

# Neutrinos pesados de Majorana y el origen de la materia oscura en el paradigma de *Freeze-in*



**Belcy Rocío Portilla Rojas**

Universidad de Pamplona  
Facultad de Ciencias Básicas  
Pamplona, Norte de Santander, Colombia  
16 de diciembre de 2021

# Neutrinos pesados de Majorana y el origen de la materia oscura en el paradigma de *Freeze-in*



**Belcy Rocío Portilla Rojas**

Tesis presentada como requisito para optar al título de:

**Físico**

Director(a):

Título Ph.D José Germán Salazar Arias

Codirector(a):

Título Ph.D Blanca Cecilia Cañas Orduz

Línea de Investigación:

Física de partículas elementales. Física Teórica.

Universidad de Pamplona  
Facultad de Ciencias Básicas  
Pamplona, Norte de Santander, Colombia  
2021

A mi hija:  
por todas las veces en que el juego debió hacerse  
esperar.

# Agradecimientos

A mis asesores, Dr. José Germán Salazar Arias y Dra. Blanca Cecilia Cañas Orduz, por todo el apoyo y la infinita paciencia.

A mi familia y a mi hija, quien con su sonrisa me impulsaba cada día a continuar sin importar cuantas veces hubiera pensado en desistir.

## Resumen

En el presente trabajo se expone un modelo para producción de materia oscura escalar a partir de neutrinos pesados de Majorana por medio del mecanismo de freeze-in. Estos neutrinos forman parte del modelo estándar mínimamente extendido, cuya diferencia principal con el modelo estándar es que incluye neutrinos derechos. El acoplamiento entre las partículas de materia oscura y dichos neutrinos es de tipo Yukawa. La herramienta principal para la producción de materia oscura es la ecuación de Boltzmann, por medio de esta se halla el número de partículas en función del cociente entre la masa de los neutrinos pesados de Majorana y la temperatura del universo. En particular, se encontraron cotas para la masa de la materia oscura y su acoplamiento con los neutrinos derechos. Además, se mostró la viabilidad del modelo para la producción de materia oscura a partir de neutrinos pesados.

**Palabras clave:** Materia oscura, neutrinos de Majorana, reliquias térmicas, cosmología estándar.

## Abstract

In the present work, a model for the production of scalar dark matter from heavy Majorana neutrinos by means of the freeze-in mechanism is exposed. These neutrinos are part of the minimally extended standard model, whose main difference from the standard model is that it includes straight neutrinos. The coupling between the dark matter particles and these neutrinos is of the Yukawa type. The main tool for the production of dark matter is the Boltzmann equation, through which the number of particles is found as a function of the quotient between the mass of Majorana's heavy neutrinos and the temperature of the universe. In particular, bounds were found for the mass of dark matter and its coupling with the right neutrinos. In addition, the feasibility of the model for the production of dark matter from heavy neutrinos was shown.

# Lista de Figuras

<b>2-1.</b> Cúmulo de galaxias Bullet: muestra la colisión de dos cúmulos de galaxias. La zona mostrada en rosa corresponde a materia bariónica formada principalmente por gas, la cual, debido a su interacción se retrasa respecto a la zona en azul, correspondiente a materia oscura, la cual, a diferencia del gas solamente interactúa gravitacionalmente y pasa sin deformarse [2]. . . . .	5
<b>3-1.</b> Evolución de los parámetros de densidad ( $\Omega_i$ ) obtenidos a partir de la evolución del sistema dinámico dado en las Ec. (3-72 - 3-77). (Se escribió un código en Phyton para la evolución del sistema, el cual se incluye en el Anexo D). . . . .	21
<b>5-1.</b> Acoplamiento tipo Yukawa. . . . .	29
<b>5-2.</b> Canales de co-aniquilación de neutrinos permitidos por la Ec. (5-8) para la producción de partículas de DM. . . . .	31
<b>5-3.</b> Vértices permitidos por los acoplamientos dados en la Ec. (5-12). Podemos ver el canal del Higgs neutro ( $h^0$ ) y del Higgs cargado ( $h^-$ ), que aparecen en el doblete definido en la Ec. (5-9). Estos canales acoplan los neutrinos derechos con las partículas del SM. . . . .	33
<b>6-1.</b> Producción de DM a partir de neutrinos pesados de Majorana con acoplamiento tipo Yukawa, cuya evolución está dada por la Ec. (6-37). (Se escribió un código en Phyton para la evolución del modelo, el cual se incluye en el Anexo D). . . . .	40

# Lista de símbolos

En esta tesis se usan unidades naturales, donde  $c = \hbar = k_B = 1$  (adimensionales).

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidades	Definición
$a(t)$	Factor de escala	$eV^0$	
$c$	Velocidad de la luz	$eV^0$	$c = 1$
$g_{ab}$	Tensor métrico	$eV^0$	
$M_{pl}$	Masa de Planck reducida	$eV$	$M_{pl} = 2,4353232036 \times 10^{27}$
$G_N$	Constante de gravitación universal	$\frac{1}{eV^2}$	$G_N = \frac{1}{8\pi M_{pl}^2}$
$g_*(T)$	Grados de libertad efectivos relativistas	$eV^0$	
$g_{*s}$	Grados de libertad efectivos en entropía	$eV^0$	
$G^{mn}$	Tensor de curvatura de Einstein	$eV^2$	$Ec : (A - 24)$
$H$	Parámetro de Hubble	$eV$	$Ec : (3 - 34)$
$H_0$	Parámetro de Hubble actual	$eV$	$H_0 = 1,4382431715 \times 10^{-33}$
$\hat{L}$	Operador de Liouville	$eV^3$	$Ec : (4 - 3)$
$p$	Densidad de presión	$eV^4$	
$R$	Escalar de Ricci	$eV^2$	$Ec : (A - 9)$
$R_{ab}$	Tensor de Ricci	$eV^2$	$Ec : (3 - 3)$
$R_{\mu\sigma\nu}^{\rho}$	Tensor de Riemann	$eV^2$	$Ec : (C - 26)$
$S$	Entropía	$eV$	$Ec : (6 - 1)$
$\mathfrak{s}$	Densidad de entropía	$eV^3$	$\mathfrak{s} = \frac{S}{V}$
$T$	Temperatura	$eV$	
$T_0$	Temperatura actual del universo	$eV$	$2,34865337 \times 10^{-4}$
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía-momento	$eV^4$	$Ec : (3 - 6)$

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidades	Definición
$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$	Símbolos de Christoffel	$eV$	$Ec : (3 - 4)$
$\kappa$	Curvatura espacial	$\frac{1}{eV^2}$	$\kappa = 8\pi G_N$
$\Omega_b$	Parámetro de densidad bariónica	$eV^0$	
$\Omega_{DM}$	Parámetro de densidad de materia oscura	$eV^0$	
$\Omega_{\gamma}$	Parámetro de densidad de fotones	$eV^0$	
$\Omega_{\nu}$	Parámetro de densidad de neutrinos	$eV^0$	
$\Omega_{\Lambda}$	Parámetro de densidad de la constante cosmológica	$eV^0$	
$\sigma$	Sección eficaz total de aniquilación	$\frac{1}{eV^2}$	$Ec : (4 - 31)$
$\rho$	Densidad de energía	$eV^4$	
$\rho_c$	Densidad crítica	$eV^4$	$Ec : (6 - 32)$
$\Lambda$	Constante Cosmológica	$eV^2$	

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
$DM$	Materia Oscura
$GR$	Relatividad General
$SM$	Modelo Estándar
$SM - ME$	Modelo Estándar Mínimamente Extendido
$FLRW$	Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker
$FIMP$	Partículas de DM que interactúan débilmente

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Materia oscura</b>	<b>3</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	3
2.2. Evidencia observacional . . . . .	4
2.3. Tipos . . . . .	5
2.3.1. Enfoque de la física de partículas . . . . .	5
2.3.2. Enfoque cosmológico . . . . .	6
2.4. Candidatos . . . . .	7
2.4.1. Materia oscura bariónica . . . . .	7
2.4.2. Materia oscura no bariónica . . . . .	8
<b>3. Revisión cosmológica</b>	<b>9</b>
3.1. El principio cosmológico . . . . .	9
3.2. Ecuaciones de campo de Friedmann . . . . .	9
3.2.1. Tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ . . . . .	10
3.3. La constante cosmológica . . . . .	13
3.4. Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	15
3.4.1. Evolución numérica . . . . .	19
3.4.2. Densidad crítica y parámetros de densidad . . . . .	20
<b>4. Producción de materia oscura en el universo temprano</b>	<b>22</b>
4.1. La ecuación de Boltzmann . . . . .	23
4.2. Freeze-In . . . . .	25
<b>5. Modelo para producción de DM a partir de neutrinos pesados de Majorana</b>	<b>28</b>
5.1. Lagrangiano del modelo . . . . .	29

5.2.	Conexión de nuestro modelo con el modelo estándar (SM)	31
5.2.1.	Lagrangiano de Yukawa en el SM-ME	31
5.3.	Otros canales de aniquilación para los neutrinos	33
<b>6.</b>	<b>Fenomenología del modelo y resultados</b>	<b>34</b>
6.1.	Número de partículas en el volumen comóvil	34
6.1.1.	Evolución en la temperatura	36
6.1.2.	Transformación de la integral interior	36
6.2.	Densidad esperada de materia oscura	38
6.3.	Resultados numéricos	39
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>A.</b>	<b>Anexo: Gravedad de Einstein</b>	<b>44</b>
A.1.	Acción y Densidad Lagrangiana de Hilbert	45
<b>B.</b>	<b>Anexo: Métrica de un universo homogéneo e isotrópico</b>	<b>47</b>
<b>C.</b>	<b>Anexo: Símbolos de Christoffel y tensor de Riemann en un universo FLRW</b>	<b>50</b>
C.1.	Símbolos de Christoffel	50
C.2.	Tensor de Riemann	53
C.2.1.	Tensor de Ricci	53
C.2.2.	Escalar de Ricci	56
<b>D.</b>	<b>Anexo: Códigos en lenguaje Python</b>	<b>57</b>
D.1.	Modelo $\Lambda$ CDM: parámetros de densidad	57
D.2.	Freeze-in: producción de DM a partir de neutrinos pesados de Majorana	58
	<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

\*

# 1. Introducción

A mediados del siglo XX Jan Hendrik Oort examinó el movimiento de las estrellas en los límites de la Vía Láctea, concluyendo que había una ausencia de materia bastante significativa [1]. En 1970 Ford y Rubin encontraron que las velocidades de los objetos intergalácticos no disminuían en función del radio, sino que permanecían constantes, por lo que debería existir una gran cantidad de masa que no hace parte de los objetos estelares, la cual proporciona la fuerza para mantener las órbitas. A esta materia faltante se le denominó materia oscura (DM), siendo esta un tipo de materia que no absorbe ni emite radiación electromagnética [2].

La existencia de materia oscura puede abordarse desde la cosmología o la física de partículas. Como se verá en detalle más adelante, entre los candidatos a materia oscura desde el enfoque cosmológico se pueden encontrar: materia oscura fría, materia oscura tibia, materia oscura caliente, entre otros; mientras que para el enfoque de la física de partículas se presentan: neutralinos supersimétricos, axiones, axinos, gravitinos, partículas similares a axiones (ALP), neutrinos dentro del SM, etc.

En este trabajo se propone un modelo de producción de materia oscura escalar en el universo temprano a partir de la aniquilación de neutrinos pesados de Majorana, los cuales están formados por singletes derechos pertenecientes al modelo estándar mínimamente extendido. La interacción entre los neutrinos y la materia oscura es de tipo Yukawa. La producción de materia oscura usando dichos neutrinos como fuente por medio del mecanismo de freeze-in es un proceso que no se ha explorado con profundidad anteriormente. En esta tesis hemos estudiado la viabilidad de este canal de producción y hemos encontrado cotas inferiores para la masa del escalar y su acoplamiento con los neutrinos.

Estos temas se discuten a lo largo de esta tesis de la siguiente manera:

El capítulo 2 está dedicado al estudio de la materia oscura, sus antecedentes, evidencia observacional y el análisis de algunos candidatos desde diferentes perspectivas.

El capítulo 3 se enfoca en una revisión cosmológica, la cual va desde qué es la cosmología misma; su pilar fundamental, el principio cosmológico y la métrica acorde con el mismo, la métrica de Friedmann, Lemaitre, Robertson, Walker; hasta el estudio de las ecuaciones que describen un universo homogéneo e isotrópico, las ecuaciones de Friedmann. Posteriormente

se hace una breve introducción a la cosmología de Friedmann con constante cosmológica. Como parte final se presenta la dinámica del modelo estándar de la cosmología,  $\Lambda$ CDM.

En el capítulo 4 se explica la producción de materia oscura en el universo temprano y se hace una revisión de la herramienta principal de dicho proceso, la cual es la ecuación de Boltzmann. Se hace una breve introducción a los paradigmas de producción de reliquias haciendo énfasis en el modelo de *freeze-in*, el cual está enfocado a partículas que interactúan débilmente.

El capítulo 5 expone un modelo para producción de materia oscura a partir de la co-aniquilación de neutrinos pesados de Majorana. Se hace una breve revisión del modelo estándar mínimamente extendido, en el cual están contenidos dichos neutrinos, los cuales son usados como fuente para la producción de materia oscura.

En el capítulo 6 se implementa el modelo propuesto en esta tesis dentro del paradigma de *freeze-in*. Se plantea la ecuación de Boltzmann y se transforma convenientemente para facilitar su evolución numérica. El capítulo concluye con los resultados obtenidos.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones.

Finalmente se incluyen tres anexos, en el anexo A se hace una revisión exhaustiva de la gravedad de Einstein; en el anexo B se deduce la métrica de Friedmann, Lemaitre, Robertson, Walker; y en el anexo C se calculan los símbolos de Christoffel y el tensor de Riemann para esta métrica, a partir de los cuales se obtienen las ecuaciones de Friedmann.

## 2. Materia oscura

A lo largo del proceso de indagación de la física del universo, uno de los interrogantes más importantes ha sido la distribución de sus componentes, El descubrimiento de que la materia bariónica (materia constituida por neutrones, protones y electrones), entre ella la inmensa cantidad de objetos estelares, es apenas el 5% de la masa-energía en el cosmos, hizo necesario el estudio de física nueva [3].

La materia restante, de naturaleza desconocida, se compone de  $\sim 73\%$  de materia gravitacionalmente repulsiva, por lo que aceleraría la expansión del Universo, a la que se le dio el nombre de **energía oscura** y,  $\sim 23\%$  de materia gravitacionalmente atractiva, denominada **materia oscura**, la cual no emite ni absorbe radiación electromagnética, por lo que su presencia se ha detectado debido al efecto producido sobre la rotación en las galaxias y el movimiento de otros objetos celestes [2].

### 2.1. Antecedentes

En la década de los 30 del siglo XX, Ernest Julius Opik, con base en sus estudios sobre la distribución de la masa del Universo, concluyó que la galaxia Andrómeda poseía una masa superior a la que se podía estimar a partir de su luminosidad. Sin embargo, esta masa adicional solamente podía ser inferida a partir de sus efectos gravitacionales, es decir, no interactuaba electromagnéticamente con la materia luminosa de la galaxia [4]. Posteriormente, su estudiante Jan Hendrik Oort [5] examinó el movimiento de las estrellas en los límites de la Vía Láctea, además, calculó la masa necesaria para mantener a dichas estrellas orbitando, a partir de esto pudo concluir que había una «ausencia» de materia bastante significativa [3, 6].

Más tarde, el astrónomo Fritz Zwicky [7] estudió el cúmulo de galaxias Coma Berenice, calculó la masa de las galaxias que hacen parte de dicho cúmulo utilizando el teorema de virial de la termodinámica. Comenzó calculando la masa total del cúmulo como el producto entre el número de galaxias observadas, 800, y la masa promedio de una galaxia, la cual tomó como 109 masas solares, como sugiere Hubble. Tomó una estimación del tamaño físico del sistema alrededor de 106 años luz para obtener la energía potencial, a partir de la cual obtuvo la energía cinética promedio del sistema y, finalmente, estimó las velocidades de las galaxias que se encontraban en movimiento y obtuvo como resultado una velocidad de  $80\text{km/s}$  frente

a la velocidad observada, de aproximadamente  $1000\text{km/s}$ , mostrando así que la materia observada (luminosa) era mucho menor que la necesaria para mantener la unión gravitacional, planteando así, la existencia de algo que mantenía las galaxias unidas. Zwicky llamó a este componente, «materia faltante» [8].

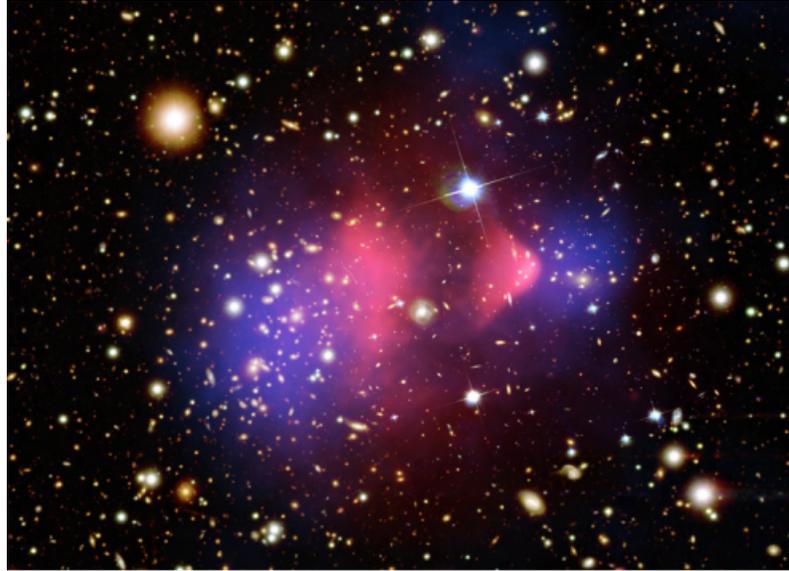
Posteriormente, en 1970 Ford y Rubin encontraron que las velocidades de los objetos intergalácticos no disminuían en función del radio, como se esperaba (de acuerdo a las leyes de Kepler), sino que permanecían constantes, por lo que debería existir una gran cantidad de masa que no hace parte de los objetos estelares, la cual proporciona la fuerza para mantener las órbitas. A esta «materia faltante» se le denominó *materia oscura* [9].

## 2.2. Evidencia observacional

En la Fig. 2-1 se tiene una imagen captada por el observatorio de rayos X, Chandra, donde se muestra el cúmulo de galaxias Bullet, formado por la colisión de dos cúmulos más pequeños. En el proceso de fusión, la materia bariónica, mostrada aquí en rosa, se ralentiza debido a su interacción electromagnética, ya que esta zona está formada principalmente por gas ionizado, lo cual hace que se fusione en una nueva región central. La parte correspondiente a la materia oscura (representada por la zona azul) se obtuvo mediante la técnica de lentes gravitacionales, se puede observar como la materia oscura está concentrada en dos cúmulos que han pasado por el punto de colisión prácticamente sin interactuar, de la misma manera que dos galaxias pueden pasar una a través de la otra. Esto sugiere que la zona en azul interactúa solo a través de la gravedad, mientras que la zona correspondiente al gas interactúa electromagnéticamente [2].

Otra pista en el rompecabezas proviene de mediciones de anisotropías a escalas cosmológicas del fondo cósmico de microondas (CMB), el cual fue descubierto por Penzias y Wilson en 1964. Inmediatamente después del Big Bang, el universo era un plasma extremadamente denso de partículas cargadas y fotones. El plasma pasó por una expansión rápida inicial, luego se enfrió hasta que alcanzó lo que se conoce como la época de la recombinación, en la cual se formaron átomos neutros, y el universo se volvió transparente a la radiación electromagnética, es decir, los fotones bloqueados ahora podían viajar a través del universo, siendo conocidos como CMB [3].

Aunque el CMB es extraordinariamente uniforme, el radiómetro diferencial de microondas (DMR) de COBE descubrió fluctuaciones dentro del CMB. Los datos del CMB sugieren que, si la materia visible actual del universo fuera toda la materia disponible, no habría suficiente masa que produjera las fuerzas gravitacionales necesarias para causar los colapsos de materia que dieron origen a las estructuras observadas actualmente, por tanto, dichas fluctuaciones



**Figura 2-1.:** Cúmulo de galaxias Bullet: muestra la colisión de dos cúmulos de galaxias. La zona mostrada en rosa corresponde a materia bariónica formada principalmente por gas, la cual, debido a su interacción se retrasa respecto a la zona en azul, correspondiente a materia oscura, la cual, a diferencia del gas solamente interactúa gravitacionalmente y pasa sin deformarse [2].

solo pueden ser explicadas si el contenido de materia fuera mucho mayor a la materia visible, es decir, la existencia de otro tipo de materia que solo interactúa gravitacionalmente [10].

## 2.3. Tipos

La existencia de materia oscura como componente clave de la densidad de materia-energía del universo puede abordarse desde la Física de partículas o desde la cosmología. La primera se preocupa por la naturaleza de los candidatos a DM y sus interacciones con el modelo estándar de la Física de partículas (SM), mientras que la segunda considera la influencia de la DM en los procesos de formación y evolución de las galaxias [8].

### 2.3.1. Enfoque de la física de partículas

Algunos de los candidatos propuestos desde la Física de partículas pueden ser: neutralinos supersimétricos, axiones, axinos, gravitinos, partículas similares a axiones (ALP), neutrinos dentro del SM, neutrinos estériles e incluso pequeños agujeros negros.

En el modelo de extensión mínima supersimétrica del modelo estándar, los supercompañeros del fotón, el bosón Z y los dos bosones de Higgs escalares neutros se mezclan para formar

cuatro partículas que se conocerían como *neutralinos*. Para que estas partículas sean consideradas candidatas a DM deben ser estabilizadas, para evitar que se descompongan poco después de ser creadas [4].

El *axión* es una partícula hipotética mas allá del SM, surge como consecuencia de la solución teórica Peccei-Quinn al problema CP-fuerte, este es, la no ruptura de la conjugación de carga (C) y la paridad (P) en las interacciones fuertes, siendo un bosón pseudoescalar de masa menor o próxima a  $10^{-3}eV$  [2, 11, 12, 13, 14].

El *axino*,  $\tilde{a}$ , se considera casi estable a escalas cosmológicas, siendo el supercompañero del axión. Los axinos reliquia se pueden producir en un plasma caliente o en desintegraciones de partículas pesadas en el Universo temprano. El *gravitino*,  $\tilde{G}$ , es una partícula masiva de espín 3/2, super compañera del gravitón, predicha en las teorías de supersimetría local o supergravedad, esta última surge de combinar las teorías de relatividad general (GR) y supersimetría (SUSY). La masa de la partícula depende del mecanismo de ruptura de SUSY [6, 15, 16].

Los neutrinos, a pesar de ser posibles candidatos del SM a DM, siendo (a diferencia de las demás partículas) conocida, hay dos razones por las cuales los neutrinos no explican toda la DM del universo. Primera, debido a que los neutrinos son partículas relativistas, un universo dominado por neutrinos habría impedido la formación de estructuras más grandes, las cuales se condensarían y fragmentarían en las que conocemos hoy. Sin embargo se ha observado que las galaxias existen hace menos de mil millones de años después del Big Bang, donde predomina un proceso de formación de estructuras inverso al anteriormente planteado. Segundo, los neutrinos representan una pequeña fracción de la materia oscura, por lo que no pueden ser la única fuente [3].

### 2.3.2. Enfoque cosmológico

Entre algunos candidatos a materia oscura desde el enfoque cosmológico se pueden encontrar:

- Materia oscura fría (CDM): Propone la existencia de materia oscura con velocidades térmicas insignificantes, en su forma idealizada no posee velocidad en absoluto, lo que permite la simulación con códigos de N-cuerpos. Para el caso de las simulaciones realistas, la CDM tendría velocidades muy pequeñas, por lo que se le considera como un fluido que no estaría completamente frío. Este modelo se ajusta muy bien a las distribuciones de galaxias, las estadísticas de CMB y a los patrones de lente gravitacional de cúmulos de galaxias, sin embargo, no se ha podido hallar evidencia de su existencia [2, 8, 17, 18].
- Materia oscura caliente (HDM): Se denomina HDM a las partículas de DM que se desplazan a velocidades relativistas, es decir, entre  $0,1c$  y  $0,95c$ . Propone que las primeras

estructuras en formarse fueron cúmulos de galaxias, los cuales se dividieron rápidamente en sistemas más pequeños. Posteriormente el modelo perdió fuerza, dado que se demostró que la verdadera distribución de las galaxias está mucho menos agrupada de lo que predicen las simulaciones, sin embargo, se sabe que una pequeña proporción debe ser HDM, dado que se ha demostrado que los neutrinos poseen una masa muy pequeña [8, 17].

- **Materia oscura tibia (WDM):** el modelo WDM es una modificación simple de la CDM donde las partículas de materia oscura poseen velocidades iniciales debido a que se han desacoplado como reliquias térmicas, o que se han formado a través de la desintegración por falta de equilibrio. La WDM puede solucionar algunas de las deficiencias de la CDM, como la abundancia de galaxias satélite y la alta densidad de núcleos galácticos [8, 19].
- **Materia oscura auto-interactuante (SIDM):** Este modelo surge para explicar por qué algunas galaxias parecen tener un núcleo de materia oscura, sin embargo, la existencia de los mismos continúa en un extenso debate. Se prevé que las partículas SIDM podrían dispersarse fuertemente entre sí, llegando incluso a evaporar galaxias satélite [8, 15].
- **Materia oscura difusa (FDM):** El modelo CDM describe con éxito la estructura del Universo a gran escala, sin embargo, a escalas de  $\sim 10$  kpc o menos, ha sido incapaz de ofrecer un modelo acertado. Esto se debe a la dificultad de recrear los procesos de formación de estrellas, retroalimentación de supernovas y agujeros negros, entre otras, por tanto, como alternativa a CDM, surge el planteamiento de que la DM consta de bosones ultraligeros, con masas de  $\sim 10^{-22} eV$  y una longitud de onda de DeBroglie  $\lambda \sim 1$  kpc, denominada FDM [20, 21, 22].
- **Materia oscura repulsiva (RDM):** la RDM se comporta como un condensado de bosones masivos que interactúan por medio de un potencial repulsivo entre partículas, además de la gravedad, conduciendo a un comportamiento de superfluidez [23].

Otros tipos de DM son: materia oscura auto-aniquilante (SADM) [24], materia oscura que decae (DDM) [25] y materia oscura asimétrica (ADM) [15].

## 2.4. Candidatos

Los candidatos a DM pueden estar clasificados en dos categorías según su estructura: bariónica y no bariónica.

### 2.4.1. Materia oscura bariónica

Está compuesta por bariones, es decir, partículas formadas por quarks, (por ejemplo, protones y neutrones) o cualquier partícula asociada a los mismos. Es posible la existencia de

objetos astrofísicos formados por bariones pero que no emiten ningún tipo de radiación, como por ejemplo, los MACHOs.

### **MACHOs**

Denominadas de dicha forma por sus siglas en inglés (Massive Astrophysical Compact Halo Object). Objetos compactos similares a las estrellas ordinarias, pero que emiten poca luz, pueden ser: planetas, enanas marrones, enanas rojas, enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. A lo largo de los años los científicos se han dedicado a estudiar este tipo de materia, sin embargo, se cree que no constituyen una gran fracción de DM, además, ha sido el candidato a CDM por excelencia. Su estudio se realiza por medio de microlentes gravitacionales [4].

### **2.4.2. Materia oscura no bariónica**

Es posible que la materia oscura tenga origen no bariónico, es decir, que no esté constituida por quarks, sino por algún otro tipo de partícula como pueden ser WIMPS o escalares. Entre los más estudiados están los WIMPS y los axiones.

- WIMP: (Partículas masivas de interacción débil) no son una partícula elemental específica, sino una amplia clase de posibles partículas, las cuales pueden tener una masa de unos pocos GeV, hasta  $\sim 100\text{TeV}$ . Algunas de estas partículas pueden ser neutra-linos, axinos, gravitinos. [15].

Otros candidatos a DM no bariónica son: agujeros negros primordiales [26], SIDM [27], WIMPzillas [28], ADM [15], entre otras [2, 17].

## 3. Revisión cosmológica

A la ciencia encargada de explicar el origen y la evolución de universo como parte de un todo se le denomina **cosmología**. Sin embargo, ese proceso de búsqueda de las leyes que se supone rigen el cosmos se ve limitado, dado que no se puede experimentar con el universo a grandes escalas, solo se pueden realizar observaciones [29].

### 3.1. El principio cosmológico

La cosmología postula que no ocupamos un lugar especial en el universo, esta es una idea simple y poderosa. Las primeras ideas griegas plateaban que el centro del cosmos era la Tierra, donde, la Luna, las estrellas y los planetas se encontraban a su alrededor; idea que posteriormente fue desmotada por Copérnico, quien planteaba un modelo heliocéntrico, aunque la idea de que la Vía Láctea era el centro del Universo aún se mantenía. No fue hasta 1952 que Baade desmontó dicha idea, dando paso a un nuevo panorama, denominado *principio cosmológico*, el cual plantea que el Universo observado a grandes escalas es igual en cada punto y en todas las direcciones, a esto se conoce respectivamente como homogeneidad e isotropía [30].

La métrica que describe este tipo de universos es la *métrica de Friedmann, Lemaitre, Robertson, Walker* (FLRW) (la deducción detallada se presenta en el anexo A), esta es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (3-1)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala y  $\kappa$  la curvatura espacial.

### 3.2. Ecuaciones de campo de Friedmann

En 1922 Alexander Friedmann planteó las denominadas *ecuaciones de Friedmann*, a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. Estas describen un universo homogéneo e isotrópico.

La gravitación es la interacción fundamental a escala cosmológica. La teoría actual de la gravitación fue planteada por Albert Einstein en 1915, quien se dio cuenta de que el «espacio» y el «tiempo» son relativos y que la gravedad curva al espacio-tiempo, proporcionado así los

cimientos de la cosmología moderna.

Las ecuaciones de campo de Einstein son

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G_N T_{ab}, \quad (3-2)$$

donde  $R_{ab}$  es el tensor de Ricci,  $g_{ab}$  la métrica de universo,  $R$  el escalar de Ricci,  $G_N$  la constante de gravitación universal y  $T_{ab}$  el tensor de energía-momento.

En el anexo B se presenta una deducción de las ecuaciones de Einstein a partir de la acción y densidad lagrangiana de Hilbert.

Para hallar las ecuaciones de Friedmann es necesario hallar el tensor de Ricci  $R_{ab}$ , y para este se deben encontrar los símbolos de Christoffel, proceso que se presenta en el anexo C.

el tensor de Ricci es la contracción del tensor de Riemman, se expresa como

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}, \quad (3-3)$$

donde los símbolos de Christoffel,  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ , están dados por

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta}), \quad (3-4)$$

### 3.2.1. Tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$

El tensor de energía-momento describe la distribución y el flujo de energía y momento debido a la presencia y movimiento de materia y radiación en una región del espacio-tiempo El tensor de energía-momento es simétrico de rango 2, definido como

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & M & M & M \\ E & p & F & F \\ E & F & p & F \\ E & F & F & p \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

donde el violeta representa la densidad de energía; azul, el flujo de energía; verde, la densidad de momento; rojo, el flujo de momento y naranja, la presión, de la siguiente manera [31]:

- $\rho$ : densidad de masa relativista (energía).
- $M$ : es la densidad de momento, flujo de momento a través de la superficie  $x_0 = cte$ .
- $p$ : flujo de momento por unidad de área, por unidad de tiempo (presiones).
- $F$ : Fuerzas que ejercen elementos infinitesimales del fluido sobre otros elementos cercanos, es decir, la presión  $p_i$  en dirección  $x_j$ .
- $E$ : flujo de energía.

Si se considera un universo homogéneo e isotrópico se habla de un *fluido perfecto*.

### Fluido perfecto

Un fluido perfecto es aquel que no posee viscosidad ni flujo de calor, es la generalización del concepto de gas ideal. Se habla de «fluido» para hacer referencia a un conjunto de partículas que «fluyen» libremente. Para este comportamiento

- $T_{0i} = 0$ , ya que para que haya un flujo de energía se requiere que las partículas estén «fluyendo» también y, en un fluido perfecto, si no hay transferencia de calor las partículas estarán instantáneamente en reposo.
- Para  $T_{ij}$ : si no hay viscosidad, no hay influencia entre componentes (perpendiculares), por lo que las fuerzas son perpendiculares a la superficie, luego, para  $i$  diferente de  $j$ ,  $T_{ij} = 0$ ; por ello, los valores diferentes de cero para dichas componentes solo se darían en el caso en que  $i$  sea igual a  $j$ .

De una forma más explícita, el tensor de energía momento se puede expresar como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3-6)$$

donde  $U^\mu$  es la cuadrivelocidad del fluido,  $p$  la presión y  $\rho$  la densidad de energía. No obstante, como el fluido es isotrópico, el marco de referencia en reposo coincide con el marco de referencia comóvil, por lo que  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , luego, el tensor

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (3-7)$$

Su traza está dada por

$$T_\mu^\mu = -\rho + 3p. \quad (3-8)$$

Retomando la ecuación de campo de Einstein, lo que se desea obtener es el tensor de energía-momento covariante, por tanto

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\beta} T_\nu^\beta. \quad (3-9)$$

Reescribiendo en forma matricial la métrica FLRW (3-1), se tiene

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a(t)^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a(t)^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}, \quad (3-10)$$

Luego, el tensor de energía momento covariante para un universo homogéneo e isotrópico toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a(t)^2 p}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 a(t)^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a(t)^2 p \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \rho \end{pmatrix}. \quad (3-11)$$

Para hallar las ecuaciones de Friedmann, dado que los índices  $\mu$  y  $\nu$  del tensor de energía momento (anteriormente hallado) y del tensor de Ricci (calculado en el Anexo C) pueden variar entre  $(r, \theta, \phi, t)$ , por tanto

- Para la coordenada  $rr$ :

$$R_{rr} - \frac{1}{2} R g_{rr} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{rr}. \quad (3-12)$$

Reemplazando, se tiene

$$\frac{1}{1-\kappa r^2} \left( 2\kappa + \frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{6}{a^2} \left( \kappa + \frac{\dot{a}}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) \right] \left( \frac{a^2}{1-\kappa r^2} \right) = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( \frac{a^2 p}{1-\kappa r^2} \right), \quad (3-13)$$

donde  $a = a(t)$  y  $\dot{a}$  y  $\ddot{a}$  corresponden a la primera y segunda derivada temporal de  $a$  respectivamente.

$$\frac{a^2}{1-\kappa r^2} \left( \frac{2\kappa}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2 a^2} \right) - \frac{a^2}{1-\kappa r^2} \left( \frac{3\kappa}{a^2} + \frac{3\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{3a\ddot{a}}{c^2 a^2} \right) = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left( \frac{a^2}{1-\kappa r^2} \right) p.$$

Simplificando, se obtiene

$$-\frac{\kappa c^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G_N}{c^2} p, \quad (3-14)$$

- Coordenada espacial  $\theta\theta$

$$R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} R g_{\theta\theta} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\theta\theta}. \quad (3-15)$$

Reemplazando

$$r^2 \left[ 2k + \frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{6}{a^2} \left( k + \frac{\dot{a}}{c^2} \right) \right] r^2 a^2 = \frac{8\pi G_N p}{c^4} r^2 a^2. \quad (3-16)$$

Simplificando

$$-\frac{\kappa}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} - \frac{2a\ddot{a}}{a^2 c^2} = \frac{3\pi G_N p}{c^4},$$

por tanto

$$-\frac{\kappa c^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = \frac{3\pi G_N p}{c^2}. \quad (3-17)$$

- Para la coordenada espacial  $\phi\phi$

$$R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}Rg_{\phi\phi} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\phi\phi}. \quad (3-18)$$

Reemplazando

$$r^2 \sin^2 \theta \left( 2\kappa + \frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{6}{a^2} \left( \kappa + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) \right] r^2 a^2 \sin^2 \theta = \frac{8\pi G_N \rho}{c^4} r^2 a^2 \sin^2 \theta. \quad (3-19)$$

Simplificando

$$-\frac{\kappa}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2a\ddot{a}}{a^2} = \frac{8\pi G_N \rho}{c^4},$$

por tanto

$$-\frac{\kappa c^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = \frac{3\pi G_N \rho}{c^2}. \quad (3-20)$$

Cocluyendo así que la parte espacial posee el mismo comportamiento.

- La coordenada temporal  $tt$ :

$$R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{tt}. \quad (3-21)$$

Remplazando

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left[ \frac{6}{a^2} \left( \kappa + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}^2}{c^2} \right) \right] (-c^2) = \frac{8\pi G_N \rho}{c^2} \quad (3-22)$$

Simplificando, se obtiene

$$\frac{\kappa c^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^2} \rho. \quad (3-23)$$

Donde las Ec. (3-14) y (3-23) se conocen como **Ecuaciones de campo de Friedmann**.

### 3.3. La constante cosmológica

Las ecuaciones de Friedmann describen un universo igual en cada punto y en todas direcciones, sin embargo, esto no coincide con las observaciones astronómicas, puesto que se considera que el universo se encuentra en expansión, luego, para que el modelo se mantenga se introduce la **constante cosmológica**,  $\Lambda$ , que actúa en las ecuaciones como un fluido con

presión negativa, compatible con las observaciones.

Como el tensor de Einstein cumple la identidad de Bianchi, se puede adicionar la constante cosmológica a la ecuación de campo de Einstein (Ec: (A-25))

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{c^4}G_N T_{\mu\nu}. \quad (3-24)$$

Haciendo correr los índices  $\mu$  y  $\nu$ , se tiene

- Parte espacial ( $\mu = \nu = r$ )

$$R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr} + \Lambda g_{rr} = \frac{8\pi}{c^4}G_N T_{rr}. \quad (3-25)$$

Simplificando y ordenando, se obtiene

$$-\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa c^2}{a^2} = \frac{8\pi}{c^2}G_N p - \Lambda c^2. \quad (3-26)$$

Para el caso en que  $\mu = \nu = \theta$  o  $\mu = \nu = \phi$ , (como se vio en el desarrollo sin constante cosmológica), se obtiene el mismo resultado, por ende, la ecuación anterior es la misma para los índices espaciales.

- Parte temporal

$$R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt} + \Lambda g_{tt} = \frac{8\pi}{c^4}G_N T_{tt}. \quad (3-27)$$

donde se obtiene

$$\frac{\kappa}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G_N \rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3-28)$$

Siendo la Ec. 3-26 y la Ec. 3-28 las *ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica*. Dichas ecuaciones pueden expresarse en términos de la *masa de Planck* ( $M_{pl}$ ), la cual está relacionada con la constante de gravitación newtoniana de la siguiente manera

$$M_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G_N}, \quad (3-29)$$

por tanto, reescribiendo la Ec. (3-26) utilizando la definición anterior, se tiene

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3-30)$$

ahora, reescribiendo también la Ec. (3-28), queda

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa c^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{p}{M_{pl}^2 c^2}. \quad (3-31)$$

sustituyendo la Ec. (3-31) en la Ec. (3-30) y tomando la convención  $c^2 = 1$ , se tiene

$$\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3}\Lambda = -\frac{p}{M_{pl}^2} - \frac{\rho}{3M_{pl}^2}, \quad (3-32)$$

luego,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{pl}^2}(3p + \rho) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3-33)$$

donde la Ec. (3-30) y la Ec. (3-33) corresponden a las *ecuaciones de Friedmann en términos de la masa de Planck*.

Para expresar las ecuaciones de Friedmann en términos del *parámetro de Hubble*, este último se define como sigue

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3-34)$$

derivando respecto a t

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (3-35)$$

Reescribiendo en términos del parámetro de Hubble

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2. \quad (3-36)$$

Expresando la Ec. (3-30) en términos de H

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3-37)$$

Reemplazando la Ec.(3-37) en (3-36) y luego en (3-34), posteriormente simplificando, se obtiene

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_p^2}(\rho + P) + \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3-38)$$

Luego, las Ec.(3-37) y (3-38) se conocen como *Ecuaciones de Frieddman en términos del parámetro de Hubble*.

### 3.4. Modelo $\Lambda$ CDM

Se conoce como  $\Lambda$ CDM al sistema dinámico del universo en el límite homogéneo e isotrópico, donde las componentes dominantes son la CDM y la constate cosmológica ( $\Lambda$ ). Se consideran

cinco componentes: DM, bariones ( $b$ ), fotones ( $\gamma$ ), neutrinos ligeros ( $\nu$ ) y  $\Lambda$ . Si se considera un universo espacialmente plano ( $\kappa = 0$ ), las ecuaciones de Friedmann son

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2}, \quad (3-39)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{pl}^2}(\rho + p), \quad (3-40)$$

donde la constante cosmológica es omitida en la Ec. (3-39) porque a continuación se definirá la densidad total, en la cual se tendrá en cuenta la densidad de la constante cosmológica.

La densidad y presión totales son respectivamente

$$\rho = \rho_{DM} + \rho_b + \rho_\gamma + \rho_\nu + \rho_\Lambda, \quad (3-41)$$

$$p = p_{DM} + p_b + p_\gamma + p_\nu + p_\Lambda. \quad (3-42)$$

Si se considera la componente cero de la ecuación de conservación de la energía

$$0 = \nabla_\mu T_\mu^0 = \partial_\mu T_\mu^0 + \Gamma_{\mu 0}^\mu T_0^0 - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\mu^\lambda. \quad (3-43)$$

Por lo tanto,

$$0 = -\partial_0 \rho - 3H(\rho + p). \quad (3-44)$$

Una *ecuación de estado* es una relación entre presión y densidad, por lo que, para el caso de un universo homogéneo e isotrópico, o fluido perfecto, la presión es proporcional a la densidad, esto es

$$p = w\rho, \quad (3-45)$$

donde  $w$  es una constante independiente del tiempo. La ecuación de conservación de la energía queda

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3H(1 + w), \quad (3-46)$$

la cual se puede integrar para obtener

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (3-47)$$

Algunos de los fluidos cosmológicos pueden ser [32]: *polvo* (materia) o *radiación*.

El **polvo** se considera como la materia sin colisiones, no relativista y que obedece la condición  $w = 0$ , dado que no interactúa; pueden incluirse estrellas o galaxias para las cuales la presión es insignificante en comparación con la densidad de energía, luego, la ecuación de estado para la DM y los bariones es

$$p_{DM} = P_b = 0. \quad (3-48)$$

La densidad de energía decae como [33]

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (3-49)$$

Esta es dominada por la energía en reposo la cual es proporcional a la densidad numérica, por lo que la Ec. (3-49) se interpreta como la disminución de la densidad numérica de partículas a medida que el universo se expande.

El término **radiación** hace referencia tanto a la radiación electromagnética como a las partículas masivas que se desplazan a velocidades cercanas a  $c$ , por lo que su ecuación de estado es similar a la de los fotones. Adicionalmente, el tensor de energía-momento se puede expresar en términos del tensor de intensidad de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  [33], como

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right), \quad (3-50)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  se puede expresar en términos del potencial  $A_{\mu}$ , como sigue

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}. \quad (3-51)$$

La traza del tensor de energía-momento está dada por

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} (4) F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right] = 0, \quad (3-52)$$

dado que es igual a la Ec: (3-8), la ecuación de estado para la radiación es

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad (3-53)$$

por consiguiente, para los fotones y los neutrinos, se tiene

$$p_{\gamma} = \frac{1}{3}\rho_{\gamma} \quad p_{\nu} = \frac{1}{3}\rho_{\nu}. \quad (3-54)$$

La densidad de energía para la radiación decae como [33]

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (3-55)$$

Por tanto, la densidad de energía para la radiación decae más deprisa que en la materia. Se considera que los primeros instantes del universo estuvieron dominados por la radiación, mientras que en la actualidad la parte dominante es la materia.

Otra forma de energía-momento se denomina **vacío**. Introducir energía en el vacío es equivalente a incluir la constante cosmológica.

Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica se pueden reescribir como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3-56)$$

donde se ha tomado la convención  $c = 1$  y se define el *tensor de curvatura de Einstein* de la siguiente manera

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (3-57)$$

para el caso del vacío, el tensor de energía-momento toma la forma

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G_N} g_{\mu\nu}. \quad (3-58)$$

La ecuación anterior describe el tensor de energía-momento para un fluido perfecto, para el cual

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G_N}, \quad (3-59)$$

por tanto, la ecuación de estado para la constante cosmológica es

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda, \quad (3-60)$$

en consecuencia,  $w = -1$  y dado que la densidad de energía en la materia y la radiación disminuye a medida que el universo se expande, si hay una energía de vacío distinta de cero, tiende a aumentar a largo plazo.

Reemplazando las respectivas presiones en la Ec. (3-30) y sumando con la Ec. (3-29), se tiene

$$\rho + p = \rho_{DM} + \rho_b + \frac{4}{3}\rho_\gamma + \frac{4}{3}\rho_\nu. \quad (3-61)$$

En el límite homogéneo e isotrópico, por ser fluidos perfectos los componentes no interactúan entre sí, es decir, cumplen separadamente con la ecuación de continuidad.

Reescribiendo la Ec. (3-44)

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (3-62)$$

Reemplazando la Ec. (3-61) en la Ec. (3-40), además, tomando la Ec. (3-62) y aplicándola a cada componente, el sistema completo sería

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{pl}^2} \left( \rho_{DM} + \rho_b + \frac{4}{3}\rho_\gamma + \frac{4}{3}\rho_\nu \right), \quad (3-63)$$

$$\rho_{\dot{DM}} = -3H\rho_{DM}, \quad (3-64)$$

$$\dot{\rho}_b = -3H\rho_b, \quad (3-65)$$

$$\dot{\rho}_\gamma = -4H\rho_\gamma, \quad (3-66)$$

$$\dot{\rho}_\nu = -4H\rho_\nu, \quad (3-67)$$

$$\dot{\rho}_\Gamma = 0, \quad (3-68)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} (\rho_{DM} + \rho_b + \rho_\gamma + \rho_\nu + \rho_\Lambda). \quad (3-69)$$

### 3.4.1. Evolución numérica

Realizando el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{\rho_{DM}}}{\sqrt{3}M_{pl}H}, & b &= \frac{\sqrt{\rho_b}}{\sqrt{3}M_{pl}H}, & l &= \frac{\sqrt{\rho_\Lambda}}{\sqrt{3}M_{pl}H}, \\ z &= \frac{\sqrt{\rho_\gamma}}{\sqrt{3}M_{pl}H}, & v &= \frac{\sqrt{\rho_\nu}}{\sqrt{3}M_{pl}H}, & \Pi &= -\frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \end{aligned} \quad (3-70)$$

Además, realizando un cambio de  $t$  a  $N$ , donde  $N$  se denomina *número e-folding*, y está definido como

$$N = \log a, \quad (3-71)$$

además, con  $a = a(t)$  y recordando que  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , se tiene que  $\frac{d}{dt} = H \frac{d}{dN}$ .

Con lo anterior, el sistema de ecuaciones toma la forma

$$\Pi = f^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}v^2, \quad (3-72)$$

$$\frac{df}{dN} = \frac{3}{2}(\Pi - 1)f, \quad (3-73)$$

$$\frac{db}{dN} = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b, \quad (3-74)$$

$$\frac{dz}{dN} = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) z, \quad (3-75)$$

$$\frac{dv}{dN} = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) v, \quad (3-76)$$

$$\frac{dl}{dN} = \frac{3}{2}\Pi l, \quad (3-77)$$

$$F = f^2 + b^2 + z^2 + v^2 + l^2 = 1, \quad (3-78)$$

donde esta última corresponde a la *cosntricción de Friedmann*, la cual no interviene en la integración pero debe cumplirse, dado que el parámetro de densidad total es igual a uno.

### 3.4.2. Densidad crítica y parámetros de densidad

El parámetro de densidad se usa para especificar la densidad del universo. Se conoce como **densidad crítica**  $\rho_c$  al valor requerido para considerar un universo espacialmente plano ( $\kappa = 0$ )

$$\rho_{crit} = 3H^2 M_{pl}^2, \quad (3-79)$$

donde la densidad crítica varía en el tiempo, dado que H también varía.

La densidad crítica no es necesariamente la densidad real del universo, dado que este se está considerando espacialmente plano, luego, la densidad del universo está definida por el **parámetro de densidad**  $\Omega$ , siendo

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}. \quad (3-80)$$

Igualmente,  $\Omega$  es una función del tiempo, dado que  $\rho$  y  $\rho_{crit}$  poseen dependencia temporal. La definición se aplica a todas las densidades separadamente, esto es

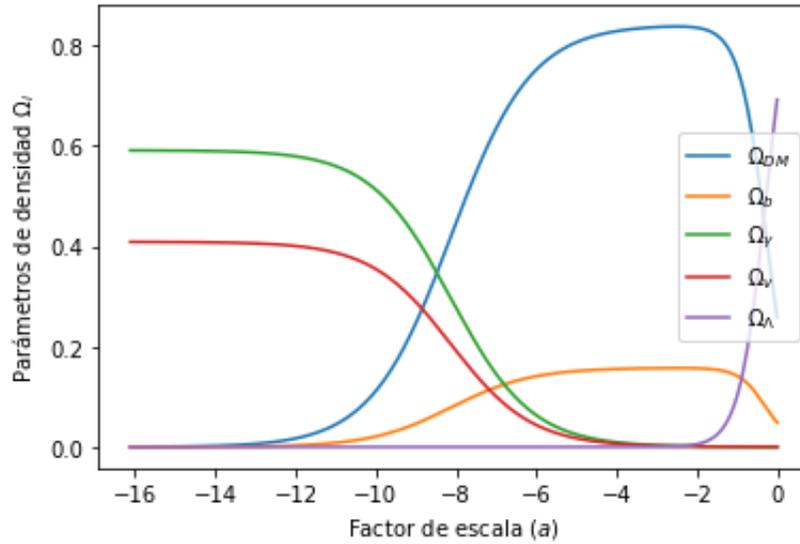
$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}. \quad (3-81)$$

La Ec: (3-39) se convierte en

$$\Omega = 1. \quad (3-82)$$

Reemplazando la Ec; (3-41) en la Ec: (3-72)

$$\Omega_{DM} + \Omega_b + \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda = 1. \quad (3-83)$$



**Figura 3-1.:** Evolución de los parámetros de densidad ( $\Omega_i$ ) obtenidos a partir de la evolución del sistema dinámico dado en las Ec. (3-72 - 3-77). (Se escribió un código en Python para la evolución del sistema, el cual se incluye en el Anexo D).

Con las definiciones (3-79) y (3-81) se puede escribir estos parámetros en términos de las variables definidas en (3-70) como

$$f^2 = \Omega_{DM} \quad b^2 = \Omega_b \quad z^2 = \Omega_\gamma \quad v^2 = \Omega_\nu \quad l^2 = \Omega_\Lambda. \quad (3-84)$$

Con las definiciones anteriores la constricción de Friedmann corresponde a la Ec. (3-83).

Teniendo en cuenta los resultados numéricos del sistema de ecuaciones (3-72 - 3-77), y, utilizando las definiciones de los parámetros de densidad dadas en la Ec. (3-84), se grafican dichos parámetros utilizando lenguaje Python (D) obteniendo como resultado la Fig. 3-1.

En dicha gráfica se aprecia la evolución del universo, desde una época dominada por la radiación a una el la cual el componente dominante es la materia, más concretamente, la materia oscura.

## 4. Producción de materia oscura en el universo temprano

Para que un candidato a DM sea adecuado se debe cumplir que este sea masivo, no relativista, de interacción débil y estable por miles de millones de años, por lo que partículas con carga, color o muy livianas son descartadas [17].

Se denomina «reliquia» a la abundancia de materia que se esperaría en el universo actual la cual se produciría en los primeros instantes después del Big Bang. Se considera que las reliquias de DM se produjeron en el universo temprano en (al menos) dos formas diferentes: producción térmica (TP) y producción no térmica (NTP) [15]. La primera involucra partículas de DM generadas en procesos desarrollados durante equilibrio térmico, donde las reliquias producidas de esta manera se denominan *reliquias térmicas*, mientras que la NTP hace referencia a los procesos que se desarrollan fuera del equilibrio térmico, luego las reliquias producidas de esta manera se denominan *reliquias no térmicas*.

Mientras que las partículas interactúen con el plasma se encontrarán en equilibrio térmico, sin embargo, dado que el universo se expande, la temperatura disminuye y la distancia promedio entre las partículas del plasma aumenta limitando la interacción, por tanto, el equilibrio térmico puede romperse ocasionando que las partículas inestables se desintegren, mientras que las partículas estables se someten a un proceso de congelamiento denominado *freeze-out* [34], donde las reliquias son de tipo térmico.

Para obtener reliquias no térmicas es necesario que las partículas de DM se produzcan a bajas temperaturas, así nunca alcanzarán el equilibrio térmico; o que dichas partículas interactúen tan débilmente con el plasma primordial que puedan considerarse desacopladas del mismo. Entre esta forma de producción de reliquias de DM se pueden encontrar [18]: partículas similares a axiones (*Axion-like particles* (ALPs)), modelos de freeze-in y productos de desintegración de campos primordiales.

El cálculo de reliquias térmicas o no térmicas en el universo temprano se realiza mediante la ecuación de Boltzmann en un universo FLRW, dicha ecuación describe la evolución de las densidades primordiales [35, 36, 37, 38].

## 4.1. La ecuación de Boltzmann

La distribución de momento en el espacio de fase para un conjunto de partículas es descrito por la función de distribución

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (4-1)$$

donde la encargada de la evolución es la *ecuación de Boltzmann*, cuya definición es

$$\hat{L}[f] = C[f], \quad (4-2)$$

donde

$$\hat{L} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}, \quad (4-3)$$

es el operador relativista covariante de Liouville y  $C[f]$  es el término de colisión.

Para un universo homogéneo e isotrópico (FLRW), los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{ii}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}g_{ii,0}, \quad \Gamma_{0i}^i = \frac{1}{2}g^{ii}g_{ii,0}, \quad \Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2}g^{ii}(g_{ki,j} + g_{ji,k} - g_{kj,i}), \quad (4-4)$$

luego, el operador de Liouville queda

$$\hat{L} = p^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + p^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ii}^0 p^i p^i \frac{\partial}{\partial p^0} - \Gamma_{0i}^i p^0 p^i \frac{\partial}{\partial p^i} - \Gamma_{kj}^i p^k p^j \frac{\partial}{\partial p^i}, \quad (4-5)$$

dada la homogeneidad e isotropía del sistema, la función de distribución no depende de  $\mathbf{x}$  ni  $\mathbf{p}$  dado que la velocidad es constante, solamente de la magnitud del momento,  $|\mathbf{p}|$ , la cual puede sustituirse por la energía,  $E = p_0$ , por tanto

$$f = f(E, t), \quad (4-6)$$

luego, la parte izquierda de la ecuación puede escribirse como:

$$L[\hat{f}] = p^0 \frac{\partial f}{\partial x^0} - \Gamma_{ii}^0 p^i p^i \frac{\partial f}{\partial p^0}. \quad (4-7)$$

La parte espacial de la métrica FLRW se puede expresar como

$$g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}, \quad (4-8)$$

donde

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4-9)$$

por tanto

$$g_{ii,0} = 2a\dot{a}\gamma_{ij} = 2\frac{\dot{a}}{a}g_{ii}, \quad (4-10)$$

con  $a = a(t)$ , por consiguiente

$$\Gamma_{ii}^0 = \frac{\dot{a}}{a}g_{ii}. \quad (4-11)$$

Utilizando las Ec. (4-7) y (4-11) para reescribir la Ec. (4-2)

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{|p|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{C[f]}{E}. \quad (4-12)$$

La densidad del número de partículas en el espacio real está dada por

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f d^3p, \quad (4-13)$$

por tanto, la Ec. (4-12) se puede expresar como

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \frac{d}{dt} \int f d^3p - \frac{\dot{a}}{a} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{C[f]}{E}, \quad (4-14)$$

considerando  $\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{df}{dE}$  y usando  $E dE = |\mathbf{p}| d\mathbf{p}$ , el segundo término del lado izquierdo se puede expresar como

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p = 4\pi \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|} \frac{df}{d|\mathbf{p}|} d^3p = 4\pi \frac{g}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{p}|^3 df, \quad (4-15)$$

donde

$$d^3p = 4\pi |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|, \quad (4-16)$$

integrando por partes, donde  $u = |\mathbf{p}|^3$  y  $v = f$ , además, utilizando la Ec. (4-16)

$$4\pi \frac{g}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{p}|^3 df = 4\pi \frac{g}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}|^3 f - 3 \frac{g}{(2\pi)^3} \int f d^3p, \quad (4-17)$$

donde el primer factor de la derecha se convierte en un término límite con la función de distribución asintóticamente nula, mientras que para el segundo factor, recordando la definición de la densidad del número de partículas, se tiene

$$4\pi \frac{g}{(2\pi)^3} \int |\mathbf{p}|^3 df = -3n(t), \quad (4-18)$$

luego, la Ec. (4-14) queda

$$\frac{dn}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{C[f]}{E}. \quad (4-19)$$

Si se hace un enfoque en el estudio de la especie  $\phi$ , la ecuación de Boltzmann se puede escribir como

$$\frac{dn_\phi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\phi = CT_\phi, \quad (4-20)$$

donde  $CT_\phi$ , conocido como *término de colisión* está dado por

$$CT_\phi = \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3p_\phi}{E_\phi}. \quad (4-21)$$

Realizando un enfoque en los procesos de aniquilación en los cuales dos partículas entrantes interactúan para producir dos nuevas partículas, esto es,  $1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$ , luego, el término de colisión se transforma en

$$CT_1 = -\langle\sigma_{12\rightarrow 34}v_r\rangle n_1n_2 + \langle\sigma_{34\rightarrow 12}v_r\rangle n_3n_4, \quad (4-22)$$

donde se ha definido la sección transversal térmicamente promediada (TACS) para el proceso  $1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$  como  $\langle\sigma_{12\rightarrow 34}v_r\rangle$ , y de forma similar para el proceso  $3 + 4 \longleftrightarrow 1 + 2$ , como sigue:  $\langle\sigma_{34\rightarrow 12}v_r\rangle$ . En las ecuaciones anteriores  $\sigma$  es la sección transversal total y  $v_r$  la velocidad relativa entre las partículas entrantes 1 y 2.

Sustituyendo la sección transversal térmicamente promediada en la ecuación de Boltzmann (4-20)

$$\frac{dn_1}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_1 = -\alpha n_1n_2 + \beta n_3n_4, \quad (4-23)$$

donde  $\alpha = \langle\sigma_{12\rightarrow 34}v_r\rangle$  y  $\beta = \langle\sigma_{34\rightarrow 12}v_r\rangle$ , por tanto, el término  $\alpha$  representa la disminución de la densidad numérica de la especie 1 debida a su aniquilación, señalada por su signo negativo, mientras que el término  $\beta$  describe el incremento debido al proceso inverso.

## 4.2. Freeze-In

Los escenarios de *freeze-in* [39, 40] hacen referencia a partículas de DM que interactúan débilmente (FIMP); dichas partículas poseen acoplamientos extremadamente débiles con las partículas del SM que pueden considerarse desacopladas del plasma térmico primordial y podrían haber sido producidas en pequeñas cantidades conduciendo (debido a sus interacciones con el baño térmico) a la producción de FIMP y aumentando su densidad hasta el punto en que la temperatura del plasma es demasiado baja para tal producción [15, 18, 41].

El mecanismo de freeze-in para producción de dos partículas de DM (denotadas como  $\chi$ ) a partir de la aniquilación de dos partículas incidentes, las cuales, para este caso pertenecen a la extensión mínima del SM, los neutrinos estériles (denotados como  $l$ ) es

$$\chi + \chi \longleftrightarrow l + l$$

Por tanto, la ecuación (4-23) toma la forma

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = -\alpha n_\chi^2 + \beta n_l^2, \quad (4-24)$$

donde  $\alpha = \langle \sigma_{\chi\chi \rightarrow ll} v_r \rangle$ , y  $\beta = \langle \sigma_{ll \rightarrow \chi\chi} v_r \rangle$ .

En el paradigma freeze-in se hacen dos suposiciones importantes [42], estas son

1. se desprecia el término de desintegración debido a que el acoplamiento puede ser muy débil o la densidad muy baja, por tanto

$$-\alpha n_\chi^2 \rightarrow 0.$$

2. Se supone que la densidad numérica de las partículas del SM permanece en equilibrio, puesto que dichas partículas se acoplan débilmente a la DM y los procesos de aniquilación no son lo suficientemente eficientes para sacar el plasma del equilibrio térmico. Esto es

$$n_l \sim n_l^{eq}.$$

En consecuencia, la ecuación (4-24) toma la forma

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = \beta (n_l^{eq})^2. \quad (4-25)$$

La densidad numérica de partículas en equilibrio térmico en función de la temperatura ( $T$ ) es

$$(n_l^{eq})^2 = \frac{g_l^2}{(2\pi)^6} \left[ 4\pi m_l^2 T K_2 \left( \frac{m_l}{T} \right) \right], \quad (4-26)$$

donde  $g_l$  es el número de grados de libertad internos de las partículas aniquilantes,  $m_l$  su masa y  $K_2$  es la función modificada de Bessel de orden 2.

La sección eficaz térmicamente promediada (en el centro de masa), es

$$\beta = \frac{4\pi T^2}{[4\pi m_l^2 T K_2(\frac{m_l}{T})]} \int_{4m_l^2}^{\infty} ds \sqrt{(s - 4m_l^2)} W(s) K_1 \left( \frac{\sqrt{s}}{T} \right), \quad (4-27)$$

donde  $s$  es una variable de Mandelstam, la cual está definida como  $s = (p_1 + p_2)^2$  donde  $p_1$  y  $p_2$  son los cuadrimentos de las partículas incidentes. En el centro de masa,  $s$  es igual

al cuadrado de la energía total de las partículas incidentes.  $K_1$  es la función modificada de Bessel de orden 1, y  $W(s)$  una función relacionada con la sección eficaz, la cual proviene del cálculo de la amplitud tal que para dos partículas  $a$  y  $b$  que inciden con velocidad relativa  $v_r$  y se aniquilan [43], está dada por

$$W(s) = E_a E_b \sigma v_r. \quad (4-28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4-26) y (4-27) en la Ec. (4-25) se obtiene

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = \frac{g_l^2}{(2\pi)^4} T \int_{4m_l^2}^{\infty} ds \sqrt{(s - 4m_l^2)} W(s) K_1 \left( \frac{\sqrt{s}}{T} \right). \quad (4-29)$$

donde  $E$  es la energía de las partículas respectivamente y  $\sigma$  es la sección eficaz total de aniquilación de las partículas  $a$  y  $b$ .

Reemplazando la Ec. (4-28) en la Ec. (4-29), se tiene

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = \frac{g_l^2}{(2\pi)^4} T \int_{4m_l^2}^{\infty} ds \sqrt{(s - 4m_l^2)} E_a E_b \sigma v_r K_1 \left( \frac{\sqrt{s}}{T} \right). \quad (4-30)$$

La sección eficaz total de aniquilación [44], es

$$\sigma = \frac{1}{\Sigma} \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \frac{|\widetilde{M}|_{ab \rightarrow \chi\chi}^2}{32\pi E_a E_b v_r} \frac{dt}{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}. \quad (4-31)$$

donde  $\Sigma$  es el factor de simetría,  $|\widetilde{M}|_{ab \rightarrow \chi\chi}$  es la amplitud de aniquilación (promediada en el espín) de las dos partículas que se aniquilan en DM y donde  $\lambda$  es la función triangular de Mandelstam, la cual con  $m_a = m_b = m_l$  es

$$\lambda(s, m_a^2, m_b^2) = s(s - 4m_l^2), \quad (4-32)$$

por tanto, la sección eficaz se expresa como

$$\sigma = \frac{1}{\Sigma} \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \frac{|\widetilde{M}|_{ab \rightarrow \chi\chi}^2}{32\pi E_a E_b v_r} \frac{dt}{\sqrt{s(s - 4m_l^2)}}. \quad (4-33)$$

Tomando  $a = b = l$  en  $W(s)$  y sustituyendo la Ec. (4-33) en la Ec. (4-30)

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = \frac{g_l^2 T}{512\pi^5 \Sigma} \int_{4m_l^2}^{\infty} ds \left[ \frac{K_1(\sqrt{s}/T)}{\sqrt{s}} \int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt |\widetilde{M}|_{ll \rightarrow \chi\chi}^2 \right] \quad (4-34)$$

donde la integral en  $t$  es una función de  $s$ .

La Ec. (4-34) es la forma genérica de la ecuación de Boltzmann para el estudio del paradigma freeze-in. La información del modelo que se estudia en particular está contenida en la amplitud de aniquilación.

## 5. Modelo para producción de DM a partir de neutrinos pesados de Majorana

La discrepancia entre los neutrinos detectados en la tierra y los teóricamente predichos en el interior del sol (problema de los neutrinos solares), dio paso a la simplemente magnífica explicación brindada por Bruno Pontecorvo en 1968 a dicho problema. Él propuso que los neutrinos electrónicos generados en el interior del sol se transformaban en otras especies de neutrinos durante su vuelo, proceso al que se denominó *oscilaciones de neutrinos* [45].

Las oscilaciones de neutrinos han sido detectadas por experimentos como Supercamiokande, LSND, Daya Bay, entre otros. Las observaciones realizadas por LSND [46] y MiniBooNe [47] muestran anomalías que podrían ser interpretadas como una especie de neutrino diferente a las ya conocidas. Esta nueva partícula, denominada *neutrino estéril*, no interactúa con la materia leptónica, sin embargo, se mezcla con los estados activos de neutrinos y antineutrinos [48]. Los neutrinos estériles son un tipo de neutrino dextrógiro que no interactúa a través de ninguna de las interacciones fundamentales del SM, excepto la gravedad.

El descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos trajo consigo el establecimiento de masas no nulas para ellos, además, al ser los neutrinos y los antineutrinos partículas neutras, es posible que sean la misma partícula, es decir, que ambas sean idénticas. Las partículas que cumplen dicha propiedad son conocidas como *partículas de Majorana*, en cambio, aquellas que no la cumplen (la mayoría de quarks y leptones) son llamadas *partículas de Dirac*; así, los fermiones con cargas conservadas (color, carga eléctrica,...) deben ser del tipo Dirac, mientras que los que no tienen cargas conservadas pueden ser de ambos tipos [49, 50].

Este modelo ha sido propuesto para estudiar la producción de DM a partir de la aniquilación de neutrinos estériles pesados de Majorana, sobre los cuales se puede indagar un poco en [51]. Dichos neutrinos pueden originarse al inicio del universo como producto de la desintegración del *inflatón*. Esta última es la partícula postulada como la responsable de la inflación sufrida por el universo en su etapa más temprana [52].

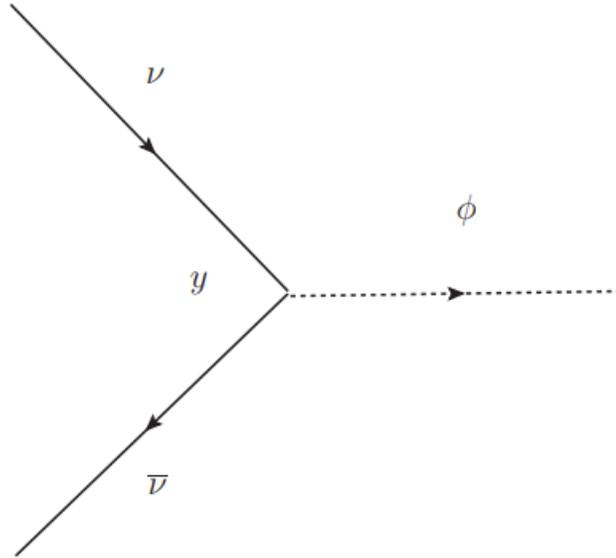
## 5.1. Lagrangiano del modelo

En este modelo la DM está descrita por un campo escalar  $\phi$  [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59].

El *acoplamiento Yukawa* en el modelo estándar describe la interacción entre el campo de Higgs y los quarks y leptones cargados. En muchas teorías de DM escalar se consideran acoplamientos de tipo Yukawa donde los términos que acoplan el escalar con los neutrinos tiene la forma

$$y\bar{\nu}\phi\nu. \quad (5-1)$$

Este tipo de acoplamientos (Fig. (5-1)) son los más naturales entre escalares y fermiones y se encuentran en muchos modelos (por ejemplo freeze-out, donde la DM se desintegra en escalares [60]).



**Figura 5-1.:** Acoplamiento tipo Yukawa.

En muchas ocasiones estos acoplamientos se introducen a mano y se estudia la fenomenología derivada de dicho acoplamiento sin necesidad de considerar la teoría subyacente a partir de la cual pueden surgir. Por el contrario, para darle una base más completa a este trabajo se mencionará brevemente una construcción a partir de la cual es posible obtener este tipo de interacciones.

Consideremos un doblete escalar, un doblete espinorial y un singlete

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \end{pmatrix} \quad \nu_{3R}. \quad (5-2)$$

En el doblete escalar,  $\phi$  y  $\varphi$  son campos escalares reales. Los anteriores campos (escalares y fermiónicos) constituyen el mínimo contenido material del modelo primero presentado en la Ref. [61], y luego ampliado [62], aunque en este último, los campos escalares son complejos y el primero se propone como energía oscura (DE), en lugar de DM. El modelo presentado en la referencia anterior se puede simplificar si usamos campos escalares reales. También podemos asociar  $\phi$  con la DM para construir el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\nu + \mathcal{L}_I, \quad (5-3)$$

donde

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi), \quad (5-4)$$

es el lagrangiano del inflatón (el cual es otro campo escalar de masa  $M$ ), y donde

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad (5-5)$$

es el lagrangiano del campo escalar de DM de masa  $m$ . En los dos campos escalares considerados aquí usamos potenciales cuadráticos, de la forma (ver [62])

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} M^2 \varphi^2, \quad V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

El siguiente término corresponde al lagrangiano de los neutrinos, y viene dado por

$$\mathcal{L}_\nu = \sum_{j=1}^3 \left\{ i \bar{\nu}_{jR} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{jR} - \frac{1}{2} m_j (\nu_{jR}^T C \nu_{jR}) + h.c. \right\}, \quad (5-6)$$

donde hemos incluido términos de masa para los neutrinos pesados de Majorana y donde  $C$  es el operador de conjugación de carga. Para escribir los términos cinéticos y de masa hemos usado los componentes derechos de los neutrinos ( $\nu_{jR}$ ,  $j = 1, 2, 3$ ). Estos neutrinos son los que alimentan el mecanismo see-saw [63], y adquieren su masa por mecanismos más allá del SM, por ejemplo, mecanismos que ocurren durante la era de gran unificación (GUT).

Finalmente, el término de interacción viene dado por

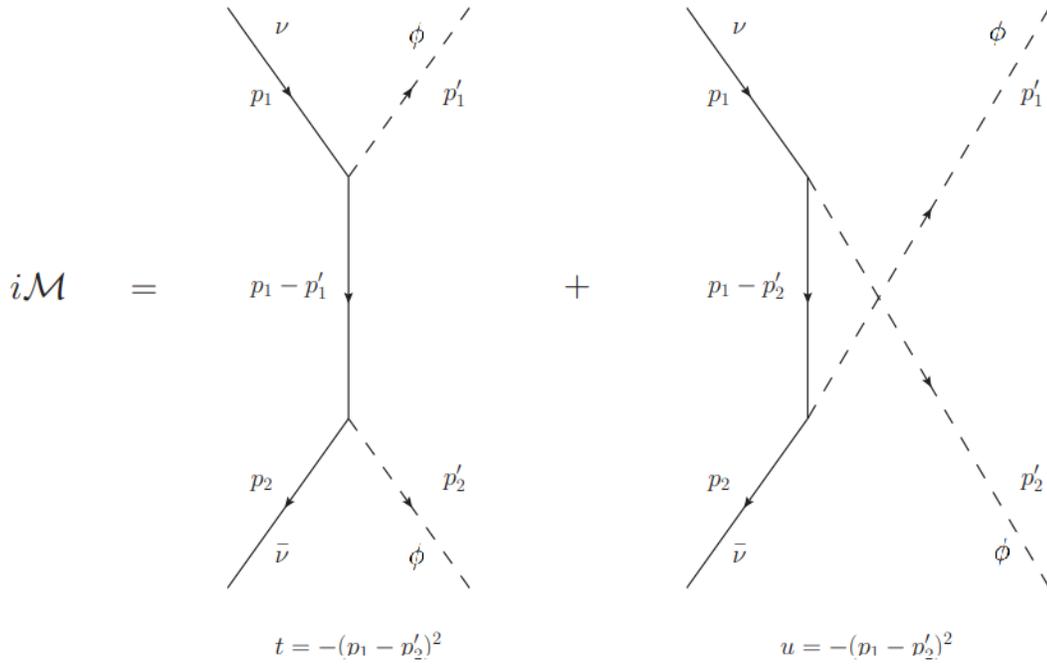
$$-\mathcal{L}_I = \bar{\nu}_{3R} \{ g_1 \phi \nu_{1R} + g_2 \phi \nu_{2R} + f_1 \varphi \nu_{1R} - f_2 \varphi \nu_{2R} \} + h.c. \quad (5-7)$$

Al final de la era inflacionaria, el inflatón  $\varphi$  se desintegra instantáneamente en neutrinos estériles derechos  $\nu_{jR}$  a través de los acoplamientos  $f_1$  y  $f_2$ , de tal manera que nos quedamos con

$$-\mathcal{L}_{I,\phi} = \bar{\nu}_{3R} \{ g_1 \phi \nu_{1R} + g_2 \phi \nu_{2R} \} + h.c. \quad (5-8)$$

De la ecuación anterior podemos ver que en nuestro modelo tenemos acoplamientos de Yukawa de la forma  $g_i \bar{\nu}_{3R} \phi \nu_{iR}$ , con  $i = 1, 2$ .

Este tipo de términos permite aniquilar neutrinos pesados para producir partículas de DM, como se muestra en la Fig. 5-2. Este sector es el que usaremos para estudiar la producción de DM.



**Figura 5-2.:** Canales de co-aniquilación de neutrinos permitidos por la Ec. (5-8) para la producción de partículas de DM.

## 5.2. Conexión de nuestro modelo con el modelo estándar (SM)

El modelo presentado aquí se conecta con el SM a través de los neutrinos derechos estériles que se pueden agregar al SM para formar lo que se conoce como el modelo estándar mínimamente extendido (SM-ME).

### 5.2.1. Lagrangiano de Yukawa en el SM-ME

Veamos antes algunos conceptos relacionados al modelo estándar de partículas elementales mínimamente extendido (SM-ME) [64].

El sector de Yukawa del SM-ME, se construye a partir de los siguientes objetos:

Doblete de Higgs y doblete de Higgs conjugado

$$\Phi = \begin{pmatrix} h^+ \\ h^0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} h^{0\dagger} \\ -h^- \end{pmatrix}. \quad (5-9)$$

Doblete leptónico y doblete de quarks

$$l_{mL} = \begin{pmatrix} \nu_m \\ e_m \end{pmatrix}_L, \quad q_{mL} = \begin{pmatrix} u_m \\ d_m \end{pmatrix}_L \quad m = 1, 2, 3. \quad (5-10)$$

Singletes de  $SU(2)$

$$u_{mR}, \quad d_{mR}, \quad e_{mR}, \quad \nu_{mR}. \quad (5-11)$$

El lagrangiano de Yukawa del SM-ME está dado por

$$\mathcal{L}_{yuk} = - \sum_{m,n=1}^3 [\gamma_{mn}^\mu \bar{q}_{mL} \bar{\Phi} u_{nR} + \Gamma_{mn}^d \bar{q}_{mL} \Phi e_{nR} + \Gamma_{mn}^e \bar{l}_{mL} \Phi e_{nR} + \Gamma_{mn}^\nu \bar{l}_{mL} \bar{\Phi} \nu_{nR}] + h.c. \quad (5-12)$$

donde

$$\Gamma_{mn}^i, \quad i = \{u, d, e, \nu\},$$

son elementos matriciales (están contenidos en matrices  $3 \times 3, \Gamma^i$ ) y son los acomplamientos de Yukawa. En general las matrices  $\Gamma^i$  son complejas y no son necesariamente diagonales.

Los términos que involucran partes derechas de neutrinos son

$$-\mathcal{L}_{yuk}^\nu = \sum_{m,n=1}^3 \Gamma_{mn}^\nu \bar{l}_{mL} \bar{\Phi} \nu_{nR} + h.c. \quad (5-13)$$

usando las Ec. (5-9) y (5-10) en el anterior lagrangiano, se tiene

$$-\mathcal{L}_{yuk}^\nu = \Gamma_{mn}^\nu \bar{\nu}_{mL} h^{0\dagger} \nu_{nR} - \Gamma_{mn}^\nu \bar{e}_{mL} h^- \nu_{nR} + h.c. \quad (5-14)$$

Los neutrinos  $\nu_{nR}$ , con  $n = 1, 2, 3$ , son los mismos singletes derechos que aparecen en la Ec. (5-8), esto conecta nuestro modelo con el SM-ME.

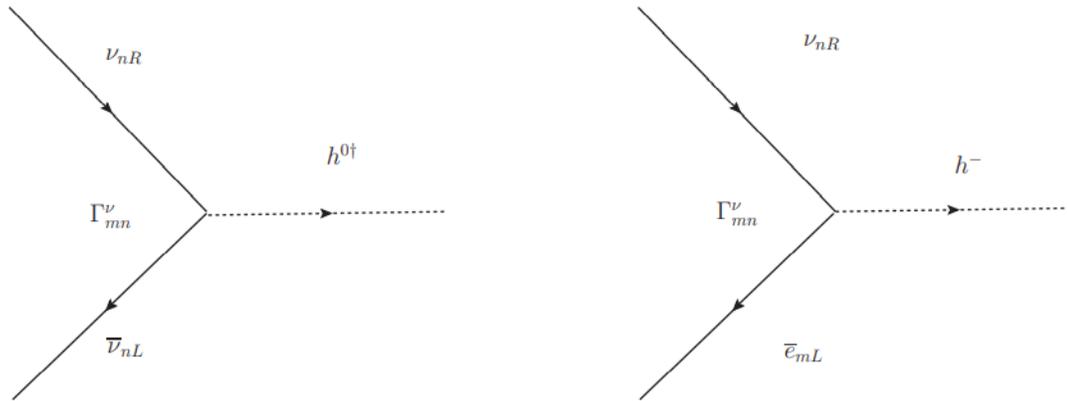
Teniendo en cuenta lo anterior, el lagrangiano completo considerado en este trabajo, el cual constituye una extensión al SM, es el siguiente

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{SM-ME} + \mathcal{L}, \quad (5-15)$$

donde  $\mathcal{L}_{SM-ME}$  es el lagrangiano del SM-ME, el cual es exactamente el del SM, excepto por su sector de Yukawa, el cual incluye singletes derechos y está dado por la Ec. (5-12); y donde  $\mathcal{L}$  está dado por Ec. (5-3).

### 5.3. Otros canales de aniquilación para los neutrinos

La conexión del modelo aquí propuesto con el SM-ME implica la existencia de otros canales de aniquilación para los neutrinos, lo cual podría hacer que el proceso de producción de DM ocurra fuera del equilibrio térmico (recordando que esta condición se usó para el cálculo de Freeze-in). Esto se debe a que los neutrinos derechos también están acoplados a los campos del SM, como se puede ver en la Ec. (5-12), por lo tanto, tenemos acoplamientos del tipo mostrado en la Fig. 5-3. Debido a las escalas de energía a las cuales existen los neutrinos pesados de Majorana ( $10^{13} - 10^{15} GeV$ ) no existen datos experimentales para la fenomenología de estos canales, sin embargo, su presencia pudo haber jugado un papel importante en el universo temprano.



**Figura 5-3.:** Vértices permitidos por los acoplamientos dados en la Ec. (5-12). Podemos ver el canal del Higgs neutro ( $h^0$ ) y del Higgs cargado ( $h^-$ ), que aparecen en el doblete definido en la Ec. (5-9). Estos canales acoplan los neutrinos derechos con las partículas del SM.

# 6. Fenomenología del modelo y resultados

## 6.1. Número de partículas en el volumen comóvil

Es conveniente cambiar la densidad numérica de partículas que aparece en la Ec. (4-34) por la densidad numérica comóvil, como se explica a continuación.

En un universo dominado por radiación la entropía  $S$  se conserva. Si se escribe

$$S = \mathfrak{s}V, \tag{6-1}$$

donde  $\mathfrak{s}$  es la densidad de entropía denotada como

$$\mathfrak{s} = \frac{S}{V}, \tag{6-2}$$

donde  $V$  es el volumen, el cual se puede expresar de la siguiente manera

$$V = ka^3, \tag{6-3}$$

donde  $k$  es una constante y  $a$  es el factor de escala universal, por tanto, la densidad de entropía se expresa como

$$\mathfrak{s} = kSa^{-3}, \tag{6-4}$$

La densidad numérica de partículas en el volumen físico está definida como

$$n_\chi = \frac{\#_{part}}{V}, \tag{6-5}$$

donde  $\#_{part}$  es el número de partículas, entonces, utilizando la Ec. (6-2) se tiene.

$$\#_{part} = S \frac{n_\chi}{\mathfrak{s}}. \tag{6-6}$$

La ecuación anterior (salvo la constante  $S$ ), permite definir el número de partículas en el volumen co-móvil como

$$N_\chi \equiv \frac{n_\chi}{s}. \tag{6-7}$$

$N_\chi$  es de gran utilidad para calcular reliquias. Si se analiza la Ec. (4-34), sin producción o destrucción de partículas simplemente se reduce a

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = 0, \quad (6-8)$$

cuya solución es

$$n_\chi \propto a^{-3},$$

por tanto, usando la Ec. (6-4) se puede ver que  $N_\chi$  es constante; esto implica que, cuando la producción —o destrucción— de  $n_\chi$  se detiene, la producción de materia oscura se estabiliza en cierto valor de  $N_\chi$ , por tanto, es sumamente conveniente cambiar la variable de evolución de  $n_\chi$  a  $N_\chi$ .

Reemplazando la Ec. (6-3) en la Ec. (6-1), se tiene

$$S = \mathfrak{s}ka^3, \quad (6-9)$$

por conservación de la entropía ( $\dot{S} = 0$ )

$$0 = 3\mathfrak{s}a^2\frac{da}{dt} + a^3\frac{d\mathfrak{s}}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}\mathfrak{s}. \quad (6-10)$$

Utilizando la Ec. (6-7), la derivada temporal de la densidad de entropía se expresa como

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{1}{N_\chi} \frac{dn_\chi}{dt} - \frac{n_\chi}{N_\chi^2} \frac{dN_\chi}{dt}, \quad (6-11)$$

por tanto

$$\frac{dn_\chi}{dt} = \mathfrak{s} \frac{dN_\chi}{dt} + \frac{d\mathfrak{s}}{dt} N_\chi, \quad (6-12)$$

luego, utilizando la ecuación anterior junto con las Ec. (6-7) y (6-10), se tiene

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = \mathfrak{s} \frac{dN_\chi}{dt}. \quad (6-13)$$

Finalmente, sustituyendo en la Ec. (4-34), se llega a

$$\mathfrak{s} \frac{dN_\chi}{dt} = \frac{g_i^2 T}{512\pi^5 \Sigma} \int_{4m_i^2}^{\infty} ds \left[ \frac{K_1(\sqrt{s}/T)}{\sqrt{s}} \int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt |\widetilde{M}|_{ll \rightarrow \chi\chi}^2 \right] \quad (6-14)$$

### 6.1.1. Evolución en la temperatura

Se realiza un cambio en el operador diferencial de  $t$  a  $T$  en el lado izquierdo de la Ec. (6-14) dado que este evoluciona de acuerdo a la variable temporal, mientras que el lado derecho es una función de la temperatura. Esto se puede hacer solamente durante la era de radiación dominante mediante la siguiente expresión [36, 38]

$$\frac{d}{dt} = -\frac{\pi}{M_{pl}} \left( \frac{g_*(T)}{90} \right)^{1/2} T^3 \frac{d}{dT}, \quad (6-15)$$

donde  $M_{pl}$  es la masa de Planck reducida y  $g_*(T)$  son los grados de libertad efectivos relativistas —en densidad de energía—, que en general dependen discretamente en la temperatura. Durante la era de la radiación, la densidad de entropía evoluciona como

$$\mathfrak{s} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s}(T) T^3, \quad (6-16)$$

donde  $g_{*s}$  es el número efectivo de grados de libertad en entropía.

Reemplazando las Ec. (6-15) y (6-16) en la Ec. (6-14), se tiene

$$\frac{dN_\chi}{dT} = -\frac{45}{1024\pi^8} \frac{M_{pl}}{\Sigma} \frac{g_l^2}{g_{*s}(T)} \left( \frac{90}{g_*(T)} \right)^{1/2} \frac{1}{T^5} \int_{4m_l^2}^{\infty} ds \left[ \frac{K_1(\sqrt{s}/T)}{\sqrt{s}} \int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt |\widetilde{M}|_{ll \rightarrow \chi\chi}^2 \right]. \quad (6-17)$$

### 6.1.2. Transformación de la integral interior

En este punto introducimos la física contenida en el modelo propuesto en el capítulo 5.

La integral de la amplitud puede expresarse como [35]

$$\int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt |\widetilde{M}|_{ll \rightarrow \chi\chi}^2 = \frac{g_c^4}{128} F(s; m_l, m_\chi), \quad (6-18)$$

donde  $g_c$  es el acoplamiento entre los neutrinos y la DM; es de tipo Yukawa, por ende debe ser menor o igual a la unidad. La función  $F(s; m_l, m_\chi)$  depende de la variable de Mandelstam  $s$  y contiene como parámetros las masas de los neutrinos ( $m_l$ ) y del escalar de materia oscura ( $m_\chi$ ). Esta función proviene del cálculo de la amplitud de aniquilación permitido por los términos de interacción dados en la Ec. (5-8) y mostrados en la Fig. 5-2. En este trabajo utilizamos la amplitud calculada y presentada en la ref. [62].

Reemplazando la Ec. (6-18) en la Ec. (6-17), se tiene

$$\frac{dN_\chi}{dT} = -\frac{45}{1024\pi^8} \frac{M_{pl}}{\Sigma} \frac{g_l^2}{g_{*s}(T)} \left( \frac{90}{g_*(T)} \right)^{1/2} \frac{1}{T^5} \frac{g_c^4}{128} \int_{4m_l^2}^{\infty} ds \frac{K_1(\sqrt{s}/T)}{\sqrt{s}} F(s; m_l, m_\chi). \quad (6-19)$$

Realizado un cambio de variable

$$s \rightarrow 4m_l^2/x, \quad F(s; m_l, m_\chi) \rightarrow 4m_l^2 g_\chi(x; \tau), \quad (6-20)$$

donde el parámetro  $\tau$  se define como

$$\tau \equiv \frac{m_\chi}{m_l}, \quad (6-21)$$

y donde la función  $g_\chi(x; \tau)$  está definida como

$$g_\chi(x; \tau) \equiv \left\{ \frac{\frac{1}{x} + 4 + \tau^2}{\frac{1}{x} - \tau^2 + \frac{1}{4}\tau^4} - 3 \right\} S(x; \tau) + \left\{ \frac{1}{x} + 2 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{2\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \frac{1}{8}\tau^4}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\tau^2} \right\} \times \log \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\tau^2 + S(x; \tau)}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\tau^2 - S(x; \tau)}, \quad (6-22)$$

donde

$$S(x; \tau) \equiv \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{x} - \tau^2\right)}. \quad (6-23)$$

Los anteriores resultados corresponden al cálculo de la amplitud de aniquilación de neutrinos yendo a escalares, el cual es un resultado genérico de la teoría de QED [44]. En este caso estamos usando las funciones presentadas en [35].

Con estos cambios la Ec. (6-19) queda

$$\frac{dN_\chi}{dT} = -\frac{45}{16384\pi^8} \frac{M_{pl}}{\Sigma} \frac{g_l^2 g_c^4}{g_{*s}(T)} \left(\frac{90}{g_*(T)}\right)^{1/2} \frac{m_l^3}{T^5} \mathcal{I}_\chi(T; \tau, m_l), \quad (6-24)$$

donde  $\mathcal{I}_\chi(T; \tau, m_l)$  está definida como

$$\mathcal{I}_\chi(T; \tau, m_l) \equiv \int_0^1 dx \frac{g_\chi(x; \tau)}{x\sqrt{x}} K_1\left(\frac{2m_l}{T\sqrt{x}}\right). \quad (6-25)$$

### Cambio de variable de integración

Para facilitar la integración y dado que la temperatura de interés podría estar cerca del valor de la masa de los neutrinos, se define la variable

$$\mu = \frac{m_l}{T}, \quad (6-26)$$

por tanto

$$\frac{d}{dT} = -\frac{\mu}{T} \frac{d}{d\mu}, \quad (6-27)$$

con las Ec. (6-26) y (6-27) en (6-24)

$$\frac{dN_\chi}{d\mu} = \frac{45}{16384\pi^8} \frac{1}{\Sigma} \frac{M_{pl}}{m_l} \frac{g_l^2 g_c^4}{g_{*s}(T)} \left( \frac{90}{g_*(T)} \right)^{1/2} \mu^3 \mathcal{I}_\chi(\mu; \tau), \quad (6-28)$$

donde la Ec. (6-25) es reescrita en términos de la nueva variable,  $\mu$ , como sigue

$$\mathcal{I}_\chi(\mu; \tau) \equiv \int_0^1 dx \frac{g_\chi(x; \tau)}{x\sqrt{x}} K_1 \left( \frac{2\mu}{\sqrt{x}} \right). \quad (6-29)$$

## 6.2. Densidad esperada de materia oscura

La densidad de DM observada actualmente es

$$\Omega_{DM,0} = \frac{\rho_{DM,0}}{\rho_{c,0}}. \quad (6-30)$$

La densidad de energía de DM es

$$\rho_{DM} = m_\chi n_\chi, \quad (6-31)$$

y la densidad crítica está definida como

$$\rho_c = 3M_{pl}^2 H^2, \quad (6-32)$$

por tanto

$$\Omega_{DM,0} = \frac{m_\chi n_{\chi,0}}{3M_{pl}^2 H_0^2}, \quad (6-33)$$

y con la definición dada en la Ec. (6-7), se tiene

$$\Omega_{DM,0} = \frac{m_\chi N_{\chi,0} \mathfrak{s}_0}{3M_{pl}^2 H_0^2}, \quad (6-34)$$

donde  $\mathfrak{s}_0$  es la densidad de entropía observada hoy, la cual se puede conocer por medio de la Ec. (6-16) y con las cantidades

$$T_0 = 2,34865337 \times 10^{-4} eV,$$

$$g_{*s}(T_0) = 3,91$$

obteniendo

$$\mathfrak{s}_0 = 2,22203431 \times 10^{-11} eV^3. \quad (6-35)$$

La Ec. (6-28) es la herramienta principal para el estudio del modelo.

Otras cantidades conocidas necesarias son

$$\begin{aligned}\Omega_{DM,0} &= 0,258, \\ g_l &= 6, \\ \Sigma &= 2.\end{aligned}$$

Además, por las altas temperaturas, los grados de libertad efectivos relativistas casi no varían (este numero empieza a disminuir drásticamente para temperaturas inferiores a  $100\text{GeV}$ ), por tanto, se puede tomar [38]

$$g_*(T) \approx 100.$$

Los parámetros del modelo que se pueden controlar son: la masa de los neutrinos que se aniquilan ( $m_l$ ), el acoplamiento entre los neutrinos y la DM (de tipo Yukawa, por ende, debe ser menor o igual a la unidad), y la masa del escalar de DM.

### 6.3. Resultados numéricos

Se define un nuevo número de la siguiente manera

$$N'_\chi = \frac{N_\chi}{g_c^4}, \quad (6-36)$$

por tanto, la Ec. (6-28), queda

$$\frac{dN'_\chi}{d\mu} = \frac{45}{16384\pi^8} \frac{1}{\Sigma} \frac{M_{pl}}{m_l} \frac{g_l^2}{g_{*s}(T)} \left( \frac{90}{g_*(T)} \right)^{1/2} \mu^3 \mathcal{I}_\chi(\mu; \tau), \quad (6-37)$$

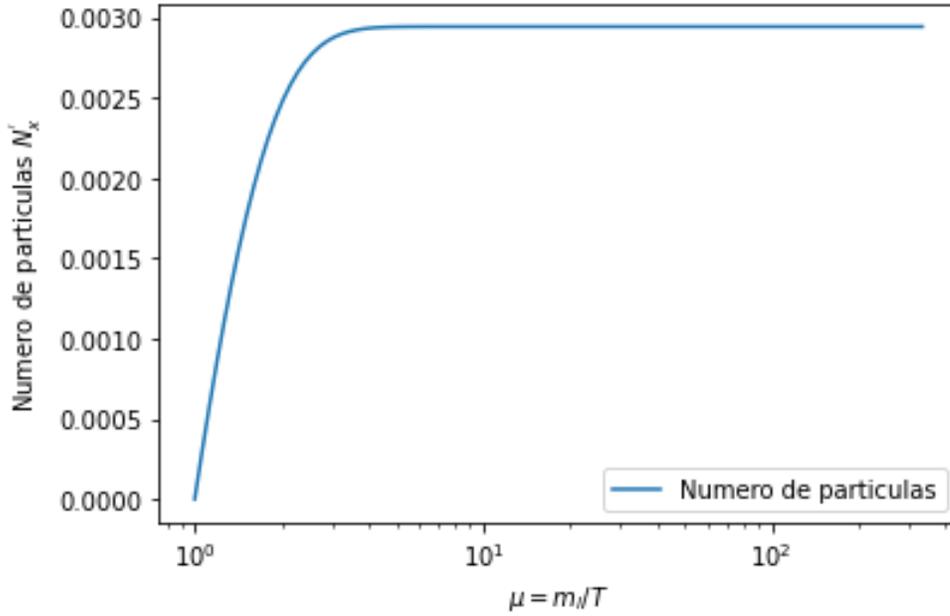
donde la integral está dada por

$$\mathcal{I}_\chi(\mu; \tau) \equiv \int_0^1 dx \frac{g_\chi(x; \tau)}{x\sqrt{x}} K_1 \left( \frac{2\mu}{\sqrt{x}} \right). \quad (6-38)$$

Debido al cambio anterior ya no se presenta dependencia del acoplamiento  $g_c$ .

Haciendo evolucionar la Ec. (6-37) utilizando lenguaje Python (ver Anexo D) se obtiene la Fig. **6-1**, donde se encontró que el número de partículas se estabiliza en  $N'_\chi = 0,00294635$ .

Donde se encontró que el número de partículas se estabiliza en  $N'_\chi = 0,00294635$ .



**Figura 6-1.:** Producción de DM a partir de neutrinos pesados de Majorana con acoplamiento tipo Yukawa, cuya evolución está dada por la Ec. (6-37). (Se escribió un código en Phyton para la evolución del modelo, el cual se incluye en el Anexo D).

Reescribiendo la Ec. (6-34) en términos de la Ec. (6-36), se tiene

$$\Omega_{DM,0} = \frac{m_\chi g_c^4 N'_{\chi,0} \mathfrak{s}_0}{3M_{pl}^2 H_0^2}, \quad (6-39)$$

de donde se tiene que

$$m_\chi g_c^4 = \frac{3M_{pl}^2 H_0^2 \Omega_{DM,0}}{N'_{\chi,0} \mathfrak{s}_0}. \quad (6-40)$$

Dado que el número de partículas una vez estabilizado (ver Fig. 6-1) se mantiene hasta la actualidad, entonces  $N'_{\chi,0} = 0,00294635$ . Reemplazando los valores en la ecuación anterior

$$m_\chi g_c^4 = 145,038639eV, \quad (6-41)$$

por lo tanto, se tiene una relación funcional entre el acoplamiento y el valor de la masa de DM

$$g_c = \left( \frac{145,038639eV}{m_\chi} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (6-42)$$

Dado que el acoplamiento  $g_c$  es un acoplamiento de Yukawa, no puede ser mayor que la unidad,  $g_c \leq 1$ , por lo tanto, de la ecuación anterior se puede imponer una cota inferior para

el valor de la masa del escalar, es decir

$$145,038639eV \leq m_\chi.$$

El límite superior lo obtenemos a partir de la definición del parámetro  $\tau$  dado en la Ec. (6-21). Nótese que la función dada en la Ec. (6-22) toma valores indefinidos para  $\tau > 1$ , por lo tanto el máximo valor que puede tomar el parámetro es  $\tau = 1$ , así, el valor máximo de la masa del escalar se da cuando  $m_\chi = m_l$  (ver Ec. 6-21). Ya que en nuestro modelo se ha fijado la masa de los neutrinos en  $m_l = 10^{13} GeV$ , entonces la cota máxima permitida para la masa del escalar es  $10^{22} eV$ , luego

$$145,038634eV \leq m_\chi \leq 10^{22} eV. \quad (6-43)$$

es decir que este modelo no es muy restrictivo en cuanto al valor de  $m_\chi$ . Esto se debe a que la función dada en la Ec. (6-22) no es sensible a la variación del parámetro  $\tau$ , es decir, el valor de la masa  $m_\chi$  no impone cotas sobre la sección eficaz de aniquilación, por lo tanto, los valores permitidos aquí abarcan 22 ordenes de magnitud; por otra parte, es notable el valor del límite inferior encontrado.

Con los límites (6-43) y la función dada en la Ec. (6-42), se tiene que el intervalo permitido para el acoplamiento entre la DM y los neutrinos es

$$1,1 \times 10^{-5} \leq g_c \leq 1. \quad (6-44)$$

Los resultados mostrados en la figura **6-1** y en la Eq. (6-41) muestran que la aniquilación de neutrinos pesados puede actuar como fuente de la ecuación de Boltzman para producir DM por Freeze-in.

La densidad de DM nunca está en equilibrio térmico y se estabiliza rápidamente en un valor constante que podemos observar hoy. Esto brinda un acercamiento fenomenológico que muestra que el modelo propuesto aquí es viable, es decir, la DM puede provenir de la aniquilación de neutrinos pesados ya que no hemos encontrado contradicciones para los valores de los parámetros de masa de la DM y su acoplamiento. Se muestra también que la producción ocurre en épocas muy tempranas del universo, para valores del parámetro  $\mu$  entre 1 y 10, que corresponde a temperaturas de  $10^{13}$  y  $10^{12}$  GeV, es decir, que para valores de masas de los neutrinos de  $10^{13}$  GeV, la producción de DM ocurre simultáneamente a la desintegración de los neutrinos en materia del SM. El estudio fenomenológico de estos procesos están más allá del alcance de esta tesis y se dejan como posible trabajo a futuro.

## 7. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se estudiaron ampliamente las dos bases del modelo cosmológico estándar, dichas bases son: la gravedad de Einstein y el principio cosmológico. Se hizo una revisión detallada de la gravedad de Einstein, para lo cual se obtuvieron las ecuaciones de campo de Einstein. En seguida se estudió con detalle la construcción de la métrica de FLRW, la cual es la única que se ajusta al principio cosmológico, es decir, describe un universo homogéneo e isotrópico.

Utilizando la métrica de FLRW y las ecuaciones de campo de Einstein, se obtuvieron las ecuaciones de Friedmann, las cuales describen un universo homogéneo e isotrópico en expansión. Dichas ecuaciones son la base del modelo estándar cosmológico, por lo que la evolución de cualquier componente material del universo que se quiera estudiar, debe hacerse con base en las ecuaciones de Friedmann.

A continuación se estudió la producción de DM escalar en el paradigma de Freeze-in, para lo cual se hizo una revisión de la ecuación de Boltzmann en un universo FLRW. Dicha ecuación es la herramienta estándar para estudiar la producción de reliquias en el universo temprano.

Una vez completado este conjunto de herramientas, proponemos un modelo en el cual la DM escalar se produce a partir de la aniquilación de neutrinos pesados de Majorana. Se escribió explícitamente la ecuación de Boltzmann para dicho sistema y se estudió numéricamente la producción de reliquias de DM, mediante un programa escrito en Python. Se encontraron las siguientes cotas para el valor de la masa del escalar y el acoplamiento de Yukawa con los neutrinos pesados

$$145,038634eV \leq m_\chi \leq 10^{22}eV$$

$$1,1 \times 10^{-5} \leq g_c \leq 1$$

En la actualidad los valores permitidos para la masa de la DM abarca un amplio espectro, por ejemplo, existen modelos para DM de escalares ultraligeros con masa del orden de  $10^{-22}eV$  (ver por ejemplo [11, 12]), así mismo existen modelos con partículas de DM pesadas (por ejemplo, escalares pesados o WIMPS [15]). Nuestro modelo excluye escalares ultraligeros, ya que solo permite masas mayores a los  $145eV$ , sin embargo es compatible con un amplio

---

espectro para DM pesada.

El modelo aquí propuesto utiliza neutrinos pesados de Majorana como fuente en la ecuación de Boltzmann, es decir, como fuente a partir de la cual se generan los escalares de materia oscura. Anteriormente se habían propuesto dichos neutrinos como DM en sí misma, dichos modelos ya han sido descartados [15], sin embargo, el uso de dichos neutrinos como productores de DM por co-aniquilación es un mecanismo que no había sido estudiado y se presenta por primera vez en esta tesis.

La implementación de neutrinos pesados como fuente de la ecuación de Boltzmann para la generación de DM escalar involucra una amplia fenomenología, ya que dichos neutrinos, aparte de estar conectados con el escalar de DM, también están conectados con los neutrinos ligeros (observados) a través del mecanismo see-saw, también están conectados con la materia del SM-ME por medio de su interacción con el doblete de Higgs. El estudio fenomenológico de los canales de neutrinos ligeros y del canal del Higgs está más allá del alcance de esta tesis y se deja como perspectiva. En esta tesis nos hemos enfocado en el sector de neutrinos pesados y escalar de DM. Los resultados mostrados aquí ofrecen los primeros pasos para aproximarnos a una comprensión más profunda de este modelo. Los resultados obtenidos hasta este punto nos indican que el modelo tiene viabilidad, ya que los valores de la masa y del acoplamiento de Yukawa aquí encontrados no entran en contradicción con los valores esperados, ya que entran en el amplio espectro permitido para los valores de la masa de la DM [2, 4].

Es importante resaltar que en esta tesis hemos abordado la producción de DM desde un enfoque de altas energías, es decir, a partir de una extensión del modelo estándar (SM-ME + sector escalar) hemos calculado explícitamente los términos de la ecuación de Boltzmann que permiten hacer la conexión entre el sector de materia oscura cosmológico y el sector de neutrinos pesados. En muchos trabajos relacionados con freeze-out y freeze-in es común considerar las secciones eficaces térmicamente promediadas como parámetros constantes, los cuales se ajustan numéricamente para que la densidad de DM producida coincida con la observada. Por el contrario, en esta tesis hemos utilizado expresiones analíticas obtenidas a partir de cálculos explícitos de QED. Este es un enfoque novedoso que se ha empezado a utilizar en años recientes y que es necesario usar aquí para explorar la viabilidad de nuestro modelo.

# A. Anexo: Gravedad de Einstein

La fuerza gravitacional ejercida sobre una partícula de prueba con masa  $m$ , en la teoría clásica está dada por

$$\vec{F} = m\vec{g} = -m\vec{\nabla}\phi, \quad (\text{A-1})$$

donde  $\vec{g}$  es el campo gravitatorio generado en cierta posición por el potencial gravitacional  $\vec{\nabla}\phi$ . Este último se define como [65]

$$\nabla^2\phi = 4\pi G_N\rho, \quad (\text{A-2})$$

siendo esta la ecuación de campo gravitatorio newtoniana, donde  $\rho$  es la densidad de materia y  $G_N$  es la constante de gravitación newtoniana.

Ahora, en términos de la curvatura del espacio-tiempo newtoniana, se tiene que

$$R_{00} = 4\pi G_N\rho, \quad (\text{A-3})$$

donde  $R_{00}$  es la componente del tensor de Ricci newtoniana. El tensor de Ricci es un caso más particular del tensor de Riemann (tensor de curvatura), el cual supone una generalización del concepto de curvatura de Gauss.

Posteriormente, Albert Einstein postuló las ecuaciones de campo para la métrica Lorentziana  $g$ , para un espacio-tiempo relativista, puesto que la ley de Poisson solo tenía en cuenta la parte espacial [33], por lo tanto

$$R_{ab} = 4\pi G_N T_{ab}, \quad (\text{A-4})$$

puesto que  $\rho$  es una componente del tensor de energía-momento  $T_{ab}$ .

Si se aplica la divergencia a ambos lados de la ecuación anterior, se tiene que el tratamiento del tensor de energía-momento en un espacio curvo debería ser

$$\nabla^a T_{ab} = 0, \quad (\text{A-5})$$

implicando a su vez

$$\nabla^a R_{ab} = 0. \quad (\text{A-6})$$

Sin embargo, esto no se cumple en cualquier geometría, como consecuencia, debe ser modificada a un tensor que sí obedezca esta condición.

Para darle un tratamiento diferente al problema, Hilbert propone una forma alternativa.

## A.1. Acción y Densidad Lagrangiana de Hilbert

La Acción se define como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (\text{A-7})$$

Hilbert propuso una densidad lagrangiana [66] de la forma

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R, \quad (\text{A-8})$$

la cual es el funcional más general que se puede escribir a partir de la métrica y su primera derivada, aquí  $g = \det g_{ab}$ ,  $g_{ab}$  es la métrica del sistema y  $R$  es el escalar de Ricci (contiene las derivadas).

La densidad lagrangiana es de carácter tensorial y

$$R = g^{ab}R_{ab}, \quad (\text{A-9})$$

luego,

$$S_H[g] = \int d^4x \sqrt{-g} g^{ab} R_{ab}. \quad (\text{A-10})$$

Aplicando el principio de mínima acción

$$\delta S_H[g] = \int d^4x (\delta \sqrt{-g} g^{ab} R_{ab} + \sqrt{-g} \delta g^{ab} R_{ab} + \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab}) = 0, \quad (\text{A-11})$$

desarrollando las variaciones, se obtiene

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{\delta \det(g_{ab})}{2\sqrt{-g}} = \frac{-\det(g) g^{ab} \delta g_{ab}}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab}. \quad (\text{A-12})$$

Para la segunda variación se tiene la propiedad

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a, \quad (\text{A-13})$$

por tanto,

$$\delta g^{ab} g_{bc} + g^{ab} \delta g_{bc} = 0, \quad (\text{A-14})$$

despejando y renombrando los índices con el objetivo de no repetirlos

$$\delta g^{ab} = -g^{am} g^{bn} \delta g_{mn}. \quad (\text{A-15})$$

Para la siguiente variación el tensor de Ricci se define como

$$R_{ab} = R_{acb} = \Gamma_{ba,c}^c - \Gamma_{ca,b}^c + \Gamma_{cd}^c \Gamma_{ba}^d - \Gamma_{bd}^c \Gamma_{ca}^d, \quad (\text{A-16})$$

donde la notación después de la coma indica una derivada parcial del símbolo de Christoffel. Además, en coordenadas normales, los dos últimos términos del tensor de Ricci se anulan

$$\delta R_{ab} = \delta \partial_b \Gamma_{am}^m - \delta \partial_m \Gamma_{ab}^m, \quad (\text{A-17})$$

ahora, como la derivada parcial conmuta con la variación

$$\delta R_{ab} = \partial_b \delta \Gamma_{am}^m - \partial_m \delta \Gamma_{ab}^m = \nabla_b \delta \Gamma_{am}^m - \nabla_m \delta \Gamma_{ab}^m = \delta \Gamma_{am,b}^m - \delta \Gamma_{ab,m}^m. \quad (\text{A-18})$$

Se tiene que

$$\sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = \sqrt{-g}. \quad (\text{A-19})$$

Cuando la derivada covariante de  $g$  es cero, es decir:  $\nabla g = 0$ .

$$\sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = \sqrt{-g} (g^{ab} \delta \Gamma_{am}^m)_{,b} - \sqrt{-g} (g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^m)_{,m}, \quad (\text{A-20})$$

además, en coordenadas normales, la derivada parcial es igual a la covariante

$$= \sqrt{-g} A^b_{,b} - \sqrt{-g} B^m_{,m} = (\sqrt{-g} A^b)_{;b} - (\sqrt{-g} B^m)_{;m}. \quad (\text{A-21})$$

Juntando todos los términos

$$0 = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab} g^{ab} R_{ab} - \sqrt{-g} g^{am} g^{bn} \delta g_{mn} \delta g^{ab} R_{ab} + (\sqrt{-g} A^b)_{;b} - (\sqrt{-g} B^m)_{;m} \right), \quad (\text{A-22})$$

como los dos últimos términos son de superficie, se puede sacar de la ecuación de movimiento

$$0 = \int d^4x \left( \sqrt{-g} \delta g_{mn} \left[ \frac{1}{2} g^{mn} g^{ab} R_{ab} - R^{mn} \right] \right). \quad (\text{A-23})$$

Para que la acción de Hilbert conserve su forma inicial, se define el tensor de curvatura de Einstein como

$$G^{mn} = R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R. \quad (\text{A-24})$$

De esta forma Hilbert concluyó que la ecuación a analizar al inicio debería ser

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G_N T_{ab}, \quad (\text{A-25})$$

siendo estas las **Ecuaciones de campo de Einstein**.

## B. Anexo: Métrica de un universo homogéneo e isotrópico

El principio cosmológico plantea que el universo a gran escala (escalas de millones de años luz), es isotrópico y homogéneo.

La **isotropía** se aplica en algún punto específico del espacio y establece que el espacio se ve igual sin importar en qué dirección se mire, es decir, es invariante bajo simetría rotacional. Esta es la simetría que está indicada por las observaciones de los cúmulos de galaxias y del CMB.

La **homogeneidad** afirma que el universo es invariante bajo traslaciones espaciales, es decir, su estructura y las leyes que lo rigen serán las misma para nosotros o para una galaxia a millones de años luz.

La métrica de Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker describe este tipo de universos. Para construir la métrica se define un diferencial de longitud desde la simetría esférica, pero vista desde una dimensión superior, esto es

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (\text{B-1})$$

Extendiendo la definición de esfera como la conocemos, a una hiperesfera, es decir, imaginarla en una dimensión extra, llegando así a un espacio euclidiano  $4D$ , luego, la ecuación de una hiperesfera es:

$$b^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad (\text{B-2})$$

despejando en función de  $x_4$ :

$$x_4 = \sqrt{b^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, \quad (\text{B-3})$$

aplicando una derivada total

$$dx_4 = \frac{-x_1 dx_1 - x_2 dx_2 - x_3 dx_3}{\sqrt{b^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}, \quad (\text{B-4})$$

$$dx_4^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{b^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, \quad (\text{B-5})$$

sustituyendo lo anterior en la Ec. (B-1), se tiene

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{b^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (\text{B-6})$$

Dado que la única simetría que admite homogeneidad e isotropía es una esfera, sean las coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (\text{B-8})$$

luego, el cuadrado de su diferencial

$$dr^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (\text{B-9})$$

donde los diferenciales

$$\begin{aligned} dx_1^2 &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\phi^2. \\ dx_2^2 &= \sin^2 \theta \sin^2 \phi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d\phi^2. \\ dx_3^2 &= \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2. \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

Por tanto,

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{B-11})$$

reemplazando la Ec. (B-11) en la Ec. (B-6), se obtiene

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, \quad (\text{B-12})$$

reemplazando la Ec. (B-8)

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{r^2 dr^2}{b^2 - r^2} \\ &= \frac{b^2 dr^2}{b^2 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{b^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

Se va a adicionar una cuarta dimensión a todo suceso en el espacio, perpendicular a las demás, cuyo valor estaría formado por componente imaginaria, este sería, para el vacío:  $icdt$ , luego

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (\text{B-14})$$

Esta es conocida como la *Métrica de Minkovsky*.

Suponiendo que el universo se expande a una tasa constante, se denominará a  $a(t)$  como la tasa de expansión del universo, por tanto

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad (\text{B-15})$$

reemplazando el diferencial longitudinal de la hiperesfera en la ecuación anterior

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{b^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (\text{B-16})$$

Definiendo  $\kappa = \frac{1}{b^2}$  como la curvatura del espacio,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (\text{B-17})$$

siendo esta la *métrica de Friedmann, Lemaitre, Robertson, Walker* (FLRW), la cual describe un universo homogéneo e isotrópico [67].

# C. Anexo: Símbolos de Christoffel y tensor de Riemann en un universo FLRW

## C.1. Símbolos de Christoffel

La forma general de los símbolos de Christoffel está dada por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta}), \quad (\text{C-1})$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica y  $g^{\mu\nu}$  es su inversa. Dichos símbolos no son tensores, además, son simétricos en sus dos índices inferiores. Las derivadas parciales se pueden denotar con una coma en los subíndices seguida del índice respectivo de la derivada, esto es:  $\partial_{\beta}g_{\alpha\nu}$  se puede expresar como  $g_{\alpha\nu,\beta}$ .

Examinando por casos:

1. Caso  $\mu = 0$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}g^{0\nu} (\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta}), \quad (\text{C-2})$$

Los subcasos:

- a) cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{0\nu} (\partial_0g_{\alpha\nu} + \partial_0g_{0\nu} - \partial_{\nu}g_{00}), \quad (\text{C-3})$$

para la métrica FLRW  $\Gamma_{00}^0 = 0$ .

- b) cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta = i$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}g^{0\nu} (\partial_i g_{0\nu} + \partial_0 g_{i\nu} - \partial_{\nu} g_{0i}), \quad (\text{C-4})$$

De acá se obtienen tres índices, los cuales, dada la diagonalidad de la métrica FLRW, son cero.

c) cuando  $\alpha = i$  y  $\beta = j$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}g^{0\nu} (\partial_j g_{i\nu} + \partial_i g_{j\nu} - \partial_\nu g_{ij}), \quad (\text{C-5})$$

para este caso,  $i = j$  y  $\nu$  solo puede tomar el valor de 0, por tanto quedaría de la forma

$$\Gamma_{ii}^0 = -\frac{1}{2}g^{00} (\partial_0 g_{ii}), \quad (\text{C-6})$$

2. caso  $\mu = i$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2}g^{i\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}), \quad (\text{C-7})$$

Los subcasos:

a) cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{i\nu} (\partial_0 g_{0\nu} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}), \quad (\text{C-8})$$

De acá se obtienen tres símbolos que poseen un valor nulo.

b) cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta = j$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{i\nu} (\partial_j g_{0\nu} + \partial_0 g_{j\nu} - \partial_\nu g_{0j}), \quad (\text{C-9})$$

por lo que  $\nu$  debe ser igual a  $i$ , y dado el carácter diagonal de la métrica, se tiene

$$\Gamma_{0i}^i = \frac{1}{2}g^{ii} (\partial_0 g_{ii}), \quad (\text{C-10})$$

c) cuando  $\alpha = k$  y  $\beta = j$

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2}g^{i\nu} (\partial_j g_{k\nu} + \partial_k g_{j\nu} - \partial_\nu g_{kj}), \quad (\text{C-11})$$

dado que  $\nu$  solo puede tomar el valor  $\nu = i$ , entonces

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2}g^{ii} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ji} - \partial_i g_{kj}). \quad (\text{C-12})$$

Por tanto, los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_r g_{rr}) = \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}, \quad (\text{C-13})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (-\partial_r g_{\theta\theta}) = r(-1 + \kappa r^2), \quad (\text{C-14})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r a = \frac{1}{2} g^{rr} (-\partial_r g_{\phi\phi}) = r(-1 + \kappa r^2) \sin^2 \theta, \quad (\text{C-15})$$

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_t g_{rr}) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{C-16})$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{r}, \quad (\text{C-17})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\phi\phi}) = -\cos \theta \sin \theta, \quad (\text{C-18})$$

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_t g_{\theta\theta}) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{C-19})$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_r g_{\phi\phi}) = \frac{1}{r}, \quad (\text{C-20})$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_\theta g_{\phi\phi}) = \cot \theta, \quad (\text{C-21})$$

$$\Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_t g_{\phi\phi}) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{C-22})$$

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (-\partial_t g_{rr}) = \frac{a\dot{a}}{c^2(1 - \kappa r^2)}, \quad (\text{C-23})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (-\partial_t g_{\theta\theta}) = \frac{r^2}{c^2} a\dot{a}, \quad (\text{C-24})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (-\partial_t g_{\phi\phi}) = \frac{r^2}{c^2} a\dot{a} \sin^2 \theta, \quad (\text{C-25})$$

## C.2. Tensor de Riemann

El tensor de curvatura de Riemann [68] supone una generalización del concepto de curvatura de Gauss, se define como

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu,\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\rho}\Gamma_{\sigma\mu}^{\beta}. \quad (\text{C-26})$$

### C.2.1. Tensor de Ricci

El tensor de Ricci es la contracción del tensor de Riemann, como sigue

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\beta}, \quad (\text{C-27})$$

Aplicando la métrica FRLW, se obtiene

- Componente temporal: con  $\mu, \nu = 0$ :

$$R_{00} = \Gamma_{00,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho 0,0}^{\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^{\rho}\Gamma_{00}^{\beta} - \Gamma_{0\beta}^{\rho}\Gamma_{\rho 0}^{\beta}. \quad (\text{C-28})$$

- $\rho = 0$

Como no existe un símbolo de Christoffel no nulo que tenga dos índices temporales, se tiene

$$R_{00} = 0. \quad (\text{C-29})$$

- $\rho = i$

$$R_{00} = -\Gamma_{\rho 0,0}^i - \Gamma_{0\beta}^i\Gamma_{i0}^{\beta}. \quad (\text{C-30})$$

Haciendo correr a  $\beta = 0, \beta = k$

$$R_{00} = -\Gamma_{\rho 0,0}^i - \Gamma_{00}^i\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{0k}^i\Gamma_{i0}^k, \quad (\text{C-31})$$

luego

$$R_{00} = -\Gamma_{i0,0}^i - \Gamma_{0k}^i\Gamma_{i0}^k. \quad (\text{C-32})$$

Sumando la Ec. (C-29) y la Ec. (C-32), además, como los índices para  $i$  y  $k$  corren de la misma forma, la componente temporal

$$R_{00} = -\Gamma_{i0,0}^i - \Gamma_{0i}^i\Gamma_{i0}^i, \quad (\text{C-33})$$

expandiendo, para la métrica FLRW, se tiene

$$R_{00} = -\Gamma_{10,0}^1 - \Gamma_{10}^1\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{20,0}^2 - \Gamma_{02}^2\Gamma_{20}^2 - \Gamma_{30,0}^3 - \Gamma_{03}^3\Gamma_{30}^3, \quad (\text{C-34})$$

$$R_{00} = -3\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} - 3\frac{\dot{a}^2}{a}, \quad (\text{C-35})$$

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (\text{C-36})$$

- Una componente espacial y una temporal

$$R_{0i} = \Gamma_{0i,\rho}^\rho - \Gamma_{\rho 0,i}^\rho + \Gamma_{\rho\beta}^\rho \Gamma_{0i}^\beta - \Gamma_{i\beta}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\beta, \quad (\text{C-37})$$

- $\rho = 0$  Recordando que los símbolos de Christoffel con dos o más índices temporales, son cero, luego

$$R_{0i} = 0. \quad (\text{C-38})$$

- $\rho = j$

$$R_{0i} = \Gamma_{0i,j}^j - \Gamma_{j0,i}^j + \Gamma_{j\beta}^j \Gamma_{0i}^\beta - \Gamma_{i\beta}^j \Gamma_{j0}^\beta, \quad (\text{C-39})$$

haciendo correr a  $\beta = 0$  y  $\beta = k$

$$R_{0i} = \Gamma_{0i,j}^j - \Gamma_{j0,i}^j + \Gamma_{jk}^j \Gamma_{0i}^k - \Gamma_{ik}^j \Gamma_{j0}^k, \quad (\text{C-40})$$

los subcasos

- $i = j$  los símbolos de Christoffel se cancelan entre sí, luego

$$R_{0i} = 0. \quad (\text{C-41})$$

- $i = j = k$  Al igual que en el caso anterior, los símbolos de Christoffel se simplifican con su inverso aditivo

$$R_{0i} = 0. \quad (\text{C-42})$$

- $k = j$

$$R_{0i} = -\Gamma_{j0,i}^j - \Gamma_{ij}^j \Gamma_{j0}^j, \quad (\text{C-43})$$

- $k = i$

$$R_{0i} = -\Gamma_{j0,k}^j + \Gamma_{kj}^j \Gamma_{k0}^k, \quad (\text{C-44})$$

por lo que, analizando los primeros términos de la Ec. (C-43) y la Ec. (C-44) se puede ver que, de acuerdo a los símbolos de Christoffel encontrados en la sección (C.1), aquel que posea un índice temporal debe tener los dos índices restantes iguales, además, como la derivada indicada es espacial, estas componentes son cero. Para los segundos factores de las ecuaciones anteriormente mencionadas, se cancelan entre sí.

Una propiedad muy importante del tensor de Ricci es su simetría en sus dos índices inferiores, luego, el tensor de Ricci con un índice espacial y uno temporal

$$R_{0i} = 0 \quad (\text{C-45})$$

■ Componentes espaciales

$$R_{ij} = \Gamma_{ji,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho i,j}^{\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} \Gamma_{ji}^{\beta} - \Gamma_{j\beta}^{\rho} \Gamma_{\rho i}^{\beta} \quad (\text{C-46})$$

Las componentes espaciales no nulas son

• componente  $R_{rr}$

$$R_{rr} = \Gamma_{rr,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho r,r}^{\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} \Gamma_{rr}^{\beta} - \Gamma_{r\beta}^{\rho} \Gamma_{\rho r}^{\beta} \quad (\text{C-47})$$

$$R_{rr} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi r}^{\phi} \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi t}^{\phi} \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{rr,t}^t \quad (\text{C-48})$$

$$R_{rr} = \frac{2\kappa}{1 - \kappa r^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2(1 - \kappa r^2)} + \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{c^2(1 - \kappa r^2)}, \quad (\text{C-49})$$

$$R_{rr} = \frac{1}{1 - \kappa r^2} \left( 2\kappa + \frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right), \quad (\text{C-50})$$

• Componente  $R_{\theta\theta}$

$$R_{\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\theta,\theta}^{\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} \Gamma_{\theta\theta}^{\beta} - \Gamma_{\theta\beta}^{\rho} \Gamma_{\rho\theta}^{\beta} \quad (\text{C-51})$$

$$R_{\theta\theta} = r^2 \left[ 2 \left( k + \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right) + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right], \quad (\text{C-52})$$

• Componente  $R_{\phi\phi}$

$$R_{\phi\phi} = \Gamma_{\phi\phi,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\phi,\phi}^{\rho} + \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} \Gamma_{\phi\phi}^{\beta} - \Gamma_{\phi\beta}^{\rho} \Gamma_{\rho\phi}^{\beta} \quad (\text{C-53})$$

$$R_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta \left[ 2 \left( k + \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right) + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right], \quad (\text{C-54})$$

### C.2.2. Escalar de Ricci

El escalar de Ricci está definido como el producto entre la métrica inversa y el tensor de Ricci, es decir, la contracción de dicho tensor, esto es

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{C-55}$$

aplicando la métrica FLRW

$$R = g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} + g^{tt} R_{tt}, \tag{C-56}$$

luego

$$R = \frac{6}{a^2} \left( k + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right). \tag{C-57}$$

## D. Anexo: Códigos en lenguaje Python

Los códigos aquí presentados se han realizado en lenguaje Python.

### D.1. Modelo $\Lambda$ CDM: parámetros de densidad

Código para evolución numérica del sistema mostrado en las Ec. (3-72)-(3-77), a través del cual se obtiene la gráfica de los parámetros de densidad del universo (Fig. 3-1) en el límite homogéneo e isotrópico.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate

# Definición del sistema de ecuaciones ordinarias
def LCDM(A,N):
    f,b,z,v,l=A
    PI = f*f + b*b + (4.0/3.0)*(z*z + v*v)
    df = (3.0/2.0)*(PI - 1.0)*f
    db = (3.0/2.0)*(PI - 1.0)*b
    dz = (3.0/2.0)*(PI - 4.0/3.0)*z
    dv = (3.0/2.0)*(PI - 4.0/3.0)*v
    dl = (3.0/2.0)*PI*l
    return [df,db,dz,dv,dl]

# Condición inicial
Of = 0.258      #Omega Dark Matter (hoy)
Ob = 0.0484    #Omega bariones (hoy)
Oz = 5.38e-5   #Omega fotones (hoy)
Ov = 3.72e-5   #Omega neutrinos (hoy)
Ol = 0.692     #Omega Lambda (hoy)

f0 = np.sqrt(Of)
b0 = np.sqrt(Ob)
z0 = np.sqrt(Oz)
```

```

v0 = np.sqrt(0v)
l0 = np.sqrt(0l)

LCDMO = [f0,b0,z0,v0,l0]

# Intervalo N
a0 = 1.0
ai = 1.0e-7

N0 = np.log(a0)
Ni = np.log(ai)

N = np.linspace(N0,Ni,500)

# Solución
sol = integrate.odeint(LCDM,LCDMO,N)

# Parámetros de densidad Omega
sol2 = np.square(sol)

# Gráfica
fig, axes=plt.subplots()
plt.plot(N,sol2[:,0], label = "$\Omega_{DM}$")
plt.plot(N,sol2[:,1], label = "$\Omega_b$")
plt.plot(N,sol2[:,2], label = "$\Omega_{\gamma}$")
plt.plot(N,sol2[:,3], label = "$\Omega_v$")
plt.plot(N,sol2[:,4], label = "$\Omega_{\Lambda}$")
plt.xlabel("Factor de escala $(a)$")
plt.ylabel("Parámetros de densidad $\Omega_i$")
plt.legend()
plt.show()

```

## D.2. Freeze-in: producción de DM a partir de neutrinos pesados de Majorana

Código para la evolución numérica de la Ec. (6-37). Dicha ecuación representa la producción de DM a partir de neutrinos estériles pesados de Majorana con acoplamiento tipo Yukawa (Fig. 6-1).

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate
from math import pi
import scipy.special as sps

# DEFINIENDO CANTIDADES...

Mp = 2.4353232036e+18      # Masa de Plack (GeV).
ml = 1.e+13               # Masa de los neutrinos pesados (GeV).
gl = 6.                   # Grados de libertad de los neutrinos.
Fsim = 2.                 # Factor de simetria (para evitar sobrecoteos).
T0 = 2.34865337e-13      # Temperatura actual (GeV).
gs = 100.0               # Numero efectivo de grados de librtad en enntropía.
gc = 1.                   # Acoplamiento Yukawa
gT = 100.                 # Grados de libertad efectivos relativistas.
H0 = 1.4382431715e-42    # Parámetro de Hubble actual (GeV).
mx = 1.e+7                # masa de la materia oscura (GeV).
ODMO = 0.258

print (" ml = " , ml )
print (" mx = " , mx )
print ( " T0 = " , T0 )
print ( " pi = " , pi )

# DEFINIENDO LA FUNCIÓN DE PRUEBA

def S(x,tau):
F = np.sqrt( ( (1./x) - 1. )*( (1./x) - tau*tau) )
return F

def g(x,tau):
fct = 1./x - tau*tau/2.
Sv = S(x,tau)
F = ( (1./x - 4. + tau*tau)/(1./x - tau*tau + (tau**4)/4.) - 3. )*Sv
+ ( fct + 2. + (2./x - 2. + (tau**4)/8.) /fct )
*np.log( (fct + Sv)/(fct - Sv) )
return F

# DEFINIENDO EL INTERVALO DE TEMPERATURA
```

```
Tini = 1.e+13      # (GeV)
Tfin = 3.e+10     # (GeV)

print ( " Tini = " , Tini )
print ( " Tfin = " , Tfin )

# DEFINIENDO EL CAMBIO DE VARIABLE

muini = ml / Tini
mufin = ml / Tfin
Mu0 = ml / T0

# CONDICION INICIAL

Nxini = 0.  # Número de partículas inicial.

# DEFINIENDO UN INTERVALO DE SOLUCION

# No logarítmico:

#mu = np.linspace ( muini, mufin, 100 )

# Logarítmico:

LogMuini = np.log(muini)
LogMufin = np.log(mufin)

LogMu = np.linspace ( LogMuini, LogMufin, 100 )

Mu = np.exp(LogMu)

# DEFINIENDO EL INTEGRANDO

tau = mx / ml

def FINT (x, Mu, tau):
F = ( g(x,tau) / ( x * np.sqrt(x) ) ) * sps.kn ( 1, 2. * Mu / np.sqrt(x) )
return F

# DEFINIENDO LA INTEGRAL
```

```
def I(Mu, tau):
    F = integrate.quad ( lambda x: FINT(x, Mu, tau), 0., 1. )
    return F[0]

# Imprimiendo resultados

print ("Mu0 = ", Mu0)
print ("Muini = ", muini)
print ("Mufin = ", mufin)

print ("tau = ", tau)

print ("Iini = ", I(muini,tau))
print ("Ifin = ", I(mufin,tau))

# VECTORIZANDO LA FUNCION

# I(Mu,tau) --> vec_I(Mu,tau)
# La rutina vec_I(Mu,tau) ahora puede evaluarse para un array de Mu.

vec_I = np.vectorize(I)

# DEFINICION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

def RHS(Nx, Mu):
    F = ( 45. / ( 16384. * (pi **8.) ) ) * ( 1./Fsim ) * ( Mp/ml )
    * ( ( (gl**2.)*(gc**4.) ) / gs ) * np.sqrt(90. /gT) * ( Mu**3 )
    * vec_I(Mu,tau)
    return F

# EVOLUCIÓN NUMERICA...
#Para hallar Nx:
solnum = integrate.odeint ( RHS, Nxini, Mu )

#Para eliminar la dependencia del acoplamiento gc:
Nxprim = solnum / (gc**4.)

Nxprimini = Nxini / (gc**4.)
```

```
print ( " Nxprimini =" , Nxprimini)
print ( " Nxprimfin = " , Nxprim[99] )

# GRAFICADO...

plt.plot( Mu, Nxprim, label = "Numero de particulas" )
plt.xscale("log")
plt.xlabel("$\mu=m_{1}/T$")
plt.ylabel("Numero de particulas $N_{x}^{\prime}$")
plt.legend()
plt.show()
```

# Bibliografía

- [1] MATOS, T. y VÁZQUEZ-GONZÁLEZ, A., (2008). *La materia oscura del Universo: retos y perspectivas*, Revista mexicana de Física E 54 (2), 193–202.
- [2] FREESE, K., (2017). *Status of dark matter in the universe*, Stockholm, Sweden. arXiv:1701.01840v1
- [3] DUDA, G. y GARRET, K. (2011). *Dark Matter: A Primer*. USA. arXiv:1006.2483v2
- [4] BERTONE, G. y HOOPER, D. (2016). *A History of Dark Matter*. arXiv:1605.04909v1
- [5] OORT, J. (1927). *Observational evidence confirming Lindblad's hypothesis of a rotation of the galactic system*. Netherlands.
- [6] GAVIRIA-NOREÑA, A. (2008). *Fenomenología de materia oscura y de la anomalía magnética del Muón en el modelo inerte de Zee*. Tesis para optar al título de Máster en Física. Universidad de Antioquia. Medellín.
- [7] ZWICKY, F. (1937). *On the masses of nebulae and of clusters of nebulae*. The Astrophysical Journal. Vol 86, 217.
- [8] LOVELL, M. R. (2020). *Cosmological Dark Matter: a Review..* arXiv:2003.13696v2
- [9] RUBIN, V., FORD, W. y THONNARD, N. (1978). . The Astrophysical Journal. Vol 225, 107.
- [10] OCHOA, F. (2019). *Evidencias y naturaleza de la materia oscura*. Revista de Física, No 59E.
- [11] CHADHA-DAY, F., ELLIS, J., y MARSH, D. (2021). *Axion Dark Matter: What is it and Why Now?*. arXiv:2105.01406v1
- [12] SEMERTZIDIS1, Y. y YOUN, S. (2021). *Axion Dark Matter: How to detect it?*. arXiv:2104.14831v1
- [13] PEREZ, A. (2020). *Fenomenología de modelos supersimétricos: partículas y materia oscura*. Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas. Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires.

- 
- [14] MARSH, D. (2016). *Axion Cosmology*. arXiv:1510.07633v2 [astro-ph.CO]
- [15] BAER, H., CHOI, K., KIM, J. y ROSZKOWSKI, L. (2014). *Dark matter production in the early Universe: beyond the thermal WIMP paradigm*. BaearXiv:1407.0017v3
- [16] GU, Y., KHLOPOV, M., WU, L., YAG, J. y ZHU, B. (2020). *Light gravitino dark matter: LHC searches and Hubble tension*. arXiv:2006.09906v3
- [17] TAOSO, M., BERTONE, G. y MASIERO, A. (2008). *Dark Matter Candidates: A Ten-Point Test*. arXiv:0711.4996v2
- [18] ARBEY, A. y MAHMOUDI, F. (2021). *Dark matter and the early Universe: a review*. arXiv:2104.11488v1
- [19] BODE, P., OSTRIKER, J. y TUROK, N. (2001). *Halo Formation in Warm Dark Matter Models*. arXiv:astro-ph/0010389v3
- [20] HUI, L., OSTRIKER, J., TREMAINE, S. y WITTEN, E. (2017). *Ultralight scalars as cosmological dark matter*. arXiv:1610.08297v2
- [21] HU, W., BARKANA, R., y GRUZINOV, A. (2000). *Cold and Fuzzy Dark Matter*. arXiv:astro-ph/0003365v2
- [22] CHOWDHURY, F., VAN DEN BOSCH, F., ROBLES, V., VAN DOKKUM, P., SCHIVE, H., CHIUH, T. y BROADHURST, T. (2021). *On the Random Motion of Nuclear Objects in a Fuzzy Dark Matter Halo*. arXiv:2105.05268v1
- [23] GOODMAN, J. (2000). *Repulsive Dark Matter*. arXiv:astro-ph/0003018v1
- [24] KAPLINGHAT, M., KNOX, L. y TURNER, M. (2000). *Annihilating Cold Dark Matter*. arXiv:astro-ph/0005210v2
- [25] CEN, R. (2000). *Decaying Cold Dark Matter Model and small-scale power*. arXiv:astro-ph/0005206v2
- [26] BARMAN, B., BORAH, D., DAS, S. and ROSHAN, R. (2021). *Non-thermal Origin of Asymmetric Dark Matter from Inflaton and Primordial Black Holes*. arXiv:2111.08034v1
- [27] SPERGEL, D. and STEINHARDT, P. (2000). *Observational evidence for self-interacting cold dark matter*. Princeton University, Princeton, USA. arXiv: astro-ph / 9909386v2
- [28] KOLB, E. and LONG, A. (2019). *Superheavy dark matter through Higgs portal operators*. Kavli Institute for Cosmological Physics and the Enrico Fermi Institute, The University of Chicago, USA. arXiv:1708.04293v3

- [29] RYDEN, B. (2006). *Introduction to Cosmology*. The Ohio State University.
- [30] LIDDLE, A. (2003). *A Introduction to Modern Cosmology* (Second edition). England: Wiley.
- [31] JANSSEN, B. (2013). *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada. España.
- [32] BLAU, M. (2019). *Lecture Notes on General Relativity*. Switzerland.
- [33] CARROLL, S. (1997). *Lecture Notes on General Relativity*. Santa Barbara, California. arXiv:gr-qc/9712019
- [34] REDI, M. and TESI, A. (2021). *General Freeze-in and Freeze-out*. arXiv:2107.14801v1 [hep-ph]
- [35] SALAZAR-ARIAS, J. G. (2020). *Phenomenology of the cosmological model  $so(1, 1)$* . Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias, CINVESTAV. México.
- [36] KOLB, E. W. y TURNER, M. S. (2019). *The Early Universe*. University of Chicago: Addison-Wesley Publishing Company.
- [37] BAUMANN, D. (2018). *TASI Lectures on Primordial Cosmology*. University of Amsterdam, The Netherlands. arXiv:1807.03098
- [38] DODELSON, S. (2003). *Modern Cosmology*. Fermi National Accelerator Laboratory, University of Chicago: Academic Press, an imprint of Elsevier.
- [39] HALL, L. J., JEDAMZIK, K., MARCH-RUSSELL, J. and WEST, S. M. (2009). *Freeze-In Production of FIMP Dark Matter*. arXiv:0911.1120v2 [hep-ph]
- [40] BIONDINIA, S. and GHIGLIERI, J. (2020). *Freeze-in produced dark matter in the ultra-relativistic regime*. arXiv:2012.09083v1 [hep-ph]
- [41] MALDONADO-SALAZAR, C. A. (2019). *Extensiones del modelo estándar de física de partículas con candidatos a materia oscura*. Tesis para optar al título de Doctor en ciencias, Universidad Santiago de Chile. Chile.
- [42] GOUDELIS, A. (2017). *Freeze-in: Making sense of very weakly coupled dark matter candidates*. GGI Workshop “Collider Physics and the Cosmos”. LPTHE - Jussieu. Florence, Italy.
- [43] GONDOLO, P. and GELMINI, G. (1991). *Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis*. Nuclear Physics B360, 145-179. North-Holland.
- [44] RYDER, L. (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.

- [45] GRIFFITS, D. (2008). *Introduction to elementary particles*. (Second edition). WILEY-VCH Verlag GmbH & CoKGaA, Weinheim.Portland, USA.
- [46] AGUILAR, A. e. a. (2001). *Evidence for Neutrino Oscillations from the Observation of  $\bar{\nu}_e$  Appearance in a  $\bar{\nu}_\mu$  Beam*. LSND Collaboration. arXiv: hep-ex / 0104049v3
- [47] AGUILAR-ARÉVALO, A. A. e. a. (2013). *Improved Search for  $\bar{\nu}_\mu \leftarrow \bar{\nu}_e$  Oscillations in the MiniBooNE Experiment*. arXiv:1303.2588v2 [hep-ex]
- [48] SÁEZ M. M., MOSQUERA M. E. y CIVITARESE, O. (2014). *Neutrinos estériles en nucleosíntesis primordial*. Asociación Argentina de Astronomía. Boletín de artículos científicos. BAAA, Vol. 57.
- [49] PARTICLE DATA GROUP. (2016). *Review of particle physics*. University of California.
- [50] MENARGUES, G. M.. (2021). *Neutrinos en la astrofísica*. Trabajo para optar al título de grado en Física. Universidad de Alacante.
- [51] PERESSUTTI, J., ROMERO, I. y SAMPAYO, O. A.. (2010). *Neutrinos de Majorana pesados, acoplamientos efectivos y su producción en colisionadores  $e^+e^-$* . Instituto de Investigaciones Físicas de Mar del Plata. Mar del Plata, Argentina.
- [52] BEZRUKOV, F. and GORBUNOV, D.. (2010). *Light inflaton hunter's guide*. doi:10.1007/JHEP05(2010)010
- [53] FRIGERIO, M., POMAROL, A., RIVA, F. and URBANO, A.. (2012). *Composite scalar dark matter*. Published for SISSA by Springer. doi:10.1007/JHEP07(2012)015
- [54] KADASTIK, M., KANNIKE, K. y RAIDAL, M.. (2010). *Matter parity as the origin of scalar dark matter*. Physical Review D 81, 015002. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.015002
- [55] RODEJOHANN, W., YAGUNA, C. E.. (2010). *Scalar dark matter in the B - L model*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. doi:10.1088/1475-7516/2015/12/032
- [56] RODRÍGUEZ-MEZA, M. A., HERNANDEZ-ALMADA, A. y MATOS, T.. (2012). *Materia oscura escalar compleja (parte I): la versión hidrodinámica*. Revista Mexicana de Física E 58, 53–60.
- [57] GUZMÁN, F. S. y MATOS, T.. (1999). *Scalar Fields as Dark Matter in Spiral Galaxies*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México. arXiv: gr-qc / 9810028v4
- [58] GUZMÁN, F. S. y UREÑA-LÓPEZ, A.. (2003). *Newtonian Collapse of Scalar Field Dark Matter*. León, Guanajuato, México. arXiv: astro-ph / 0303440v1

- 
- [59] MATOS, T.. (2010). *Scalar Field Dark Matter Quantum Effects as Dark Energy*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. arXiv: 0909.3634v3
- [60] BERNAL, N., HEIKINHEIMO, M., TENKANEN,, T., TUOMINEN, K. and VASKONEN, V.. (2017). *The Dawn of FIMP Dark Matter: A Review of Models and Constraints*. arXiv:1706.07442 [hep-ph]
- [61] PÉREZ-LORENZANA, A., MONTESINOS, M. and MATOS, T.. (2007). *Unification of Cosmological Scalar Fields*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. arXiv:0707.1678 [astro-ph]
- [62] SALAZAR-ARIAS, J. G. and PÉREZ-LORENZANA, A.. (2020). *Cosmological Unification, Dark Energy and the Origin of Neutrino Mass*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. arXiv:1907.00131 [hep-ph]
- [63] CARLO GIUNTI and CHUNG W. KIM. (2007). *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press.
- [64] LANGACKER, P. (2010). *The Standard Model and Beyond*. Institute for Advanced Study Princeton.
- [65] BORJA, E. (2015). *Relatividad General: Un siglo con las ecuaciones de Einstein* (versión 0.1 $\beta$ ). Sevilla.
- [66] SCHULLER, F. (2015). *Einstein Gravity*. The Heraeus International Winter School for Gravity and Light, Lecture 15.
- [67] MUNKHANOV, V. (2005). *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press.
- [68] SCHUTZ, B. (2009). *A First Course in General Relativity* (Second edition). New York: Cambridge University Press.