ENSEÑANZA DE LA OPTIMIZACIÓN BAJO EL MODELO DE VAN HIELE HACIENDO USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA

ANGY MELISSA DÍAZ LIZARAZO

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

ESPECIALIZACIÓN EN PEDAGOGÍA UNIVERSITARIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PAMPLONA

2016

ENSEÑANZA DE LA OPTIMIZACIÓN BAJO EL MODELO DE VAN HIELE HACIENDO USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA

ANGY MELISSA DÍAZ LIZARAZO

Trabajo de grado presentado como requisito para obtener el título de

Especialista en Pedagogía Universitaria

Director

Lenis Santafé Rojas

Dra. En Educación

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

ESPECIALIZACIÓN EN PEDAGOGÍA UNIVERSITARIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PAMPLONA

2016

CONTENIDO

TABLA DE IMÁGENES

1. PLANTEAMIENTO

Los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo presentan grandes dificultades, una de ellas es la falta de motivación en los estudiantes a la hora de enfrentarse a resolver problemas matemáticos y la otra es la falta de innovación en las estrategias de enseñanza por parte de los profesores; Flórez, Valencia y colaboradores en su libro fundamentos del cálculo nos afirman esta idea:

> "Los malos resultados que se presentan en el aprovechamiento y desempeño escolar en los cursos de Cálculo se pueden considerar como producto de las dificultades y características de los conceptos y métodos propios de esta rama de las matemáticas y de la insuficiencia de profesores y recursos pedagógicos de apoyo a su enseñanza y aprendizaje."

Usualmente la enseñanza del cálculo diferencial parte de enunciados, teoremas y problemas en los que se aplica simplemente el conocimiento algebraico del estudiante, dejando de lado la intuición geométrica y visual. Esto, posiblemente, debido a la dificultad de representar en el papel o el tablero un número grande de ejemplos que den significado geométrico a los contenidos de cálculo.

> "El verdadero problema que debe plantearse en la enseñanza de las Matemáticas no es el del rigor, sino el de la construcción del sentido, de la justificación ontológica de los objetos matemáticos" (Thom, R. 1978: 148, trad. Hernández).

Lo que reafirma que la tendencia a enseñar los conceptos de cálculo desde su definición formal sólo genera dificultades, pues se pierde la relación de los conceptos con su epistemología; de manera que, apoyarse en las TIC proporcionan múltiples formas de representar situaciones problémicas que permiten a los estudiantes desarrollar estrategias de resolución para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos que se están trabajando.

GeoGebra, CaRMetal, Cabri II plus, Martlab son algunos ejemplos de herramientas geométricas que además de permitir desarrollar las clases de cálculo diferencial de manera dinámica e interactiva, son medios que producen aprendizaje. Gómez (1998), Meza (2001), Poveda y Gamboa (2007), citados por García Santillán, Edel Navarro y Escalera Chávez (2010) señalan que:

> Si bien es cierto, que la tecnología no es la fórmula mágica, ni probablemente la solución a todos los problemas educativos, lo que sí es indudable, es que la tecnología ha venido a ser un agente de cambio que ha favorecido el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en general. (p. 15)

Conceptos como el de función, gráficas, derivadas, máximos y mínimos y puntos críticos son necesarios para abordar uno de los temas más importantes del cálculo diferencial, la optimización. De manera que, son varios los interrogantes que surgen a la hora de revisar la enseñanza de este tema, como por ejemplo: ¿Cómo se enseña la optimización? ¿Es adecuada la forma de enseñanza? ¿Se usan diferentes estrategias para enseñar a optimizar? ¿La optimización es un tema abordado solo desde la teoría? Desde esta perspectiva y mirando éstas cuestiones, surge este proyecto en el que el planteamiento principal es el diseño, planteamiento, estructura y solución de problemas en la temática de optimización usando la herramienta tecnológica GeoGebra bajo el marco teórico del modelo de Van Hiele.

Esta propuesta parte de los resultados obtenidos en una prueba piloto (ver anexo1) aplicada a los profesores del departamento de matemáticas de la Universidad de Pamplona que orientan los cursos de cálculo, la cual arrojó evidencias del cómo, por qué y para qué se enseña la optimización; de manera que lo que se quiere es afrontar la enseñanza de este tema, partiendo desde una nueva perspectiva diferente y proponiendo una alternativa para la enseñanza de ésta temática implementando herramientas geométricas tecnológicas en el aula con actividades enmarcadas bajo el modelo de Van Hiele.

1.1 FORMULACIÓN

¿Cómo diseñar una estrategia pedagógica para la enseñanza de la optimización bajo el modelo de Van Hiele usando el programa GeoGebra?

1.2 JUSTIFICACIÓN

El cálculo es una disciplina fundamental en la formación de ingenieros, técnicos y científicos; la problemática de la deserción en esta disciplina es un problema educativo que impulsa a la búsqueda de estrategias y metodologías, tanto disciplinarias como de carácter pedagógico, pues los malos resultados que se presentan en el aprovechamiento y desempeño de este curso se pueden considerar como producto de las dificultades de los conceptos y métodos propios de esta rama de las matemáticas y de la falta de recursos pedagógicos de apoyo a su enseñanza.

Los índices de reprobación y deserción del cálculo diferencial son muy altos en muchas universidades, lo que representa un costo elevado en recursos y en oportunidades desaprovechadas.

> "El cálculo diferencial e integral constituyen una materia obligada en el currículo de las carreras de ingeniería, ciencias e incluso en carreras del área de ciencias sociales. Sin embargo, los reportes de fallas en el aprendizaje del cálculo son frecuentes y por ende este es uno de los problemas que más preocupa a la comunidad educativa". (ANUIES, 2002, citado en Cuevas & Pluvinage, 2009, p.45).

En el proceso de enseñanza del cálculo diferencial los estudiantes estudian, aprenden y tal vez comprenden conceptos matemáticos, teoremas, postulados y definiciones, pero en realidad ellos poco se centran en apropiarse de estrategias geométricas que les ayuden a la solución de problemas.

Se considera un inconveniente importante en la didáctica de la matemática lograr que los aprendizajes que van acumulando los estudiantes durante el curso de cálculo diferencial sean aplicados en una gran variedad de problemas de optimización, los cuales ayudan a potenciar la intuición y la capacidad de solución de problemas. Por otra parte, Brousseau (1986) en su Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) enuncia que:

> "Saber matemática no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es `ocuparse de problemas' en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que éste intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad".

Este trabajo de investigación se dirige principalmente a mejorar la enseñanza de la optimización en el cálculo diferencial mediante la resolución de problemas con ayuda del modelo de Van Hiele y las TIC, de tal manera que el estudiante consolide sus conocimientos al resolver problemas de aplicación inherentes a sus carreras.

Los diseños de actividades didácticas que se proponen en este trabajo utilizando el software GeoGebra, tienen como objetivo orientar al estudiante a una comprensión de los conceptos de manera distinta a la que pueda enfrentarse en una clase tradicional apoyados por lo general en libros de texto.

Según la investigación de Vásquez y Bustos (2016), ellos notan que en libros como Introducción al cálculo de Chávez, Romero, Salgado & Torres (2004), Cálculo I de una variable de Larson y Edwards (2010) y Cálculo de una variable de Thomas (2010), se describen unos pasos o reglas para resolver un problema de optimización, sin conexión alguna en la construcción de un sentido a la optimización en el que es necesario basarse en ideas geométricas para la resolución de problemas:

> En este grupo de textos se observa una característica común que se ve reflejada en las reglas o pasos que se deben aplicar para resolver problemas de optimización. Esto proporciona un método procedimental donde el estudiante debe realizar manipulaciones algebraicas o técnicas de cálculo de derivadas sin ninguna conexión geométrica. (pág. 20)

La solución de problemas es un componente necesario en el proceso de enseñanza ya que podemos convertir a los estudiantes en pensadores críticos y planificadores activos de su propio aprendizaje. Se asume que la resolución de problemas hace que el estudiante vea la necesidad de fortalecer más sus conocimientos, para poder enfrentar retos cada vez más difíciles.

Aunque existe gran cantidad de artículos sobre el uso de la tecnología en las aulas de matemática, es necesario crear cultura en los estudiantes y profesores que estudian e imparten el cálculo diferencial, pues los contenidos que se dan pueden abarcarse usando otros recursos distintos al tablero y el marcador, que dispongan no sólo de la solución rutinaria de ejercicios sino que creen propuestas didácticas validadas y completas para implementarlas en todo el curso de cálculo diferencial. De esta manera se pretende obtener beneficios con respecto al diseño y a la creación del material el cual servirá no sólo para la aplicación directa en nuevas experiencias, sino como parámetro para que los estudiantes interactúen con la herramienta y se motiven hacia futuras prácticas en la enseñanza del cálculo diferencial.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 General

Diseñar actividades que sirvan como estrategia pedagógica para la enseñanza de la optimización en el marco del modelo de Van Hiele haciendo uso del Software GeoGebra.

1.3.2 Específicos

- Caracterizar a los profesores que imparten la materia del cálculo diferencial según el cómo, el por qué, el para qué y qué estrategias de enseñanza utilizan para abordar el tema de optimización.

- Fundamentar el proceso de enseñanza de la optimización con elementos teóricos matemáticos en el marco del Modelo de Van Hiele.

2. MARCO TEÓRTICO

2.1 ANTECEDENTES

El Cálculo Diferencial es una herramienta matemática que surgió con la finalidad de resolver problemas de geometría y de física, como el problema de encontrar la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado o por la necesidad de explicar la relación entre distancia, tiempo, velocidad y aceleración de un cuerpo en movimiento.

Variedad de planteamientos sin resolver estimularon la invención y el desarrollo de los métodos del cálculo diferencial que llegaron para unificar y resolver problemas de áreas y volúmenes, trazo de tangente a curvas y la obtención de valores máximos y mínimos, por mencionar algunas. Esta modelación matemática ha sido utilizada en diferentes áreas de trabajo como la economía, la industria, la física, la química, la biología y los resultados obtenidos en dichas áreas optimizan la producción y las ganancias o minimizan costos de operación y riesgos, convirtiendo la optimización en una de las aplicaciones más inmediatas, interesantes y fundamentales del cálculo diferencial.

Los problemas de optimización consisten en determinar o calcular el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable, donde se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema. Es evidente que los conceptos de cálculo solo se enseñan desde su definición formal, lo que genera dificultades en los estudiantes pues se pierde la relación de los conceptos con su epistemología. Este trabajo busca generar alternativas de enseñanza en el tema de la optimización basándose en las ideas geométricas que permiten construir el sentido de las estrategias de resolución de problemas, aprovechando el potencial de un software matemático. Sin embargo, no es el único trabajo que ha buscado darle solución a la enseñanza de la optimización en el cálculo diferencial.

2.1.1 Antecedentes en el extranjero

Propuesta para la enseñanza del cálculo utilizando las TICs como recurso didáctico en el curso MA-1210 es el título de la investigación hecha por Jendry Arguedas Flatts, Marvin Coto Jiménez y Javier Trejos Zelay en el año 2010 en Costa Rica. En este trabajo se exponen las ideas principales que fundamentan la propuesta didáctica para la enseñanza del tema de máximos y mínimos utilizando TICs como recurso para desarrollar competencias basadas en el modelo de pensamiento complejo. El elemento tecnológico utilizado es el software didáctico GeoGebra para el diseño de actividades que ilustraran ejemplos y teoremas.

En este trabajo los autores nos dan a conocer la realidad de la enseñanza del cálculo diferencial en Costa Rica, confirmándonos que en estos cursos las clases se desarrollan de manera tradicional, sin ningún apoyo tecnológico más que el uso de software para presentar las gráficas de funciones.

La solución a dicha problemática la encontraron los autores que diseñaron guías de clase llamadas sesiones presenciales, con las cuales pretendieron exponer de forma diferente los conceptos teóricos como: Extremos en un intervalo, máximos y mínimos de funciones en intervalos cerrados, funciones crecientes y decrecientes, criterio de la primera derivada, derivadas de orden superior, concavidad y criterio de la segunda derivada, puntos de inflexión, asíntotas, trazado de curvas y problemas de optimización.

Los profesores que aplicaron las sesiones presenciales planteadas por los autores observaron mayor atención y motivación por parte de los estudiantes en cuanto a la participación, las mediciones realizadas y un alto nivel de comprensión.

Los autores lograron observar que la incorporación de las estrategias de enseñanza con el apoyo de las TICs tienen un balance positivo, también nos concluyen que los resultados obtenidos en su investigación son alentadores en cuanto al impacto en la incorporación de TICs como herramienta de desarrollo de competencias, ya que el aporte de elementos de este modelo en un curso universitario de cálculo es alentador, pudiéndose extender e incorporar en el resto de contenidos del curso.

Esta investigación toca un aspecto en común con el trabajo en proceso y es el de transformar las clases tradicionales de la enseñanza de la optimización con el apoyo del software GeoGebra. Siendo el desarrollo en contextos diferente y el objetivo general ambicioso en cada uno de ellos, la investigación hecha por Arguedas, Coto y Trejos nos dan una luz de que es posible generar cambios con resultados favorables, evidentes e inmediatos en la enseñanza de la optimización.

2.1.2 Antecedentes Nacionales

Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el software GeoGebra es el trabajo de investigación realizado por Danys Carlos Otero Herrera de la Universidad Pedagógica Nacional. En él se presenta como objetivo principal solucionar problemas de optimización, en particular los relacionados con la minimización de costos.

En esta investigación el autor primero identifica las dificultades que se dan en el proceso de solución de problemas de optimización. En segundo lugar, hace una revisión del papel de la visualización en la conceptualización de máximos y mínimos; y en tercer lugar, plantea una propuesta de diseño para la aplicación de las sesiones de trabajo. Dicha propuesta contempla 3 actividades que el estudiante debía desarrollar con el fin de lograr resolver el problema de optimización dado.

Los estudiantes debían darse cuenta que estos problemas no solo representan una expresión algebraica, sino que por el contrario esta expresión representa la visualización de un suceso expresado en lenguaje natural. Los resultados obtenidos evidencian que el uso del software GeoGebra permitió identificar y visualizar condiciones de los problemas planteados logrando concluir que la planeación y elaboración de las actividades aplicadas permitieron realizar procedimientos espontáneos de aprendizaje.

Siendo el enfoque de esta investigación desde el área de la economía, la relación con el trabajo en proceso es estrecha, ya que las dos presentan una propuesta de diseño para lograr resolver problemas de optimización usando el software GeoGebra. Una vez más las conclusiones obtenidas nos dan a comprender que puede ser posible un cambio en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes cuando aplicamos estrategias metodológicas diferentes a la tradicional, mostrando que el camino a seguir en este proyecto puede responder a cambios significativos en la enseñanza de la optimización y por qué no del cálculo diferencial.

A nivel nacional también encontramos el trabajo titulado: Uso del software CaRMetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización, realizado por los estudiantes Laura Bustos y Jenny Vásquez de Alba en el que la pregunta que orienta dicha propuesta es: ¿cómo utilizar el software CaRMetal para potenciar el aprendizaje del método de la derivada para la resolución de problemas de optimización? Donde el objeto de profundización es diseñar un conjunto de situaciones a-didácticas que contribuyan a la construcción de sentido de las estrategias de resolución de problemas de optimización a partir de la interpretación geométrica de las mismas, aprovechando el potencial de un software matemático llamado en este caso CaRMetal. Esta propuesta presentada se relaciona estrechamente con el trabajo en proceso, pues en los dos se quiere lograr enseñar la optimización usando una herramienta tecnológica, pero cada uno enfocado con marco teórico distinto.

Con este proyecto los autores analizaron que las actividades propuestas por ellos favorecen la interpretación geométrica del método de la derivada para hallar puntos máximos y mínimos, permitiendo la construcción de sentido, pues se comprende el por qué y el para qué de cada uno de los pasos de ese método. Las actividades diseñadas por Bustos y Vásquez permiten que el estudiante proponga sus propias estrategias de solución a los problemas y las ponga a prueba en CaRMetal o con los objetos e instrumentos físicos. La interacción con el medio permite invalidar todas las estrategias no matemáticas. Aunque el estudiante no esté en la capacidad de aprovechar todo el potencial del software para comprobar sus estrategias, el profesor puede proponerle acciones de verificación con el software que conduzcan a la validación o invalidación de las estrategias propuestas.

En cuanto al uso de una herramienta tecnológica como lo es en su caso CaRMetal, ellos lo consideran pertinente para el desarrollo de tres de las actividades que propusieron; no viéndose como un instrumento de innovación y motivación, sino como un medio que produce aprendizaje, confirmando ventajas en su uso como la posibilidad de arrastre de las figuras para verificar sus propiedades, la observación de la traza de un punto indicando su lugar geométrico, la utilización de macros donde se resumen varios pasos de una construcción, entre otros.

La investigación anterior fue base para el desarrollo de este trabajo que sin lugar a dudas ofrece a los profesores una propuesta metodológica diferente a la tradicional con ayuda de una serie de actividades enmarcadas desde un modelo específico para la enseñanza de la optimización. Aunque el planteamiento de investigación de Bustos y Vásquez son propuestas de actividades para la enseñanza del cálculo diferencial sin conclusión de sus aplicaciones, se espera en las dos investigaciones que los resultados sean exitosos y aporten para un cambio en la metodología de enseñanza del cálculo.

2.2 REFERENTES TEÓRICOS

2.2.1 Optimización

Encontrar una definición formal de optimización no es un trabajo sencillo ya que en diferentes libros como James Stewart: Cálculo de una variable séptima edición o Cálculo de Purcell novena edición, que son unos de los más usados en las universidades, no se presenta dicha definición sino pasos o reglas procedimentales que se deben aplicar para solucionar un problema planteado de optimización. Por ejemplo, el libro de James Stewart, que es el libro guía del Cálculo Diferencial en la Universidad de pamplona, expone lo siguiente:

> "Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo…
> Estos problemas pueden reducirse a encontrar los valores máximo o mínimo de una función…
> **Método del intervalo cerrado**: Para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f sobre un intervalo cerrado [a, b]:
> 1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a,b).
> 2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
> 3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto"

Es evidente en el ejemplo anterior que no se proporciona una justificación de por qué se usan estos métodos para resolver dichos problemas e incluso no se hace referencia a conceptos geométricos para justificar el método.

Realizando investigaciones profundas el libro Optimización Matemática con R. Volumen I: Introducción al modelado y resolución de problemas de Enrique Baquela y Andrés Redchuk presenta una definición que se puede acercar a una "definición formal" de lo que puede ser la optimización:

> Dentro de la investigación operativa, las técnicas de optimización se enfocan en determinar un conjunto de valores que toman los factores que podemos controlar a fin de regular el rendimiento a seguir para maximizar o minimizar la respuesta de un problema. Dicha respuesta, en general, es un indicador del tipo "Costo", "Producción", "Ganancia", etc., la cual es una función seleccionada. Dicha respuesta se denomina objetivo, y la función asociada se llama función objetivo.
>
> …
>
> En general, el quid de la cuestión en los problemas de optimización radica en que estamos limitados en nuestro poder de decisión.
>
> …
>
> Dentro de las soluciones factibles en las cuales podemos decidir, pueden existir una o más soluciones óptimas, es decir, aquellas que, además de cumplir con todas las restricciones, maximizan (o minimizan, según sea el problema a resolver) el valor de la función objetivo.

Esta definición relaciona términos matemáticos con términos del cotidiano que ayudan a comprender de manera más sencilla la definición de optimización; sin embargo, aunque es una de las pocas definiciones encontradas indiscutible se pueden presentar mejorías en la presentada.

2.2.2 Procesos de enseñanza para el cálculo

Para analizar los procesos de enseñanza relativos a la solución de problemas de optimización que se utilizan en el sistema educativo, primero se definimos proceso de enseñanza aquel que comprende todas las experiencias de aprendizaje (naturales, planificadas e inconscientes) que le aportan beneficios directos o indirectos tanto a profesores como a estudiantes y que contribuyen a la calidad de su actuación en el aula. El estudiante, individualmente o con sus compañeros, renuevan y amplían sus conocimientos y compromisos con respecto a las finalidades del aprendizaje y adquiere y desarrolla, de manera crítica, los conceptos así como la inteligencia (cognitiva y afectiva) esencial en el proceso de aprendizaje de calidad en el contexto escolar, Day (1999).

Luego el desarrollo de dichos procesos de aprendizaje se pude ver como un proceso de reflexión, como experiencia y como construcción personal, el cual se reconoce mediante el análisis de cambios y constataciones de los conocimientos y actitudes en los estudiantes. Eso se analiza mediante el análisis de sus discursos y sus actuaciones en el aula.

En este punto, se resalta la importancia de resolver problemas de optimización no sólo como uno de los mayores fines de la enseñanza del cálculo diferencial, sino como el medio esencial para lograr el aprendizaje del mismo. Para este trabajo de investigación, el desarrollo del aprendizaje tiene en cuenta las actuaciones de los estudiantes en la clase que se analizan mediante contenidos diversos como el matemático-epistémico, didáctico-estratégico y comportamental-actitudinal. Según Gualdrón y colaboradores (2011):

> El componente matemático-epistémico implica el conocimiento de y sobre las matemáticas (para el caso, solución de problemas de optimización), la actividad matemática, lo que deben aprender los estudiantes y sus relaciones y conexiones con otros contenidos (tanto dentro como fuera de la matemática); la comprensión de

conceptos, procedimientos y el proceso de hacer matemáticas, forman parte de lo que se denomina conocer las matemáticas. Así mismo, conocer matemáticas comprende el discurso matemático (incluye la terminología, el lenguaje, los significados), centrado en la abstracción, generalización y construcción de argumentos matemáticos. Incluye por tanto el uso de evidencias y demostraciones, el papel de las definiciones, los ejemplos y los contraejemplos, siendo aspectos importantes conjeturar, construir y evaluar argumentos, comunicar y conectar las ideas matemáticas.

El componente didáctico-estratégico incluye conocimientos curriculares descritos en planes de estudio y reflejados en los textos y otros instrumentos didácticos: cómo los estudiantes procesan, almacenan, retienen y recuperan información. Igualmente el conocimiento de una variedad de ejemplos para cada idea matemática: conocimiento sobre técnicas específicas de instrucción, conocimiento de materiales instructivos, además de saber cómo es su clase, cómo son los estudiantes y cómo dirigir situaciones complejas de instrucción que involucran a un gran número de estudiantes, utilizando variedad de recursos y espacios.

Para el componente comportamental-actitudinal caracterizamos tres tipos de profesores interpretados como representantes de posiciones ideológicas y de prácticas pedagógicas diferentes, que no se quieren considerar como “absolutos” y excluyentes: el conformista, el reflexivo y el interrogativo, de los cuales el que más se destaca en la investigación es el reflexivo, el cual considera la relación de las matemáticas con la vida diaria, es alguien que cree que debe ser mediador entre sus alumnos y el conocimiento en el contexto social de los conocimientos y en la universidad. Sabe que existen varias maneras de enseñar las matemáticas, quiere identificar las óptimas maneras de enseñar y las estrategias pero en las estructuras educacionales dadas.

Como en la enseñanza de la matemática la resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, es importante que los estudiantes tengan frecuentes oportunidades durante el aprendizaje de optimización para plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo, generando conocimiento a partir de actividades orientadas o situaciones concretas planteadas por el profesor con una metodología y didácticas apropiadas con el fin de que cada estudiante realice una construcción personal.

2.2.3 Modelo de Van Hiele

En este trabajo se asumió el modelo de Van Hiele como marco teórico; las actividades formuladas y planteadas se realizaron desde el punto de vista de dicha teoría. A continuación se expondrán los principales conceptos.

> Según Lobo (2004) el modelo de Van Hiele describe cómo se va modificando la forma de razonar de los individuos mediante cinco niveles de razonamiento, que abarcan desde la visión más simplista de los conceptos geométricos hasta el empleo del razonamiento formal. A su vez, plantea la forma de organizar la enseñanza de acuerdo a fases de aprendizaje que facilitan el progreso en el razonamiento. Seguidamente se describen los niveles de razonamiento:
>
> **Nivel 1 Reconocimiento**: Los objetos se perciben en su totalidad, son descritos de forma global, diferenciándolos y clasificándolos en base a semejanzas o diferencias físicas generales, no se reconocen explícitamente los elementos y propiedades de los objetos.
>
> **Nivel 2 Análisis:** Los conceptos se entienden a través de los elementos que los componen, identificando y generalizando propiedades del mismo las cuales se utilizan independientemente sin establecer relaciones entre ellas. Se pueden deducir relaciones o propiedades entre los objetos y sus componentes, pero sólo a través de la experimentación.
>
> **Nivel 3 Clasificación:** Se realizan clasificaciones lógicas de los objetos, descubriendo nuevas propiedades en base a relaciones o propiedades ya conocidas y por medio del razonamiento informal. Se comprenden los pasos individuales de un razonamiento lógico en una forma aislada, pero no se comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración.

Nivel 4 Deducción: Se comprende la estructura axiomática de la Matemática y se emplea el razonamiento lógico formal para construir demostraciones, aceptando la posibilidad de obtener el mismo resultado siguiendo distintas premisas. Aún no se ha adquirido un conocimiento global de los sistemas axiomáticos por lo cual no se comprende la necesidad del razonamiento riguroso.

Nivel 5 Rigor: Se analizan y comparan las diferentes Geometrías procedentes de una variedad de sistemas axiomáticos. Diversas investigaciones han demostrado la inconsistencia de este nivel con los anteriores, el mismo es alcanzado sólo por matemáticos puros y estudiantes avanzados.

El progreso en la comprensión de los conceptos geométricos se produce desde el primer nivel y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes (Jaime, 1995). Cada uno lleva asociado un lenguaje, un tipo de actividades y una forma de razonamiento particular que permiten alcanzar el nivel siguiente (Galindo, 1996). Todo profesor que desee aplicar este modelo deberá tomar en cuenta los siguientes aspectos (Gutiérrez y Jaime, 1991):

Recursividad: Los elementos implícitos en el razonamiento del nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N + 1.

Secuencialidad: No se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada todos los niveles inferiores, por ello hay que evitar la enseñanza memorística, ya que los estudiantes pueden aparentar un nivel de razonamiento superior al que realmente tienen al manejar vocabulario y formas de trabajo propios del nivel superior pero sin comprenderlas.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático, entonces el profesor deberá situarse en el mismo nivel de sus alumnos.

Continuidad: El paso en los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, pudiendo durar varios años en el caso de los niveles 3 y 4. Se puede dar el caso de que el individuo no llegue a alcanzar el nivel 4.

Localidad: Por lo general un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

En el modelo de Van Hiele se proponen cinco fases, que se describen a continuación, en secuencia cíclica para ayudar al progreso de un nivel de pensamiento al siguiente (Gutiérrez y Jaime, 1991).

Información: Al iniciar el estudio de un tema, el profesor informa sobre el campo de investigación a trabajar, los problemas a resolver e indaga los conocimientos previos y el nivel de razonamiento del grupo.

Orientación dirigida: Los estudiantes exploran el campo de investigación mediante una serie de actividades dirigidas al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio.

Explicitación: Se basa en el diálogo entre los estudiantes con intervenciones del profesor cuando sea necesario, a fin de conseguir que las experiencias adquiridas se unan a los símbolos lingüísticos precisos dentro de las características del nivel de razonamiento respectivo.

Orientación libre: Los estudiantes aplican sus nuevos conocimientos a investigaciones posteriores sobre el tema de estudio, para ello se asignan tareas que preferiblemente lleven a diferentes soluciones.

Integración: El profesor resume el campo explorado, con la finalidad de lograr que los estudiantes integren en su red de conocimientos las habilidades de razonamiento adquiridas.

2.2.4 GeoGebra

GeoGebra es un software de matemática dinámica para todos los niveles educativos que reúne cálculo, geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos y estadística. Es una herramienta fácil de usar, y apoya la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

Con la herramienta GeoGebra es posible realizar diferentes construcciones o situaciones que se pueden sustentar con teoría de trabajo matemático verdadero para aprovechar al máximo las bondades del programa. La geometría es de gran utilidad a la hora de modelar problemas de optimización puesto que ella funciona como herramienta gráfica en los procesos de construcción y aprehensión de determinados conceptos del cálculo.

Ruiz, Seoane y Di Blasi (2008) consideran que las actividades construidas con GeoGebra bajo una concepción constructivista y cooperativa del aprendizaje, son útiles para promover entornos educativos que favorecen en los estudiantes la adquisición de competencias para realizar conjeturas, validar resultados y elaborar conclusiones, así como ser capaces de explicar los pasos a seguir para resolver las situaciones planteadas.

2.3 MARCO LEGAL

2.3.1 Ley 115 de Febrero 8 de 1994

La ley 115 de educación señala las normas generales que regulan el Servicio Público de la Educación acorde a las funciones sociales, las necesidades e intereses de las personas, familias y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las liberta de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público.

EL CONGRESO DE LA REPÚBLICA DE COLOMBIA DECRETA:

ARTICULO 1o. Objeto de la ley. La educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes. La presente Ley señala las normas generales para regular el Servicio Público de la Educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público. De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, define y desarrolla la organización y la prestación de la educación formal en sus niveles preescolar, básica (primaria y secundaria) y media, no formal e informal, dirigida a niños y jóvenes en edad escolar, a adultos, a campesinos, a grupos étnicos, a personas con limitaciones físicas, sensoriales y psíquicas, con capacidades excepcionales, y a personas que requieran rehabilitación social. La Educación Superior es regulada por ley especial, excepto lo dispuesto en la presente Ley.

…

ARTICULO 5o. Fines de la educación. De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, la educación se desarrollará atendiendo a los siguientes fines:

1. El pleno desarrollo de la personalidad sin más limitaciones que las que le imponen los derechos de los demás y el orden jurídico, dentro de un proceso de formación integral, física, psíquica, intelectual, moral, espiritual, social, afectiva, ética, cívica y demás valores humanos.

2. La formación en el respeto a la vida y a los demás derechos humanos, a la paz, a los principios democráticos, de convivencia, pluralismo, justicia, solidaridad y equidad, así como en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad.

3. La formación para facilitar la participación de todos en las decisiones que los afectan en la vi da económica, política, administrativa y cultural de la Nación.

4. La formación en el respeto a la autoridad legítima y a la ley, a la cultura nacional, a la historia colombiana y a los símbolos patrios.

5. La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber.

6. El estudio y la comprensión crítica de la cultura nacional y de la diversidad étnica y cultural del país, como fundamento de la unidad nacional y de su identidad.

7. El acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones.

8. La creación y fomento de una conciencia de la soberanía nacional y para la práctica de la solidaridad y la integración con el mundo, en especial con Latinoamérica y el Caribe.

9. El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.

10. La adquisición de una conciencia para la conservación, protección y mejoramiento del medio ambiente, de la calidad de la vida, del uso racional de los recursos naturales, de la prevención de desastres, dentro de una cultura ecológica y del riesgo y la defensa del patrimonio cultural de la Nación.

11. La formación en la práctica del trabajo, mediante los conocimientos técnicos y habilidades, así como en la valoración del mismo como fundamento del desarrollo individual y social.

12. La formación para la promoción y preservación de la salud y la higiene, la prevención integral de problemas socialmente relevantes, la educación física, la recreación, el deporte y la utilización adecuada del tiempo libre.

13. La promoción en la persona y en la sociedad de la capacidad para crear, investigar, adoptar la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país y le permita al educando ingresar al sector productivo.

2.3.2 Ley 30 de Diciembre 28 de 1992

La educación superior es aquella impartida en universidades y otras instituciones de educación superior a las personas que deseen seguir su formación académica. En términos legales, se encuentra reglamentada de forma particular por la Ley 30 de 1992.

El Congreso de Colombia, DECRETA:

TITULO PRIMERO

Fundamentos de la Educación Superior

Artículo 6° Son objetivos de la Educación Superior y de sus instituciones:

a) Profundizar en la formación integral de los colombianos dentro de las modalidades y calidades de la Educación.

Superior, capacitándolos para cumplir las funciones profesionales, investigativas y de servicio social que requiere el país.

b) Trabajar por la creación, el desarrollo y la transmisión del conocimiento en todas sus formas y expresiones y promover su utilización en todos los campos para solucionar las necesidades del país.

c) Prestar a la comunidad un servicio con calidad, el cual hace referencia a los resultados académicos, a los medios y procesos empleados, a la infraestructura institucional, a las dimensiones cualitativas y cuantitativas del mismo y a las condiciones en que se desarrolla cada institución.

d) Ser factor de desarrollo científico, cultural, económico, político v ético a nivel nacional y regional.

e) Actuar armónicamente entre sí y con las demás estructuras educativas y formativas.

f) Contribuir al desarrollo de los niveles educativos que le preceden para facilitar el logro de sus correspondientes fines.

g) Promover la unidad nacional, la descentralización, la integración regional y la cooperación interinstitucional con miras a que las diversas zonas del país dispongan de los recursos humanos y de las tecnologías apropiadas que les permitan atender adecuadamente sus necesidades.

h) Promover la formación y consolidación de comunidades académicas y la articulación con sus homólogas a nivel internacional.

i) Promover la preservación de un medio ambiente sano y fomentar la educación y cultura ecológica.

j) Conservar y fomentar el patrimonio cultural del país.

2.4 MARCO CONTEXTUAL

Esta investigación se realiza en una universidad pública de Colombia, la Universidad de Pamplona, fundada el 23 de noviembre de 1960. Su sede principal se ubica en el municipio de Pamplona, Norte de Santander. Cuenta con un número de treinta mil estudiantes aproximadamente a los cuales les ofrecen pertenecer a cualquiera de las siguientes ocho facultades: Artes y Humanidades, Ciencias Agrarias, Ingeniería y Arquitectura, Ciencias de la Salud, Ciencias Económicas y Empresariales, Ciencias de la Educación, Jurisprudencia y Ciencias Políticas, y por último, Ciencias Básicas. Esta última facultad ofrece programas en formación docente de licenciatura en diferentes disciplinas como Química, Biología, Matemáticas y Física.

El departamento de matemáticas cuenta con un total de 29 profesores que apoyan el proceso de enseñanza en esta área a los estudiantes de la Universidad de Pamplona; con 4 de los 12 profesores que tiene a cargo las materias de cálculo se realizó una prueba piloto con la intensión de conocer las estrategias pedagógicas y métodos de enseñanza que ellos aplican cuando enseñan la optimización. Dicha información arrojada con la prueba (ver anexo 1) se toma como sustento para diseñar estrategias pedagógicas orientadas a la enseñanza de la optimización en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software GeoGebra como método alterno al método tradicional.

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 tipo de investigación

Este proyecto se basa en una investigación cualitativa en el sentido en que la base para el diseño de las actividades innovadoras se centra en la prueba piloto (Ver Anexo 1) en la cual cada uno de los ítems planteados produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable, ayudando a caracterizar a los profesores a los cuales se les aplicó la prueba.

La información necesaria para caracterizar a los profesores fue planteada en cada uno de los ítems ayudando a cumplir el objetivo general de la investigación, apoyando la evidencia en los roles, metodología, estrategias pedagógicas, métodos de enseñanza en las que se vive en el aula generando poco a poco regularidades que pueden explicar la conducta individual y grupal en forma adecuada. Cada uno de estos puntos ha sido reflexionado extrayendo aquellas características fundamentales que permiten destacar una comprensión exhaustiva sobre el proceso de enseñanza del cálculo diferencial y en especial de la enseñanza de la optimización.

> Taylor, S.J. y Bogdan R.(1986) sintetizan los criterios definitorios de los estudios cualitativos de la siguiente manera:
>
> 1. La investigación cualitativa es inductiva: pues los investigadores comprenden y desarrollan conceptos partiendo de pautas de los datos, y no recogiendo datos para evaluar hipótesis o teorías preconcebidas. Siguen un diseño de investigación flexible y comienzan un estudio con interrogantes vagamente formulados.
>
> 2. Entiende que las personas, los contextos o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo. Estudia a las personas en el contexto de su pasado y en las situaciones en las que se hallan.

3. Es sensible a los efectos que el investigador causa a las personas que son el objeto de su estudio: • Interactúan con los informantes de un modo natural.

4. El investigador cualitativo trata de comprender e identificarse con las personas que estudia para comprender cómo experimentan la realidad.

5. El investigador cualitativo suspende o aparta sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones:

6. Todas las perspectivas son valiosas

7. Los métodos cualitativos con los que se estudia a las personas influyen en cómo se las ve. Si reducimos las palabras y los actos a ecuaciones estadísticas, se pierde el aspecto humano. El estudio cualitativo permite conocer el aspecto personal, la vida interior, las perspectivas, creencias, conceptos..., éxitos y fracasos, la lucha moral, los esfuerzos...

8. Los estudios cualitativos dan énfasis a la validez de la investigación. El estudio cualitativo es una investigación sistemática y rigurosa, no estandarizada, que controla los datos que registra.

9. Todos los contextos y personas son a la vez similares y únicos. Son similares en el sentido que entre cualquier escenario o grupo de personas se pueden encontrar algunos procesos sociales de tipo general. Son únicos por cuanto que en cada escenario o a través de cada informante se puede estudiar de mejor modo algún aspecto.

10. La investigación cualitativa es flexible en cuanto al modo de conducir los estudios. Se siguen lineamientos orientadores, pero no reglas. Los métodos están al servicio del investigador; el investigador no está supeditado a un procedimiento o técnica.

3.2 Contexto y Muestra

La Universidad de Pamplona cuenta con ocho de facultades, las cuales están formadas por departamentos; el Departamento de Matemáticas pertenece a la Facultad de Ciencias Básicas. Dicho departamento está a cargo de los cursos de cálculo diferencial que ofrece la universidad, teniendo en total 26 cursos con aproximadamente 40 estudiantes cada uno.

Los estudiantes pertenecientes a los grupos de cálculo diferencial cuentan con edades en un rango promedio entre los 16 a los 25 años, además son grupos integrados por hombres y mujeres que provienen de diferentes regiones de Colombia y de países fronterizos como Venezuela, Ecuador y Brasil; por ende, cada uno de estos estudiantes posee rasgos característico propios de la región de procedencia, así como costumbres y comportamientos.

De los 29 profesores del departamento de matemáticas, 12 son los que están a cargo de los 26 cursos ofrecidos de cálculo diferencial, a 5 de estos profesores se les aplicó la prueba piloto (Ver Anexo1) y de los cursos que ellos tienen a cargo, se seleccionarán 5 (escogidos al azar) a los cuales se les aplicará la propuesta innovadora.

3.3 Procedimiento de la investigación

Este trabajo de investigación surge como necesidad de proponer una alternativa para la enseñanza del tema optimización en el cálculo diferencial para los programas de ingeniería de la Universidad de Pamplona, propuesta que surge del análisis de los resultados de una prueba piloto (ver anexo1) aplicada a los profesores que orientan este curso, la cual arrojó importantes datos que indican la urgencia de una reestructuración en el proceso de enseñanza de esta temática.

Esta prueba constaba de 10 preguntas clave para responder a los interrogantes del cómo, por qué y para qué se enseña el tema de optimización en cálculo diferencial. A los profesores de la Universidad a los que se le aplicó la prueba, inicialmente se les preguntó sobre el por qué es importante que los estudiantes de ingeniería vean un curso llamado Cálculo Diferencial y cuáles son las estrategias pedagógicas que utiliza en estas clases. Esta pregunta se realizó puesto que en gran parte de las universidades del país esta materia es indispensable y obligatoria para carreras como ingenierías, licenciaturas en ciencias (física, química, matemáticas) y otras afines; sin embargo, son pocos los profesores los que se hacen este interrogante y si no se tiene claro el por qué enseñar cálculo diferencial, el profesor no va a poder satisfacer las necesidades de los estudiantes.

> El cálculo diferencial empieza a usarse en la enseñanza desde el bachillerato y se hace imprescindible en los cursos universitarios. Sin embargo, según nuestra experiencia docente, en ninguno de esos cursos se proporciona una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace cuando se usa el cálculo, provocando con ello importantes deficiencias y dificultades matemáticas que contribuyen a crear barreras para comprenderla y abordarla con una actitud positiva (Steinberg et al., 1996).

Es importante conocer también sobre las estrategias pedagógicas que usan los profesores. Que ellos empleen diferentes estrategias logra que el estudiante evidencie habilidades que éste como ser pensante tiene, sus conocimientos previos y la utilización de técnicas o hábitos de estudio, contribuyendo así al desarrollo de competencias para formar en ellos individuos íntegros, autónomos y reflexivos, que aportarán a la sociedad.

> Parra, (2003) dice que las estrategias constituyen actividades conscientes e intencionales que guían las acciones a seguir para alcanzar determinadas metas de aprendizaje por parte del estudiante. Son procedimientos que se aplican de modo intencional y deliberado a una tarea y que no pueden reducirse a rutinas automatizadas, es decir, son más que simples secuencias o aglomeraciones de habilidades. Algunas estrategias en la enseñanza pueden ser de gran impacto en la adquisición de nuevo conocimiento, logrando un mayor procesamiento de información en profundidad en el aprendizaje de nuevos conceptos, prácticas o procesos, dados por el docente, con herramientas que ayudan a planear, organizar, pensar, analizar, reflexionar y aplicar, procedimientos y/o técnicas que facilitan la comprensión del conocimiento significativo conduciendo a los estudiantes a la obtención de resultados de calidad en el aprendizaje.

Por ser la optimización un concepto fundamental en diferentes carreras universitarias y en la formación de estudiantes, se realizó la pregunta a los profesores sobre el por qué es importante enseñar a optimizar a los estudiantes de ingeniería y qué es lo más importante cuando se están solucionando problemas de optimización.

La noción que tienen la mayoría de los estudiantes de optimización no es coherente con la definición formal del concepto matemático, presentándose en ellos dificultad para resolver problemas que no sean de tipo algorítmico; es decir, los estudiantes al presentar dificultades relacionadas con el aprendizaje de este concepto matemático, presentan dificultad con la resolución de problemas aplicados en contextos específicos. Por lo que el profesor debe capacitar al estudiante para que analice e identifique la mejor solución posible, entre todas las soluciones potenciales dado un problema. La idea de aplicar métodos de optimización cuando se está dando solución a un problema es el de facilitar el entendimiento y los parámetros que componen un sistema o proceso; en este sentido Villers (1997) da importancia a la optimización como“Un concepto necesario para que los estudiantes aborden los problemas de la vida real y adquieran habilidades en la toma de decisiones”.

Para ayudar a responder el “cómo enseñan a optimizar los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pamplona”, se realizaron preguntas sobre si ellos consideraban que el método tradicional era suficiente para la enseñanza del cálculo y sobre cuál es el método o métodos de enseñanza que aplican cuando enseñan esta temática. A su vez se preguntó a los profesores si conocían el Modelo de Van Hiele y si lo habían aplicado alguna vez en clase de cálculo diferencial o cuando enseñaban optimización.

Desde la inclusión de las materias de cálculo en las carreras de ingeniería ha habido diferentes enfoques de los métodos para enseñarlo pasando por el tradicional, cognitivista, conductista, constructivista o teorías como la de Piaget, Polya, Broussseau… Las teorías y métodos propios de la Didáctica de las Matemáticas, así como sus diferentes áreas de estudio, respaldan el replanteamiento de modelos para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias en general. En este marco, es pertinente enfocarse en una propuesta metodológica que implique el cambio en la forma tradicional de orientar los cursos de cálculo diferencial.

La enseñanza de los conceptos del cálculo diferencial poseen una problemática que surge paralelamente con la aparición de herramientas tecnológicas, así pues, la asimilación de métodos clásicos con la llegada de los métodos que usan computador ha puesto en cuestión el método tradicional en la enseñanza del cálculo. Para dar un avistamiento a dicho método, lo definimos desde diferentes autores como:

> Flórez (1994), al referirse a este modelo señala que es academicista, verbalista, que dicta sus clases bajo un régimen de disciplina a unos estudiantes que son básicamente receptores. En coincidencia con la anterior apreciación Canfux (1996) afirma que el profesor, generalmente exige del alumno la memorización de la información que narra y expone, refiriéndose a la realidad como algo estático y detenido; en ocasiones la disertación es completamente ajena a la experiencia existencial de los alumnos y los contenidos se ofrecen como segmentos de la realidad, desvinculados de su totalidad. Y de acuerdo con De Zubiría (1994), bajo el propósito de enseñar conocimientos y normas, el maestro cumple la función de transmisor. El maestro dicta la lección a un estudiante que recibirá las informaciones y las normas transmitidas. El aprendizaje es entonces un acto de autoridad.

Sin embargo dentro de las consideraciones teóricas que se han realizado, la presencia de las TIC como alternativa metodológica puede ayudar a mejorar el aprendizaje como herramienta básica empelada en algún método de enseñanza.

Preguntar a los profesores si consideraban necesario el uso de algún software matemático para abordar temas del cálculo diferencial y si usaría alguno para enseñar optimización también ayuda a dar solución al interrogante del cómo enseñan los profesores optimización en la Universidad de Pamplona.

Ángel y Bautista (2001), Balderas (2002), Dávila et al. (1998), Galdo y Cociña (1998), concuerdan con que la evolución que ha experimentado el software ofrece nuevas formas de enseñar, aprender y hacer matemática, brindando amplias posibilidades didácticas. Así mismo, destacan el potencial de esta tecnología tanto para lograr la interacción del alumnado con situaciones de aprendizaje que lo conduzcan a construir conocimientos, como para tener una visión más amplia del contenido matemático (Guedez, 2005).

3.3.1 Análisis de la prueba

La prueba se aplicó a 5 de los 12 profesores que tienen a cargo cursos de cálculo diferencial. Cada uno de los profesores participantes se nombrarán como P1, P2, P3, P4 y P5. Los resultados de la prueba se resumen en el primer cuadro y las conclusiones generales de la misma se encuentran el cuadro dos:

Primer cuadro: Resultados de la Prueba

Profesor / Pregunta	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
1. ¿Por qué es importante que nuestros estudiantes vean un curso llamado Cálculo Diferencial?	Porque les permite prepararse para problemas cotidianos de optimización de procesos	Porque es la base para resolver problemas ingenieriles que ayudan a modelar procesos	Porque es el inicio y la base para los demás cálculos	Como herramienta para llevar situaciones de la vida real a formar matemática y dar solución	Proporciona al estudiante conocimientos fundamentales del cálculo para que sean utilizados en la interpretación, , planteamiento y solución de problemas específicos de su área
2. Las estrategias pedagógicas que utiliza en la clase de cálculo diferencial son:	*Preguntar a los alumnos en clase para que ellos participen *Resolución de problemas en casa *Trabajo en grupo en clase *Quices *Uso de herramientas tecnológicas	*Preguntar a los alumnos en clase para que ellos participen *Resolución de problemas en casa *Quices *Participación en el tablero de los estudiantes *Uso de	*Quices	*Preguntar a los alumnos en clase para que ellos participen *Resolución de problemas en casa *Quices	*Preguntar a los alumnos en clase para que ellos participen *Resolución de problemas en casa *Trabajo en grupo en clase *Trabajo individual en clase *Quices

	diferentes de la calculadora. *Planteamiento de problemas reales relacionado con sus perfiles.	herramientas tecnológicas diferentes de la calculadora. *uso del computador			*Participación en el tablero de los estudiantes
3. ¿Considera que el método tradicional es suficiente para la enseñanza del cálculo?	La metodología debe ser dinámica, la tradicional aporta buenas bases pero se debe complementar con el uso de nuevas como la implementación de las TIC	No, pienso que se debe enseñar teniendo en cuenta aplicaciones	No, el uso de las TIC sería de gran utilidad al momento de abordar ciertos temas	El método tradicional debe estar acompañado de herramientas tecnológicas	No, porque hay varios modos de aprender basado en el descubrimiento y la participación con sistemas más flexibles que permiten las herramientas tecnológicas que permiten la solución de problemas
4. ¿Por qué es importante enseñar a optimizar a nuestros estudiantes?	Porque es la finalidad de la ingeniería, la optimización de procesos aplicando reingeniería	Porque da herramientas necesarias para que un estudiante solucione problemas y optimice recursos	Porque les permite visualizar y obtener la mejor opción de diversas situaciones	Para que se establezca relación con la vida cotidiana	Porque es una de las aplicaciones más importantes del cálculo donde se aplican en contexto permitiendo resolver problemas afrontándolos desde la vida cotidiana
5. En algún momento como docente profesional se había hecho la pregunta 1 y 4? SI__ NO___ ¿Por qué?	Si porque me permite ver desde el primer día el objetivo del curso	Si	Si porque son estrategias para que el estudiante tenga un mejor aprendizaje	Si porque es romper en la mecanización que se da en los procesos que se preceden	Si
6. Cuando los estudiantes estén solucionando problemas de optimización, para usted como profesor es más importante que ellos:	*Comprendan primero cada problema para poder aplicar una estrategia de solución.	*Comprendan primero cada problema para poder aplicar una estrategia de solución. *Usen algún software o calculadora para encontrar la derivada de las funciones dadas en un problema.	*Comprendan primero cada problema para poder aplicar una estrategia de solución.	*Comprendan primero cada problema para poder aplicar una estrategia de solución. *Cuando tienen un problema planteado solo deriven las funciones dadas de manera correcta. *Usen algún software o calculadora para encontrar la derivada de las funciones dadas en un problema.	*Comprendan primero cada problema para poder aplicar una estrategia de solución. *Cuando tienen un problema planteado solo deriven las funciones dadas de manera correcta. *Usen algún software o calculadora para encontrar la derivada de las funciones dadas en un problema
7. Cuál es el método o métodos de enseñanza que aplica cuando enseñan optimización:	Tradicional con herramientas TIC	Siguiendo el libro guía, dar la teoría y resolver problemas	tradicional	Utilizar el método de resolución de problemas	Centrada en el acuerdo lo que exige es enfocar la enseñanza como un proceso de orientación del aprendizaje
8. ¿Conoce el Modelo de Van	NO	NO	NO	NO	NO

Hiele? ¿Lo ha aplicado alguna vez en clase de cálculo diferencial o cuando enseña optimización?	NO	NO	NO	NO	NO
9. ¿Considera necesario el uso de algún software matemático para abordar temas del cálculo diferencial? **Si __ No___** **¿Por qué?**	Si porque permite agilizar procesos que se vuelven mecánicos, además de permitir simulaciones y comparaciones muy rápidas	Si porque las TIC ayudan a la mejor comprensión de los temas	Si porque sería complemento con la enseñanza tradicional	Si porque es una herramienta de apoyo para fortalecer los temas	Si porque un proceso de enseñanza aprendizaje debe adecuarse a la realidad que impone el nuevo siglo el cual requiere realizar cada vez más en el uso de herramientas propias de esta generación
10. ¿Usaría algún software matemático para enseñar optimización? **¿por qué?**	Si porque el estudiante en un futuro se podría valer de esa herramienta para la solución de problemas	Si	Si porque mejora la visualización	Si para tener varias estrategias de aprendizaje	Si

Segundo cuadro: Conclusiones comunes de la Prueba

Preguntas	Conclusiones comunes
1. ¿Por qué es importante que nuestros estudiantes vean un curso llamado Cálculo Diferencial?	Porque es el inicio y la base para los demás cálculos siendo este una herramienta para modelar situaciones de la vida real y problemas específicos de cada área dándoles su adecuada solución
2. Las estrategias pedagógicas que utiliza en la clase de cálculo diferencial son:	*Preguntar a los alumnos en clase para que ellos participen *Resolución de problemas en casa *Quices
3. ¿Considera que el método tradicional es suficiente para la enseñanza del cálculo?	El método tradicional aporta buenas bases pero se debe complementar o debe estar acompañado de herramientas tecnológicas pues son de gran utilidad al momento de abordar ciertos temas

4. ¿Por qué es importante enseñar a optimizar a nuestros estudiantes?	Porque es una de las aplicaciones más importantes del cálculo, donde se los problemas surgen en contexto permitiendo a los estudiantes contextualizar, afrontar y resolver problemas desde la vida cotidiana.
5. En algún momento como docente profesional se había hecho la pregunta 1 y 4? SI__ NO___ ¿Por qué?	Los profesores si se ha formulado las preguntas, pero las justificaciones que cada uno presenta se sale de contexto con la pregunta misma.
6. Cuando los estudiantes estén solucionando problemas de optimización, para usted como profesor es más importante que ellos:	*Comprendan primero cada problema para poder aplicar una estrategia de solución. *Usen algún software o calculadora para encontrar la derivada de las funciones dadas en un problema.
7. Cuál es el método o métodos de enseñanza que aplica cuando enseñan optimización:	Centrada en el acuerdo que exige el departamento de matemáticas, es decir enfocándose en el libro guía, dar la teoría desde el método tradicional y resolver problemas
8. ¿Conoce el Modelo de Van Hiele? ¿Lo ha aplicado alguna vez en clase de cálculo diferencial o cuando enseña optimización?	Ningún profesor conoce el modelo de Van Hiele y por tanto ninguno lo ha aplicado
9. ¿Considera necesario el uso de algún software matemático para abordar temas del cálculo diferencial? **Si __ No___** **¿Por qué?**	Todos los profesores son conscientes del uso de herramientas tecnológicas en el aula y la enseñanza de temas del cálculo diferencial, pero la ven como apoyo al método tradicional o como complemento del mismo; o simplemente hay que evolucionar la forma de enseñar con TIC porque el mundo está en constante evolución.
10. ¿Usaría algún software matemático para enseñar optimización? **¿por qué?**	Todos están de acuerdo en usar un software matemático para mejorar la visualización de los problemas o como una estrategia de aprendizaje adicional.

4. CONCLUSIONES PRELIMINARES

La prueba piloto permitió concebir las nociones que tienen los profesores a la hora de enseñar, la forma de percibir el uso del software y los procesos de enseñanza y aprendizaje que aplican en el cálculo diferencial y en especial en la optimización. Es claro que para profundizar en un conocimiento matemático primero los profesores deben apropiarse de éste, reconociendo su epistemología, sus implicaciones didácticas y cognitivas, para luego poder introducir la geometría y así no solo darle sentido a las nociones a enseñar, sino también como medios que propicien un aprendizaje como en el caso de los software de geometría dinámica. Pues los profesores aún siguen percibiendo la tecnología como “un jugueteo como un complemento del método tradicional” o un tipo de motivación para resolver problemas de cálculo; siendo en realidad un medio que le proporciona al estudiante las herramientas necesarias para construir un conocimiento.

Esta investigación aporta en el cambio de planeación de las clases de cálculo diferencial, al incorporar no solo la geometría para darle un sentido a la enseñanza de la optimización, sino también un nuevo modelo desconocido por los profesores a los que se les aplicó la prueba y es el modelo de Van Hiele.

5. CONCLUSIONES

Una forma de tratar las dificultades que encuentran los estudiantes que reciben una enseñanza basada exclusivamente en definiciones formales y procedimientos mecánicos fue introducir mediante el uso del software y el modelo pedagógico de Van Hiele unas actividades encaminadas al aprendizaje.

Se diseñaron cuatro actividades problema para abordar el tema de optimización: Área máxima del rectángulo donde se quiere que el estudiante analice y defina que el área máxima de un rectángulo cuando su perímetro es fijo siempre conduce a la construcción de un cuadrado. Se le plantea al estudiante el problema, se le entrega el modelo en GeoGebra y la interacción del estudiante con el software le permitirá llegar al objetivo planteado. Con la segunda actividad llamada área máxima y mínima de un alambre se quiere que los estudiantes puedan verificar que el máximo de una función puede estar en uno de sus extremos, al igual que un máximo o un mínimo no siempre implica un cambio de concavidad; estos objetivos pueden ser logrados con el taller guía y la interacción del estudiante con el archivo en GeoGebra. Con la tercera actividad, el estudiante podrá generalizar que el cilindro de mayor volumen inscrito en un cono de altura a y radio b tiene radio igual a $\frac{2b}{3}$, trabajando con un archivo en 3D construido en la herramienta tecnológica GeoGebra, y finalmente, con la cuarta actividad, se trabaja el cálculo área máxima de todo rectángulo inscrito en una circunferencia de radio r Verificar que todo rectángulo inscrito en una circunferencia de radio r tiene área máxima si es un cuadrado.

Con estas actividades se favorece la interpretación geométrica para los problemas de optimización, permitiendo la construcción de sentido, pues se comprende el por qué y el para qué de cada uno de los pasos que se necesita para dar solución a los diferentes planteamientos formulados, permitiendo que los estudiantes propongan sus propias estrategias de solución e interactúen con el software o con instrumentos físicos.

Aunque el estudiante no está en la capacidad de aprovechar todo el potencial del software para comprobar sus estrategias, el profesor puede proponerle acciones de verificación con que lo conduzcan validar sus estrategias propuestas.

Cobra importancia identificar el rol del software en el diseño de las actividades, pues ya no se interpreta la tecnología como un factor, sino como el medio con el cual el sujeto interactúa, brindándole la posibilidad de experimentar sus propias estrategias para ponerlas a prueba. De esta manera, el uso del software GeoGebra, fue pertinente para el desarrollo de tres de las actividades; no viéndose como un instrumento de innovación y motivación, sino como un medio que produce aprendizaje.

Con el diseño de las actividades, la optimización se deja de ver como algo abstracto y poco comprensible, ya que al trabajar desde la geometría se puede entender el sentido de estas nociones sin recurrir a definiciones formales.

Es necesario recordar que en este trabajo sólo se plantearon las actividades pero no se llevaron a cabo, dejando para después la realización de la experimentación y el respectivo análisis después de la aplicación.

6. BIBLIOGRAFÍA

Arguedas, J., Marvin, C., & Trejos, J. (2010). PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO UTILIZANDO LAS TICS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL CURSO MA-1210. Costa Rica: Innovacesal.

Brousseau, G. (1986). FUNDAMENTOS Y MÉTODOS DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA. Universidad Nacional de Córdoba.

Bustos, L., & Vásquez, J. (2016). USO DEL SOFTWARE CARMETAL PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE DERIVADA AL RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN. Bogotá.

Campos, K., & Moreno, M. (2015). MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN PARA ESTIMACIÓN DE PARAMÉTROS EN MODELOS EPIDEMOLÓGICOS . El salvador.

Canfux, V. (1996). TENDENCIAS PEDAGÓGICAS CONTEMPORÁNEAS. Colombia. Universidad de Ibague.

Colombia, C. d. (1992). LEY 30 DE DICIEMBRE 28 DE 1992. Recuperado el septiembre de 2016, de http://www.cna.gov.co/1741/articles-186370_ley_3092.pdf

Colombia, C. d. (1994). LEY 115 DE FEBRERO 8 DE 1994. Recuperado el septiembre de 2016, de Colombia Aprende/ La Red del Conocimiento: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/article-130442.html

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2009). CÁLCULO Y TECNOLOGÍA. EL CÁLCULO Y SU ENSEÑANZA. Recuperado el 2016, de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Dc2l3taQW10.pdf

Day, C. (1999). DEVELOPING TEACHERS. THE CHALLENGES OF LIFELONG LEARNING. London: Falmer Press.

Depool. R. LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL EN UN ENTORNO COMPUTACIONAL. ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES HACIA EL USO DE UN PROGRAMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO (PCS). Universidad de la Laguna. Recuperado en: ftp://h3.bbtk.ull.es/ccppytec/cp571.pdf

Flóres, R., Valencia, M., Guillermo, D., & García, M. (2008). FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO. México: Garabatos.

Flórez, R. HACIA UNA PEDAGOGÍA DEL CONOCIMIENTO. Santafé de Bogotá: McGraw-Hill, 1994

Gallego,L; Aldana, E. ANÁLISIS DE LA CONCEPCIÓN DE LA ACTIVIDAD DE OPTIMIZAR, DESDE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA (2013).Quindio, Colombia. Revistas: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

García, A., Edel, R., & Escalera, M. (2010). LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA FINANCIERA: UN MODELO DIDÁCTICO MEDIADO POR LAS TIC. México.

Gualdrón, E., Giménez, J., & Gutiérrez, A. (2011). CARACTERIZACIÓN DE ELEMENTOS DEL DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DESECUNDARIA. LA SEMEJANZA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA Y DE APRENDIZAJE. Pamplona, Colombia: Asocolme.

Gómez , M. Polanía, N. (2008). ESTILOS DE ENSEÑANZA Y MODELOS PEDAGÓGICOS: Un estudio con profesores del Programa de Ingeniería Financiera de la Universidad Piloto de Colombia. Bogotá, Colombia.

Lobo, N. (2004). APLICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO EN LA TEORÍA DE VAN HIELE PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA. Redalyc, 3-6.

Otero, D. (2012). PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN EL AULA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN RELACIONADOS CON LA MINIMIZACIÓN DE COSTOS, IMPLEMENTANDO COMO APOYO EL SOFTWARE GEOGEBRA. Bogotá, Colombia.

Parra, D. 2003. MANUAL DE ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA/APRENDIZAJE. Ministerio de la Protección Social (SENA). Antioquia.

Proyecto "Quédate" (2012). ESTRATEGIAS Y METODOLOGÍAS PEDAGÓGICAS. Ministerio de Educación Nacional. Universidad Francisco de Paula Santander. San José de Cúcuta. en web: file:///C:/Users/Javier%20Buitrago/Downloads/110_2013.pdf.

Ruiz, G., Seoante, A., & Di Blasi; Regner, M. (2008). USO DE RECURSOS INFORMÁTICOS PARA POTENCIAR LAS DIFERENTES REPRESENTACIONES DEL CONCEPTO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. II REPEM – Memorias, 309-310.

Steinberg, R., Wittmann, M. y Redish, E. (1996). MATHEMATICAL TUTORIALS IN INTRODUCTORY PHYSICS. THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON UNDERGRADUATE PHYSICS EDUCATION (ICUPE). College Park, Maryland. (Proceedings to be published by the American Institute of Physics Redish, E. y Ridgen, J. (eds.). En línea: http://www.physics.umd.edu/ perg/papers/redish/index.html.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1989). INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS CUALITATIVOS. Barcelona: Paidós.

Thom, R. (1978). MATEMÁTICAS MODERNAS Y MATEMÁTICAS DE SIEMPRE. Madrid: Alianza Universidad: En J. Hernández, La enseñanza de las matemáticas modernas.

Villers, C. (1997). OPTIMISATION DES LES PREMIERES ANNEES DU SECONDAIRE. Mathematique et Pedagogie. 112. 31-43.

De Zubiría, J. (1994). TRATADO DE PEDAGOGÍA CONCEPTUAL: LOS MODELOS PEDAGÓGICOS. Colombia. Bernardo Herrera Merino.

7. ANEXOS

7. 1 ANEXO 1

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRUEBA PILOTO*

OBJETIVO: conocer el cómo, por qué y para qué enseñan optimización en cálculo diferencial los profesores de la Universidad de Pamplona.

A continuación se enuncian algunas preguntas de selección múltiple (puede seleccionar las respuestas que desee) o preguntas abiertas. Conteste justificando aquellas que lo solicitan.

1. ¿Por qué es importante que nuestros estudiantes vean un curso llamado Cálculo Diferencial?
____
____
____
____

2. Las estrategias pedagógicas que utiliza en la clase de cálculo diferencial son:

- Mapas conceptuales
- Preguntar a los alumnos en clase para que ellos participen
- Resolución de problemas en casa
- Trabajo en grupo en clase
- Trabajo individual en clase
- Quices
- Participación en el tablero de los estudiantes
- Uso de herramientas tecnológicas diferentes de la calculadora.
- Otras____ ¿Cuáles?: ________________
____

3. ¿Considera que el método tradicional es suficiente para la enseñanza del cálculo?
____
____
____
____

4. ¿Por qué es importante enseñar a optimizar a nuestros estudiantes?
____
____
____

5. En algún momento como docente profesional se había hecho la pregunta 1 y 4? SI__ NO___ ¿Por qué?
____
____
____

6. Cuando los estudiantes estén solucionando problemas de optimización, para usted como profesor es más importante que ellos:

- Comprendan primero cada problema para poder aplicar una estrategia de solución.
- Cuando tienen un problema planteado solo deriven las funciones dadas de manera correcta.
- Usen algún software o calculadora para encontrar la derivada de las funciones dadas en un problema.
- Todas las anteriores
- Otra:________________________________
____

7. Cuál es el método o métodos de enseñanza que aplica cuando enseñan optimización:
____
____

8. ¿Conoce el Modelo de Van Hiele? ¿Lo ha aplicado alguna vez en clase de cálculo diferencial o cuando enseña optimización?
____
____
____

9. ¿Considera necesario el uso de algún software matemático para abordar temas del cálculo diferencial?
Si ___________ No _____________

¿Por qué?:
____
____
____
____
______

10. ¿Usaría algún software matemático para enseñar optimización? ____ ¿por qué?
____
____
____

*Esta prueba es base del proyecto investigativo de la estudiante Angy Melissa Díaz para obtener el título de Especialista en Pedagogía Universitaria

7. 2 ANEXO 2

Para la enseñanza de la optimización se diseñaron unas actividades implementando herramientas geométricas tecnológicas enmarcadas en el modelo de Van Hiele. Estas actividades poseen unas tareas específicas planteadas en una guía- taller de apoyo que el profesor debe aplicar a estudiantes que estén cursando cálculo diferencial en la Universidad de Pamplona.

Las actividades propuestas tienen un archivo con una figura hecha en GeoGebra (Ver carpeta de figuras) sobre la que los estudiantes trabajarán para desarrollar las tareas (los estudiantes no necesariamente deben saber manejar el programa). Además, con cada planteamiento que se presenta se espera que los estudiantes puedan lograr el objetivo fijado y que el profesor en todo momento actúe como un mediador entre el conocimiento a obtener, el Modelo de Van Hiele, el programa GeoGebra y el estudiante.

Adjunto a las actividades se encuentran los pasos de la construcción del archivo en GeoGebra por si el profesor desea construirlos por su cuenta y la solución matemática tradicional.

7.2.1 Actividades

7.2.1.1 Actividad 1: Área máxima del rectángulo

Objetivo: Analizar y definir que el área máxima de un rectángulo cuando su perímetro es fijo siempre conduce a la construcción de un cuadrado.

Taller:

Tarea: El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. Explica y justifica tu respuesta

Parte 1

Abre el archivo de GeoGebra y arrastre el punto A.

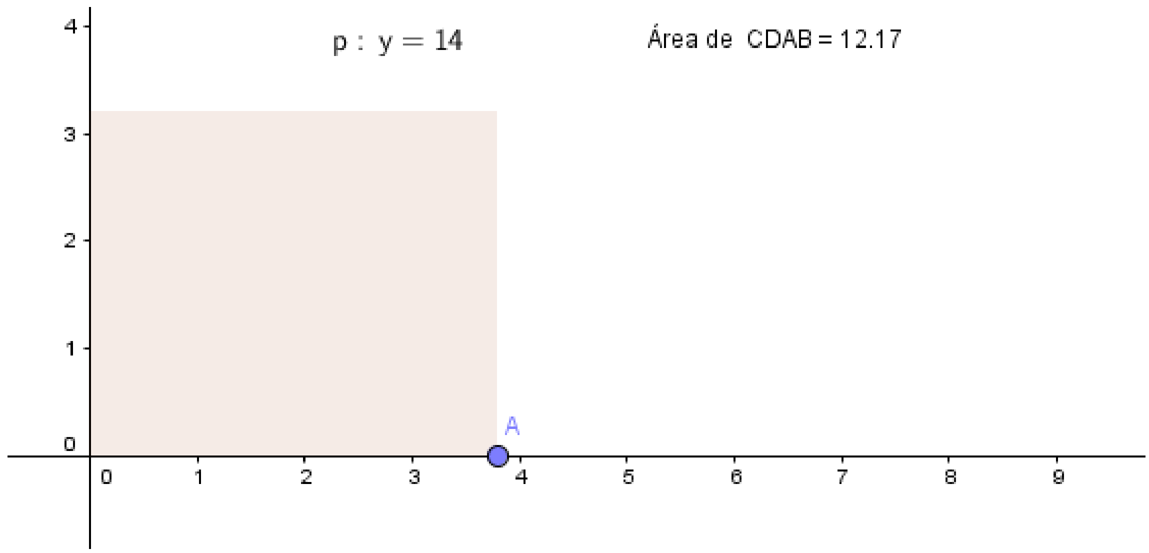


Ilustración 1: Rectángulo

a. ¿Qué observas en la pantalla?
b. ¿Qué magnitudes reconoces? ¿Cuáles magnitudes varían? ¿Cuáles magnitudes no varían? Explica tu respuesta.
c. ¿Si las magnitudes cambian cambia el área y el perímetro? Justifica.
d. ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? ¿Por qué?
e. ¿Cuáles son todos los valores que puede tomar la base, la altura, el área? ¿Por qué?
f. ¿Qué relación hay entre la base y la altura? Justifica.
g. ¿Cuáles son las dimensiones de la base y de la altura del rectángulo de mayor área? ¿Por qué?

Parte 2

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Parte 3

a. Digita en la barra de entrada que aparece en la pantalla, la fórmula que representa el área en función de la base. ¿Qué ocurrió?

b. ¿Cuál es la dimensión de la base que genera la mayor área? ¿Este valor es único? Verifica en GeoGebra. Justifica tu respuesta.
c. Arrastra el punto A alrededor del valor de la base que genera la mayor área. ¿El valor dado para la base en el literal anterior genera la mayor área? Si no es así, ¿qué valor es? ¿Dicho valor es único? Explica tu respuesta.
d. Registra en la hoja de cálculo 20 valores del punto B cuando te aproximas al valor de la base que genera la mayor área ¿Qué ocurre con las imágenes de los valores de la base cuando te aproximas al valor de la base que genera la mayor área? Escribe una conclusión y justifica tu respuesta

Parte 4
Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

<u>Para el profesor:</u>

Paso a paso de la construcción del archivo en GeoGebra

- Punto fijo D en la coordenada (0,0) el origen del plano
- Punto fijo E en la coordenada (7,0)
- Segmento f desde el punto D hasta el punto E
- Punto libre A sobre el segmento f
- Función g : $y = 7 - x$
- Recta perpendicular h al segmento f por el punto A
- Punto de intersección B entre la recta h y la función g
- Recta perpendicular i a la recta h por el punto B
- Punto de intersección C entre la recta i y el eje Y
- Segmento AD, AB, BC y CD
- Polígono ABCD
- Área del polígono ABCD
- Perímetro del polígono ABCD

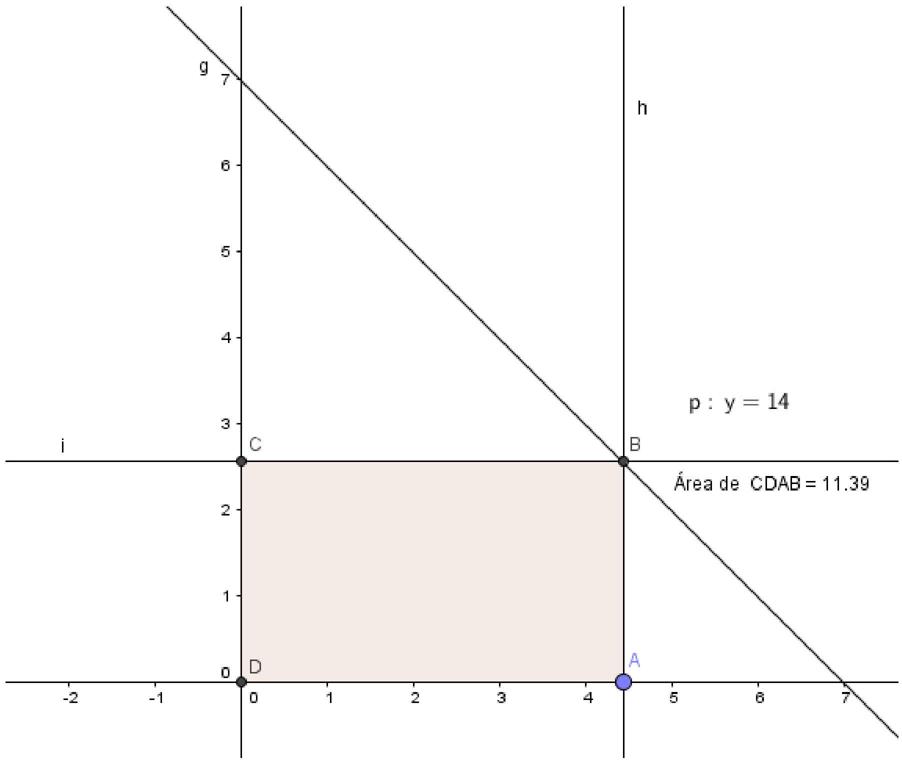


Ilustración 2: Construcción del Rectángulo

Observación: La construcción definida anteriormente no es la única posible.

<u>Solución Matemática</u>

Para solucionar este problema, podemos ver el rectángulo de base X y altura Y, de manera que el área del mismo estaría dada por la fórmula:

$$A(x) = x\,y$$

Queremos expresar el área en función de una sola variable, por lo tanto eliminamos y expresándola en términos de x utilizando la información dada del perímetro. De esta manera, si

$$P = 2x + 2y$$

$$14 = 2x + 2y$$

$$7 = x + y$$

$A(x) = x\,(7 - x)$, con $x \geq 0$ y $x \leq 7$

La derivada de esta función será:

$$A'(x) = 1\,(7 - x) + (-1)x$$

$$0 = (7 - x) - x$$

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Así que por la prueba de la primera derivada para los valores extremos absolutos, el área máxima se obtiene cuando:

$$x = \frac{7}{2} = y$$

7.2.1.2 Actividad 2: Área máxima y mínima de un alambre

Objetivos:

- Verificar que el máximo de una función puede estar en uno de sus extremos.
- Identificar que un máximo o un mínimo no siempre implica un cambio de concavidad.

Taller

Tarea: Se tiene un alambre de 20 cm de largo y con él se desea construir un cuadrado y círculo que tal forma que:

La suma de sus áreas sea máxima.

La suma de sus áreas sea mínima.

Parte 1

Abra el archivo de GeoGebra alambre.ggb que contiene la modelación de problema en GeoGebra.

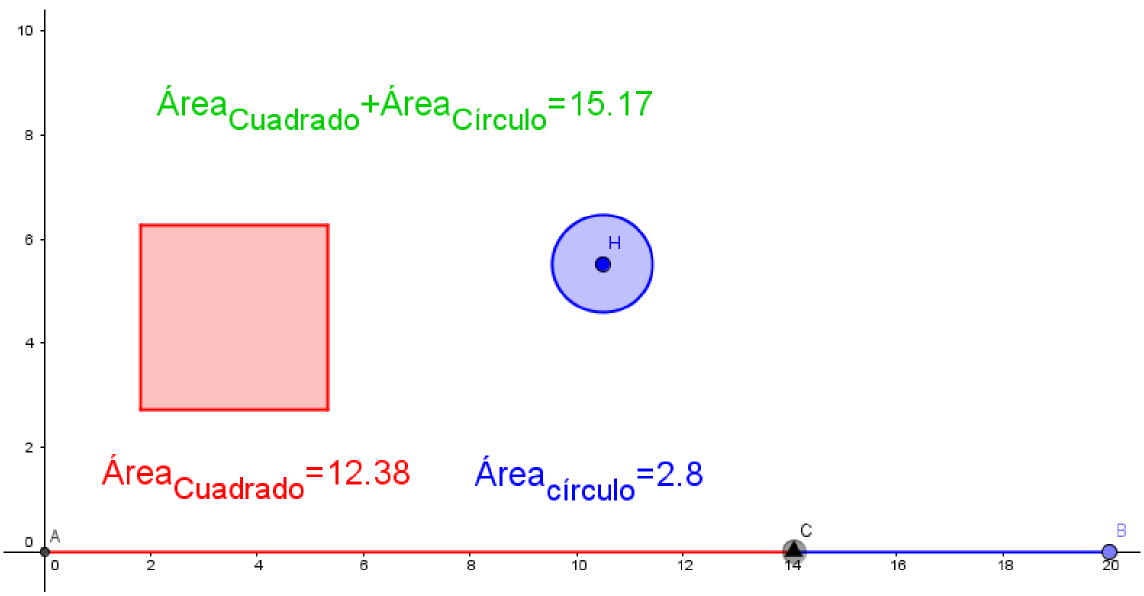


Ilustración 3: Alambre

a. ¿Qué puede observar en la pantalla?
b. ¿Si arrastra algún objeto de la pantalla qué sucede?

Mueva el deslizador **C** y contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Qué representa el deslizador?
b. ¿Qué valores puede tomar el deslizador?
c. ¿Cuáles magnitudes permanecen invariantes? ¿Cuáles varían? ¿por qué?
d. ¿Qué pasa con el área de cuadrado y del circulo cuando se mueve el deslizador a hacia la derecha? ¿Y si se mueve a la izquierda?
e. ¿Cuándo es máxima la suma de las áreas del círculo y el cuadrado?
f. ¿Cuándo es mínima la suma de las áreas del círculo y el cuadrado?

Parte 2

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Parte 3

a. Abre la hoja de cálculo de GeoGebra y registra los valores que toma C (en opción registrar en hoja de cálculo seleccione valores de x(c), y (c)) y la suma de las áreas.
b. Arrastre el deslizador. Busque en la hoja de cálculo para qué valor de C la suma es máxima y mínimo, ¿Coinciden estos valores con los hallados en el parte 1?
c. Haga una regresión de dos variables para C y la suma de las áreas para encontrar la función que mejor se ajuste a los datos.
d. ¿Cuál es la función que mejor se ajusta a los datos?
e. Copie la función que escogiste en la vista gráfica. ¿Qué representa la función?
f. Oculte la lista de puntos, trace un perpendicular por C y haga el punto de intersección entre la perpendicular y la función.
g. Mueva de nuevo el deslizador a ¿A qué se acerca el punto sobre la función cuando se acerca el deslizador a al máximo y el mínimo?
h. Traza la recta tangente a la función por el punto de intersección construido en el inciso f, y halle su pendiente. ¿Qué pasa con la pendiente de la recta cuando nos acercamos a la suma mínima?

Parte 4

¿Qué pueden concluir a partir de la experimentación anterior? Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Para el profesor:

Paso a paso de la construcción del archivo en GeoGebra

- Segmento AB: Utilizando el eje de coordenadas hacer el segmento AB de 20 unidades.
- Punto C: Punto Sobre el segmento AB.
- Segmento AC.
- Segmento CB.
- Número a: En la barra de entrada escribir: Segmento [A , C]/4.
- Punto D: Punto libre en la pantalla.
- Circunferencia c: En la barra de entrada escribir: Circunferencia [D, a].
- Recta i: Recta perpendicular al eje y por en punto D.
- Punto E: Punto de intersección entre la circunferencia c y la recta i.
- Recta j: Recta perpendicular a la recta i por el punto D.
- Punto F: Punto de intersección entre la recta j y la circunferencia c.
- Recta k: Perpendicular a la recta j por el punto F.
- Recta l: Perpendicular a la recta i por el punto E.
- Punto G: Punto de intersección entre la recta k y la recta l.
- Polígono 1: Polígono DEGF.

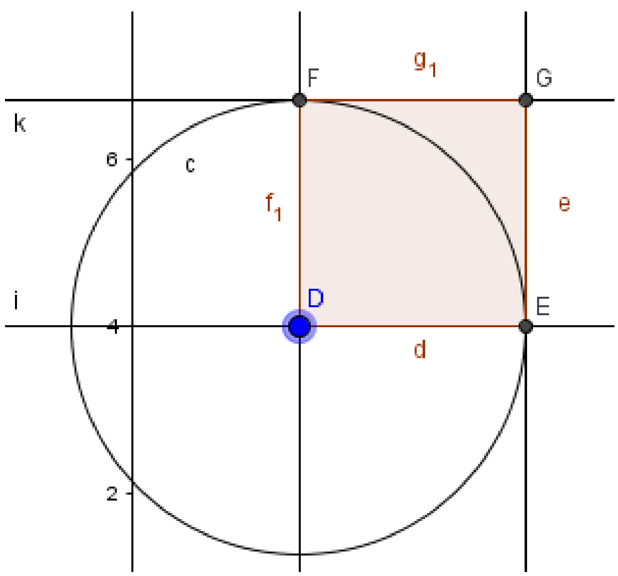


Ilustración 4: Construcción alambre cuadrado

- Número b: En la barra de entrada escribir: (20-Segmento[A, C])/(2 π).
- Punto H: Punto libre en la pantalla.

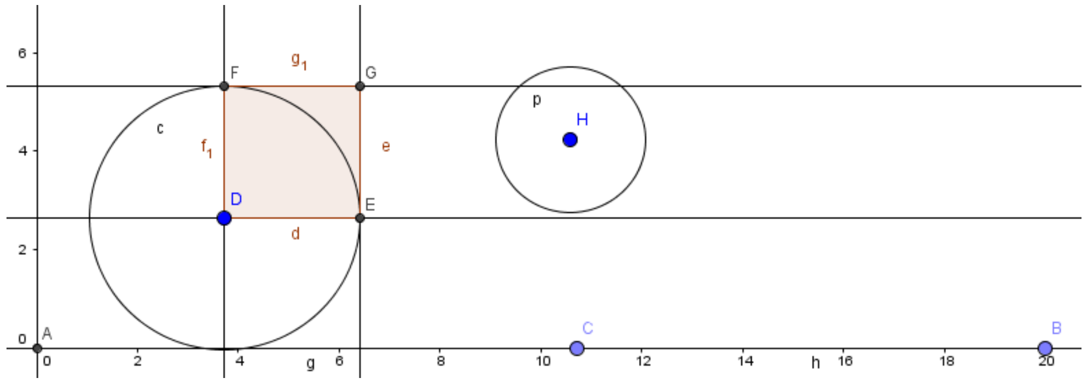


Ilustración 5: Construcción alambre circular

- Circunferencia p: En la barra de entrada escribir: Circunferencia [H, Ocultar objetos y arreglar el archivo.
- Hallar el área del cuadrado y el área del círculo.
- Texto área del cuadrado + área del círculo.

Solución Matemática

Para solucionar el problema debemos poner el área del cuadrado y el área del círculo en términos de una sola variable; en este caso la variable es uno de los trozos que se forman al cortar el alambre. Llamemos x el trozo de alambre con el que se construirá el cuadrado. Así, el trozo de alambre con el que se construirá el círculo será $20 - x$.

Tenemos que la suma de las áreas es igual a:

$$\text{Suma} = \text{Área}_{\text{Cua}} + \text{Área}_{\text{Cir}}$$

$$(1) \quad l^2 + \pi r^2$$

Como el perímetro del cuadrado es x, entonces el lado del cuadrado es

$$(2) \quad l = \frac{x}{4}$$

Mientras que el perímetro del círculo es $20 - x$, utilizando la fórmula de perímetro del círculo podemos poner el radio en función de x.

$$20 - x = 2\pi r$$

$$(3) \quad r = \frac{20 - x}{2\pi}$$

Remplazando (2) y (3) en (1) tenemos

$$S = \text{Suma} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{20 - x}{2\pi}\right)^2$$

Derivando tenemos

$$S' = \frac{x}{8} + \frac{x}{2\pi} - \frac{10}{\pi}$$

Igualando a cero tenemos

$$0 = \frac{x}{8} + \frac{x}{2\pi} - \frac{10}{\pi}$$

$$x \approx 11.20$$

Este resultado de $x \approx 11.20$ es la suma mínima de las áreas del cuadrado y el círculo, mientras que el área máxima se da cuando $x = 0$, cuando el área del cuadrado es cero.

7.2.1.3 Actividad 3: Cilindro de mayor volumen inscrito en un cono

Objetivo: Generalizar que el cilindro de mayor volumen inscrito en un cono de altura a y radio b tiene radio igual a $\frac{2b}{3}$

Taller

Tarea: ¿Cuál es el cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en un cono con altura de a y radio b?

Parte 1

a. Abra el archivo de GeoGebra que contiene la modelación de problema ¿Qué puede observar en la pantalla?

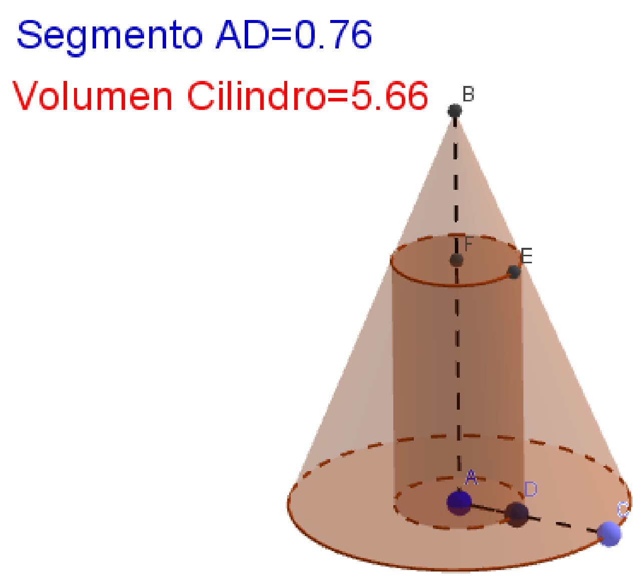


Ilustración 6: Cono

b. Mueva el Punto D y contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué sucede cuando se mueve el Punto D?
- ¿Entre qué valores se mueve el Punto D?
- Cuando se mueve el Punto D ¿Cuáles magnitudes permanecen invariantes? ¿Cuáles varían? Justifica.
- ¿Cuándo es máximo el volumen del cilindro?

Parte 2

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Parte 3

- Base fija, Altura variable: En la vista algebraica cambie la altura por cada uno de los valores indicados en la siguiente tabla (Dejando la base del cono fija en 2). Mueva el punto D hasta encontrar el máximo volumen del cilindro y llene la tabla.

Altura	**Base**	**Segmento AD** **(Radio del cilindro de mayor volumen)**
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	1.33
6	2	

¿Qué conclusiones puedes sacar con la tabla?

Parte 4

Altura fija, Base variable: En la vista algebraica cambie la base por cada uno de los valores indicados en la siguiente tabla (Dejando la altura fija en 5). Mueva el punto D hasta encontrar el máximo volumen del cilindro y llene la tabla.

Altura	**Base**	**Segmento AD** **(Radio del cilindro de mayor volumen)**
5	2	1.33
5	3	
5	4	
5	5	
5	6	

Abra la hoja de cálculo de GeoGebra y registre los datos de Base Vs Segmento AD (Radio del cilindro de mayor volumen). Haga una regresión de dos variables para Base Vs Segmento AD. ¿Cuál es función que mejor se ajusta a los datos?

Parte 5

Dado un cono de altura a y radio base b, el cilindro inscrito en el cono de mayor volumen tiene en su base un radio de: r = __b

Parte 6

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Para el profesor:

Paso a paso de la construcción del archivo en GeoGebra

- En la vista gráfica 2 de GeoGebra crea dos deslizadores: Altura y Base. Altura definida entre 0 y 10, mientras que Base entre 0 y 5.

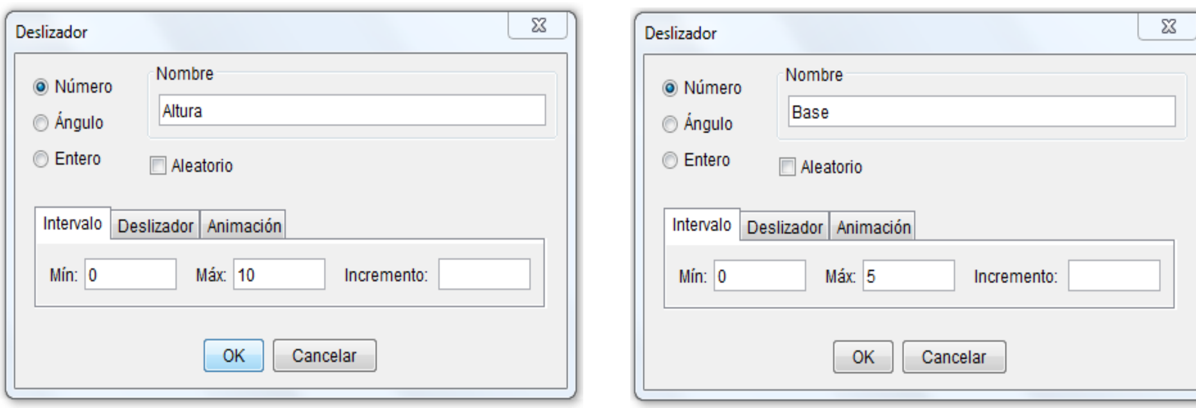


Ilustración 7: Construcción de deslizadores

- Arrastre los deslizadores Altura a 5 y Base a 2 para la primera parte de la actividad cierre la vista gráfica 2.
- Abra la vista gráfica 3D y ajústela a su gusto.
- Punto A: En la barra de entrada digite $(0,0,0)$.
- Punto B: En la barra de entrada digite $(0,0, Altura)$.
- Cono a: En la barra de entrada escriba Cono [A, B, Base].
- Punto C: Punto sobre el borde del círculo base del cono.
- Segmento AC.
- Punto D: Punto sobre segmento AC.
- Segmento AB.
- Recta h: Recta paralela a AB por D.
- Punto E: Punto de intersección entre la recta h y el cono.
- Recta i: Recta paralela a AC por E.
- Punto F: Punto de intersección entre la recta i y el segmento AB.
- Cilindro d: En la barra de entrada Cilindro [A, F, AD].

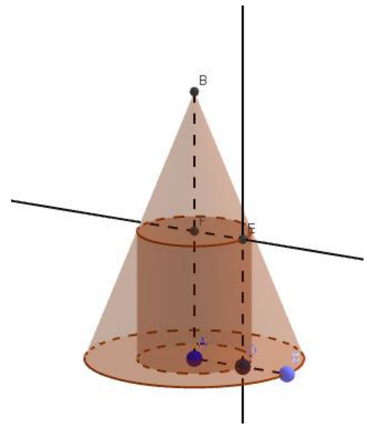


Ilustración 8: Construcción del cono

- Ocultar: Recta h y Recta i.
- Calcular el volumen del cilindro.
- Segmento AD.
- Texto: Volumen del cilindro (Ajustes en propiedades).
- Texto: Segmento AD (Ajustes en propiedades).

Solución matemática

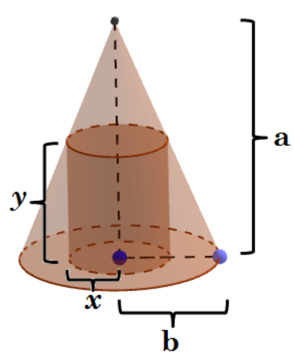


Ilustración 9: Demostración matemática cono

Tenemos un cono de altura a y radio base b, un cilindro inscrito de altura y y radio base x. Podemos reducir el problema a la siguiente pregunta: ¿Cuál debe ser el valor de x para que el volumen del cilindro sea máximo?

El volumen del cono y el cilindro están dados por las siguientes expresiones:

(1) $\mathrm{Vol}_{co} = \frac{1}{3}\pi b^2 a$

(2) $\mathrm{Vol}_{ci} = \pi x^2 y$

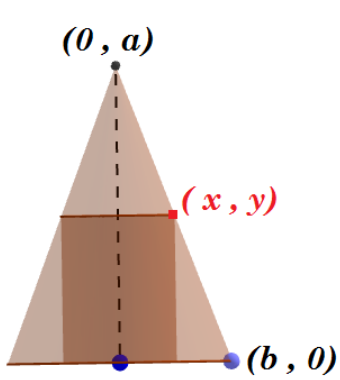


Ilustración 10: Demostración matemática cono

El paso a seguir es poner la altura y del cilindro en términos de la variable x. Para observar de mejor manera e proceso siguiente se puede hacer un corte vertical por el centro del cono y analizar la figura resultante sobre el plano xy.

Como se puede ver la altura y resulta ser un punto sobre la recta que contiene los puntos $(0, a)$ y $(b, 0)$. Así pues, podemos poner y en términos de x en una ecuación de recta.

$$m = \frac{a - 0}{0 - b} = -\frac{a}{b}$$

$$y - a = -\frac{a}{b}(x - 0)$$

$$(3) \quad y = -\frac{a}{b}x + a$$

Ahora remplazamos (3) en (2)

$$Vol_{ci} = \pi x^2(-\frac{a}{b}x + a)$$

$$(4) \quad Vol_{ci} = -\frac{a}{b}\pi x^3 + a\pi x^2$$

Para hallar el máximo simplemente derivamos e igualamos a cero.

$$Vol'_{ci} = -\frac{3a}{b}\pi x^2 + 2a\pi x$$

$$0 = -\frac{3a}{b}\pi x^2 + 2a\pi \qquad \text{entonces} \qquad x = \frac{2b}{3}$$

7.2.1.4 Actividad 4: Rectángulo inscrito en un círculo de radio r

<u>Objetivo:</u> Verificar que todo rectángulo inscrito en una circunferencia de radio r tiene área máxima si es un cuadrado.

<u>Taller</u>

<u>Tarea:</u> Halle las dimensiones de un rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio r. Explica y justifica tu respuesta

Parte 1

Abre el archivo de GeoGebra: Rectángulo inscrito.

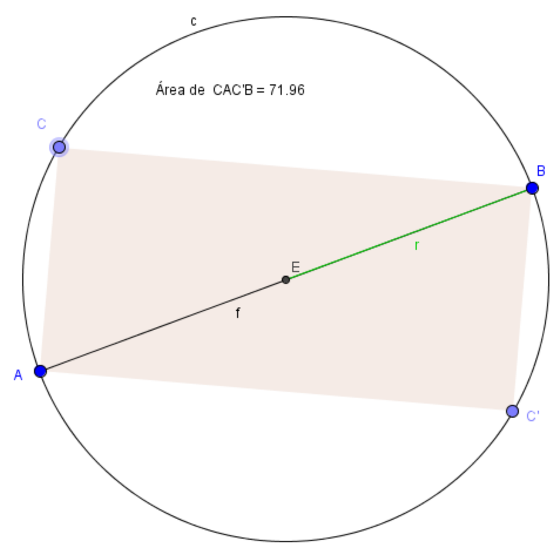


Ilustración 11: Rectángulo inscrito

a. ¿Qué puedes observar en la pantalla?
b. ¿Qué puntos del rectángulo se dejan arrastrar? ¿Cuál o cuáles son fijos?
c. ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? ¿Por qué?
d. ¿Qué valores puede tomar el área? ¿De qué magnitud depende el área? ¿Por qué?
e. ¿Qué relación hay entre el radio y el área? ¿Por qué?
f. ¿Cuáles son las dimensiones de la base y de la altura del rectángulo de mayor área cuando el radio está fijo? ¿Por qué?

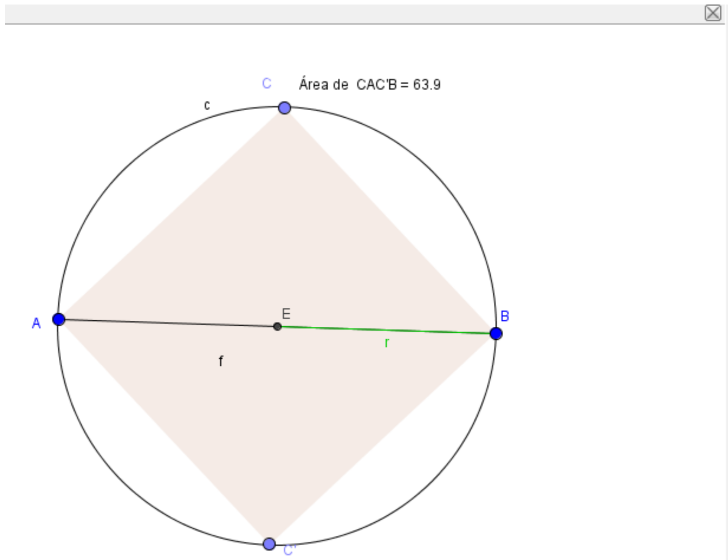
Parte 2

Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Parte 3

a. Deje fijo el segmento AB y arrastre C hasta que el área se vuelva máxima ¿Cuándo sucede esto?

b. Registra en la hoja de cálculo 20 valores del punto C cuando el área sea máxima pero variando el radio.
c. ¿Puede ajustar una ecuación que relacione el radio y el área? ¿Cuál es dicha función?



Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	r	Área de ...	
2	6.83	93.21	
3	5.14	52.88	
4	7.36	108.34	
5	6.61	87.29	
6	6.72	90.35	
7	4.29	36.87	
8	3.74	27.93	
9	1.95	7.64	
10	2.49	12.42	
11	5.65	63.9	
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Ilustración 12: Tabla de cálculo para el rectángulo inscrito

Parte 4

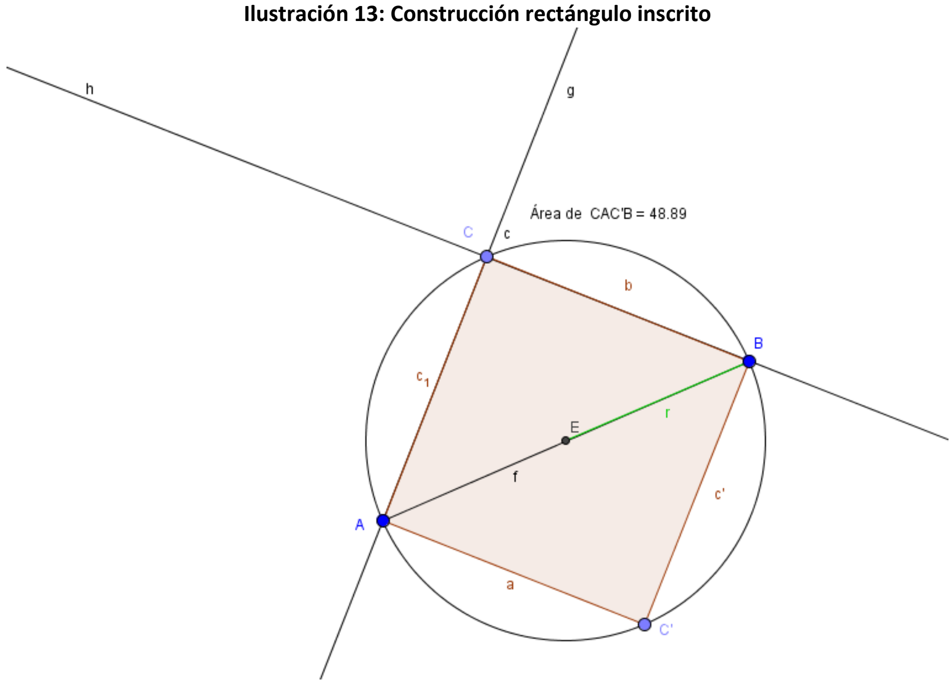
Discute con tus compañeros y el profesor los resultados encontrados. Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Para el profesor:

Paso a paso de la construcción del archivo en GeoGebra

- f : Segmento AB
- punto medio E de f
- c círculo con centro en E y radio EA
- C punto sobre c
- Recta g desde el punto A hasta C
- Recta h desde el punto B hasta C
- Punto C’ simétrico a C respecto a E
- polígono ACBC’

Ilustración 13: Construcción rectángulo inscrito



Observación: La construcción definida anteriormente no es la única posible.

Solución Matemática

Para solucionar este problema, podemos ver el rectángulo inscrito en la circunferencia como dos triángulos de base 2r y altura Y.

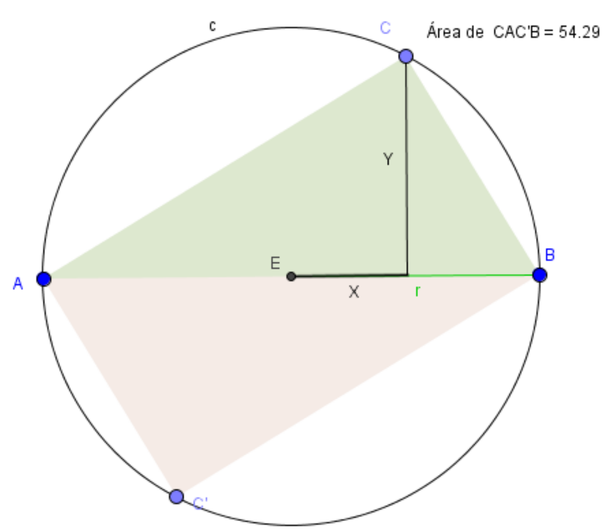


Ilustración 14: Demostración matemática rectángulo inscrito

Podemos entonces escribir el área total del rectángulo como el producto del área de dos triángulos, luego:

$$A(x) = 2\frac{(2r\,y)}{2} = 2ry$$

Para eliminar y recurrimos al hecho de que (x, y) se encuentra en la circunferencia $r^2 = x^2 + y^2$, de manera que podemos expresar el área como:

$A(x) = 2r.\sqrt{r^2 - x^2}$

El dominio de esta función es $0 \leq x \leq r$ y su derivada es:

$$A'(x) = (2r)\left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)(-2x)$$

$$0 = \left(\frac{-2rx}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$$

$$0 = x$$

Esta solución implica que X debe estar sobre el origen, es decir sobre el punto E y de esta manera la figura inscrita sería un cuadrado de lado l. Por lo tanto, el área máxima queda expresada

$$A(x) = 2r.\sqrt{r^2} = 2r^2$$

Siendo esta la función que modela el problema.

Para definir las dimensiones del rectángulo de mayor área hacemos uso del teorema de Pitágoras, luego:

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$(2r)^2 = l^2 + l^2$$

$$4r^2 = 2l^2$$

$$\sqrt{2}\, r = l$$