

*Evaluación del efecto de diferentes modelos de
atenuación en la migración preapilado en
profundidad utilizando las ecuaciones de sentido
único*

JHORMAN GUSTAVO MALDONADO VILLAMIZAR

FÍSICO

ESTUDIANTE DE MAESTRÍA EN FÍSICA

CÓDIGO: 1094246084



UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA
MAESTRÍA EN FÍSICA
PAMPLONA, NORTE DE SANTANDER
2017

*Evaluación del efecto de diferentes modelos de
atenuación en la migración preapilado en
profundidad utilizando las ecuaciones de sentido
único*

JHORMAN GUSTAVO MALDONADO VILLAMIZAR

FÍSICO

ESTUDIANTE DE MAESTRÍA EN FÍSICA

CÓDIGO: 1094246084

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR

AL TÍTULO DE
MAGISTER EN FÍSICA

DIRECTOR
LUIS EDUARDO NASPIRÁN
M.SC EN MATEMÁTICAS

CODIRECTOR
FRANCISCO H. CABRERA ZAMBRANO
PHD. EN GEOFÍSICA



UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA
MAESTRÍA EN FÍSICA
PAMPLONA, NORTE DE SANTANDER
2017

Título en español

Evaluación del efecto de diferentes modelos de atenuación en la migración preapilado en profundidad utilizando las ecuaciones de sentido único.

Title in English

Evaluation of the effect of different attenuation models on prestack depth migration using the one way wave equations.

Resumen: La compensación de energía en la migración sísmica, permite mejorar las imágenes sísmicas del interior del subsuelo al recuperar amplitudes y frecuencias que se pierden a medida que una onda viaja por un medio disipativo.

En este trabajo de investigación se aborda el problema de la atenuación en datos sísmicos y la forma de recuperar esta información. Inicialmente se explica en qué consiste el experimento sísmico, y el método de migración preapilado en profundidad utilizando las ecuaciones de onda unidireccionales (OWWE), específicamente corrimiento de fase (Phase Shift). Para mejorar las imágenes migradas, se estudia el fenómeno de atenuación y los modelos matemáticos que describen este comportamiento.

Se implementan entonces los códigos de migración por corrimiento de fase con datos sintéticos, los modelos de atenuación de Kolsky-Futterman y Kjartansson, permiten obtener imágenes migradas de las que se puede concluir que es posible recuperar amplitud y frecuencias en la señal mediante la extrapolación de campos de onda al incluir el factor de calidad Q .

Dedicado a

mis amigos y familia, por el apoyo a lo largo de este proceso y por soportar mis largas y tediosas conversaciones sobre el tema.

Agradecimientos

A mis padres, que siempre han creído en mí.

Al profesor Luis Eduardo Naspirán, por dedicar tiempo y dirigir este trabajo de investigación.

Agradezco al Phd. Francisco H. Cabrera por el apoyo durante el desarrollo de este trabajo.

Al proyecto “**Migración sísmica pre-apilado en profundidad por extrapolación de campos de onda utilizando computación de alto desempeño para datos masivos en zonas complejas**” co-financiado por Ecopetrol y Colciencias.

Agradezco a la Universidad de Pamplona y a su planta docente por darme la oportunidad de llevar a cabo mis estudios de postgrado.

A todos Gracias.

Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	VII
Introducción	XI
1. Exploración sísmica	1
1.1. Adquisición de datos sísmicos	2
1.1.1. Ondas sísmicas	10
1.2. Procesamiento sísmico	11
1.3. Migración sísmica	15
1.3.1. Migración post-apilado (Poststack)	16
1.3.2. Migración pre-apilado (Prestack)	17
2. Migración OWWE	19
2.1. Ecuación de onda acústica	19
2.1.1. Conservación de la masa	20
2.1.2. Conservación del momentum	21
2.1.3. Relación constitutiva	22
2.1.4. Linealización de las ecuaciones básicas	22
2.2. Ecuaciones de onda unidireccionales	24
2.3. Método de migración por corrimiento de fase (PS)	25
2.3.1. Método de migración por corrimiento de fase más interpolación (PSPI)	27
2.3.2. Método de migración Split Step Fourier	27

3. Teoría visco-elástica y modelos de atenuación	31
3.0.1. Funciones fundamentales de la visco-elasticidad	31
3.1. Relaciones de dispersión de Kramers-Krönig	34
3.2. Modelos mecánicos	36
3.2.1. Modelo de Maxwell	38
3.2.2. Modelo de Kelvin Voigt	39
3.2.3. Modelo de Zener	40
3.3. El coeficiente de atenuación	41
3.4. Modelos matemáticos del factor de calidad Q	42
3.5. Modelo de Q constante	43
3.6. Kolsky- Futterman	45
3.7. Otros modelos	46
3.7.1. Modelo de Müller	46
3.7.2. Modelo de Cole-Cole	47
3.7.3. Modelo Zenner	47
4. Migración por corrimiento de fase PS con compensación de energía	49
4.1. Algoritmo de migración PS	49
4.1.1. Extrapolador	51
4.1.2. Factor de calidad Q	53
4.1.3. Modelo de velocidad	53
4.1.4. Condición de imagen	54
5. Implementación y comparación de los métodos	57
5.1. Migración por corrimiento de fase (PS)	58
5.2. Migración PS con recuperación de energía	64
5.2.1. Modelo de atenuación "Kolsky- Futterman"	64
5.2.2. Modelo de atenuación "Kjartansson"	77
Conclusiones	83
Herramientas matemáticas básicas	85
A.1. Convolución	85
A.2. Transformada de Fourier	86
A.2.1. Propiedades de la transformada de Fourier	86

A.3. Propiedades de la función delta de Dirac	86
Trabajo Futuro	89
Bibliografía	91

Índice de figuras

1.1. Sismograma: registro en el geófono del pulso generado por la fuente. . .	1
1.2. Esquema de la adquisición de datos sísmicos. (Imagen adaptada de Stein [1])	3
1.3. Principio de Huygens. Frentes de onda plano y circular.	3
1.4. Frente de ondas reflejadas.	4
1.5. Frente de ondas refractadas.	5
1.6. Modelo de velocidad y trazado de rayos.	7
1.7. Onda refractada críticamente.	8
1.8. Rayo verde: onda directa. Rayo azul: onda reflejada. Rayo rojo: onda refractada críticamente.	8
1.9. Registro en superficie de los tiempos de tránsito para un pulso, producto de una adquisición.	9
1.10. Arreglos en una adquisición en tierra. (Imagen adaptada de [Yilmaz,1987])	10
1.11. Ondas de cuerpo y ondas de superficie.[1]	11
1.12. Levantamiento sísmico, la fuente y los receptores se mueven muestreando varias veces el mismo punto.	11
1.13. Cuando la fuente (f) y el receptor (r) están a cierto offset, la información recopilada corresponde al mismo punto en profundidad.	12
1.14. Esquema para determinar un punto medio común.	13
1.15. Representación gráfica de los diferentes tipos de arreglo de los datos.[1]	13
1.16. Esquema de apilamiento CMP y análisis de velocidad. Imagen tomada de [1].	14
1.17. Trazas horizontalizadas al aplicar la corrección NMO. Imagen tomada de [1].	15

1.18. Migración sísmica de una sección Zero Offset de un evento inclinado.[2]	16
2.1. Volumen V encerrado por una superficie S . [3]	20
2.2. Esquema del método de migración sísmica preapilado en profundidad por corrimiento de fase (PS).	26
2.3. Esquema del método de migración sísmica preapilado en profundidad por corrimiento de fase más interpolación (PSPI).	28
2.4. Esquema del método de migración sísmica preapilado en profundidad (split-step).	30
3.1. Representación del la función Creep.	32
3.2. Construcción de una función causal a partir de la superposición de dos funciones, una par y otra impar.	35
3.3. Representación de: a) la ley Hooke y b) la ley de Newton.	37
3.4. Representación de una unidad de elasticidad.	37
3.5. Respuesta de un material elástico a una fuerza.	38
3.6. Representación de una unidad de viscosidad.	38
3.7. Representación del modelo de Maxwell.	39
3.8. Representación del modelo de Kelvin-Voigt. La deformación en ambos elementos es la misma pero las fuerzas son diferentes. (Imagen tomada de Carcione [4])	40
3.9. Representación del modelo de Zener.	40
3.10. Atenuación y velocidad de fase dependientes de la frecuencia en el modelo de Q constante.	44
3.11. Comparación de la atenuación y la velocidad de fase para los modelos matemáticos de Kjartansson y Kolsky Futterman, la línea de color verde corresponde al modelo de Kjartansson y la línea de color negro al modelo KF.	46
4.1. Esquema Phase Shift + Q	55
5.1. Modelo de velocidad y de factor de calidad Q para dos capas.	58
5.2. Sismograma obtenido para un disparo. Traza extraída del geófonos en la Posición central (Justo en la posición de la fuente).	59
5.3. Resultado de la migración por corrimiento de fase para un solo disparo.	59
5.4. Modelo de velocidad y modelo de Q para tres estratos.	60
5.5. Sismograma para un disparo en el centro del modelo. Traza del geófono ubicado justo en la posición de la fuente.	61

5.6. Imagen migrada por el método por corrimiento de fase para el modelo de tres capas planas.	61
5.7. Modelo de velocidad y de factor de calidad Q que representa cuatro estratos horizontales.	62
5.8. Imagen obtenida de la migración PS para múltiples disparos.	62
5.9. Superposición de la imagen migrada por el método de corrimiento de fase sin tener en cuenta la atenuación con las posiciones reales del modelo.	63
5.10. Onda descendente con diferentes valores de Q . Para: a) $Q = 10$, b) $Q = 20$, c) $Q = 30$, d) $Q = 40$, e) $Q = 50$, f) $Q = 60$	64
5.11. Vista lateral de la onda viajando hacia abajo en medios con diferente factor de calidad. a) $Q = 10$, b) $Q = 20$, c) $Q = 30$, d) $Q = 40$, e) $Q = 50$, f) $Q = 60$	65
5.12. Modelado utilizando OWWE. Onda descendente con amplitud corregida.	66
5.13. Onda con amplitud corregida utilizando el modelo de Futterman y Kolsky para una velocidad compleja.	66
5.14. Modelo de velocidad y del factor de calidad para 4 estratos horizontales.	67
5.15. Sismograma sintético para un disparo. Traza extraída del geófono ubicado en el centro del modelo en superficie (Posición de la fuente).	67
5.16. Imagen final de la migración PS con recuperación de energía.	68
5.17. Migración PS. Sin recuperación de energía y con recuperación de energía	68
5.18. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.	69
5.19. Modelo de velocidad de 4 capas con variaciones laterales de velocidad.	70
5.20. Sismograma sintético para un disparo. Traza extraída del geófono ubicado en la posición de la fuente para esta adquisición.	70
5.21. Imagen obtenida utilizando migración PS Sin recuperación de energía, en un modelo con variaciones laterales de velocidad, para múltiples disparos.	71
5.22. Imagen final resultado de la migración PS Con recuperación de energía utilizando el modelo de Futterman y Kolsky en un modelo de velocidad con variaciones laterales.	71
5.23. Migración PS sin recuperación de energía y con recuperación de energía utilizando el modelo de Q propuesto por Futterman y Kolsky.	72
5.24. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.	72

5.25. Modelo de velocidad y del factor de calidad para 4 capas con variaciones laterales de velocidad.	73
5.26. Sismograma sintético para un disparo. Traza extraída del geófono ubicado en la posición de la fuente).	74
5.27. Migración PS sin recuperación de energía.	74
5.28. Migración PS con recuperación de energía utilizando el modelo matemático de Futterman y Kolsky.	75
5.29. Comparación de las imágenes migradas por los métodos de PS, primero sin recuperación de energía y luego utilizando el modelo matemático de Futterman y Kolsky.	75
5.30. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.	76
5.31. Instantáneas para la onda propagada en medios con diferentes valores del factor de calidad. a) $Q = 10$, b) $Q = 20$, c) $Q = 30$, d) $Q = 40$, e) $Q = 50$, f) $Q = 60$	77
5.32. Modelado utilizando OWWE. Onda descendente con amplitud corregida.	77
5.33. Modelo de velocidad y del factor de calidad para 4 estratos horizontales.	78
5.34. Imagen obtenida al realizar la migración sísmica PS con recuperación de energía al utilizar el modelo matemático de Kjartansson para la velocidad compleja.	78
5.35. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.	79
5.36. Imagen obtenida al realizar la migración sísmica PS con recuperación de energía al utilizar el modelo matemático de Kjartansson para la velocidad compleja.	80
5.37. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.	80
5.38. Comparación de las imágenes finales obtenidas con migración PS.	81

Introducción

En el presente trabajo, se realiza una descripción física del fenómeno de atenuación de ondas sísmicas cuando se propagan en medios geológicamente complejos y cuál es su relevancia en la obtención de imágenes sísmicas del subsuelo. Además, se estudia un método de migración basado en las ecuaciones de onda unidireccionales (En inglés OWWE¹). Para analizar este problema, es necesario definir el modelo matemático adecuado para la atenuación, así como interpretar e implementar los esquemas de migración de corrimiento de fase (PS²).

El objetivo fundamental de este trabajo, es implementar un método capaz de obtener mejores imágenes del subsuelo durante la migración sísmica, al tener en cuenta la atenuación (pérdida de amplitud diferenciada por la frecuencia) y dispersión (velocidad de propagación diferenciada por la frecuencia) de las ondas durante la propagación. La complejidad del medio depende de las consideraciones que se tengan en cuenta, en este trabajo los medios de propagación incluyen el factor de calidad Q (Inverso de la atenuación), son isótropos (las características del medio son independientes de la dirección) y presentan variaciones de velocidad lateral y verticalmente.

Desde un punto de vista comercial, la exploración sísmica es una herramienta cuyo objetivo es encontrar yacimientos de crudo o gas así como minerales para su explotación. En estas zonas, la composición de los materiales al interior del subsuelo puede producir atenuación de las ondas, haciendo difícil la interpretación de los datos obtenidos en superficie.

Una descripción muy general de la exploración sísmica es la siguiente: en la superficie se generan ondas mediante un pulso que puede ser una explosión, estas ondas atraviesan el subsuelo, se reflejan en las capas internas, y son registradas en superficie por instrumentos llamados geófonos. El tratamiento de esta información se llama procesamiento de los datos sísmicos y consta de varias etapas. Una de las etapas fundamentales del procesamiento es la migración, que es el proceso de reconstrucción de una sección sísmica de tal manera, que la localización de los

¹OWWE: One Way Wave Equations. (Ver 2.38)

² Por sus siglas en inglés: phase shift

reflectores se ubican en su posición original (en profundidad). La migración mejora la resolución, porque reúne la energía debida a la redistribución en el frente de onda, y porque hace desaparecer las difracciones asociadas a picos en los extremos de las fallas. En un medio con atenuación, las trazas que conforman los sismogramas se ven deformadas debido a la pérdida de frecuencias y una pérdida considerable en la amplitud de la señal.

Inicialmente se estudia desde el punto de vista matemático las ecuaciones de onda unidireccionales (OWWE), una vez se obtiene la ecuación de migración de corrimiento de fase **PS**, se procede a programar y validar el método, los datos sintéticos se generan haciendo uso de software libre Seismic Unix (SU). Para modificar la ecuación de onda e incluir el factor de calidad Q , se estudian dos diferentes modelos matemáticos que señalan el comportamiento de las ondas en materiales con propiedades disipativas; se modifica entonces el código de migración para recuperar la energía y de nuevo se utilizan datos sintéticos para la validación. Durante la realización del trabajo de investigación uno de los principales obstáculos fue obtener datos sintéticos modelados con atenuación.

La estructura general del documento es la siguiente: En el capítulo 1 se explica el experimento sísmico, es decir bajo qué condiciones y de qué forma obtener la información del subsuelo. Se dan a conocer aspectos generales y conceptos del lenguaje técnico utilizado en el documento. En el capítulo 2, se muestra la migración OWWE y el desarrollo matemático que soporta el método. En el capítulo 3, se describe la teoría sobre el fenómeno de atenuación y el factor de calidad, haciendo énfasis a los modelos matemáticos. En el cuarto 4 se incluye el modelo de atenuación elegido en la migración de corrimiento de fase **PS**. En el capítulo final se realiza una implementación con modelos sintéticos para comparar la efectividad de los métodos.

CAPÍTULO 1

Exploración sísmica

Las ondas sísmicas son generadas en forma natural (terremotos) o en forma artificial (explosiones controladas), se propagan por el medio (subsuelo) y posteriormente son registradas en ciertos dispositivos (geófonos, hidrófonos, acelerómetros, etc.). Los registros, llamados sismogramas (figura 1.1), contendrán la información tanto de la fuente como del medio de propagación.

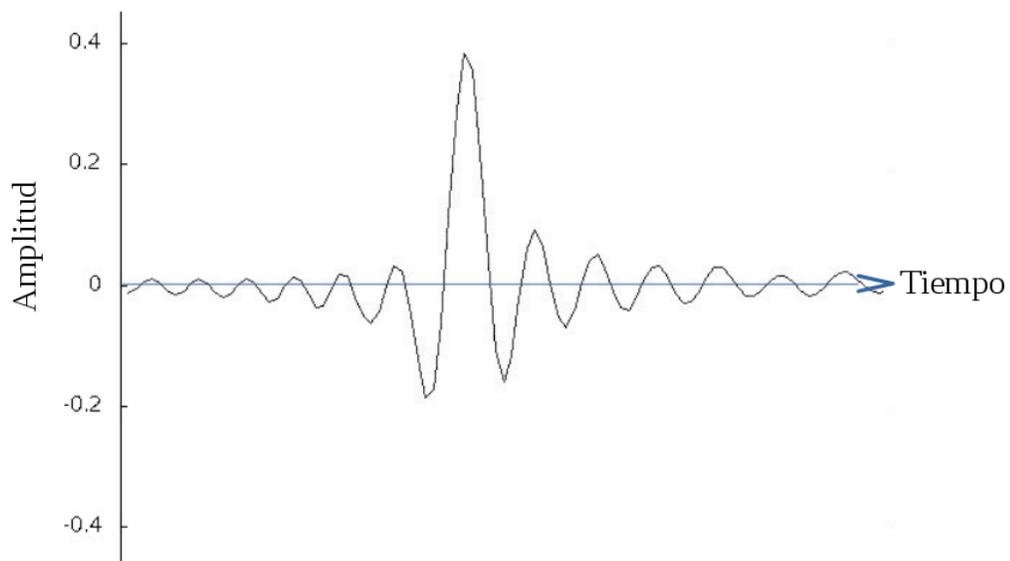


FIGURA 1.1. Sismograma: registro en el geófono del pulso generado por la fuente.

La geofísica de exploración utiliza métodos que se clasifican como activos y pasivos. Los métodos pasivos son aquellos que realizan la medición de un campo producido de manera natural y permanente por la tierra, dentro de ellos se encuentran los métodos magnetométrico y gravimétrico también conocidos como métodos potenciales. Los métodos activos por el contrario requieren una fuente de corta duración que puede ser natural o artificial.

En este capítulo se estudiarán los métodos activos, principalmente el método sísmico que involucra la activación de una fuente impulsiva que genera una perturbación la cual se propaga en el subsuelo (figura 1.1). Para describir la propagación de dicha perturbación se requiere la mecánica de medios continuos y la teoría de propagación de ondas en medios elásticos.[5]

1.1. Adquisición de datos sísmicos

Un levantamiento en sísmica de reflexión básicamente está compuesto por una o varias fuentes y un conjunto de receptores. Los datos sísmicos son recolectados con unos dispositivos llamados geófonos que miden la variación lateral de estas perturbaciones, su finalidad es registrar los movimientos sobre la superficie terrestre producidos por las reflexiones de las ondas que ocurren en las superficies que separan los estratos geológicos con propiedades elásticas diferentes y por lo tanto con velocidades de propagación diferentes. Estas superficies entre las capas geológicas se conocen como reflectores o interfases.[1]

La prospección sísmica se basa en el mismo principio de la sismología, que consiste en generar ondas elásticas artificiales utilizando fuentes sísmicas como explosivos, martillos, vibradores, etc., las cuales se propagan a través de la tierra y que son registradas en una serie de geófonos distribuidos linealmente, con el objetivo de obtener imágenes sísmicas del subsuelo, que se utilizan para entender la geología de la tierra. Si lo que se busca es cierto tipo de recursos tales como el petróleo o gas, la información dada por las ondas sísmicas es de gran ayuda para determinar zonas de acumulación de dichos recursos (trampas); esta aplicación se denomina sísmica de exploración.

En la figura 1.2, se muestra una trampa geológica, donde posiblemente se encuentren hidrocarburos o gas; la trampa consiste en una región conformada por rocas sedimentarias porosas (por ejemplo una arenisca) donde se puede alojar el óleo o el gas y una roca sello como el esquisto que es un tipo de roca no permeable, lo que evita que los fluidos escapen. En esta figura se puede apreciar adicionalmente el comportamiento de las ondas al viajar a través del subsuelo.[1]

Si el estudio es de las ondas generadas por los terremotos, estas pueden ayudar a determinar el movimiento de las placas tectónicas y los procesos previos y posteriores a un sismo. A medida que las ondas viajan por el interior de la tierra sufren los fenómenos de dispersión, difracción, refracción y reflexión.

La dispersión ocurre porque los componentes de frecuencia de la onda viajan a diferentes velocidades, debido a esto se produce una deformación del pulso mientras se propaga. La difracción ocurre cuando la onda llega a una singularidad (pico) y la energía viaja en todas las direcciones. La refracción es el cambio de dirección de propagación que experimentan las ondas al pasar de un medio a otro, en los que se propagan con diferente velocidad[1]. Cuando el ángulo de incidencia

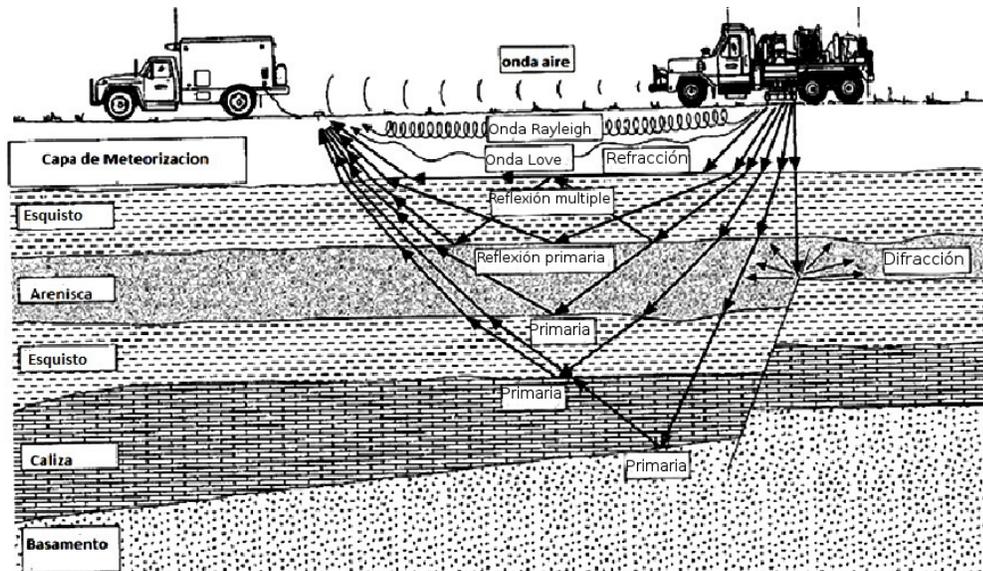


FIGURA 1.2. Esquema de la adquisición de datos sísmicos. (Imagen adaptada de Stein [1])

es igual al ángulo crítico aparecen las ondas llamadas críticamente refractadas (“Head Wave”). La reflexión de una onda es el cambio de dirección que experimenta ésta cuando choca contra una superficie sin cambiar de medio de propagación.

Partiendo de estos fenómenos podemos hablar de dos tipos de sismica, sísmica de reflexión y sísmica de refracción, teniendo en cuenta el **principio de Huygens**, el **principio de Fermat** y la **ley de Snell**.

Principio de Huygens: este principio establece que cada punto del frente de onda que se propaga sirve como una fuente puntual de ondas secundarias esféricas, de tal manera que el frente de onda en un tiempo posterior es la envolvente de estas ondas[6]. En la figura 1.3, la parte a) muestra que un frente de onda plano genera un frente de onda plano, y en la parte b) un frente de onda esférico genera un frente de onda esférico, la distancia entre cada frente de onda depende de la velocidad de propagación de la onda. [6].

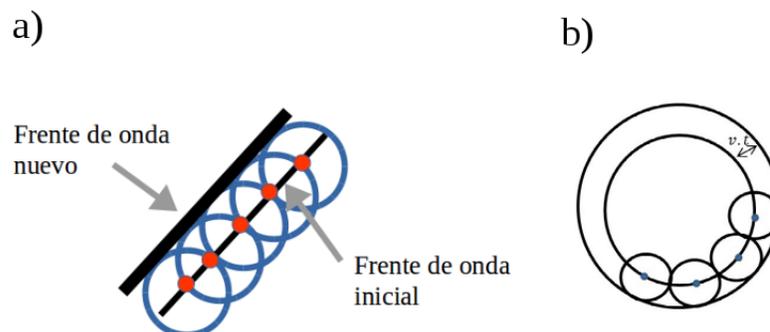


FIGURA 1.3. Principio de Huygens. Frentes de onda plano y circular.

Leyes de Snell: por medio de las leyes de Snell se explican los fenómenos de reflexión y refracción que sufre una onda cuando encuentra una interfase de separación entre dos medios diferentes, sus características se modifican en base a la diferencia de impedancia de los dos materiales a ambos lados de la interfase. En general la onda incidente se reflejará parcialmente desde la interfase y parcialmente se transmitirá al otro material adyacente.[7]

La reflexión tiene lugar cuando la onda avanza por un medio homogéneo (onda incidente), al chocar con la superficie de separación de los medios, regresa al primero propagándose por él en otra dirección distinta a la inicial (onda reflejada). En la reflexión se debe cumplir dos características: la onda incidente, la onda reflejada y la normal a la superficie reflectiva, están en el mismo plano y que el ángulo de incidencia medido desde la normal es igual al ángulo reflejado (figura 1.4).

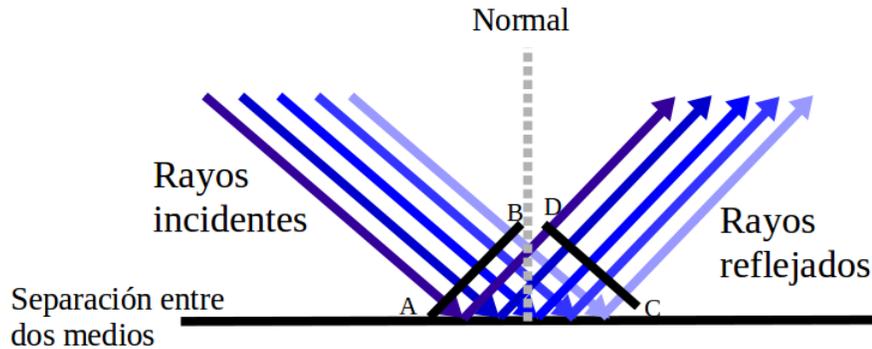


FIGURA 1.4. Frente de ondas reflejadas.

De estas leyes se deduce que si una onda incide perpendicularmente a la superficie de separación de los dos medios, la onda reflejada se propaga en la misma dirección pero en sentido contrario. Que el ángulo de incidencia y el ángulo reflejado sean iguales es debido a que si el foco emisor de las ondas dista mucho de la superficie reflectora, los rayos¹ incidentes serán paralelos y el frente de onda será plano y perpendicular a dichos rayos.[6]

Al avanzar la onda plana (ver figura 1.4), su extremo A será el primero que encuentre la superficie reflectora y según el **principio de Huygens**, se convierte en una nueva fuente. Estas ondas continúan viajando en el mismo medio luego su velocidad no cambia; por lo cual cuando el extremo B del frente de onda AB recorrió el espacio BC , las ondas emitidas por A habrán recorrido otro espacio AD , verificándose que $BC = AD$. De este modo, los triángulos rectángulos ADC y ABC serán iguales.[7] Por lo tanto

$$\theta_i = \theta_r, \quad ^2 \quad (1.1)$$

¹Rayo: la onda sigue una trayectoria en línea recta que une la fuente con el frente de onda, en lo que sigue del documento se tratará la dirección de las ondas como rayos.

²subíndices: i incidente, r reflejado.

En el caso de la refracción se tiene un rayo refractado, que hace referencia a la dirección en la que se propaga la onda en el segundo medio.

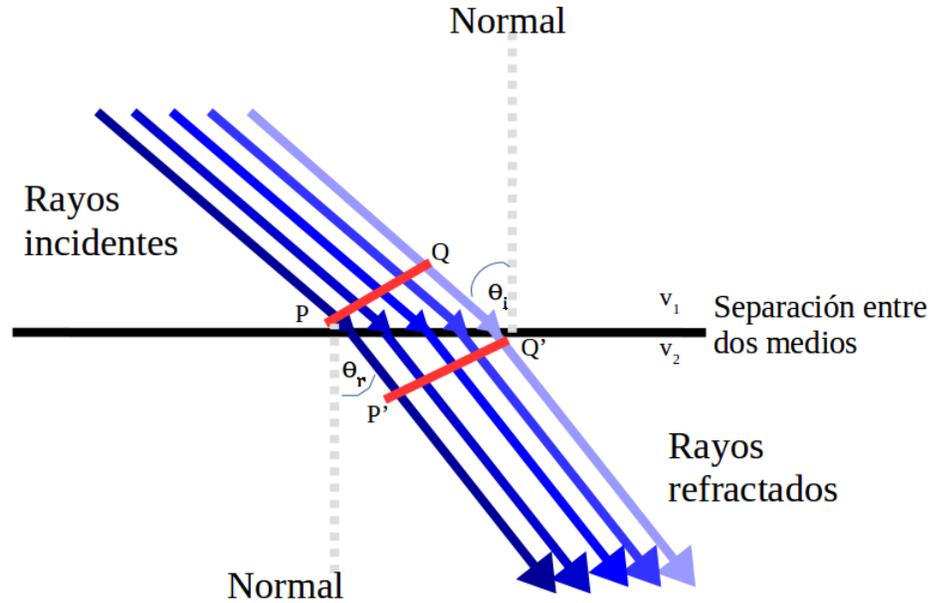


FIGURA 1.5. Frente de ondas refractadas.

El ángulo de refracción (θ_r) se forma entre el rayo refractado y la normal a la superficie formada por la separación de los medios. En este fenómeno se cumple que la razón entre el seno del ángulo de incidencia (θ_i) y el seno del ángulo de refracción es, para dos medios dados, constante (n) e igual a la razón entre las velocidades v_1 y v_2 con que se propaga la onda respectivamente, en cada medio, verificándose que:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad (1.2)$$

Cuando una onda incide perpendicularmente a la superficie de separación de los dos medios, la onda refractada se propaga en la misma dirección, es decir, el rayo refractado no sufre desviación. Para demostrar la **ley de Snell** de la refracción 1.2 se tiene que:

Al avanzar la onda PQ (ver figura 1.5), su extremo P es el primero en alcanzar la superficie de separación de ambos medios, el cual se convierte, según el **principio de Huygens**, en un foco emisor de nuevas ondas. Estas penetran en el nuevo medio recorriendo el espacio PP' en el mismo tiempo que el extremo Q de la onda incidente PQ recorre el espacio QQ' , verificándose para las velocidades v_1 y v_2 [7]

$$v_1 = \frac{QQ'}{t} \quad y \quad v_2 = \frac{PP'}{t}, \quad (1.3)$$

dividiendo entre sí estas igualdades

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{QQ'}{PP'} \quad (1.4)$$

Por otro lado, en los triángulos rectángulos QPQ' y $PQ'P'$, llamando θ_i al ángulo de QPQ' y θ_r al ángulo de $PQ'P'$, se tiene

$$\sin(\theta_i) = \frac{QQ'}{PQ'} \quad y \quad \sin(\theta_r) = \frac{PP'}{PQ'} \quad (1.5)$$

dividiendo entre sí estas igualdades

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} = \frac{QQ'}{PP'} \quad (1.6)$$

Comparando las ecuaciones 1.4 y 1.6 donde α es el ángulo incidente y β es el ángulo refractado, por lo tanto se llega a la expresión 1.2.

Otro principio fundamental en la descripción de los fenómenos ondulatorios es el **principio de Fermat** el cual constituye un fundamento de la óptica geométrica. Formulada a mediados del siglo *XVII* por el matemático francés Fermat; este principio establece que un rayo viajará por el camino cuyo tiempo de viaje es mínimo.[8]

En la sismica de reflexión se registra en superficie las ondas que rebotan en las interfases formadas por los contrastes de impedancia. Una primera aproximación a la estructura interna de la tierra es “considerar una tierra plana” con variación litológica sólo en profundidad. En esta primera aproximación, para mejor comprensión se puede considerar el caso de una sección en el plano (X, Z) . todos los puntos que están a la misma profundidad son equivalentes, lo que significa que pertenecen a un mismo material. En los estudios sismológicos para un rango de propagación hasta de $1000km$, esta aproximación de la tierra plana formada por capas horizontales homogéneas se considera válida. [9].

En el modelo (figura 1.6), para cada capa de espesor h_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$ donde N es el número total de capas. Las ondas de cuerpo (P y S) se propagan en cada capa con una velocidad constante V_{p_i} , V_{s_i} , $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$.

Se puede tener en cuenta un modelo de velocidades, es decir el valor de velocidades de propagación para cada onda en función de la profundidad. A partir de un modelo como el de la figura 1.6, se puede hallar los tiempos de propagación de las ondas generadas (por ejemplo en la superficie) y que se refleja en las diferentes interfases.

En la figura 1.6 la fuente está representada por una explosión, los receptores por triángulos, ubicados en superficie en las posiciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, la propa-

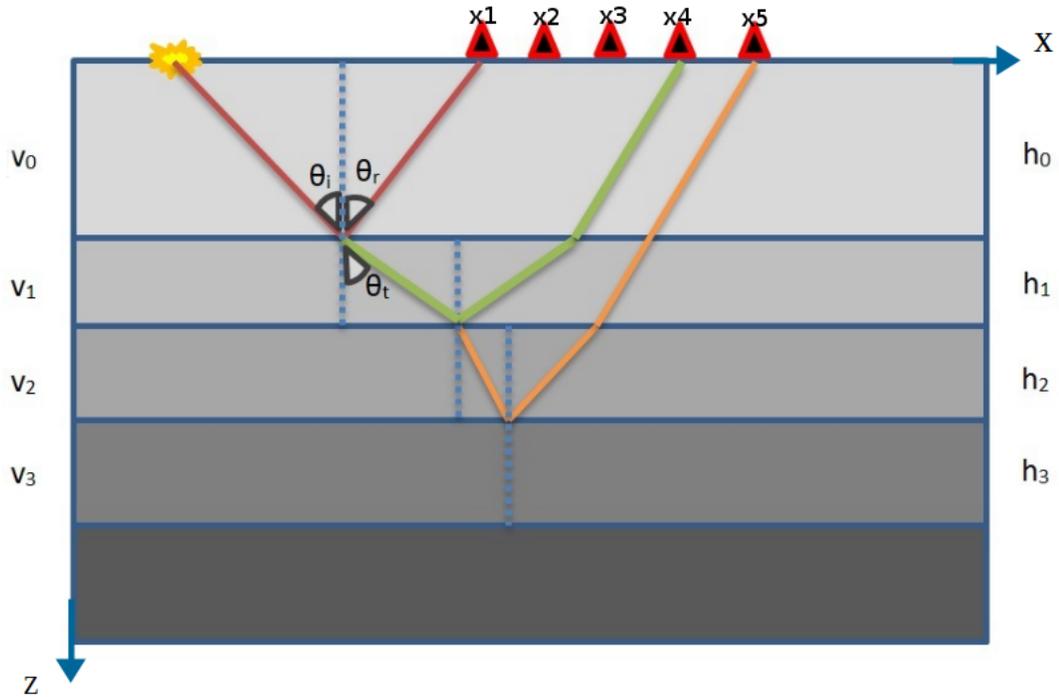


FIGURA 1.6. Modelo de velocidad y trazado de rayos.

gación de las ondas se representan por medio de líneas o curvas perpendiculares al frente de onda llamadas rayos sísmicos.

En los puntos de las discontinuidades al llegar un rayo se debe satisfacer la **ley de Snell**:

$$\frac{\sin \theta_1}{V_{p1}} = \frac{\sin \theta_2}{V_{p2}} \quad (1.7)$$

En dichos puntos se generan dos ondas (Considerando que no hay conversión de ondas P a S), la reflejada y la refractada. Si se conoce la distribución de velocidades y asumiendo un modelo de capas planas y paralelas, se puede determinar los puntos x_1, x_2, \dots, x_N (Puntos en superficie donde llegan las ondas) y los tiempos de llegada T_1, T_2, \dots, T_N a dichos puntos.

De la **ley de Snell** se puede despejar el ángulo de reflexión en términos de la velocidad de las capas

$$\sin(\theta_{k+1}) = \frac{V_{k+1}}{V_k} \sin(\theta_k) \quad (1.8)$$

Si se asume un modelo de la velocidad de propagación que aumenta con la profundidad $V_{k+1} > V_k$, luego en la expresión anterior $\sin(\theta_{k+1}) > \sin(\theta_k)$ por lo tanto $\theta_{k+1} > \theta_k$, puede suceder que $\theta_{k+1} = 90^\circ$ entoces

$$\frac{\sin(\theta_k)}{V_k} = \frac{1}{V_{k+1}} \quad (1.9)$$

entonces

$$\sin(\theta_k) = \frac{V_k}{V_{k+1}} \quad (1.10)$$

este ángulo se llama ángulo crítico. La figura 1.7 muestra una onda refractada que viaja por la interfase³ generando un frente de onda que emerge a la superficie con el ángulo crítico. Las ondas refractadas aportan información valiosa y su estudio

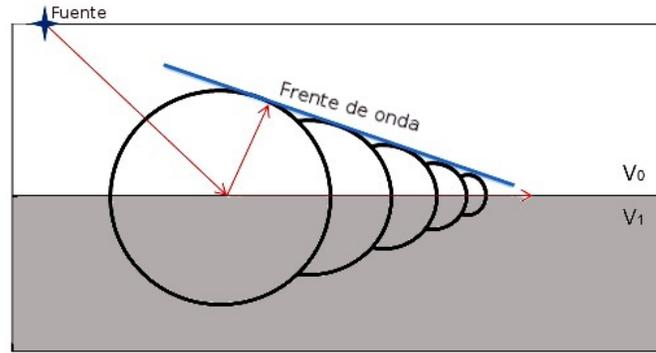


FIGURA 1.7. Onda refractada críticamente.

constituye la sismica de refracción. Para este tipo de sismica se estudia la onda “Head wave”, cuyo comportamiento está modelado por el **principio de Huygens**, que dice que las ondas a medida que viajan por la interfase generan un frente de onda que es registrado en superficie (ver figura 1.7). Tres tipos de ondas (rayos) o eventos se registran en la superficie, la onda directa, la onda reflejada y la onda refractada críticamente (ver figura 1.8).

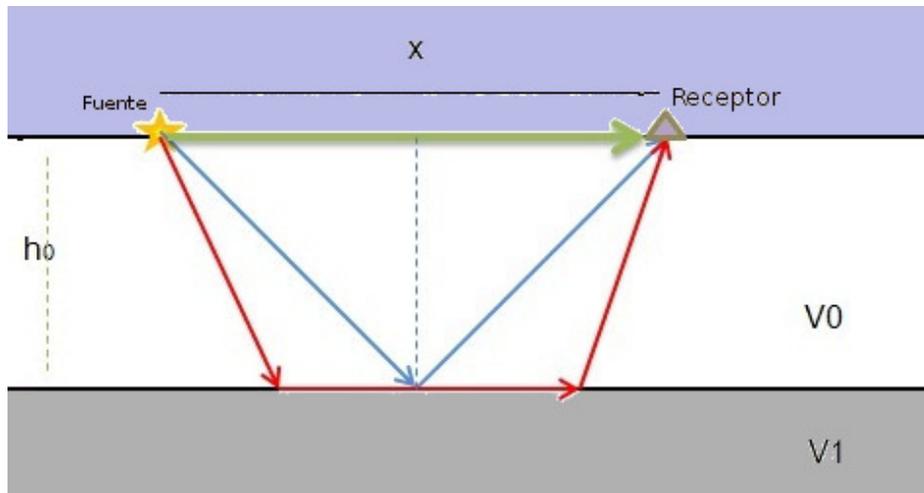


FIGURA 1.8. Rayo verde: onda directa. Rayo azul: onda reflejada. Rayo rojo: onda refractada críticamente.

Tanto en la sismica de reflexión como de refracción se utiliza el concepto de tiempo

³Interfase: Discontinuidad en dos medios con diferentes características.

de tránsito (“Travel time” en inglés) que es el tiempo que toma la onda en ir de la fuente a la interfase y luego en subir a la superficie y ser registrada en el receptor. Los caminos que recorre la onda en principio pueden ser hallados usando la **ley de Snell**.

Si se ubica la fuente en la mitad del modelo y en superficie, con geófonos a ambos lados, la imagen registrada para un sólo disparo, se visualiza en la figura 1.9, donde se muestran los tres registros principales para la onda directa, reflejada y críticamente refractada, respectivamente.

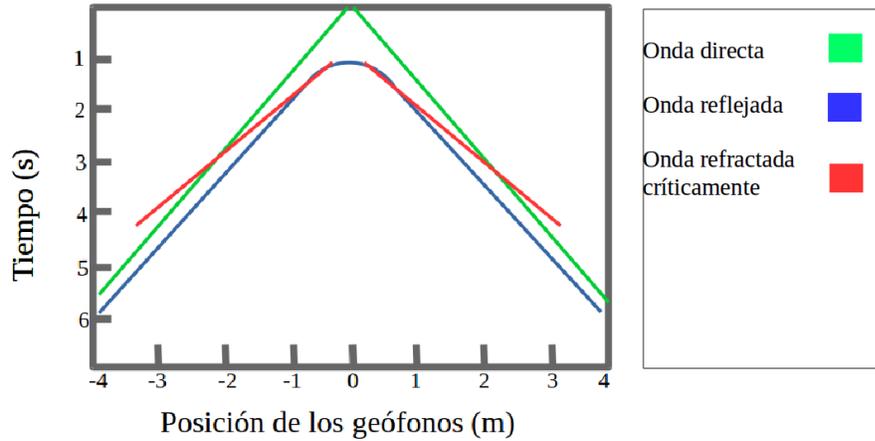


FIGURA 1.9. Registro en superficie de los tiempos de tránsito para un pulso, producto de una adquisición.

El tiempo de tránsito para la onda directa se puede hallar con la siguiente expresión

$$T_D(x) = \frac{x}{V} \quad (1.11)$$

donde x es la distancia de la fuente al receptor (llamado Offset) y h_0 es la profundidad a la que se encuentra la interfase. Para la onda reflejada el tiempo de tránsito es encontrado con la expresión

$$T_R(x) = \frac{2\sqrt{\frac{x^2}{4} + H^2}}{V} \quad (1.12)$$

y para la onda refractada

$$T_H(x) = \frac{2H}{V_1 \cos(\theta_c)} + \frac{x - 2H \tan(\theta_c)}{V_2} \quad (1.13)$$

Los tiempos T_D , T_R , T_H son funciones de la posición x y las expresiones (1.11) y (1.13) son funciones lineales. Por otra parte la ecuación (1.12) corresponde a una hipérbola con vértice en el punto (0, 0), como se pudo observar en la figura 1.9.

En el presente trabajo el interés se centra en la sísmica de reflexión, por lo que se omite la discusión de las ondas refractadas y la onda directa.

Para iniciar el experimento sísmico, se tiene dos tipos de arreglos terrestres, el primero es un arreglo donde se colocan geófonos a cada lado de la fuente, llamado en inglés “**simetrical split - spread**”, el segundo arreglo consiste en colocar los geófonos solamente a un lado de la fuente, denominado “**end on spread**” (ver figura 1.10).

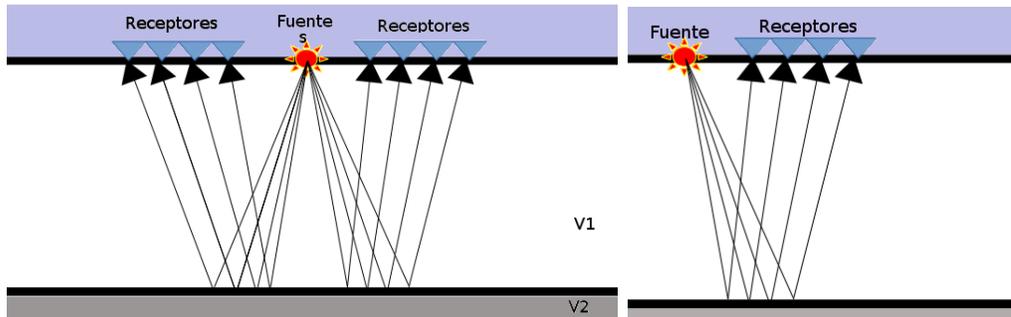


FIGURA 1.10. Arreglos en una adquisición en tierra. (Imagen adaptada de [Yilmaz,1987])

1.1.1. Ondas sísmicas

Las ondas producidas en la fuente se pueden clasificar dependiendo del registro por el tiempo de llegada y por el comportamiento durante la propagación, según la cual se tienen ondas de cuerpo como la onda P y la onda S y las ondas de superficie como las ondas Love y Rayleigh (ver figura 1.11).

- Ondas P : las ondas primarias son ondas de presión, donde las partículas se mueven en la dirección de propagación de la onda. Son las ondas que viajan con mayor velocidad por lo que son las primeras en ser registradas en el geófono.
- Ondas S : son ondas de corte o cizalla, es decir que la dirección de movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda; son las segundas en registrarse en los geófonos.
- Ondas de superficie: las ondas que viajan a través de las interfases y por la frontera en la superficie. Tienen como característica una amplitud mayor que las ondas P y S , generan ruido⁴ y se pueden eliminar con filtros en etapas tempranas en el procesamiento de los datos; los nombres que reciben son ondas Love y ondas Rayleigh.

⁴Ground roll: ruido generado por las ondas al viajar por material superficial no consolidado.

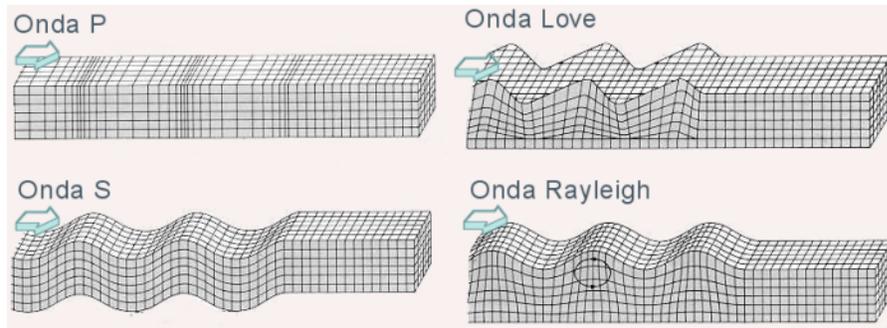


FIGURA 1.11. Ondas de cuerpo y ondas de superficie.[1]

1.2. Procesamiento sísmico

La finalidad del procesamiento sísmico es la generación de imágenes del subsuelo. Consiste básicamente de dos etapas: el apilamiento y la migración. Los datos pueden ser adquiridos utilizando las geometrías mencionadas anteriormente, colocando arreglos de fuente y receptores espaciados una cierta distancia (offset⁵). El apilado consiste en agrupar los datos de los registros que muestrean un mismo punto, este ordenamiento depende del tipo de arreglo utilizado.

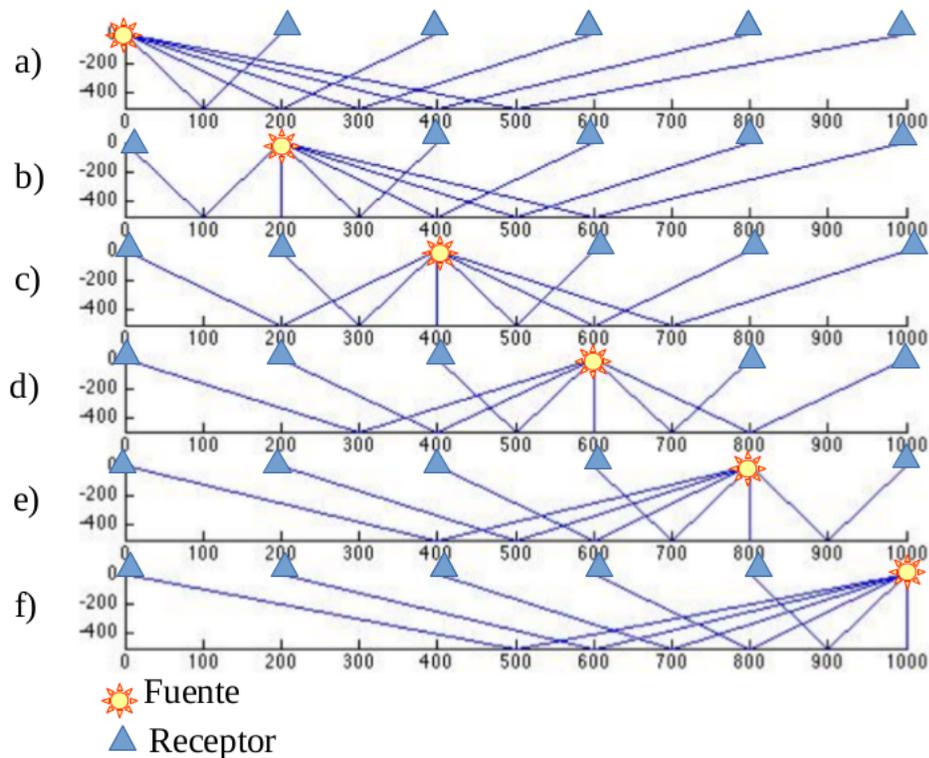


FIGURA 1.12. Levantamiento sísmico, la fuente y los receptores se mueven muestreando varias veces el mismo punto.

⁵Distancia entre fuente y receptor

En la figura 1.12, se presenta un medio de velocidad constante de $800m$ de profundidad, y una distancia de $1km$ en superficie, los receptores se ubican cada $200m$, la adquisición se realiza tomando 6 muestras, es decir la fuente y receptores se mueven 6 veces muestreando de esta manera un mismo punto del reflector registrando esta información en diferentes geófonos. En este experimento se asume inicialmente que la velocidad varía solamente en profundidad.

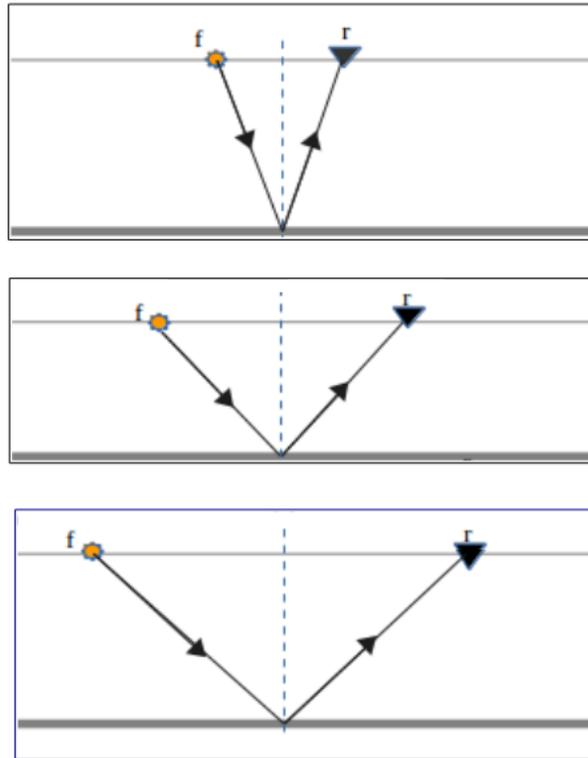


FIGURA 1.13. Cuando la fuente (f) y el receptor (r) están a cierto offset, la información recopilada corresponde al mismo punto en profundidad.

Los datos son analizados reagrupando los sismogramas que muestrean el mismo punto en el reflector, este punto es conocido como punto medio común (CMP)⁶ (ver figura 1.13). Para cada punto medio, hay un conjunto de trazas con diferentes offsets. El punto medio común m y el offset of están definidos en términos de la ubicación de la fuente f y de la posición de los receptores r por la siguiente ecuación:

$$m = (f + r)/2, \quad of = (f - r). \quad (1.14)$$

Por lo tanto un sismograma individual es especificado por cada posición de las fuentes y receptores.

⁶CMP: por sus siglas en inglés Common mid point

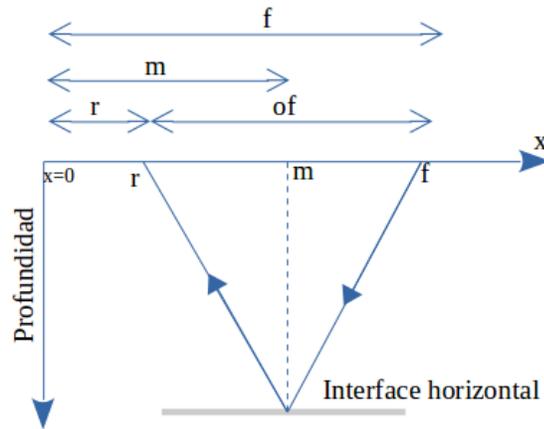


FIGURA 1.14. Esquema para determinar un punto medio común.

El apilamiento mejora la relación señal-ruido al sumar los registros de los sismogramas, esto se logra al organizar y combinar los datos de diferentes formas (ver figura 1.15), una de las formas más frecuentes de encontrar los datos apilados es cuando las trazas tienen el mismo punto medio y diferentes offsets pueden ser agrupados en un punto medio común (CMP).

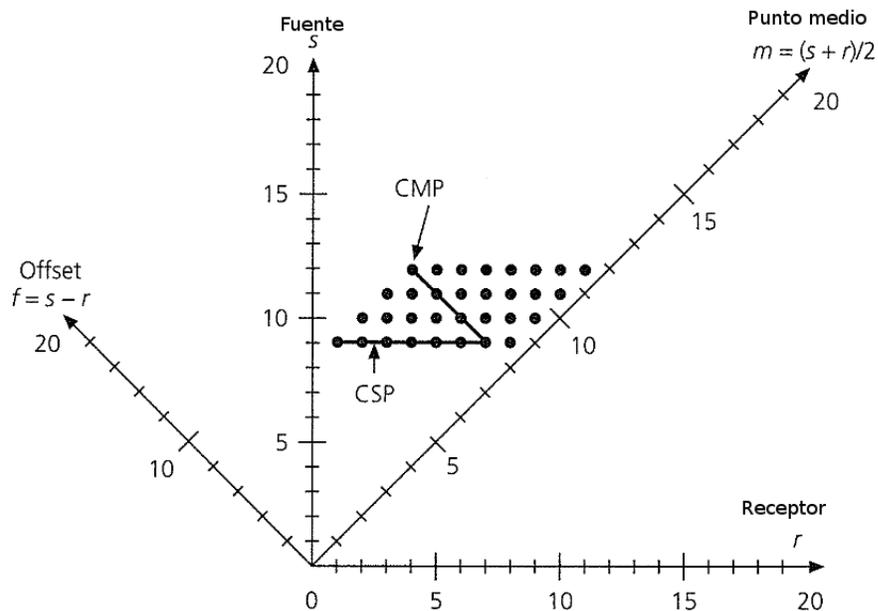


FIGURA 1.15. Representación gráfica de los diferentes tipos de arreglo de los datos.[1]

Ordenando las trazas por punto medio y offset no se hace distinción entre la posición la fuente y el receptor. Esto se justifica con el principio de reciprocidad, por lo cual estas dos geometrías puede producir sismogramas idénticos. Por lo tanto, un punto de receptor común puede simular un perfil reverse, porque, por la

reciprocidad, éste da el mismo dato como un punto de fuente común en la dirección contraria.[1]

El ordenamiento CMP consiste en reagrupar las trazas sísmicas que por geometría pertenecen a un mismo punto medio entre una fuente y un receptor determinado. Se deduce, por construcción, que el espacio entre CMP es la mitad del espaciado entre geófonos y que las reflexiones en estos conjuntos poseen también trayectorias hiperbólicas (ver figura 1.16).

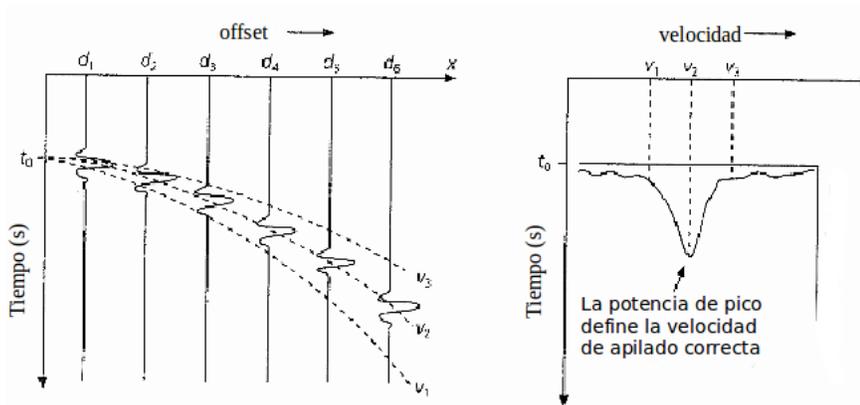


FIGURA 1.16. Esquema de apilamiento CMP y análisis de velocidad. Imagen tomada de [1].

En este nuevo orden, todas las trazas pertenecientes a un mismo punto reflector dan cuenta de las mismas características reflectivas del medio, por lo que se pueden sumar para obtener una traza resultante (traza CMP) que posee mejor relación señal ruido. Para ello es necesario en el eje de tiempo horizontalizar el evento (paso a offset cero⁷) de manera que todas las trazas al ser sumadas estarán en fase. A este paso se le conoce como corrección NMO⁸ y la forma de conseguir, dicha alineación es mediante la asignación de la velocidad a la trayectoria de reflexión (ver figura 1.17).

Con los resultados del análisis de velocidad y una vez aplicadas las correcciones NMO se procede, mediante la suma, a obtener la sección sísmica. Así pues, una sección sísmica está formada por todas las trazas CMP y representa una imagen de los reflectores presentes en el subsuelo de offset cero. Esta sección obtenida aún no es la definitiva, si no que todavía deben realizarse determinados tratamientos, la cantidad de veces que se aplican, al igual que ocurre con la edición de los disparos, depende en última instancia de la calidad de los datos.[1]

El segundo componente de la construcción de imágenes es “la migración”,

⁷zero offset: fuente y receptor en la misma posición.

⁸NMO: Normal Move Out.

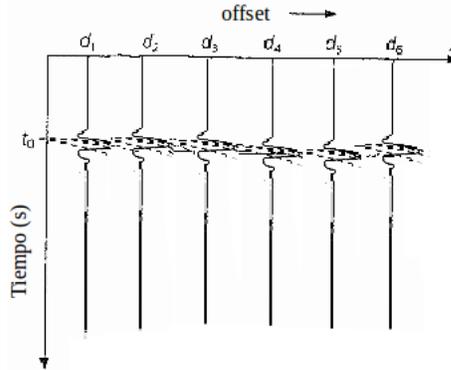


FIGURA 1.17. Trazas horizontalizadas al aplicar la corrección NMO. Imagen tomada de [1].

que es el tema que concierne a este trabajo.[10]

1.3. Migración sísmica

La migración de datos sísmicos mueve los eventos a sus posiciones correctas, colapsa las difracciones, aumenta la resolución espacial y es probablemente la más importante de todas las etapas de procesamiento.[11]

La migración se logra a través de diversas soluciones de la ecuación de onda que describe la propagación de las ondas elásticas a través de las rocas. Los algoritmos de migración suelen llevar el nombre de su inventor (por ejemplo, Kirchhoff) o el nombre del tipo de solución matemática (por ejemplo, diferencia finita). A los datos sísmicos se puede aplicar un algoritmo de migración antes o después de ser apilados.

La figura 1.18a) muestra un experimento sísmico de desplazamiento cero (Zero offset), realizado en un medio de velocidad constante en el cual se encuentra un reflector inclinado. Las fuentes y receptores están marcados con puntos rojos. En la imagen de la sección apilada se muestra el reflector en color verde (ver figura 1.18b), esta posición del reflector es incorrecta y genera una interpretación de esta sección de forma errónea. La ecuación mostrada en la figura 1.18b) relaciona la inclinación del reflector antes y después de la migración y es conocida como ecuación de migración. Tomando un arco semicircular, igual al tiempo de recorrido de cada una de las posiciones registradas y construyendo una línea tangente a los arcos, se descubre la posición verdaderamente migrada del reflector (ver figura 1.18c)).

El proceso de migración hace que la imagen resultante se vea como la verdadera estructura geológica y ha movido la reflexión hacia arriba y el segmento migrado (azul) es más pronunciado y más corto que el segmento de reflexión

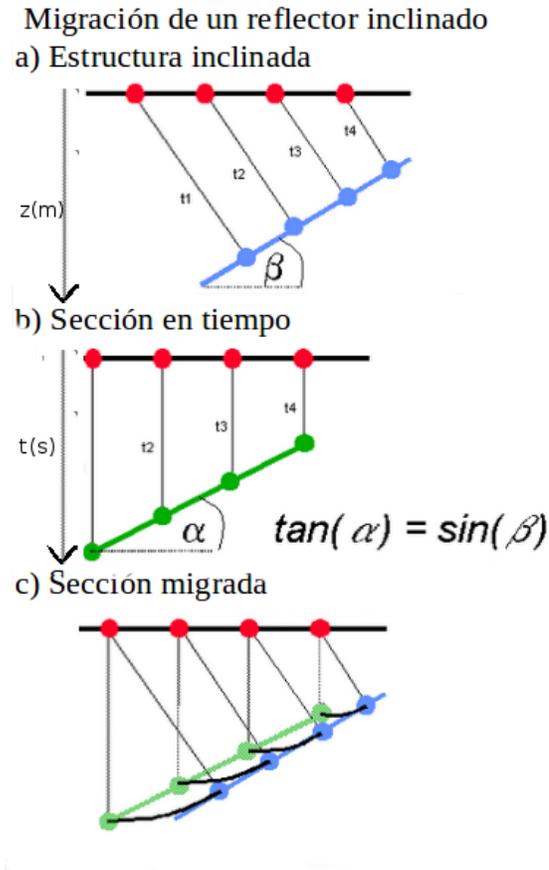


FIGURA 1.18. Migración sísmica de una sección Zero Offset de un evento inclinado.[2]

(verde). Para que la migración sea correcta (ver figura 1.18a)) el eje vertical de (ver figura 1.18c)) sería en profundidad y requeriría conocer la velocidad (para convertir la sección de tiempo grabada a la sección de profundidad migrada).

1.3.1. Migración post-apilado (Poststack)

Esta migración toma mucho menos tiempo que la migración antes del apilamiento, porque el apilamiento reduce en un orden de magnitud la cantidad de trazas que deben procesarse. Para que la migración después del apilamiento resulte exitosa, las suposiciones que se hacen en el apilamiento deben estar bien fundadas: la amplitud de la traza apilada debe representar a la de la traza de incidencia normal y los arribos reflejados deben ser aproximadamente hiperbólicos. Estas suposiciones son válidas sólo cuando se pueden ignorar las variaciones litológicas y el contenido de fluidos en el área cubierta por la colección de trazas, y cuando la estructura es simple. Cualquier otra condición exige el uso de migración antes del apilamiento.[10]

1.3.2. Migración pre-apilado (Prestack)

Efectuada antes del apilamiento, la migración puede aplicarse a las estructuras y los campos de velocidad más complejos. Hace algunos años, las principales restricciones sobre la migración antes del apilamiento eran la capacidad computacional, así como el tiempo y la habilidad requeridos para construir el modelo de velocidad en un tiempo razonable. Los avances en materia de computación han permitido reducir estas restricciones.

La creación del modelo de velocidad sigue siendo un proceso que consume mucho tiempo y que depende de la geología local. En áreas de geología estratificada o donde existen bloques bien definidos por fallas, la construcción del modelo de velocidad para migración en profundidad se realiza capa por capa. Primero se construye un modelo inicial sobre la base de los mejores datos disponibles, y luego se lo actualiza mediante diversas iteraciones de migración en profundidad antes del apilamiento, capa por capa. El modelo de velocidad inicial puede construirse utilizando toda la información disponible, incluyendo velocidades de apilamiento, horizontes interpretados en el dominio del tiempo y velocidades obtenidas de datos de pozo. Las velocidades de apilamiento y de pozo pueden mostrar tendencias de velocidad representativas que deberían tenerse en cuenta en el modelo.[10]

CAPÍTULO 2

Migración OWWE

En el procesamiento de datos sísmicos se tiene como finalidad eliminar ruidos, mejorar la señal y colocar los eventos sísmicos en su posición correcta, es decir acondicionar los datos sísmicos adquiridos hasta que sean interpretables [12]. Dentro de este proceso se encuentra la migración sísmica.

La esencia de los métodos de migración en profundidad por continuación de campos de onda hacia abajo, es un método de extrapolación de campos de onda recursivo, basada en las ecuaciones de onda unidireccionales [13]. El término “recursivo” implica que el campo de onda de salida de la última extrapolación se utiliza como el campo de onda de entrada para la siguiente extrapolación. Los métodos de formación de imágenes de continuación de campo de onda descendente, típicamente muestran una capacidad superior para formar imágenes de estructuras complejas en comparación con métodos basados en rayos no recursivos tales como la migración de Kirchhoff.

Algunos métodos de migración reciben el nombre de sus autor o el método de solución de la ecuación de onda. Se han desarrollado muchos algoritmos que entran en la categoría de extrapolación de campos de onda recursiva, como el método implícito de diferencias finitas [14]; El método explícito de extrapolación de frecuencias espaciales (a menudo llamado $f - k$) [13]; Método de corrimiento de fase más interpolación (PSPI) [15]; El método de Fourier escalonado [16] y el método de corrimiento de fase no estacionario (NSPI)[17].

2.1. Ecuación de onda acústica

La deducción de la ecuación de onda acústica se halla utilizando las ecuaciones de conservación de la masa, conservación del momentum, y la relación constitutiva, ya que las ecuaciones unidireccionales se encuentran partiendo de la ecuación de

onda bidimensional. Inicialmente se tiene la ecuación no lineal básica que describe el movimiento de una onda en un fluido ideal no homogéneo, luego se generaliza para encontrar la ecuación de onda acústica, como se muestra en los apartados 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4 .[3]

2.1.1. Conservación de la masa

Considérese un fluido en movimiento, en el cual las partículas se mueven en un espacio tridimensional cuyo vector de posición está representado por el vector \vec{r} y en un tiempo t , la velocidad depende de la posición y del tiempo $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ¹, debido a que las partículas mas cercanas a la frontera se ven frenadas por fricción con las paredes. La densidad de masa volumétrica también depende de las coordenadas espaciales y del tiempo $\rho(\vec{r}, t)$.

Considérese el fluido al interior de un volumen V encerrado por una superficie S con un vector normal a la superficie \hat{n} (ver figura 2.1). La ley de conservación

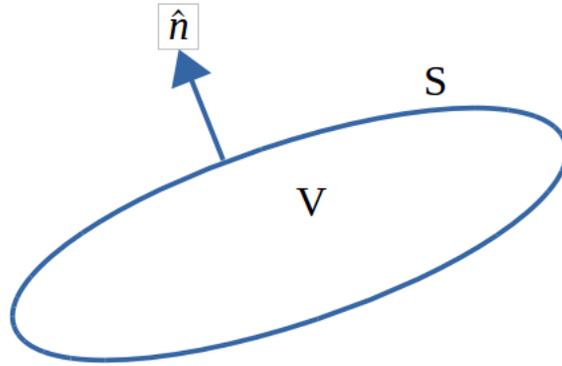


FIGURA 2.1. Volumen V encerrado por una superficie S . [3]

de la masa [18] establece que la razón de cambio en el tiempo, en el volumen V es igual a la cantidad de masa que fluye a través de la superficie S y el incremento de la inyección de masa con el tiempo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho dV \right) = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V i_m dV \right) \quad (2.1)$$

donde i_m representa una distribución de fuente en términos de una densidad de masa volumétrica inyectada. Aplicando el teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{B} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad (2.2)$$

¹ $\vec{r} = x, y, z$

y tomando un volumen V invariante en el tiempo se tiene que

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV + \int_V \frac{\partial i_m}{\partial t} dV \quad (2.3)$$

todos los términos se encuentran integrando en el mismo volumen luego la expresión se puede reescribir como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial i_m}{\partial t} \quad (2.4)$$

Esta ecuación (2.4) es conocida como la ecuación de continuidad no lineal.

2.1.2. Conservación del momentum

Considerese de nuevo el volumen V de la figura 2.1. La ley de la conservación del momentum lineal [18] establece que la razón de cambio de este de las partículas en el volumen V es igual al flujo del impulso entrante a través de la superficie S . Aumentando con la fuerza resultante actuando en las partículas del volumen V (Ley de Newton generaliza). Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \hat{n} dS + \vec{F}(V) \quad (2.5)$$

donde

$$\vec{F}(V) = - \oint_S (P \hat{n} dS + \int_V \vec{f} dV = \quad (2.6)$$

aquí $P(\vec{r}, t)$ denota la presión y $\vec{f}(\vec{r}, t)$ es la fuente externa por unidad de volumen.

Se debe tener en cuenta que las fuerzas de corte (debido a la viscosidad) no se consideran (se asume un fluido ideal). Aplicando el teorema de Gauss 2.2 a la ecuación 2.5 y combinando los resultados se tiene

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV = - \int_V [\vec{v} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] dV + \vec{F}(V) \quad (2.7)$$

donde

$$\vec{F}(V) = - \int_V \vec{\nabla} P dV + \int_V \vec{f} dV \quad (2.8)$$

como todas las integrales son sobre el volumen V la ecuación se puede reescribir como

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} P = \vec{f} \quad (2.9)$$

la ecuación 2.9 es conocida como ecuación de movimiento no lineal.[3]

2.1.3. Relación constitutiva

La presión P , el volumen V , la densidad de masa volumétrica ρ y la temperatura T de un fluido son mutuamente dependientes. Esto es expresado por la ecuación de estado, de forma más general

$$\chi(P, \rho, T) = 0 \quad (2.10)$$

donde χ es una función no lineal dependiente de P , ρ y la temperatura T . Se asume que la compresión y expansión del fluido ocurre de manera adiabática². La ecuación de estado viene dada por [19]:

$$P\rho^{-M} = \text{Constante} \quad (2.11)$$

con

$$M = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.12)$$

donde C_p representa el calor específico a presión constante y C_v representa el calor específico a volumen constante.[3] De otra parte, la presión P puede expresarse como:

$$P(\vec{r}, t) = P_0(\vec{r}) + \Delta P(\vec{r}, t) \quad (2.13)$$

donde P_0 representa la presión estática y ΔP representa los cambios de presión causados por el campo de onda acústica, similarmente para la densidad se tiene:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \Delta\rho(\vec{r}, t) \quad (2.14)$$

en esta expresión ρ_0 representa la densidad de masa estática y $\Delta\rho$ el cambio de densidad de masa causado por el campo de onda acústica. Con estas definiciones, la ecuación de estado 2.11 tiene la forma

$$P_0 \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right) \rho_0^{-M} \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^{-M} = P_0 \rho_0^{-M} \quad (2.15)$$

o

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right)^\gamma; \quad \gamma = \frac{1}{M} \quad (2.16)$$

Haciendo una expansión binomial 2.16 [20] se puede reescribir como

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \gamma \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \left(\frac{\Delta P}{P_0}\right)^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{6} \left(\frac{\Delta P}{P_0}\right)^3 + \dots \quad (2.17)$$

2.1.4. Linealización de las ecuaciones básicas

Las las ecuaciones 2.4, 2.9 y 2.17, son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, para linealizar se realizan algunas consideraciones como: en general la velocidad $\vec{v}(x, y, z, t)$ es la suma de la velocidad del fluido más la velocidad de la partícula. De

²No ocurre intercambio de calor con el medio.

aquí en adelante se asume que la velocidad del flujo es cero, por lo que $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sólo representa la velocidad de la partícula asociada al campo de onda acústico. Para un amplio rango de aplicaciones, se puede asumir³

$$\left| \frac{\Delta P(\vec{r}, t)}{P_0(\vec{r})} \right| \ll 1 \quad (2.18)$$

y

$$\left| \frac{\Delta \rho(\vec{r}, t)}{\rho_0(\vec{r})} \right| \ll 1 \quad (2.19)$$

Teniendo en cuenta esto la ecuación 2.4 se linealiza y se obtiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial i_m}{\partial t} \cong \frac{\partial i_V}{\partial t} \quad (2.20)$$

donde se introduce la distribución de fuente acústica $i_V(\vec{r}, t)$ que representa una densidad volumétrica de una inyección de volumen (Por ejemplo una pistola de aire).

Similarmente de la ecuación 2.9 se obtiene una ecuación linealizada de movimiento:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} P = \vec{f} \quad (2.21)$$

notese que se asume que las variaciones espaciales del campo de presión estático son despreciables en comparación con las variaciones espaciales de presión acústica

$$|\vec{\nabla} P_0(\vec{r}, t)| \ll |\vec{\nabla}(\Delta P(\vec{r}, t))|. \quad (2.22)$$

Finalmente, de la ecuación 2.17 se obtiene la ecuación linealizada de estado

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \gamma \frac{\Delta P}{P_0} \cong \frac{1}{M} \Delta P \quad (2.23)$$

donde $M(\vec{r})$ representa el módulo de compresión adiabático⁴.

De las ecuaciones linealizadas, $\Delta \rho$ puede ser eliminado por sustitución 2.23 en 2.20. Ahora, el campo de onda acústico lineal está completamente representado por $\Delta P(\vec{r}, t)$ y $\vec{v}(\vec{r}, t)$, mientras que el fluido está totalmente representado por $\rho_0(\vec{r})$ y $M(\vec{r})$. Por conveniencia se realizan las siguientes sustituciones [18]

$$\Delta P(\vec{r}, t) \rightarrow P(\vec{r}, t) \quad (2.24)$$

$$\Delta \rho(\vec{r}) \rightarrow P(\vec{r}) \quad (2.25)$$

³Para ondas de sonido en el aire en una atmósfera en condiciones normales $|\Delta P/P_0|$ varía entre $2 * 10^{-10}$ y $6 * 10^{-5}$ [3]

⁴Módulo de bulk: Es la relación entre la tensión volumétrica y la deformación volumétrica. Es la medida de la resistencia de un material a una compresión uniforme.

de esta manera la ecuación de continuidad linealizada queda

$$\frac{1}{M(\vec{r})} \frac{\partial P(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} v(\vec{r}, t) = \frac{\partial i_V(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.26)$$

y la ecuación de movimiento linealizada queda

$$\rho(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} P(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}, t) \quad (2.27)$$

al reducir las ecuaciones 2.26 y 2.27 se obtiene la ecuación de onda acústica con fuente

$$\rho \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) - \frac{\rho}{M} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -S \quad (2.28)$$

Donde S es la fuente. De forma general la ecuación de onda acústica homogénea es

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (2.29)$$

Con

$$c = \sqrt{\frac{M}{\rho}},$$

que representa la velocidad de propagación de las ondas.

2.2. Ecuaciones de onda unidireccionales

Se parte de la ecuación de onda acústica (2.29) en dos dimensiones y se realizan las siguientes suposiciones: El medio es homogéneo e isótropo y la velocidad del medio es constante.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right), \quad (2.30)$$

donde $P(x, z, t)$ es el campo de presión y c es la velocidad de propagación de la onda de presión (P). Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier⁵, es posible llevar la ecuación al dominio de la frecuencia y del número de onda

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -ik_x, \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik_z, \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \right)$$

La ecuación (2.30) se convierte en

$$-\omega^2 P(k_x, z, \omega) = -k_x^2 c^2 P(k_x, z, \omega) + c^2 \frac{\partial^2 P(k_x, z, \omega)}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

⁵Ver apéndice 5.2.2

despejando la derivada segunda respecto a z se obtiene:

$$\frac{\partial^2 P(k_x, z, \omega)}{\partial z^2} = \left[k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] P(k_x, z, \omega) \quad (2.32)$$

llamando el término

$$\left[k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] = k_z^2$$

conocido como relación de dispersión, entoces la ecuación (2.32) se puede reescribir como

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_z^2 \right] P(k_x, z, \omega) = 0 \quad (2.33)$$

o

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_z \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - ik_z \right) \right] P(k_x, z, \omega) = 0 \quad (2.34)$$

que se separa en dos

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_z \right) P(k_x, z, \omega) = 0, \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - ik_z \right) P(k_x, z, \omega) = 0, \quad (2.36)$$

para cada ecuación la solución de las ecuaciones (2.35) y (2.36) es de la forma

$$P_D(k_x, z + \Delta z, \omega) = P(k_x, z, \omega) e^{ik_z \Delta z}, \quad (2.37)$$

$$P_U(k_x, z - \Delta z, \omega) = P(k_x, z, \omega) e^{-ik_z \Delta z}, \quad (2.38)$$

respectivamente.

Estas expresiones representan ondas planas desplazandose en direcciones opuestas, la ecuación 2.37 representa una onda viajando hacia adelante (hacia abajo) y la ecuación 2.38 representa una onda que se propaga hacia atrás (hacia arriba). **Dado el sentido único de la dirección de propagación, reciben el nombre de ecuaciones de onda unidireccionales**, la ventaja de estas soluciones, es que es posible encontrar el siguiente valor del campo conociendo el campo anterior, lo que convierte esto en un método recursivo de extrapolación del campo de onda.

2.3. Método de migración por corrimiento de fase (PS)

Con este método se realiza una migración de datos preapilados en profundidad, por lo que se necesita como datos de entrada, los sismogramas y la fuente. El método **PS** comienza con dos transformadas de Fourier bidimensionales a los datos almacenados (Fuente y sismogramas). (2D-FT apéndice A.2), teniendo entonces los datos en el dominio (ω, k_x) . Se extrapola cada campo por separado, el campo de onda descen-

dente será un modelado utilizando la fuente inicial y avanzando en profundidad. Al multiplicar el campo inicial por el extrapolador

$$e^{ik_z \Delta z} = \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(\frac{ck_x}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \Delta z \right\} \quad (2.39)$$

es decir $P = P_0 e^{ik_z \Delta z}$, de igual manera se extrapolan los datos del sismograma que representa la onda propagándose hacia arriba al multiplicar por:

$$e^{-ik_z \Delta z} = \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(\frac{ck_x}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \Delta z \right\} \quad (2.40)$$

los nuevos campos se llevan del dominio del número de onda al dominio espacial utilizando una transformada de Fourier inversa, por lo que se tienen los campos almacenados en el dominio (ω, x) y a continuación se realiza la tarea de formar la imagen. [14]

El proceso de migración descrito, se muestra en el siguiente pseudocódigo (ver figura 2.2)

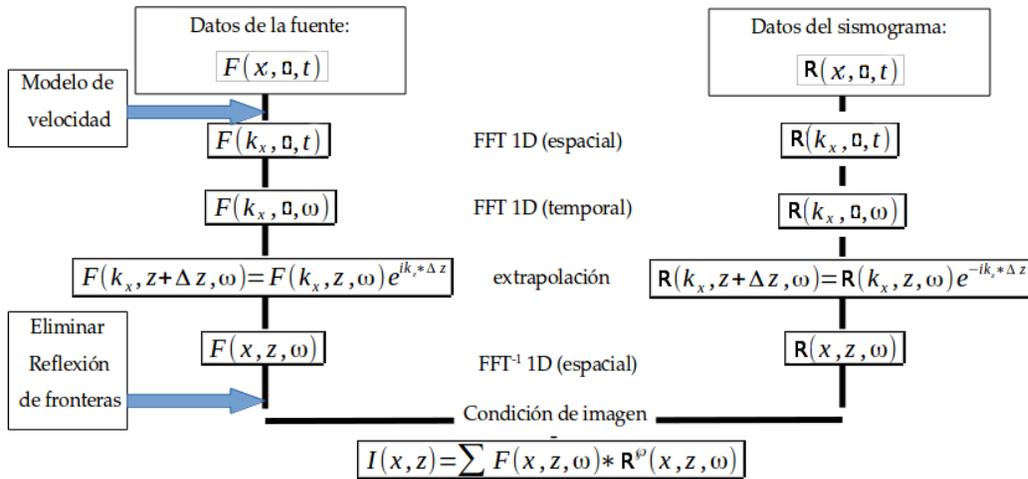


FIGURA 2.2. Esquema del método de migración sísmica preapilado en profundidad por corrimiento de fase (PS).

Una parte importante en todo este proceso, es la condición de imagen, esta consiste en realizar una correlación cruzada (ver apéndice A) de los datos y sumando sobre todas las frecuencias; sumar sobre todas las frecuencias es equivalente a tener los datos en $t = 0$.

Al multiplicar los campos ascendentes y descendentes, es el equivalente a tener dos frentes de onda en distintos instantes de tiempo, cuando el campo

ascendente que va retrocediendo y el descendente que se propaga hacia abajo, están en fase se produce una interferencia constructiva generando un valor diferente de cero que formará un punto de la interfase, de lo contrario la interferencia es destructiva colocando valores casi nulos, de esta manera se produce la imagen migrada.

Existen extensiones del método para tener en cuenta las variaciones laterales de la velocidad, como son: Corrimiento de fase más interpolación (PSPI)⁶, Split-step y diferencias finitas de Fourier.

2.3.1. Método de migración por corrimiento de fase más interpolación (PSPI)

Es una modificación del método de migración **PS**, que busca considerar las variaciones laterales de la velocidad en el modelo, esto se logra interpolando dos campos P_1 y P_2 que se encuentran en el dominio (x, ω) , y son extrapolados con el método **PS** previamente, usando dos velocidades de referencia c_{ref1} y c_{ref2} (ver figura 2.3) [15]. Cuando se obtienen los campos propagados, cada uno con diferentes velocidades de referencia:

$$P_1(x, z + \Delta z; \omega) = P_1(x, z; \omega) e^{ik_z \Delta z}, \quad k_z = \sqrt{1 - \frac{k_x^2 c_{ref1}^2}{\omega^2}} \quad (2.41)$$

$$P_2(x, z + \Delta z; \omega) = P_2(x, z; \omega) e^{ik_z \Delta z}, \quad k_z = \sqrt{1 - \frac{k_x^2 c_{ref2}^2}{\omega^2}} \quad (2.42)$$

Estos campos se interpolan para generar un campo, el mismo proceso se realiza con el campo descendente condición de imagen y el resultado es una imagen migrada, que tiene una mejor aproximación en comparación con el método de corrimiento de fase, en el caso en que el modelo de velocidades tiene variaciones laterales de velocidad.

2.3.2. Método de migración Split Step Fourier

El método Split Step Fourier propuesto por Stofa en 1990, involucra una extrapolación del campo de onda en el dominio (\vec{K}_r, ω) (Número de onda, frecuencia), una corrección local de la velocidad o corrección de Lens en el dominio (\vec{r}, ω) , lo que significa que es un método en el dominio mixto.

El método Split Step Fourier está basado en la teoría de perturbaciones, de acuerdo a la cual podemos dividir la variación de la velocidad lateralmente utilizando su inverso, “lentitud”, la separación se realiza en un término constante y

⁶PSPI: Phase Shift Plus Interpolation

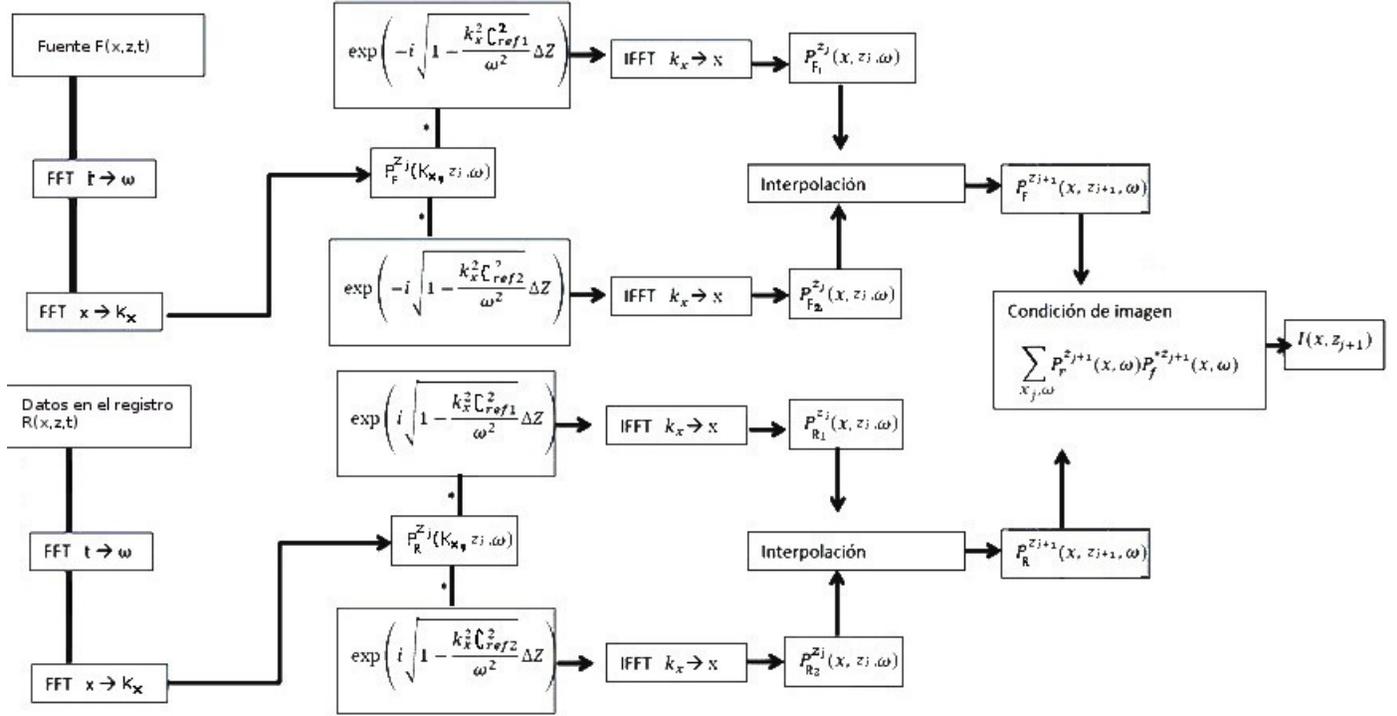


FIGURA 2.3. Esquema del método de migración sísmica preapilado en profundidad por corrimiento de fase más interpolación (**PSPI**).

en una pequeña perturbación.[?]

Se define el inverso de la velocidad y se divide en dos términos:

$$u(x, y, z) = u_0(z) + \Delta u(x, y, z) \quad (2.43)$$

donde $u_0(z)$ es un valor de lentitud de referencia que puede ser especificado como el inverso del valor medio de la velocidad y $\Delta u(x, y, z)$ es el término de variación. Para una onda acústica en el dominio de la frecuencia, la ecuación que modela la perturbación está dada por:

$$\nabla^2 P(r, z, \omega) + \omega^2 u^2(r, z) P(r, z, \omega) \quad (2.44)$$

donde $P(r, z, \omega)$ es el campo de onda en el dominio de espacial y de las frecuencias, haciendo la sustitución de (2.43) en (2.44)

$$\nabla^2 P(r, z, \omega) + \omega^2 [u_0(z) + \Delta u(x, y, z)]^2 P(r, z, \omega) \quad (2.45)$$

resolviendo el binomio cuadrado

$$\nabla^2 P(r, z, \omega) + \omega^2 [u_0^2(z) + 2u_0\Delta u(r, z) + \Delta u^2(r, z)] P(r, z, \omega) \quad (2.46)$$

despreciando el término $\Delta u^2(r, z)$, entonces

$$\nabla^2 P(r, z, \omega) + \omega^2 u_0^2(z) P(r, z, \omega) = -2\omega^2 u_0 \Delta u(r, z) P(r, z, \omega) \quad (2.47)$$

de modo que se obtiene

$$\nabla^2 P(r, z, \omega) + \omega^2 u_0^2(z) P(r, z, \omega) = -S(r, z, \omega) \quad (2.48)$$

De esta manera la ecuación de onda acústica ha sido transformada a una ecuación de onda no homogénea por la inclusión del término de fuente $S(r, z, \omega)$ dado por la variación de la lentitud. [21]

La solución de la ecuación (2.48) se resume en los siguientes pasos

1. Se transforma el campo de onda del dominio espacial al dominio del número de onda, se aplica un corrimiento de fase basado en el número de onda vertical calculado por el inverso de la velocidad de referencia

$$P^*(k_r, z + \Delta z, \omega) = P(r, z, \omega) \exp \left[\pm i \sqrt{\omega^2 u_0^2 - k_r^2} dz \right] \quad (2.49)$$

2. Se aplica la transformada de Fourier inversa del dominio del número de onda al dominio espacial

$$P^*(r, z + \Delta z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P^*(k_r, z + \Delta z, \omega) e^{ik_r r} dk_r \quad (2.50)$$

3. En el dominio (r, ω) (espacial y de frecuencia), se aplica un segundo corrimiento de fase debido al término de perturbación del inverso de velocidad

$$P(r, z + \Delta z, \omega) = P^*(r, z + \Delta z, \omega) \exp \left\{ \pm i \left[\frac{\omega}{c(r, z)} - \frac{\omega}{c_0(z)} \right] dz \right\} \quad (2.51)$$

El proceso para esta migración se esquematiza en el pseudocódigo (ver figura 2.4).

El segundo Phase Shift es también llamado corrección de Lens. Al hacer una comparación con PSPI⁷ se ve que las secuencias de operaciones es opuesta, porque para PSPI la corrección de Lens se realiza primero.

En lugar de utilizar múltiples velocidades de referencia del campo de onda propagado, SSF (Split step de Fourier) usa solo una velocidad (slowness) de referencia, lo cual beneficia el algoritmo comparado con PSPI.

Cuando hay fuertes variaciones del campo de velocidad, la teoría de perturbaciones falla, por lo que se requiere más de una velocidad de referencia haciendo que se eleve el costo computacional.[21]

⁷Corrimiento de fase más interpolación.

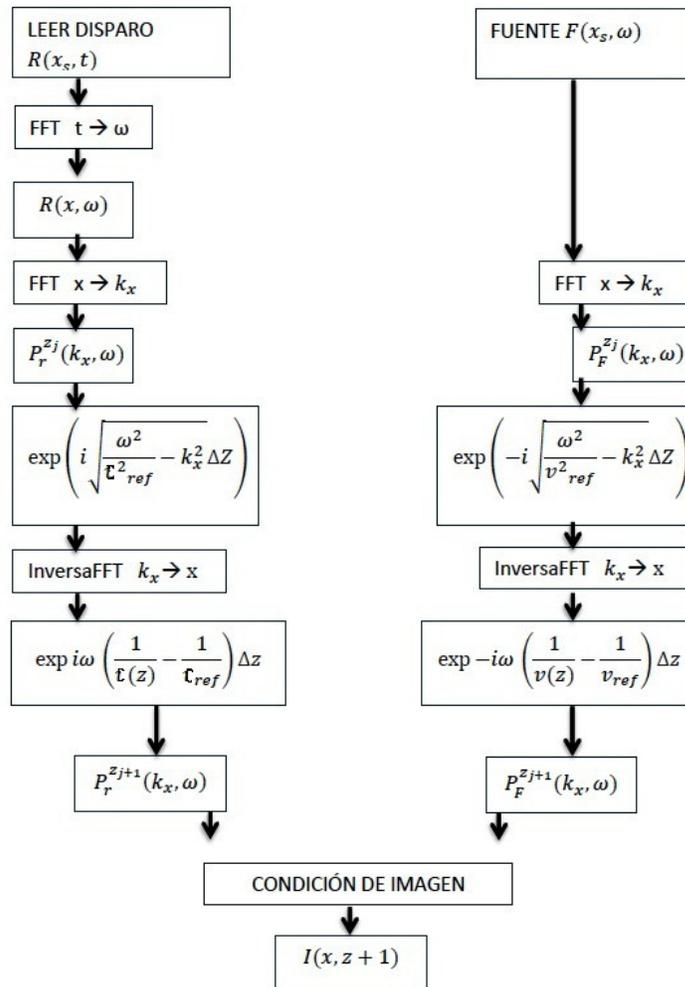


FIGURA 2.4. Esquema del método de migración sísmica preapilado en profundidad (**split-step**)

CAPÍTULO 3

Teoría visco-elástica y modelos de atenuación

La anelasticidad y la heterogeneidad en el subsuelo, disipan la energía sísmica, principalmente los componentes de alta frecuencia, lo que disminuye la amplitud de la señal y también causan dispersión, es decir, los componentes de diferente frecuencia se desplazan con diferentes velocidades, retrasando y estirando las ondículas del dato sísmico. Debido a que estos dos efectos, la disipación y la dispersión, están relacionados entre sí, simplemente se conoce como el efecto de atenuación.

El efecto de atenuación es inversamente proporcional al llamado factor de calidad de la tierra, o factor Q , que es una propiedad intrínseca de los materiales. El fenómeno de atenuación es dependiente de la frecuencia, produciendo así un efecto de disipación, por lo tanto la amplitud de una componente de onda de alta frecuencia se atenúa más que la de un componente de baja frecuencia. Para el efecto de dispersión, una componente de onda de alta frecuencia viaja más rápido que un componente de baja frecuencia, y la fase de la onda varía a lo largo de la trayectoria de desplazamiento. Así, en los datos sísmicos registrados, los pulsos parecen tener amplitudes débiles y se ven ensanchados, lo que resulta en una baja relación señal-ruido y baja resolución. [22]

3.0.1. Funciones fundamentales de la visco-elasticidad

Cuando se habla de un medio visco-elástico se tienen en cuenta las funciones **Creep**¹ y **relajación**; la función Creep consiste en medir la dependencia temporal de la

¹Creep: función de fluencia lenta

deformación al aplicar un esfuerzo instantáneo de la forma[4]

$$\delta(t) = \delta_0 H(t), \quad (3.1)$$

donde como se explicó anteriormente H es la función de Heaviside (ecuación 3.2).

$$H(t) = \begin{cases} \text{si } t > 1 & 1 \\ \text{si } t < 1 & 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La respuesta del sistema depende del modelo visco-elástico que se esté utilizando (Maxwell, Voight, Zener, etc.). Por otra parte la función relajación consiste en medir el esfuerzo al llevar al material a un desplazamiento instantáneo

$$\epsilon(t) = \delta H(t). \quad (3.3)$$

Para la función Creep se define adicionalmente otra función denominada Compliance

$$J(t) = \frac{e(t)}{\sigma(t)}, \quad (3.4)$$

donde $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$. La curva típica de la función Creep con respecto a $\log(t)$ es una curva que parte de un estado relajado a un estado tensionado (ver figura 3.1).

La deformación de un material visco-elástico depende de la historia de las

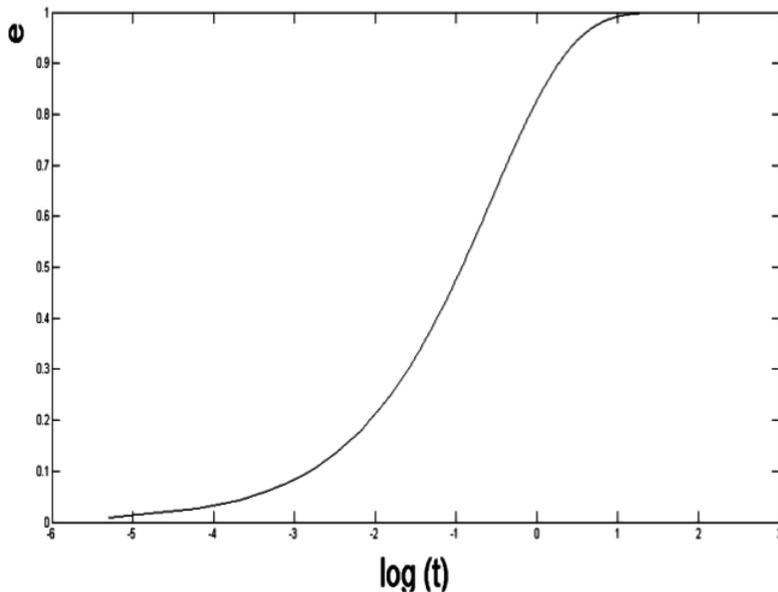


FIGURA 3.1. Representación del la función Creep.

fuerzas aplicadas al material, para eso es necesario introducir la operación de convolución:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)dy \quad (3.5)$$

y el llamado operador de Boltzman \odot

$$(f \odot g)(t) = f(0)g(t) + (\partial_t f) * g(t) \quad (3.6)$$

donde f y g son funciones causales, y además $\partial_t f$ se considera como una función generalizada ([9]).

La elasticidad es un caso particular de la visco-elásticidad, esto se puede demostrar partiendo de la versión visco-elástica de la ley de Hooke en forma tensorial

$$\sigma_{ij} = \psi_{ijkl} * \partial_t \epsilon_{kl} \quad (3.7)$$

o de forma simple,

$$\sigma = \psi * \partial_t \epsilon \quad (3.8)$$

Para ver que la elasticidad es un caso particular de la visco-elasticidad se considera:

$$\begin{aligned} \sigma &= \psi * \partial_t \epsilon \\ \sigma &= \partial_t \psi * \epsilon \end{aligned} \quad (3.9)$$

La función $\psi(t)$ es la función relajación y su derivada temporal se denotará como $\dot{\psi}$. En el caso elástico la función relajación es $M_e H(t)$ donde $H(t)$ es la función de Heaviside.

$$\psi = M_e H(t) \quad (3.10)$$

M_e es el módulo de bulk. ($M_e = \lambda$, es el parámetro de lamé si se asume que $\mu = 0$), la derivada temporal es:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \partial_t M_e H(t) \\ \dot{\psi} &= M_e \partial_t H(t) \\ \dot{\psi} &= M_e \delta(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

de esta manera la expresión (3.9) se expresa como

$$\sigma = M_e \delta(t) * \epsilon$$

Como la función Delta de Dirac por propiedad es el módulo de la convolución, se tiene que:

$$\sigma = M_e \epsilon \quad (3.12)$$

En el dominio de Fourier la expresión $\dot{\psi} = \partial_t \psi$ toma la forma:

$$\sigma(\omega) = \dot{\psi}(\omega) * \epsilon(\omega) \quad (3.13)$$

donde $M(\omega) = F[\partial_t \psi]$ es una función de variable compleja.

$$M(\omega) = M_R(\omega) + iM_I(\omega) \quad (3.14)$$

M_R está relacionada con la parte elástica del modelo visco-elástico y M_I corresponde a las pérdidas de energía.

La función de relajación debe ser: una función causal, real, positiva y decreciente en el tiempo. Para mostrar si una función es causal es necesario que cumpla con las relaciones de dispersión de Kramers-Krönig.

3.1. Relaciones de dispersión de Kramers-Krönig

Las relaciones de Kramers-Krönig (**K-K**) describen la relación que existe entre la parte real y la parte imaginaria de ciertas funciones complejas, que están relacionadas por medio de la transformada de Hilbert², y son frecuentemente aplicadas a la permitividad eléctrica de los materiales.

Las relaciones **K-K** son utilizadas para demostrar la causalidad de una función, esta función se halla mediante la suma de dos funciones no causales (ver figura 3.2). Una función causal puede ser el producto de la superposición de dos funciones no causales, una función impar y otra impar, al llevar al dominio de Fourier las funciones por separado y luego sumar los espectros es igual que hallar el espectro de la función causal. Para demostrar las relaciones de dispersión de Kramers Kronig se tomarán las definiciones 3.13 y 3.14, donde $M_R(\omega) = M_R(-\omega)$ es una función par y $M_I(\omega) = -M_I(-\omega)$ es una función impar y definiendo $\dot{\psi}(t)$ en componentes pares e impares $\dot{\psi}_e(t)$, $\dot{\psi}_o(t)$ respectivamente, $\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_e(t) + \dot{\psi}_o(t)$ se tiene:

$$\dot{\psi}_e(t) = \frac{\dot{\psi}(t) + \dot{\psi}(-t)}{2} \quad \text{Par} \quad (3.15)$$

$$\dot{\psi}_o(t) = \frac{\dot{\psi}(t) - \dot{\psi}(-t)}{2} \quad \text{Inpar} \quad (3.16)$$

como $\dot{\psi}(t)$ es causal entonces:

$$\dot{\psi}_o(t) = \text{sgn}(t)\dot{\psi}_e(t) \quad (3.17)$$

y

$$\dot{\psi}(t) = [1 + \text{sgn}(t)]\dot{\psi}_e(t) \quad (3.18)$$

tomando la transformada de Fourier a 3.18 se tiene que:

$$\begin{aligned} F[\dot{\psi}(t)] &= M(\omega) = M_R(\omega) + iM_I(\omega) = F[\dot{\psi}_e(t)] + F[\text{sgn}\dot{\psi}_e(t)] \\ &= M_R - \left(\frac{i}{\omega\pi} * M_R(\omega) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

²Ver apéndice 5.2.2

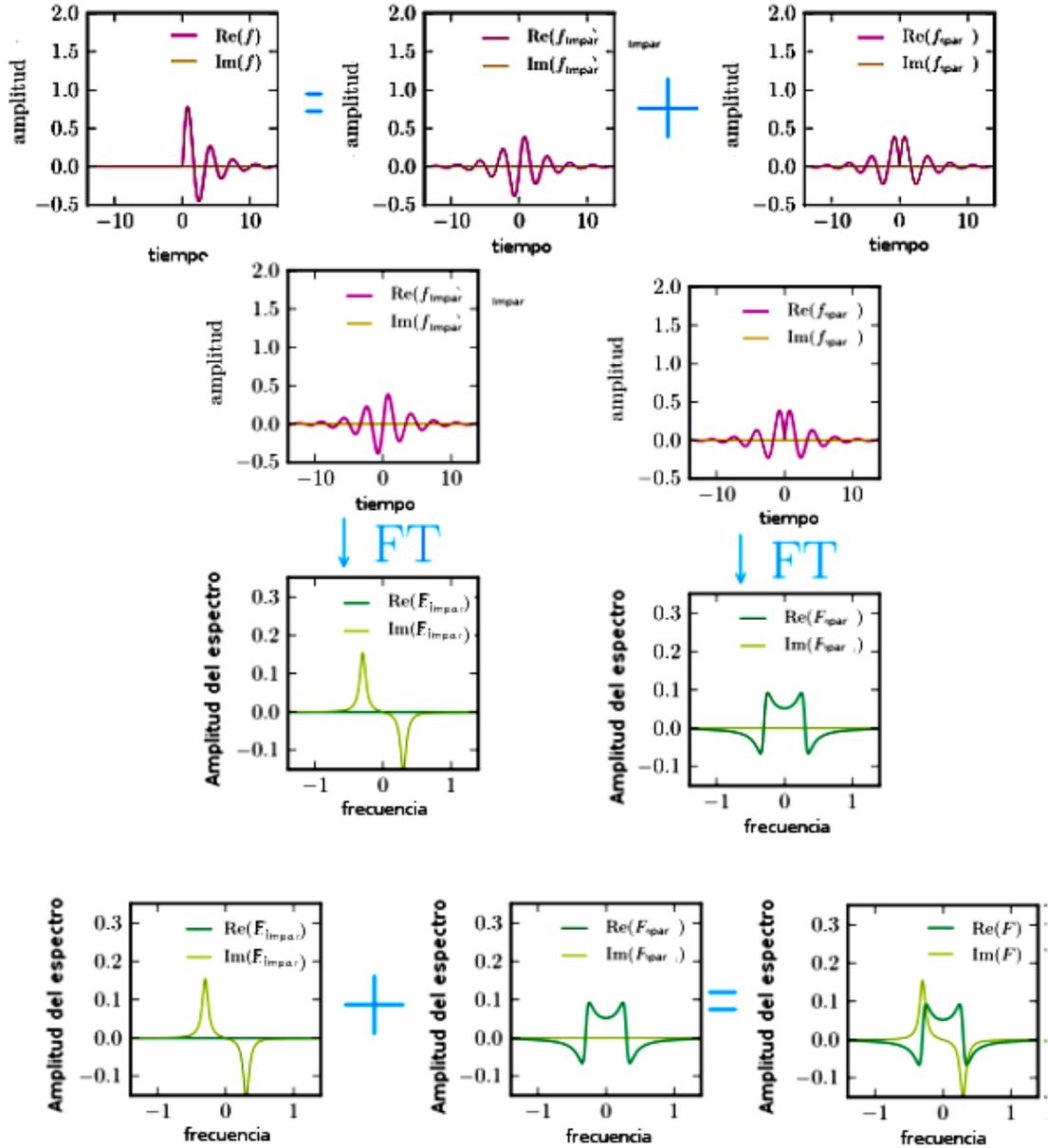


FIGURA 3.2. Construcción de una función causal a partir de la superposición de dos funciones, una par y otra impar.

de la ecuación 3.19 se tiene que:

$$M_I = -\frac{1}{\omega\pi} * M_R \tag{3.20}$$

utilizando la definición del valor principal de Cauchy

$$P \int_c \frac{g(z)dz}{z - x} \tag{3.21}$$

la operación se puede reescribir como:

$$M_I = -\frac{1}{\pi}p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_R(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \quad (3.22)$$

de la misma forma puesto que $\dot{\psi}_e(t) = \text{sgn}(t)\dot{\psi}_o(t)$ y

$$\dot{\psi}(t) = [\text{sgn}(t) + 1]\dot{\psi}_o(t) \quad (3.23)$$

tomando la transformada de Fourier a 3.23

$$\begin{aligned} F[\dot{\psi}(t)] = M(\omega) &= M_R(\omega) + iM_I(\omega) = F[\text{sgn}(t)\dot{\psi}_o(t)] + F[\dot{\psi}_o(t)] \\ &= \left(-\frac{i}{\omega\pi} * M_I(\omega) \right) + iM_I \end{aligned} \quad (3.24)$$

por lo tanto

$$M_R = \frac{1}{\omega\pi} * M_I \quad (3.25)$$

y utilizando de nuevo el valor principal de Cauchy se tiene que

$$M_R = \frac{1}{\pi}p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_I(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \quad (3.26)$$

las ecuaciones 3.22 y 3.26 forman un par de transformadas de Hilbert y son conocidas como las relaciones de Kramers Kronig.

3.2. Modelos mecánicos

La formulación básica de la visco-elasticidad (infinitesimal) ha sido desarrollado por varios científicos, entre ellos Maxwell (1867), Voigt (1892), Lord Kelvin (1875), Boltzmann (1874), Volterra (1909, 1940) y Graffi (1928). Boltzmann (1874), en particular, introdujo el concepto de memoria, en el sentido de que en un punto fijo del medio, la tensión en cualquier momento depende de la tensión en momentos anteriores.[4]

La teoría clásica de la elasticidad, considera las propiedades mecánicas de los sólidos elásticos de acuerdo con la ley de Hooke, es decir la deformación (ϵ) es directamente proporcional al esfuerzo (σ) aplicado (ver figura 3.3a)). Por otra parte, es la teoría hidrodinámica la que trata las propiedades de los fluidos viscosos que, de acuerdo con la ley de Newton, el esfuerzo aplicado es directamente proporcional a la velocidad de deformación $\frac{d\epsilon}{dt} = \dot{\epsilon}$ (ver figura 3.3b)), pero independiente de la deformación misma. [4]

Si se aplica un esfuerzo sobre un sólido elástico, éste se deforma hasta que la fuerza deja de ser aplicada y el sólido regresa a su estado inicial; por otra parte, si un

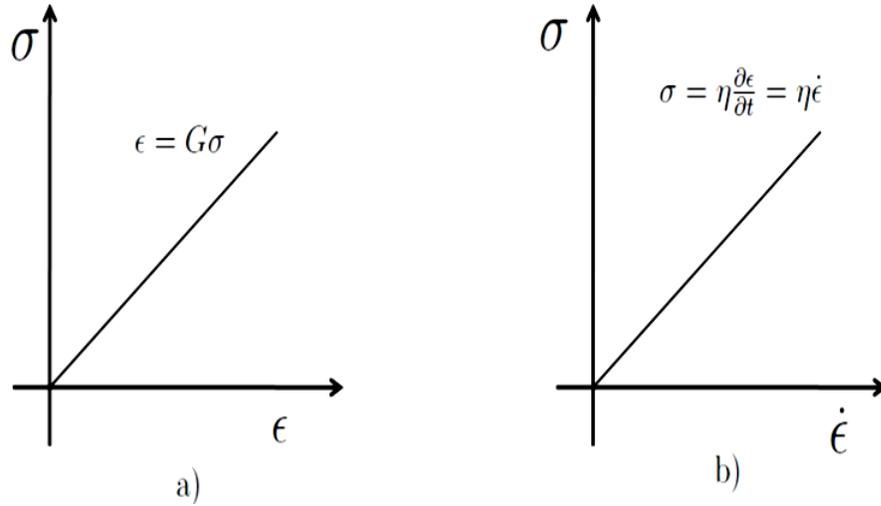


FIGURA 3.3. Representación de: a) la ley Hooke y b) la ley de Newton.

esfuerzo es aplicado sobre un fluido viscoso, éste se deforma, pero no recupera su forma original. Un comportamiento intermedio es el comportamiento visco-elástico, en el cual el cuerpo sobre el que se aplica el esfuerzo, este toma un tiempo para recuperar su estado inicial.

Un material elástico se puede definir como aquel que satisface la relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones y es descrito por una **unidad de elasticidad**, representada por un resorte (ver figura 3.4).

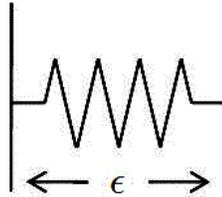


FIGURA 3.4. Representación de una unidad de elasticidad.

Si se aplica un esfuerzo (σ) de la forma:

$$\delta(t) = \delta_0 H(t - t_1) \quad (3.27)$$

donde δ_0 es la función de Heaviside y f es constante. La respuesta del material elástico es instantánea a la aplicación del esfuerzo (ver figura 3.5), donde el esfuerzo que se aplica es de la forma:

$$\delta(t) = \delta_0 \theta(t), \quad \text{con} \quad \theta(t) = H(t) - H(t - t_1) \quad (3.28)$$

$$H(t - t_1) = \begin{cases} \text{si } t > t_1 & 1 \\ \text{si } t < t_1 & 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

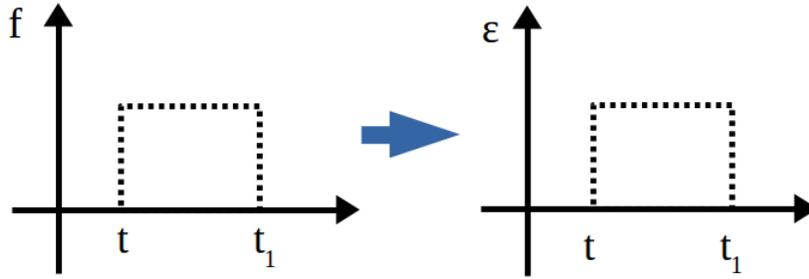


FIGURA 3.5. Respuesta de un material elástico a una fuerza.

La unidad para un material viscoso es descrita por una **unidad de viscosidad**, representada por un disipador (ver figura 3.6) donde η es la constante de viscosidad.

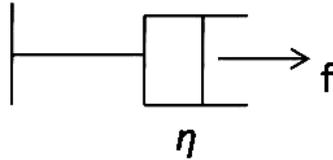


FIGURA 3.6. Representación de una unidad de viscosidad.

Existe una relación lineal entre el esfuerzo y la variación temporal de la deformación:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (3.30)$$

En los materiales visco-elásticos, el comportamiento para deformaciones muy pequeñas, casi cercanas al equilibrio, tienen una relación lineal entre esfuerzo y deformación, encontrándose en la zona denominada como “visco-elasticidad lineal”. Para deformaciones mayores, dicha relación deja de ser lineal y se alcanza la denominada zona de “visco-elasticidad no lineal”. [4]

Para los materiales viscoelásticos, la respuesta a un esfuerzo $\delta(t) = \delta_0 H(t - t_1)$ es diferente a la respuesta de los materiales elásticos. La característica fundamental de la visco-elasticidad está representada por la llamada función de Creep. Al contrario del caso elástico, la deformación (respuesta) a un esfuerzo de tipo $\delta_0 H(t - t_1)$ es dependiente del tiempo, por lo general la deformación se incrementa con la duración del esfuerzo [4].

3.2.1. Modelo de Maxwell

En el modelo de Maxwell hay una combinación en serie de una unidad de elasticidad y una de viscosidad (ver figura 3.7), se observa que un esfuerzo aplicado σ produce una deformación ϵ_1 en el resorte y una deformación ϵ_2 en el disipador. La

deformación total es:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (3.31)$$

La ecuación diferencial que representa el modelo viene dada por:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{M_u} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.32)$$

por medio de la propiedad de la transformada de Fourier para la derivada temporal,

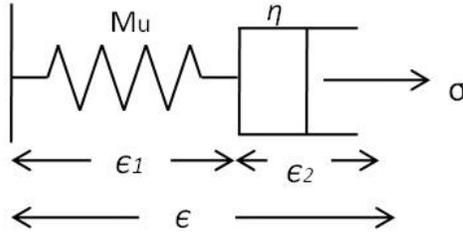


FIGURA 3.7. Representación del modelo de Maxwell.

la ecuación 3.32 se lleva al dominio de las frecuencias

$$\begin{aligned} F[\dot{\epsilon}] &= F\left[\frac{\dot{\sigma}}{M_u} + \frac{\sigma}{\eta}\right] \\ i\omega\epsilon(\omega) &= \frac{i\omega\sigma(\omega)}{M_u} + \frac{\sigma(\omega)}{\eta} \\ \omega\epsilon(\omega) &= \frac{\sigma(\omega)(\omega\eta - iM_u)}{M_u\eta} \end{aligned} \quad (3.33)$$

haciendo un cambio de variables

$$\tau = \frac{\eta}{M_u} \quad (3.34)$$

y

$$M(\omega) = \frac{\omega\eta}{\omega\tau - i} \quad (3.35)$$

se llega a la expresión que relaciona de manera lineal el esfuerzo con la deformación

$$\sigma(\omega) = M(\omega)\epsilon(\omega) \quad (3.36)$$

donde τ es llamado tiempo de relajación.

3.2.2. Modelo de Kelvin Voigt

Un modelo visco-elástico comunmente usado para describir la anelasticidad es la relación esfuerzo deformación de Kelvin - Voigt, la cual consiste en la unión en paralelo de una unidad elástica (resorte) con una unidad viscosa (pistón) El esfuerzo total es la suma de un esfuerzo elástico σ_1 debido al resorte

$$\sigma_1 = M_R\epsilon \quad (3.37)$$

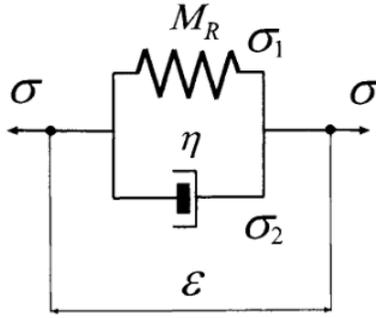


FIGURA 3.8. Representación del modelo de Kelvin-Voigt. La deformación en ambos elementos es la misma pero las fuerzas son diferentes. (Imagen tomada de Carcione [4])

donde M_R es la constante del resorte (el subíndice R denota relajación) y un esfuerzo viscoso

$$\sigma_2 = \eta \dot{\epsilon} \quad (3.38)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma &= M_R \epsilon + \eta \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.39)$$

utilizando la transformada de Fourier en la ecuación 3.39)

$$\sigma = (M_R + i\omega\eta)\epsilon \quad (3.40)$$

De la ecuación 3.40 se puede inferir que existe un módulo complejo por lo tanto

$$M(\omega) = M_R(\omega) + i\omega\eta \quad (3.41)$$

3.2.3. Modelo de Zener

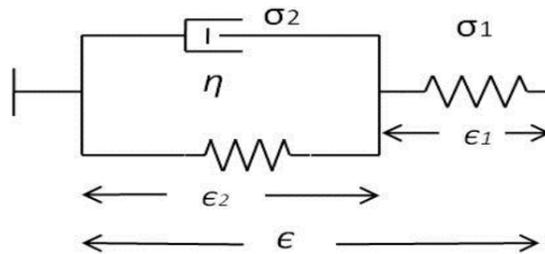


FIGURA 3.9. Representación del modelo de Zener.

Al combinar los modelos de Maxwell y de Kelvin Voigt, se obtiene una representación en serie y en paralelo de una unidad de viscosidad y dos de elasticidad (ver figura 3.9). En el dominio temporal la ecuación que representa el modelo viene

dada por:

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = M_r(\epsilon + \tau_\epsilon \dot{\epsilon}) \quad (3.42)$$

donde

$$M_r = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad \tau_\sigma = \frac{\eta}{k_1 + k_2}, \quad \tau_\epsilon = \frac{\eta}{k_2}$$

en el dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} F[\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma}] &= F[M_r(\epsilon + \tau_\epsilon \dot{\epsilon})] \\ \sigma(\omega) + i\omega\tau_\sigma\sigma(\omega) &= M_r\epsilon(\omega) + i\omega M_r\tau_\epsilon\epsilon(\omega) \\ (1 + i\omega\tau_\sigma)\sigma(\omega) &= M_r(1 + i\omega M_r\tau_\epsilon)\epsilon(\omega) \end{aligned} \quad (3.43)$$

por lo tanto

$$\sigma(\omega) = \frac{M_r(1 + i\omega M_r\tau_\epsilon)\epsilon(\omega)}{1 + i\omega\tau_\sigma} \quad (3.44)$$

las componentes del módulo complejo son entonces

$$M_R(\omega) = \frac{M_r}{(1 + \omega^2 M_r^2 \tau_\epsilon^2)} [1 + \omega^2 M_r \tau_\epsilon \tau_\sigma] \quad (3.45)$$

$$M_I(\omega) = \frac{M_r \omega}{(1 + \omega^2 M_r^2 \tau_\epsilon^2)} [M_r \tau_\epsilon - \tau_\sigma] \quad (3.46)$$

3.3. El coeficiente de atenuación

La perturbación de las ondículas es causada por el efecto de disipación de la tierra. Para una onda plana sinusoidal que viaja a través de un material viscoelástico, la disipación es relacionada con el recíproco del factor de calidad Q , que es la relación de la pérdida de energía por ciclo ΔW en un movimiento armónico con la energía máxima W almacenada en un material, cuya expresión está dada por:

$$\frac{1}{Q} = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \frac{\Delta W}{W}. \quad (3.47)$$

El factor Q^{-1} también puede ser definido como la tangente del ángulo de fase entre el esfuerzo y deformación ϖ .

$$\frac{1}{Q} = \tan \varpi. \quad (3.48)$$

El coeficiente de atenuación α , es una cantidad que mide la absorción de energía, y está relacionado con el factor de calidad por:

$$\alpha = \left(\frac{\omega}{2c} \right) \frac{1}{Q}. \quad (3.49)$$

Esta ecuación muestra la dependencia lineal del coeficiente de atenuación de la frecuencia ω , cuando el factor de calidad Q es independiente de la frecuencia.[22]

3.4. Modelos matemáticos del factor de calidad Q

Debido a las características del medio por el cual se propaga la onda, existen pérdidas de energía, la atenuación dependiente de la frecuencia en las ondas sísmicas produce disminución en la resolución de las imágenes sísmicas con la profundidad, y la diferencia en las pérdidas induce variaciones de amplitud con desplazamiento.

Las pérdidas de energía durante la propagación pueden ocurrir debido a la fricción o el movimiento del fluido, o pueden ser el resultado de la dispersión en una capa superficial, donde el material no está consolidado.

Una primera aproximación a un medio dispersivo se consigue utilizando el concepto de frente de onda en un medio anelástico. Se asume entonces que una onda plana $u(x, t)$ se propaga en la dirección del eje x positivo y que inicia en el punto $x = 0$ en un tiempo $t = 0$, entonces

$$u(0, t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0 \quad (3.50)$$

en $x = 0$ cada componente de Fourier de u puede ser factorizado como

$$u(x, \omega) = u(0, \omega) \exp(iKx) \quad (3.51)$$

donde el número de onda complejo K está dado ahora en términos de la velocidad de fase $c(\omega)$ y el factor de atenuación $\alpha(\omega)$ por

$$K(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega). \quad (3.52)$$

Con la suposición de una superposición lineal, la onda en (x, t) es

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, \omega) \exp[i(Kx - \omega t)] d\omega \quad (3.53)$$

lo que es equivalente a la convolución de $u(0, \omega)$ con

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(Kx - \omega t)] d\omega \quad (3.54)$$

que es el equivalente a la respuesta atenuada a un impulso. Ahora, si c depende de la frecuencia,

$$c(\omega) = \frac{\omega}{K(\omega)} = \sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}} \quad (3.55)$$

donde $M(\omega) = M_R(\omega) + iM_I(\omega)$ Para que la respuesta de transmisión del medio sea causal, la velocidad de fase y la atenuación deben satisfacer la relación de **Kramers-**

Kronig. [23]

$$\frac{\omega}{c_p(\omega)} = \frac{\omega}{c_\infty} + \mathcal{H}\{\alpha(\omega)\} \quad (3.56)$$

y

$$\frac{\alpha(\omega) - \alpha(0)}{\omega} = -\mathcal{H}\left\{\frac{1}{c_p(\omega)} - \frac{1}{c_\infty}\right\} \quad (3.57)$$

Donde $\mathcal{H}\{\}$ denota la transformada de Hilbert. Se define ahora el factor de calidad Q como el inverso del factor de calidad

$$\xi = \frac{1}{Q} = -\frac{M_I}{M_R} \text{sgn}(\omega) = \frac{|M_I|}{|M_R|} \quad (3.58)$$

$$Q = \frac{|M_R|}{|M_I|} \quad (3.59)$$

Algunos modelos deducidos matemáticamente y que implican una velocidad compleja son:

1. Modelo de Kjartansson.
2. Modelo Kolsky-Futterman.
3. Modelo de Muller.
4. Modelo de Cole-Cole.
5. Modelo del sólido lineal estándar.

3.5. Modelo de Q constante

Kjartansson (1979) propuso un modelo de uso frecuente en el que Q es constante.[24] Se examina una forma particular de la relación de esfuerzo deformación mostrando que el factor de calidad Q es independiente de las frecuencias. Esta independencia implica que la pérdida de energía por ciclo es independiente de la escala de tiempo de las oscilaciones; por lo tanto podría ser razonable tratar un material que tenga una función de relajación que se comporte como una línea recta en un gráfico logarítmico, o

$$\Phi(t) \propto t^b$$

$$\text{Ln}(\Phi) = b\text{Ln}(t)$$

La función de relajación está dada por

$$\Phi(t) = \frac{M_0}{\Gamma(1-2\gamma)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2\gamma} H(t), \quad t > 0, \quad (3.60)$$

Donde $[M_0 = \rho_0 c_0^2 \cos(\frac{\pi\gamma}{2})]$ es el módulo de bulk, ρ_0 es la densidad y Gamma es la función Gamma de Euler, t_0 es un tiempo de referencia $t_0 = 1/\omega_0$. El parámetro

$\gamma = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1}{Q} \right)$ es adimensional; el rango de valores de γ es entre 0 y 0.5 para cualquier valor positivo de Q . $H(t)$ es la función de Heaviside. Nótese que sólo tres parámetros, la velocidad de fase, la frecuencia de referencia ω_0 y Q , son necesarios para describir las pérdidas en un medio, en lugar de trabajar con los tiempos de relajación como en el modelo del sólido lineal standart.[25]

Utilizado la definición del número de onda complejo 3.52, la parte real del número de onda se puede encontrar de la siguiente forma:

$$k_R = \frac{\omega}{c_p} = \frac{w}{c_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-\gamma} \simeq \left(1 - \gamma L n \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (3.61)$$

para todas las frecuencias de interés que satisfagan la condición $\gamma |L n \frac{\omega}{\omega_0}| \ll 1$ [24].

La parte imaginaria del número de onda se puede hallar como

$$k_I = - \tan \left(\frac{\pi \gamma}{2} \right) \frac{\omega}{c_p} \quad (3.62)$$

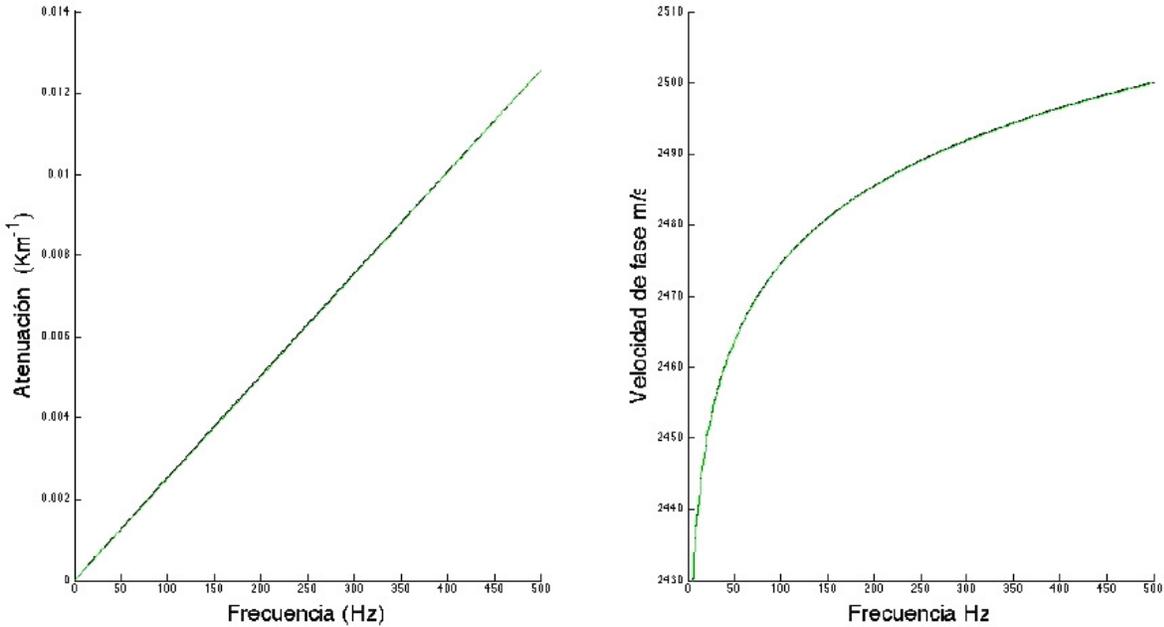


FIGURA 3.10. Atenuación y velocidad de fase dependientes de la frecuencia en el modelo de Q constante.

la velocidad compleja para el modelo de Q constante se define como

$$v_c = \frac{\omega}{k} = c \left(\frac{i\omega}{\omega_0} \right)^\gamma \quad (3.63)$$

por lo tanto la velocidad de fase c_p y la atenuación para el modelo de Kjartansson de Q constante son

$$c_p = c \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\gamma, \quad (3.64)$$

$$\alpha = \tan \left(\frac{\pi\gamma}{2} \right) \frac{\omega}{c_p} \quad (3.65)$$

Donde la velocidad de fase c_p está dada para una frecuencia de referencia ω_0 . En la figura 3.10, se observa un comportamiento lineal de la atenuación respecto a las frecuencias, esto se debe a que el valor del factor de calidad es constante, con la relación de dispersión de Kramers Kronig, se halla la velocidad de fase, con un comportamiento asintótico hacia las altas frecuencias.

3.6. Kolsky- Futterman

En el modelo de Kolsky- Futterman [22], la velocidad de fase está definida por

$$\frac{1}{c_p(\omega)} = \frac{1}{c_r} + \frac{1}{\pi c_r Q_r} \text{Ln} \left| \frac{\omega_r}{\omega} \right| \quad (3.66)$$

y la atenuación por

$$\alpha(\omega) = \frac{|\omega|}{2c_r Q_r} \quad (3.67)$$

donde c_r y Q_r son los valores de la velocidad de fase y el aproximado factor de calidad para una frecuencia de referencia.

El valor de Q puede ser hallado utilizando la siguiente relación

$$Q \approx Q_r + \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left| \frac{\omega_r}{\omega} \right| \quad (3.68)$$

El modelo de Futterman y Kolsky es ampliamente utilizado en el procesamiento de datos sísmicos y sismología (Aki y Richards, 1980). En la figura 3.11, se muestra la relación entre la atenuación y la velocidad de fase para cada frecuencia, y se hace la comparación entre los dos modelos que se trabajan en este documento. El comportamiento de la atenuación no es lineal, y para valores de altas frecuencias es menor que en el modelo de Q constante, lo que mejora el tratamiento de datos respecto al otro modelo como se podrá apreciar en los experimentos numéricos del capítulo 5.

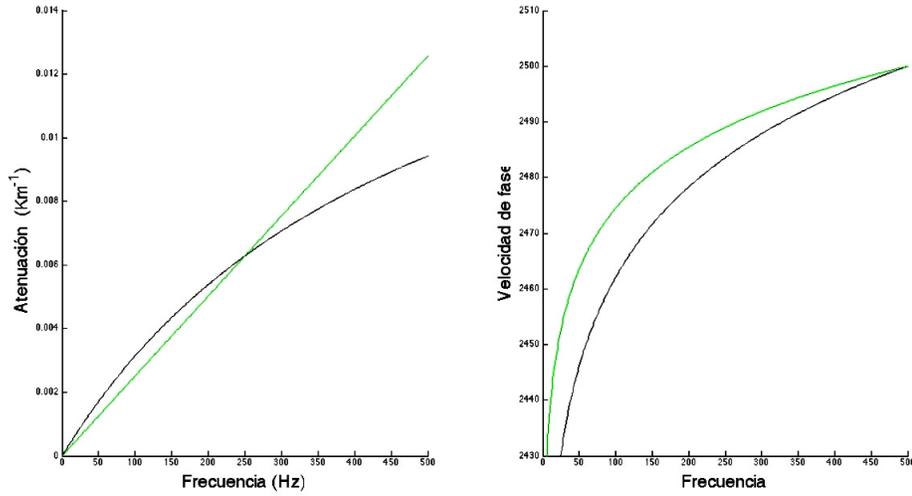


FIGURA 3.11. Comparación de la atenuación y la velocidad de fase para los modelos matemáticos de Kjartansson y Kolsky Futterman, la línea de color verde corresponde al modelo de Kjartansson y la línea de color negro al modelo KF.

3.7. Otros modelos

3.7.1. Modelo de Müller

Müller (1983) propuso un modelo de Q de la forma

$$Q(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\beta \quad (3.69)$$

para $-1 \leq \beta \leq 1$, y el módulo complejo dado por

$$M(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)} \quad (3.70)$$

donde

$$\phi(\omega) = \arctan(Q^{-1}(\omega))$$

encontrando las expresiones para la velocidad de fase y el factor de atenuación

$$\frac{1}{c_p(\omega)} \approx \frac{1}{c_0} - \frac{|\omega|^\gamma}{2c_0Q_1} \cot\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right), \quad Q_1 = |\omega_0|^\gamma \quad (3.71)$$

y

$$\alpha(\omega) = \frac{|\omega|^{1+\gamma}}{2c_0Q_1}, \quad Q_1 \gg 1 \quad (3.72)$$

3.7.2. Modelo de Cole-Cole

La ley de la potencia satisface el principio de causalidad solo para atenuación proporcional a potencias menores que uno. Para potencias entre uno y dos se utiliza un modelo propuesto para dieléctricos por *Cole y Cole* (1941) y extendido a medios visco-elásticos por *Jones* (1986). El módulo complejo es expresado por

$$M(\omega) = M_0 \frac{1 + (-i\omega\tau_\epsilon)^\beta}{1 + (-i\omega\tau_\sigma)^\beta} \quad (3.73)$$

Para $\tau_\epsilon = \tau_\sigma$ o $\beta = 0$, esto corresponde a un sólido elástico. Las expresiones para la velocidad de fase y el factor de atenuación son

$$\frac{1}{c_p(\omega)} \approx \frac{1}{c_0} \left[1 - \frac{\beta|\omega\tau_\gamma|^\beta}{Q_c} \frac{\frac{\pi}{2}(1-\beta) + |\omega\tau_\gamma|^\beta}{1 + |\omega\tau_\gamma|^{2\beta} + \pi(1-\beta)|\omega\tau_\gamma|^\beta} \right] \quad (3.74)$$

y

$$\alpha(\omega) \approx \frac{\beta|\omega\tau_\gamma|^{1+\beta}}{c_0 Q_c \tau_\gamma [1 + |\omega\tau_\gamma|^{2\beta} + \pi(1-\beta)|\omega\tau_\gamma|^\beta]} \quad (3.75)$$

3.7.3. Modelo Zenner

También llamado modelo del sólido lineal estandar, *Ben-Menahem y Singh* (1981) obtiene el modelo utilizando diferencias finitas para el modelado porque el esfuerzo y la deformación se definen como operadores diferenciales, este modelo se puede obtener cuando $\beta = 1$ en el modelo de Cole-Cole

$$\frac{1}{c_p(\omega)} \approx \frac{1}{c_0} \left[1 - \frac{(\omega\tau_\gamma)^2}{Q_c [1 + (\omega\tau_\gamma)^2]} \right] \quad (3.76)$$

y

$$\alpha(\omega) = \frac{|\omega\tau_\gamma|^2}{c_0 Q_c \tau_\gamma [1 + (\omega\tau_\gamma)^2]} \quad (3.77)$$

Es posible aproximar los modelos matemáticos de Q al modelo de Kolsky Futterman al elegir el valor adecuado del factor γ . Por esta razón se han elegido solo 2 modelos para la implementación de los códigos de migración por corrimiento de fase (Kolsky - Futterman y Q constante de Kjartansson).

CAPÍTULO 4

Migración por corrimiento de fase PS con compensación de energía

4.1. Algoritmo de migración PS

La propagación de ondas sísmicas en un medio real, es en muchos aspectos diferente a la propagación en un medio sólido ideal. La anelasticidad del medio puede causar disipación de la energía sísmica, así decrece la amplitud y se modifica el contenido de frecuencias de la onda que se propaga.[26]

Partiendo de la ecuación de onda visco-acústica, la expresión para el campo de presión $P(x, \omega)$, en el dominio de la frecuencia puede ser expresada como

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} P(r, \omega) + \frac{\omega^2}{\frac{M(r, \omega)}{\rho}} P(r, \omega) = 0 \quad (4.1)$$

Donde $M(r, \omega)$ es el módulo de bulk y ρ es la densidad. El Módulo de bulk se define como la relación entre la presión deformadora producida por una fuerza por unidad de superficie y la deformación relativa que produce por unidad de volumen.

Asumiendo que la velocidad $c(r, \omega) = \sqrt{M(r, \omega)/\rho}$ es independiente de la coordenada x , se puede realizar una transformada de Fourier para x obteniendo

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z, \omega) - k_x^2} \right] \right\} P(k_x, z, \omega) = 0 \quad (4.2)$$

En este enfoque las variaciones laterales de la velocidad se explican como una suma ponderada (convolución) en la dirección x . Así, en la extrapolación real del campo de onda, la velocidad local se utiliza para simular la propagación de la onda en un medio lateralmente homogéneo.

Para la solución de la ecuación 4.2, se realizan unas sustituciones

$$k_z(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2(z, \omega)} - k_x^2 \quad (4.3)$$

y

$$P^2 = P(k_x, z, \omega), \quad (4.4)$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_z(\omega)P^2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} &= -k_z(\omega)P^2 \\ \frac{\partial^2 P}{P^2} &= -k_z(\omega)\partial z^2 \\ \sqrt{\frac{\partial^2 P}{P^2}} &= \sqrt{-k_z(\omega)}\partial z \\ \frac{\partial P}{P} &= \sqrt{-k_z(\omega)}\partial z \\ \int \frac{\partial P}{P} &= \int \sqrt{-k_z(\omega)}\partial z \\ \ln P &= \pm i\sqrt{k_z(\omega)}\Delta z + Const_1 \\ P &= P_0 e^{\pm i\sqrt{k_z(\omega)}\Delta z} \\ P(k_x, z, \omega) &= P(k_x, z_0, \omega) e^{\pm i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2(z, \omega)} - k_x^2}\Delta z} \end{aligned} \quad (4.5)$$

que corresponde a la extrapolación para las ondas ascendentes y descendentes, al igual que las expresiones 2.37 y 2.38 demostradas anteriormente.

Las propiedades de absorción del medio son descritas por el factor de calidad Q el cual está definido en términos del módulo de bulk 3.14, por

$$\frac{1}{Q(r, \omega)} = \frac{M_I(r, \omega)}{M_R(r, \omega)}. \quad (4.6)$$

como la velocidad depende del módulo de bulk, es también de variable compleja

$$c(r, \omega) = \sqrt{\frac{M(r, \omega)}{\rho(r)}} = C_R(r, \omega) + iC_I(r, \omega). \quad (4.7)$$

para encontrar el número de onda definido en la ecuación 4.3, se realiza la división de las frecuencias sobre la velocidad compleja

$$\frac{\omega}{c(\omega)} = k_w + il_\omega \quad (4.8)$$

de esta manera el número de onda complejo $k_z(\omega)$ queda de la forma

$$k_z(\omega) = \sqrt{(k_\omega + il_\omega)^2 - k_x^2} \quad (4.9)$$

$$k_z(\omega) = \sqrt{(k_\omega^2 - l_\omega^2 - k_x^2) + i2k_\omega l_\omega} \quad (4.10)$$

Para encontrar la solución más adecuada a para el extrapolador 4.5, es necesario encontrar la raíz cuadrada de un número complejo, sea $z = a + ib$ un número complejo, su raíz cuadrada será:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1}{2}(|z| + a)} + i\epsilon\sqrt{\frac{1}{2}(|z| - a)} \quad (4.11)$$

donde $|z|$ es la magnitud del número complejo, a es la parte real del número complejo y ϵ es el signo de la parte imaginaria del número complejo.

El exponente en el extrapolador posee ahora parte real y parte imaginaria del número de onda, una de ellas hace que la amplitud de la onda decrezca al propagarse y la otra modifica el contenido de frecuencias.

Para implementar un método que permita recuperar la energía perdida en la propagación de la onda, es necesario definir el extrapolador que depende del modelo del factor de calidad Q y el modelo de velocidad complejo definido por un modelo matemático adecuado y por último la condición de imagen.

4.1.1. Extrapolador

Debido a que los valores dentro de la raíz cuadrada de la ecuación 4.9, pueden ser positivos o negativos, es necesario tener en cuenta ciertas condiciones. A continuación se muestran las expresiones utilizadas para el extrapolador.(Mittet, 1994).[26]

La raíz cuadrada de la expresión 4.9, se reescribe de la forma:

$$\sqrt{(k_\omega + il_\omega)^2 - k_x^2} = K_z(\omega)[P(\omega) - i\beta(\omega)] \quad (4.12)$$

donde

$$K_z(\omega) = \sqrt{k_\omega^2 - l_\omega^2 - k_x^2} \quad (4.13)$$

$$P(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{1 + \gamma^2(\omega)} + 1}} \quad (4.14)$$

$$\beta(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{1 + \gamma^2(\omega)} - 1}} \quad (4.15)$$

con

$$\gamma(\omega) = -\frac{2k_\omega l_\omega}{k_\omega^2 - l_\omega^2 - k_x^2} \quad (4.16)$$

a partir de estas definiciones se obtienen las expresiones para el extrapolador $P_D(k_\omega, l_\omega, k_x)$ que se utiliza para el campo de onda descendente. Se distinguen tres casos:

- **Caso 1:** $k_x^2 < k_\omega^2 - l_\omega^2$

$$\begin{aligned} P_D(k_\omega, l_\omega, k_x) &= e^{i\sqrt{(k_\omega+l_\omega)^2-k_x^2}\Delta z} \\ &= e^{iK_z(\omega)P(\omega)\Delta z} e^{K_z(\omega)\beta(\omega)\Delta z} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión 4.13, es mayor que cero, los extrapoladores tienen signo positivo, la parte del exponente imaginario indica la dirección de propagación y la parte del exponente real produce un efecto contrario a la atenuación en la amplitud de la onda al propagarse.

- **Caso 2:** $k_x^2 = k_\omega^2 - l_\omega^2$

$$P_D(k_\omega, l_\omega, k_x) = e^{i\sqrt{-k_\omega l_\omega}\Delta z} e^{\sqrt{-k_\omega l_\omega}\Delta z} \quad (4.18)$$

Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión 4.13, es igual a cero, los términos en los exponentes son iguales, al resolver la raíz cuadrada el valor es positivo, lo que permite recuperar valores de amplitud de la onda a medida que esta se propaga.

- **Caso 3:** $k_x^2 > k_\omega^2 - l_\omega^2$

$$P_D(k_\omega, l_\omega, k_x) = e^{-iK'_z(\omega)\alpha(\omega)\Delta z} e^{-K'_z(\omega)P(\omega)\Delta z}. \quad (4.19)$$

Donde

$$K'_z(\omega) = \sqrt{l_\omega^2 + k_\omega^2 - k_x^2} \quad (4.20)$$

Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión 4.13, es menor que cero, los términos en los exponentes son valores negativos, lo que permite recuperar valores de amplitud de la onda a medida que esta se propaga.

De igual forma para la onda ascendente se obtienen las siguientes expresiones para el extrapolador $P_U(k_\omega, l_\omega, k_x)$. Nuevamente se distinguen tres casos:

- **Caso 1:** $k_x^2 < k_\omega^2 - l_\omega^2$

$$\begin{aligned} P_U(k_\omega, l_\omega, k_x) &= e^{i\sqrt{(k_\omega-l_\omega)^2-k_x^2}\Delta z} \\ &= e^{-iK_z(\omega)P(\omega)\Delta z} e^{K_z(\omega)\beta(\omega)\Delta z} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión 4.13, es mayor que cero, la parte del exponente imaginario en el extrapolador negativos indica

la dirección de propagación (hacia atrás) y la parte del exponente real produce un efecto contrario a la atenuación en la amplitud de la onda al propagarse.

- **Caso 2:** $k_x^2 = k_\omega^2 - l_\omega^2$

$$P_U(k_\omega, l_\omega, k_x) = e^{-i\sqrt{-k_\omega l_\omega} \Delta z} e^{\sqrt{-k_\omega l_\omega} \Delta z} \quad (4.22)$$

Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión 4.13, es igual a cero, los términos en los exponentes son iguales, el exponente negativo e imaginario indica la propagación de la onda ascendente y el exponente real y positivo permite recuperar valores de amplitud de la onda a medida que esta se propaga.

- **Caso 3:** $k_x^2 > k_\omega^2 - l_\omega^2$

$$P_U(k_\omega, l_\omega, k_x) = e^{-iK'_z(\omega)\alpha(\omega)\Delta z} e^{K'_z(\omega)P(\omega)\Delta z}. \quad (4.23)$$

Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión 4.13, es menor que cero, la parte del exponente imaginario es negativo e indica la dirección de propagación de la onda (ascendente) y el signo positivo del exponente real permite recuperar valores de amplitud de la onda a medida que esta se propaga.

4.1.2. Factor de calidad Q

El parámetro de atenuación, se tiene como un modelo estructural de Q . Este se introduce en el algoritmo como una matriz que representa las capas del subsuelo con características dispersivas. Un valor grande del parámetro Q significa una pérdida de amplitud y de frecuencias muy leve, por el contrario un factor de calidad Q pequeño significa una atenuación grande en los datos.

4.1.3. Modelo de velocidad

Teniendo en cuenta los diferentes modelos de atenuación mencionados en el capítulo 3, se genera el modelo adecuado para la migración. La velocidad de fase necesita como parámetros de entrada un valor c_0 inicial y un valor Q , con los cuales se calcula el valor de la velocidad compleja.

Se utilizan dos modelos de atenuación de velocidad compleja, el Futterman-Kolsky y el modelo de Q constante de Kjartansson, la elección de estos modelos es debido al comportamiento de la atenuación de manera lineal y que los demás modelos están basados en estos, por lo que es posible aproximar esos modelos al modelo de Futterman-Kolsky.[27]

* El primer modelo de atenuación implementado es el de “Futterman”(1962)

Donde la velocidad de fase compleja está dada por la ecuación:

$$c = c_0 \left(1 + \frac{1}{\pi Q} \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \quad (4.24)$$

y el número de onda complejo $k(\omega)$ está definido por

$$k = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{i}{2Q} \right) \quad (4.25)$$

* Un segundo modelo de atenuación implementado es el de “Kjartansson” (McDonald et al. 1958; Kjartansson, 1979)

En este modelo se considera Q como constante. [28]

Para una onda plana atenuante, basada en la ecuación de onda visco-acústica, la velocidad de fase real se puede expresar como (Aki y Richard 1980, ecuación (5.96))

$$c_0(\omega) = \sqrt{\frac{M_R}{\rho}} \left(\frac{2(1 + Q^{-2})}{1 + \sqrt{1 + Q^{-2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.26)$$

la velocidad de fase compleja se define como

$$c^2(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + Q^{-2}}} \right) c_0^2(\omega_r) \left(\frac{i\omega}{\omega_r} \right)^\Gamma \quad (4.27)$$

donde

$$\Gamma = \frac{1}{\pi} \tan \left(\frac{1}{Q} \right) \quad (4.28)$$

los valores de Γ para cualquier valor positivo de Q están en el rango $0 < \Gamma < 0.5$.

4.1.4. Condición de imagen

Existen diferentes condiciones de imagen entre ellas la correlación cruzada que ha sido el implementado en este trabajo. La correlación cruzada de un operador, normalmente se simboliza por \otimes , y definida, para dos funciones hipotéticas, $r(t)$ y $w(t)$ por

$$\Phi_{rw}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)w(t - \tau)dt \quad (4.29)$$

o en el caso discreto

$$\Phi_{rw}(\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} r_t w_{t-\tau} \quad (4.30)$$

donde Φ representa el resultado de la correlación cruzada entre las funciones $r(t)$ y $w(t)$, o dos series r_t y w_t . En las dos expresiones, el símbolo τ indica un desplazamiento del tiempo, en inglés *lag*. Esta ecuación tiene la forma similar a la definición

de convolución (ver apéndice 5.2.2) sin embargo los índices en las sumatorias son diferentes. Reescribiendo la ecuación 4.30 de la forma:

$$\Phi_{rw}(\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} r_t w_{\tau-t}^* \tag{4.31}$$

donde w_t^* es la serie original invertida en el tiempo, es decir $w_t^* = w_{-t}$, se esta manera se puede escribir la operación de correlación cruzada como

$$r_t \otimes w_t = r_t * w_{-t} \tag{4.32}$$

concluyendo de esta manera que la condición de imagen es la superposición de dos frentes de onda, una que avanza en el tiempo y otra que retrocede, las ondas se encuentran en fase cuando coinciden en las interfaces, produciendo una interferencia constructiva. El pseudocódigo de este proceso se muestra en la figura 4.1.

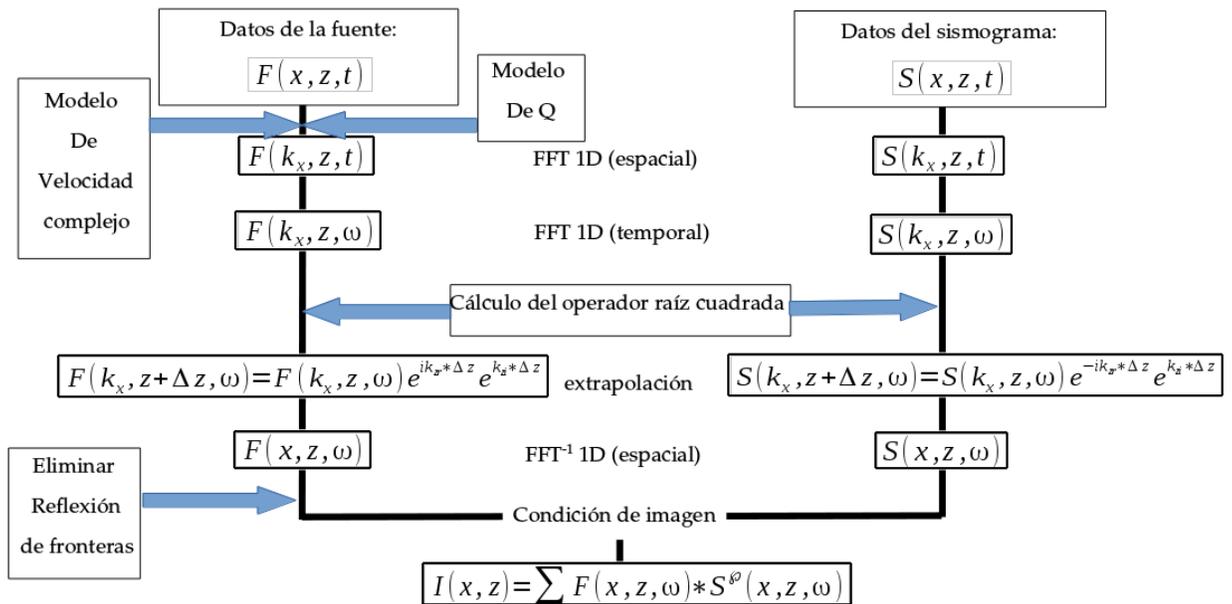


FIGURA 4.1. Esquema Phase Shift + Q

CAPÍTULO 5

Implementación y comparación de los métodos

Se muestran a continuación, los resultados numéricos de la migración por corrimiento de fase, en una primera aproximación se implementa el pseudocódigo de **PS**, y luego dos modificaciones a este método, al incluir los modelos matemáticos para la atenuación. El trabajo computacional se desarrolló en lenguaje C y se utilizaron algunas rutinas de SU (Seismic Unix)¹ para el desarrollo de este capítulo.

La migración por corrimiento de fase (**PS**) sin tener en cuenta la atenuación, no tiene buenos resultados cuando los modelos de velocidad tienen variaciones laterales fuertes, por lo tanto las estructuras mostradas, son aproximaciones de estratos geológicos relativamente sencillos.

El pseudocódigo de la migración **PS** se modifica para ingresar un nuevo parámetro, el factor de calidad Q , el cual está definido en una matriz que representa un mapa del subsuelo. En este caso el mapa de c velocidades no es una matriz con valores reales, sino que depende del factor de calidad y de las frecuencias de acuerdo al modelo matemático de atenuación elegido. Los datos sintéticos atenuados son generados con las rutinas de **SU**. En este proceso los datos deben ser modificados para eliminar la onda directa, es de interés solamente la onda reflejada.

Utilizando la rutina de Seismic Unix *triseis*², se obtiene el sismograma sintético con atenuación; los parámetros necesarios para implementar esta rutina son el modelo de velocidad y el modelo del factor de calidad Q , adicionalmente las ubicaciones de las fuentes y de los receptores. El modelo de velocidad compleja utilizado por esta rutina (**triseis**) es el de **Futterman y Kolsky**.

¹Seismic Unix es un paquete gratuito apoyado por CWP (Center for Wave Phenomena)

²Gaussian beam synthetic seismograms for a sloth model

5.1. Migración por corrimiento de fase (PS)

El programa que realiza la migración (PS) se desarrolló en lenguaje de programación C, el pseudo código ha sido mostrado anteriormente (ver figura 2.2) y permite realizar la migración sísmica a modelos simples con gran precisión. Para cada experimento se utilizan varias rutinas, en primer lugar es necesario crear el mapa de velocidades y el mapa de Q . Los sismogramas son generados con una rutina diferente utilizando Seismic Unix.

Experimento 1:

Para el primer experimento se genera un modelo de dos capas, el tamaño del modelo es de (3km) de profundidad por (3km) de longitud en superficie (ver figura 5.1).

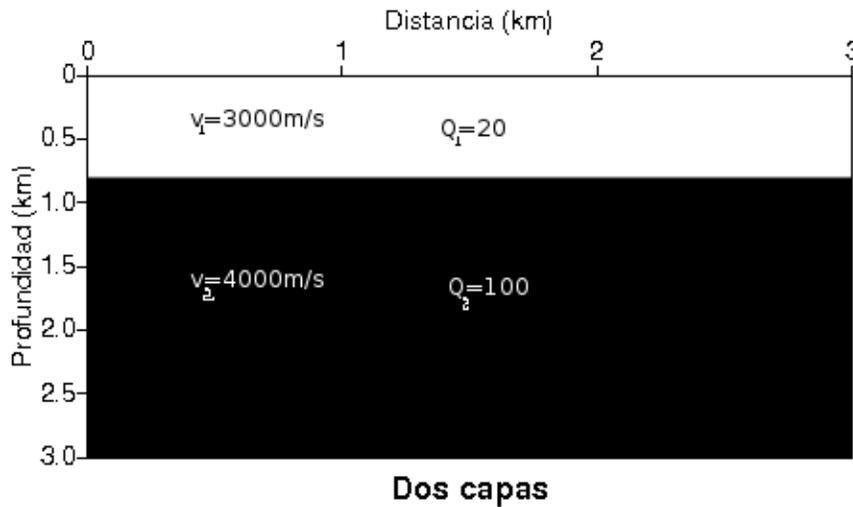


FIGURA 5.1. Modelo de velocidad y de factor de calidad Q para dos capas.

Se realiza una adquisición para un disparo, la fuente ubicada en la superficie en $z = 0$ y en $x = 150$, los geófonos (receptores) colocados a ambos lados de la fuente y en la superficie. En el registro se omite la onda directa y las onda críticamente refractadas, por lo tanto se observa en la figura 5.2, la hipérbola de reflexión, producida por la frontera entre los dos medios. El tiempo de registro fue de 1.4s .

En la figura 5.2, se aprecia una traza, esto es lo que se obtiene en un geófono al momento de una adquisición. Con el sismograma y el mapa de velocidades ya es posible realizar la migración por corrimiento de fase (**PS**). En el código los parámetros necesarios son los valores que determinan el tamaño del modelo $nx = 300$, $dx = 0.01$ para $nz = 300$, $dz = 0.01$ para el tiempo $t = 1400$ y $dt = 0.001$, el resultado se observa en la figura 5.3.

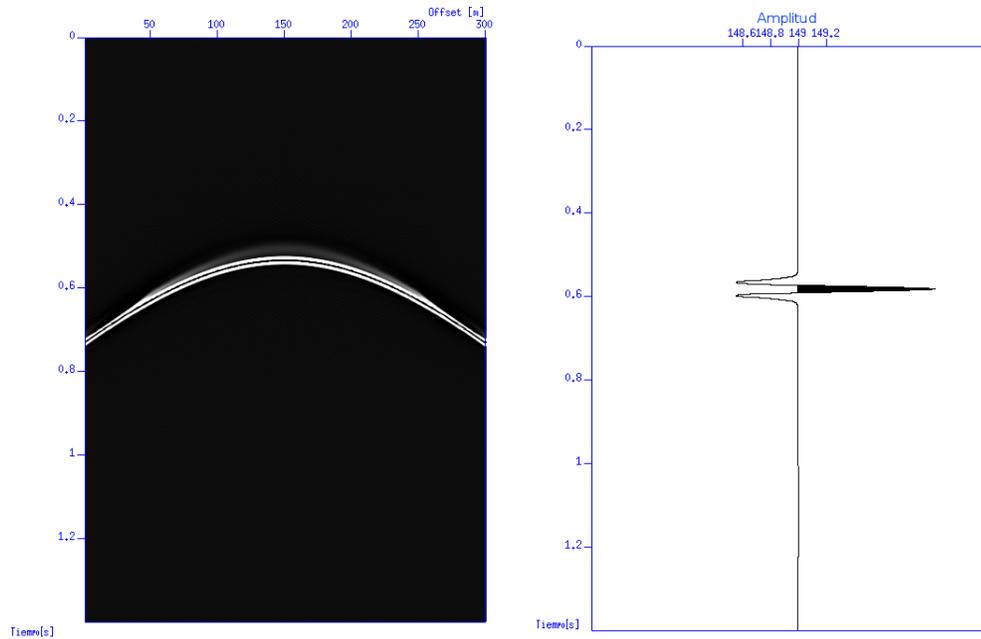


FIGURA 5.2. Sismograma obtenido para un disparo. Traza extraída del geófonos en la Posición central (Justo en la posición de la fuente).

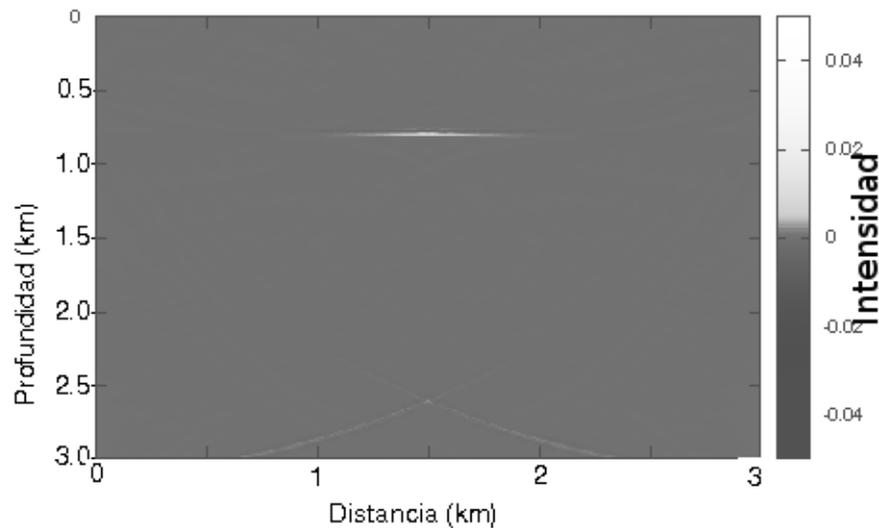


FIGURA 5.3. Resultado de la migración por corrimiento de fase para un solo disparo.

Se puede apreciar en la imagen migrada (ver figura 5.3)³, que la ubicación de la interfase es correcta, sin embargo debido al tamaño del modelo (3km en superficie por 3km en profundidad), la amplitud de la interface es muy debil, si se reduce el tamaño del modelo es posible apreciar mejor el efecto de la migración.

³La barra de intensidades muestra los valores máximos o mínimos resultado de la correlación cruzada en la condición de imagen

Experimento 2:

Se modifica el tamaño del modelo, en este caso es de 2km de longitud por 1km de profundidad, se divide el medio en tres capas con diferentes velocidades y valores del factor de calidad Q (ver figura 5.4). La capa superior se considera una velocidad de 3000m/s , la capa central con una velocidad de 3800m/s y la capa inferior con una velocidad de 4100m/s .

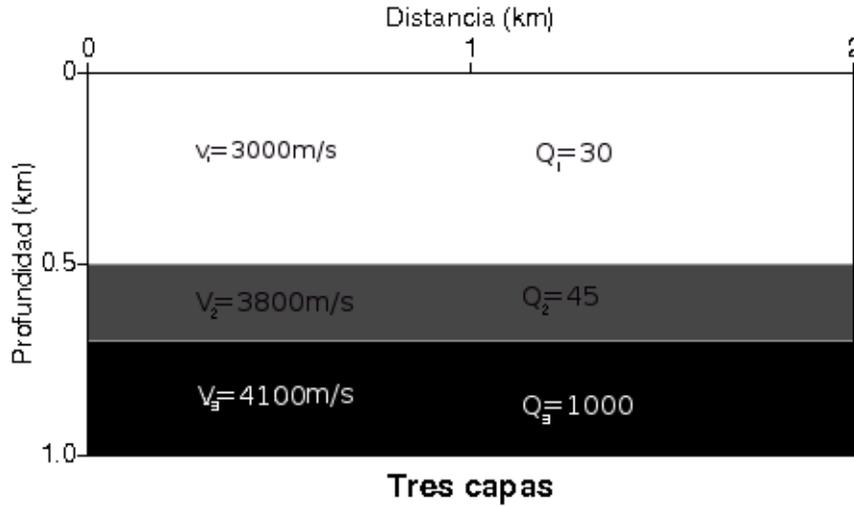


FIGURA 5.4. Modelo de velocidad y modelo de Q para tres estratos.

Los valores del factor de calidad Q aumentan con la profundidad, debido a que los materiales que se encuentran bajo condiciones de grandes presiones, se compactan aproximándose a sólidos perfectos. Con la rutina de Seismic-Unix se genera el sismograma sintético, en la figura 5.5 se observan las hipérbolas de reflexión debido a las dos fronteras. En la traza se aprecia una pérdida muy pequeña de amplitud, esto se debe a los valores de Q , para valores grandes el efecto es baja atenuación.

La imagen (ver figura 5.6) es el resultado de la migración preapilado en profundidad, utilizando el modelo de velocidad y el sismograma sintético, se puede apreciar las fronteras entre los medios bien definidas y en las posiciones reales, la definición aumentó debido al cambio de escala del modelo. En la escala de grises seleccionada $[-0.1 : 0.1]$ es posible apreciar el efecto de la dispersión numérica y las reflexiones en los bordes. En esta escala se puede ver mejor la imagen ya que la estructura geológica aparece bien definida. Sin embargo debido a que la migración se realizó a un sólo disparo la imagen final solo ilumina una parte del modelo.

Experimento 3:

Se utiliza un modelo estratificado de cuatro capas, la velocidad aumenta en profundidad y el valor del factor de calidad aumenta también (ver figura 5.7). se eligen valores de Q pequeños para que el efecto de la atenuación sea apreciable.

La capa superior representa un estrato no consolidado, es decir material suelto

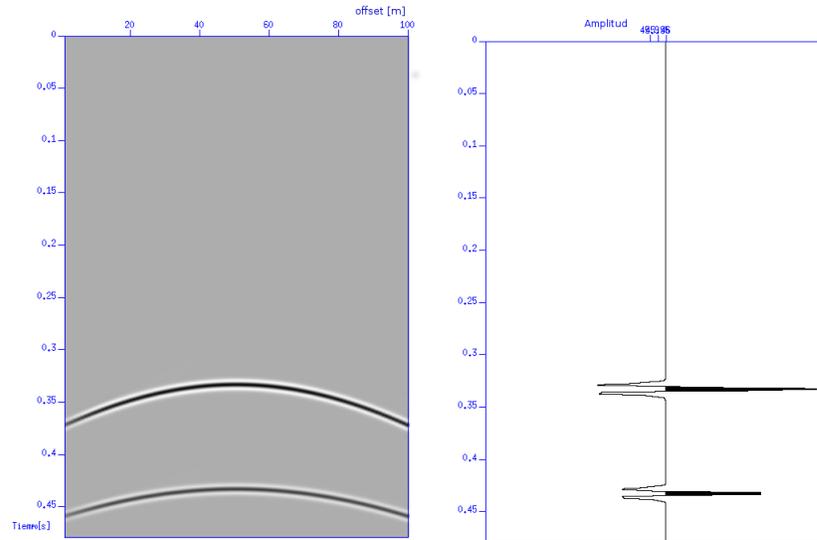


FIGURA 5.5. Sismograma para un disparo en el centro del modelo. Traza del geófono ubicado justo en la posición de la fuente.

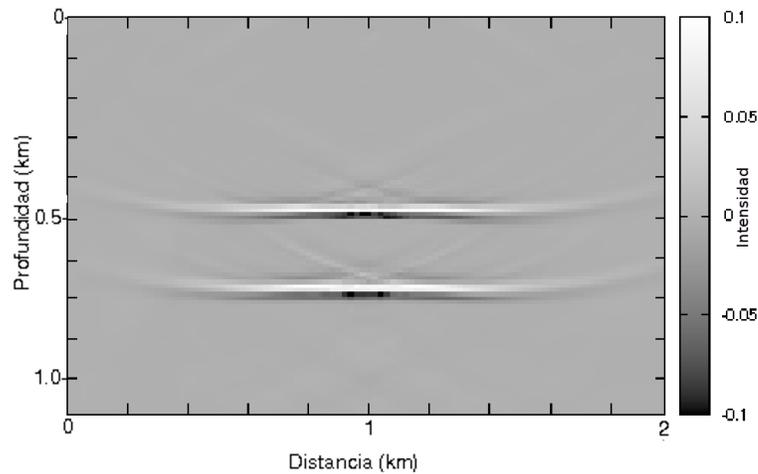


FIGURA 5.6. Imagen migrada por el método por corrimiento de fase para el modelo de tres capas planas.

que produce una pérdida de energía importante, este es conocido como capa de meteorización, a medida que se avanza en profundidad las rocas son más densas y se considera que la energía se transmite con menor pérdida.

Se obtienen datos para 18 adquisiciones, es decir se registran 18 disparos, el modelo tiene una extensión de $1000m$ y las fuentes se ubican cada $50m$; el proceso de migración se realiza para cada adquisición (disparo), las imágenes de cada experimento son guardadas en una matriz, al final se suman las 18 matrices que contienen la información (ver figura 5.8).

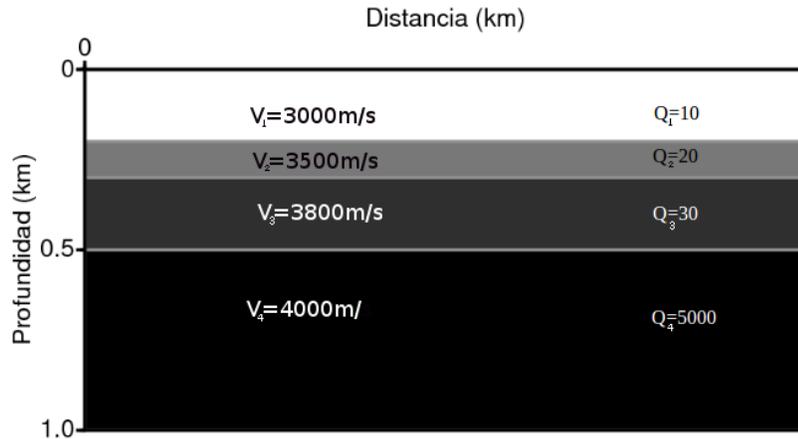


FIGURA 5.7. Modelo de velocidad y de factor de calidad Q que representa cuatro estratos horizontales.

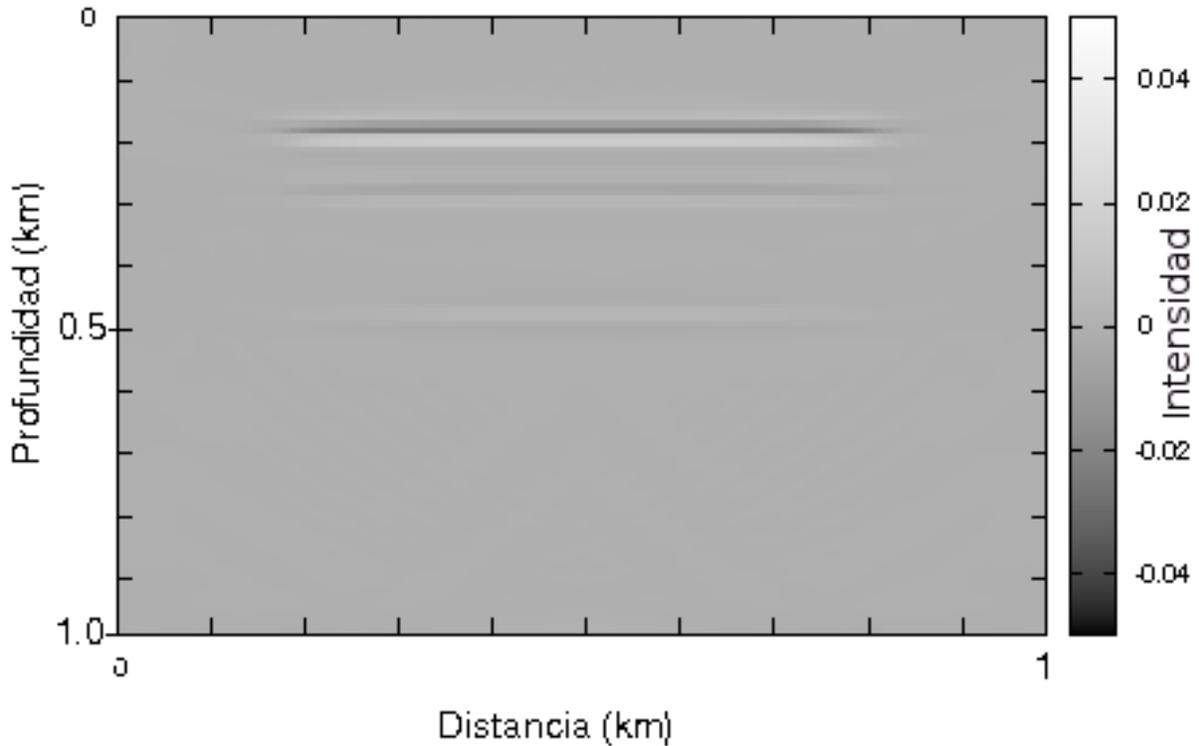


FIGURA 5.8. Imagen obtenida de la migración **PS** para múltiples disparos.

Si se compara la escala de grises utilizada en la imagen final (ver figura 5.8) con la figura 5.6, se logra ver la atenuación que ha sufrido la onda al propagarse por este medio, aunque las fronteras se ven bien ubicadas (ver figura 5.9), la amplitud de la última es muy pequeña, esto se debe al fenómeno de la atenuación.

Es por esto que surge la necesidad de modificar el algoritmo, para apreciar mejor las fronteras que se encuentran bajo materiales disipativos. Un método de

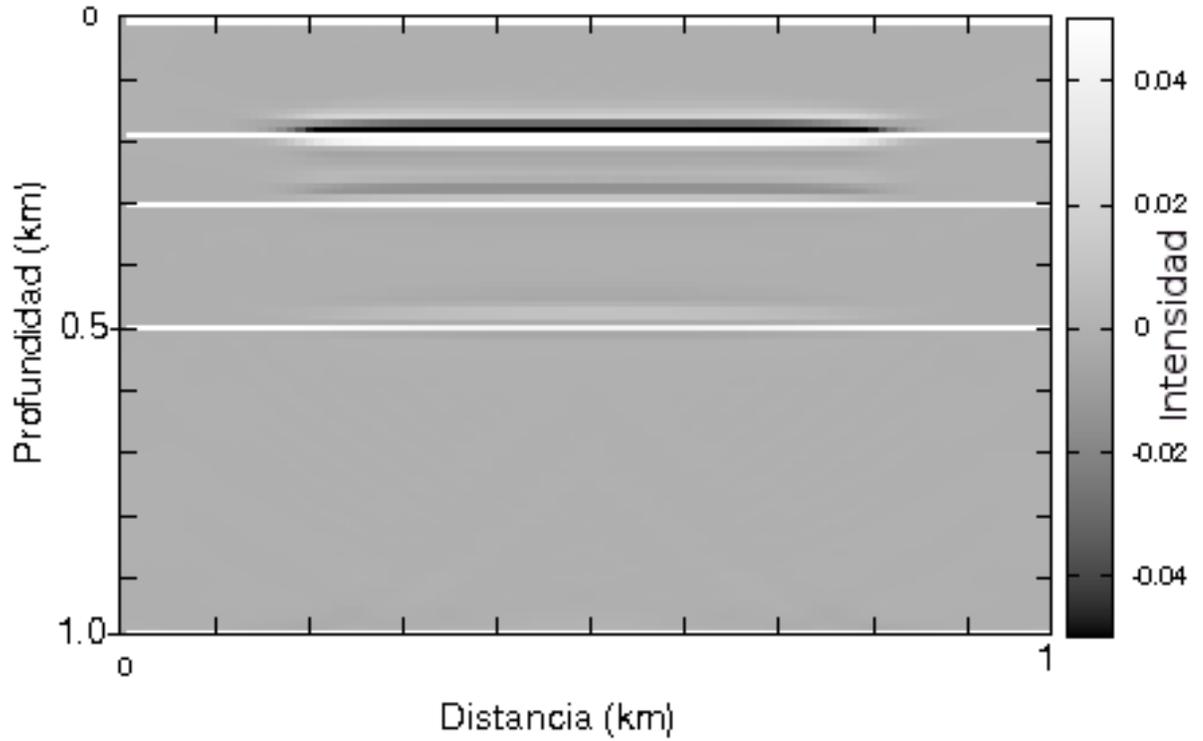


FIGURA 5.9. Superposición de la imagen migrada por el método de corrimiento de fase sin tener en cuenta la atenuación con las posiciones reales del modelo.

migración que permita recuperar la amplitud de la onda cuando esta viaja por un medio dispersivo.

5.2. Migración PS con recuperación de energía

Ahora se modifica el método de migración por corrimiento de fase PS [26], incluyendo un modelo del factor de calidad Q del medio, del cual depende la velocidad descrita como una matriz con valores complejos. A continuación se prueban los modelos de “Kolsky- Futterman ” y “Kjartansson”.

5.2.1. Modelo de atenuación “Kolsky- Futterman”

El primer paso es modelar la propagación de la onda con atenuación (ver figura 5.10). En un medio con velocidad constante $3000m/s$, se presentan las instantáneas para diferentes valores del factor de calidad.

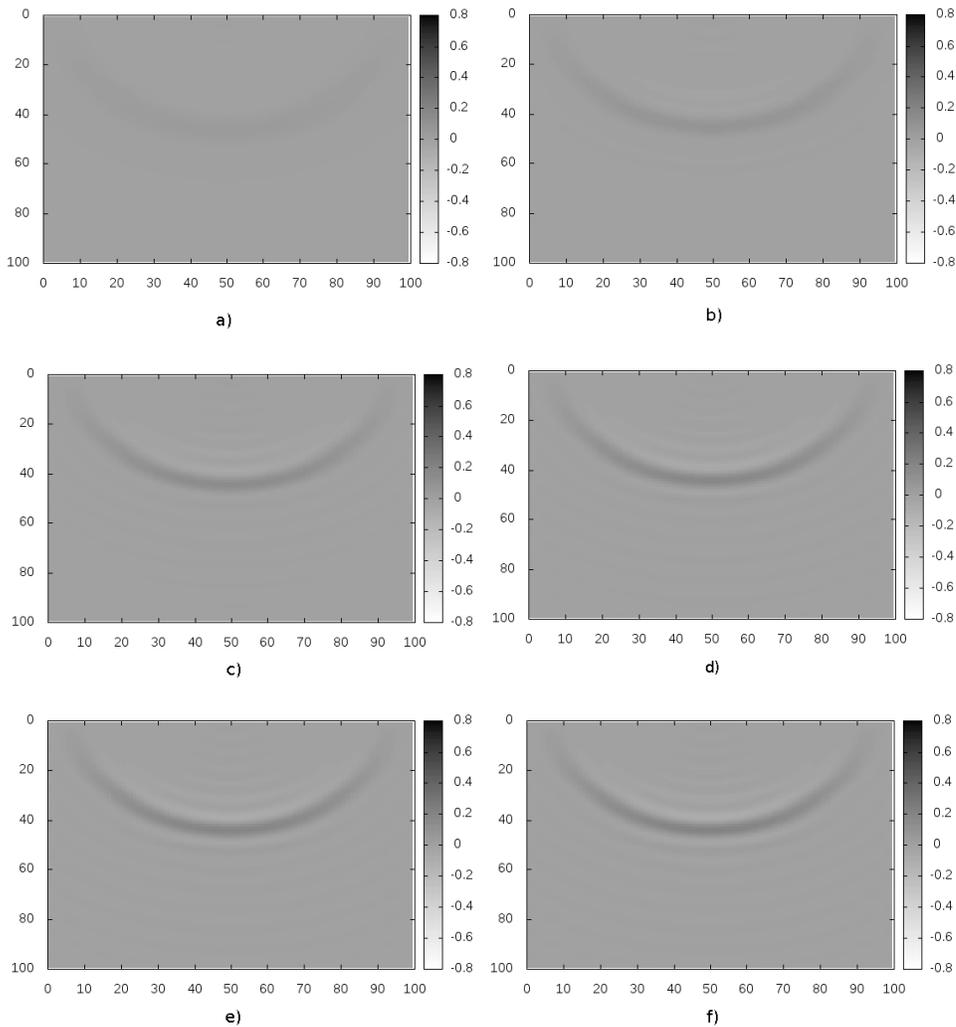


FIGURA 5.10. Onda descendente con diferentes valores de Q . Para: a) $Q = 10$, b) $Q = 20$, c) $Q = 30$, d) $Q = 40$, e) $Q = 50$, f) $Q = 60$.

En la figura 5.11, se muestra el fenómeno de atenuación que sufre la ondícula debido a cada valor del factor de calidad Q .

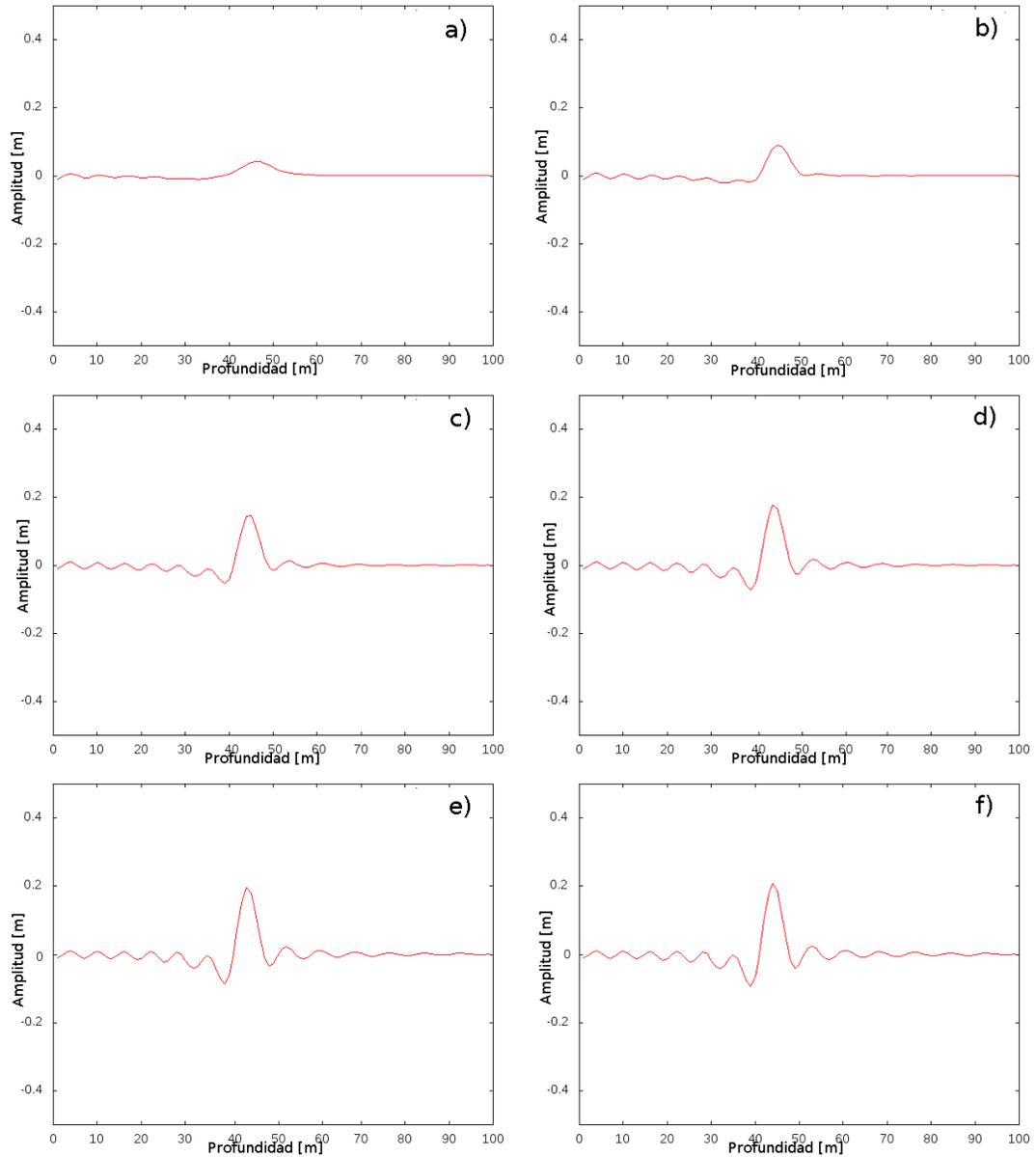


FIGURA 5.11. Vista lateral de la onda viajando hacia abajo en medios con diferente factor de calidad. a) $Q = 10$, b) $Q = 20$, c) $Q = 30$, d) $Q = 40$, e) $Q = 50$, f) $Q = 60$.

Como era de esperarse, los valores pequeños del factor de calidad producen una gran atenuación en las ondas, y los valores altos afectan muy poco la amplitud de las ondas, el paso a seguir es recuperar la información durante el proceso de modelado, se cambia el extrapolador para corregir la amplitud y evitar pérdidas de las frecuencias.

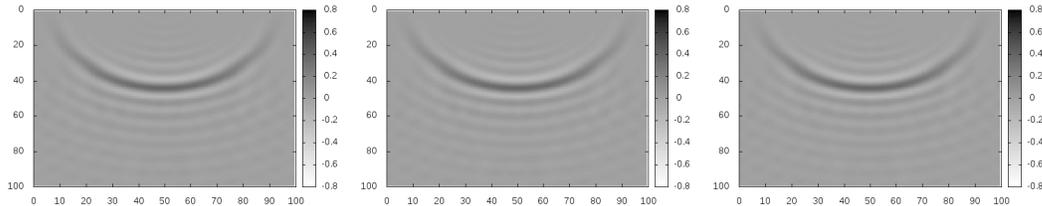


FIGURA 5.12. Modelado utilizando OWWE. Onda descendente con amplitud corregida.

En la figura 5.12, se realizó la corrección de amplitud con los valores del factor de calidad $Q = 10$, $Q = 30$ y $Q = 50$, y la imagen captada para el mismo instante de tiempo fué similar en los tres casos.

De igual forma es posible apreciar mejor el fenómeno si se observa la onda en una dimensión (ver figura 5.13).

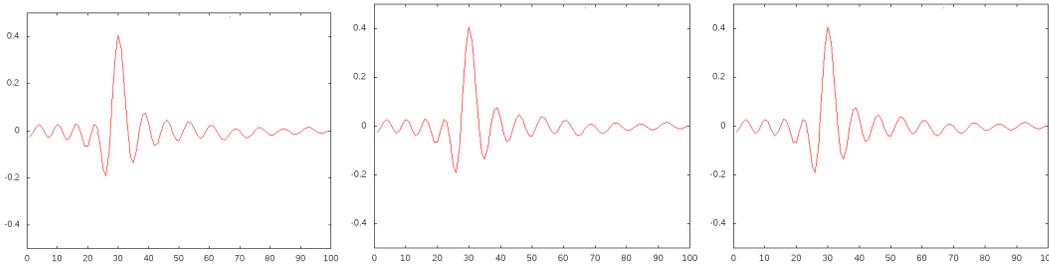


FIGURA 5.13. Onda con amplitud corregida utilizando el modelo de Futterman y Kolsky para una velocidad compleja.

Utilizando el modelo para el factor de calidad propuesto por FUTTERMAN (Futterman, 1962), se realiza la migración para diferentes datos sintéticos. Los modelos de velocidad se realizan con ayuda de SU (Seismic Unix), una vez se tiene la matriz con los valores de velocidad y con los valores del factor de calidad se procede a realizar la adquisición de datos. Para validar los resultados de compara cualitativamente las imágenes después del proceso de migración sísmica con los dos algoritmos.

Experimento 1:

Se genera un modelo de cuatro capas, el tamaño del modelo es de ($1km$) de profundidad por ($1km$) de longitud en superficie (ver figura 5.14).

Para obtener el dato sintético se utiliza de nuevo la rutina de Seismic Unix *triseis*

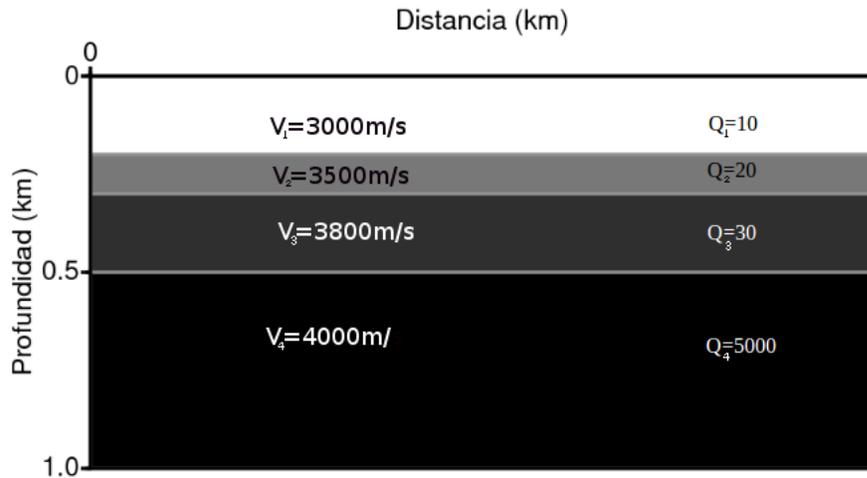


FIGURA 5.14. Modelo de velocidad y del factor de calidad para 4 estratos horizontales.

incluyendo el parámetro del factor de calidad Q . El sismograma de la figura 5.15, es el resultado de un disparo ubicado en $x = 50m$ y en superficie, de este sismograma se extrae una traza, con el fin de observar el comportamiento de la ondícula debido a la atenuación.

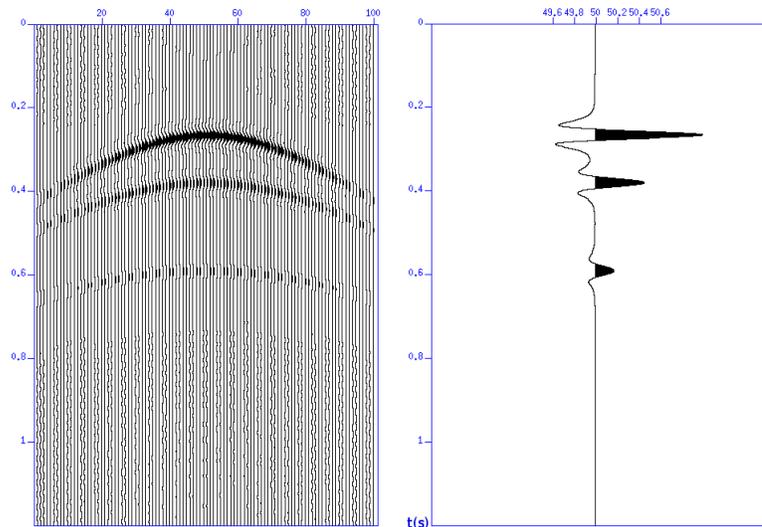


FIGURA 5.15. Sismograma sintético para un disparo. Traza extraída del geófono ubicado en el centro del modelo en superficie (Posición de la fuente).

La fuente se ubica cada $50m$, comenzando en la posición $x = 50$ hasta la posición $x = 95$, es decir se ubica la fuente en 18 posiciones diferentes y se recogen los

sismogramas, se realiza la migración para cada adquisición y al final se suman para obtener una única imagen donde se aprecian las interfases del modelo de velocidad (ver figura 5.16).

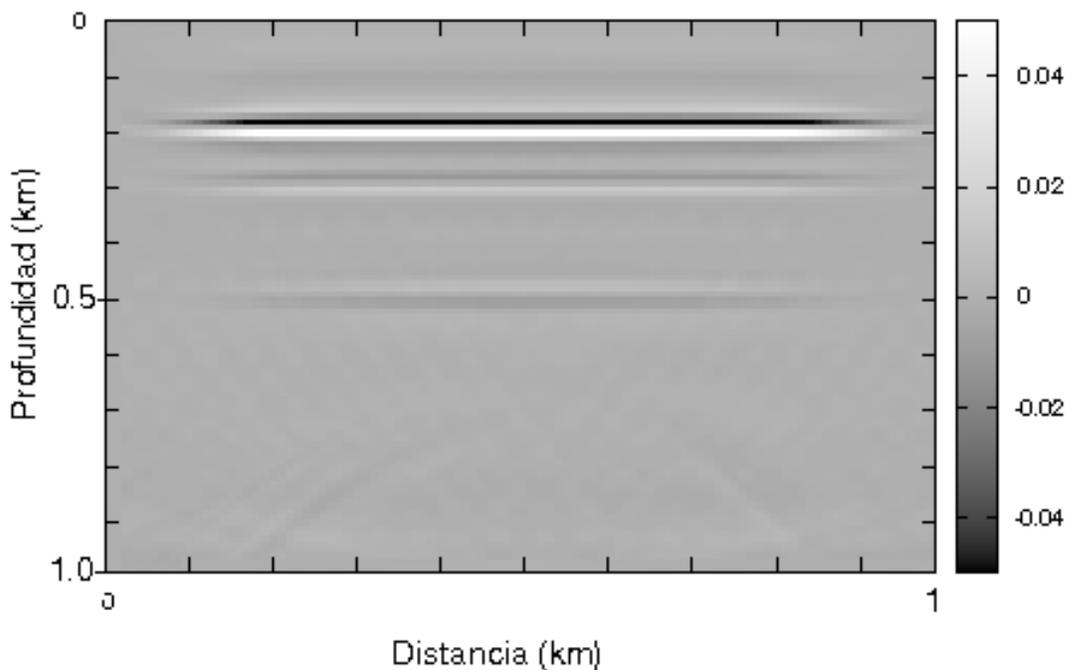


FIGURA 5.16. Imagen final de la migración PS con recuperación de energía.

Si se colocan las dos imágenes juntas, la figura 5.8, que corresponde al experimento con el algoritmo de **PS** sin corrección de amplitud, y la figura 5.16, obtenida con la migración que compensa las pérdidas por atenuación.

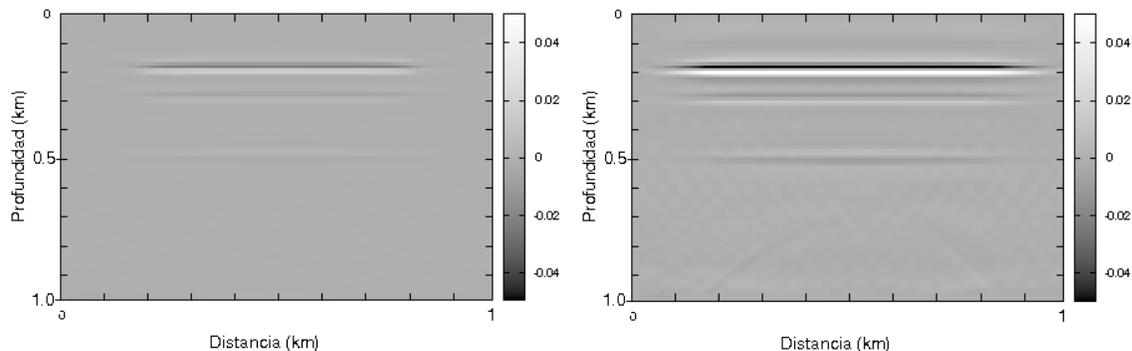


FIGURA 5.17. Migración PS. Sin recuperación de energía y con recuperación de energía

se observa que mejora la amplitud de las interfases más profundas, logrando que

sea más fácil la interpretación por parte de un experto, sin embargo se aprecian algunos ruidos que se deben a dispersión numérica en la solución del operador raíz cuadrada o efectos de reflexiones en las fronteras durante el modelado de la onda descendente.

En la comparación de la imagen obtenida con la estructura original (ver figura 5.18), se observa que las interfaces están bien posicionadas.

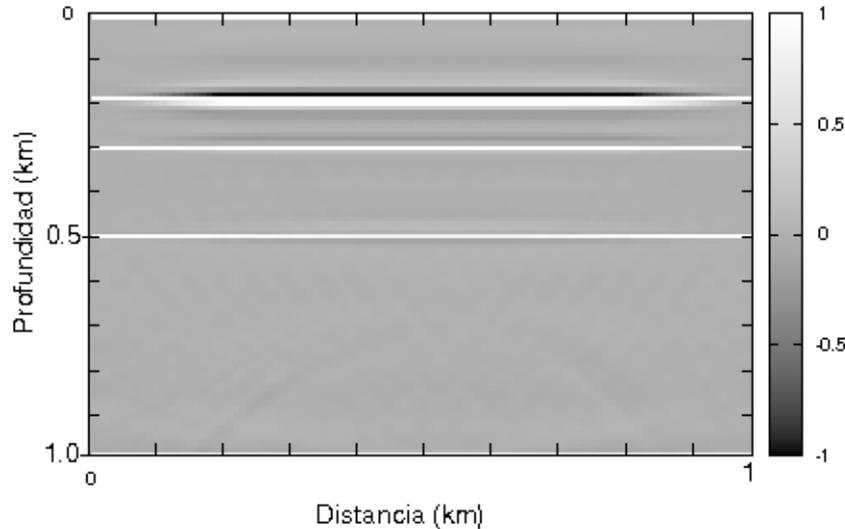


FIGURA 5.18. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.

Experimento 2:

Se modifica el modelo de velocidad y de factor de calidad de cuatro capas (ver figura 5.19), para simular dos modelos geológicos, un sinclinal⁴ y un anticlinal⁵. El tamaño del modelo es de (1km) de profundidad por (1km) de longitud en superficie.

Para obtener los sismogramas sintéticos se utiliza de nuevo la rutina de Seismic Unix *triseis*, incluyendo el parámetro del factor de calidad Q .

En la figura 5.20, se observa el sismograma obtenido para una adquisición, la ubicación de la fuente está en $x = 500m$ y en la superficie, con receptores a ambos lados, para ver el comportamiento del pulso, se extrae una traza del sismograma (ver figura 5.20b)).

⁴Sinclinal: Pliegue u ondulación de la corteza terrestre, debido a la tectónica, cuyos estratos convergen hacia abajo, es decir, en forma de cuenca.

⁵Anticlinal: Pliegue u ondulación de la corteza terrestre, debido a la tectónica, cuyos estratos convergen hacia arriba, es decir, en forma de bóveda.

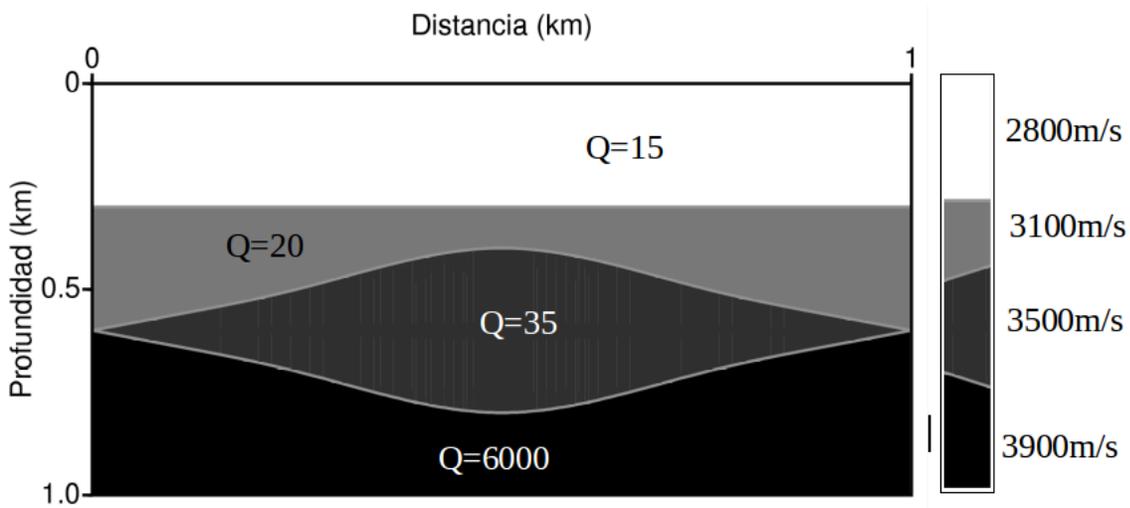


FIGURA 5.19. Modelo de velocidad de 4 capas con variaciones laterales de velocidad.

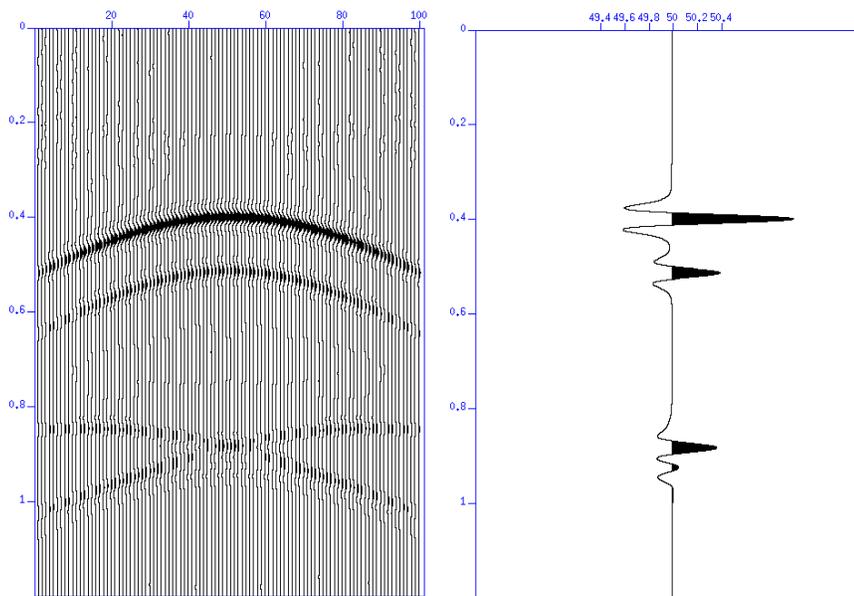


FIGURA 5.20. Sismograma sintético para un disparo. Trazas extraídas del geófono ubicado en la posición de la fuente para esta adquisición.

Se realiza el proceso de migración para cada disparo, con el código de **PS** sin compensación; ubicando la fuente inicialmente en la posición $x = 50m$ y avanzando cada $50m$ hasta $x = 950m$, en total se realiza la migración 18 veces. La imagen final se forma al sumar las matrices que contienen los resultados de las migraciones individuales, como producto se genera la figura 5.21.

En la figura 5.22, se aprecia el resultado de la migración **PS** utilizando el modelo de Futterman y Kolsky. La recuperación de energía muestra mayor amplitud en las interfaces y debido a dispersión numérica y efectos de los bordes aparecen eventos

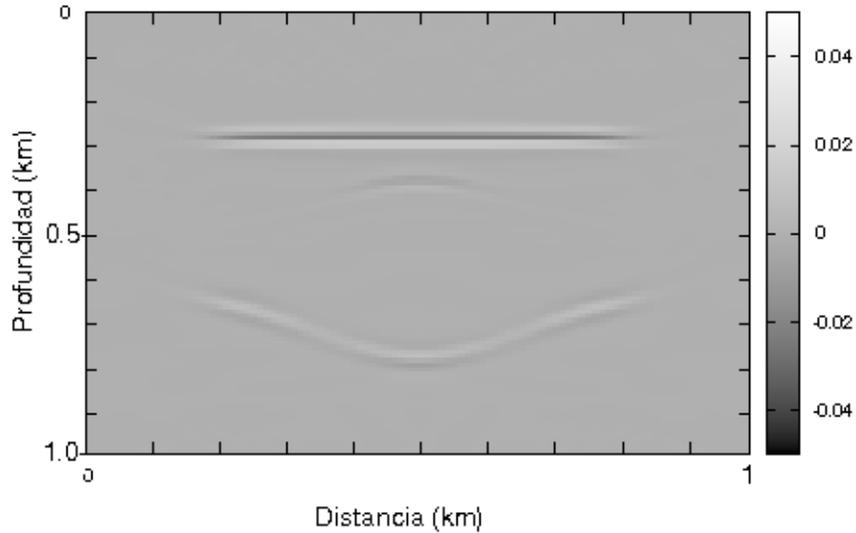


FIGURA 5.21. Imagen obtenida utilizando migración PS Sin recuperación de energía, en un modelo con variaciones laterales de velocidad, para multiples disparos.

que no existen, sin embargo debido a la escala de amplitud que se esta manejando $[-0.05 : 0.05]$ se ven exagerados.

Si se comparan las dos imágenes (ver figura 5.23), es posible concluir que los

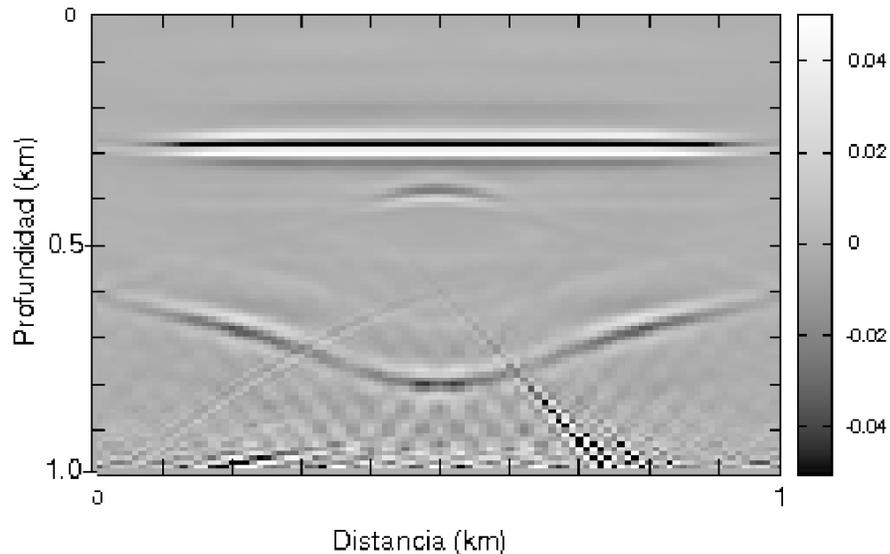


FIGURA 5.22. Imagen final resultado de la migración PS Con recuperación de energía utilizando el modelo de Futterman y Kolsky en un modelo de velocidad con variaciones laterales.

eventos de la estructura más profunda que representa un sinclinal, se reconstruye muy bien, debido a que los frentes de onda del modelado llegan a ella de forma perpendicular, caso contrario ocurre con la estructura anticlinal, los frentes de

onda pasan de forma paralela a la frontera por lo tanto no existe interferencia constructiva con la onda ascendente y no se forma la interfase.

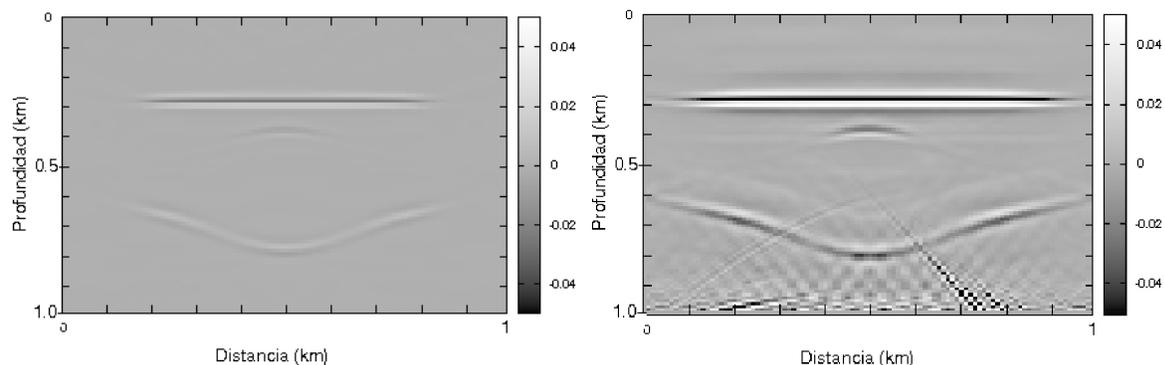


FIGURA 5.23. Migración PS sin recuperación de energía y con recuperación de energía utilizando el modelo de Q propuesto por Futterman y Kolsky.

En la comparación de la imagen obtenida con la estructura original (ver figura 5.24), se observa que las interfaces están bien posicionadas.

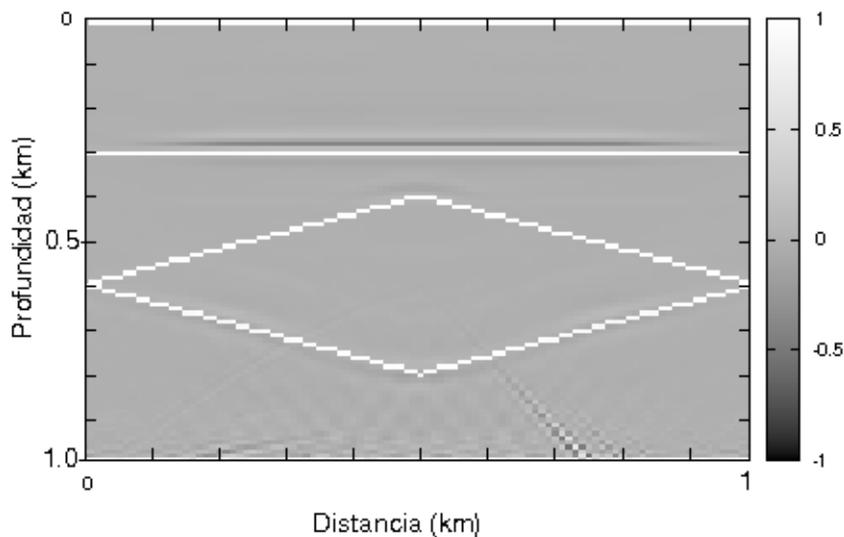


FIGURA 5.24. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.

Experimento 3:

Se genera un modelo un poco más complejo de cuatro capas (Ver figura 5.25), con el fin de ver el comportamiento del algoritmo con variaciones laterales de velocidad.

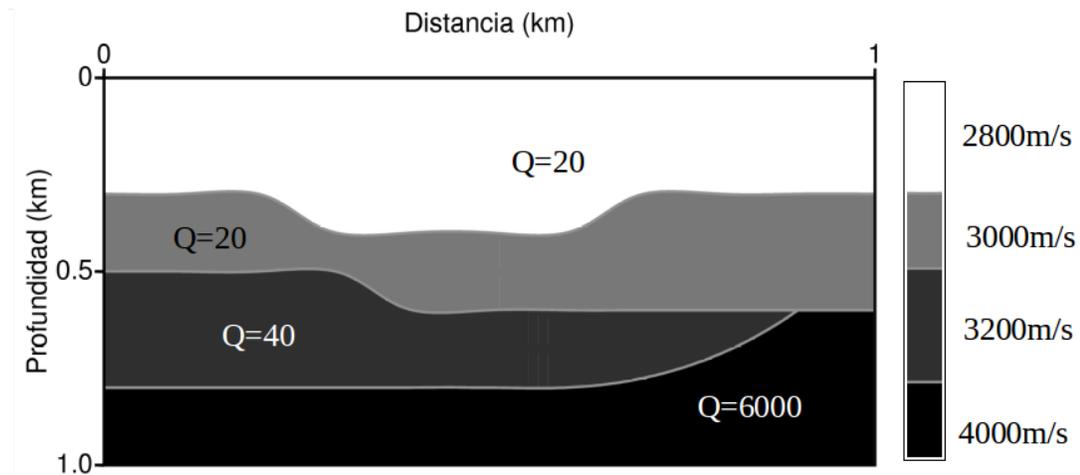


FIGURA 5.25. Modelo de velocidad y del factor de calidad para 4 capas con variaciones laterales de velocidad.

Los valores de la velocidad y del factor de calidad aumentan con la profundidad, debido a que las capas superiores representan materiales no consolidados, y a medida que baja en profundidad y aumenta la presión se compactan siendo menos dispersivos.

Para obtener los sismogramas sintéticos como el de la figura 5.26, se utiliza de nuevo la rutina de Seismic Unix *triseis* incluyendo el parámetro del factor de calidad Q .

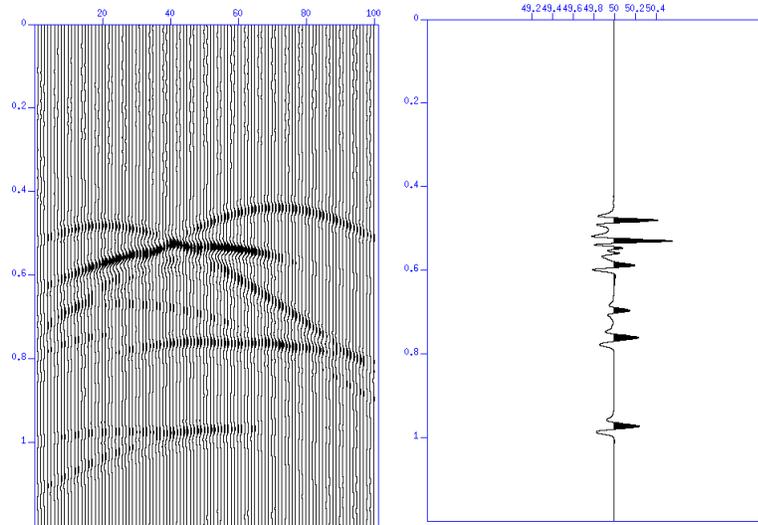


FIGURA 5.26. Sismograma sintético para un disparo. Traza extraída del geófono ubicado en la posición de la fuente).

Se realiza la adquisición para 18 posiciones diferentes de la fuente, comenzando en $x = 50m$ y aumentando cada $50m$ hasta la posición $x = 950m$. De igual forma que para los modelos anteriores, se realiza la migración a cada disparo, primero con el código **PS** sin atenuación, y el resultado final se muestra en la figura 5.27.

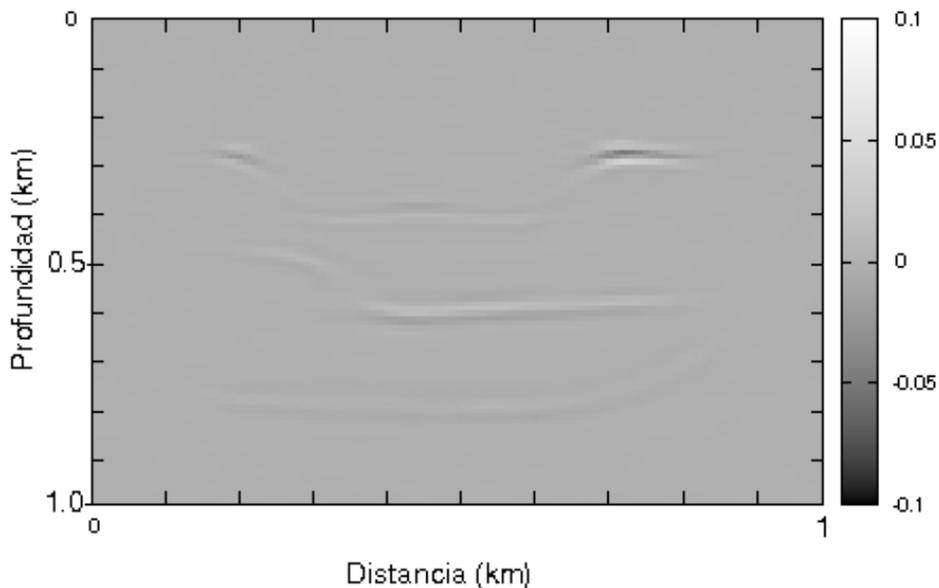


FIGURA 5.27. Migración PS sin recuperación de energía.

Esta migración arroja buenos resultados, las interfases son visibles aunque la última tiene una amplitud muy pequeña. Se procede a realizar el mismo proceso con el método de migración **PS** con compensación de energía utilizando el modelo matemático de Futterman- Kolsky, el resultado de este proceso se puede ver en la

figura 5.28

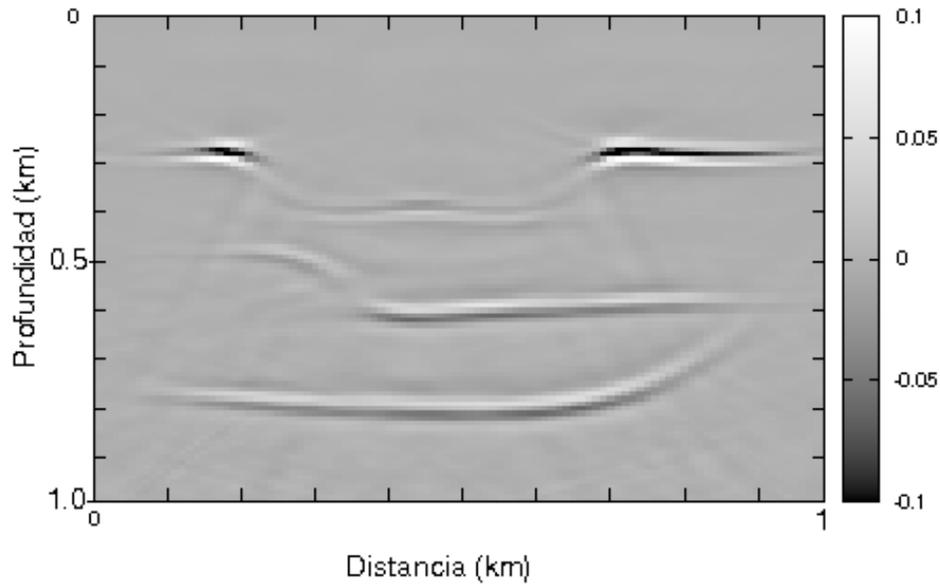


FIGURA 5.28. Migración PS con recuperación de energía utilizando el modelo matemático de Futterman y Kolsky.

Se colocan las imágenes finales de cada proceso (ver figura 5.29)

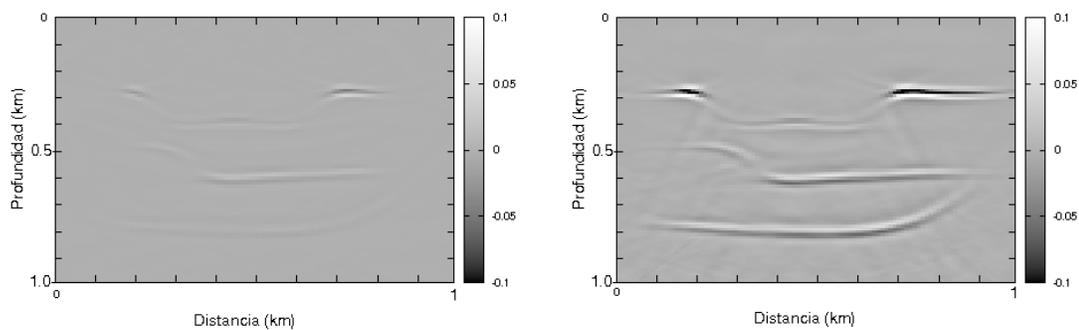


FIGURA 5.29. Comparación de las imágenes migradas por los métodos de PS, primero sin recuperación de energía y luego utilizando el modelo matemático de Futterman y Kolsky.

Se puede apreciar el aumento de la amplitud en las interfases inferiores, los efectos de la dispersión numérica y a las reflexiones en los bordes del modelo, son menos notorios, esto se debe al rango de amplitudes que se manejó para este modelo $[-0.1 : 0.1]$.

En la comparación de la imagen obtenida con la estructura original (ver figura 5.30), se observa que las interfaces están bien posicionadas.

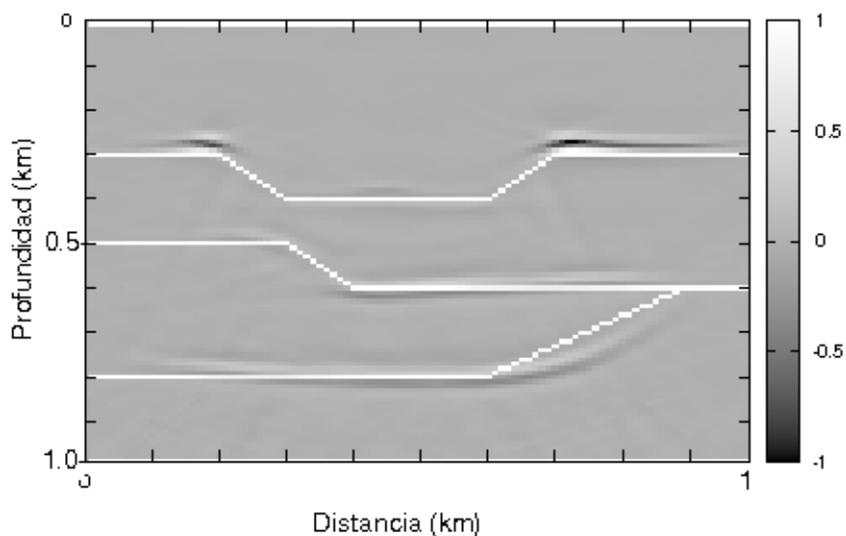


FIGURA 5.30. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.

Se puede concluir entonces que el modelo matemático para la velocidad compleja propuesto por Futterman y Kolsky, funciona al utilizarse en la solución de la ecuación de onda por medio de las ecuaciones de onda unidireccionales, y que la solución elegida para la raíz cuadrada del extrapolador propuesta por Mittet ([26]) arrojan buenos resultados y permiten obtener imágenes migradas con amplitudes mayores en fronteras que se encuentran bajo medios dispersivos.

5.2.2. Modelo de atenuación "Kjartansson"

Utilizando el modelo para el factor de calidad propuesto por Kjartansson (Kjartansson, 1979), se realizan pruebas con los mismos modelos de velocidad, esto con el fin de comparar los resultados y concluir que modelo genera una imagen más acertada. El primer paso es modelar la propagación de la onda con atenuación (ver figura 5.31). En un medio con velocidad constante 3000m/s , se muestra la posición de la onda en el mismo instante de tiempo para 6 valores diferentes de Q .

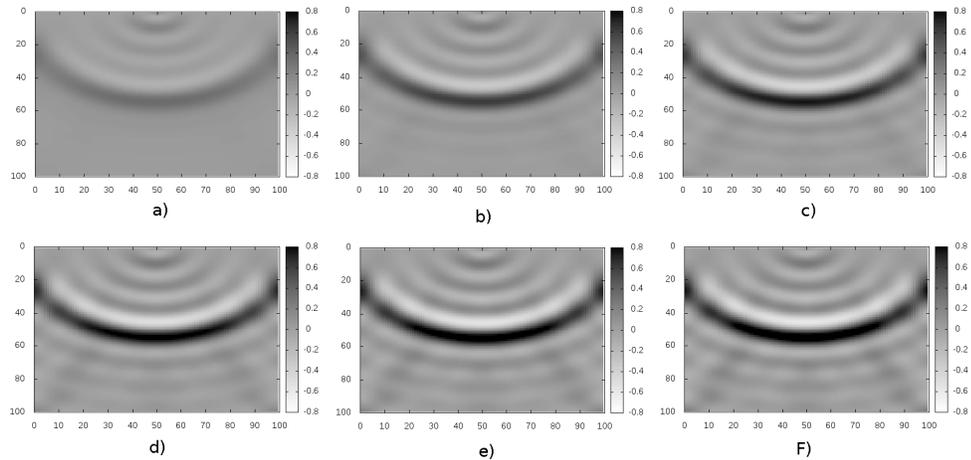


FIGURA 5.31. Instantáneas para la onda propagada en medios con diferentes valores del factor de calidad. a) $Q = 10$, b) $Q = 20$, c) $Q = 30$, d) $Q = 40$, e) $Q = 50$, f) $Q = 60$

El modelo de atenuación de Kjartansson maneja la atenuación para valores pequeños del factor de calidad, considerando valores para Q mayores de 50 como un medio no dispersivo.

El paso a seguir es recuperar la información durante el proceso de modelado, se cambia el extrapolador para corregir la amplitud y evitar pérdidas de las frecuencias. El resultado se muestra en la figura 5.32

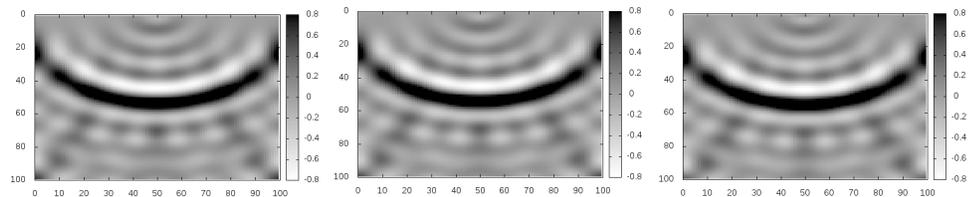


FIGURA 5.32. Modelado utilizando OWE. Onda descendente con amplitud corregida.

Debido a que los resultados son similares sin importar el valor del factor de calidad solo se incluyeron 3 instantáneas, para $Q = 10$, $Q = 30$ y $Q = 50$.

Experimento 1:

El modelo de cuatro capas utilizado anteriormente (ver figura 5.14), es utilizado con la rutina modificando el programa de migración por corrimiento de fase al incluir el modelo matemático de Kjartansson para una velocidad compleja.

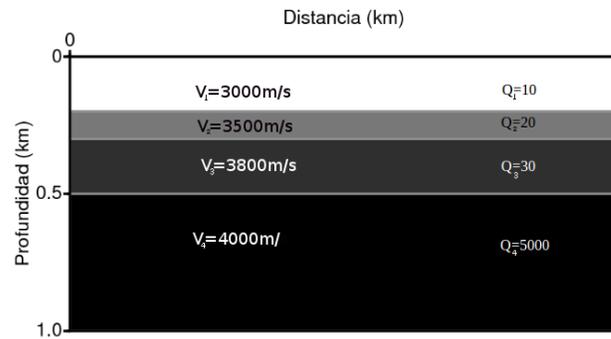


FIGURA 5.33. Modelo de velocidad y del factor de calidad para 4 estratos horizontales.

Se utilizan las rutinas de **SU** para generar los sismogramas sintéticos, colocando la fuente en la posición inicial $x = 50m$, y moviéndola cada $50m$, hasta la posición final de $x = 95m$, el arreglo de receptores se coloca a lado y lado de la fuente, en total se toman 18 datos que representan 18 sismogramas sintéticos. La migración se realiza disparo a disparo y el resultado obtenido se muestra en la figura 5.34.

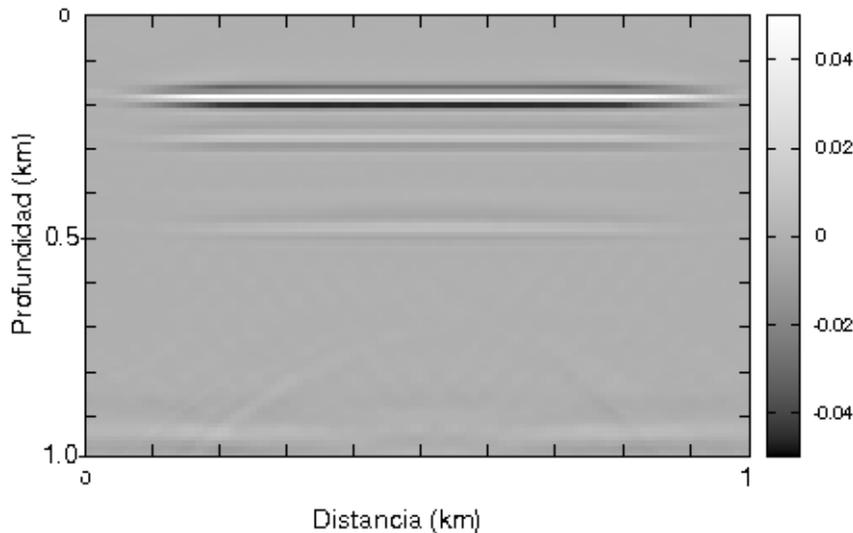


FIGURA 5.34. Imagen obtenida al realizar la migración sísmica **PS** con recuperación de energía al utilizar el modelo matemático de Kjartansson para la velocidad compleja.

Los eventos recuperaron la amplitud y aparentemente se encuentran en la posición

correcta. Para llegar a un resultado concluyente se procede a realizar un segundo experimento que involucra cambios de la velocidad lateralmente, y estos resultados se contrastan con la migración sin atenuación, y la migración utilizando el modelo de Futterman y Kolsky.

En la comparación de la imagen obtenida con la estructura original (ver figura 5.35), se observa que las interfaces se encuentran desfasadas respecto a la posición verdadera.

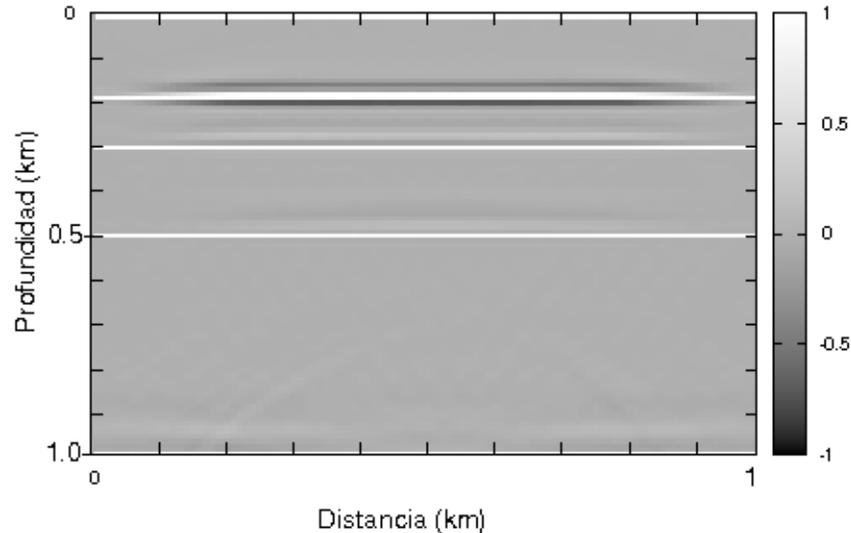


FIGURA 5.35. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.

Experimento 2:

El modelo de velocidades y de factor de calidad Q es el mostrado en la figura 5.25, y se procede de la misma forma que en los experimentos anteriores, utilizando la rutina `triseis` de SU, se obtienen los sismogramas sintéticos, las posiciones de la fuente son las mismas y los demás parámetros permanecen constantes, la única diferencia es el modelo matemático implementado en el algoritmo de migración. El resultado de la migración para 18 disparos se muestra en la figura 5.36.

En la imagen final se ve el aumento en la amplitud de los reflectores más profundos y menos ruido debido a la dispersión numérica y los efectos de reflexión en los bordes, es el mismo efecto observado en la imagen migrada con el modelo matemático de Futterman y Kolsky.

En la comparación de la imagen obtenida con la estructura original (ver figura 5.37), se observa que las interfaces están bien posicionadas.

En la figura 5.38, se compara cualitativamente la imagen final con los resultados de las migraciones con los otros métodos. La figura *a*) es la migración de los datos con el código de PS sin compensación de energía, la imagen *b*) es la migración utilizando

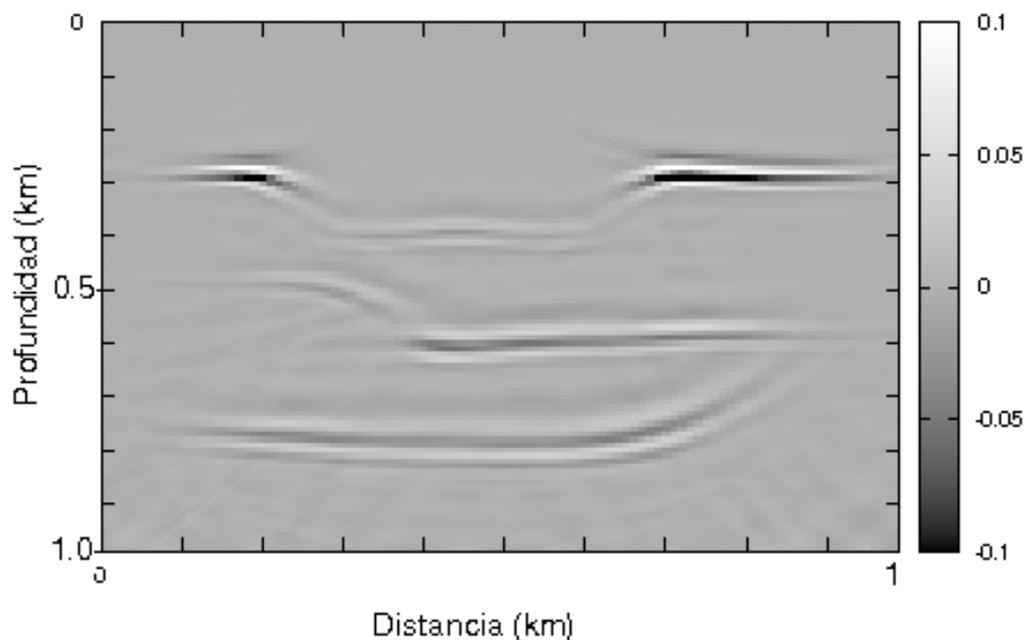


FIGURA 5.36. Imagen obtenida al realizar la migración sísmica **PS** con recuperación de energía al utilizar el modelo matemático de Kjartansson para la velocidad compleja.

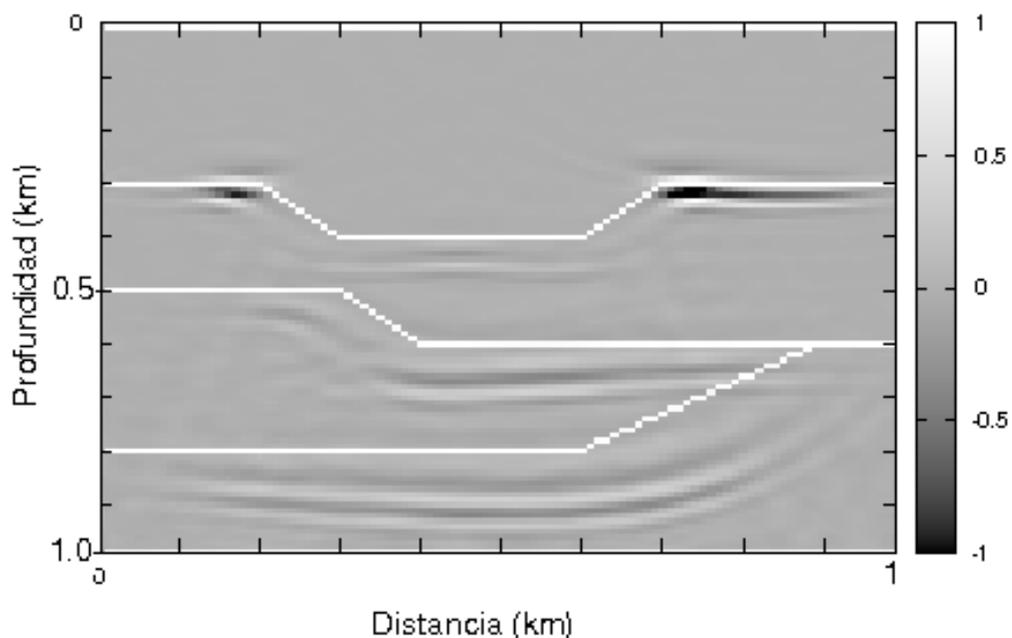


FIGURA 5.37. Comparación de la imagen migrada con la estructura original del campo de velocidades.

el modelo de velocidad complejo propuesto por Futterman y Kolsky y por último la figura c) es el resultado de implementar el modelo de velocidad complejo propuesto

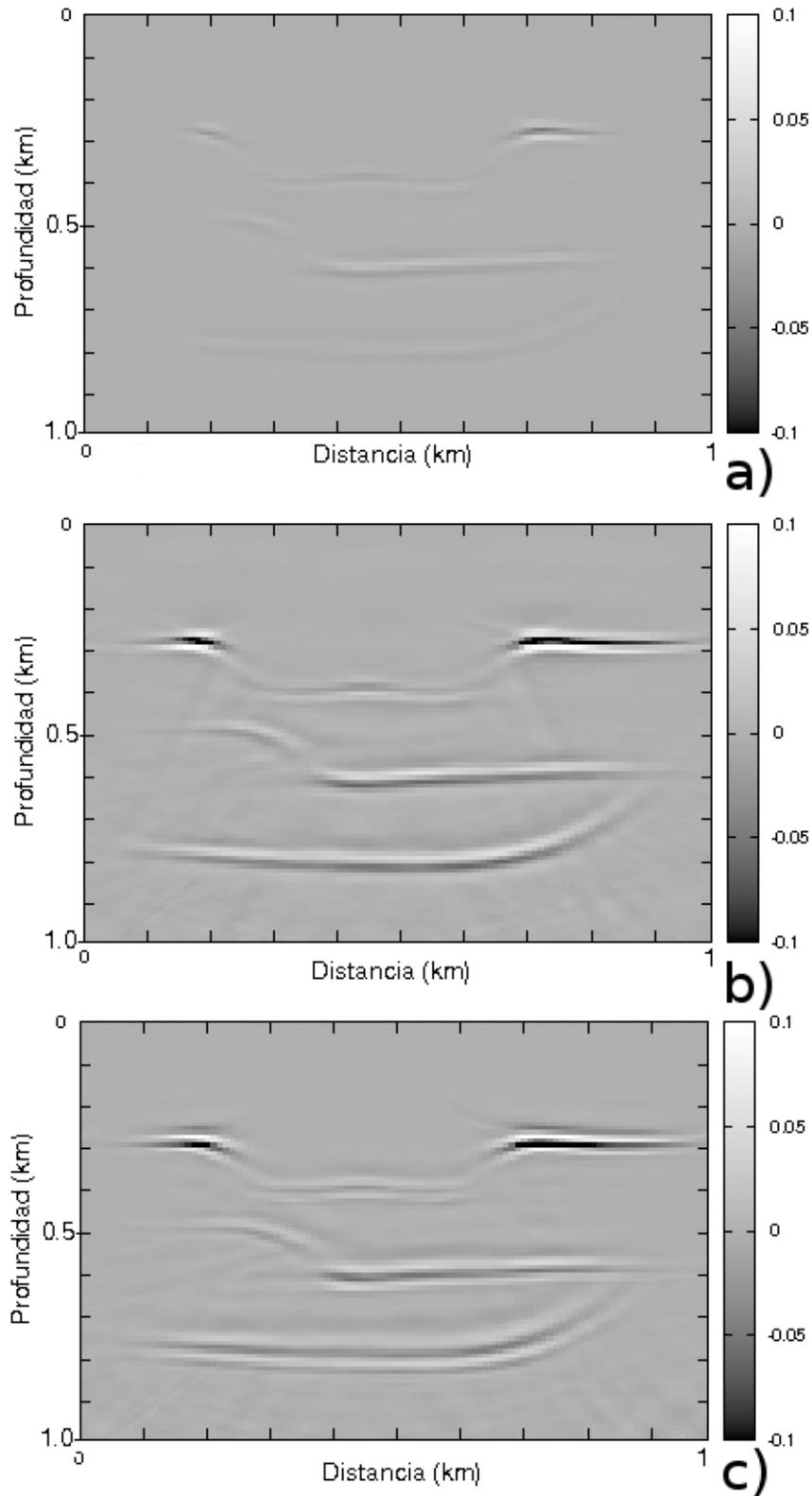


FIGURA 5.38. Comparación de las imágenes finales obtenidas con migración PS.

por Kjartansson. Se aprecian diferencias en los valores de la amplitud de los datos finales, los dos métodos de migración cumplen con su objetivo de recuperar la

amplitud, el modelo de Kjartansson aparentemente disminuye el ruido generado por la dispersión numérica.

En el análisis para determinar si la posición de los eventos es la correcta se determina que la migración sin tener en cuenta la atenuación ubica de manera correcta las interfaces, y que el modelo de Kjartansson no logra este objetivo, luego el modelo más adecuado para incluir el término de atenuación en la migración preapilado en profundidad utilizando las ecuaciones de sentido único es el de Futterman-Kolsky.

Conclusiones

La migración sísmica preapilado en profundidad, haciendo uso de las ecuaciones de sentido único e incluyendo como parámetro el factor de calidad Q , muestra que es posible recuperar en cierta proporción la información perdida durante la propagación de la onda por un medio dispersivo.

Los algoritmos de migración sísmica por corrimiento de fase, que fueron desarrollados en lenguaje C, difieren de los métodos encontrados en software como Matlab y Seismic Unix. Están basados en el pseudocódigo de Mittet [26], y en lugar de realizar una transformada de Fourier bidimensional, se realizan dos transformadas de Fourier unidimensionales, el orden en que se realizan altera el resultado. Se utilizan 2 modelos de Q , mientras que en el artículo de Mittet [26] el modelo elegido fué el de Q constante.

Inicialmente fue necesario obtener datos sintéticos con atenuación, por lo que hubo la necesidad de producir códigos adicionales para crear los modelos estructurales de velocidad, de densidad y de Q . Con ayuda de Seismic Unix y la función Triseis que modela la propagación de ondas en medios dispersivos con el modelo de Kolsky-Futterman, se generan los sismogramas sintéticos necesarios para el proceso de migración.

Una vez realizada la migración con cada uno de los modelos Q , se hace una comparación de las imagenes finales, debido a que los resultados obtenidos tienen grandes diferencias; la imagen generada por el modelo de Futterman muestran todas las fronteras con buena amplitud, si se compara con la migración sin compensación, lo que evidencia una ganancia. El modelo de Q constante genera fronteras con amplitud corregida pero duplicadas, lo que puede llevar a una mala interpretación del modelo geológico, adicionalmente con el modelo de Kolsky las fronteras se ubican en la posición correcta respecto al modelo estructural de velocidad y el modelo de Kjartansson muestra un desface.

En el modelo de atenuación de Kjartansson, se define un valor para el parámetro γ , el valor de este parámetro depende del valor de Q , el rango va de $\gamma = 0$ a $\gamma = 0.5$, que al igual que los valores de la velocidad depende del modelo geológico.

El resultado de la migración muestra que la ubicación de los fronteras no corresponde con las posiciones reales de los reflectores, si se altera el valor del factor γ es posible obtener una imagen más cercana al resultado de la migración con Kolsky.

Como resultado de la comparación, se concluye que el modelo de velocidad complejo más adecuado para adaptar al algoritmo de migración por corrimiento de fase es el modelo de Futterman, ya que es posible aproximar los demás modelos de Q al de Kolsky, al utilizar ciertos valores en sus parámetros[22].

Para la migración de datos obtenidos en modelos geológicos con variaciones laterales de velocidad, es necesario modificar el código e incluir interpolación, lo que se denomina PSPI (Phase Shift plus interpolación).

APÉNDICE A

Herramientas matemáticas básicas

A.1. Convolución

[29] La convolución es una función de filtrado lineal, normalmente se simboliza por $*$ y definida, en el caso de dos funciones hipotéticas, $r(t)$ y $w(t)$, por

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)w(t - \tau)d\tau \quad (\text{A.1})$$

o en el caso discreto, por

$$s_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_{\tau}w_{t-\tau} \quad (\text{A.2})$$

donde $s(t)$ y s_t corresponden a los resultados de las operaciones y τ es el tiempo que se utiliza como variable de integración. En la forma discreta, t y τ corresponden a índices que identifican las muestras. De la misma forma, el número total de puntos de la serie resultante es $m + n - 1$, donde m y n son los números de las series convolucionadas. Para facilitar la comprensión de las ecuaciones A.1 y A.2, se escribe la última de la forma:

$$s_t = r_{\tau} * w_t = \dots + r_{-2}w_{t+2} + r_{-1}w_{t+1} + r_0w_t + r_1w_{t-1} + r_2w_{t-2} + \dots \quad (\text{A.3})$$

donde como se explicó antes, $*$ denota convolución y, para una posición hipotética k , w_{t-k} representa una serie w_t completa, pero desplazada, en el sentido de los tiempos positivos, de acuerdo con el intervalo $k\Delta t$, siendo Δt el intervalo de muestreo.

A.2. Transformada de Fourier

[30] La transformada directa de Fourier está definida como:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx \quad (\text{A.4})$$

y su respectiva transformada inversa

$$\hat{g}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dk \quad (\text{A.5})$$

A.2.1. Propiedades de la transformada de Fourier

1. Linealidad: Si

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(i\omega)$$

y

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(i\omega)$$

entonces

$$\boxed{ax(t) + by(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} aX(i\omega) + bY(i\omega)} \quad (\text{A.6})$$

2. Desplazamiento de tiempo: Si

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(i\omega)$$

entonces

$$\boxed{x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_0} X(i\omega)} \quad (\text{A.7})$$

3. Convolución:

$$\boxed{f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau} \quad (\text{A.8})$$

A.3. Propiedades de la función delta de Dirac

[31] La función delta de Dirac $\delta(t)$ se caracteriza por las siguientes propiedades

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0 \\ \infty, & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (\text{A.10})$$

$$\delta(t - a) = 0 \quad \text{si} \quad t \neq a \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)dt = f(a) \quad (\text{A.12})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)dt = 1 \quad (\text{A.13})$$

Derivada de la función delta de Dirac (por medio del concepto de la derivada de una distribución)

$$\begin{aligned} f'(\vec{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(\vec{\xi})\delta(\vec{\xi} - \vec{X})d\xi \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\xi})\frac{\partial}{\partial \xi}\delta(\vec{\xi} - \vec{X})d\xi \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Trabajo Futuro

Modificar el pseudo código para eliminar las reflexiones en los bordes al momento de modelar la onda descendente con el extrapolador, para disminuir el ruido en la imagen final.

La migración por corrimiento de fase con el modelo de velocidad complejo de Futterman, tiene problemas para variaciones laterales de velocidad, por lo que es pertinente modificar el algoritmo e incluir interpolación, es decir considerar diferentes valores de velocidad en el mismo nivel de profundidad y de esta forma obtener una imagen más cercana al modelo estructural de velocidad real.

El algoritmo de migración por corrimiento de fase con interpolación y con compensación de energía utilizando el modelo de Futterman, puede ser utilizado en datos reales, pues las variaciones laterales de velocidad ya no serán un problema.

Bibliografía

- [1] Seth Stein and Michael Wysession. *An introduction to seismology earthquakes and earth structure*. Blackwell, primera edición, 2003.
- [2] Gerard T. Schuster. *Basics of Seismic Imaging*. Copyright G. Schuster 2010., primera edición, May 9, 2010.
- [3] A.J. Berkhout C.P.A. Wapenaar. *ELASTIC WAVE FIELD EXTRAPOLATION*. ELSEVIER, primera edición, 1989.
- [4] Carcione José M. *WAVE FIELDS IN REAL MEDIA: WAVE PROPAGATION IN ANISOTROPIC, ANELASTIC AND POROUS MEDIA*. Pergamon, 2001.
- [5] O. Yilmaz, M. Cooper, and Doherty. *Seismic data analysis*. seismic data analysis vol. 1, primera edición, 2000.
- [6] Hetch E. Zajac. *Optics*. Addison Wesley, tercer edición, 1998.
- [7] Eva Martínez González Antonio Gallego Molina. *Emisión Acústica*. FC EDITORIAL, primera edición, 2006.
- [8] César Albarrán Adelina Felipe. *Manual de óptica geométrica*. Universitat de València, primera edición, 1998.
- [9] Pujol. *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] Schlumberger. *Oilfield Review*. LincED Int'l, Inc. y LincED Argentina, S.A., primera edición, 2002.
- [11] Ian Hill Phillip Karey, Michael Brooks. *An Introduction to Geophysical Exploration*. BLACKWELL SCIENCE, tercer edición.
- [12] José D. Pineda G. Análisis de una prospección sísmica con configuración multi-azimutal para depósitos recientes. Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, 2011.

-
- [13] Berkhout A. J. Wave field extrapolation techniques in seismic migration, a tutorial. *Society of Exploration Geophysicists*, 1981.
- [14] Jon F. Claerbout. *Imaging the earth's interior*. Blackwell Scientific Publications, primera edición, 1985.
- [15] Jenó Gazdag y Piero Sguazzero. Migration of seismic data by phase shift plus interpolation. *GEOPHYSICS Vol 49 N2*, 1984.
- [16] P. L. Stoffa. Split step fourier migration. *GEOPHYSICS Vol 55 N4*, 1990.
- [17] G.F. Margrave and R. J. Ferguson. Wavefield extrapolation by nonstationary phase shift. *GEOPHYSICS Vol 64*, 1999.
- [18] WAPENAAR C. P. A. and BERKHOUT A.J. *ELASTIC WAVE FIELD EXTRAPOLATION*. ELSEVIER, 1998.
- [19] M. W. Zemansky. *heat, and thermodynamics*. McGraw-Hill, quinta edición, 1968.
- [20] David Burley Glyn James. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. PEARSON EDUCACIÓN.México, segunda edición, 2002.
- [21] Xiang Du. Prestack depth migration methods for isotropic and polar anisotropic media. 2007.
- [22] Yanghua Wang. *Seismic inverse Q Filtering*. BLACKWELL PUBLISHING, primera edición, 2008.
- [23] Keiiti Aki and Paul G. Richards. *Quantitative seismology*. University Science Books, segunda edición, 1980.
- [24] Einar Kjartansson. Constant q wave propagation and attenuation. *Journal of Geophysical Research, Vol. 84, N B9*, August 10, 1979.
- [25] Carcione J. M. *Wave fields in real media: Theory and numerical simulation of wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media*. Elsevier, segunda edición, 2007.
- [26] Roger Sollie Rune Mittet and Ketil Hokstad. Prestack depth migration with compensation for absorption and dispersion. *GEOPHYSICS, VOL. 60, NO. 5, SEPTEMBER-OCTOBER 1995*.
- [27] Richard S. Lu Yang Yu* and ExxonMobil Upstream Research Company Michael M. Deal. Compensation for the effects of shallow gas attenuation with viscoacoustic wave-equation migration. *SEG Int'l Exposition and 72nd Annual Meeting * Salt Lake City, Utah, October 6-11, 2002*.
- [28] Jerry M. Harris Tieyuan Zhu and Biondo Biondi. Q compensated reverse time migration. *GEOPHYSICS, VOL. 79, NO. 3, MAY- JUNE 2014*.

-
- [29] André L. Romanelli Rosa. *ANÁLISE DO SINAL SÍSMICO*. Sociedade Brasileira de Geofísica(SBGf), primera edition, 2010.
- [30] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and Nawab Hamid. *Señales y sistemas*. Prentice Hall Hispanoamérica, segunda edition, 1998.
- [31] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, and Arthur David Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación de México, cuarta edition, 2005.