

**MÉTRICAS DE ENFOQUE Y HOLOGRAMAS DE FOURIER DE ORDEN  
FRACCIONARIO PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EN  
3D SIN DESPLAZAMIENTO MECÁNICO**

**ROBERTO ANTONIO CUELLAR LOZANO**



**DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA**

**FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS**

**UNIVERSIDAD DE PAMPLONA**

**PAMPLONA, COLOMBIA**

**2020**

**MÉTRICAS DE ENFOQUE Y HOLOGRAMAS DE FOURIER DE ORDEN  
FRACCIONARIO PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES EN  
3D SIN DESPLAZAMIENTO MECÁNICO**

**Roberto Antonio Cuellar Lozano**

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Físico

**Director**

**JORGE ENRIQUE RUEDA PARADA**

**Doctor en Ciencias Naturales - Física**



**GRUPO ÓPTICA MODERNA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
UNIVERSIDAD DE PAMPLONA  
PAMPLONA, COLOMBIA**

**2020**

## ***Agradecimientos***

*Al profesor Jorge Rueda, la UP necesita más profesores como usted. A mis padres, a mi más fiel compañera y amiga Lorena, y a todos los que contribuyeron mucho o poco en este proceso. Gracias a mi país por las innumerables sonrisas.*

# ***Métricas de enfoque y hologramas de Fourier de orden fraccionario para la reconstrucción de superficies en 3d sin desplazamiento mecánico***

**Roberto Antonio Cuellar Lozano**

*Estudiante de Física*

**Jorge Enrique Rueda Parada**

*Doctor en Ciencias Naturales - Física*

*Director del trabajo*

---

---

## ***Resumen***

En este trabajo se presentan los resultados del desarrollo de algoritmos de reconstrucción de superficies en 3D, utilizando hologramas de Fresnel calculados por medio de la transformada de Fourier fraccionaria y matrices de puntos focalizados en diferentes planos. Se desarrolla un algoritmo de cálculo de difracción sobre superficies curvas y posteriormente se implementa una red neuronal (generación del conjunto de datos y entrenamiento), para realizar reconstrucciones de superficies en una única exposición utilizando el patrón de difracción sobre esta. El algoritmo de cálculo de difracción sobre superficies curvas que se desarrolló, es equivalente al trabajo de investigación realizado en Caltech en el 2014 por Hwang et.al. Nuestro trabajo cuenta con un análisis a las limitaciones del algoritmo desarrollado, basado en consideraciones fenomenológicas, utilizando el principio de Huygens-Fresnel para la realización de multiplicaciones ópticas. Se presentan también los respectivos costos computacionales para cada uno de los algoritmos propuestos. Por último se realiza un análisis de las posibles fuentes de error que se pueden encontrar al realizar una implementación óptica y se plantean algunas soluciones computacionales.

**Palabras clave:** Difracción, reconstrucción de objetos, Holografía .

# Contenido

---

---

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. TEORÍA ESCALAR DE LA DIFRACCIÓN</b>	<b>3</b>
2.1. Espectro Angular . . . . .	4
2.2. Propagación del Espectro Angular . . . . .	6
2.3. Aproximación Metaxial . . . . .	7
2.4. Transparencia de Curvatura . . . . .	8
2.5. Difracción de Fraunhofer . . . . .	10
2.6. Transferencia General . . . . .	11
2.7. Difracción de Fresnel . . . . .	13
<b>3. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y SU CONEXIÓN CON LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA (FrFT)</b>	<b>14</b>
3.1. Transformada de Fourier Fraccionaria . . . . .	14
3.2. Difracción de Fresnel y la FRFT . . . . .	15
3.3. Observación sobre receptor dado . . . . .	18
<b>4. MUESTREO FRACCIONARIO, FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN Y FrFT DIS- CRETA</b>	<b>19</b>
4.1. Muestreo Fraccionario . . . . .	19
4.2. Formula de interpolación . . . . .	21
4.3. Transformada discreta de Fourier fraccionaria (DFrFT) . . . . .	22
<b>5. RECONSTRUCCIÓN DE OBJETOS UTILIZANDO HOLOGRAMAS DE FOURIER DE ORDEN FRACCIONARIO</b>	<b>24</b>
5.1. Obtención de “puntos” en el régimen de Fresnel . . . . .	24
5.2. Influencia del orden en la reconstrucción del holograma . . . . .	26
5.3. Descripción del Método . . . . .	28
5.3.1. Item 2,3,9 (Métricas y resoluciones ligadas) . . . . .	29
5.3.2. Distorsión de puntos según obstrucciones a la SL . . . . .	33

---

5.3.3. Propuesta y análisis de algoritmos para la reconstrucción (ítem 5,6,7 del método desarrollado) . . . . .	36
5.4. Algoritmo de cálculo de difracción sobre superficies curvas . . . . .	39
5.4.1. Límites al algoritmo de cálculo de difracción sobre superficies curvas . . .	43
5.5. Resultados de la Simulación del proceso de reconstrucción de una superficie curva	47
5.6. Método de reconstrucción utilizando una única exposición y una red neuronal generativa adversarial condicionada c'GAN . . . . .	51
<b>6. CONSIDERACIONES EXPERIMENTALES A TENER EN CUENTA PARA LA CONTINUACIÓN DEL TRABAJO</b>	<b>58</b>
6.1. Influencia de Hongos, polvo y demás obstrucciones comparadas con la longitud de onda . . . . .	58
6.2. Verificación experimental de la multiplicación óptica del experimento de la figura 5.7 . . . . .	60
6.3. Reducción del Speckle . . . . .	63
6.4. Profundidad de Campo . . . . .	66
6.5. Generalización al entrenamiento de la red . . . . .	68
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>69</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>71</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>74</b>
<b>A. TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA RÁPIDA (FFrFT)</b>	<b>75</b>
A.1. FrFT TIPO LOHMANN . . . . .	75
A.2. FrFT tipo Lohmann y su conexión con la difracción de Fresnel . . . . .	76
A.3. algoritmo de la FFrFT . . . . .	78

## Lista de Tablas

---

---

5.1. Parámetros utilizados para la simulación. Dimensiones (Dim). . . . .	30
5.2. Medidas de la influencia de una obstrucción $O$ a la SL del campo difractado para un holograma de un $\delta_z(\vec{s})$ para $z = 0,4m$ . La obstrucción $O$ está posicionada en diferentes distancias $z_{O_i}$ respecto al plano de reconstrucción calculada. . . . .	35
5.3. Parámetros utilizados para la simulación de $F_A$ vs $\Delta z$ . Dimensiones (Dim). . . . .	45
6.1. Parámetros utilizados para la simulación. Dimensiones (Dim). . . . .	60

## Lista de Figuras

---

2.1. Onda plana propagándose en dirección $\vec{k}$ . . . . .	4
2.2. Obtención del campo $u(x, y, z)$ a partir de la propagación del campo $u(x, y, 0)$ . . . . .	6
2.3. Coordenadas cartesianas sobre hemisferio $A$ . . . . .	8
2.4. Esferas tangentes con vértice común $V$ . . . . .	9
2.5. Esferas Confocales - Difracción de Fraunhofer . . . . .	10
2.6. Transferencia General- Emisor $A$ a receptor $B$ . . . . .	12
2.7. Difracción de Fresnel. Campo difractado desde $A$ hasta $C$ , siendo $C$ distinta a la esfera de Fourier . . . . .	13
3.1. Geometría para la representación de la difracción de Fresnel por medio de una FrFT . . . . .	16
5.1. a) Holograma de distribución de Dirac de orden $\alpha$ , b) Reconstrucción del Holograma con su mismo orden $\alpha_1 = \alpha$ . . . . .	27
5.2. Reconstrucción del holograma de la figura 5.1a, con diferentes ordenes $\alpha_1$ . . . . .	27
5.3. Montaje experimental para la puesta en marcha del método de reconstrucción.1) Frentes de onda plana, 2) modulador espacial de luz (SLM), 3) porta muestra, 4) sensor óptico . . . . .	29
5.4. SL de la difracción de un holograma para un $\delta$ calculado con los parámetros de la tabla 5.1. El intervalo sobre $z$ fué $dz_t = 0,1mm$ . . . . .	30
5.5. SL de diferentes distribuciones $\delta$ sobre una superficie $S_1$ . a) $z_1$ y $\vec{s}_1$ Las SL's no se ven afectadas en ningún punto por los bordes de la superficie. . . . .	31
5.6. SL alterada tras obstrucción del borde de la superficie $S_2$ . . . . .	32
5.7. Experimento para estudiar la influencia de una obstrucción a la SL en el plano de Reconstrucción. La obstrucción va aumentando en dirección $-\vec{S}_x$ . . . . .	33
5.8. Procesamiento de la SL para obtener la curva de ajuste a su límite externo, a) SL binarizada, b) Eliminación de zonas no deseadas (pérdida de la parte final de la envolvente) . . . . .	34
5.9. Obtención de la curva de ajuste para la SL de $\delta_z$ , con $z = 0,4m$ . . . . .	35

5.10. Segmentación de la superficie del dominio, a) 4 secciones, b)16 secciones . . . . .	37
5.11. Aproximación de superficie tras segmentación en $m$ secciones y selección de resolución axial. Superficie de prueba a) 3D, b) 2D. Aproximación con $m = 48^2$ , $\#D_z = 21$ ( $RMSE = 3,01 \cdot 10^{-4}[m]$ ) c) 3D, d) 2D. Aproximación con $m = 48^2$ , $\#D_z = 201$ ( $RMSE = 1,02 \cdot 10^{-4}[m]$ ) e) 3D, f) 2D . . . . .	40
5.12. Campo calculado en algún plano antes de observarse sobre la superficie . . . . .	41
5.13. Secuencia de obtención del patrón de difracción sobre una superficie curva aproximada mediante cubos. Patrones de difracción sobre secciones a alturas iguales representadas por color: a) rojo, b) violeta, c) rosa, d) salmón . . . . .	42
5.14. Áreas a analizar de imagen segmentada a) Área de la sección $i$ , b) Área total . . . . .	43
5.15. Análisis de obstrucción de múltiples SL de $\delta_{\alpha_j}$ . a) Vista Longitudinal, b) Vista transversal . . . . .	44
5.16. Curvas $F_A$ vs $\Delta z$ para diferentes distancias de ED. $ED_1 = z_h$ , $ED_2 = z_g$ . . . . .	45
5.17. $F_A$ vs $\Delta z$ para diferentes distancias de ED. $ED_1 = z_h$ , $ED_2 = z_g$ . Secciones $m = N^2$ . . . . .	46
5.18. Análisis de vecindades parásitas . . . . .	46
5.19. Superficie de prueba aproximada, $m = 3^2$ , $\#D_z = 21$ ( $RMSE = 1,6 \cdot 10^{-3}[m]$ ) . . . . .	47
5.20. Holograma de solo fase $HM_j$ . . . . .	48
5.21. Reconstrucción del holograma de la figura 5.20 sobre su plano de cálculo . . . . .	48
5.22. Patrón de difracción para diferentes $HM_j$ (izquierda) y detección de puntos focalizados (correlación) en dicho patrón (derecha). a) $\alpha_j \equiv z = 480mm$ b) $\alpha_j \equiv z = 485mm$ c) $\alpha_{ji} \equiv z = 486mm$ . . . . .	49
5.23. Superficie reconstruida, $m = 3^2$ , $\#D_z = 21$ ( $RMSE = 1,5 \cdot 10^{-3}[m]$ ) . . . . .	50
5.24. Superficie reconstruida, $m = 48^2$ , $\#D_z = 21$ ( $RMSE = 3,5 \cdot 10^{-4}[m]$ ) . . . . .	51
5.25. a) Patrón a reconstruir b) Holograma de solo fase creado a partir de la superposición de múltiples hologramas de distribuciones $\delta$ . . . . .	52
5.26. Superficie aproximada sobre la cual se reconstruirá el holograma de la figura 5.25b. $m = 384^2$ , $\#D_z = 201$ ( $RMSE = 3,25 \cdot 10^{-5}[m]$ ) . . . . .	52
5.27. Patrón de difracción calculado sobre la superficie de la figura 5.26 . . . . .	53
5.28. Arquitectura Red Neuronal Generativa Adversarial (GAN) . . . . .	53
5.29. Arquitectura de una red neuronal generativa adversaria condicionada c'GAN aplicada en la reconstrucción de superficies curvas. . . . .	54
5.30. Ejemplos del conjunto de entrenamiento de la red neuronal (entrada/objetivo) para el entrenamiento de la red neuronal. (a), (c) y (e) entradas (patrones de difracción), (b), (d) y (f) salidas respectivas (superficies sobre las cuales se obtendría dicho patrón de difracción). . . . .	55
5.31. Evolución del entrenamiento en 150 épocas para las superficies objetivo (b,d y f) de la figura 5.30. . . . .	56

5.32. Comparación de un perfil de la superficie objetivo de la imagen (b) de la figura 5.30, con el perfil de la superficie predicho por la red neuronal para el patrón de difracción (c) de la figura 5.30 en la época 150 de entrenamiento. . . . .	57
6.1. Montaje Experimental, Reconstrucción sobre sensor.1) Láser He-Ne, (2,3,4) sistema colimador para la generación de un frente de onda plano, 5) espejo plano, 6) cubo divisor,7) modulador espacial de luz (SLM), 8) cámara CMOS . . . . .	59
6.2. Hongos e iluminación no uniforme sobre el modulador espacial de luz . . . . .	59
6.3. Comparación de reconstrucciones. Reconstrucción sin obstáculo (a) experimental, (b) simulación. Reconstrucción con obstrucción (c) experimental, (d) simulación. . . . .	60
6.4. Creación de máscara de partículas a partir de la detección de anomalías en la figura 6.2 . . . . .	61
6.5. (a) Objeto, (b) Holograma de Gabor del objeto (a), (c) Máscara de partículas. . . . .	62
6.6. Reconstrucciones de holograma alterado con una máscara de partículas. a) Experimental, b) Simulación . . . . .	62
6.7. Montaje Experimental Reconstrucción sobre superficie Difusora. 1) Láser, (2,3,4) sistema colimador para la generación de un frente de onda plano, 5) espejo plano, 6) cubo divisor, 7) modulador espacial de luz (SLM), 8) Difusor, 9) cámara CMOS . . . . .	63
6.8. (a) Objeto triangular, (b) Holograma de Gabor del objeto triangular . . . . .	64
6.9. Reconstrucción óptica del holograma de la figura 6.8a sobre el difusor . . . . .	64
6.10. Reconstrucción sobre difusor. a) Estático b) En movimiento . . . . .	65
6.11. Experimento para la visualización de la reconstrucción de un holograma sobre una superficie escalonada. $S_e$ Superficie de doble escalón para visualizar el holograma . . . . .	66
6.12. (a) Objeto rectangular, (b) Holograma de Gabor del objeto rectangular . . . . .	67
6.13. Reconstrucción sobre escalones. a) Escalón lado izquierdo, b) Escalón lado derecho . . . . .	67
A.1. Montaje óptico tipo II para obtener FrFT propuesto por Lohman . . . . .	76
A.2. Montaje óptico para obtener un patrón de FD a partir de una FrFT . . . . .	76

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

---

---

La reconstrucción de objetos tridimensionales (también llamada digitalización), ha sido objeto de estudio en paralelo con las impresoras 3D en busca de desarrollar una comunicación bidireccional (hombre-máquina) más eficiente. Esto es relevante para muchas áreas del conocimiento, en múltiples aplicaciones, abarcando desde la industria (cartografía, robots, entre otros), hasta la medicina especializada (mapeo de órganos para cirugía computarizada y diagnósticos). [1, 2] Con el transcurso del tiempo, se han desarrollado diferentes técnicas para la digitalización de objetos, pudiéndose dividir estas en cinco grupos: multivistas, [3] cámara móvil, [4] luz estructurada, [5] telemetría láser, [6] y control de parámetros ópticos. Cada una de estas con sus respectivas ventajas y desventajas. Las técnicas de telemetría láser, luz estructurada y control de parámetros ópticos, han demostrado su eficiencia al tener una mayor exactitud y precisión, a costa de un equipo especializado para su implementación. Por otro lado, las otras técnicas requieren un equipo menos especializado, pero no brindan una alta fidelidad en las reconstrucciones, siendo además sensibles a ambigüedades según el posicionamiento de los dispositivos de captura de imagen. Las técnicas que involucran equipos móviles, están sujetas a las limitaciones mecánicas de los elementos usados, en caso de motores, la correspondencia del ángulo subtendido por paso dado, es la limitación más grande y una de las fuentes de errores principales del sistema óptico-digital. [7] Al involucrar variables extras al sistema con estas partes móviles, se agranda el problema al tener que controlar todos estos aspectos en paralelo al registro óptico-digital del objeto.

En este trabajo de investigación se reportan los resultados del diseño de un algoritmo de reconstrucción de superficies 3D sin desplazamiento mecánico, utilizando focalización de matrices de puntos en diferentes planos sobre una superficie curva translúcida, controlando la focalización de dichas matrices, por medio de hologramas de Fresnel calculados usando la transformada de Fourier fraccionaria. Aparte del análisis y desarrollo del método de obtención de la topografía de la superficie, se desarrolló un algoritmo que permite realizar el cálculo de la difracción de

---

hologramas sobre superficies curvas, generando curvas de criterios de error para varios regímenes en el campo de Fresnel. Esto último sirvió como base para desarrollar un algoritmo que permite hacer reconstrucción de objetos en una sola exposición (en contraste con el número de exposiciones del primer método), utilizando *Deep Learning*, mediante una red neuronal generativa adversaria y condicionada (c'GAN) más precisamente el modelo pix2pix. Se establecen algunas consideraciones experimentales a tener en cuenta para futuros trabajos a la hora de poner en marcha alguna de las técnicas desarrolladas. Consideraciones como el ruido no tomado en cuenta en las simulaciones (como partículas, hongos y demás artilugios situados sobre el montaje óptico o en el ambiente), reducción del speckle por medio de promediado temporal y no por medio de algoritmos convergentes (rompiendo el límite del objetivo principal de reconstrucción sin desplazamiento mecánico), profundidad de campo requerida e iluminación no uniforme. Se plantean y se implementan de forma básica, soluciones computacionales para las consideraciones anteriores, esto permitirá garantizar una mayor robustez en los algoritmos de reconstrucción.

Este informe del trabajo de investigación realizado está estructurado en 6 capítulos, los primeros 4 capítulos están enfocados a la conceptualización necesaria de la difracción y sus modelos matemáticos, desde la teoría escalar de la difracción, la noción de una transformada fraccionaria desde diferentes enfoques, la revisión de uno de los posibles escalamientos de la difracción de Fresnel en función de una transformada Fraccionaria y la revisión del teorema de muestreo fraccionario junto con la transformada de Fourier fraccionaria discreta (DFrFT). En el capítulo 5 se estudian los algoritmos y costos computacionales tanto de la reconstrucción mediante la técnica propuesta en el objetivo de la tesis, y la técnica de una sola exposición utilizando Deep Learning que surgió de manera natural a medida que se avanzaba en la investigación. Cabe resaltar que la última sección de este capítulo (reconstrucción utilizando la red neuronal y la difracción) es totalmente novedosa hasta donde se ha revisado en la literatura, por lo que nos encontramos en la etapa de escritura del documento para someter a publicación. El capítulo 6 es un capítulo adicional que se decide agregar, para dar una base sólida respecto a muchos de los problemas que se podrían encontrar, a la hora de implementar el método de forma experimental, y para aumentar la robustez a los algoritmos de reconstrucción. Este último capítulo fue desarrollado en el laboratorio del Grupo Óptica Moderna, debido al hecho de que cuenta con la infraestructura necesaria para implementar ópticamente los algoritmos desarrollados en este trabajo. Sin embargo, esta implementación óptica se deja propuesta para trabajos futuros.

# Capítulo 2

## TEORÍA ESCALAR DE LA DIFRACCIÓN

---

---

Desde el punto de vista de la física clásica, la luz se puede tratar como una onda electromagnética o más precisamente como un campo vectorial denominado campo electromagnético. Debido al acople que existe entre estos, usualmente se trabaja con el campo eléctrico por la “facilidad” de su manipulación. [8] Este campo vectorial satisface entonces la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \partial_{tt} \vec{E}(x, y, z, t). \quad (2.1)$$

Donde  $v$  corresponde a la velocidad de fase en el medio. La ecuación (2.1), se puede escribir para cada una de las componentes (en este caso rectangulares), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x(x, y, z, t) &= \frac{1}{v_x^2} \partial_{tt} E_x(x, y, z, t), \\ \nabla^2 E_y(x, y, z, t) &= \frac{1}{v_y^2} \partial_{tt} E_y(x, y, z, t), \\ \nabla^2 E_z(x, y, z, t) &= \frac{1}{v_z^2} \partial_{tt} E_z(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

Asumiendo que las velocidades de fase  $v_x, v_y$  y  $v_z$  son constantes, para cada uno de los ejes. Es posible solucionar la ecuación (2.1) utilizando su carácter vectorial, tal y como lo hicieron los autores de la referencia [9]. En este trabajo se utilizará el modelo de la teoría escalar de la difracción, donde es posible “eliminar” el carácter vectorial del campo eléctrico si se tienen en cuenta algunas consideraciones físicas:

1. El campo eléctrico está polarizado linealmente respecto a un eje específico. (En este caso, la solución podría ser exacta si se cumplen las consideraciones restantes)
2. El medio de propagación es lineal, homogéneo, no dispersivo y no magnético
3. El campo difractado no debe ser observado cerca del objeto difractor (la distancia mínima de observación depende de la aproximación utilizada, Rayleigh, Fresnel o Fraunhofer), y además el objeto difractor tiene dimensiones mayores a la longitud de la onda en cuestión.

[10]

Si se cumplen estas consideraciones se puede tratar el campo eléctrico como un campo escalar, por lo que se puede realizar la sustitución  $\vec{E} = u$ , y la ecuación (2.1) se transforma en:

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \partial_{tt} u(x, y, z, t). \quad (2.3)$$

A lo largo de los años, múltiples autores han desarrollado diferentes métodos para solucionar esta ecuación diferencial, utilizando diferentes enfoques físico-matemáticos como los de Kirchhoff, Sommerfeld, Rayleigh, Fresnel, entre otros. [11,12] Según el objetivo de esta investigación, se consideró pertinente mostrar dos soluciones, la primera está modelada por el espectro angular y la segunda, haciendo uso del operador transparencia de curvatura. [13]

## 2.1 ESPECTRO ANGULAR

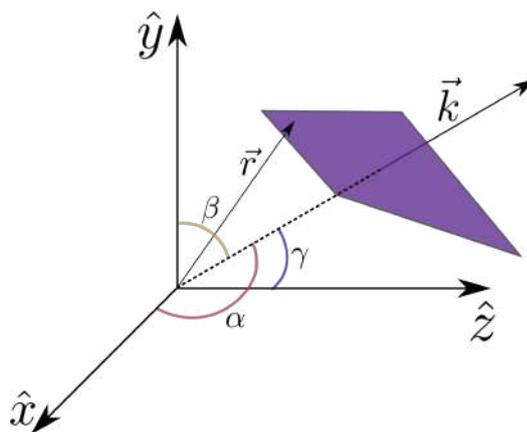


Figura 2.1: Onda plana propagándose en dirección  $\vec{k}$

En la figura 2.1, se aprecia la geometría de una de las soluciones más comunes a la ecuación (2.3), correspondiente a la solución de onda plana.

Una solución de onda plana bastante útil, es la onda plana armónica monocromática, modelada por la ecuación (2.4).

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \underbrace{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})}_{\text{Parte espacial}} \overbrace{\exp(-i\omega t)}^{\text{Parte temporal}}. \quad (2.4)$$

Donde  $u_0$  es una constante,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  el vector posición al punto donde se requiere medir el campo,  $\omega$  la frecuencia angular de la luz y  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$  el vector de onda. Bajo esta solución se cumple que  $\omega = kv$ . De la figura 2.1 se obtiene que el vector  $\hat{k}$  está dado por:

$$\hat{k} = \cos(\alpha)\hat{x} + \cos(\beta)\hat{y} + \cos(\gamma)\hat{z}. \quad (2.5)$$

Donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  representan los ángulos de los cosenos directores, por lo que se cumple que:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1. \quad (2.6)$$

Para definir el espectro angular se requiere hacer uso de la transformada de Fourier (FT), la cual permite realizar el mapeo de funciones de dominios espaciales, a dominios de frecuencias espaciales y viceversa, se utilizará la representación de la FT bidimensional de la ecuación (2.7), donde  $F_x$  y  $F_y$  representarán las frecuencias espaciales en el dominio de Fourier. [12]

$$U(F_x, F_y) = \int_{\mathfrak{R}^2} u(x, y) \underbrace{\exp(2\pi i(xF_x + yF_y))}_{\text{Kernel}} dx dy. \quad (2.7)$$

El kernel de la expresión (2.7), constituye una base de funciones exponenciales complejas, las cuales en términos físicos representarían una vibración asociada a una frecuencia espacial  $\vec{F} = (F_x, F_y)$ . [14] Si se realiza la equivalencia entre la parte espacial de la expresión (2.1) y el kernel de la FT, se podría establecer, que este último representará el campo en el plano  $z = 0$ , si la onda plana proveniente de  $z < 0$  cumple con:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \lambda F_x, \\ \cos(\beta) &= \lambda F_y, \\ \cos(\gamma) &= \sqrt{1 - (\lambda F_x)^2 - (\lambda F_y)^2}, \text{ con } \cos(\gamma) \in \mathfrak{R}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

es decir, una dirección de propagación tiene asociada una frecuencia espacial, esto se conoce como el **espectro angular** ( $V(\alpha, \beta)$ ). El caso de  $\cos(\gamma)$  complejo, representaría el caso particular de ondas evanescentes y está fuera del alcance de este trabajo. Para representar el espectro angular sobre el plano en  $z = 0$  ( $V_0(\alpha, \beta)$ ), se utiliza la expresión (2.7), y se sustituyen las expresiones obtenidas en la ecuación (2.8):

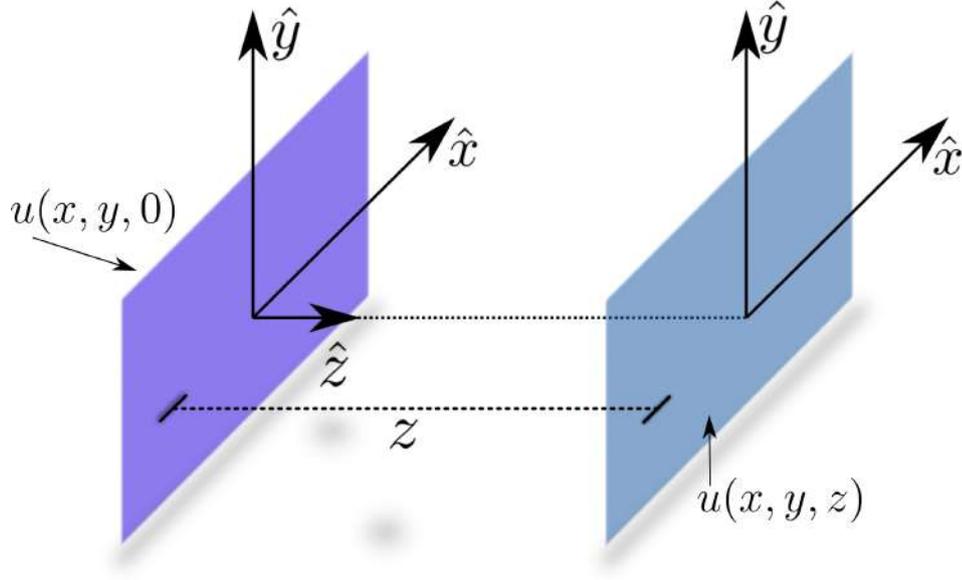
$$V_0(\alpha, \beta) = U\left(\frac{F_x}{\lambda}, \frac{F_y}{\lambda}\right) = \int_{\mathfrak{R}^2} u(x, y, 0) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(x \cos(\alpha) + y \cos(\beta))\right) dx dy. \quad (2.9)$$

Para recuperar la información original basta con realizar la transformada inversa de Fourier al espectro angular:

$$u(x, y, 0) = \int_{\mathfrak{R}^2} V_0(\alpha, \beta) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda}(x \cos(\alpha) + y \cos(\beta))\right) \frac{d\alpha d\beta}{\lambda^2}. \quad (2.10)$$

## 2.2 PROPAGACIÓN DEL ESPECTRO ANGULAR

Se requiere calcular la propagación del campo posicionado sobre  $z = 0$ , esto es  $u(x, y, 0)$ , hasta un plano paralelo situado a una distancia  $z$ , correspondiente a  $u(x, y, z)$  (ver figura 2.2).



**Figura 2.2:** Obtención del campo  $u(x, y, z)$  a partir de la propagación del campo  $u(x, y, 0)$ .

El espectro angular  $V_z$  del campo  $u(x, y, z)$ , está dado por:

$$V_z(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, z) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(x \cos(\alpha) + y \cos(\beta))\right) dx dy, \quad (2.11)$$

por lo tanto se cumple que:

$$u(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} V_z(\alpha, \beta) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda}(x \cos(\alpha) + y \cos(\beta))\right) \frac{d\alpha d\beta}{\lambda^2}. \quad (2.12)$$

Ahora, se asume que la ecuación (2.13), es solución a la ecuación de onda (2.3).

$$u(r, t) = u(r) \exp(-i\omega t), \quad (2.13)$$

$u(r)$  es una amplitud compleja que depende únicamente de las variables espaciales, y se asume  $\omega = kv$  (es decir, la solución tiene una base de onda plana). Ya que la ecuación (2.13) debe satisfacer la ecuación de onda (2.3), sustituyendo (2.13) en (2.3) se obtiene la expresión (2.14), la cual se denomina ecuación de Helmholtz o ecuación de propagación.

$$\nabla^2 u(r) + k^2 u(r) = 0. \quad (2.14)$$

Naturalmente la ecuación (2.12), debe satisfacer la ecuación de propagación de Helmholtz para

que el modelo tenga validez. Sustituyendo (2.12) en (2.14), se obtiene:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( \partial_{zz} + \frac{4\pi^2\gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) \exp \left( -\frac{2\pi i}{\lambda} (x \cos(\alpha) + y \cos(\beta)) \right) d\alpha d\beta = 0, \quad (2.15)$$

esto únicamente se cumple cuando:

$$\left( \partial_{zz} + \frac{4\pi^2\gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) = 0. \quad (2.16)$$

Solucionando la expresión anterior se obtiene la ecuación de propagación del espectro angular:

$$V_z(\alpha, \beta) = V_0(\alpha, \beta) \exp \left[ \frac{-2i\pi}{\lambda} z \cos(\gamma) \right] \quad (2.17)$$

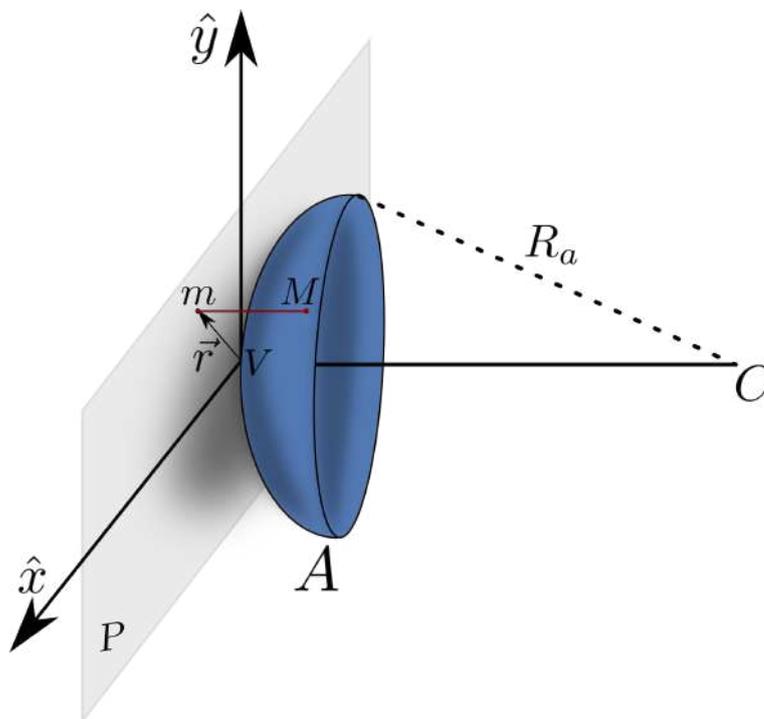
Se evidencia que la difracción se modela como una modulación en fase de las componentes del espectro angular, de ahí la importancia de este. Para calcular el campo  $u(x, y, z)$  basta con realizar la transformada inversa de Fourier de la expresión (2.17). El paso del campo  $u(x, y, 0)$  a  $u(x, y, z)$  se denomina transferencia de campo. [13, 15]

### 2.3 APROXIMACIÓN METAXIAL

Para obtener la expresión de la difracción en términos de las variables espaciales se utilizará una aproximación *metaxial*. Este término fue acuñado por Georges Bonnet en 1978. En lugar de emisores y receptores planos, se trabaja con emisores y receptores esféricos en los cálculos (de forma rigurosa, se deberían hablar de emisores y receptores parabólicos) [15]. Para trabajar con este tipo de difracción, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Dimensiones transversales pequeñas de los objetos difractores, en comparación con las distancias de observación ( $|\vec{r}| \ll Ra$ , ver figura 2.3).
- Aproximación de los objetos difractores por medio de hemisferios.
- Cálculos al segundo orden con respecto a la fase.

## 2.4 TRANSPARENCIA DE CURVATURA



**Figura 2.3:** Coordenadas cartesianas sobre hemisferio  $A$

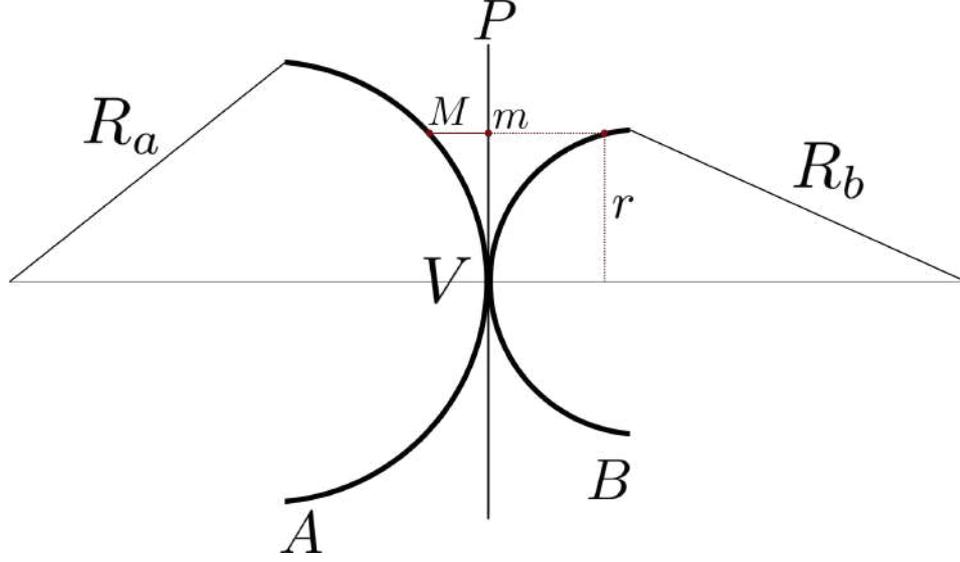
En la figura 2.3 se observa un hemisferio  $A$ , con centro de curvatura  $C$ , radio  $R_a$  y vértice  $V$ . Sobre el hemisferio se ubica un punto  $M$ , cuya proyección ortogonal sobre  $P$  (plano ortogonal a  $A$ ), se sitúa en el punto  $m$ , cuya posición está determinada por el vector  $\vec{r}(x, y)$ . Se tiene que la amplitud del campo sobre  $A$  se escribe de la forma:

$$u(M) = u_A(x, y) = u_A(\vec{r}). \quad (2.18)$$

De forma equivalente, el campo en  $m$  corresponde a:

$$u(m) = u_P(x, y) = u_P(\vec{r}), \quad (2.19)$$

como se observa, las coordenadas de  $\vec{r}$ , definen sin ambigüedad los puntos  $m$  y  $M$ , haciéndose la distinción de que ambos son diferentes, por ello los subíndices  $P$  y  $A$ , haciendo referencia al plano y al hemisferio respectivamente.



**Figura 2.4:** Esferas tangentes con vértice común  $V$

Para establecer el operador transparencia de curvatura, se hace uso de la geometría de la figura 2.4. En esta se tienen dos esferas tangentes las cuales comparten el vértice  $V$ . La esfera de radio  $R_a$  cumple la relación:

$$\overline{Mm} = -\frac{r^2}{2R_a}, \quad (2.20)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2$  y  $\lambda$  corresponde a la longitud de onda de la luz usada. Asignando la diferencia de fase correspondiente a la diferencia de camino óptico se obtiene:

$$\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \overline{Mm} = -\frac{\pi r^2}{2\lambda R_a}. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, la proyección ortogonal del campo en el hemisferio  $A$  sobre  $P$ , resulta de la siguiente forma:

$$u_P(\vec{r}) = u_A \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda R_a}\right). \quad (2.22)$$

El término de fase tiene la forma  $\exp(-i\varphi)$ .

De forma equivalente para la esfera de radio  $R_b$  se cumple:

$$u_P(\vec{r}) = u_B \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda R_b}\right). \quad (2.23)$$

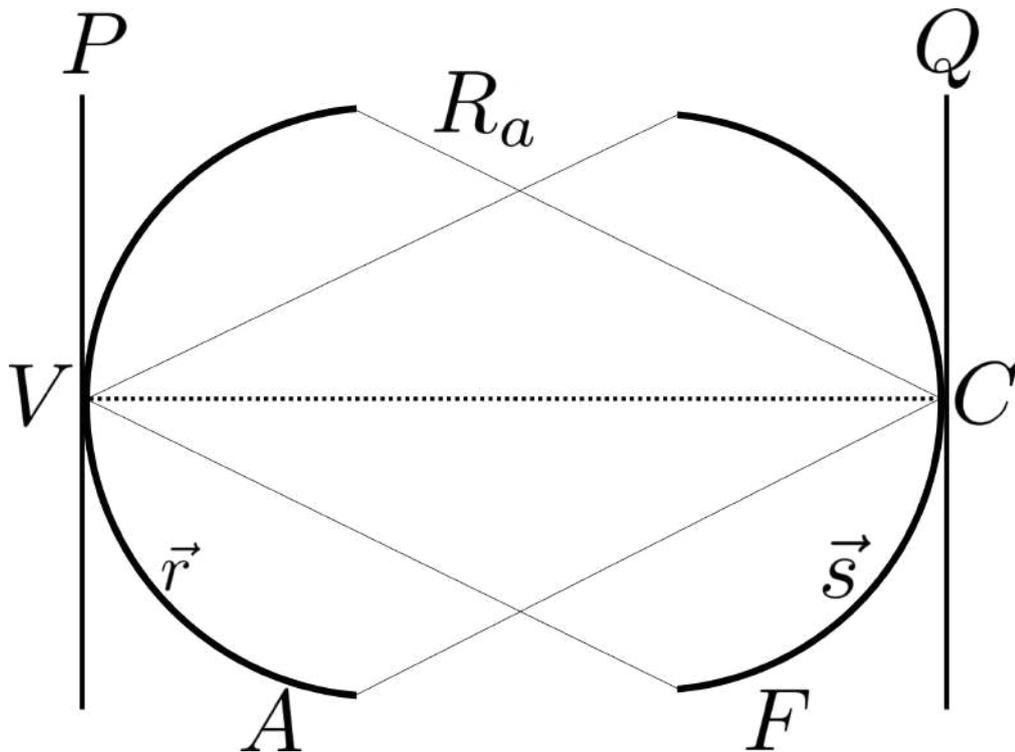
Como ambas poseen la misma proyección sobre el plano  $P$ , se tiene:

$$u_B = u_A \exp\left(\frac{-i\pi r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a}\right)\right). \quad (2.24)$$

La expresión (2.24) modela la transferencia de campo de la esfera  $A$  a la esfera  $B$ . Se le etiqueta como transparencia debido al hecho de que la onda no sufre atenuación.

## 2.5 DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

Establecido el operador transparencia de curvatura y teniendo en cuenta la propagación del espectro angular, se procede a analizar la situación de la figura 2.5. En la figura se observan dos hemisferios ( $A$  y  $F$ ), los cuales son confocales (comparten el mismo foco, el cual está situado entre sus vértices y sus centros), la magnitud del radio de curvatura es la misma, en este caso  $R_a$ , pero al ser opuestos se tiene que  $R_F = -R_A$ . El hemisferio  $A$  será el emisor, y se requiere hallar el campo propagado hasta  $F$ . Las coordenadas sobre  $A$  estarán en función de  $\vec{r}$ , y las coordenadas sobre  $F$ , estarán en función de  $\vec{s}$ .



**Figura 2.5:** Esferas Confocales - Difracción de Fraunhofer

Sea  $\alpha$  un número real, se define la relación de la ecuación (2.26) (que resulta útil para el desarrollo), a partir de la siguiente función:

$$f_\alpha(\vec{F}) = \exp(-i\pi\alpha F^2). \quad (2.25)$$

En la relación de la ecuación (2.26), el símbolo  $\Leftrightarrow$  establece un par de Fourier.

$$f_{-1/\alpha}(\vec{r}) \Leftrightarrow i\alpha f_\alpha(\vec{F}). \quad (2.26)$$

El campo sobre  $P$ , se escribe a partir de la relación de la ecuación (2.22) (transparencia de curvatura):

$$u_P(\vec{r}) = u_A(\vec{r}) \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda R_a}\right). \quad (2.27)$$

De esta forma, utilizando la relación de la expresión (2.26) sobre el producto (2.27), se obtiene el espectro  $\check{u}_P$  de  $u_P$ :

$$\check{u}_P(\vec{F}) = i\lambda R_a \check{u}_A * f_{\lambda R_a}(\vec{F}), \quad (2.28)$$

en este caso  $\{\check{\cdot}\}$  representa la FT de  $\{\cdot\}$ .  $\{*\}$  denota una operación de convolución, esto se obtiene al utilizar la propiedad de convolución en frecuencia de la FT. [16] Para hallar la propagación del espectro angular  $\check{u}_P$  hasta  $\check{u}_Q$ , se retoma la expresión 2.17, la cual modelaba la propagación del espectro angular una distancia  $z$ .

$$V_z(\alpha, \beta) = V_0(\alpha, \beta) \exp\left[\frac{-2i\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (\lambda F_x)^2 - (\lambda F_y)^2}\right] = V_0(\alpha, \beta) H_z(\vec{F}), \quad (2.29)$$

al término  $H_z$  se le conoce como función de transferencia, y ya que se trabajará con una aproximación metaxial, según el capítulo 2.3, se realiza una aproximación al segundo orden de la fase de la función  $H_z$ . Tomando  $z = R_a$ , se obtiene:

$$H_{R_a} \approx \exp\left[-\frac{2i\pi R_a}{\lambda}\right] \exp[i\pi\lambda R_a F^2]. \quad (2.30)$$

El espectro sobre  $Q$  (es decir  $\check{u}_Q$ ), se obtiene al multiplicar  $\check{u}_P$  por  $H_{R_a}$ . Para obtener  $u_Q$ , se realiza una transformada de Fourier inversa de la anterior multiplicación:

$$u_Q(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda R_a} \exp\left[-\frac{2i\pi R_a}{\lambda}\right] \check{u}_A\left(\frac{\vec{s}}{\lambda R_a}\right) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda R_a} s^2\right]. \quad (2.31)$$

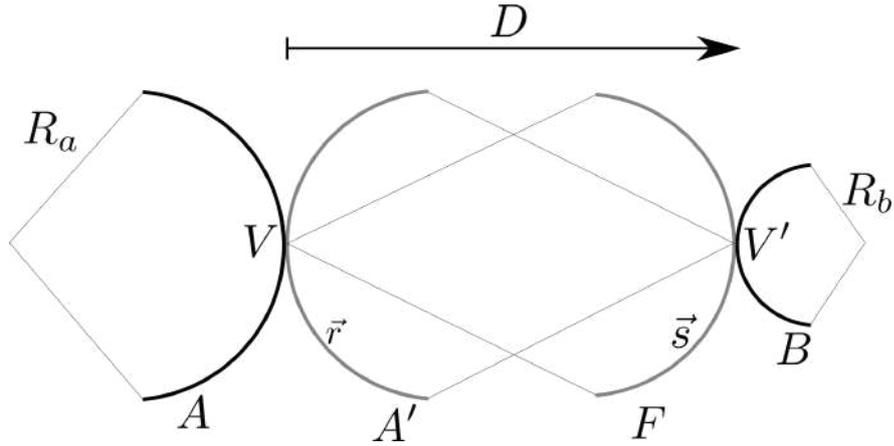
Para finalizar, se pasa de  $Q$  a  $F$  por medio de una transparencia de curvatura, donde se obtiene:

$$u_F(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda R_a} \exp\left[-\frac{2i\pi R_a}{\lambda}\right] \check{u}_A\left(\frac{\vec{s}}{\lambda R_a}\right). \quad (2.32)$$

Se concluye que el campo sobre  $F$ , se deduce del campo sobre  $A$  a partir de una transformada de Fourier escalada y un término de fase constante. Cuando ocurre este fenómeno (**transformada de Fourier óptica o difracción de Fraunhofer**), a la esfera  $F$  se le denomina esfera de Fourier de  $A$ . [14]

## 2.6 TRANSFERENCIA GENERAL

Para encontrar una expresión de transferencia de campo general (es decir, de una esfera con radio  $R_a$ , a una esfera con radio  $R_b \neq R_a$ ), se considera la situación de la figura 2.6.



**Figura 2.6:** Transferencia General- Emisor  $A$  a receptor  $B$

El algoritmo a seguir para hallar la transferencia de campo de la esfera  $A$  sobre  $B$ , es:

1. Transparencia de curvatura de  $A$  a  $A'$
2. Transformación de Fourier óptica de  $A'$  a  $F$  (propagación del espectro angular)
3. Transparencia de curvatura de  $F$  a  $B$

Al seguir estos pasos se obtiene el campo sobre  $F$ :

$$u_B(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_b} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \times \dots \quad (2.33)$$

$$\dots \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_a} \right) r^2 \right] u_A(\vec{r}) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r} \right] d\vec{r}.$$

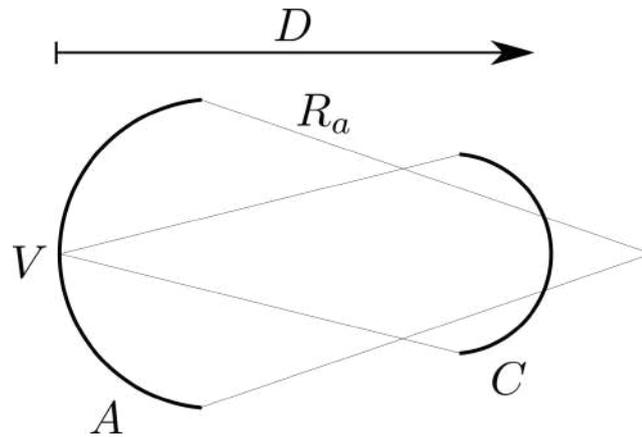
Si se quisiera expresar la transferencia de campo entre dos planos paralelos (como la situación de la figura 2.2), se toman los radios  $R_a = R_b = \infty$ , lo que resulta en la expresión de difracción de Fresnel encontrada en los libros clásicos de óptica ondulatoria. [10, 11]

$$u_B(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} s^2 \right] \times \dots \quad (2.34)$$

$$\dots \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} r^2 \right] u_A(\vec{r}) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r} \right] d\vec{r}.$$

## 2.7 DIFRACCIÓN DE FRESNEL

Para representar el fenómeno de difracción de Fresnel, se utiliza la geometría de la figura 2.7. Allí se tienen dos esferas  $A$  y  $C$ ,  $C$  posee su centro en el vértice  $V$ , pero en este caso  $R_C = -D \neq R_a$ , por lo que  $C$  no corresponde a la esfera de Fourier de  $A$ . La esfera  $C$  se conoce como **esfera cardinal**.



**Figura 2.7:** Difracción de Fresnel. Campo difractado desde  $A$  hasta  $C$ , siendo  $C$  distinta a la esfera de Fourier

La amplitud del campo sobre  $C$  viene dada por la expresión (2.35). [14]

$$u_C(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathfrak{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_a}\right) r^2\right] u_A(\vec{r}) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r}\right] d\vec{r}. \quad (2.35)$$

# Capítulo 3

## DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y SU CONEXIÓN CON LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA (FrFT)

---

---

### 3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA

La aproximación de Fraunhofer es modelada por una transformación de Fourier como ya se mostró en el capítulo 2.5, este régimen de difracción se logra apreciar en el campo lejano al objeto difractor ( $z \rightarrow \infty$ ). La aproximación de Fresnel en contraste a la de Fraunhofer, se obtiene al observar el campo a distancias relativamente cercanas al objeto difractor. [10] Naturalmente, la difracción de Fresnel se va transformando en la aproximación de Fraunhofer a medida que se observa el patrón más y más lejos del objeto difractor (la aproximación de Fraunhofer es un caso particular de la aproximación de Fresnel cuando  $z \rightarrow \infty$ ). Se llega a la conclusión de que debe existir un aparato matemático que represente una generalización de la transformada de Fourier, en donde la transformada de Fourier (Difracción de Fraunhofer) sea un caso particular de esta generalización (difracción de Fresnel). Se han realizado múltiples estudios respecto a este operador, los primeros fueron hechos por los autores de las referencias [17, 18], donde se propone el operador transformada de Fourier fraccionaria, tras el análisis de las autofunciones y los autovalores de la transformada de Fourier clásica. También se han mostrado diferentes situaciones en donde una transformada de Fourier fraccionaria es requerida para dar fundamentación a un fenómeno diferente al de la difracción, una de estas situaciones la propone el autor de la referencia [19], donde a partir del análisis tiempo-frecuencial de señales utilizando la distribución de Wigner-Ville (WD), se muestra que una transformada de Fourier clásica de la señal en cuestión, genera una rotación de  $\pi/2$  de la WD. El autor entonces sugiere que una FrFT de la señal, generará una rotación de  $\alpha = a\pi/2$  en la WD, donde para el valor de  $a = 1$ , se obtendría la operación transformación de Fourier clásica. A partir de ello, el autor propone 2 montajes ópticos que permiten realizar la rotación de la WD de forma experimental, logrando obtener así una expresión analítica de la FrFT y montajes ópticos para

obtener dicha transformada fraccionaria. Esto se utiliza en el anexo A, para definir el algoritmo de la transformada de Fourier fraccionaria rápida (FFrFT). Otra noción de FrFT surge a partir de propagación de campos electromagnéticos en medios de gradiente de índice tal y como lo propone el autor de la referencia [20].

Para mostrar la relación entre la FrFT y la aproximación de Fresnel, se utilizará la expresión de la transformada de Fourier fraccionaria bidimensional descrita por los autores de la referencia [14].

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[f](\vec{\sigma}) &= \frac{ie^{-i\alpha}}{\sin(\alpha)} \exp[-\pi\sigma^2 \cot(\alpha)] \times \dots \\ &\dots \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp[-i\pi\rho^2 \cot(\alpha)] \exp\left[\frac{2i\pi\vec{\sigma}\cdot\vec{\rho}}{\sin(\alpha)}\right] f(\vec{\rho}) d\vec{\rho}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $\alpha = a\pi/2$ . Sean dos funciones  $f$  y  $g \in L^2$  y  $a, b$  escalares, se cumplen las siguientes reglas:

- Regla de la multiplicación:

$$\mathcal{F}_\alpha(gf) = g \left( x \cos \alpha + \frac{1}{i} \sin(\alpha) \frac{d}{dx} \right) \mathcal{F}_\alpha(f). \quad (3.2)$$

- Regla de derivación:

$$\mathcal{F}_\alpha g \frac{d}{dx} f = g \left( -ix \sin \alpha + \cos(\alpha) \frac{d}{dx} \right) \mathcal{F}_\alpha(f). \quad (3.3)$$

- Regla de la división:

$$\mathcal{F}_\alpha \frac{f}{x} = (i/\sin \alpha) \exp\left(-\frac{ix^2}{2} \cot(\alpha)\right) \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{ix^2}{2} \cot(\alpha)\right) \mathcal{F}_\alpha f dx. \quad (3.4)$$

- Regla de integración:

$$\mathcal{F}_\alpha \int_a^x f(x) dx = \sec \alpha \exp\left(-\frac{ix^2}{2} \tan(\alpha)\right) \int_a^x \exp\left(\frac{ix^2}{2} \tan(\alpha)\right) \mathcal{F}_\alpha f dx. \quad (3.5)$$

- Regla de Traslación:

$$\mathcal{F}_\alpha f(x+k) = \exp\left(-ik \sin \alpha \left(x + \frac{k}{2} \cos \alpha\right)\right) \mathcal{F}_\alpha(f)_{[x+k \cos \alpha]}. \quad (3.6)$$

- Linealidad:

$$\mathcal{F}^\alpha \{af + bg\} = a\mathcal{F}^\alpha \{f\} + b\mathcal{F}^\alpha \{g\}. \quad (3.7)$$

### 3.2 DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y LA FRFT

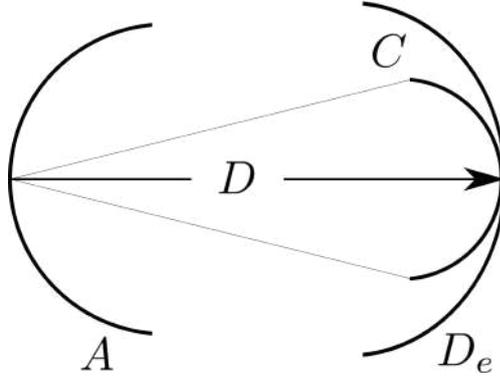
Retomando la expresión de la aproximación de Fresnel del capítulo anterior, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$u_C(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathfrak{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_a} \right) r^2 \right] u_A(\vec{r}) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r} \right] d\vec{r}, \quad (3.8)$$

notese la equivalencia entre la expresión de la difracción de Fresnel (ecuación (3.8)) y la transformada de Fourier fraccionaria (ecuación (3.1)). Ambas poseen términos de fase cuadráticos, y como ya se mostró anteriormente, físicamente estos términos representan transparencias de curvaturas.

A continuación se muestran las condiciones en las que una difracción de Fresnel puede ser representada en función de una transformada de Fourier Fraccionaria.

Para poder escribir la expresión (3.8) en función de una transformada fraccionaria, se debe tener en cuenta que el emisor y el receptor están descritos por variables espaciales, y no por frecuencias espaciales (que son las variables conjugadas al aplicar una transformada de Fourier). Para que esto se cumpla, se deben establecer unas variables reducidas.



**Figura 3.1:** Geometría para la representación de la difracción de Fresnel por medio de una FrFT

El desarrollo estará fundamentado en la geometría de la figura 3.1, donde se aprecia un hemisferio  $A$  con un radio de curvatura  $R_a$ , será este el emisor, y un hemisferio  $C$  con radio de curvatura  $R_c = -D \neq R_a$ , cuyo centro está sobre el vértice de  $A$ .

Se define el parámetro  $\mu$ , tal que:

$$\mu = \frac{D}{R_a}. \quad (3.9)$$

Sea  $\epsilon$  un número real diferente de cero, tal que se cumpla que  $\epsilon R_a > 0$ , y  $\alpha$  esté en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , se define la expresión que permitirá calcular el orden de la transformada, así:

$$\cot(\alpha) = \epsilon \frac{1-\mu}{\mu}, \quad \alpha D \geq 0. \quad (3.10)$$

Se establecen las variables reducidas sobre  $A$  y  $C$ ,  $\vec{\rho}$  y  $\vec{\sigma}$  respectivamente:

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \epsilon R_a}} \vec{r}, \quad \vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \epsilon R_a}} (\cos(\alpha) + \epsilon \sin(\alpha)) \vec{s}. \quad (3.11)$$

Los campos expresados en función de sus variables reducidas serán:

$$V_A(\vec{\rho}) = u_A(\sqrt{\lambda\epsilon R_a}\vec{\rho}). \quad (3.12)$$

$$V_C(\vec{\sigma}) = u_C\left(\sqrt{\lambda\epsilon R_a}\frac{\vec{\rho}}{\cos(\alpha) + \epsilon\sin(\alpha)}\right). \quad (3.13)$$

Con los resultados anteriores, la expresión (3.8) se puede escribir como:

$$V_C(\vec{\sigma}) = \frac{i\cos(\alpha) + \epsilon\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \exp[-i\pi\rho^2 \cot(\alpha)] \times \dots \dots \times \exp\left(\frac{2i\pi\vec{\sigma}\cdot\vec{\rho}}{\sin(\alpha)}\right) V_A(\vec{\rho}) d\vec{\rho}. \quad (3.14)$$

A parte de una constante multiplicativa, en la relación anterior hace falta el término de fase cuadrático externo de la ecuación (3.1). En este se sustituyen las definiciones hechas para obtener su forma en función de los parámetros  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $R_a$ .

$$\exp[-\pi\sigma^2 \cot(\alpha)] = \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda R_a} s^2 \frac{\epsilon^2(1-\mu)}{\mu[\mu^2 + \epsilon^2(1-\mu)^2]}\right]. \quad (3.15)$$

Si se trae de vuelta la transparencia de curvatura, resulta sencillo obtener este término al realizar la observación no sobre  $C$ , sino sobre una esfera  $D_e$  tangente a  $C$ , definiéndole un radio de curvatura  $R_e$ , tal que precisamente la transparencia cumpla con la expresión restante así:

$$\frac{1}{R_e} + \frac{1}{D} = \frac{\epsilon^2(1-\mu)}{\mu R_a[\mu^2 + \epsilon^2(1-\mu)^2]}, \quad (3.16)$$

de esta forma se cumple que el radio  $R_e$  resulta en:

$$R_e = \frac{\mu^2 + \epsilon^2(1-\mu)^2}{-\mu + \epsilon^2(1-\mu)} R_a = \frac{D^2 + \epsilon^2(R_a - D)^2}{-D + \epsilon^2(R_a - D)}. \quad (3.17)$$

Como se describió en la sección 2.4 las coordenadas sobre dos superficies tangentes, se pueden representar sin ambigüedad por un único sistema coordenado, por lo tanto las coordenadas sobre  $C$  representan también las coordenadas sobre  $D_e$ . Entonces, la amplitud reducida  $V_{D_e}$  sobre  $D_e$  es:

$$V_{D_e}(\vec{\sigma}) = u_{D_e}\left(\sqrt{\lambda\epsilon R_a}\frac{\vec{\rho}}{\cos(\alpha) + \epsilon\sin(\alpha)}\right). \quad (3.18)$$

Retomando la expresión (3.14), y suponiendo que  $R_e$  cumple con (3.17), el campo sobre  $D_e$  se puede calcular por medio de una transformada de Fourier fraccionaria así:

$$V_{D_e}(\vec{\sigma}) = e^{i\alpha}(\cos(\alpha) + \epsilon\sin(\alpha))\mathcal{F}_\alpha[V_A](\vec{\sigma}). \quad (3.19)$$

A continuación se enuncian casos particulares para la difracción de Fresnel expresada en función de una transformada de Fourier fraccional, para ello se analiza el valor de  $R_e$  y  $\alpha$ , según los

valores que se le den a  $\mu$ :

- Para el caso  $\mu = 0$ , se cumple que  $R_e = R_a$ , por lo que el emisor es el mismo receptor, es decir la misma imagen, aquí se tiene que el orden será  $\alpha = 0$ , ya que no existió propagación.
- En el caso  $\mu = 1$ , se tiene que  $R_e = -R_a$ , y por lo tanto la esfera  $D_e$ , será la esfera de Fourier de  $A$ , por lo que se obtiene la transformada de Fourier óptica sobre  $D_e$  del campo sobre  $A$ . Se tiene que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$
- Si  $\mu = 1/2$  y  $\epsilon = 1$ , se tiene que  $R_e \rightarrow \infty$ , por lo que el receptor es un plano.  $\alpha = \pi/4$

### 3.3 OBSERVACIÓN SOBRE RECEPTOR DADO

Hasta ahora se hallaron las condiciones para obtener la difracción de Fresnel en función de una transformada de Fourier Fraccionaria. Planteando una situación un poco más común, ¿ se podría obtener la difracción de Fresnel en función de una transformada de Fourier fraccionaria, si ya se conoce el receptor?. Si se tiene un receptor  $D$  de radio  $R_D$ , de la relación (3.17) se puede obtener el valor de  $\epsilon$ :

$$\epsilon^2 = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\mu R_a + R_D}{(\mu-1)R_a + R_D} = \frac{D(D+R_D)}{(R_a-D)(D-R_a+R_D)}. \quad (3.20)$$

Se toma el valor de  $\epsilon$  tal que se cumpla  $\epsilon R_a > 0$ , y de ahí se utiliza la expresión (3.10) para calcular el orden de la transformada.

# Capítulo 4

## MUESTREO FRACCIONARIO, FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN Y FrFT DISCRETA

---

---

### 4.1 MUESTREO FRACCIONARIO

Para el análisis del muestreo fraccionario y la discretización de la FrFT, se parte de algunas propiedades particulares de la FrFT, tomadas de la referencia [20].

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x - \xi)](x') = f_\alpha(x' - \xi \cos(\alpha))e^{(i\pi \sin \alpha)(\xi^2 \cos(\alpha) - 2x'\xi)}. \quad (4.1)$$

$$\mathcal{F}^\alpha[f(x)e^{2\pi i\nu x}](x') = f_\alpha(x' - \nu \sin(\alpha))e^{-(i\pi \cos \alpha)(\nu^2 \sin(\alpha) - 2x'\nu)}. \quad (4.2)$$

De las propiedades anteriores se puede concluir que se puede compensar un desplazamiento (ecuación (4.1)), por medio de una modulación, con algún factor de fase adecuado. Sea  $\xi$  el valor del corrimiento, y  $\exp(-2\pi i(\nu x - \phi))$  una modulación en fase, por lo que se busca el valor de  $\phi$ , de tal forma que se compense el valor del desplazamiento  $\xi$ . Despreciando los términos de fase constantes se tiene que:

$$\mathcal{F}^\alpha \left[ f(x - \xi)e^{-2\pi i(\nu x - \phi)} \right] (x') = e^{2\pi i\phi} e^{i\pi x'^2 \cot(\alpha)} \int_{\mathbb{R}} f(x - \xi)e^{-2\pi i\nu x} e^{i\pi x^2 \cot(\alpha)} e^{\frac{-2\pi i x x'}{\sin \alpha}}. \quad (4.3)$$

Si se realiza el cambio de variable  $x - \xi$ , se define  $\nu = \xi \cot(\alpha)$  y  $\phi = \nu\xi/2 = \xi^2 \cot(\alpha)/2$ , se obtiene:

$$\mathcal{F}^\alpha \left[ f(x - \xi)e^{-2\pi i\xi(x - \xi/2) \cot(\alpha)} \right] (x') = f_\alpha(x')e^{\frac{-2\pi \xi x'}{\sin(\alpha)}}. \quad (4.4)$$

Al resultado de la expresión (4.4) se le ha definido como compensación de corrimiento por

modulación de fase. [14]

De forma equivalente, la ecuación (4.4) en el dominio fraccionario resulta en:

$$\mathcal{F}^{-\alpha} \left[ f_{\alpha}(x' - \mu) e^{-2\pi i \mu (x - \mu/2) \cot(\alpha)} \right] (x) = f(x) e^{\frac{2\pi i \mu x}{\sin(\alpha)}}. \quad (4.5)$$

Se establece que el soporte de la función  $f_{\alpha}$  es  $\mu$ , se busca replicar la función en todo su espectro fraccionario, entonces:

$$g_{\alpha}(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(x' - n\mu). \quad (4.6)$$

Al realizar la IFrFT (Transformada inversa de Fourier fraccionaria) de la expresión anterior, se obtendrá un corrimiento particular para cada réplica, este corrimiento se elimina al utilizar la compensación por modulación en fase para cada una de las réplicas, esto es:

$$g_{\alpha}(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(x' - n\mu) e^{2\pi i (\nu_n - \Phi_n)}, \quad (4.7)$$

con  $\nu_n = n\mu \cot(\alpha)$  y  $\Phi_n = \frac{n\mu^2 \cot(\alpha)}{2}$ .

Al realizar la IFrFT de la expresión (4.7), se obtiene:

$$\mathcal{F}^{-\alpha} [g_{\alpha}(x')] (x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi n \mu x}{\sin(\alpha)}}, \quad (4.8)$$

la sumatoria anterior tiene la forma de un tren de pulsos expresado en forma de serie de Fourier [16], si se cumple:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi n \mu x}{\sin(\alpha)}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT). \quad (4.9)$$

Para que se cumpla la igualdad anterior, se debe satisfacer que:

$$T = \frac{\sin(\alpha)}{\mu}. \quad (4.10)$$

De esta manera la expresión (4.8) resulta en:

$$\mathcal{F}^{-\alpha} [g_{\alpha}(x')] (x) = f(x) \frac{\sin(\alpha)}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - n \frac{\sin(\alpha)}{\mu}\right). \quad (4.11)$$

Por lo tanto, para hallar la transformada fraccionaria sin pérdida de información, se debe muestrear a una tasa de muestreo particular  $T$ , para cada orden  $\alpha$  que se requiera.

## 4.2 FORMULA DE INTERPOLACIÓN

Se define la versión muestreada de la función  $f$  así:

$$\hat{f}(x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - n \frac{\sin(\alpha)}{\mu}\right). \quad (4.12)$$

Según la suposición de que la función tiene un soporte finito en ambos dominios, la sumatoria poseerá únicamente  $N$  valores en los cuales la función  $\hat{f}$  tendrá valores no nulos, por lo tanto se puede expresar  $\hat{f}$  tal que:

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} f\left(n \frac{\sin(\alpha)}{\mu}\right) \delta\left(x - n \frac{\sin(\alpha)}{\mu}\right). \quad (4.13)$$

Hallando la transformada fraccionaria de la ecuación (4.13) (utilizando el par fraccionario de la distribución impulso y la linealidad de la transformada), se tiene que:

$$g_{\alpha}(x') = \mathcal{F}^{\alpha}[\hat{f}](x') = \sum_{n=-N/2}^{N/2} f\left(n \frac{\sin(\alpha)}{\mu}\right) e^{i\pi x'^2 \cot(\alpha)} e^{i\pi \frac{n^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\mu}} e^{-2\pi i \frac{nx'}{\mu}}. \quad (4.14)$$

Ahora bien, si se usa un filtro rectangular en el dominio fraccionario, este debe tener una longitud correspondiente al soporte fraccionario, entonces, para recuperar la señal se realiza la transformada fraccionaria de orden  $-\alpha$  a la función  $g_{\alpha}$ , debidamente multiplicada por el filtro rectangular de dimensiones adecuadas según el orden para alguna réplica del espectro en particular:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha} \left[ g_{\alpha}(x') R\left(\frac{x'-m\mu}{\mu}\right) \right] &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} f\left(n \frac{\sin(\alpha)}{\mu}\right) e^{-i\pi x'^2 \cot(\alpha)} e^{i\pi \frac{n^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\mu}} \times \dots \\ &\dots \times \int R\left(\frac{x'-m\mu}{\mu}\right) e^{-2\pi i \frac{nx'}{\mu}} e^{\frac{2\pi i x x'}{\sin(\alpha)}} dx'. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La función  $R$ , define una función rectángulo desplazada un valor de  $m$  veces el soporte de  $g$ , por lo que filtra únicamente una de las réplicas del espectro como se había propuesto. Donde  $\Delta x = \frac{\sin(\alpha)}{\mu}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha} \left[ g_{\alpha}(x') R\left(\frac{x'-m\mu}{\mu}\right) \right] &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} f\left(n \frac{\sin(\alpha)}{\mu}\right) e^{-i\pi x'^2 \cot(\alpha)} e^{i\pi \frac{n^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\mu}} \times \dots \\ &\dots \times \int R\left(\frac{x'-m\mu}{\mu}\right) e^{2\pi i \frac{x'}{\mu} \left[ \frac{-\mu}{\sin(\alpha)} (x-n\Delta x) \right]} dx'. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Resolviendo la transformada de Fourier, se obtiene:

$$f'(x) = \mathcal{F}^\alpha \left[ g_\alpha(x') R \left( \frac{x' - m\mu}{\mu} \right) \right] = e^{\frac{2\pi i m \mu x}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi x^2 \cot(\alpha)} \sum_{n=-N/2}^{N/2} f \left( n \frac{\sin(\alpha)}{\mu} \right) \times \dots \quad (4.17)$$

$$\dots \times e^{i\pi \frac{n^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\mu}} e^{-2\pi i m n} \text{sinc} \left[ \frac{\pi \mu}{\sin(\alpha)} (x - n\Delta x) \right],$$

el factor de fase  $e^{-2\pi i m n}$  siempre será la unidad, ya que  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Al comparar las expresiones (4.17) y (4.5), para  $m = 1$  en particular, se obtiene que :

$$f(x) e^{\frac{2\pi i \mu x}{\sin(\alpha)}} = e^{\frac{2\pi i \mu x}{\sin(\alpha)}} e^{-i\pi x^2 \cot(\alpha)} \sum_{n=-N/2}^{N/2} f \left( n \frac{\sin(\alpha)}{\mu} \right) \times \dots \quad (4.18)$$

$$\dots \times e^{i\pi \frac{n^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\mu}} \text{sinc} \left[ \frac{\pi \mu}{\sin(\alpha)} (x - n\Delta x) \right],$$

por lo tanto:

$$f(x) = e^{-i\pi x^2 \cot(\alpha)} \sum_{n=-N/2}^{N/2} f \left( n \frac{\sin(\alpha)}{\mu} \right) e^{i\pi \frac{n^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\mu}} \text{sinc} \left[ \frac{\pi \mu}{\sin(\alpha)} (x - n\Delta x) \right]. \quad (4.19)$$

La expresión anterior corresponde a la ecuación de interpolación para funciones con soporte en dominios fraccionarios.

### 4.3 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER FRACCIONARIA (DFRFT)

Una vez expuesto el proceso para obtener la tasa de muestreo adecuado, según el soporte de la función en algún dominio fraccionario de orden  $\alpha$ , se procede a definir la transformada discreta de Fourier fraccionaria para una función discreta de  $N$  muestras. Se define la cantidad  $N$ , como la dimensionalidad de la función  $f$ . La función en el dominio directo posee un soporte  $\xi$  finito, al igual que la transformada fraccionaria de esta posee un soporte  $\mu$  finito. Sean  $x$  y  $x'$  las variables en el dominio directo y en el dominio fraccionario, respectivamente, entonces las versiones discretas de las variables serán:

$$x = n\Delta x, \quad x' = m\Delta x'. \quad (4.20)$$

Según el teorema de muestreo fraccionario (ecuación (4.10)), se debe cumplir que:

$$\Delta x = \frac{\sin(\alpha)}{\mu}, \quad \Delta x' = \frac{\sin(\alpha)}{\xi}, \quad (4.21)$$

utilizando las expresiones (A.23) y (4.20) en la expresión de la transformada (3.1), se obtiene la siguiente expresión:

$$f_\alpha \left( m \frac{\sin(\alpha)}{\xi} \right) = e^{i\pi \left( \frac{m}{\xi} \right)^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f \left( n \frac{\sin(\alpha)}{\mu} \right) e^{i\pi \left( \frac{n}{\mu} \right)^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} e^{-\frac{2i\pi m n \sin(\alpha)}{\mu \xi}}. \quad (4.22)$$

Utilizando la relación:

$$N = \frac{\mu\xi}{\sin(\alpha)}. \quad (4.23)$$

Expresando todo en función de lo conocido como lo son, el número de muestras  $N$  y el soporte de  $f$ , se obtiene una versión sin pérdida de información, de la transformada de Fourier fraccionaria:

$$f_\alpha\left(m\frac{\sin(\alpha)}{\xi}\right) = e^{i\pi\left(\frac{m}{\xi}\right)^2 \sin 2(\alpha)} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f\left(n\frac{\xi}{N}\right) e^{i\pi\left(\frac{n\xi}{N}\right)^2 \cot(\alpha)} e^{-\frac{2i\pi mn}{N}}. \quad (4.24)$$

# Capítulo 5

## RECONSTRUCCIÓN DE OBJETOS UTILIZANDO HOLOGRAMAS DE FOURIER DE ORDEN FRACCIONARIO

---

---

En este capítulo se realiza el análisis de algunos aspectos necesarios y limitaciones para el método de reconstrucción que se propone dentro del mismo capítulo. En la sección 5.3 se plantea el método de reconstrucción en forma de algoritmo. A partir de allí se realizan los respectivos análisis de las limitaciones y consideraciones a medida que se va avanzando en las etapas del algoritmo de reconstrucción. En el literal 5.3.3 se realiza la propuesta y análisis del costo computacional de los algoritmos opto-digitales que se podrían utilizar para la puesta en marcha del modelo. Este capítulo también incluye los resultados computacionales de la puesta en marcha de un modelo de cálculo de la difracción de hologramas sobre superficies curvas. Por último se muestra la propuesta y puesta en marcha de un modelo de *Deep Learning*, con el fin de disminuir drásticamente el costo computacional de la reconstrucción de la topografía de las superficies, esto método surge a partir del análisis del método propuesto inicialmente. A lo largo de este capítulo se hará uso de las etiquetas  $\delta_\alpha$  y  $\delta_z$  de forma indistinta para referirse al mismo fenómeno, ya que según la relación descrita en el capítulo 3, una distancia de propagación, equivale a un orden fraccionario.

### 5.1 OBTENCIÓN DE “PUNTOS” EN EL RÉGIMEN DE FRESNEL

El desarrollo del método inicia al analizar el par de Fourier clásico en la expresión (5.1) (obviando los términos constantes). En dicha expresión se aprecia como una distribución Delta de Dirac ( $\delta$ ) desplazada a un punto  $\vec{\omega}_0$  en el dominio frecuencial, puede ser obtenida al realizar una transformada de Fourier de una función de solo fase  $p$ . El fenómeno relacionado, naturalmente sería una difracción de Fraunhofer, si se cumplen las condiciones de escalamiento establecidas en el capítulo 2.5.

$$\mathcal{F}\{p(\vec{r})\} = \mathcal{F}\{e^{-i\vec{\omega}_0 \cdot \vec{r}}\} = \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0). \quad (5.1)$$

Para obtener un patrón de difracción correspondiente a una distribución de Dirac en el régimen de Fresnel, se analiza la expresión (2.34), la cual corresponde a la expresión de la difracción de Fresnel entre dos planos paralelos:

$$u_B(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} s^2\right] \times \dots \\ \dots \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} r^2\right] u_A(\vec{r}) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r}\right] d\vec{r}}_{\text{Función Chirp}} \quad (5.2)$$

La función Chirp en la expresión anterior está estrictamente relacionada con una transparencia de curvatura, cuya equivalencia se puede encontrar en una transformación de fase añadida por una lente delgada. [12,21] Por lo tanto, si a la función  $u_A$  se le aplica una transformación de fase equivalente a una lente delgada en la forma de la expresión (5.3) y posteriormente se realiza la difracción de Fresnel a dicha transformación, se tendría una transformada de Fourier óptica (Difracción de Fraunhofer más un término de fase) justo a la distancia  $z = D$ . Es por esto que en los montajes ópticos, las transformaciones de fase por medio de lentes, juegan un papel importante a la hora de realizar transformadas de Fourier ópticas (cálculos hechos literalmente a la velocidad de la luz).

$$T = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda D} r^2\right]. \quad (5.3)$$

En la expresión (5.4) se observa el resultado de aplicar la transformación de fase a la función  $u_A$  y luego su propagación.

$$u_B(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \underbrace{\exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D} s^2\right]}_{\text{Chirp}} \int_{\mathbb{R}^2} u_A(\vec{r}) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D} \vec{s} \cdot \vec{r}\right] d\vec{r}. \quad (5.4)$$

La función Chirp en la expresión (5.4) puede ser obviada si el interés está únicamente en la intensidad de la difracción, o “eliminada” al igual que en la expresión (5.2), al agregar una segunda transformación de fase utilizando otra lente delgada, cuya distancia focal sea igual a  $z = -D$ , pero en este caso, utilizando las coordenadas  $\vec{s}$  sobre el plano de visualización.

De esta forma se puede ver, cómo a partir de consideraciones físicas, se puede obtener la transformada de Fourier óptica exacta, a una distancia específica  $z = D$  (de esta forma se implementan los emisores esféricos del capítulo 3, mostrando la potencia del operador transparencia de curvatura en el desarrollo de la teoría de la difracción metaxial). Con todo lo anterior, se observa que para obtener una distribución de Dirac a partir de una difracción de Fresnel a una distancia  $z = D$ , basta con garantizar la transformada de Fourier óptica exacta de la función  $p$ . Esto se logra al realizar las respectivas transformaciones de fase al objeto  $u_A$ . Se define entonces el ele-

mento óptico difractivo  $u_A$ , cuya difracción genera una distribución de Dirac en las coordenadas  $\vec{s}_0$ , a una distancia  $D$  del plano difractado ( $\delta_z(\vec{s} - \vec{s}_0)$ ):

$$u_A(\vec{r}) = \frac{\lambda D}{i} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda D} r^2\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda D} s^2\right] \exp[-i\vec{s}_0 \cdot \vec{r}] = \frac{\lambda D}{i} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda D} (r^2 + s^2) - i\vec{s}_0 \cdot \vec{r}\right]. \quad (5.5)$$

De forma equivalente, al modelar el fenómeno de difracción de Fresnel utilizando una transformación de Fourier fraccionaria (capítulo 3), se debe cumplir que para una distancia  $z = D$ , exista un orden  $\alpha$  tal que al difractar una función de solo fase, se obtenga una distribución de Dirac en alguna posición en el dominio fraccionario. Diferentes autores han planteado esta relación, y en la ecuación (5.6) se aprecia que es equivalente a la obtenida en la expresión (5.5). [14, 17, 22–24]

$$\mathcal{F}_\alpha[\delta(\vec{r} - \vec{s}_0)] = \frac{ie^{-i\alpha}}{\sin(\alpha)} \exp\left[i\pi(r^2 + s_0^2) \cot(\alpha) - \frac{2\pi i \vec{s}_0 \cdot \vec{r}}{\sin(\alpha)}\right]. \quad (5.6)$$

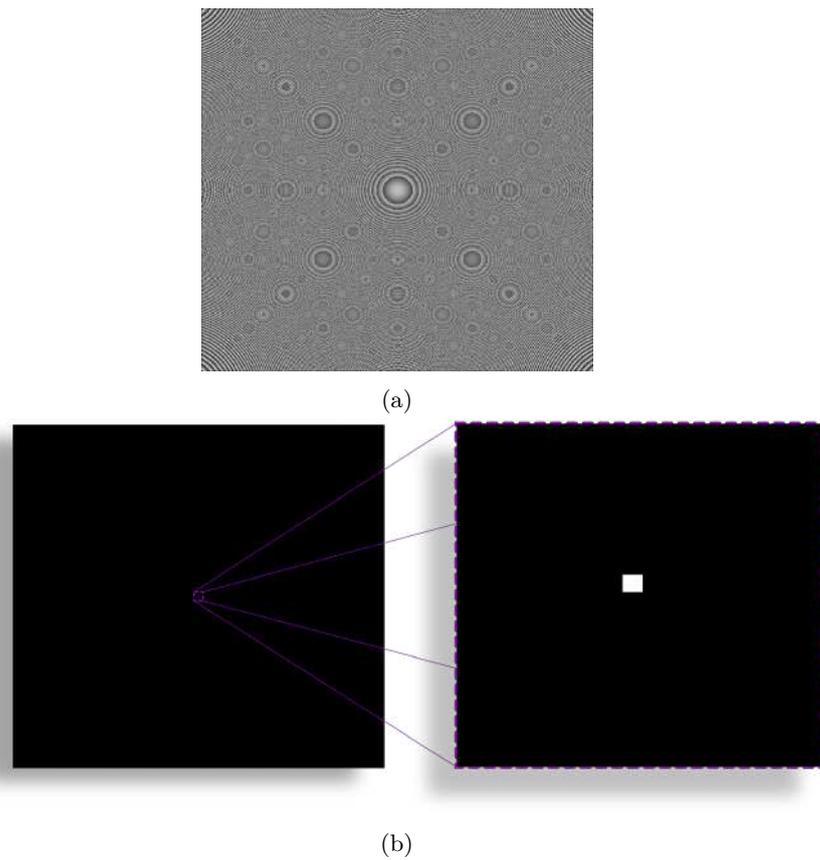
La expresión anterior debe ser debidamente escalada, utilizando las variables reducidas mostradas en el capítulo 3. A esta expresión se le denominará como el holograma de una distribución de Dirac, en un dominio fraccionario  $\alpha$ . [24]

## 5.2 INFLUENCIA DEL ORDEN EN LA RECONSTRUCCIÓN DEL HOLOGRAMA

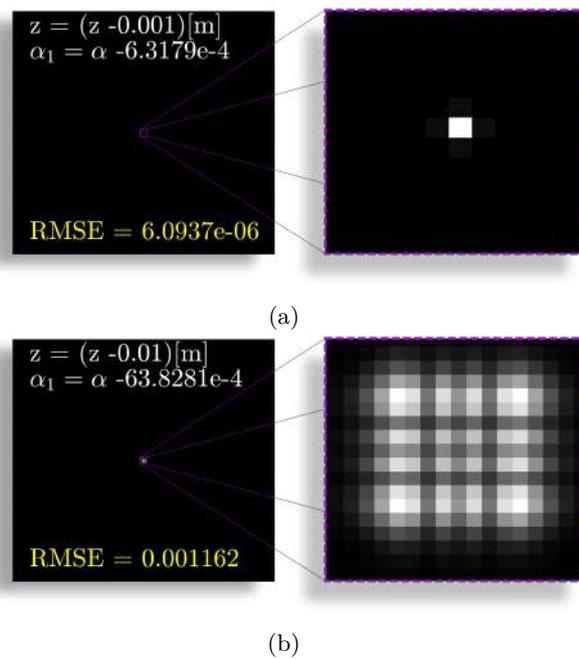
En la figura 5.1a, se observa un holograma de orden  $\alpha$ , calculado utilizando la relación (5.6), y estableciendo  $\vec{s}_0 = 0$  (centrado). En la figura 5.1b, se aprecia la difracción de orden  $\alpha_1 = \alpha$  del holograma de la figura 5.1a. De la figura 5.1 surgen las siguientes preguntas, ¿Qué ocurre con la reconstrucción si ahora se establece  $\alpha_1 \neq \alpha$ ?, ¿cuál será el error respecto a la difracción con el orden  $\alpha_1 = \alpha$ ?

Para responder estas preguntas, en la figura 5.2 se aprecian difracciones de diferentes ordenes  $\alpha_1 \neq \alpha$  (equivalentes a una distancia  $z_1$  de propagación para cada caso), del holograma de la figura 5.1a. Se muestra también el error obtenido (utilizando el RMSE) entre la difracción de orden  $\alpha_1$  y  $\alpha$  (plano de enfoque calculado) para ambos casos.

Este cambio en el patrón de difracción según el orden  $\alpha_1$ , se definirá como **ENFOQUE DIFRACTIVO (ED)**.



**Figura 5.1:** a) Holograma de distribución de Dirac de orden  $\alpha$ , b) Reconstrucción del Holograma con su mismo orden  $\alpha_1 = \alpha$

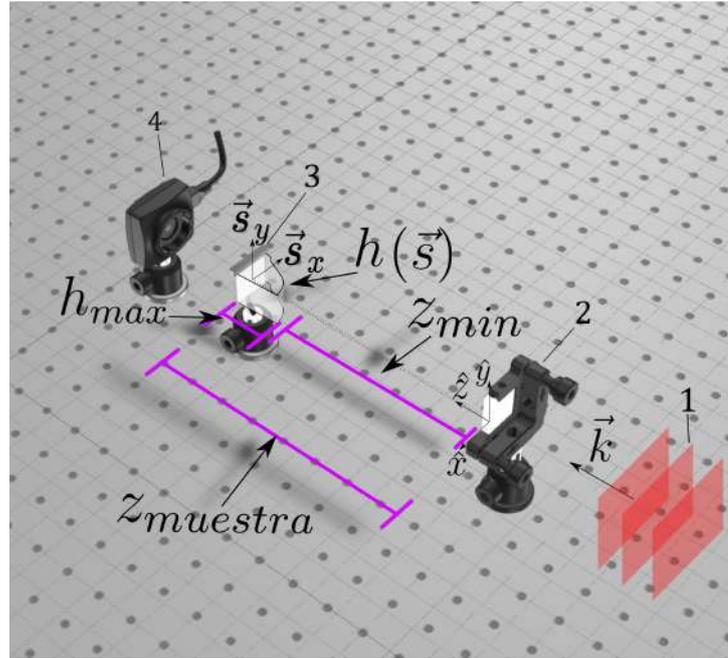


**Figura 5.2:** Reconstrucción del holograma de la figura 5.1a, con diferentes ordenes  $\alpha_1$

### 5.3 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Aprovechando el **ED** mostrado en la sección anterior, se definirá el método a estudiar para realizar reconstrucciones de superficies sin desplazamiento mecánico. En la figura 5.3 se aprecia el montaje experimental que se propone para la puesta en marcha del método. El modulador espacial de luz (o algún otro elemento óptico difractivo), permite situar sobre este, hologramas generados por computador (bien sea de fase, amplitud o mixtos) para cada  $\delta_\alpha(\vec{s} - \vec{s}_0)$  que se requiera. Inicialmente se establece que las superficies deben ser translúcidas, de tal forma que el sensor óptico detrás del soporte pueda capturar el patrón de difracción sobre dicha superficie. Se plantea el siguiente algoritmo para realizar la reconstrucción:

1. Situar el objeto translúcido sobre el soporte hueco
2. Situar el soporte hueco a una distancia  $z_{muestra}$  del modulador espacial de luz. Asegurándose de que la distancia  $z_{min}$  cumpla con los criterios de la aproximación de Fresnel. [10]
3. Se establece un intervalo sobre el eje  $z$  ( $dz$ ), esta será la resolución en profundidad (axial) de la reconstrucción .
4. Se realiza el cálculo del holograma de un delta situado sobre las coordenadas  $\vec{s}_0$ , a una distancia  $z$  del plano del modulador, equivalente a un orden fraccionario  $\alpha$  ( $\delta_\alpha(\vec{s} - \vec{s}_0)$ ).
5. Se difracta el holograma y se visualiza el patrón generado sobre la superficie. Se establecen los criterios de enfoque difractivo (se compara con el patrón que se obtendría si la zona de visualización en la superficie estuviera situada a la distancia del holograma calculado).
6. Si se cumplen con los criterios de focalización, se establece que la profundidad para la coordenada  $\vec{s}_0$  en el dominio fraccionario, corresponde a la profundidad tal que  $h(\vec{s}_0) = z_{muestra} - z$ , donde  $h(\vec{s})$  corresponde a la de profundidad de la superficie  $S$ .
7. Si no se cumplen los criterios de ED, se recalcula el holograma del paso 4, variando  $z$  en  $\pm dz$  (es decir, variando el orden  $\alpha$ ).
8. Se repiten los pasos del 5 al 7 hasta que se cumplan los criterios de ED para la posición  $\vec{s}_0$ .
9. Se repiten los pasos del 4 al 8 para las diferentes posiciones  $\vec{s}_0$  que se establezcan, hasta obtener la topografía de la superficie.



**Figura 5.3:** Montaje experimental para la puesta en marcha del método de reconstrucción. 1) Frentes de onda plana, 2) modulador espacial de luz (SLM), 3) porta muestra, 4) sensor óptico

A continuación se discuten las consideraciones para cada uno de los pasos en el algoritmo planteado para realizar la reconstrucción de alguna superficie  $S$ .

### 5.3.1 ITEM 2,3,9 (MÉTRICAS Y RESOLUCIONES LIGADAS)

Los ítems 2,3 y 9 están estrictamente ligados, ya que de ambos depende la resolución de la reconstrucción (como se mostrará a continuación), tanto en el eje  $z$  (resolución axial) como en el dominio  $s$  (resolución transversal). Para poder plantear las métricas y sus resoluciones ligadas, es necesario analizar la sección longitudinal (SL) en la difracción del holograma de un  $\delta_\alpha$  (con SL se hace referencia a la envolvente del ancho de banda en un intervalo de valores de  $z$ ).

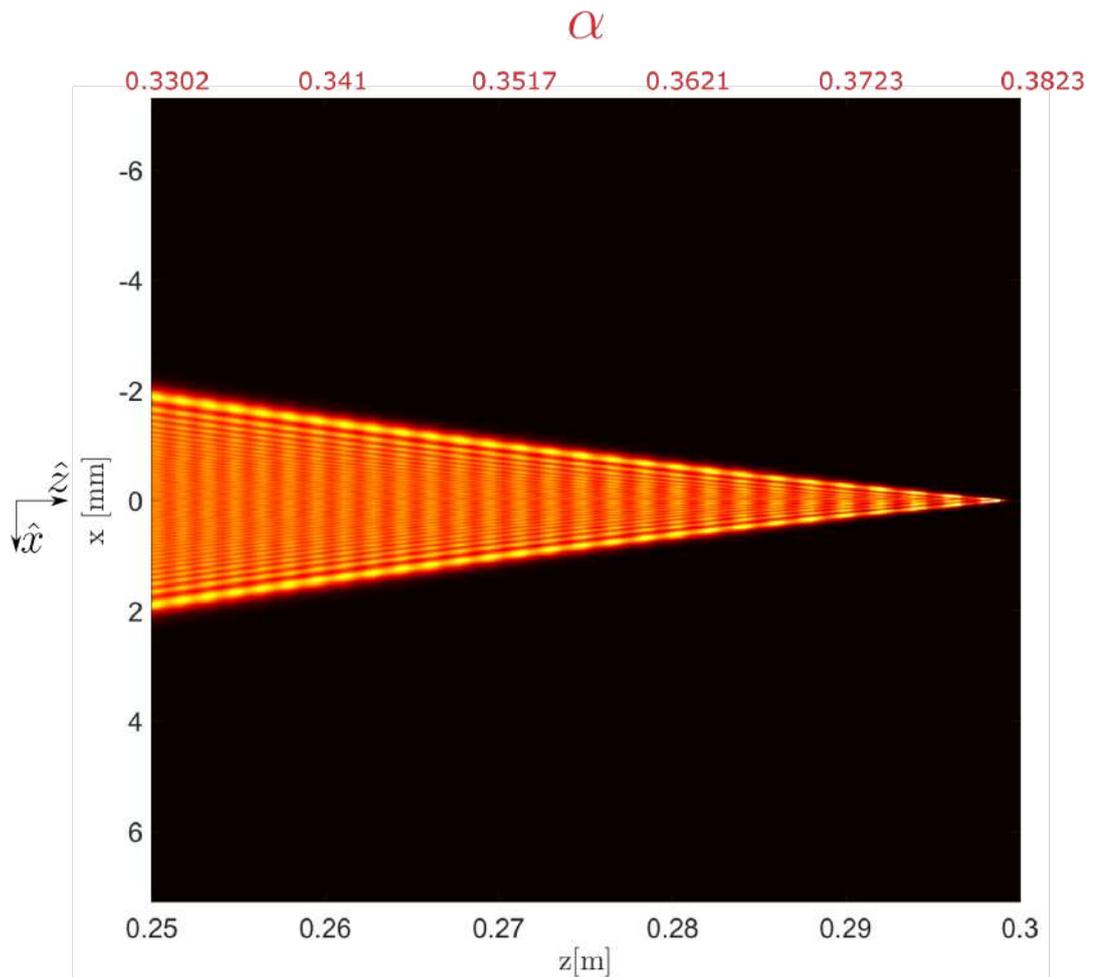
#### 5.3.1.1 SL de holograma calculado para $\delta_{z_1}(\vec{s})$ , con $z_1 = 0,3[m]$

Se realiza el cálculo de un holograma para una distribución de Dirac  $\delta_{z_1}(\vec{s})$  (esto indica que al difractarse dicho holograma, la distribución de Dirac estará situada a una distancia  $z_1$  en la posición  $\vec{s}_0 = 0$ ). Los parámetros de simulación utilizados se muestran en la tabla 5.1

PARÁMETRO	VALOR
Longitud de onda ( $\lambda$ )	$633nm$
Dim modulador	$N \times N, N = 768$
Dim pixel modulador	$n_p \times n_p, n_p = 19\mu m$
Dim sensor	Dim modulador
Dim pixel sensor	Dim pixel modulador
Modulación	$2\pi$
Distancia de ED $z_1$	$0,3m$

**Tabla 5.1:** Parámetros utilizados para la simulación. Dimensiones (Dim).

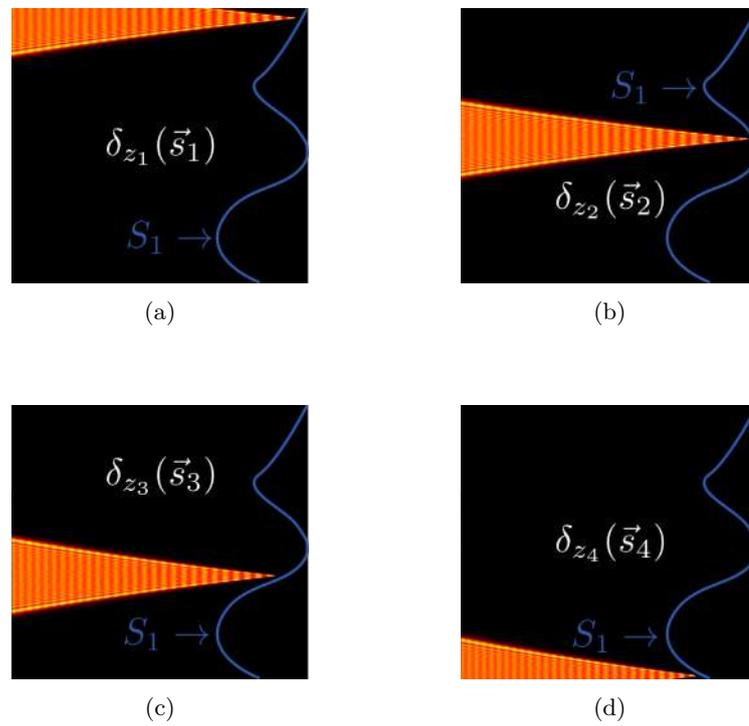
En la figura 5.4 se observa la SL de la difracción del holograma de un  $\delta$ , calculado con los parámetros de la tabla 5.1, desde una distancia  $z = 0,25[m]$ , hasta la distancia de ED  $z_1$  para el holograma. Se observa que la mayor parte de la intensidad del campo, se encuentra limitada por la envolvente de la SL.



**Figura 5.4:** SL de la difracción de un holograma para un  $\delta$  calculado con los parámetros de la tabla 5.1. El intervalo sobre  $z$  fue  $dz_t = 0,1mm$

La SL contiene toda la información del espectro angular del holograma difractado que se va propagando y auto-configurando hasta formar la distribución  $\delta_{z_1}(\vec{s})$  en la distancia de recons-

trucción calculada  $z_1$ . Si se bloquea la SL con algún objeto, el campo a partir de allí sufre una alteración tras una multiplicación óptica con la obstrucción (es decir, una difracción que no se contempla dentro del modelo inicial). Para que la reconstrucción no se vea alterada debido a obstrucciones del campo, la profundidad  $h(\vec{s})$  de alguna superficie  $S$  debe ser tal que, la SL del campo propagado no se vea alterado en ningún punto. En la figura 5.5 se aprecia un bosquejo de la sección longitudinal de diferentes distribuciones  $\delta_{z_i}(\vec{s}_i)$ , focalizadas en diferentes posiciones  $\vec{s}_i = \vec{s} - \vec{s}_j$  sobre la superficie  $S_1$ . Se evidencia que ninguna de las secciones transversales se ve afectada por algún borde de la superficie. La superficie ideal será entonces, aquella cuyos bordes no interfieran en ninguna parte de su dominio, con la SL de algún  $\delta$  calculado para que se focalice sobre esta.



**Figura 5.5:** SL de diferentes distribuciones  $\delta$  sobre una superficie  $S_1$ . a)  $z_1$  y  $\vec{s}_1$  Las SL's no se ven afectadas en ningún punto por los bordes de la superficie.

En la figura 5.6 se muestra el bosquejo de una superficie que no permitirá realizar una reconstrucción exacta bajo el modelo planteado, esto debido a que una sección de la superficie  $S_2$  bloquea parte de la SL. A estos bloqueos los denominamos singularidades, ya que por el momento es imposible con esta técnica, recuperar la información en la superficie bloqueada.

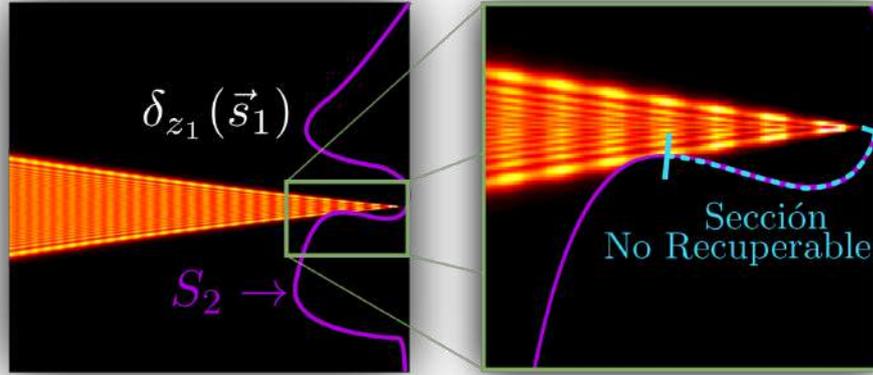


Figura 5.6: SL alterada tras obstrucción del borde de la superficie  $S_2$

### 5.3.1.2 Detección de puntos focalizados

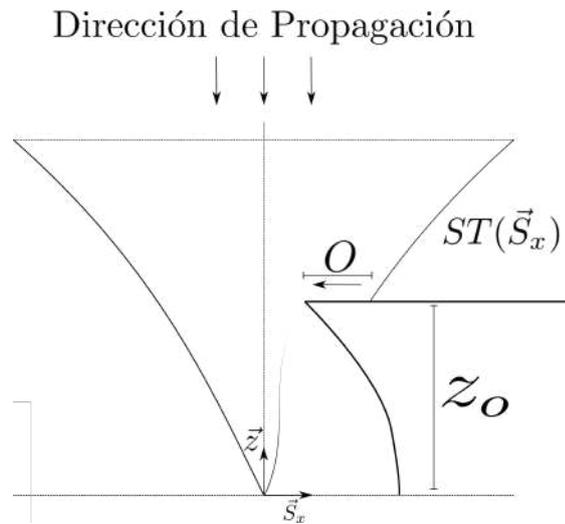
Una vez establecida la forma que debe tener el holograma para generar una distribución  $\delta$  sobre  $S$ , nosotros proponemos el método de correlación para discriminar los puntos *enfocados* de los no *enfocados*. Utilizamos el teorema de correlación de la expresión (5.7), este teorema indica, que la transformada de Fourier (FT) de la operación de correlación cruzada ( $\{\star\}$ ) entre dos funciones  $f$  y  $g$ , es equivalente a realizar el cálculo del conjugado de la FT de  $f$  ( $\bar{\mathcal{F}}\{f\}$ ) y multiplicarlo por la FT de  $g$  ( $\mathcal{F}\{g\}$ ). Naturalmente, para obtener el valor de la operación de correlación en el dominio directo, se debe realizar la transformada de Fourier inversa de estas operaciones. [16] Esta operación es posible obtenerla ópticamente utilizando lentes delgadas (como se indicó en la sección 5.1) tal y como lo propuso Vander Lugt en su trabajo “*Signal detection by complex spatial filtering*”, por lo que se podrían realizar los cálculos a la velocidad de la luz. [25].

$$cc = f \star g = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{\mathcal{F}}\{f\}\mathcal{F}\{g\}\}. \quad (5.7)$$

La función  $\bar{\mathcal{F}}\{f\}$  se le denomina función de filtrado, ya que al realizarse la operación  $\{\star\}$  entre  $f$  y  $g$ , se tendrán los picos máximos (pico máximo de correlación **PMC**) justo en las posiciones sobre  $g$ , donde  $f$  y  $g$  tengan un mayor grado de similitud, dando así una herramienta de detección de patrones bastante potente y rápida. Debido a los patrones que se van a utilizar para difractar sobre las superficies a reconstruir ( $\delta$ ), se opta por este método de detección, asumiendo que el sistema óptico está perfectamente alineado, y sin cambios de escala (dimensiones del plano de difracción y el plano de reconstrucción iguales). Debido a las 3 operaciones de transformada de Fourier que se deben realizar, el costo computacional será  $\mathcal{O}_F(3N^2 \log N)$ . [26]

### 5.3.2 DISTORSIÓN DE PUNTOS SEGÚN OBSTRUCCIONES A LA SL

Como se mostró en la figura 5.6, la SL del campo difractado del holograma de una distribución  $\delta_z(\vec{s})$  puede verse afectada, en zonas donde la superficie  $S$  interfiera con esta. Esto genera una alteración del patrón de difracción que se calculó inicialmente, (asumiendo que la reconstrucción se está observando justo sobre la posición de ED). Para analizar los alcances de estos bloqueos a la SL, se realizó el experimento de la figura 5.7. En esta figura se observa la SL ( $SL(\vec{S}_x)$ ) de la difracción del holograma de un  $\delta_z(\vec{s})$  obstruida por una superficie opaca  $O$  (coeficiente de transmisión nulo), a una distancia  $z_o$  del plano de enfoque calculado.

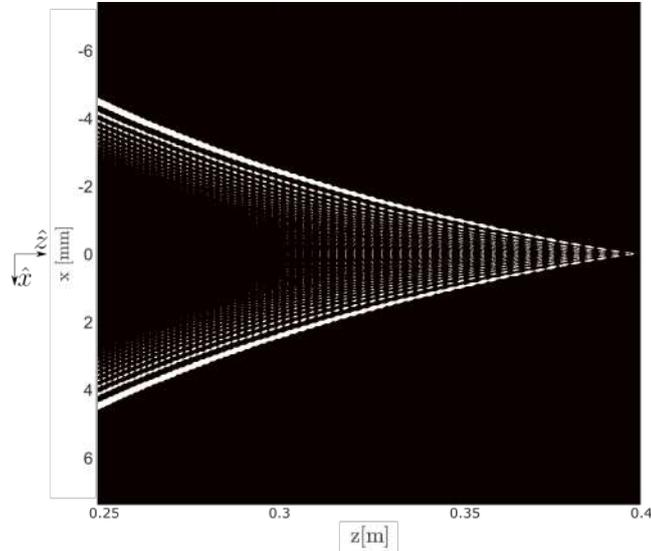


**Figura 5.7:** Experimento para estudiar la influencia de una obstrucción a la SL en el plano de Reconstrucción. La obstrucción va aumentando en dirección  $-\vec{S}_x$

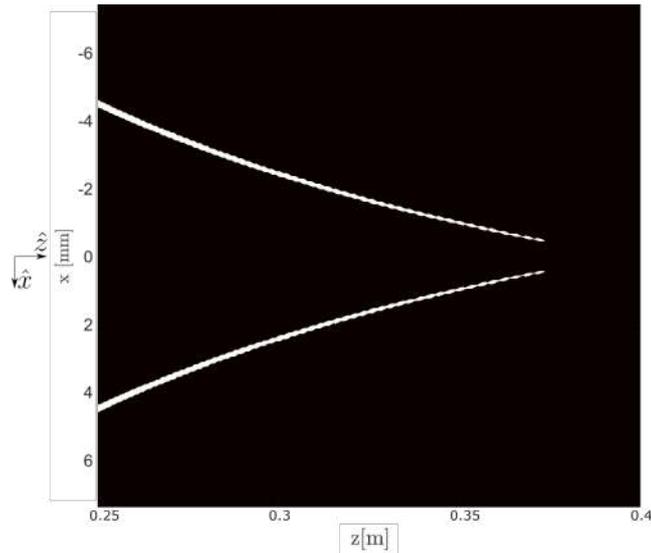
Para realizar la simulación computacional del experimento, se aprovecha que el fenómeno de difracción obedece al principio de Huygens-Fresnel, lo que es equivalente a la propiedad de composición de la transformada fraccionaria. [14] Por lo tanto, primero se difracta el holograma hasta una distancia equivalente a un orden fraccional  $z - z_o \equiv \alpha_1$ , se realiza la multiplicación óptica con la obstrucción, y posteriormente se realiza la propagación de la distancia restante correspondiente a otro orden fraccionario  $z_o \equiv \alpha_2$ . La obstrucción  $O$  sobre  $z_o$  se realizó para 6 posiciones, en las cuales pasará de no obstruir en absoluto la SL, a obstruirla por completo. Como medidas de error, se utilizaron el **RMSE** y el **PCM** (normalizado) descrito en la sección 5.3.1.2.

Para tener un control absoluto del experimento, inicialmente, se determinó la expresión que se ajusta a la envolvente de la SL, esto con el fin de determinar el ancho máximo de la SL en la profundidad  $z - z_o$  y así poder determinar con exactitud el ancho de la obstrucción necesaria, para las posiciones que se plantearon. En la figura 5.8a se observa la binarización de la SL para un holograma de un  $\delta_z$  calculado a una distancia  $z = 0,4m$ . En la figura 5.8b, se hace un filtrado de la SL binarizada en función de la cantidad de píxeles que están conectados entre sí con el fin

de obtener finalmente la expresión de ajuste de envolvente de la SL, debido al método utilizado para la eliminación de las zonas, se muestra un corte de la envolvente, este corte no significa que allí esté la obstrucción  $O$ .



(a)

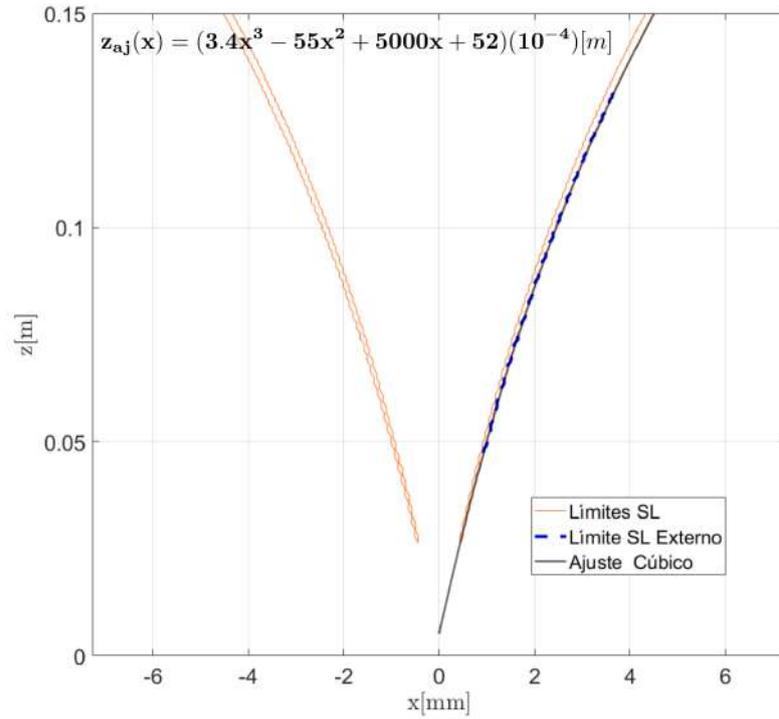


(b)

**Figura 5.8:** Procesamiento de la SL para obtener la curva de ajuste a su límite externo, a) SL binarizada, b) Eliminación de zonas no deseadas (pérdida de la parte final de la envolvente)

En la figura 5.9 se aprecia el ajuste de curva a la envolvente de la SL, en dicha figura se ha tomado el sistema de referencia tal y como se estableció en el experimento de la figura 5.7.

Con este ajuste se establece el ancho para las distancias de obstrucción  $z_{o1} = 0,1m$  y  $z_{o2} = 0,0549m$  y se procede con las respectivas propagaciones.



**Figura 5.9:** Obtención de la curva de ajuste para la SL de  $\delta_z$ , con  $z = 0,4m$

En la tabla 5.2 se aprecian los resultados para el experimento realizado a las distancias indicadas. De los valores obtenidos se concluye que tanto el **RMSE** como el **PMC** tienen una dependencia del porcentaje de la SL bloqueada y la posición  $z_{O_i}$  en donde esta se encuentre posicionada.

$$\begin{aligned} RMSE &\rightarrow RMSE(\%O, z_O), \\ PMC &\rightarrow PMC(\%O, z_O). \end{aligned} \quad (5.8)$$

$z = 0,4m$	$z_{O_1} = 0,1m$		$z_{O_2} = 0,0549m$	
% Bloqueado	RMSE ( $10^{-3}$ ) [m]	PMC [m]	RMSE ( $10^{-3}$ ) [m]	PMC [m]
0	1,84	0,99	1,84	0,99
20	1,84	0,81	1,84	0,57
40	1,87	0,17	1,88	0,14
60	2,22	0,014	2,17	0,018
80	3,88	$7,6 \cdot 10^{-6}$	3,25	$2,3 \cdot 10^{-4}$
100	7,48	$1,6 \cdot 10^{-11}$	5,45	$1 \cdot 10^{-9}$

**Tabla 5.2:** Medidas de la influencia de una obstrucción  $O$  a la SL del campo difractado para un holograma de un  $\delta_z(\vec{s})$  para  $z = 0,4m$ . La obstrucción  $O$  está posicionada en diferentes distancias  $z_{O_i}$  respecto al plano de reconstrucción calculada.

De la tabla 5.2 se observa que la detección del punto enfocado vía  $PMC$ , se ve altamente degradada debido a la obstrucción, disminuyendo el  $PMC$  a  $0,81[m]$ , para un porcentaje de obstrucción

del 20% en  $z_{o_1}$ , y a 0,57[m] para la obstrucción en  $z_{o_2}$ . Por otro lado, la medida del *RMSE* experimenta un aumento como era de esperarse, pero no se observa un comportamiento dramático tal y como lo hace el *PMC*. De lo anterior se puede concluir que, dependiendo del valor umbral del *PMC* para la detección de un punto, se pueden aceptar ciertos porcentajes de bloqueo a la *SL* para ciertas distancias  $z_{O_i}$ , por ejemplo, si se establece un umbral de detección del *PMC* del 80% en  $z_{o_1}$ , se tolerarán obstrucciones de la *SL* hasta del 20% de la *SL* en dicha profundidad.

**Nota:** La expresión de la envolvente, varía según la distancia de enfoque calculada para la distribución  $\delta_z$ . Por ende se debería realizar este análisis para todo el rango entre  $z_{muestra}$  y  $z_{min}$  mostrado en el montaje experimental de la figura 5.3, y así establecer los porcentajes de obstrucción aceptados para cada *SL* según el umbral de *PMC* que se establezca.

Siendo el objetivo buscar la información de la topografía de la superficie, se establece como punto de partida para la reconstrucción de alguna superficie, la situación en donde las obstrucciones de la *SL* para cada  $z$  cumplen con el porcentaje aceptado según el umbral que se establezca. Si en el proceso de detección de un  $\delta(\vec{s}_i)$  sobre  $S$ , no se obtiene un *PMC* para ningún  $z$  que supere el umbral, la primer causa a revisar será la obstrucción a las envolventes de las *SL* en las vecindades de  $\vec{s}_i$ . La situación ideal será tal que todas las *SL* en el rango  $[z_{min}, z_{muestra}]$  no presenten obstrucción alguna. La situación ideal se cumple entonces si se satisface la condición única y suficiente:

$$\forall \delta_z(\vec{s}), SL_z(\vec{s} - \vec{s}_i) > h(\vec{s}) \quad (5.9)$$

### 5.3.3 PROPUESTA Y ANÁLISIS DE ALGORITMOS PARA LA RECONSTRUCCIÓN (ÍTEM 5,6,7 DEL MÉTODO DESARROLLADO)

Una vez mostrados algunos de los artefactos que puede presentar un punto no focalizado debido al ED, descrito el método de detección a utilizar (*PMC*), y una de las fuentes de error (bloqueo de la *SL*), se proceden a analizar los diferentes algoritmos para realizar el posicionamiento y la detección de los puntos sobre la superficie, en el proceso de reconstrucción. Inicialmente se establece que de no llegarse a encontrar un *PCM* que supere el umbral establecido para un punto  $\delta(\vec{s} - \vec{s}_i)$  sobre  $S$ , se seleccionará como profundidad  $h(\vec{s} - \vec{s}_i)$ , la distancia  $z$  que halla generado el mayor **PCM** y el menor valor de error **RMSE**.

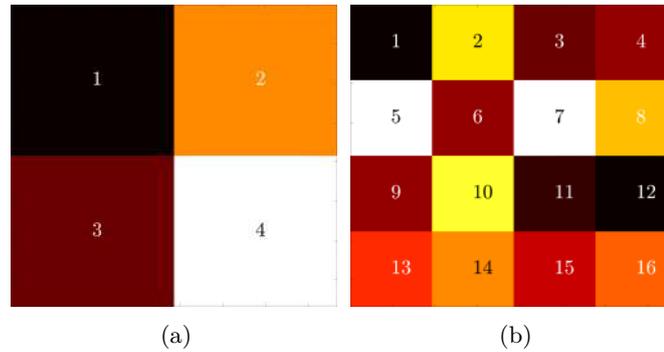
#### 5.3.3.1 Resolución Transversal

Para establecer la resolución transversal de las reconstrucciones, se establece una segmentación del dominio de reconstrucción en  $m$  secciones (figura 5.10). Debido a las dimensiones del modulador (utilizando una porción simétrica de  $N \times N$ ), la menor y la mayor resolución serán

$m_{min} = 1$  y  $m_{max} = N$  respectivamente. Debido a que  $N$  es un número entero, se debe cumplir que:

$$N \bmod m = 0, \quad (5.10)$$

donde  $\{\bmod\}$  es la operación modulo.



**Figura 5.10:** Segmentación de la superficie del dominio, a) 4 secciones, b) 16 secciones

A cada sección  $m$  se le asignará una profundidad  $h(\vec{s} - \vec{s}_i)$  correspondiente a la distancia  $z$ , donde algún  $\delta_z(\vec{s} - \vec{s}_i)$  en el centro de dicha sección, cumpla con el umbral de detección establecido. Según la segmentación del dominio, el porcentaje de avance ( $A_v$ ) en la reconstrucción está dado por el número de secciones con profundidades ya determinadas (secciones reconstruidas ( $s_{re}$ )), y por las secciones totales  $m$ :

$$A_v = \frac{s_{re}}{m} \times 100\%. \quad (5.11)$$

### 5.3.3.2 Resolución en profundidad (axial)

Se establece la resolución en profundidad como  $dz$ . El número de divisiones ( $\#D_z$ ) a lo largo del eje  $z$  para lograr abarcar la profundidad máxima del objeto  $h_{max}$  será:

$$\#D_z = \frac{h_{max}}{dz}. \quad (5.12)$$

### 5.3.3.3 Algoritmo de reconstrucción $AR_1$

Este algoritmo inicia con un holograma  $H_{\alpha_j}(\vec{r} - \vec{s}_i)$  cuya transformada fraccionaria de orden  $\alpha_j$  satisface que:

$$\delta_{\alpha_j}(\vec{s} - \vec{s}_i) = \mathcal{F}^{\alpha_j}\{H_{\alpha_j}(\vec{r} - \vec{s}_i)\}. \quad (5.13)$$

En este caso  $\vec{s}_i$  corresponde al centro de algún segmento  $m_i$  del dominio de reconstrucción, según la división descrita en 5.3.3.1. Sobre cada  $\vec{s}_i$  se realizan  $n_j$  exposiciones variando el orden

$\alpha_j$  del holograma  $H$  (recalculando el holograma), hasta obtener el orden, (equivalente a una profundidad) donde se presente el  $PMC$ , y asignar la profundidad tal que  $h(\vec{s} - \vec{s}_i) = z_j$ . Según la resolución en profundidad, se debe cumplir que  $1 \leq n_j \leq \#D_z$ . Una vez se determina la profundidad para la posición actual ( $h(\vec{s} - \vec{s}_i)$ ), se repite el proceso, para las  $m - 1$  secciones restantes.

En este proceso se tendrán que calcular y difractar  $n_j$  hologramas para cada segmento  $m_i$ . Para cada difracción se utiliza el algoritmo de la transformada rápida de Fourier Fraccionaria cuyo costo computacional es  $\mathcal{O}_{Fr} = (N^2 \log N)$ . En cada exposición se realiza el proceso de detección, lo que añade un costo computacional de  $\mathcal{O}_F$  para cada exposición según lo mostrado en el capítulo 5.3.1.2. Por lo tanto, el costo computacional de utilizar este algoritmo será:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(AC_1) &= \tau n_1 n_2 n_j \dots n_m \mathcal{O}_{Fr} \mathcal{O}_F, \\ 1 &\leq n_j \leq \#D_z, \\ 1 &\leq j \leq m, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde  $\tau$  es una constante temporal. Se utilizó el algoritmo de la transformada rápida de Fourier fraccionaria (FFrFT) (ver anexo A), en lugar del cálculo directo de la transformada de Fourier fraccionaria discreta (DFrFT) mostrada en el capítulo 4 (ecuación (4.24)), debido a la complejidad elevada de realizar este cálculo ( $\mathcal{O}_{fp}(N^3)$ ). [27–30] Cuando se implementa la difracción de forma óptica, no se realiza la simulación de la difracción, por lo que el costo computacional se reduce al mostrado en la ecuación (5.15).

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(AC_1) &= \tau n_1 n_2 n_j \dots n_m \mathcal{O}_F, \\ 1 &\leq n_j \leq \#D_z, \\ 1 &\leq j \leq m. \end{aligned} \quad (5.15)$$

#### 5.3.3.4 Algoritmo de reconstrucción $AR_2$

En este desarrollo utilizamos la propiedad de linealidad de la transformada fraccionaria. Utilizando la expresión (5.13) y la propiedad de linealidad, es posible construir un holograma  $HM$  que contenga  $i$  hologramas  $H_{\alpha_j}(\vec{r} - \vec{s}_i)$ , tal que al realizar la propagación de  $HM$  un su orden  $\alpha_j$ , se obtengan  $i$  distribuciones  $\delta$  sobre la superficie de reconstrucción, considerando que esta es plana, a una distancia  $z_j$ , situados en las posiciones  $\vec{s}_i$ , esto es:

$$\delta_{\alpha_j}(\vec{s} - \vec{s}_0) + \dots + \delta_{\alpha_j}(\vec{s} - \vec{s}_i) = \mathcal{F}^{\alpha_j} \{H_{\alpha_j}(\vec{r} - \vec{s}_0) + \dots + H_{\alpha_j}(\vec{r} - \vec{s}_i)\} = \mathcal{F}^{\alpha_j} \{HM\}. \quad (5.16)$$

Asignando  $i = m$ , número de hologramas igual al número de secciones del dominio de reconstrucción, y definiendo  $\vec{s}_i$  justo en el centro de cada una de las  $m$  secciones, se tendrán que realizar únicamente  $\#D_z$  exposiciones en total para abarcar todo el rango  $[z_{min}, z_{muestra}]$  de

la superficie a reconstruir. De esta manera, la complejidad del proceso de detección estará en función del número de exposiciones:

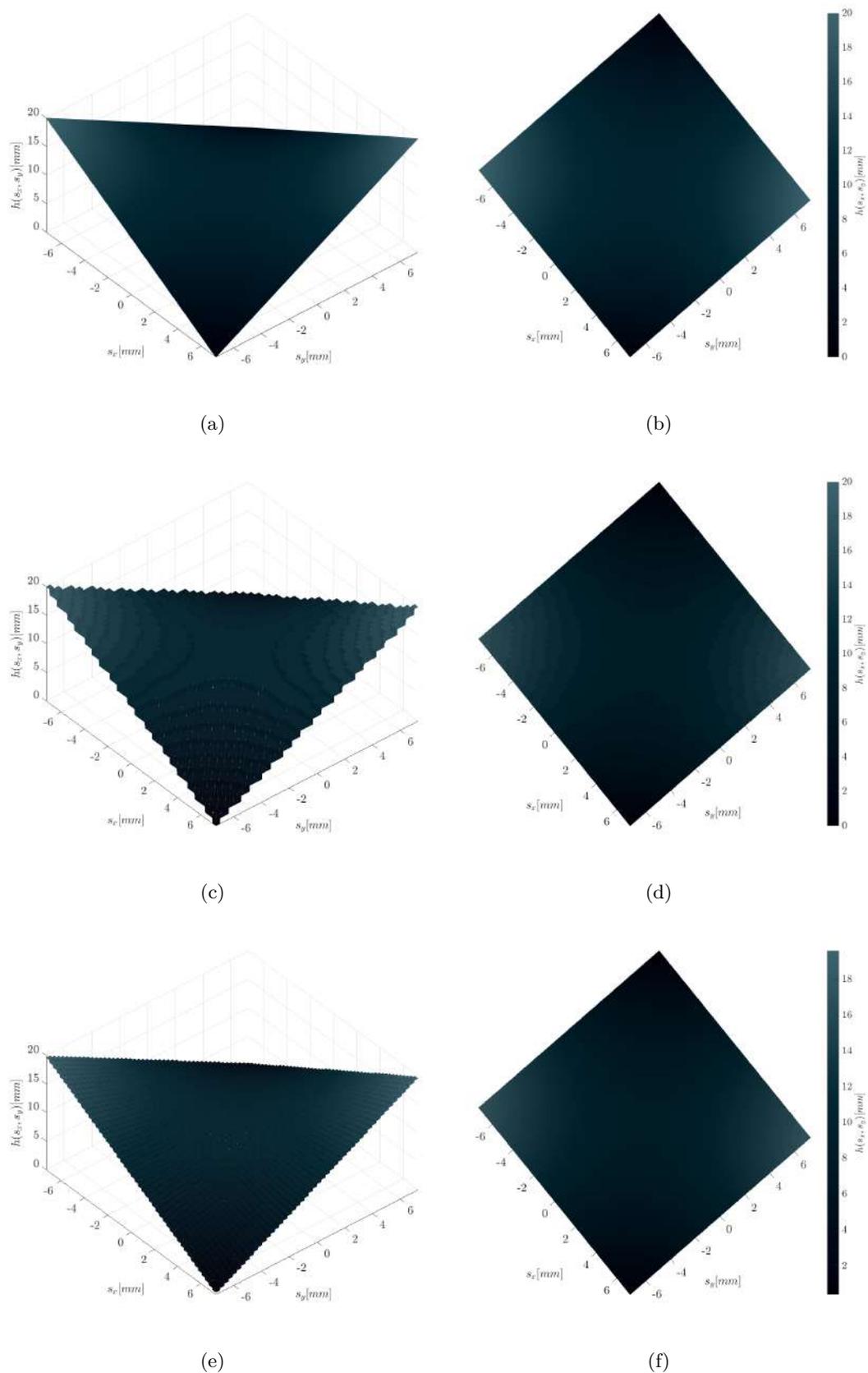
$$\mathcal{O}(C_2) = \tau \#D_z \mathcal{O}_F, \quad (5.17)$$

siendo  $\tau$  una constante temporal. La ecuación (5.17) muestra una reducción del costo computacional en un factor  $n_1 n_2 \dots n_p$  (este factor oscila entre  $n_p$  (mínimo) y  $n_p^{\#D_z}$ ), reducción bastante considerable. El algoritmo  $AR_2$  será el utilizado para el proceso de reconstrucción. Debido a la naturaleza curva de las superficies a reconstruir, se debe plantear un método de cálculo de difracción sobre superficies curvas. Este método se expone en la sección 5.4

#### 5.4 ALGORITMO DE CÁLCULO DE DIFRACCIÓN SOBRE SUPERFICIES CURVAS

Según la segmentación del dominio en  $m$  secciones del capítulo 5.3.3.1 y la resolución en profundidad del capítulo 5.3.3.2, se tendrá una aproximación a alguna superficie curva, dependiendo del número  $m$  de secciones y del número de planos  $\#D_z$  seleccionados. En las figuras 5.11a y 5.11b, se muestra una superficie de prueba sobre el porta muestras, modelada por la función  $f(x, y) = \sin(\mathbf{x}) \sin(\mathbf{y})$ , con  $x$  e  $y$ , en el intervalo  $[-e, e]$  donde  $e$  es un número real. En las figuras 5.11c y 5.11d, se muestra una aproximación a la superficie de prueba, utilizando  $m = 48^2$  y  $\#D_z = 21$  ( $dz = 1mm$ ), el valor del error RMSE de esta aproximación es de  $3,01 \cdot 10^{-4}[m]$ . En las figuras 5.11e y 5.11f, se muestra una aproximación a la superficie de prueba, utilizando  $m = 48^2$  y  $\#D_z = 201$  ( $dz = 0,1mm$ ), el valor del error RMSE de esta aproximación es de  $1,02 \cdot 10^{-4}[m]$ . El error disminuye una tercera parte al aumentar la resolución en profundidad de  $1mm$  a  $0,1mm$ . Utilizando un número de divisiones  $m = 384^2$ , y una resolución en profundidad  $\#D_z = 201$  ( $dz = 0,1mm$ ), el error RMSE de la aproximación a la superficie, disminuye a  $3,25 \cdot 10^{-5}[m]$ , ¡un orden de magnitud!; el costo computacional se mantendrá igual, según la expresión 5.17. Si se utiliza el mismo número de divisiones  $m = 384^2$ , pero una resolución en profundidad  $\#D_z = 2001$  ( $dz = 0,01mm$ ), el error RMSE de la aproximación disminuye a  $1,53 \cdot 10^{-5}[m]$ , manteniéndose en el mismo orden de magnitud, el costo computacional aumentará considerablemente según la expresión 5.17. Con esto se concluye que se debe hacer una selección acertada en la resolución (axial y transversal), tal que el error tolerado en la aproximación a la superficie, no aumente excesivamente el costo computacional como se mostró en este análisis.

El método de reconstrucción consiste en difractar  $m$  veces algún holograma  $HK$ . Cada vez que se propaga  $HK$ , su distancia de propagación  $z_u$  (equivalente a un orden  $\alpha_u$ ) corresponderá a la diferencia entre la distancia del modulador al porta muestra, y la profundidad en el centro de alguna sección  $u$  de la superficie aproximada. En cada propagación  $u$ , todos los píxeles que pertenecen a dicha sección en el plano de reconstrucción ( $\vec{s}_u$ ), se copian sobre la misma posición en una matriz vacía  $R$ , la cual será la matriz de proyección en donde se guardará el patrón de



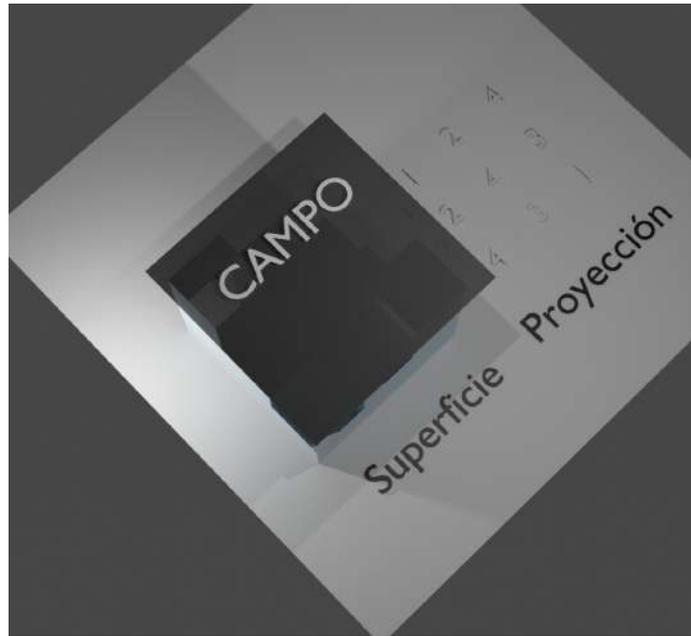
**Figura 5.11:** Aproximación de superficie tras segmentación en  $m$  secciones y selección de resolución axial. Superficie de prueba a) 3D, b) 2D. Aproximación con  $m = 48^2$ ,  $\#D_z = 21$  ( $RMSE = 3,01 \cdot 10^{-4}[m]$ ) c) 3D, d) 2D. Aproximación con  $m = 48^2$ ,  $\#D_z = 201$  ( $RMSE = 1,02 \cdot 10^{-4}[m]$ ) e) 3D, f) 2D

difracción visto desde la dirección de propagación en el plano del sensor. Esto se expresa como:

$$R(\vec{s}_u) = \mathcal{F}^{\alpha_u} \{HK\}(\vec{s}_u), \quad (5.18)$$

$$u = 1, 2, 3, \dots, m.$$

En la figura 5.12 se muestra el campo calculado (en color negro) en algún plano justo antes de encontrarse alguna de las caras de los cubos de la aproximación de la superficie.



**Figura 5.12:** Campo calculado en algún plano antes de observarse sobre la superficie

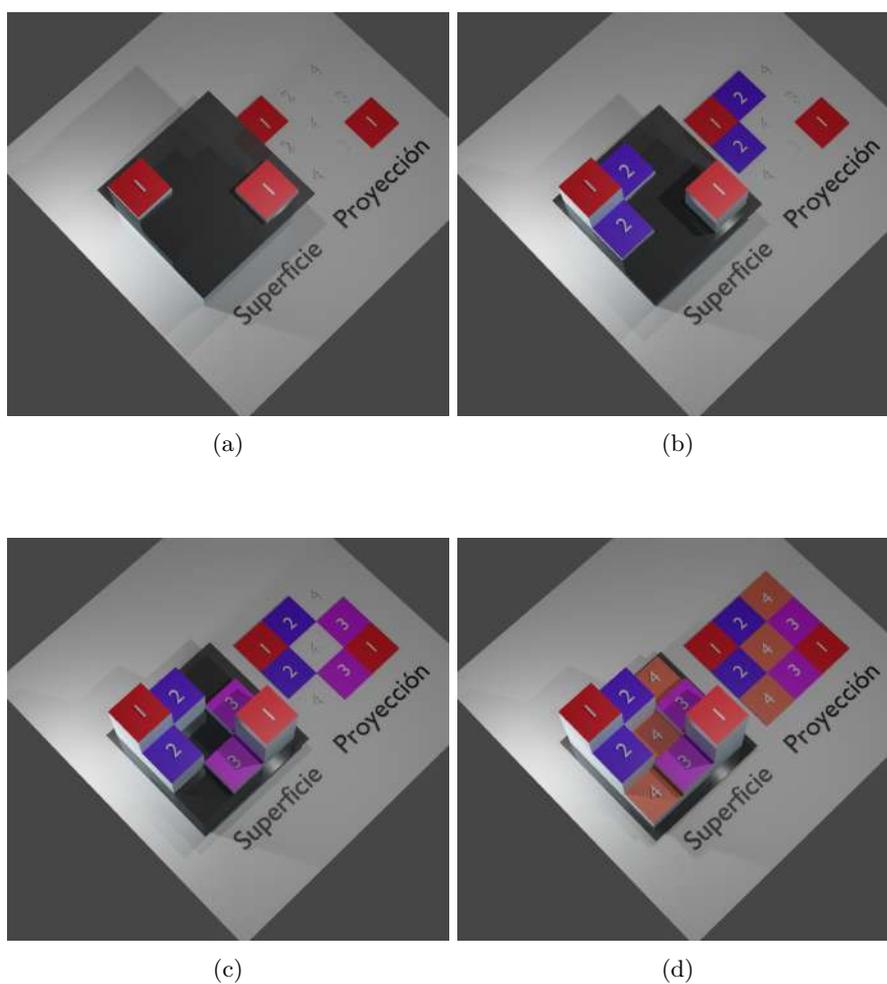
Se necesitarán entonces,  $m$  propagaciones para calcular el patrón total y llenar por completo la matriz de proyección  $R$ . El costo computacional dependerá de la función de propagación que se utilice, en este caso, utilizando la transformada de Fourier fraccionaria rápida (ver anexo A), se tiene que:

$$\mathcal{O}_{rs} = \tau m \mathcal{O}_{Fr}, \quad (5.19)$$

donde  $\tau$  es una constante de tiempo. Del análisis anterior se puede presentar el caso en el que dos o más secciones  $u$  posean la misma distancia de propagación, por lo que se podría reducir el costo computacional, si esto se tiene en cuenta a la hora de realizar las respectivas propagaciones. En dicho caso el costo computacional queda en función del número de distancias diferentes  $\#z_{dif}$  en todas las superficies de  $m$ . Naturalmente, si no hay ninguna sección  $u$  que comparta la distancia de propagación con otra sección  $k \neq u$  de  $S$ , entonces se obtiene el caso del costo computacional anterior (ecuación (5.19)), con  $\#z_{dif} = m$ .

$$\mathcal{O}_{rs} = \tau \#z_{dif} \mathcal{O}_{Fr}. \quad (5.20)$$

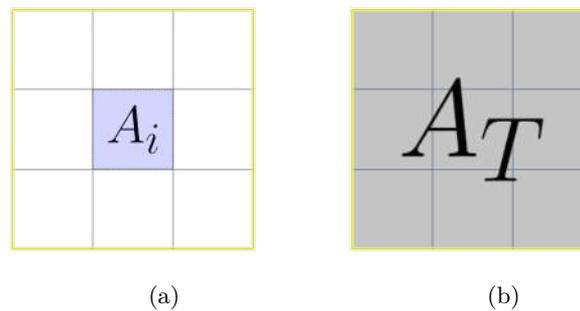
Un ejemplo ilustrativo de lo expresado anteriormente se muestra en la figura 5.13. En la figura 5.13a, se observa que 2 de las superficies (color rojo y etiqueta 1) comparten la misma distancia de propagación. En la figura 5.13b se tienen otras dos superficies (color violeta, etiqueta 2) que comparten otra distancia de propagación. Similar ocurre en las figuras 5.13c y 5.13d, donde se comparten 2 (color rosa y etiqueta 3) y 3 (color salmón y etiqueta 4) superficies respectivamente. Para este ejemplo, note que  $m = 9$ , pero  $\#z_{dif} = 4$ , por lo que el costo computacional se reduce casi a la mitad. Este método de reducción del costo computacional se hace indispensable cuando  $m$  tiende a  $N^2$ , logrando reducir drásticamente el tiempo de cálculo del patrón de difracción (matriz de proyección R).



**Figura 5.13:** Secuencia de obtención del patrón de difracción sobre una superficie curva aproximada mediante cubos. Patrones de difracción sobre secciones a alturas iguales representadas por color: a) rojo, b) violeta, c) rosa, d) salmón

#### 5.4.1 LÍMITES AL ALGORITMO DE CÁLCULO DE DIFRACCIÓN SOBRE SUPERFICIES CURVAS

Del análisis en el capítulo 5.3.2, se sabe que la obstrucción a la sección longitudinal puede alterar el patrón de difracción sobre el plano de reconstrucción, dependiendo de su ubicación (eje de propagación y eje transversal). Debido a la naturaleza del método del capítulo (5.4), estas obstrucciones pueden o no estar presentes si se tienen algunas consideraciones. Es por esto que se hace necesario realizar un análisis de las limitaciones del algoritmo. Según el capítulo 5.3.3.1, se tiene el área total  $A_T$  dividida en  $m$  secciones, todas las secciones al ser simétricas, comparten un área  $A_i$  (ver figura 5.14).

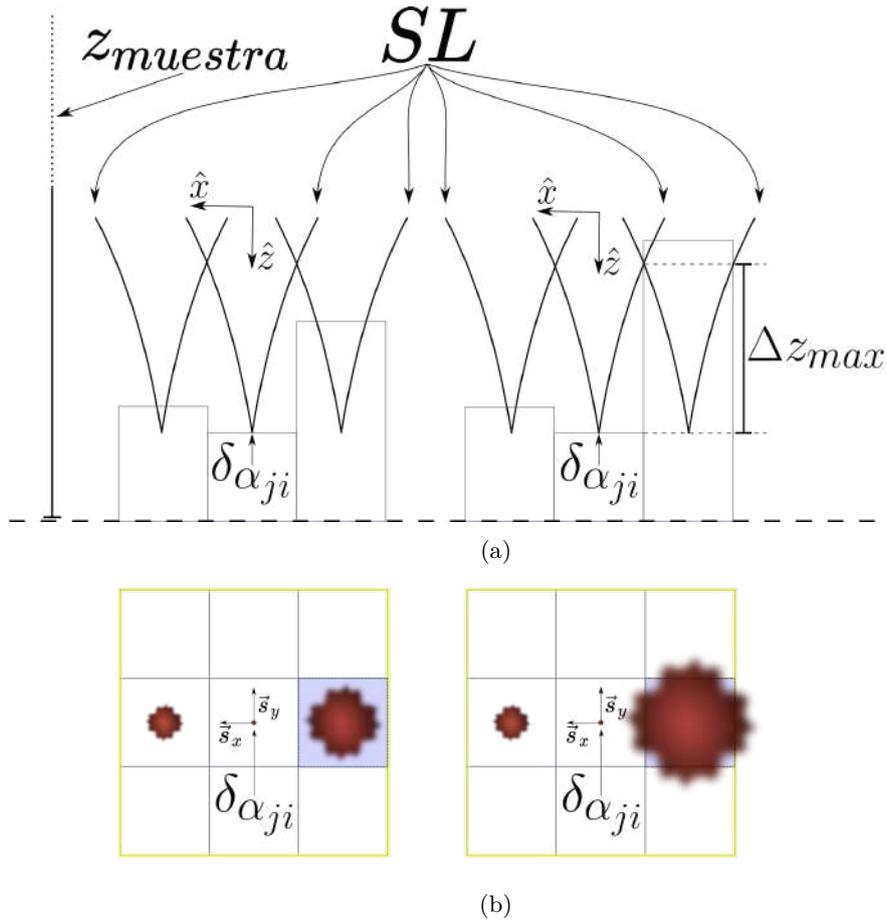


**Figura 5.14:** Áreas a analizar de imagen segmentada a) Área de la sección  $i$ , b) Área total

Del algoritmo  $AR_2$  (capítulo 5.3.3.4) se tendrán múltiples  $SL$  iguales pero desplazadas axialmente, dependiendo del número de secciones  $m$  (ver figura 5.15).

Cada una de estas  $SL_i$ , se configura hasta converger en una distribución  $\delta$  en el centro de alguna sección  $i$  para un orden  $\alpha_j$ . Si la profundidad sobre alguna sección  $i$ , es diferente al orden equivalente  $\alpha_j$ , naturalmente la  $SL_i$ , al no corresponder al orden  $\alpha_j$  del holograma calculado  $HM_j$ , no presentará la distribución  $\delta$  sobre la superficie en cuestión. Se debe resaltar que el no obtenerse la distribución  $\delta$  sobre la superficie debido a la diferencia de profundidades  $\Delta z$  entre las superficies de cálculo y reconstrucción, no representa problema alguno (este ED es el centro del método de reconstrucción de superficies).

En la figura 5.15a (derecha) se aprecia que existe la posibilidad de que se presente una obstrucción a la  $SL$  de alguna distribución  $\delta_{ij}$ , en la sección contigua a esta. De análisis anteriores se sabe que, se deberían realizar operaciones extras (multiplicación óptica y propagación) para tener en cuenta esta obstrucción, lo que aumentaría el coste computacional, y la propagación de errores en los cálculos. En la figura 5.15b se observa lo dicho, pero visto desde la perspectiva del sensor, se aprecia que una de las secciones transversales, excede el área de la sección  $u$  sobre la que está situada, lo que implícitamente indica que el cubo bloqueará partes de las  $SL$ 's de sus vecindades. Para establecer un rango de bloqueo permitido (equivalente al porcentaje de obstrucción de la  $SL$  del capítulo 5.3.2), se plantea obtener un factor de llenado  $F_A$ , el cual indicará qué porcentaje de intensidad total de una  $SL$  obtenida tras la difracción de un hologra-



**Figura 5.15:** Análisis de obstrucción de múltiples SL de  $\delta_{\alpha_j}$ . a) Vista Longitudinal, b) Vista transversal

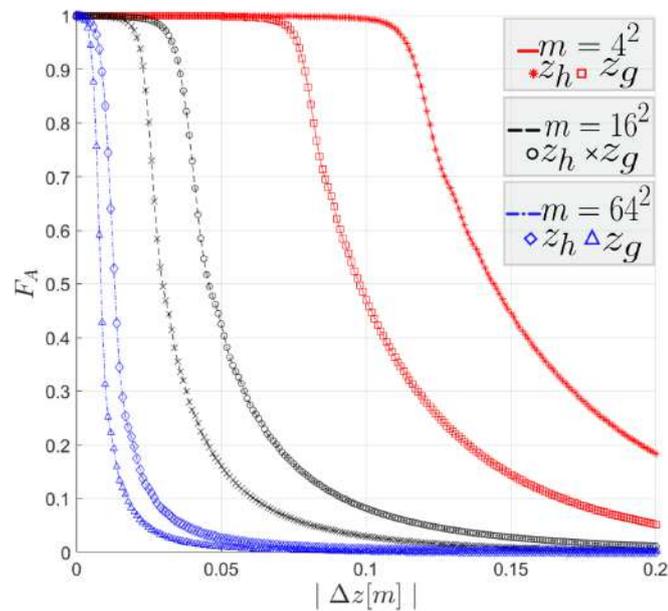
ma  $H_{\alpha_j}$  se encuentra dentro de los límites de la sección  $u$  para la cual fue calculada tras variar el orden de propagación, es decir, variar la distancia de propagación respecto a la distancia de cálculo del  $\delta$ :

$$F_A = \frac{\int_u R(\vec{s}_u) d\vec{s}_u}{\int_{A_T} R(\vec{s}) d\vec{s}} = \frac{A_i}{A_T}. \quad (5.21)$$

De esta manera se obtendrá la forma de  $F_A$  en función de la variación del orden de la reconstrucción, equivalente a un cambio  $\Delta z$ . A partir de allí se puede establecer el rango  $\Delta z_{max}$  aceptado según algún valor  $F_A$  que se defina.

PARÁMETRO	VALOR
Longitud de onda ( $\lambda$ )	633nm
Dim modulador	$N \times N$ , $N = 768$
Dim pixel modulador	$n_p \times n_p$ , $n_p = 19\mu m$
Dim sensor	Dim modulador
Dim pixel sensor	Dim pixel modulador
Modulación	$2\pi$
$ED_1 = z_h$	0.5m
$ED_2 = z_g$	0.4m
$dz$ (Intervalo en $z$ )	1mm
Resoluciones axiales	$m = 4^2$ , $m = 16^2$ , $m = 64^2$

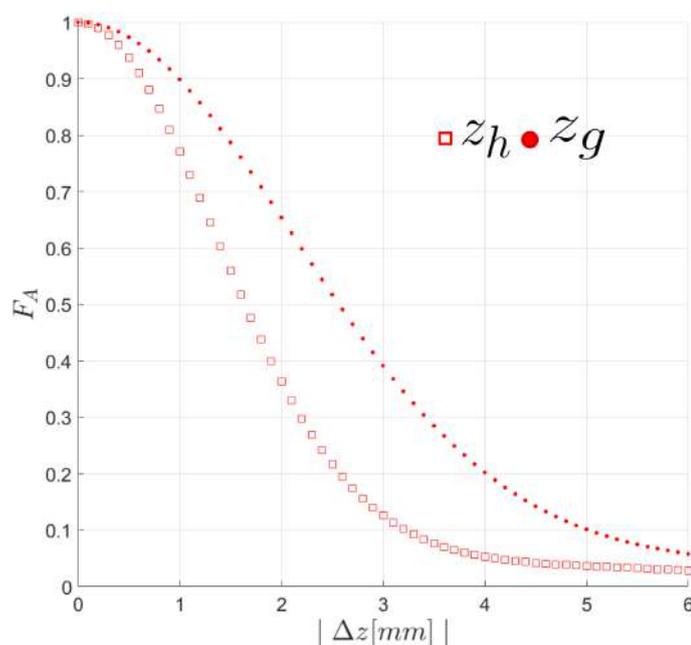
**Tabla 5.3:** Parámetros utilizados para la simulación de  $F_A$  vs  $\Delta z$ . Dimensiones (Dim).



**Figura 5.16:** Curvas  $F_A$  vs  $\Delta z$  para diferentes distancias de ED.  $ED_1 = z_h$ ,  $ED_2 = z_g$

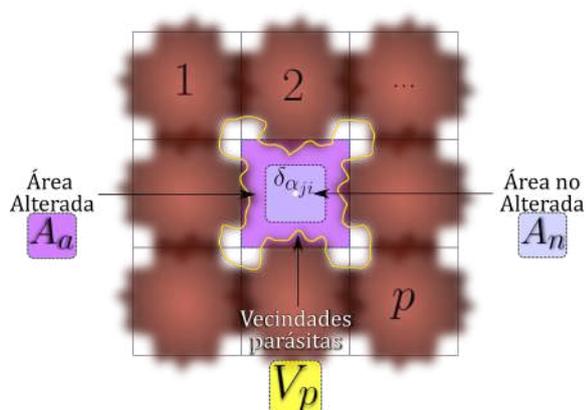
En la figura 5.16 se muestra el resultado de la simulación, utilizando los parámetros de la tabla 5.3. Se aprecia que el factor de llenado tiene una dependencia inversamente proporcional al número  $m$  de secciones, esto naturalmente debido a que al aumentar el número  $m$ , los límites de cada sección  $u$  disminuyen, haciendo que sea más la parte del campo que termina fuera de esta tras una variación  $\Delta z$  entre los planos de reconstrucción y planos de ED. Por lo tanto,  $\Delta z_{max}$  dependerá del número de secciones que se seleccionen en la resolución transversal. En la sección 5.6 se obtuvo que una obstrucción del 20% de la  $SL$ , genera PMC's lo suficientemente altos como para cumplir el criterio de detección para un punto. Tomando como punto de partida ese valor, se establece que un factor  $F_A \geq 0,8$  permitiría obtener reconstrucciones sobre superficies curvas, con un grado de error bajo (del orden del error de aproximación, según la resolución transversal seleccionada), esto debido a la poca obstrucción de las  $SL$ 's. Para obtener

un criterio para un  $m$  grande ( $m = N^2$ ), se procede a realizar el mismo experimento descrito, con los mismos parámetros de la tabla 5.3, intercambiando  $dz = 1mm$ , por  $dz = 0,1mm$ .



**Figura 5.17:**  $F_A$  vs  $\Delta z$  para diferentes distancias de ED.  $ED_1 = z_h$ ,  $ED_2 = z_g$ . Secciones  $m = N^2$

En la figura 5.17 se aprecia que el  $\Delta z_{max}$  oscila entre  $1mm$  y  $2mm$  para las distancias de cálculo  $z_g$  y  $z_h$ . Garantizando esta diferencia de altura máxima entre dos secciones contiguas, se pueden obtener reconstrucciones bastante aproximadas (del orden de la aproximación a la superficie, según la resolución transversal seleccionada). En la figura 5.18 se aprecia una situación en donde las alturas de las secciones en las vecindades de un  $\delta_{\alpha_{ji}}$  perfectamente enfocado, presentan una  $F_A \neq 1$ , pero según lo descrito, estas vecindades parásitas no afectarán significativamente la detección del  $\delta$  si están dentro del rango de obstrucción establecido.

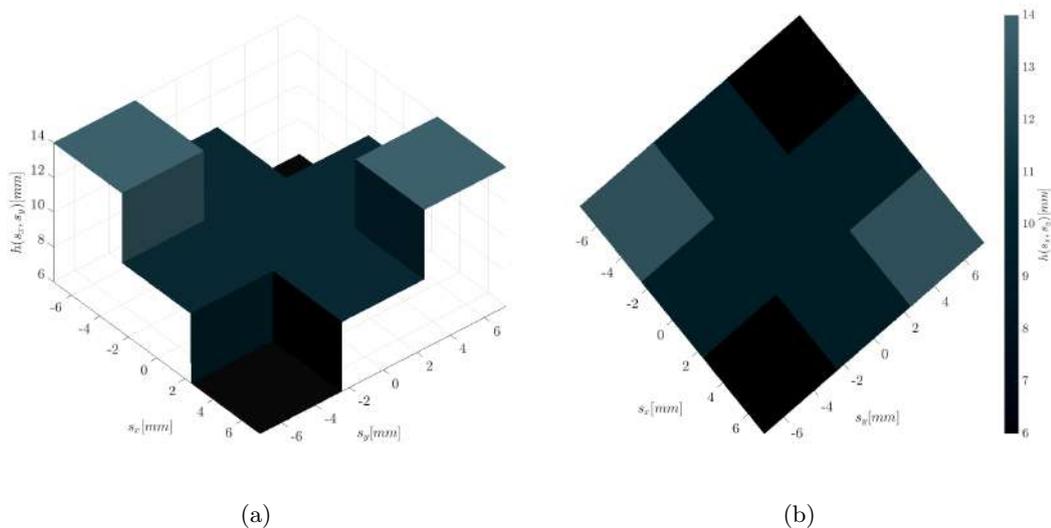


**Figura 5.18:** Análisis de vecindades parásitas

Tras estos análisis, el método de reconstrucción sobre superficies curvas, ya puede ser implementado dentro del algoritmo de reconstrucción  $AR_2$ ; añadiendo el costo computacional  $\mathcal{O}_{rs}$  al costo computacional  $\mathcal{O}(C2)$  del algoritmo  $AR_2$  de reconstrucción.

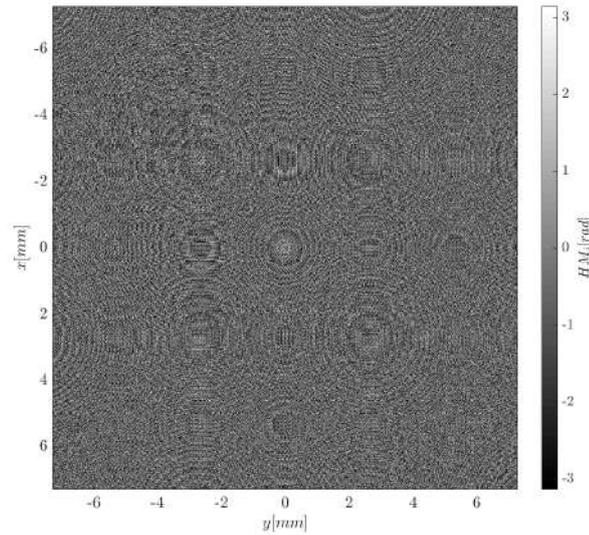
### 5.5 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DEL PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN DE UNA SUPERFICIE CURVA

A continuación se muestra la simulación de las etapas del proceso de reconstrucción para una superficie de prueba cuya función es  $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$  para  $x$  e  $y$  pertenecientes a un dominio entre  $[-e,e]$ , donde  $e$  es un número real (figura 5.11a). Inicialmente se modifica el rango de  $f$  para que tenga valores entre 0 y 1. Para fijar el  $h_{max}$  basta con multiplicar la función  $f$  modificada, por el valor que se desee que tenga  $h_{max}$ . Posteriormente, se establece la resolución transversal (número  $m$  de secciones), y la resolución axial ( $\#D_z$ ), en este caso  $m = 3^2$  (figura 5.19), esto da un valor de error RMSE de  $1,6 \cdot 10^{-3}[m]$  entre la superficie aproximada y la original.



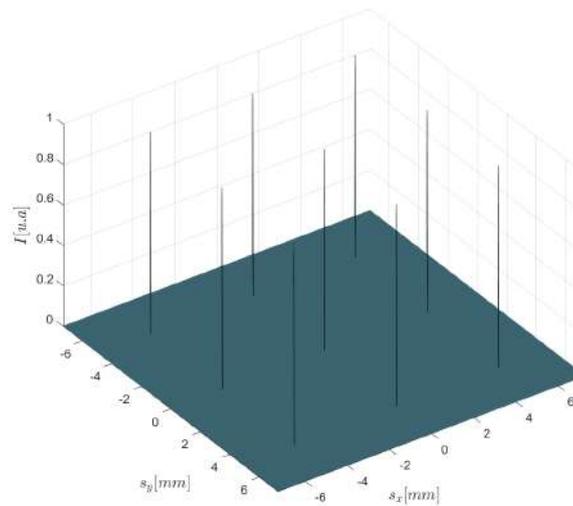
**Figura 5.19:** Superficie de prueba aproximada,  $m = 3^2$ ,  $\#D_z = 21$  ( $RMSE = 1,6 \cdot 10^{-3}[m]$ )

Una vez establecida la resolución transversal, se crea el holograma requerido para el algoritmo  $AR_2$ , en este caso  $m = 3^2$  requiere de la superposición de 9 hologramas que generen una distribución  $\delta$  cuando se reconstruyan a una distancia  $z$  específica. El holograma obtenido se aprecia en la figura 5.20.

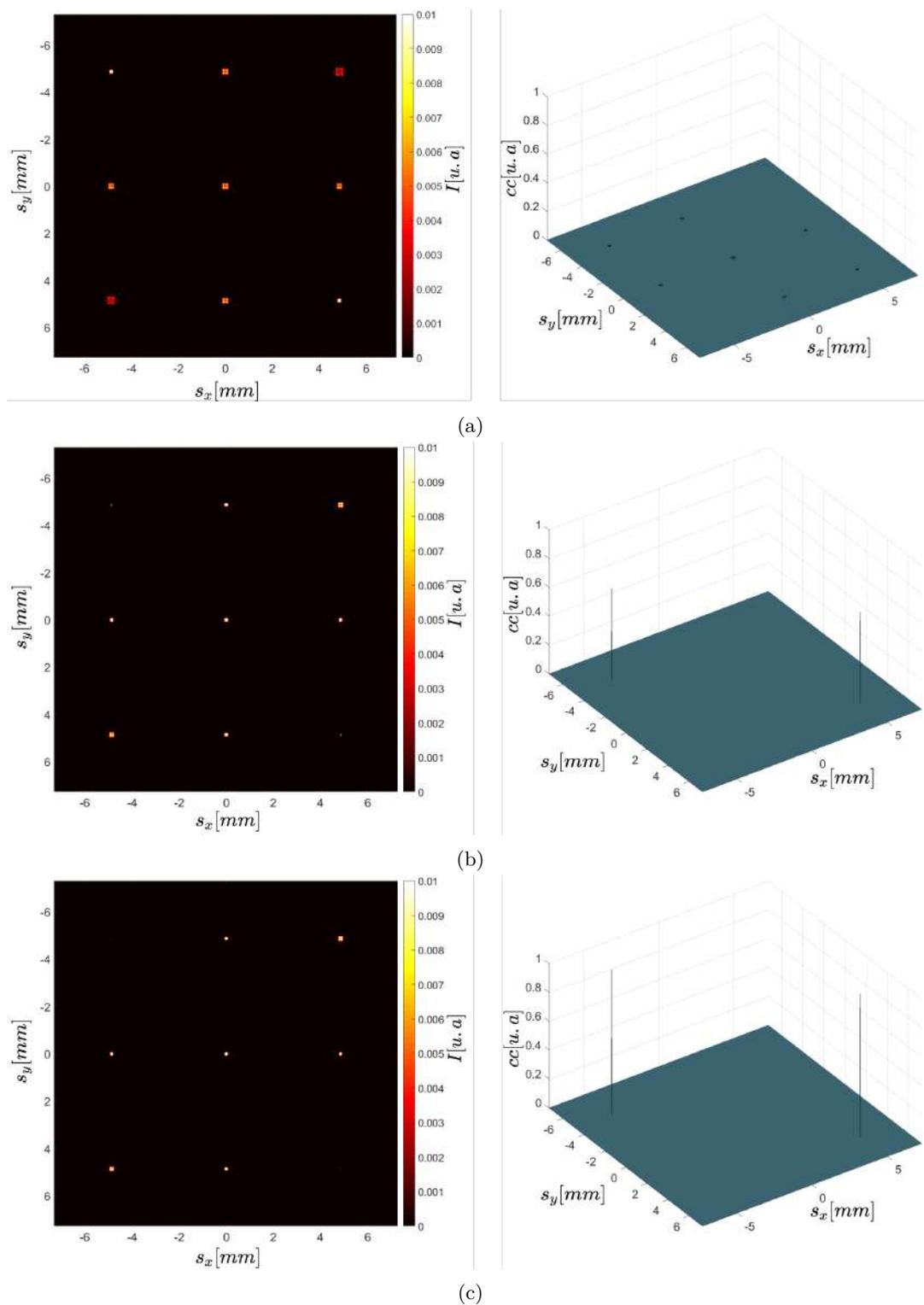


**Figura 5.20:** Holograma de solo fase  $HM_j$

Cuando se reconstruye el holograma justo a la distancia para cual fue calculado, se aprecia el patrón de la figura 5.21, donde se observan las 9 distribuciones  $\delta$  centradas en sus respectivas secciones. La resolución en profundidad seleccionada fue de  $dz = 1mm$  ( $\#D_z$ )21). Las distancias de propagación tal y como se indica en el montaje experimental, se calculan realizando la operación  $z = z_{muestra} - h$ , donde  $h$  corresponde al mapa de alturas de la superficie. En este caso se tienen 3 distancias de propagación que arrojarán puntos focalizados para hologramas calculados con dichas distancias ( $z_1 = 480mm$ ,  $z_2 = 486mm$  y  $z_3 = 494mm$ ).



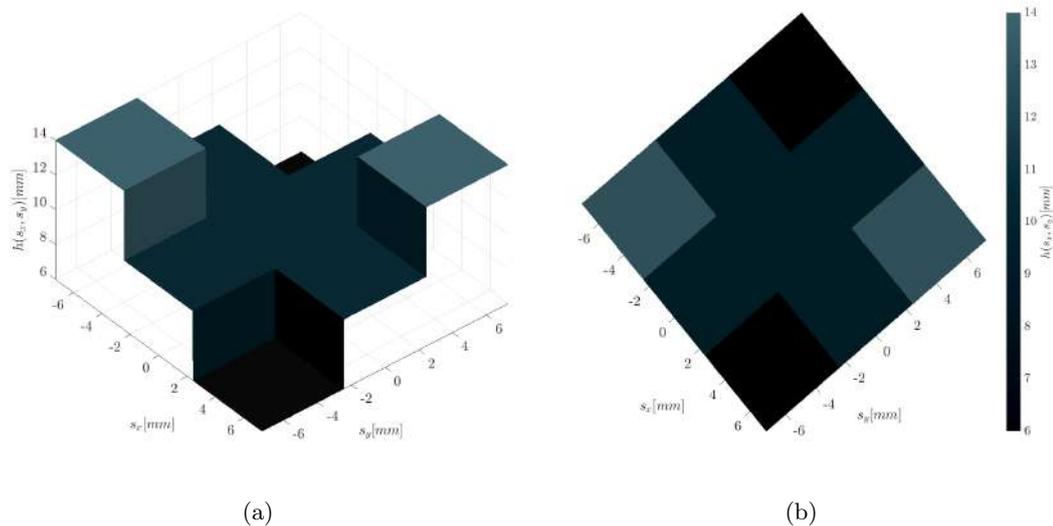
**Figura 5.21:** Reconstrucción del holograma de la figura 5.20 sobre su plano de cálculo



**Figura 5.22:** Patrón de difracción para diferentes  $HM_j$  (izquierda) y detección de puntos focalizados (correlación) en dicho patrón (derecha). a)  $\alpha_j \equiv z = 480mm$  b)  $\alpha_j \equiv z = 485mm$  c)  $\alpha_{ji} \equiv z = 486mm$

Las  $\Delta z$  entre las secciones es de  $\Delta z = 4mm$ , según la figura 5.16, se aprecia que para un  $m = 4^2$ , este valor de  $\Delta z$  arroja un  $F_A \approx 1$ , por lo que extrapolando a  $m = 3^2$  según el comportamiento de las curvas, se concluye que este valor de  $\Delta z$  no tendrá repercusiones en las  $SL's$  cuando se difracte el holograma. En la figura 5.22 se aprecia la matriz de proyección  $R$  para diferentes  $HM_j$  y los PCM tras el proceso de detección.

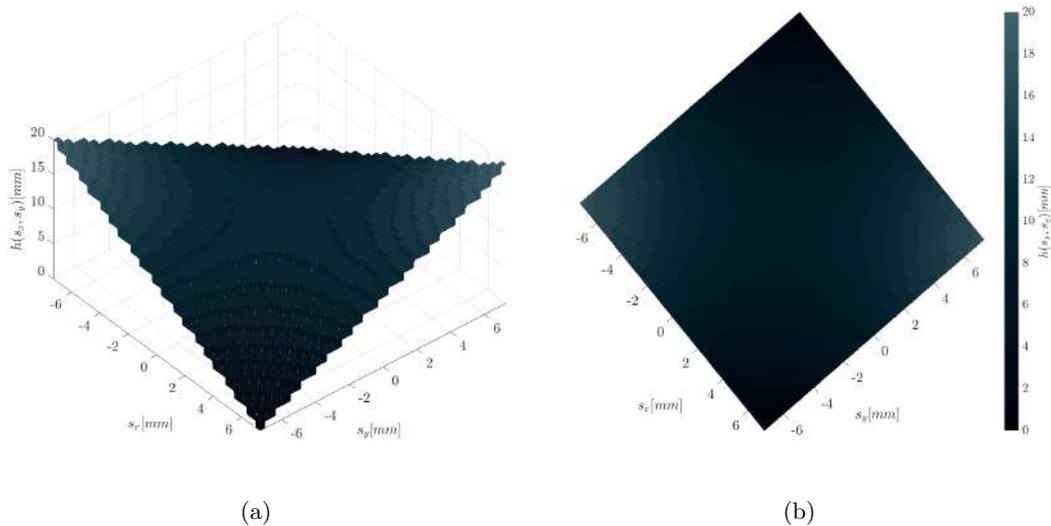
Note en la figura 5.22a cómo los PMC tienen valores cercanos a cero. A medida que la distancia de cálculo del holograma se va acercando a alguno de los valores de propagación establecidos, el PMC va creciendo tal y como se observa en las figuras 5.22b y 5.22c. De allí se seleccionan los PMC para cada una de las distancias de propagación, se guardan estos valores en una matriz en sus respectivas posiciones y se obtiene el mapa de alturas de la superficie. En la figura 5.23 se observa el resultado 3D del proceso de reconstrucción.



**Figura 5.23:** Superficie reconstruida,  $m = 3^2$ ,  $\#D_z = 21$  ( $RMSE = 1,5 \cdot 10^{-3}[m]$ )

Utilizando la misma función  $f$  de prueba, se procede a visualizar el resultado para un  $m = 48^2$  y  $\#D_z = 21$ . Esta aproximación arroja un error RMSE de  $3,5 \cdot 10^{-4}[m]$

En la figura 5.24 se aprecia el modelo obtenido tras la obtención del mapa de alturas de la superficie  $f$  aproximada con  $m = 48^2$  secciones y  $\#D_z = 21$ . El tiempo de cálculo completo para esta resolución (axial y transversal) fué de 47,48 minutos, utilizando una máquina con las siguientes características: memoria RAM 4Gb, procesador Intel core I5-3470, SO Windows 64bits, Matlab R2017b.



**Figura 5.24:** Superficie reconstruida,  $m = 48^2$ ,  $\#D_z = 21$  ( $RMSE = 3,5 \cdot 10^{-4}[m]$ )

## 5.6 MÉTODO DE RECONSTRUCCIÓN UTILIZANDO UNA ÚNICA EXPOSICIÓN Y UNA RED NEURONAL GENERATIVA ADVERSARIAL CONDICIONADA C’GAN

De secciones anteriores, se discutió la propiedad de linealidad de la transformada Fraccionaria, y el modelo de difracción con el que se está trabajando, donde se construyeron hologramas  $HM_j$ , tal que permitían reconstruir distribuciones  $\delta_j$  sobre su plano de reconstrucción. Los autores de las referencia [26] han planteado generar hologramas de objetos binarios, tras la superposición de múltiples hologramas de distribuciones  $\delta$  correspondiente a cada píxel no nulo de la imagen en cuestión; de esta manera crean hologramas de solo fase para patrones complejos descompuestos en múltiples puntos. En la figura 5.25 se aprecia un patrón binario, y su respectivo holograma generado a partir de la superposición de múltiples hologramas de distribuciones  $\delta$ .

El patrón de la figura 5.25a, fue seleccionado de tal forma que fuera simétrico en el eje  $y$ , esto con el fin de disminuir el coste computacional para efectos de optimizar las pruebas.

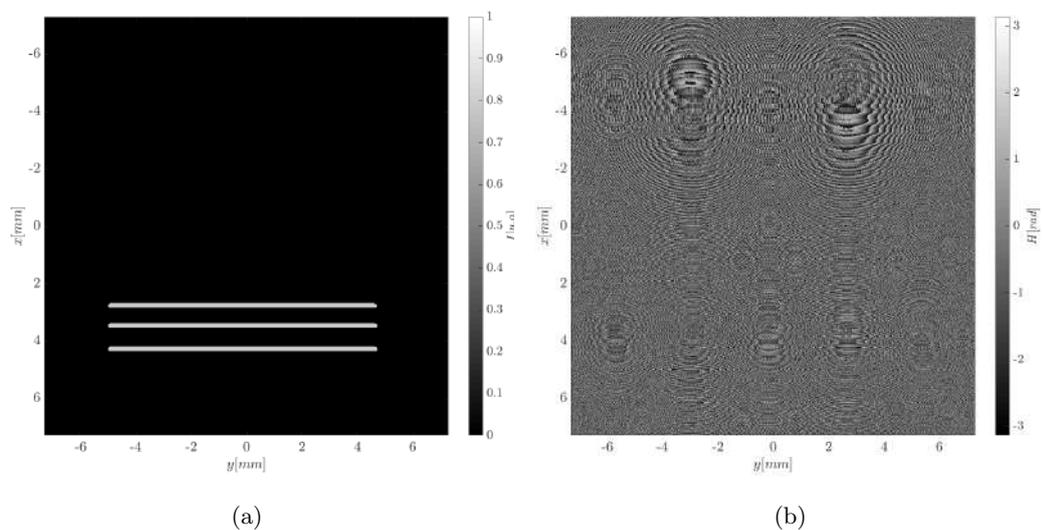
Utilizando el método de cálculo de difracción sobre superficies curvas, se realizó el cálculo de la difracción del holograma de la figura 5.25 sobre la superficie de la figura 5.26. En este caso la superficie en cuestión es modelada por la expresión:

$$f(s_x) = \sin\left(\frac{2\pi}{n_p N} s_x\right) \quad (5.22)$$

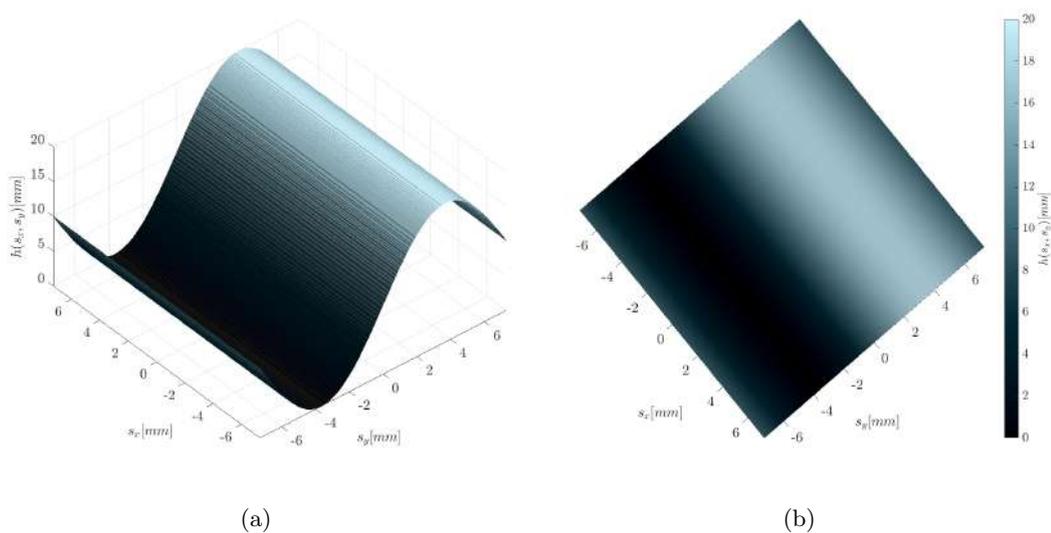
Para  $s_x$  que pertenece a un dominio entre  $[-e, e]$ , donde  $e$  es un número real. Los valores  $n_p$  y  $N$  fueron tomados de la tabla 5.3

Tras implementar el método de reconstrucción, se obtiene el patrón de difracción sobre la superficie curva que se muestra en la figura 5.27.

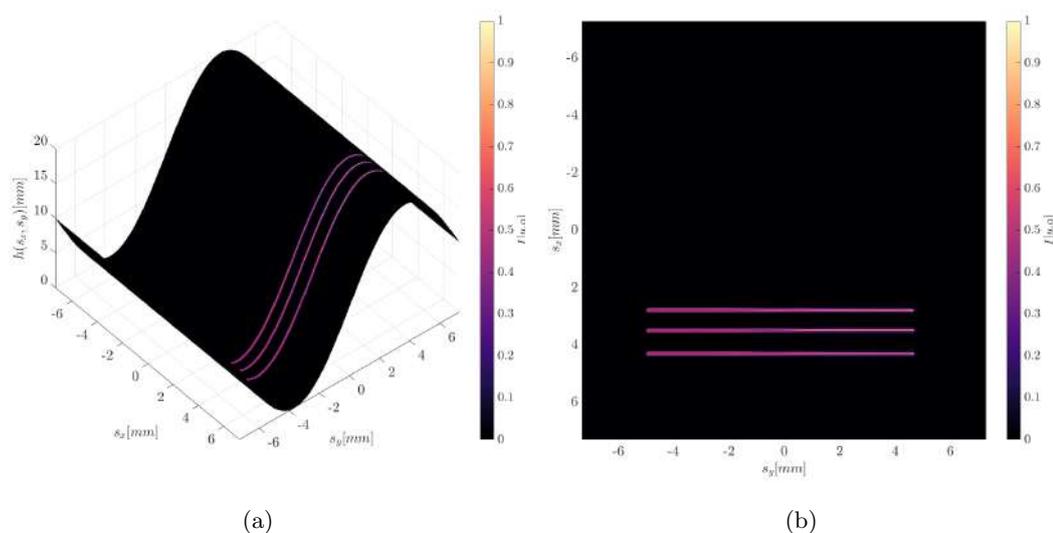
En la figura 5.27 se aprecia cómo el patrón de difracción se “distorsiona” más y más, a medida



**Figura 5.25:** a) Patrón a reconstruir b) Holograma de solo fase creado a partir de la superposición de múltiples hologramas de distribuciones  $\delta$

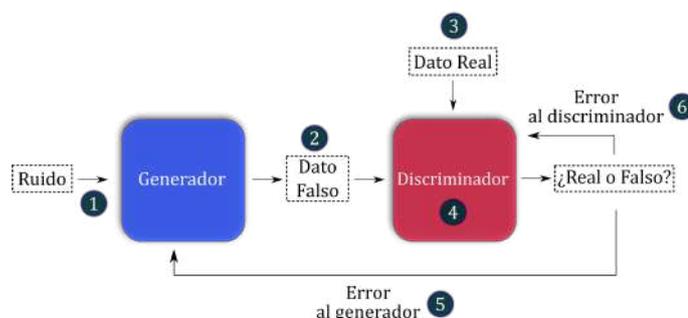


**Figura 5.26:** Superficie aproximada sobre la cual se reconstruirá el holograma de la figura 5.25b.  $m = 384^2$ ,  $\#D_z = 201$  ( $RMSE = 3,25 \cdot 10^{-5}[m]$ )



**Figura 5.27:** Patrón de difracción calculado sobre la superficie de la figura 5.26

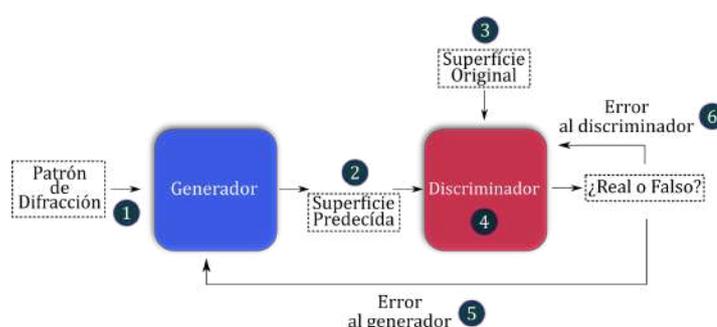
que la superficie se aleja del plano de enfoque calculado ( $z = 0,5m$ ), de aquí surgió la idea de que la topografía de la superficie podría estar codificada en dicho patrón de difracción (según el ED tratado en el literal 5.2). Para poner esta hipótesis a prueba, se decidió utilizar herramientas de *deep learning*, por medio de una red neuronal generativa adversarial y condicionada (cGAN). La estructura de una red GAN se muestra en la figura 5.28.



**Figura 5.28:** Arquitectura Red Neuronal Generativa Adversarial (GAN)

Esta arquitectura fue desarrollada por Goodfellow [31], y se componen de una red generadora y otra red discriminadora, las cuales compiten para aumentar el error en la red contraria, como un juego de un detective muy inteligente y detallista contra un ladrón extremadamente meticuloso y muy creativo. El juego consiste en que la red generadora tiene como objetivo crear imágenes ultra realistas que son totalmente falsas, y la red discriminadora, detectar cuando una imagen es real o no. En la mayoría de ocasiones estas imágenes falsas no pueden ser detectadas por los humanos, únicamente otra red neuronal de este nivel puede hacerle frente a estas falsificaciones, una nueva era de la investigación y las pruebas acusatorias. El proceso de entrenamiento llega a su “final” cuando la red discriminadora pierde la batalla contra la

red generadora y esta ya no puede distinguir entre imágenes falsas y reales; es en ese momento que se dice que la red generadora ya puede generar imágenes realistas. Estas redes GAN están fundamentadas como ya se mencionó en una red generadora, cuya entrada es comúnmente ruido, y una red discriminadora que devolverá una probabilidad de que la imagen sea real o falsa. Si se sustituyen los valores de ruido de la entrada, por patrones específicos, la red GAN, automáticamente se convierte en una red generativa adversaria condicionada c'GAN, debido a que ahora se tiene una entrada que sigue un patrón único, el cual, al pasar por la red, se debe generar también un patrón único a la salida de la red. Este tipo de aprendizaje, se denomina aprendizaje supervisado, ya que se tienen las entradas (patrón de difracción sobre la superficie curva) y las salidas (topografía de las superficies) que debería dar la red.

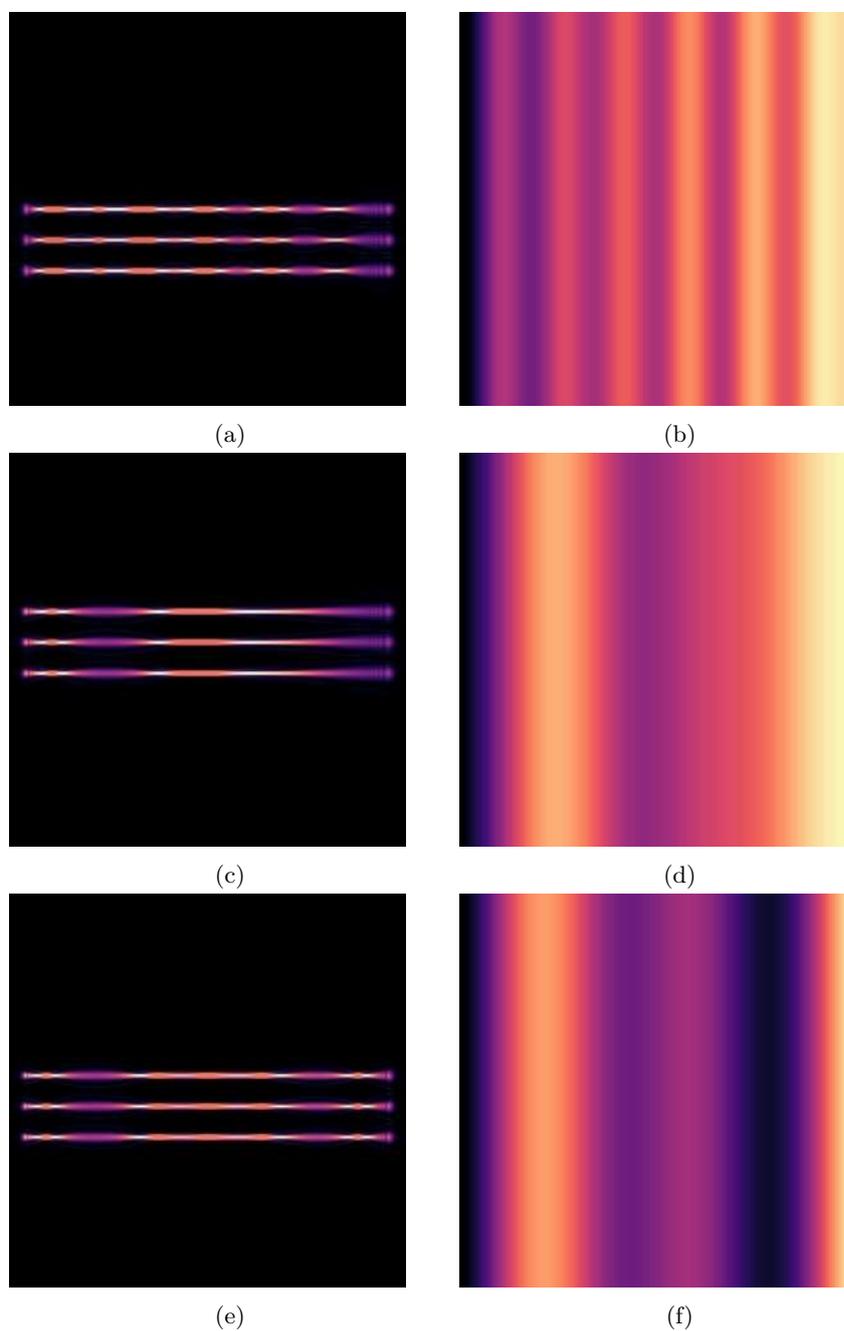


**Figura 5.29:** Arquitectura de una red neuronal generativa adversaria condicionada c'GAN aplicada en la reconstrucción de superficies curvas.

Según lo anterior, se podría intentar enseñar a la red el proceso tal que a partir de un patrón de difracción en su entrada, la salida de la red neuronal sea la superficie sobre la cual se genera este patrón de difracción. Para poner en marcha esto, se utilizó el entorno colaborativo Google Colab, en el cual se disponen de máquinas virtuales, cuadernos para correr código en lenguaje python; las librerías más relevantes de machine learning y la posibilidad de instalar todas las librerías que se requieran para la puesta en marcha de una inteligencia artificial de forma rápida y sencilla.

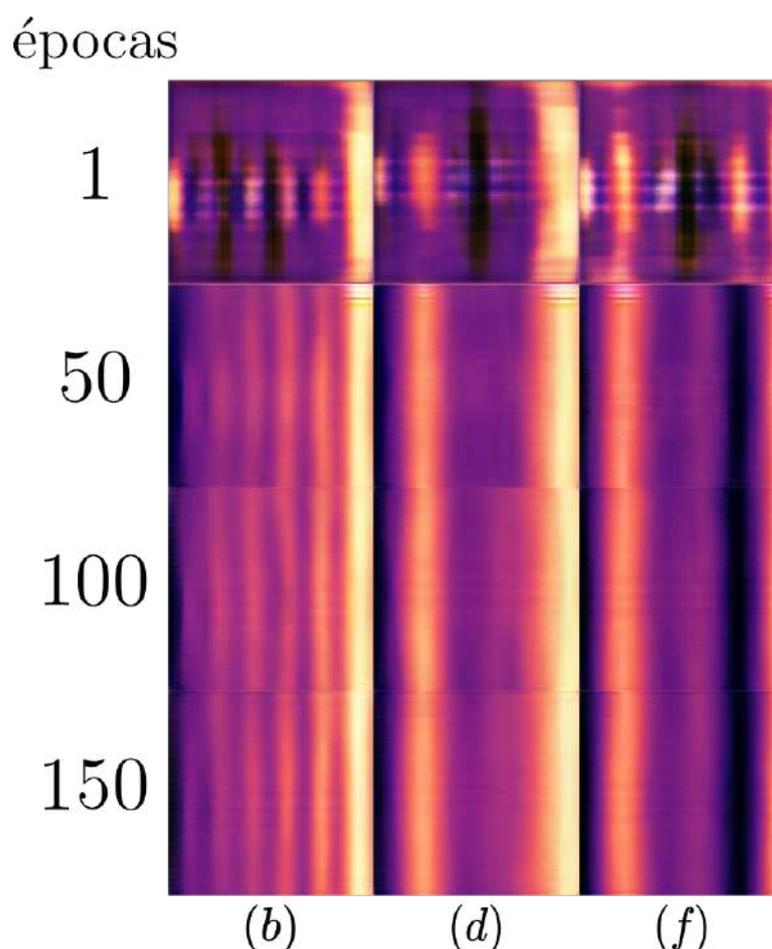
Inicialmente se programó un Scrip para generar superficies con aproximaciones de  $m = 384$  y simétricas, utilizando suma de cosenos y senos, de tamaño **256 × 256 píxeles**, esto con el fin de disminuir el costo computacional. Se crearon 1000 imágenes para el proceso de entrenamiento de la red, 500 imágenes de entrada (patrones de difracción) y 500 imágenes de salida (superficies). En la figura 5.30 se aprecian 5 pares (entrada/salida) del conjunto de datos, siendo la imagen del lado izquierdo la entrada, y naturalmente la imagen del lado derecho la salida que se debería obtener.

La implementación de la red se realizó utilizando la API de alto nivel **Keras** de **Tensorflow**, y la configuración utilizada para la red se sustrajo del trabajo de la referencia [32]. Esta configuración es conocida comúnmente como red **Pix2Pix**, ya que de una imagen de entrada, genera otra imagen a su salida. Se realizaron 150 épocas de entrenamiento, con una duración de 90 minutos



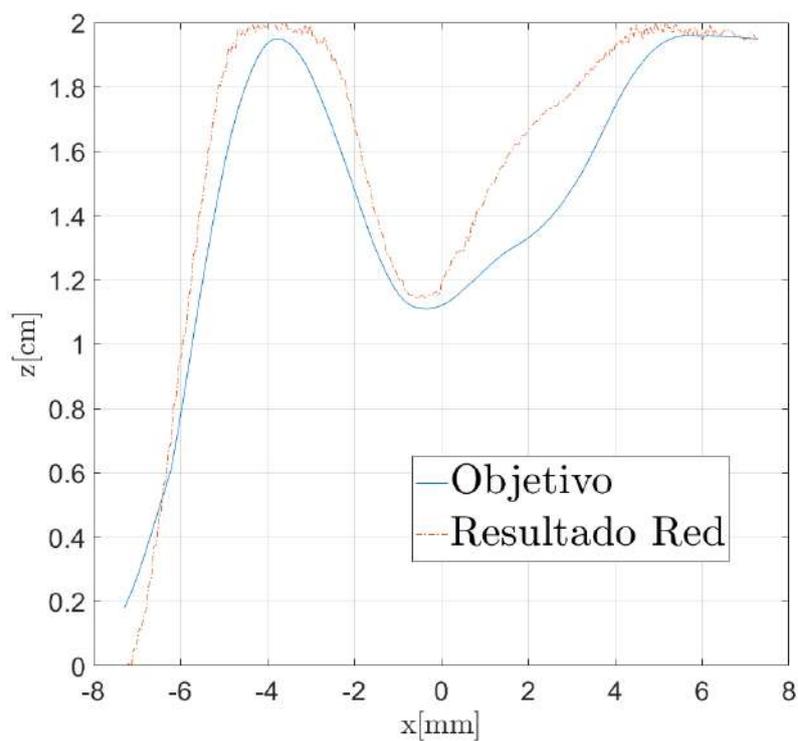
**Figura 5.30:** Ejemplos del conjunto de entrenamiento de la red neuronal (entrada/objetivo) para el entrenamiento de la red neuronal. (a), (c) y (e) entradas (patrones de difracción), (b), (d) y (f) salidas respectivas (superficies sobre las cuales se obtendría dicho patrón de difracción).

dentro del entorno Colab, el cual brinda gratuitamente una máquina virtual con 25Gb de memoria Ram, almacenamiento de 68Gb y una GPU Tesla P100 de 16Gb. De las 500 pares, se utilizan 400 imágenes para el entrenamiento, y 100 imágenes para el proceso de prueba (imágenes del conjunto de datos que la red no vió en la fase del entrenamiento). Este proceso tuvo una duración de 55 minutos. En la figura 5.31 se aprecia la evolución según la época, en la predicción de las superficies objetivo  $(b)$ ,  $(d)$  y  $(f)$  de la figura 5.30.



**Figura 5.31:** Evolución del entrenamiento en 150 épocas para las superficies objetivo  $(b, d)$  y  $(f)$  de la figura 5.30.

Realizando una comparación del perfil de la superficie  $(b)$  de la figura 5.30 con el resultado arrojado por la red en la época 150 se obtuvo un error RMSE de  $2 \cdot 10^{-3}[m]$ , lo que en comparación con los resultados aproximados obtenidos con el método propuesto (Algoritmo  $AR_2$ ) resulta bastante alto en comparación del error obtenido por el algoritmo  $AR_2$  para dicha resolución, siendo este del orden de  $1,532 \cdot 10^{-5}[m]$ , aunque se aprecie una alta similitud. Se deja propuesto para un futuro trabajo, buscar una forma de cuantificar el error que brinde mejor información según el proceso que se está llevando a cabo. En la figura 5.32 se observa la comparación entre los perfiles.



**Figura 5.32:** Comparación de un perfil de la superficie objetivo de la imagen (b) de la figura 5.30, con el perfil de la superficie predicho por la red neuronal para el patrón de difracción (c) de la figura 5.30 en la época 150 de entrenamiento.

Este error, también se debe al limitado tamaño del conjunto de entrenamiento, se deja propuesto para un futuro trabajo, la ampliación y generalización del conjunto de entrenamiento.

# Capítulo 6

## CONSIDERACIONES EXPERIMENTALES A TENER EN CUENTA PARA LA CONTINUACIÓN DEL TRABAJO

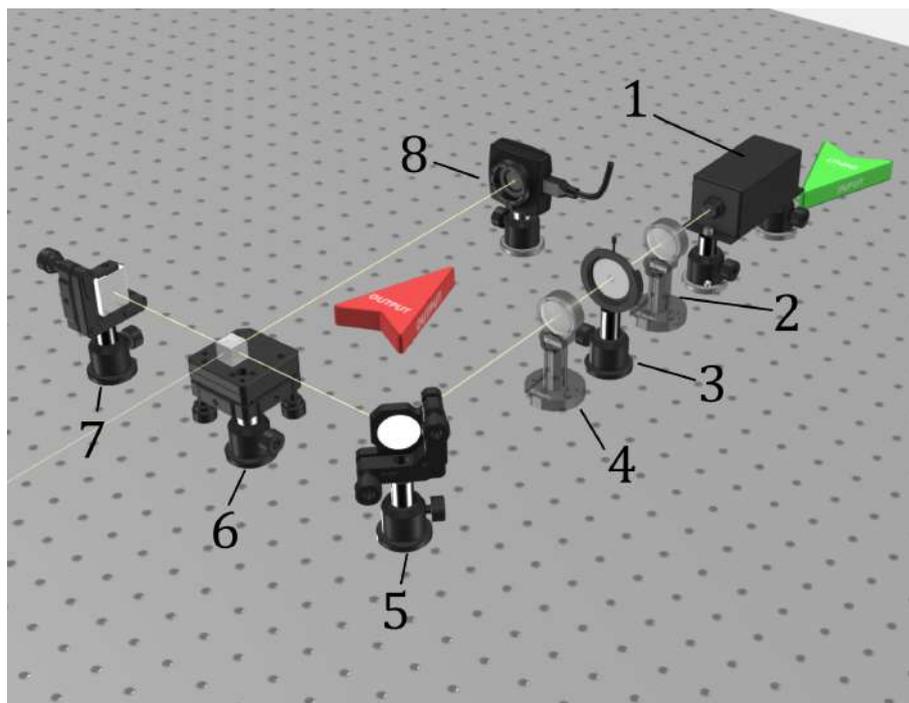
---

---

En este capítulo se muestran algunas consideraciones experimentales que se alcanzaron a obtener en el transcurso del desarrollo de la tesis. Estas consideraciones pueden servir como punto de partida para una futura implementación óptica del método. Debido a los objetivos de este trabajo de investigación, en este capítulo solo se describe el montaje utilizado, más no se realizan los análisis físico-matemáticos requeridos de los instrumentos utilizados. Al realizar los respectivos análisis de forma rigurosa, muchos de los inconvenientes mostradas a lo largo de este capítulo, pueden quedar solucionados o no. También se tendría un panorama más amplio para la propuesta y puesta en marcha de modelos de *Deep Learning* retro alimentados como el propuesto en el capítulo 5.6.

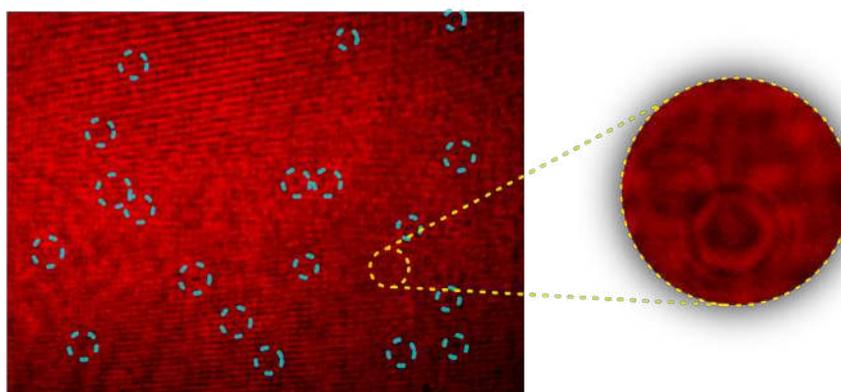
### 6.1 INFLUENCIA DE HONGOS, POLVO Y DEMÁS OBSTRUCCIONES COMPARADAS CON LA LONGITUD DE ONDA

Al realizar el montaje de la figura 6.1, lo primero que se analiza es la forma de la iluminación que se detecta en el sensor, sin haber situado ningún holograma sobre el SLM.



**Figura 6.1:** Montaje Experimental, Reconstrucción sobre sensor. 1) Láser He-Ne, (2,3,4) sistema colimador para la generación de un frente de onda plano, 5) espejo plano, 6) cubo divisor, 7) modulador espacial de luz (SLM), 8) cámara CMOS

Esto con el fin de establecer las posibles fuentes de error experimentales debido a que se trata de una situación real. En la figura 6.2 se aprecia la intensidad sobre el sensor; se observan múltiples patrones de difracción debido a partículas de polvo, hongos, defecto de las superficies ópticas y demás obstrucciones al frente de onda plano a medida que se propaga por el montaje. También se aprecia un cambio de la intensidad en las zonas inferiores del frente de onda, esto puede deberse a varios factores, uno de ellos es no generar un frente de onda que recubra por completo la pantalla del modulador. Otro factor es una mala alineación en el montaje, lo que generaría una obstrucción de partes del frente de onda.



**Figura 6.2:** Hongos e iluminación no uniforme sobre el modulador espacial de luz

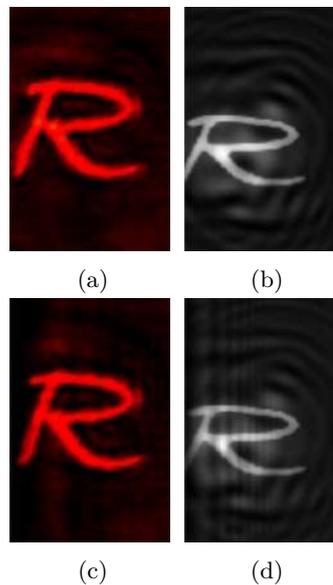
Esto naturalmente rompe con el modelo ideal que se planteó en el presente trabajo, donde la fuente de luz fue considerada uniforme y sin ningún tipo de hongos.

## 6.2 VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LA MULTIPLICACIÓN ÓPTICA DEL EXPERIMENTO DE LA FIGURA 5.7

En el capítulo 5.7 se realizó el análisis de la obstrucción de la ST utilizando un modelo computacional de multiplicación óptica utilizando el principio de Huygens-Fresnel. Para verificar que se estuvieran realizando correctamente las simulaciones, se procedió a calcular un holograma sobre el eje de la letra  $\mathcal{R}$  a una distancia  $z$  del modulador, y situar una obstrucción a una distancia  $z_o$  del plano de reconstrucción tal y como se planteó en el experimento. [26]

PARÁMETRO	VALOR
Longitud de onda ( $\lambda$ )	633nm
Dim modulador	$M \times N$ , $M = 1024$ , $N = 768$
Dim pixel modulador	$n_p \times n_p$ , $n_p = 19\mu m$
Dim sensor	$MM \times NN$ , $MM = 2592$ , $NN = 1944$
Dim pixel sensor	$s_p \times s_p$ , $s_p = 2,2\mu m$
Modulación	$2\pi$
Distancia de ED $z$	500mm
Distancia del plano de reconstrucción a la obstrucción $z_o$	21mm

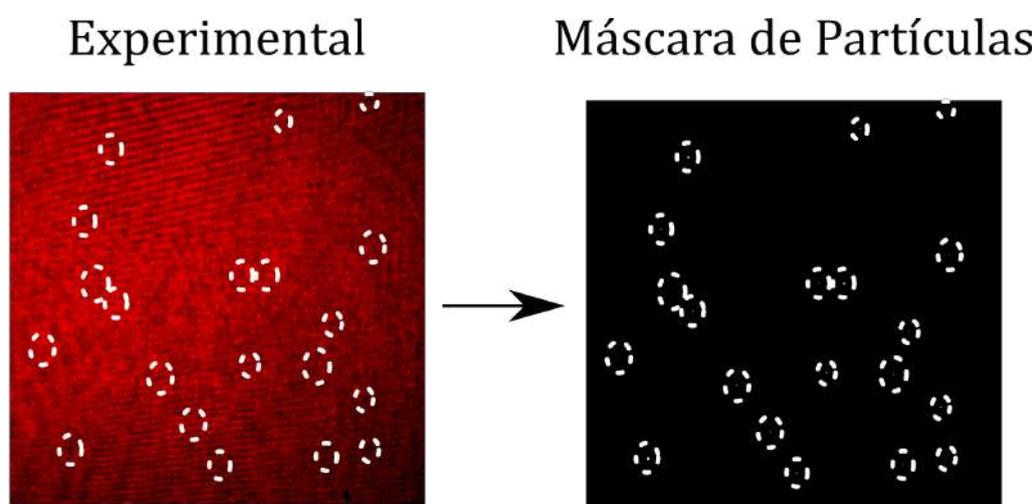
**Tabla 6.1:** Parámetros utilizados para la simulación. Dimensiones (Dim).



**Figura 6.3:** Comparación de reconstrucciones. Reconstrucción sin obstáculo (a) experimental, (b) simulación. Reconstrucción con obstrucción (c) experimental, (d) simulación.

En la figura 6.3 se muestra la comparación entre la reconstrucción experimental y la reconstrucción simulada utilizando la multiplicación óptica planteada para el experimento. De esta manera se verifica el algoritmo implementado para la realización de las multiplicaciones ópticas.

Esto permite realizar una simulación de las obstrucciones no deseadas (polvo, hongo y demás) a lo largo del montaje experimental haciendo más robusto el modelo.

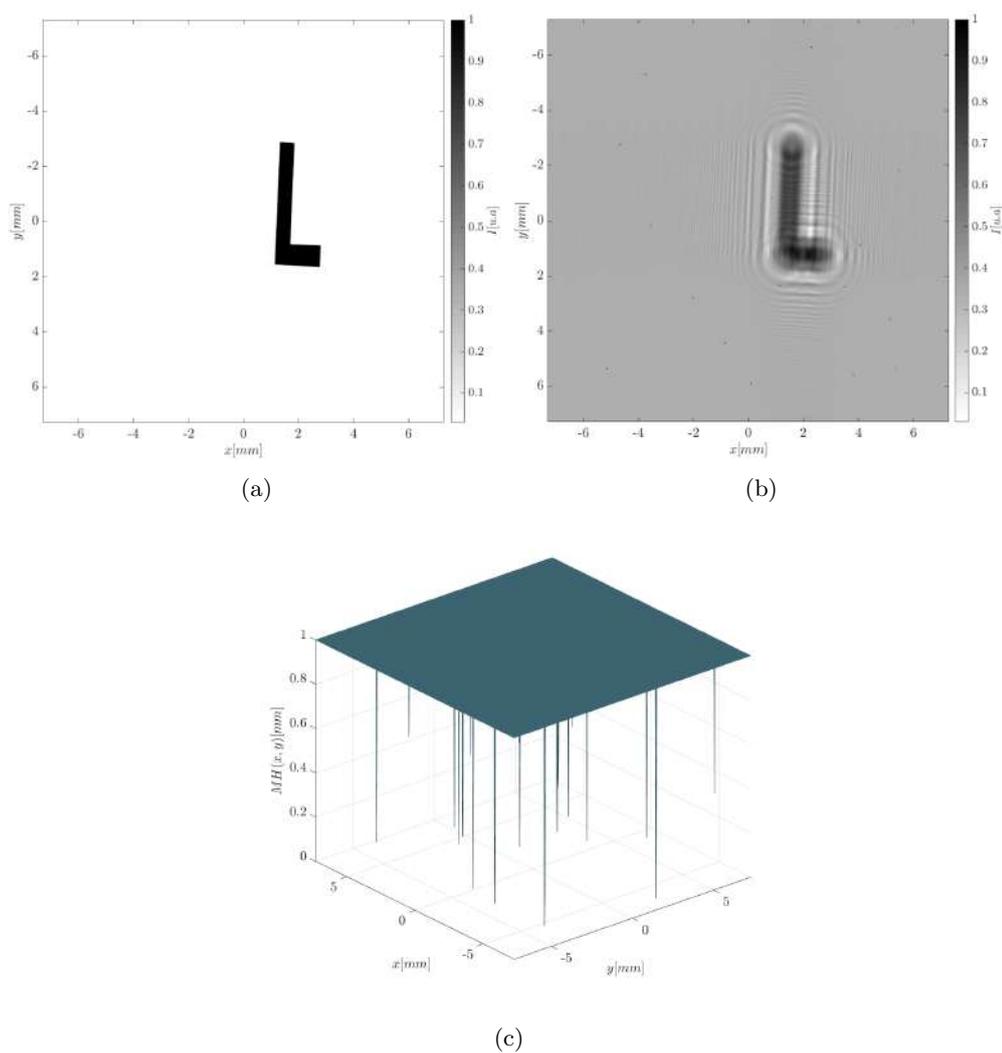


**Figura 6.4:** Creación de máscara de partículas a partir de la detección de anomalías en la figura 6.2

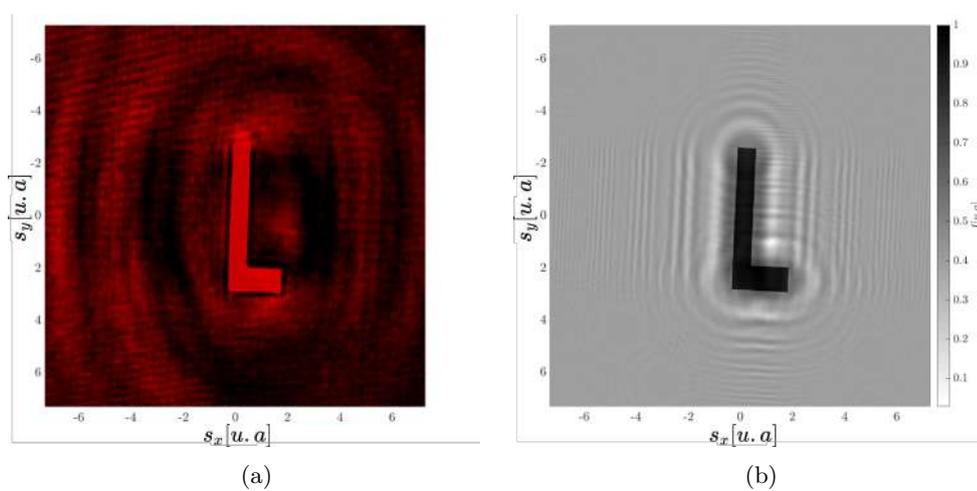
En la imagen de la figura 6.4 se realizó una detección de anomalías en el patrón de intensidad detectada por la cámara CMOS. Sobre estas anomalías se sitúan cuadrados de áreas entre  $1$  y  $2^2$  píxeles que simularán “partículas” cuyas superficies abarcan entre los  $19\mu m^2$  y  $80\mu m^2$  (debido a las dimensiones del píxel del modulador LCR 2500). Esta máscara de partículas tendrá que calcularse cada vez que se realice un ajuste en el montaje.

Para observar la influencia de esta máscara de partículas al realizar una reconstrucción, se calculó el holograma de Gabor (figura 6.5b) de la transparencia de la figura 6.5a y se multiplica por la máscara de partículas de la figura 6.5c.

En la figura 6.6a se aprecia el resultado experimental tras propagar ópticamente el holograma (naturalmente sin realizar la multiplicación por la máscara de partículas). En la figura 6.6b se aprecia la simulación de la propagación realizando la multiplicación por la máscara de partículas. Se deben tener en cuenta los valores de configuración de la cámara, como el ISO, apertura, velocidad de obturación y demás, para obtener reconstrucciones equivalentes. Se debe establecer una rutina que permita tener un control sobre la cantidad de modulación del modulador según la longitud de onda que se utilice, esto debido a que esta cantidad varía según la longitud de onda que se utilice, el ángulo de incidencia y demás parámetros según sea la naturaleza del modulador. [33–35].



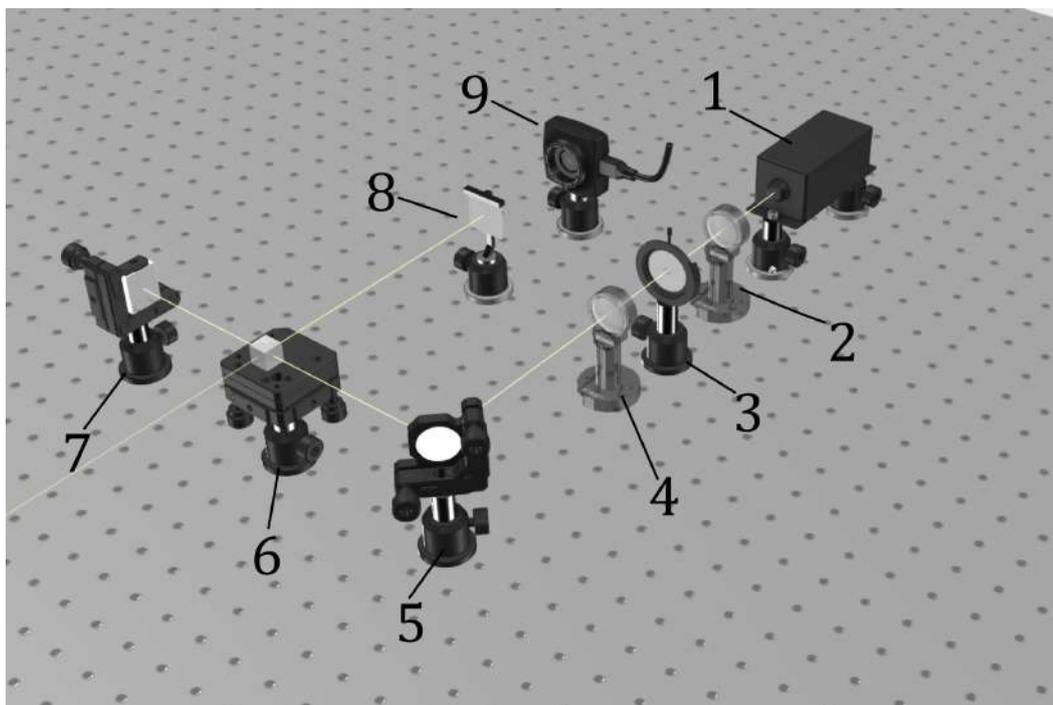
**Figura 6.5:** (a) Objeto, (b) Holograma de Gabor del objeto (a), (c) Máscara de partículas.



**Figura 6.6:** Reconstrucciones de holograma alterado con una máscara de partículas. a) Experimental, b) Simulación

### 6.3 REDUCCIÓN DEL SPECKLE

Debido a que toda la técnica se planteó a partir de luz coherente monocromática bajo la teoría escalar de la difracción (aunque existe la aproximación a la teoría escalar de la difracción utilizando luz parcialmente coherente y policromática ) el fenómeno de Speckle es inherente a la luz coherente, por lo que se debe tener en cuenta. [36,37] La aproximación que se hizo computacionalmente fue ideal, es decir, Speckle nulo. Esto se cumple al considerar superficies totalmente transparentes. [38] En el método propuesto se tendrán superficies translúcidas como primera aproximación, donde se verificó la reconstrucción de hologramas sobre dichas superficies.

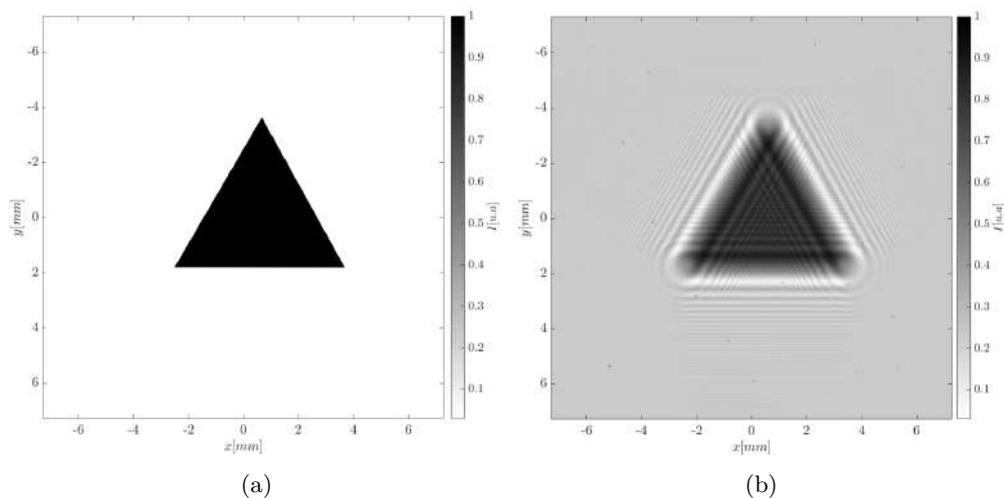


**Figura 6.7:** Montaje Experimental Reconstrucción sobre superficie Difusora. 1) Láser, (2,3,4) sistema colimador para la generación de un frente de onda plano, 5) espejo plano, 6) cubo divisor, 7) modulador espacial de luz (SLM), 8) Difusor, 9) cámara CMOS

En este caso se utilizan los parámetros de la tabla 6.1. Se cambió el objeto por el que se muestra en la figura 6.8a. Se utilizó el montaje de la figura 6.7, en donde la pantalla de observación 8, será una superficie translúcida (difusor).

En la figura 6.9 se aprecia la reconstrucción óptica del holograma de la figura 6.8b sobre un difusor. En dicha figura se aprecia una degradación de la reconstrucción debido a la generación de speckle al atravesar el campo la superficie difusora.

Si se intentara utilizar el método propuesto en este trabajo, para realizar la reconstrucción de alguna superficie translúcida, no se podría llevar a cabo debido a la cantidad de Speckle que se tiene y que no se consideró en el modelo. Para poder implementar el método se deben desarrollar técnicas para la disminución del speckle sobre las superficies.



**Figura 6.8:** (a) Objeto triangular, (b) Holograma de Gabor del objeto triangular

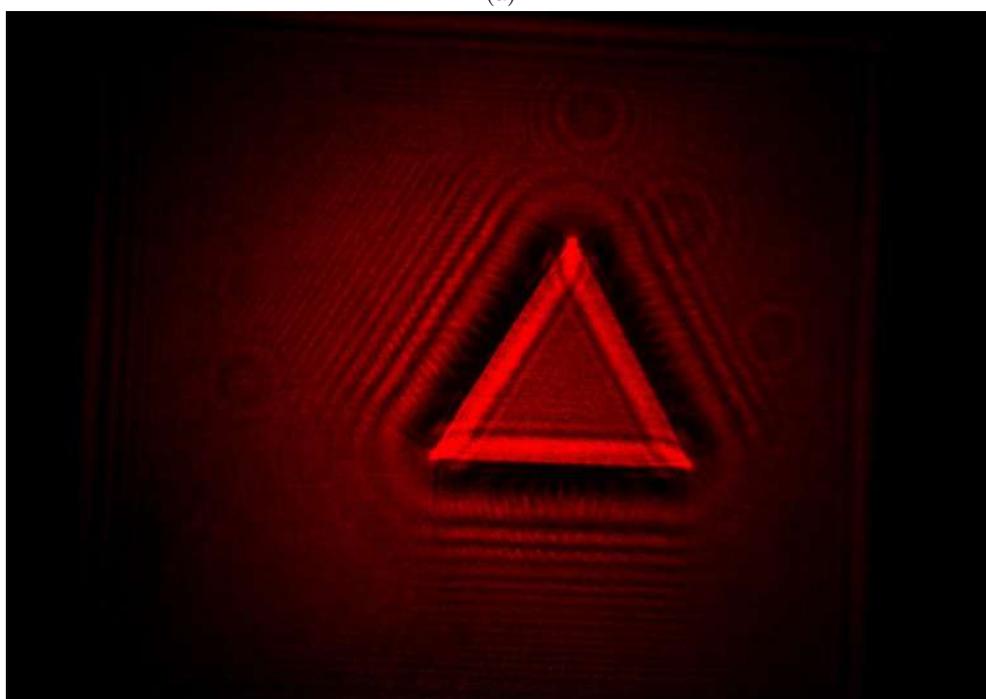


**Figura 6.9:** Reconstrucción óptica del holograma de la figura 6.8a sobre el difusor

Tras pruebas con diferentes materiales para los difusores, en busca de encontrar una superficie que generará el menor speckle posible, no se obtuvo una mejoría relevante en la calidad de las reconstrucciones sobre estas. En medio de estas pruebas, encontramos que la cantidad de speckle se veía reducida justo cuando se estaban situando los difusores en sus soportes, es decir, cuando existía movimiento. Por lo que se procedió a realizar la visualización de la reconstrucción manteniendo un movimiento constante del difusor. Los resultados fueron impresionantes, en la figura 6.10 se aprecia la diferencia entre las reconstrucciones con y sin movimiento del difusor, figuras 6.10b y 6.10a respectivamente.



(a)



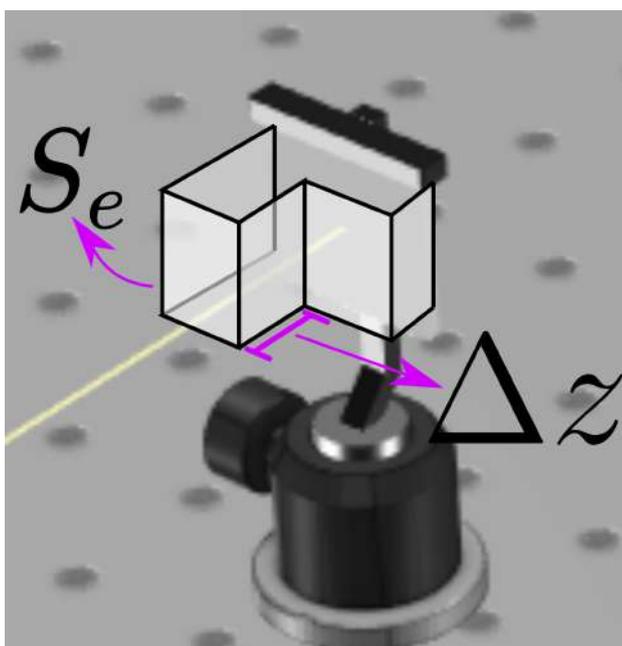
(b)

**Figura 6.10:** Reconstrucción sobre difusor. a) Estático b) En movimiento

Se aprecia una reducción del speckle que permite visualizar hasta los patrones de difracción generados por las obstrucciones minúsculas a lo largo del montaje y la difracción de los bordes del modulador. Se realizó la respectiva búsqueda en la literatura de dicho fenómeno, y se encontró que esto se debe a un promediado temporal del speckle, pudiéndose tratar con la suficiente rigurosidad del caso desde el punto de vista de la óptica estadística, esto, a partir del análisis de la autocovarianza entre el movimiento del difusor y el campo sobre el difusor (teniendo en cuenta que la autocovarianza indica el grado de varianza conjunta entre dos variables aleatorias respecto a sus valores medios). Realizar el análisis físico-matemático a profundidad para explorar algunas otras posibilidades con análisis de óptica estadística se deja para un trabajo futuro en donde se aborde toda la parte experimental (teniendo en cuenta esta pequeña introducción a lo que se podría encontrar en la puesta en marcha del modelo en el laboratorio). [36, 38, 39]

#### 6.4 PROFUNDIDAD DE CAMPO

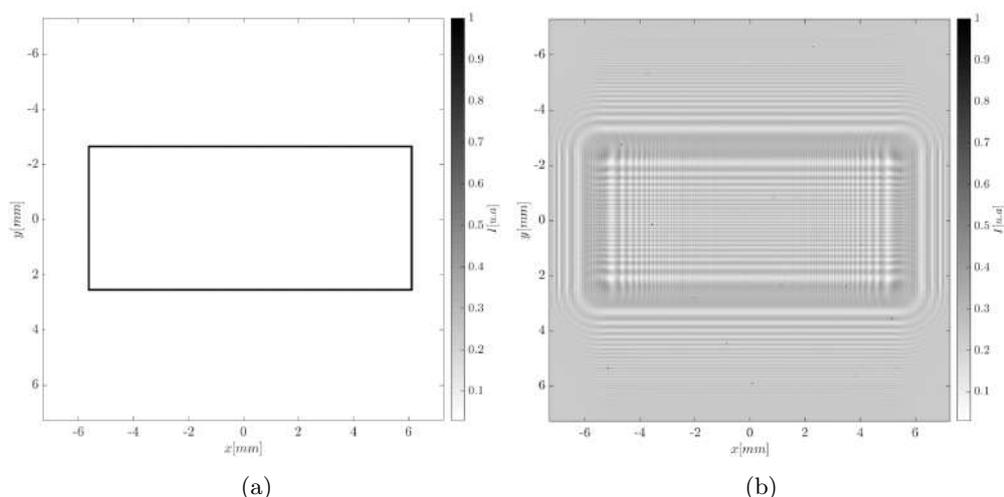
Se procedió a realizar una prueba de reconstrucción de un holograma de Gabor tradicional (plano a plano) pero utilizando una superficie de doble escalón en el dominio de reconstrucción ( $S_e$  figura 6.11).



**Figura 6.11:** Experimento para la visualización de la reconstrucción de un holograma sobre una superficie escalonada.  $S_e$  Superficie de doble escalón para visualizar el holograma

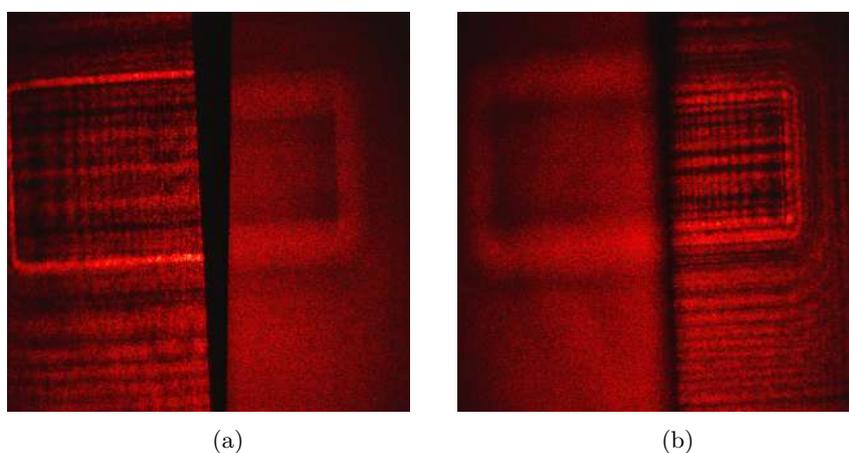
Se utilizan los parámetros de la tabla 6.1, con una diferencia de alturas entre escalones de  $\Delta z = 30mm$ .

En la figura 6.13 se aprecia la reconstrucción del holograma de la figura 6.12b. Se aprecia que debido a la lente que posee la cámara *CMOS* utilizada, se tendrá una profundidad de campo



**Figura 6.12:** (a) Objeto rectangular, (b) Holograma de Gabor del objeto rectangular

inherente a la configuración y posición de la cámara respecto a la superficie escalonada. [40] De esta manera, para la configuración utilizada (lente-posición de la cámara respecto a la superficie), se debe cambiar el foco de la cámara dependiendo del escalón que se desee visualizar. Esto no permitiría poner en marcha el proceso de reconstrucción, por lo que se debe seleccionar una configuración lente-distancia de la cámara a la superficie, tal que el foco se encuentre justo en la altura media de la superficie, y la profundidad de campo sea tal, que abarque la totalidad de la superficie en cuestión, según el modelo, la profundidad de campo debe ser mayor a  $h_{max}$ .



**Figura 6.13:** Reconstrucción sobre escalones. a) Escalón lado izquierdo, b) Escalón lado derecho

En la figura 6.13 se observa un cambio en la escala en el patrón de reconstrucción (inherente a la distancia de observación de la difracción), por lo que al filtro de correlación para detectar los puntos focalizados, se le deberá agregar un filtro extra que sea invariante al cambio de escala. También se observa desalineación entre el modulador y el la CMOS (rotación del patrón de difracción en la reconstrucción), si esto no se corrige en el montaje, se deberán desarrollar filtros discriminantes compuestos, invariantes a la rotación y a los cambios de escala.

## 6.5 GENERALIZACIÓN AL ENTRENAMIENTO DE LA RED

Debido a que todas las consideraciones que se deben tener experimentalmente pueden ser simuladas, se deben agregar todas estas cuestiones no ideales al modelo de cálculo de las reconstrucciones, en el proceso de la creación del conjunto de datos de entrenamiento de la red neuronal, obteniendo así una red neuronal robusta, y suficientemente general. De esta forma se analizaría si esta realmente podrá predecir correctamente la topografía de las superficies.

# Capítulo 7

## CONCLUSIONES

---

---

Se desarrolló e implementó una técnica digital de reconstrucción de superficies tridimensionales sintéticas, utilizando hologramas de Fresnel calculados por medio de la transformación de Fourier de orden fraccional y matrices de puntos focalizadas en diferentes planos, soportando así el cumplimiento de la totalidad de los objetivos propuestos para esta proyecto de investigación. Se dedujo la expresión de hologramas de solo fase de distribuciones delta de Dirac, a partir de dos transformaciones de fase ópticas, sin utilizar métodos matemáticos para la solución de la integral de Fresnel. Además del cumplimiento de los objetivos se desarrolló una técnica de cálculo de difracción de hologramas sobre superficies curvas, que tras una ardua revisión del estado del arte, se encontró que un equipo de investigación de Caltech había desarrollado un algoritmo equivalente en el año 2014, sin embargo en nuestro método, se establecen criterios de error más amplios, por medio del análisis de la sección longitudinal en la difracción de hologramas de distribuciones  $\delta$ , en comparación al método iterativo propuesto por los autores de dicha investigación. [41] Adicionalmente, se implementa una reconstrucción sobre una superficie escalonada, mostrando los diferentes problemas experimentales que pueden llegar a presentarse, cuando se desea visualizar el patrón de difracción sobre superficies curvas.

A partir del desarrollo del algoritmo del cálculo de difracción sobre superficies curvas, se implementó una técnica de reconstrucción de superficies en una sola exposición, capturando el patrón de difracción sobre la superficie en cuestión y tomándola como entrada para la red neuronal **pix2pix** implementada. Se determinó que los tiempos de reconstrucción disminuyen de 2,27 minutos aproximadamente para una resolución transversal de  $m = 48$ , a aproximadamente 2 segundos en los que la red realiza su proceso, y teniendo una resolución transversal de  $m = 384$ . Se realizaron métodos de simulación a la mayoría de los problemas experimentales que se encontraron, por lo que se deja la base necesaria para generar un conjunto de datos mayor, utilizando estas situaciones no ideales y darle un grado de generalidad más alto a la red neuronal.

Se estudiaron los costos computacionales para cada uno de los métodos que se implementaron y se describieron algunas consideraciones a tener en cuenta, a la hora de seleccionar la resolución a utilizar (axial y transversal).

A pesar de que la difracción de Fresnel puede ser modelada por medio de una transformación de Fourier fraccionaria, no es necesario utilizar este formalismo para la implementación de los algoritmos propuestos en el trabajo, si se selecciona un rango específico para las distancias de propagación. Además de que para el método de reconstrucción, es más natural hablar de distancias que de ordenes, este constante intercambio entre ordenes y distancias, resulta en ocasiones un poco tedioso. Se desarrolló un algoritmo para la obtención del patrón de difracción de Fresnel que utiliza una única FFT, en comparación a las 2 FFT que se utilizan en los algoritmos clásicos como algoritmo respuesta al impulso o algoritmo función de transferencia. [26]

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] Cristina Cañero Morales, *Universitat Autònoma de Barcelona*. PhD thesis, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 2002.
- [2] M. M. F. Yuen, “A 3D Reconstruction System for Human Body Modeling,” *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1537, pp. 229–241, 1998.
- [3] S. M. Seitz, J. Diebel, D. Scharstein, and R. Szeliski, “A Comparison and Evaluation of Multi-View Stereo Reconstruction Algorithms,” *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 1, pp. 519–528, 2006.
- [4] A. I. Comport, É. Marchand, F. Chaumette, and I. I. Rennes, “Robust model-based tracking for robot vision,” in *IEEE/RSJ Int. Conf on Intelligent Robots and Systems, IROS'04*, (Sendai Japan), 2004.
- [5] P. Fechteler and P. Eisert, “Adaptive color classification for structured light systems,” in *2008 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, pp. 1–7, 2008.
- [6] A. Kirchner and T. Heinrich, “Model based detection of road boundaries with a laser scanner,” in *MODEL BASED DETECTION OF ROAD BOUNDARIES WITH A LASER SCANNER*, pp. 93–98, IEEE, 1998.
- [7] F. P. Parras D, Romero L, Cavas F, Nieto J, Cañavate F, “Use of 3d scanning and reverse engineering for the prototyping of mechanical parts,” in *20th International Congress on Project Management and Engineering*, (Cartagena), pp. 13–15, 2016.
- [8] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 3rd ed ed., 1999.
- [9] S. J. Orfanidis, *Electromagnetic waves and antennas*. Rutgers University New Brunswick, NJ, 2002.
- [10] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering, McGraw-Hill, 2nd ed ed., 1996.
- [11] E. Hecht, *Optics*. Pearson Education, Incorporated, 2017.

- [12] C. S. W. and J. W. Goodman, "A technique for optically convolving two functions," *Applied Optics*, vol. 5, pp. 1248–1249, 1966.
- [13] P. Pellat-Finet and Y. T. Moreno, *The Fractional Order Fourier Transform and Fresnel Diffraction*, vol. 4. Elsevier Ltd., 2018.
- [14] P. Pellat-Finet and G. Bonnet, "Fractional order Fourier transform and Fourier optics," *Optics Communications*, vol. 111, no. 1-2, pp. 141–154, 1994.
- [15] G. Bonnet, "Introduction a l'optique métaxiale," *Annales des Télécommunications*, vol. 33, no. 7, pp. 225–243, 1978.
- [16] H. P. HSU, *Fourier Analysis*. USA: Simon & Schuster, 1 ed., 1970.
- [17] V. Namias, "The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics," *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*, 1980.
- [18] A. C. McBRIDE and F. H. KERR, "On Namias's Fractional Fourier Transforms," *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 39, pp. 159–175, 05 1987.
- [19] A. W. Lohmann, "Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 2181–2186, Oct 1993.
- [20] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic, "Fractional fourier optics," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, pp. 743–751, Apr 1995.
- [21] L. J.-P. Poon T.-C., *Introduction to Modern Digital Holography: With Matlab*. CUP, 2014.
- [22] H. M. Ozaktas, M. A. Kutay, and D. Mendlovic, "Introduction to the fractional fourier transform and its applications," in *Introduction to the Fractional Fourier Transform and Its Applications* (P. Hawkes, ed.), vol. 106 of *Advances in Imaging and Electron Physics*, pp. 239 – 291, Elsevier, 1999.
- [23] T. Cesar, *Optica Fraccional De Fourier*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, 2004.
- [24] A. Patiño, *Calculo de componentes ópticos difractivos en óptica de Fourier fraccionaria*. PhD thesis, Universidad de Breaña del Sur, 2014.
- [25] A. V. Lugt, "Signal detection by complex spatial filtering," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 10, no. 2, pp. 139–145, 1964.
- [26] D. G. Voelz, *Computational Fourier Optics: A MATLAB Tutorial*. Bellingham, USA: SPIE PRESS, 2011.

- [27] J. García, D. Mas, and R. G. Dorsch, "Fractional-fourier-transform calculation through the fast-fourier-transform algorithm," *Appl. Opt.*, vol. 35, pp. 7013–7018, Dec 1996.
- [28] A. Bultheel and H. E. M. Sulbaran], "Computation of the fractional fourier transform," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 16, no. 3, pp. 182 – 202, 2004.
- [29] H. E. Rojas, C. A. Corta, and D. F. Ramírez, "Implementación Computacional de la Transformada Fraccional de Fourier Discreta," *Información tecnológica*, vol. 25, pp. 143 – 156, 00 2014.
- [30] H. M. Ozaktas, O. Arikan, M. A. Kutay, and G. Bozdogt, "Digital computation of the fractional fourier transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 9, pp. 2141–2150, 1996.
- [31] I. Goodfellow, J. Pouget-Abadie, M. Mirza, B. Xu, D. Warde-Farley, S. Ozair, A. Courville, and Y. Bengio, "Generative adversarial nets," in *Advances in Neural Information Processing Systems 27* (Z. Ghahramani, M. Welling, C. Cortes, N. D. Lawrence, and K. Q. Weinberger, eds.), pp. 2672–2680, Curran Associates, Inc., 2014.
- [32] P. Isola, J. Zhu, T. Zhou, and A. A. Efros, "Image-to-image translation with conditional adversarial networks," *CoRR*, vol. abs/1611.07004, 2016.
- [33] J. Rueda, A. Romero, and L. Guerra, "Characterization of reflective tn-lcd, tuned in phase-only modulation and to six wavelengths," *Photonics Letters of Poland*, vol. 2, 12 2010.
- [34] H.-S. Y. D. A. Chigrinov, Vladimir G.; Kwok, *Modeling and Optimization of LCD Optical Performance*. Wiley SID series in display technology, Wiley-Blackwell, 1 ed., 2015.
- [35] P. P. Patrick Oswald, *Nematic and cholesteric liquid crystals: concepts and physical properties illustrated by experiments*. The liquid crystals book series, Taylor & Francis, 1 ed., 2005.
- [36] J. C. Dainty, *Laser speckle and related phenomena*, vol. Chapters 1,2 of *Topics in applied physics*. Springer, 1976.
- [37] L. Mandel and E. Wolf, "Some properties of coherent light\*," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 51, pp. 815–819, Aug 1961.
- [38] J. Goodman, *Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications*. Roberts & Company, 2007.
- [39] J. W. Goodman, *Statistical Optics*. Wiley classics library, Wiley, wiley classics library ed ed., 2000.

- 
- [40] H. M. Merklinger, *Focusing the View Camera : A Scientific Way to Focus the View Camera and Estimate Depth of Field*. MacNab Print, 1993.
- [41] C.-Y. Hwang, S. Oh, I.-K. Jeong, and H. Kim, “Stepwise angular spectrum method for curved surface diffraction,” *Opt. Express*, vol. 22, pp. 12659–12667, May 2014.
- [42] D. Mas, C. Ferreira, J. Garcia, and L. M. Bernardo, “From Fresnel patterns to fractional Fourier transform through geometrical optics,” *Optical Engineering*, vol. 39, no. 6, pp. 1427 – 1430, 2000.

# Anexo A

## TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA RÁPIDA (FFrFT)

---

---

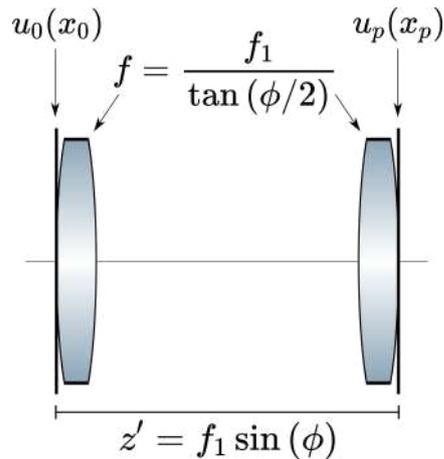
### A.1 FRFT TIPO LOHMANN

En esta trabajo se utilizó la transformada de Fourier Fraccionaria rápida (FFrFT), a continuación se describe el proceso para su implementación computacional basados en los artículos de las referencias [19, 27, 42].

Lohmann demostró que al realizar la transformada de Fourier a una señal, la distribución de Wigner (WD) de dicha señal modificada, es rotada  $\pi/2$ , por lo que propuso que una FrFT debería rotar la WD, una fracción  $p$  de este ángulo, es decir, una rotación de  $\phi = p\pi/2$ . [19] Para realizar esta rotación se utilizan 2 operaciones ópticas: transformación de fase por medio de una lente, y difracción; cada una de estas operaciones provoca un cizallamiento de la WD. Lohmann muestra como 3 cizallamientos de una función bidimensional (con los parámetros adecuados), generan una rotación de precisamente  $\phi = p\pi/2$ .

En la figura A.1 se muestra el montaje tipo II propuesto por Lohmann para la obtención de la FrFT ópticamente. A la salida del montaje óptico se obtiene la expresión de la FrFT de  $u_0(x_0)$ :

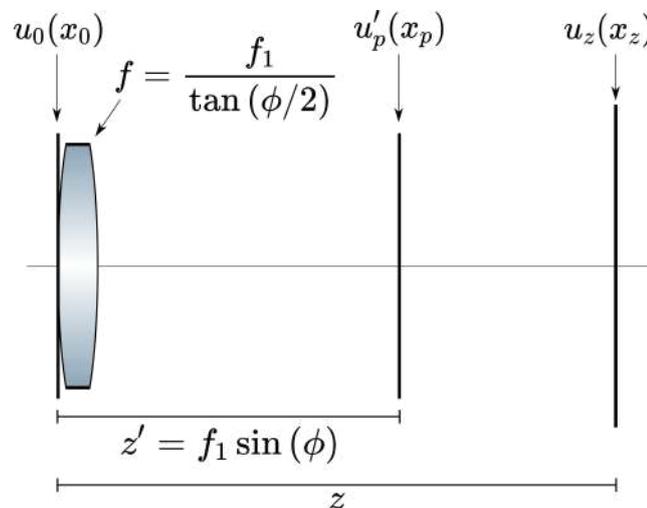
$$u_p(x_p) = \exp\left(\frac{i\pi x_p^2}{\lambda f_1 \tan(\phi)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0) \exp\left(\frac{i\pi x_0^2}{\lambda f_1 \tan(\phi)}\right) \times \dots \quad (\text{A.1}) \\ \dots \times \exp\left(-\frac{2\pi i x_0 x_p}{\lambda f_1 \sin(\phi)}\right) dx_0.$$



**Figura A.1:** Montaje óptico tipo II para obtener FrFT propuesto por Lohman

## A.2 FRFT TIPO LOHMANN Y SU CONEXIÓN CON LA DIFRACCIÓN DE FRESNEL

Como se mencionó en el capítulo 3, existen diferentes métodos para obtener la difracción de Fresnel (FD) en función de una FrFT (escalamiento), a continuación se muestra un método óptico el cual se fundamenta en la óptica geométrica. Este escalamiento es necesario para la implementación de la FFrFT.



**Figura A.2:** Montaje óptico para obtener un patrón de FD a partir de una FrFT

El montaje óptico de la figura A.2, es una modificación al montaje Lohmann tipo II de la figura A.1, a este montaje modificado se le denomina cuasi-Lohmann, debido a que únicamente se le elimina la transformación de fase de la última lente. La eliminación de dicha lente, solo afecta el patrón de la FrFT por un factor de fase cuadrático, por lo que la intensidad no se ve afectada. Al eliminar la segunda lente, el sistema se convierte en un sistema formador de imagen. Se definen como objeto e imagen, el patrón de difracción de Fresnel  $u_z(x_z)$  y el patrón de la FrFT

modificada ( $u'_p(x_p)$ ) respectivamente. Definiendo las coordenadas sobre la primera lente como  $x$ , la respuesta al impulso del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} h(x_p, x_z) = & \exp\left(j\frac{k}{2z'}x_p^2\right)\exp\left(-j\frac{k}{2z}x_z^2\right) \times \dots \\ & \dots \times \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)(x^2)\right] \times \dots \\ & \dots \times \exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_p}{z'} + \frac{x_z}{z}\right)x\right]\right\} dx, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$P(x)$  corresponde a la abertura focal de la lente,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de onda y  $\lambda$  la longitud de onda de la iluminación utilizada. Tomando la aproximación de la óptica geométrica, se debe cumplir la expresión (A.3). [10]

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z} - \frac{1}{f} = 0, \quad (\text{A.3})$$

de esta expresión se obtiene:

$$z = f_1 \tan(\phi). \quad (\text{A.4})$$

Tomando la magnificación del sistema como  $\beta = -\frac{z'}{z}$ , se obtiene que la respuesta al impulso se transforma en:

$$h(x_p, x_z) = \exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z'}x_p^2\right)\exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda z}x_z^2\right)\delta\left(x_z - \frac{x_p}{\beta}\right). \quad (\text{A.5})$$

La salida del sistema está dada por:

$$u'_p(x_p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x_p, x_z)u_z(x_z)dx_z. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando (A.5) en (A.6), se obtiene el patrón de la FrFT modificado:

$$u'_p(x_p) = u_z\left(\frac{x_p}{\beta}\right)\exp\left[\left(\frac{i\pi x_p^2}{\lambda z'}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]. \quad (\text{A.7})$$

De (A.7) se despeja  $u_z$ ; recordando que  $u'_p$  es el patrón de la FrFT modificado tras eliminar la segunda lente y por la respuesta al impulso en la aproximación geométrica. [42]

$$u_z(x_z) = u_z\left(\frac{x_p}{\beta}\right) = \exp\left(\frac{i\pi(1 - \cos(\phi))x_p^2}{\lambda f_1 \sin(\phi) \cos(\phi)}\right)u'_p(x_p). \quad (\text{A.8})$$

Obteniéndose finalmente el patrón de difracción de Fresnel, en función de una FrFT tipo Lohmann:

$$u_z(x_z) = \exp\left(\frac{i\pi x_p^2 \tan(\phi)}{\lambda f_1}\right)\mathcal{F}^p[u_0(x_0)], \quad (\text{A.9})$$

donde  $\phi$  está definido como:

$$\phi = p\pi/2. \quad (\text{A.10})$$

### A.3 ALGORITMO DE LA FF<sub>r</sub>FT

La transformada de Fourier óptica, de una función  $u(x)$ , fuera de algunos factores de fase constantes, está dada por: [10]

$$U(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda f_1} x \bar{x}\right) dx. \quad (\text{A.11})$$

Se discretizan los dominio de entrada y salida:

$$\begin{aligned} x &= m\Delta x, \\ \bar{x} &= \bar{m}\Delta \bar{x}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Se define un número finito  $N$  de muestras  $m$ , por lo tanto la versión discreta de la expresión (A.11) resulta en:

$$U_{\bar{m}} = \sum_{m=-N/2}^{N/2} u_m \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda f_1} m \bar{m} \Delta x \Delta \bar{x}\right) dx. \quad (\text{A.13})$$

La transformada de Fourier discreta (DFT) de una señal  $u$  con  $N$  muestras, está definida como: [16]

$$U_{\bar{m}} = \mathcal{F}\{u\} = \sum_{m=-N/2}^{N/2} u_m \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} m \bar{m}\right). \quad (\text{A.14})$$

Para poder calcular la expresión (A.13) por medio de una DFT (ecuación (A.14)), es necesario que se cumpla:

$$\lambda f_1 / N = \Delta x \Delta \bar{x}. \quad (\text{A.15})$$

La expresión (A.15) sirve para establecer el parámetro fijo  $f_1$  utilizado por Lohmann, en función de los parámetros del sistema. Con las expresiones (A.4) y (A.15), se calcula el orden  $p$  de la FrFT:

$$p = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{z\lambda}{N\Delta x \Delta \bar{x}} \right). \quad (\text{A.16})$$

Para efectos de simplicidad se asume que el dominio origen  $x$  y el dominio de llegada  $\bar{x}$  tienen el mismo intervalo de muestreo  $\Delta x = \Delta \bar{x}$ , por lo que la expresión (A.15) se transforma en:

$$\lambda f_1 / N = \Delta x^2, \quad (\text{A.17})$$

y por lo tanto la expresión (A.16) se convierte en:

$$p = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{z\lambda}{N\Delta x^2} \right). \quad (\text{A.18})$$

Con la expresión (A.18) definida, se establece el algoritmo para el cálculo de la FFrFT, utilizando el montaje de la figura A.1 y sus respectivos parámetros:

1. Acción de la primera lente ( $P1$ ):

La transformación de fase que realiza la primera lente sobre  $u_0$ , está dada por:

$$P1 = u_0 \exp\left(-\frac{i\pi x^2}{\lambda f}\right). \quad (\text{A.19})$$

Teniendo en cuenta la versión discreta de  $x$  ( $x = m\Delta x$ ), el valor de la focal de la lente  $f$ , y la condición de la expresión (A.17), la ecuación (A.19) se transforma en:

$$P1 = u_0 \exp\left(-\frac{i\pi}{N} m^2 \tan\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (\text{A.20})$$

2. Difracción del paso anterior a una distancia  $z$  ( $P2$ ):

Para este paso es conveniente utilizar la difracción de Fresnel en forma de convolución, de esta manera se aprovecha la propiedad de multiplicación en frecuencia. [26]

$$\begin{aligned} P2 &= P1 * \exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z} \bar{x}^2\right) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{P1\}\mathcal{F}\{\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z} \bar{x}^2\right)\}\} = \dots \\ &\dots = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{P1\}\exp\left(-\frac{i\pi}{N} \bar{m}^2 \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)\right)\}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Donde  $\{*\}$  denota una operación de convolución.

3. Acción de la segunda lente ( $P3$ ):

$$P3 = P2 \exp\left(-\frac{i\pi}{N} m^2 \tan\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (\text{A.22})$$

Los autores de la referencia [42], determinaron que las condiciones necesarias para no tener problemas de muestreo son:

$$\begin{aligned} \left|\sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)\right| &< 1, \\ \left|\tan\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right| &< 1. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Siguiendo el algoritmo descrito, se obtiene la amplitud de la FrT de orden  $p$  de la función  $u_0$ . El cambio de una a dimensión a dos dimensiones es directo. El algoritmo utiliza 2 FT, las cuales pueden ejecutarse por medio del algoritmo de la FFT, lo que arroja un costo computacional de  $O_{Fr}(2N^2 \log(N))$