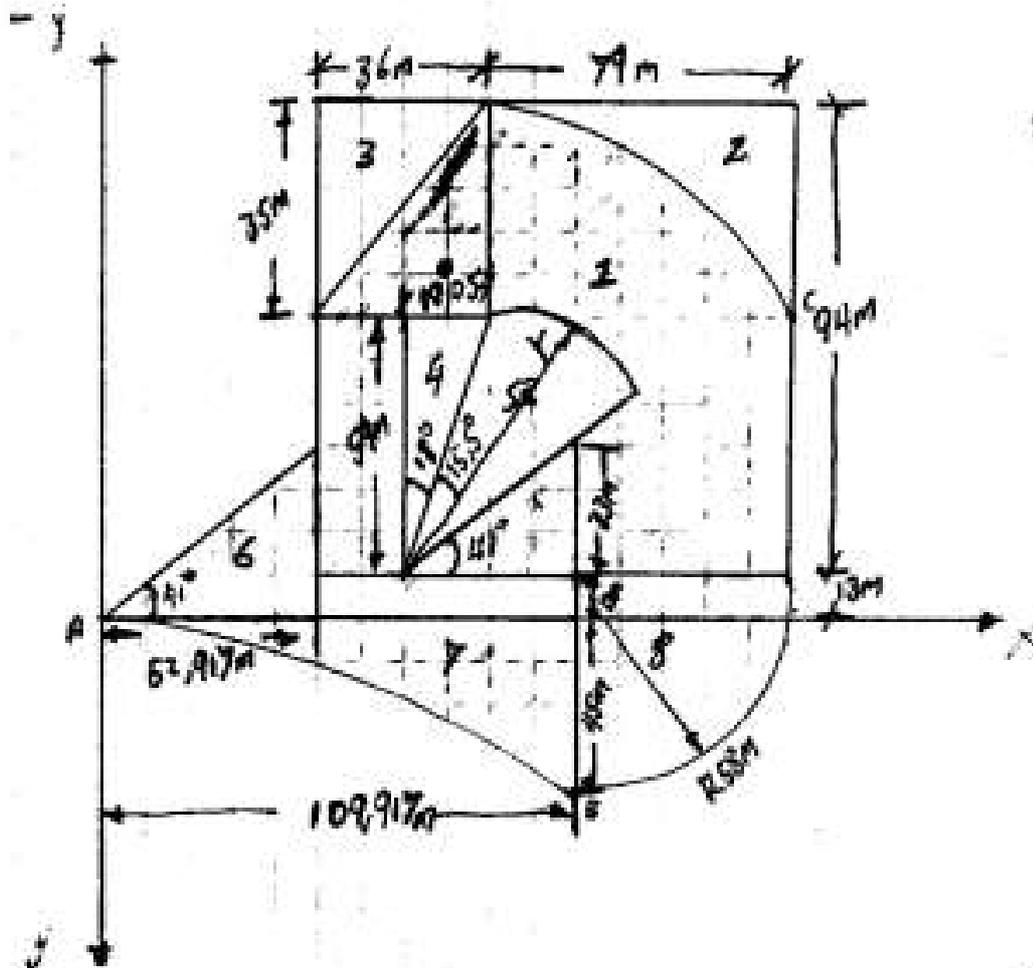
$$W = \rho V$$

$$W = 14,8999 \text{ MN}$$

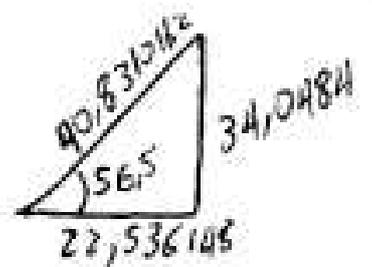
$$W = 15 \text{ MN}$$

b.

Fig	Área (m ²)	\bar{x} (cm)	\bar{y} (cm)	xA (cm ³)	yA (cm ³)
I	10810	110,417	-60	1193607,77	-648600
II	-553	154,7503	-97,27	-85576,9343	5394,6111
III	-630	64,917	-95,3	-40897,71	60060
IV	-562,0509	76,2153	-52,3	-42836,8444	29413,976
V	-1040	92,4006	-47,0484	-96096,624	48930,336
VI	1217,1	35,278	-15,3	42936,8538	-18662,2
VII	1648,755	82,43775	+13,5	135919,6525	22258,2
VIII	8417	134,533	11,616	355446,8708	30690,4
	13532,984			1462503,031	-47054,077



$r = 62m$



$$\bar{x} = 108,070314 \text{ m}$$

$$\bar{y} = -34,76825 \text{ m}$$

$$\vec{T}_{CG} = T_{CG} \left[\frac{-167,917\hat{i} - 38\hat{j} + 95\hat{k}}{196,6345} \right]$$

$$\vec{T}_{DF} = T_{DF} \left[\frac{-88,917\hat{i} - 8\hat{j} + 62\hat{k}}{108,9} \right]$$

$$\vec{T}_{BE} = T_{BE} \left[\frac{-109,917\hat{i} + 20\hat{j} + 139\hat{k}}{178,3332} \right]$$

$$M_x = 0$$

$$M_x = -675 \times 10^6 \hat{i} + 1648,755 \times 10^6 \hat{j} + 1080 \times 10^6 \hat{k} + 2518,755 \times 10^6 \hat{j} \\ + 1125,84 \times 10^6 \hat{i} + 34582,496 \times 10^6 \hat{j} + T_{CG} [-34,78536\hat{i} - 81,1257\hat{j} - 95,0714\hat{k}] \\ + T_{DF} [-41,0666\hat{i} - 50,71557\hat{j} - 65,4403\hat{k}] \\ + T_{BE} [35,1\hat{i} - 85,73526\hat{j} + 40,0607\hat{k}]$$

$$M_y = 0$$

$$-41,0666 T_{DF} - 34,78536 T_{CG} + 35,1 T_{BE} = -11530,84 \times 10^6$$

$$M_z = 0$$

$$-50,71557 T_{DF} - 81,1257 T_{CG} - 85,73526 T_{BE} = 38750,006 \times 10^6$$

$$M_x = 0$$

$$-65,4403 T_{DF} - 95,0714 T_{CG} + 40,0607 T_{BE} = 0$$

$$T_{DF} = 308,1082 \text{ MN (T)}$$

$$T_{CG} = -339,34 \text{ MN (C)}$$

$$T_{BE} = -310,178 \text{ MN (C)}$$

- Capacidad de comprensión y planteamiento de alternativas de solución de problemas que involucran el dibujo técnico.
- Dar soluciones de fondo, tanto en lo técnico como en lo práctico, a los problemas de diseño de obras industriales, mediante herramientas de dibujo.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.
- Capacidad de realizar una tarea de forma independiente, ejecutándola de principio hasta el final de forma autónoma.
- Capacidad de iniciativa o habilidad y disposición para tomar decisiones sobre propuestas o acciones.

- **RESUMEN**

En este capítulo se aprendió a determinar las *fuerzas internas* que mantienen unidas a las distintas partes de una estructura.

La primera mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de *armaduras*, es decir, el análisis de estructuras constituidas por *elementos rectos que están conectados únicamente en sus extremos*. Como los elementos son delgados e incapaces de soportar cargas laterales, todas las cargas deben estar aplicadas en las uniones o nodos; por tanto, una armadura está constituida por *pernos y por elementos sujetos a dos fuerzas* [sección 6.2].

Se dice que una armadura es *rígida* si está diseñada de modo que no se deformará mucho o se colapsará bajo la acción de una carga pequeña. Una armadura triangular constituida por tres elementos conectados en tres nodos es una armadura rígida (figura 6.25a). De la misma forma, también será una armadura rígida la que se obtiene agregándole a dicha armadura triangular dos nuevos elementos y conectándolos en un nuevo nodo (figura 6.25b). Las armaduras que se obtienen repitiendo este procedimiento reciben el nombre de *armaduras simples*. Se puede comprobar que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos [sección 6.3].

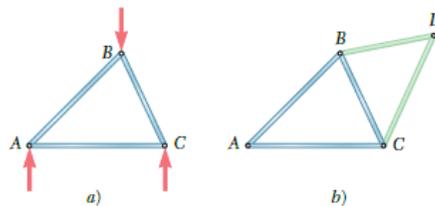


Figura 6.25

Por el *método de los nodos* [sección 6.4] se pueden determinar las fuerzas en los distintos elementos de una armadura simple. Primero, se obtienen las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como un cuerpo libre. Después se dibuja el diagrama de cuerpo libre para cada perno, mostrando las fuerzas ejercidas sobre el mismo por los elementos o apoyos que éste conecta. Como los elementos que constituyen a la armadura son elementos rectos sujetos a dos fuerzas, la fuerza ejercida por un elemento sobre el perno está dirigida a lo largo de dicho elemento y, por tanto, sólo se desconoce su magnitud. En el caso de una armadura simple, siempre se pueden dibujar los diagramas de cuerpo libre de los pernos en un orden tal que únicamente se incluyen dos incógnitas en cada diagrama. Estas fuerzas se obtienen a partir de las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes o —si sólo están involucradas tres fuerzas— a partir

Análisis de armaduras

Armaduras simples

Método de los nodos

del triángulo de fuerzas correspondiente. Si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia el perno, dicho elemento está en *compresión*; si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia fuera de éste, dicho elemento está en *tensión* [problema resuelto 6.1]. Algunas veces se simplifica el análisis de una armadura si se identifican primero los *nodos que se encuentran bajo condiciones especiales de carga* [sección 6.5]. El método de los nodos también se extiende para el análisis de *armaduras espaciales* o tridimensionales [sección 6.6].

Método de secciones

El *método de secciones* es más eficaz que el método de los nodos cuando únicamente se desea determinar la fuerza en un solo elemento —o en muy pocos elementos— [sección 6.7]. Por ejemplo, para determinar la fuerza en el elemento BD de la armadura de la figura 6.26a, se *pasa una sección* a través de los elementos BD , BE y CE , se remueven dichos elementos y se usa la porción ABC de la armadura como un cuerpo libre (figura 6.26b). Si se escribe $\Sigma M_E = 0$, se determina la magnitud de la fuerza F_{BD} , la cual representa la fuerza en el elemento BD . Un signo positivo indica que el elemento está en *tensión*; un signo negativo indica que el elemento está en *compresión* [problemas resueltos 6.2 y 6.3].

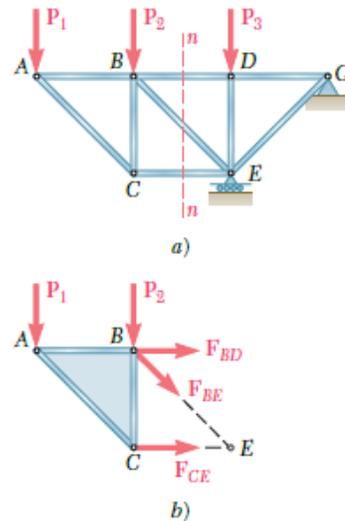


Figura 6.26

Armaduras compuestas

El método de secciones es útil para el análisis de *armaduras compuestas*, esto es, armaduras que no se pueden construir a partir de la armadura triangular básica de la figura 6.25a, pero que se obtienen conectando rígidamente varias armaduras simples [sección 6.8]. Si las armaduras simples que constituyen a la armadura compuesta han sido conectadas en forma apropiada (por medio de un perno y un eslabón o por medio de tres eslabones que no son concurrentes ni paralelos) y si la estructura resultante está bien apoyada (por medio de un perno y un rodillo), la armadura compuesta será *estáticamente determinada, rígida y completamente restringida*. Entonces se satisface la siguiente condición necesaria —pero no suficiente—: $m + r = 2n$, donde m es el número de elementos, r es el número de incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos y n es el número de nodos.

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada al análisis de *armazones y máquinas*. Ambas son estructuras que contienen *elementos sujetos a fuerzas múltiples*, sobre los cuales actúan tres o más fuerzas. Los armazones están diseñados para soportar cargas y usualmente son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las máquinas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas y siempre contienen partes móviles [sección 6.9].

Para *analizar un armazón*, primero se considera al *armazón completo como un cuerpo libre* y se escriben tres ecuaciones de equilibrio [sección 6.10]. Si el armazón permanece rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran sólo tres incógnitas y se pueden determinar a partir de dichas ecuaciones de equilibrio [problemas resueltos 6.4 y 6.5]. Por otra parte, si el armazón deja de ser rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran más de tres incógnitas y no pueden determinarse todas las incógnitas a partir de las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo [sección 6.11; problema resuelto 6.6].

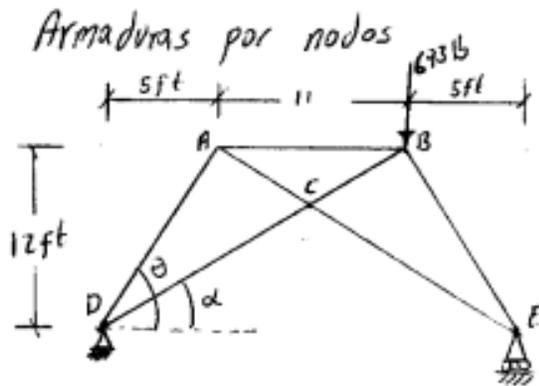
Cuando se *desensambla el armazón* y se identifican los diversos elementos que lo constituyen como elementos sujetos a dos fuerzas o elementos sujetos a fuerzas múltiples, se supone que los pernos forman una parte integral de uno de los elementos que éstos conectan. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples, observando que cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados al mismo elemento sujeto a dos fuerzas, este último actúa sobre los elementos sujetos a fuerzas múltiples con *fuerzas iguales y opuestas de magnitud desconocida pero cuya dirección es conocida*. Cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados por un perno, éstos ejercen entre sí *fuerzas iguales y opuestas cuya dirección es desconocida*, las cuales se deben representar por *dos componentes desconocidas*. Entonces se pueden resolver las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples para determinar las distintas fuerzas internas [problemas resueltos 6.4 y 6.5]. También pueden emplearse las ecuaciones de equilibrio para completar la determinación de las reacciones en los apoyos [problema resuelto 6.6]. De hecho, si el armazón es *estáticamente determinado y rígido*, los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples pueden proporcionar un número de ecuaciones igual al número de fuerzas desconocidas (incluyendo las reacciones) [sección 6.11]. Sin embargo, como se sugirió, es conveniente considerar primero el diagrama de cuerpo libre para el armazón completo con el fin de minimizar el número de ecuaciones que se deben resolver de manera simultánea.

Armazones y máquinas

Análisis de un armazón

Elementos sujetos a fuerzas múlt

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
<p>Armaduras</p> <p>Armazones</p>	<p>Presentación de conceptos y desarrollo de ejercicios</p> <p>Método de secciones y método de nodos para el cálculo de fuerzas internas.</p> <p>Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 27, ANEXO 28, ANEXO 29)</p>	4	<p>Lectura sobre lo visto en clase.</p> <p>Construcción de una estructura y análisis para el cálculo de las fuerzas internas en sus eslabones</p>	8	4	Avances del proyecto



$$\tan \alpha = \frac{12}{16}$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{12}{5}$$

$$\theta = 67,38^\circ$$

$$\sum M_D = 0$$

$$-693 \cdot 16 + E_y \cdot 21 = 0$$

$$E_y = 528 \text{ lb}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$D_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$D_y + E_y - 693 = 0$$

$$D_y = 165 \text{ lb}$$

Nodo D

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{DA} \cos \theta + F_{DC} \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{DA} \sin \theta + F_{DC} \sin \alpha = -165$$

$$F_{DA} = -260 \text{ lb} = 260 \text{ lb (C)} \checkmark$$

$$F_{DC} = 125 \text{ lb (T)} \checkmark$$

Nodo A.

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{AD} \sin \theta - F_{AC} \sin \alpha = 0$$

$$F_{AC} = 400 \text{ lb (T)} \checkmark$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AB} + F_{AC} \cos \alpha - F_{AD} \cos \theta = 0$$

$$F_{AB} = -420 \text{ lb} = 420 \text{ lb (C)} \checkmark$$

Nodo E

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{EB} \sin \theta + F_{EC} \sin \alpha = -528$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{EB} \cos \theta - F_{EC} \cos \alpha = 0$$

$$F_{EB} = -932 \text{ lb} = 932 \text{ lb (C)} \checkmark$$

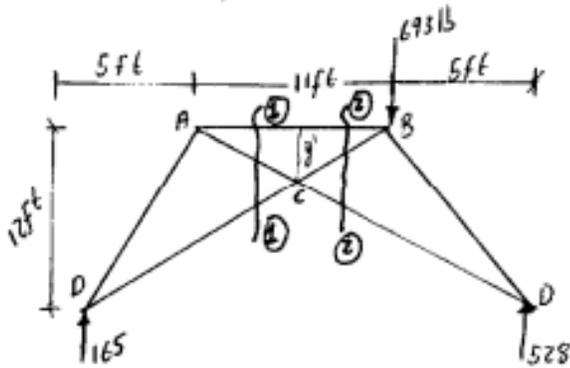
$$F_{EC} = 400 \text{ lb (T)} \checkmark$$

Nodo C.

$$F_{AC} = F_{EC} = 400 \text{ lb (T)}$$

$$F_{CB} = F_{CD} = 125 \text{ lb (T)} \checkmark$$

Armadura por secciones



$$\tan \alpha = \frac{12}{16}$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

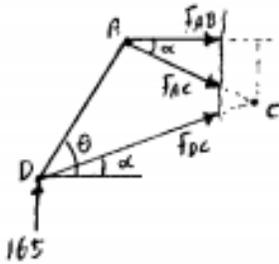
$$\tan \theta = \frac{12}{5}$$

$$\theta = 67,38^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{y'}{5,5}$$

$$y' = 4,125 \text{ ft}$$

Analizando corte 1-1



$$\sum M_C = 0$$

$$-165 \cdot 10,5 - F_{AB} \cdot 4,125 = 0$$

$$F_{AB} = -420 \text{ lb} = 420 \text{ lb (C)} \quad \blacktriangledown$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AB} + F_{BC} \cos \alpha + F_{DC} \cos \alpha = 0$$

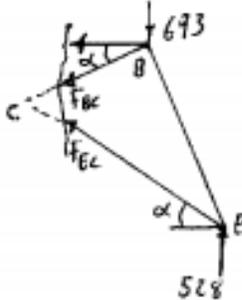
$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{AC} \sin \alpha + F_{DC} \sin \alpha = -165$$

$$F_{BC} = 400 \text{ lb (T)} \quad \blacktriangledown$$

$$F_{DC} = 125 \text{ lb (T)} \quad \blacktriangledown$$

Analizando el corte 2-2



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{BA} - F_{BC} \cos \alpha - F_{EC} \cos \alpha = 0$$

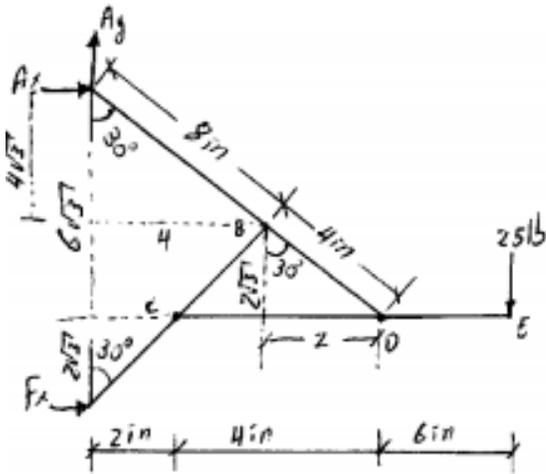
$$\sum F_y = 0$$

$$-693 + 528 - F_{BC} \sin \alpha + F_{EC} \sin \alpha = 0$$

$$F_{BC} = 125 \text{ lb (T)}$$

$$F_{EC} = 400 \text{ lb (T)}$$

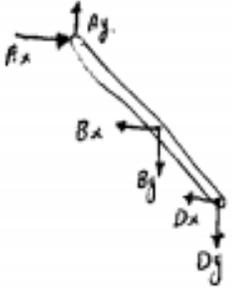
ARMAZONES



determine las componentes en cada elemento.

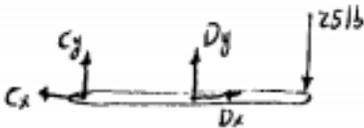
$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ F_x \cdot 8\sqrt{3} - 25 \cdot 12 &= 0 \\ F_x &= 12,5\sqrt{3} \text{ lb} \downarrow \\ \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 \\ A_x + F_x &= 0 & A_y - 25 &= 0 \\ A_x &= -12,5\sqrt{3} \text{ lb} \downarrow & A_y &= 25 \text{ lb} \downarrow \end{aligned}$$

Elemento ABC



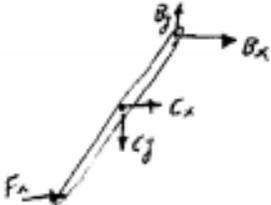
$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ -A_y \cdot 4 - A_x \cdot 4\sqrt{3} - D_x \cdot 2\sqrt{3} - D_y \cdot 2 &= 0 \\ D_x &= -12,5\sqrt{3} \text{ lb} \downarrow \end{aligned}$$

elemento CDE



$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0 \\ D_y \cdot 4 - 25 \cdot 10 &= 0 \\ D_y &= 62,5 \text{ lb} \downarrow \\ \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 \\ -C_x + D_x &= 0 & -25 + D_y + C_y &= 0 \\ C_x &= D_x & C_y &= -37,5 \text{ lb} \downarrow \\ C_x &= -12,5\sqrt{3} \text{ lb} \downarrow \end{aligned}$$

elemento FCB



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 \\ B_x + C_x + F_x &= 0 & B_y - C_y &= 0 \\ B_x &= 0 \downarrow & B_y &= -37,5 \text{ lb} \downarrow \end{aligned}$$

UNIDAD N 6

VIGAS

CLASE 18_19: VIGAS

- Capacidad de comprensión y planteamiento de alternativas de solución de problemas que involucren el dibujo técnico.
- Dar soluciones de fondo, tanto en lo técnico como en lo práctico, a los problemas de diseño de obras industriales, mediante herramientas de dibujo.
- Capacidad de organización y responsabilidad del trabajo para desarrollar las tareas con eficacia y eficiencia.
- Capacidad de realizar una tarea de forma independiente, ejecutándola de principio hasta el final de forma autónoma.
- Capacidad de iniciativa o habilidad y disposición para tomar decisiones sobre propuestas o acciones.

RESUMEN

En este capítulo se aprendió a determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes de un elemento dado en una estructura.

Al considerar primero un *elemento recto sujeto a dos fuerzas AB* [sección 7.2], se recuerda que un elemento de este tipo está sometido en A y B a fuerzas iguales y opuestas F y $-F$ que están dirigidas a lo largo de AB (figura 7.19a). Si se corta el elemento AB en C y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AC , se concluye que las fuerzas internas que existían en el elemento AB en C son equivalentes a una *fuerza axial* $-F$ igual y opuesta a F (figura 7.19b). Se observa que en el caso de un elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto, las fuerzas internas se reducen a un sistema fuerza-par y no a una sola fuerza.

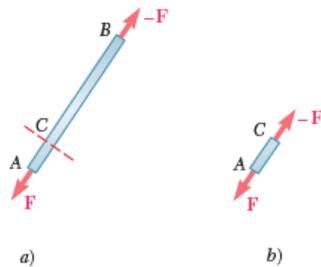


Figura 7.19

Si se considera después un *elemento sujeto a fuerzas múltiples AD* (figura 7.20a), se corta en J y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte JD , se concluye que las fuerzas internas en J son equivalentes a un sistema fuerza-par que consta de la *fuerza axial*, F , la *fuerza cortante* V y un par M (figura 7.20b). La magnitud de la fuerza cortante mide la *fuerza cortante* en el punto J y se hace referencia al momento del par como el *momento flector* en J. Puesto que, si se hubiera considerado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AJ , se hubiera obtenido un sistema fuerza-par igual y opuesto es necesario especificar qué porción del elemento AD se utilizó cuando se registraron las respuestas [problema resuelto 7.1].

La mayor parte del capítulo se dedicó al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería: las *vigas* y los *cables*. Las *vigas* comúnmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas que se aplican en varios puntos a lo largo del elemento. En general, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y sólo producen *corte* y *flexión* en ésta. Las cargas pueden estar *concentradas* en puntos específicos o *dis-*

Fuerzas en elementos rectos sujetos a dos fuerzas

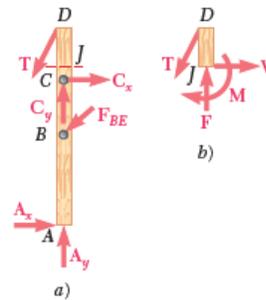
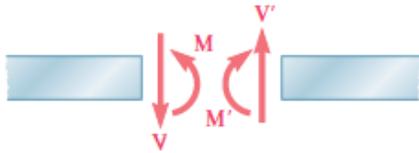


Figura 7.20

Fuerzas en elementos sujetos a fuerzas múltiples

Fuerzas en vigas

Fuerza cortante y momento flector en una viga



Fuerzas internas en la sección (fuerza cortante y momento flector positivo)

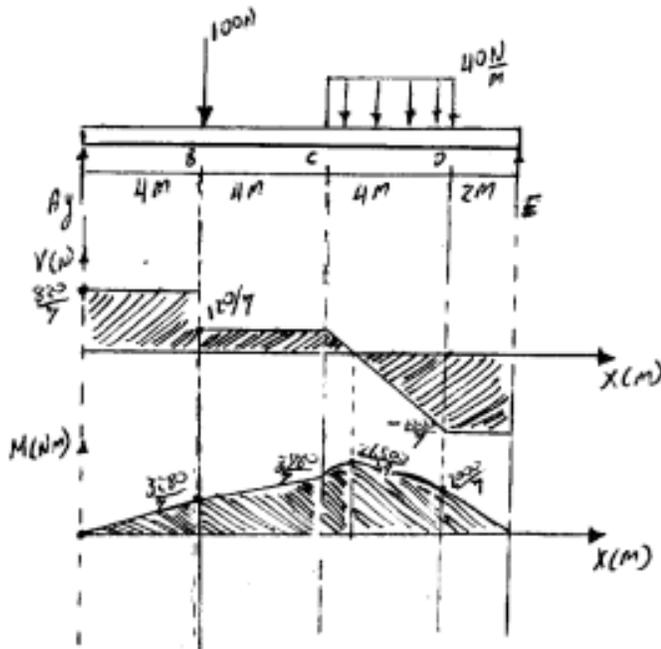
Figura 7.21

tribuidas a lo largo de toda la longitud o a lo largo de una porción de la viga. La viga misma puede estar apoyada de varias formas; puesto que en este libro sólo se consideran vigas estáticamente determinadas, el análisis se limitó a *vigas simplemente apoyadas*, *vigas con volados* y *vigas en voladizo* [sección 7.3].

Para obtener la *fuerza cortante V* y el *momento flector M* en un punto dado *C* de una viga, primero se determinan las reacciones en los apoyos considerando toda la viga como un cuerpo libre. Entonces, se corta a la viga en *C* y se usa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos partes obtenidas de esta manera para determinar los valores de *V* y *M*. Para evitar cualquier confusión en relación con el sentido de la fuerza cortante *V* y el par *M* (los cuales actúan en direcciones opuestas en las dos porciones de la viga), se adoptó la convención de signos que se ilustra en la figura 7.21 [sección 7.4]. Una vez que se han determinado los valores de la fuerza cortante y el momento flector en unos cuantos puntos seleccionados de la viga, usualmente es posible dibujar un *diagrama de fuerza cortante* y un *diagrama de momento flector* que representan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga [sección 7.5]. Cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas [problema resuelto 7.2]. Por otra parte, cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente [problema resuelto 7.3].

Contenidos	Actividades a desarrollar por el profesor	Horas contacto directo	Actividades a desarrollar por el estudiante	Horas trabajo independiente	Horas acompañamiento al trabajo independiente	Estrategias de evaluación que incluya la evaluación del trabajo independiente
Diagrama de fuerza cortante	Presentación de conceptos y desarrollo de ejercicios	4	Lectura sobre lo visto en clase.	8	4	Avances del proyecto
Diagrama de momento flector	Conceptos sobre fuerza cortante y momento flector		Desarrollo de ejercicios en vigas con diversos tipos de cargas y apoyos.			
Diagramas para cargas puntuales	Clases de cargas sobre una viga Cálculo por cortes		Cálculo de la fuerza cortante y el momento flector			
Diagramas para cargas distribuidas	Procedimiento de construcción de los diagramas					
Diagramas para cargas combinadas	Ejercicios resueltos en clase (ANEXO 30 , ANEXO 31 , ANEXO 32)					

VIGAS



$$\sum M_A = 0$$

$$-100 \cdot 4 - 160 \cdot 10 + E_y \cdot 14 = 0$$

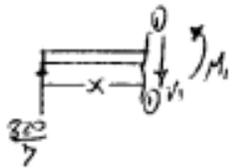
$$E_y = 1000/7 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 100 - 160 + E_y = 0$$

$$A_y = 820/7 \text{ N}$$

corte A-B $0 \leq x \leq 4$



$$\sum M_D = 0$$

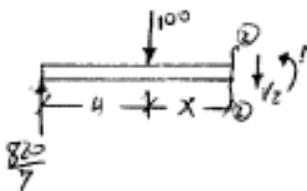
$$M_1 - \frac{820}{7}x = 0$$

$$M_1 = \frac{820}{7}x$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_1 = \frac{820}{7}$$

corte B-C $0 \leq x \leq 4$



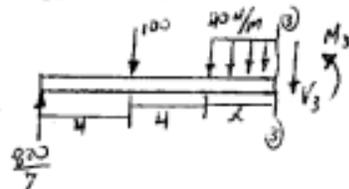
$$\sum M_D = 0$$

$$M_2 + 100x - \frac{820}{7}(x+4) = 0$$

$$M_2 = \frac{120}{7}x + \frac{3280}{7}$$

$$V_2 = \frac{120}{7}$$

corte C-D $0 \leq x \leq 4$



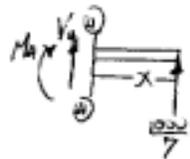
$$\sum M_D = 0$$

$$M_3 - \frac{820}{7}(x+8) + 100(x+4)$$

$$+ 40x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M_3 = -20x^2 + \frac{120}{7}x + \frac{3760}{7}$$

corte E-D $2 \leq x \leq 0$



$$\sum M_D = 0$$

$$-M_4 + \frac{1000}{7}x = 0$$

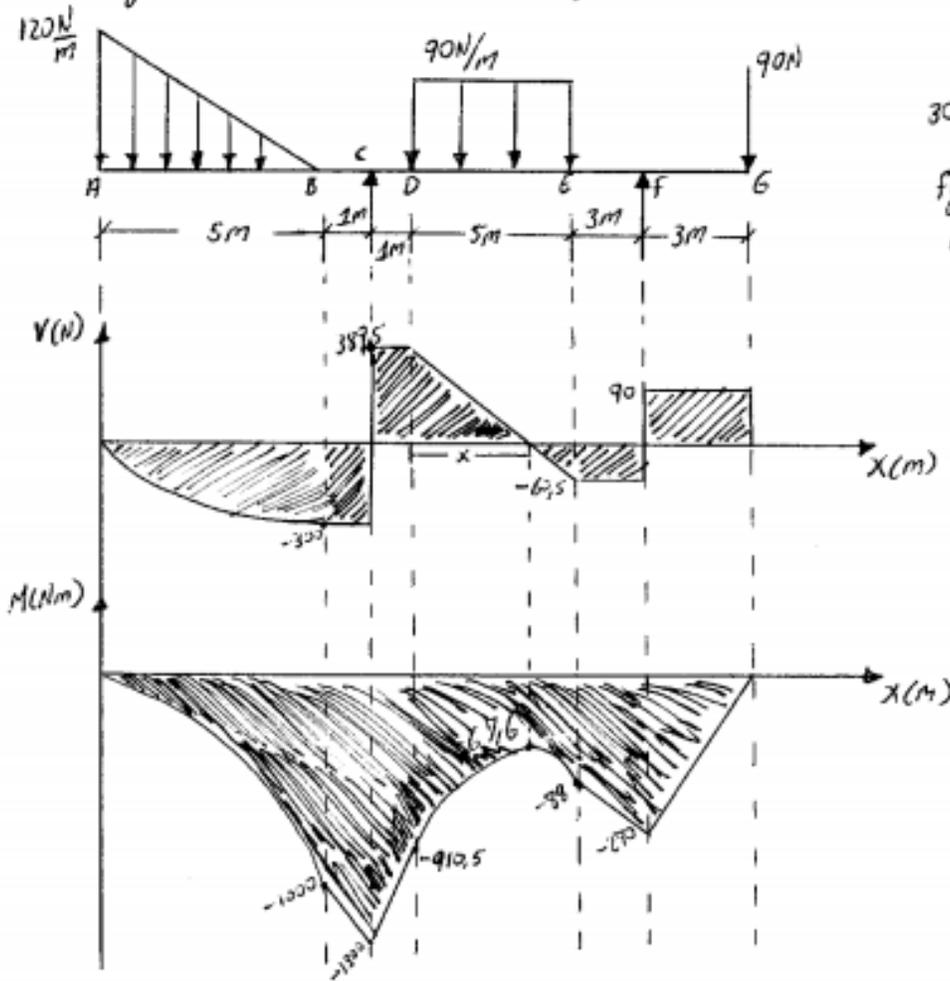
$$M_4 = \frac{1000}{7}x$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_4 + \frac{1000}{7} = 0$$

$$V_4 = -\frac{1000}{7}$$

Diagrama de Cortante (V) y momento flector (M) a partir de Areas.

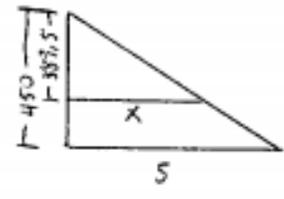


$$\sum M_c = 0$$

$$300 \left(6 - \frac{5}{3}\right) - 450 \cdot 3,5 + F_y \cdot 9 - 90 \cdot 12 = 0$$

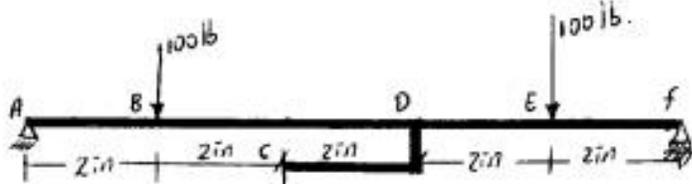
$$F_y = 150,5 \text{ N}$$

$$C_y = 689,5 \text{ N}$$



$$\frac{x}{5} = \frac{389,5}{450} \Rightarrow x = 4,327 \text{ m}$$

Viga con un brazo



$$M_D = 100 \cdot 2 = 200 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$\sum M_A = 0$$

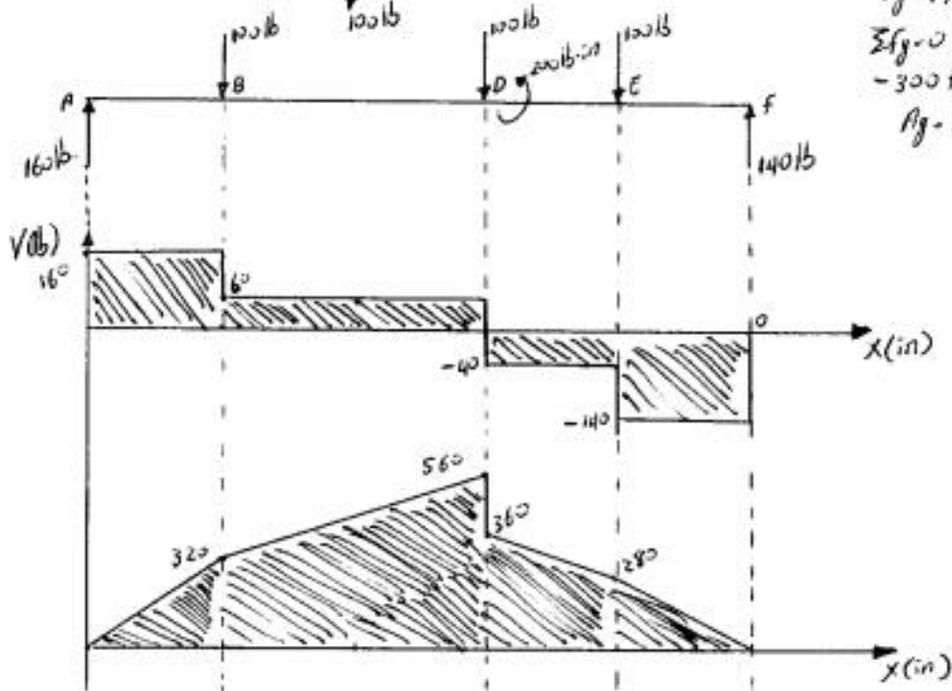
$$-100 \cdot 2 - 100 \cdot 6 + 200 - 100 \cdot 8 + 100 f_y = 0$$

$$f_y = 140 \text{ lb}$$

$$\sum f_y = 0$$

$$-300 + f_y + R_f = 0$$

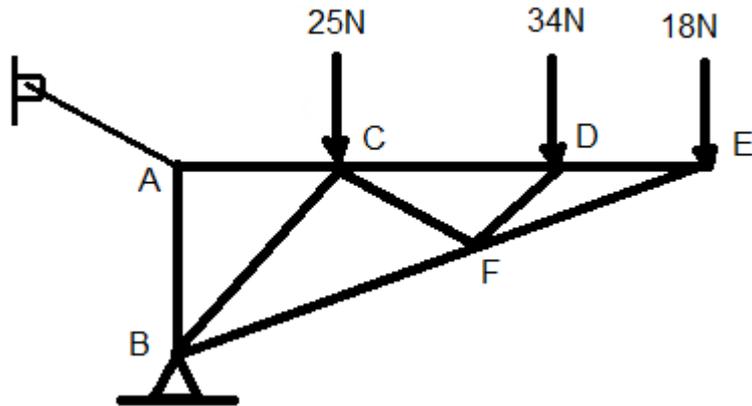
$$R_f = 160 \text{ lb}$$



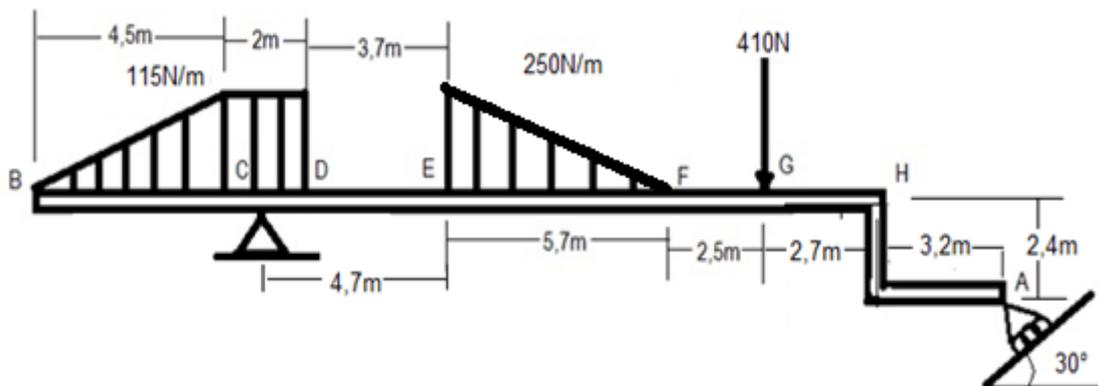
PRE-PARCIAL FINAL DE ESTÁTICA

NOMBRE _____ GRUPO _____

1. Para la estructura mostrada determine el valor de las fuerzas internas AC, BC, BF, CD, FD Y EF. (Valor 2,5)



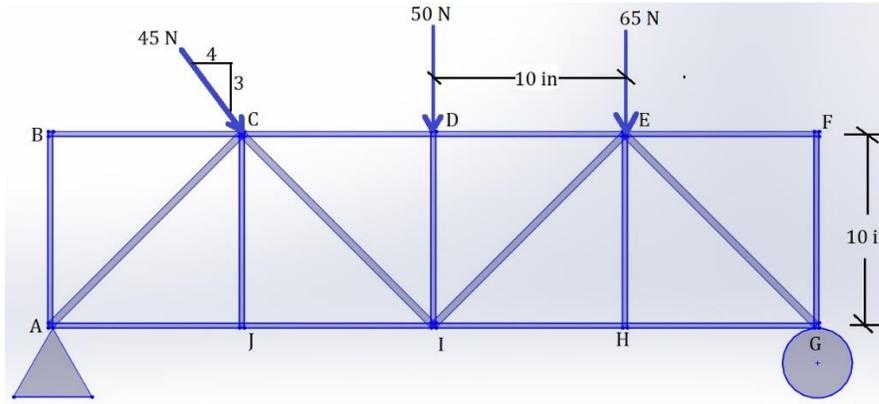
2. Determine el diagrama cortante y flector de la viga y los cálculos requeridos en cada corte.



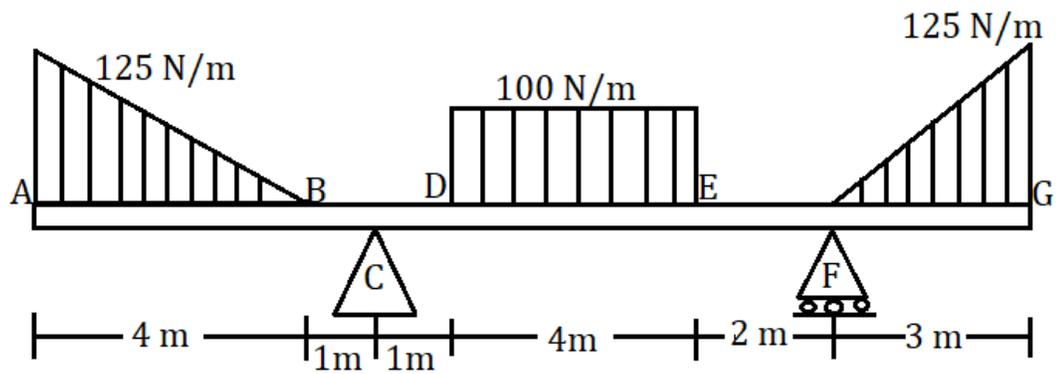
PARCIAL ESTÁTICA 2019_2

Nombre: _____ Fecha: _____ Nota: _____

1. Para la estructura mostrada determine el valor de las fuerzas internas AC, CI, DE, EI Y HI. (Valor 1,6)



2. Determine el diagrama cortante y flector de la viga por medio de cálculos requeridos en cada corte. (Valor 1,7)



3. Determine el diagrama cortante y flector de la viga por medio de áreas. (Valor 1,7)

