“TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS”

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Grado

Presentado por:

Zayda Astrid Ferrer Rico

Dirigido por:

Juan Carlos López Carreño

Pamplona, II Semestre 2015

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme la portunidad de vivir.
A mi tutor , Juan Carlos López, por su paciencia y motivación a lo largo de esta monografía.
A mis padres, por su apoyo incondional.
A mi hermanito, por su valentía y mi ejemplo a seguir.
A todos los profesores del departamento de matemáticas de la Universidad de Pamplona, por contribuir en mi formación académica, por su tiempo y dedicación.

Diciembre del 2015.

INTRODUCCIÓN

En esta monografía se presenta algunos temas selectos de matemáticas. El objetivo de este trabajo es mostrar que, por medio de elementos básicos de geometria analitica, cálculo integral y otros temas, podemos llegar a demostraciones más sencillas y rigurosas de algunas proposiciones, teoremas y/o definiciones ya expuestas.

La presente monografía tiene la siguiente distribución: En el capítulo uno, se muestra, por dos métodos esencialmente diferentes, una justificación rigurosa de porqué en los textos de cálculo se presenta las definiciones de seno hipérbolico y coseno hiperbólico mediante las experiones

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

respectivamente.

En el capítulo dos, se tomó un artículo de la revista the College Mathematics Journal. Esta revista publicada por la Asociación Matemática de América, es una revista expositiva dirigido a profesores de matemáticas de la universidad, en particular los que imparten los dos primeros años. Cubre todos los aspectos de las matemáticas. Publica artículos destinados a mejorar la enseñanza de pregrado y aprendizaje en el aula, incluyendo artículos expositivos, notas cortas, problemas y efímero matemática como pruebas falaces, citas, dibujos animados, poesía y humor. La revista está indexada en el publindex de COLCIENCIAS en categoría " A.2".
De esta revista se tomó el artículo **[2]**, en el cual los autores demuestran la proposición 2:

Proposición 2 "Dado un segmento fijo $\overline{BC}$ del plano, hallar el lugar geométrico de los puntos A, para los cuales la recta de Euler del triángulo ABC sea paralela al segmento $\overline{BC}$".

La solución a esta proposición queda establecida en el mencionado artículo; es de notar que la demostración de la proposición 2, utilizan dos lemas y una proposicion de más; resultados conocidos, que enuncian y demuestran.

Haciendo uso del método de coordenadas, en esta sección resolvemos un problema, que generaliza lo demostrado por los autores en **[2]**. De manera más precisa resolvemos el siguiente problema.

Problema 2 Dado un segmento fijo $\overline{BC}$ del plano, hallar el lugar geométrico de los puntos A, para los cuales la recta de Euler del triángulo ABC sea paralela a una recta dada del plano.

En el capítulo tres, se hizo un estudio del artículo **[3]**, publicado en la revista Comunicaciones en Estadística. La revista Comunicaciones en Estadística es una publicación del Centro de Investigaciones y Estudios Estadísticos (CIEES) adscrito a la Facultad de Estadística de la Universidad Santo Tomás. La periodicidad de esta revista es semestral, publicándose el primer número de cada año en junio y el segundo en diciembre. El objetivo de esta publicación es divulgar artículos originales e inéditos en cualquier temática de la estadística teórica y/o aplicada. La finalidad de esta revista es motivar la cultura de la investigación estadística y por ende su público objetivo está en todos aquellos investigadores que utilicen cualquier método estadístico en el desarrollo de sus proyectos. Dicha revista está indexada en categoría “ C ”de acuerdo al publindex de COLCIENCIAS.

De está revista se tomó el artículo **[3]**, en este capítulo se adelantó un estudio de la matemática inmersa en el artículo; esta revisión permitió dar la demostración de cada una de las proposiciones y teoremas desarrolladas en el artículo bajo estudio.

Los cursos de cálculo y álgebra lineal que se imparten en la Universidad de Pamplona, tienen como una de sus características seguir un texto guía para el desarrollo de las asignaturas. En años recientes se han utilizado los textos **[5]**, **[7]** para el desarrollo de las asignaturas, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable y el libro **[8]** para la materia álgebra lineal. En el capítulo cuatro, se desarrolla algunos items que permiten presentar el concepto “ producto vectorial ”desde lo historico, desde el álgebra, desde la geometría y finalmente mostrar como definir el producto vectorial en $\mathbb{R}^n$ y justificar el porque los autores de los textos mencionados afirman que solo se puededefinir en $\mathbb{R}^3$.

En la enseñanza de las matemáticas la resolución de problemas es una actividad considerada una parte muy importante. Prueba de ello, se puede observar en las afirmaciones como las siguientes:

En 1968, George Pólya, afirmaba: *“ se justifica que los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso ser considerados como la parte más esencial de la educación matemática”.*

El National Council of Teacher of Mathematics (N.C.T.M), como una organización preocupada por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ha venido destacando la importancia de considerar la resolución de problemas como el eje central de las matemáticas escolares. *Considera la resolución de problemas como una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar.*
De esta manera, se concibe la solución de problemas como una parte integral de la educación matemática, fundamental para el aprendizaje de las matemáticas.

El gran matemático Español, Luis Santaló señalaba: *“ Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas”.*

El objetivo de este capítulo no es precisar que se entiende por un problema, ni tampoco presentar y desarrollar las diferentes estrategias que algunos matemáticos como Pólya, Schoenfeld, ó Guzmán han propuesto, como “ guía”para la solución de problemas en Matemáticas. En contraste de ello, y compartiendo la premisa según la cual, la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas, se han seleccionado algunos problemas, que se resuelven en las siguientes secciones; Problemas que nos han parecido interesantes y creemos se ajustan a la recomendación hecha por el gran matemático Alemán, David Hilbert:

“Un problema debe ser difícil para que nos seduzca, pero no inaccesible como para burlarse de nuestros esfuerzos ”.

De esta manera en el quinto y último capítulo, se resuelven algunos problemas.
De **[12]** , se tomaron los problemas 269 y 271. De la revista **[13]** , se tomó el problema 270. De **[14]** , se seleccionó el problemas 2.

Índice

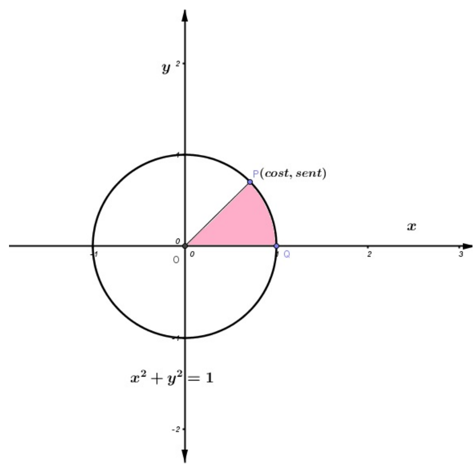
1. DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

En algunos textos del cálculo se dice que las funciones hiperbólicas son ciertas combinaciones pares e impares de las funciones exponenciales e^x y e^{-x}.

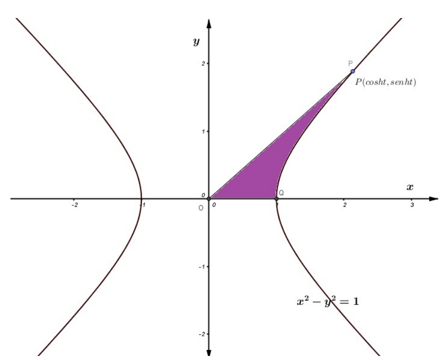
El seno hiperbólico y el coseno hiperbólico se definen de la siguiente manera:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

En la referencia bibliográfica **[1]** el autor escribe:
Si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cos t, \sin t)$ queda sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ porque $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. De hecho, t puede interpretarse como la medida en radianes del ángulo $< POQ$.



Esta es la razón por la que las funciones trigonométricas, se denominan algunas veces funciones circulares.
De manera similar, si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cosh t, \sinh t)$ queda en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, porque $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$.
Pero ahora t no representa la medida de un ángulo.
Resulta que t representa el doble del área del sector hiperbólico sombreado.



De la misma manera que el caso trigonométrico, t representa el doble del área del sector circular sombreado.

Veamos a continuación dos formas de justificar la definición del seno y coseno hiperbólico.

1.1. Primer Método

Vamos a encontrar los valores para $x(t)$ y $y(t)$ que cumpla la condición área(OPQ)=$\frac{t}{2}$. Sea R el pie de la perpendicular trazada sobre el eje X, desde el punto P, así que las coordenadas vienen dadas por $R(x(t), 0)$.

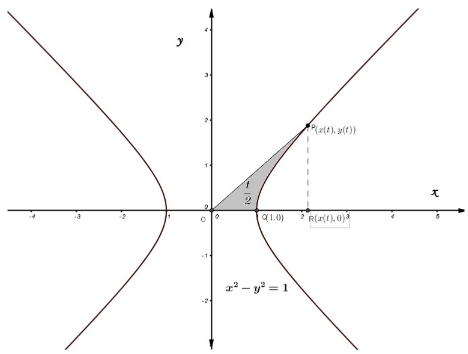


Figura 1:

Como se observa en la figura 1,

$$
\begin{aligned}
\text{área} \quad del \quad \text{triángulo}(ORP) &= \text{área} \quad del \quad sector(OPQ) + \text{área} \quad del \quad sector(QRP). \\
\frac{x(t) \cdot y(t)}{2} &= \frac{t}{2} + \int_1^{x(t)} \sqrt{x^2 - 1}dx. \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Notando por I, la integral indefinida correspondiente a la integral del lado derecho de la expresión dada en (1.1).

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1}dx.$$

Utilizando la sustitución trigonométrica $x = \sec\theta$, con lo cual $dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$ la integral en I se transforma en:

$$\begin{aligned}
I=\int\sqrt{x^2-1}dx &= \int\sqrt{\sec^2\theta-1}\cdot\sec\theta\tan\theta d\theta \\
&= \int\sqrt{\tan^2\theta}\cdot\sec\theta\tan\theta d\theta \\
&= \int\sec\theta\cdot\tan^2\theta d\theta \\
&= \int\sec\theta\cdot(\sec^2\theta-1)d\theta \\
&= \int\sec^3\theta d\theta-\int\sec\theta d\theta. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\int\sec^3\theta d\theta=\int\sec\theta\cdot(\sec^2\theta)d\theta.$$

Mediante integración por partes,

$$\begin{aligned}
u &= \sec\theta & du=\sec\theta\cdot\tan\theta d\theta \\
dv &= \sec^2\theta d\theta & v=\tan\theta.
\end{aligned}$$

Remplazando en la integral anterior,

$$\begin{aligned}
\int\sec^3\theta d\theta &= \sec\theta\tan\theta-\int\sec\theta\cdot\tan^2\theta d\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta-\int\sec\theta\cdot(\sec^2\theta-1)d\theta \\
&= \sec\theta\tan\theta-\int\sec^3\theta+\int\sec\theta d\theta \\
2\int\sec^3\theta d\theta &= \sec\theta\tan\theta+\int\sec\theta d\theta \\
\int\sec^3\theta d\theta &= \frac{1}{2}\sec\theta\cdot\tan\theta+\frac{1}{2}\int\sec\theta d\theta. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (1.3) en la igualdad (1.2) y simplificando:

$$I=\frac{1}{2}\sec\theta\cdot\tan\theta-\frac{1}{2}\int\sec\theta d\theta.$$

Recordando que: $\int\sec\theta d\theta=\ln\mid\sec\theta+\tan\theta\mid$. (Ver nota 1). Entonces,

$$I=\frac{1}{2}\sec\theta\cdot\tan\theta-\frac{1}{2}\ln\mid\sec\theta+\tan\theta\mid.$$

Retornando a las variables iniciales,

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

De esta manera, utilizando el Teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned}
\int_1^{x(t)} \sqrt{x^2-1}dx &= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)\Big|_1^{x(t)} \\
&= \frac{1}{2}x(t)\sqrt{(x(t))^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x(t)+\sqrt{(x(t))^2-1}\right|. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Cómo $P(x(t), y(t))$ es un punto sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación así: $(x(t))^2 - (y(t))^2 = 1$, de donde

$$y(t) = \sqrt{(x(t))^2 - 1}. \qquad (1.5)$$

Reemplazando (1.4) y (1.5) en (1.1) se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{x(t)\cdot\sqrt{(x(t))^2-1}}{2} &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}x(t)\sqrt{(x(t))^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x(t)+\sqrt{(x(t))^2-1}\right| \\
t &= \ln\left|x(t)+\sqrt{(x(t))^2-1}\right|.
\end{aligned}$$

Por definición de la función logaritmo:

$$\begin{aligned}
e^t &= x(t) + \sqrt{(x(t))^2-1} \\
e^t - x(t) &= \sqrt{(x(t))^2-1}.
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene:

$$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}. \qquad (1.6)$$

A la expresión del lado derecho de (1.6) se acostumbra llamar coseno hiperbólico de t y notado por cosh, así:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Al reemplazar (1.6) en (1.5) y simplificando se tiene que:

$$y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \qquad (1.7)$$

A la expresión del lado derecho de (1.7) se acostumbra llamar seno hiperbólico de t y notado por sinh, así:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Nota 1.1 *Vamos a verificar que:*

$$\int \sec\theta d\theta = \ln \mid \sec\theta + \tan\theta \mid .$$

Multiplicando y dividiendo por $\sec\theta + \tan\theta$,

$$\begin{aligned} \int \sec\theta d\theta &= \int \sec\theta \cdot \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} d\theta \\ &= \int \frac{(\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta)d\theta}{\sec\theta + \tan\theta}. \end{aligned}$$

Mediante la sustitución siguiente:

$$u = \sec\theta + \tan\theta,$$

entonces,

$$du = (\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta)d\theta.$$

Sustituyendo du y u, y resolviendo la integral se obtiene:

$$\int \sec\theta d\theta = \int \frac{du}{u} = \ln \mid u \mid + C.$$

Retornando a las variables originales,

$$\int \sec\theta d\theta = \ln \mid \sec\theta + \tan\theta \mid + C.$$

1.2. Segundo Método

En este método vamos a rotar la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ como se muestra en la figura 2.

Sea,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix},$$

la matriz de rotación de los ejes mediante un angulo θ, en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj como lo muestra la figura:

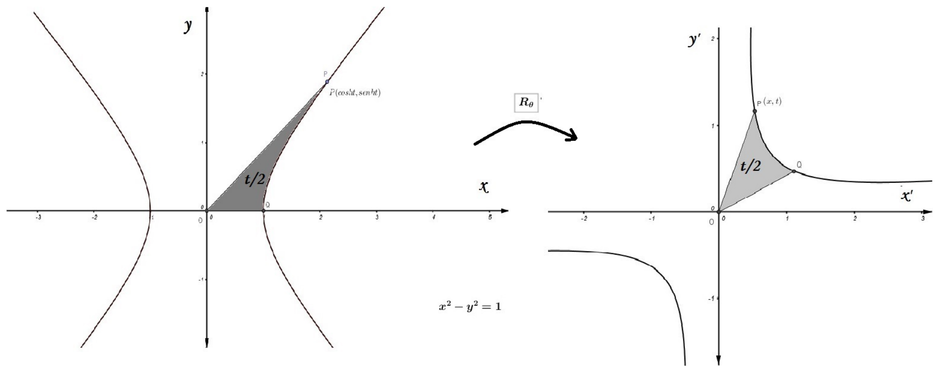


Figura 2:

De esta manera si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ representa un punto en el plano XY, el punto imagen mediante la rotación R_θ en el plano $X'Y'$ es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.8}$$

En el caso $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, las expresiones anteriores se transforman en:

$$x' = x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1.9}$$

$$y' = -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{1.10}$$

Como R_θ es una matriz ortogonal, $R_\theta^{-1} = R_\theta^t$ así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

es decir, para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, se obtiene,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \tag{1.11}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \tag{1.12}$$

Ahora, calculemos el área de la región sombreada de la figura 3.

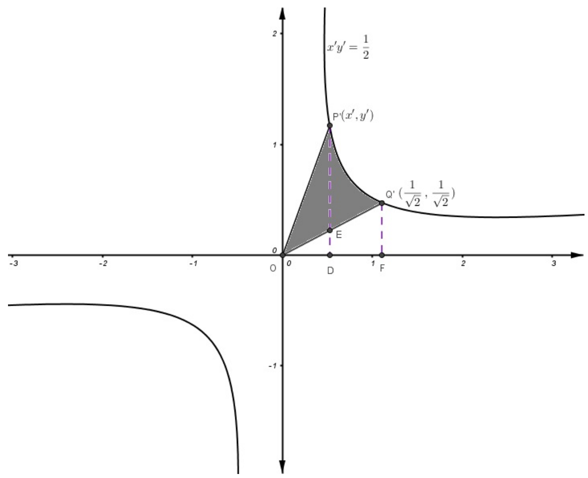


Figura 3:

Tenemos que:

$$\text{área}(OP'Q') = \text{área}(OP'E) + \text{área}(P'EQ'). \tag{1.13}$$

Pero,

$$\text{área}(OP'E) = \text{área}(EQ'DF). \tag{1.14}$$

Para justificar la igualdad de la ecuación (1.14), vea la **nota 1.2**.

Reemplazando (1.14) en (1.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{área}(OP'Q') &= \text{área}(EQ'DF) + \text{área}(P'EQ') \\ \text{área}(OP'Q') &= \text{área}(P'Q'FD). \end{aligned}$$

Utilizando la integral definida para calcular el área bajo la curva,

$$\begin{aligned}
\text{área}(P'Q'FD) &= \int_D^F f(x')dx' \\
&= \int_D^F \frac{1}{2x'}dx' \\
&= \int_{x'}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2x'}dx' \\
&= \frac{1}{2}\ln \mid x' \mid \Big|_{x'}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln x'\Big).
\end{aligned}$$

Por hipótesis, tenemos que:

$$\text{área}(P'Q'FD) = \frac{t}{2}.$$

Entonces, al igualar las dos expresiones encontradas anteriormente para el área$(P'Q'FD)$

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2} &= \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln x'\Big) \\
t &= \ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln x' \\
t &= \ln\Big(\frac{1}{x'\sqrt{2}}\Big).
\end{aligned}$$

Por definición de la función logarítmica,

$$\begin{aligned}
t &= \ln\Big(\frac{1}{x'\sqrt{2}}\Big) \\
e^t &= \frac{1}{x'\sqrt{2}} \\
x' &= \frac{1}{e^t\sqrt{2}} \\
x' &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}. \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Al reemplazar (1.14) en (1.8) y simplificando:

$$y' = \frac{e^t}{\sqrt{2}}. \qquad (1.16)$$

Finalmente, reemplazando (1.15) y (1.16) en (1.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{t}}{\sqrt{2}} \\ x &= \frac{e^{-t} + e^{t}}{2}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

A la expresión del lado derecho de (1.17) se acostumbra llamar coseno hiperbólico de t y notado por $\cosh t$, así:

$$\cosh t = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2}.$$

Como $(x(t), y(t))$ debe satisfacer la ecuación de la hipérbola

$$\big(x(t)\big)^2 - \big(y(t)\big)^2 = 1,$$

entonces, teniendo en cuenta (1.17) se obtiene:

$$y = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}. \tag{1.18}$$

A la expresión del lado derecho de (1.18) se acostumbra llamar coseno hiperbólico de t y notado por $\sinh t$, así:

$$\sinh t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}.$$

Nota 1.2 *OBSERVACIÓN*

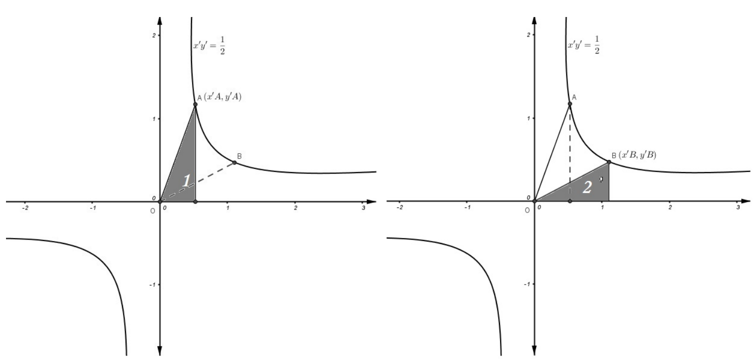


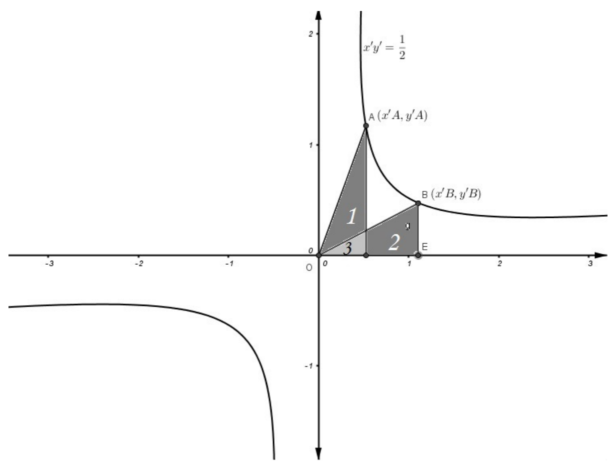
Figura 4:

De la figura 4 vemos que:

$$\begin{aligned}
\text{área1} &= \frac{x'A \cdot y'A}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \\
\text{área2} &= \frac{x'B \cdot y'B}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\text{área1} = \text{área2}$$



2. WHEN IS EULER'S LINE PARALLEL TO A SIDE OF A TRIANGLE?

Es conocido que en un triángulo equilátero, el *circuncentro*: punto de intersección de las mediatrices; el *baricentro*: punto de intersección de las medianas, y el *ortocentro*: punto de intersección de las alturas coinciden. En cualquier otro caso, Euler demostró que estos tres puntos están alineados; en virtud de ello se llama *recta de Euler* aquella recta que pasa por estos puntos. En la referencia bibliográfica **[2]**, los autores se plantean el siguiente problema:

Problema 1 "Dado un segmento fijo $\overline{BC}$ del plano, hallar el lugar geométrico de los puntos A, para los cuales la recta de Euler del triángulo ABC sea paralela al segmento $\overline{BC}$".

La solución a este problema queda establecida en la *proposición 2*, del mencionado artículo; es de notar que la demostración de la proposición 2, que realizan usando geometría sintética, utiliza los siguientes resultados conocidos, que enuncian y demuestran.

Lema 1 En un triángulo ABC, sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Entonces $2|OM| = |AH|$, y $|AH| = 2R\cos A$.

Lema 2 Sea $\triangle ABC$ dado, con a, b y c las longitudes de sus lados, S su área, R el radio de la circunferencia circunscrita. Entonces $4RS = abc$.

Proposición 1 Si el triángulo ABC es acutángulo, luego la línea de Euler es paralela a $\overline{BC}$ si y solo si $\tan B \tan C = 3$.

Haciendo uso del método de coordenadas, en esta sección resolvemos un problema, que generaliza lo demostrado por los autores en **[2]**. De manera más precisa resolvemos el siguiente problema.

Problema 2 Dado un segmento fijo $\overline{BC}$ del plano, hallar el lugar geométrico de los puntos A, para los cuales la recta de Euler del triángulo ABC sea paralela a una recta dada del plano.

Introducimos coordenadas cartesianas de modo que el origen coincida con el extremo B del segmento dado y el segmento $\overline{BC}$ esté sobre el eje positivo de las abscisas, como se muestra en la figura 4, sea $A(a, b)$ un punto del plano.

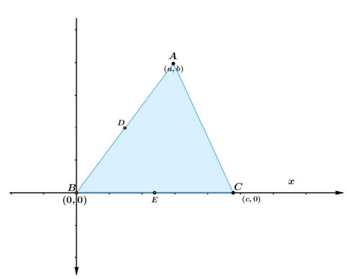


Figura 5:

Es conocido que el baricentro G del $\triangle ABC$ viene dado por:

$$G = \left(\frac{a+c}{3}, \frac{b}{3}\right). \tag{2.1}$$

A continuación encontraremos las coordenadas del circuncentro del triángulo ABC. Sea $D = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ el punto medio del lado BA como la pendiente m_{AB} de la recta $\overrightarrow{AB}$ es $\frac{b}{a}$, entonces la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es:

$$\begin{aligned} y - \frac{b}{2} &= -\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right), \\ y &= -\frac{a}{b}x + \frac{a^2+b^2}{2b}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

El punto medio del segmento $\overline{BC}$ es $E = \left(\frac{c}{2}, 0\right)$ así queda la mediatriz del lado $\overline{BC}$ viene dada por:

$$x = \frac{c}{2}. \tag{2.3}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (2.2) y (2.3) encontramos que el circuncentro O del triángulo ABC es

$$O = \left(\frac{c}{2}, \frac{a^2+b^2-ac}{2b}\right). \tag{2.4}$$

Teniendo en cuenta que la recta de Euler, L, del $\triangle ABC$ pasa por los puntos G y O, su pendiente

$$\begin{aligned} m_L &= \frac{\frac{a^2+b^2-ac}{2b} - \frac{b}{3}}{\frac{c}{2} - (\frac{a+c}{3})} \\ m_L &= \frac{3a^2-3ac+b^2}{b(c-2a)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

De otra parte si la recta dada es el plano, tiene por ecuación $y = mx + k$, entonces teniendo en cuenta (2.5) se encuentra que el lugar geométrico de los puntos $A(x, y)$ que resuelven el problema 2, satisface la ecuación:

$$\frac{3x^2-3cx+y^2}{y(c-2x)} = m. \tag{2.6}$$

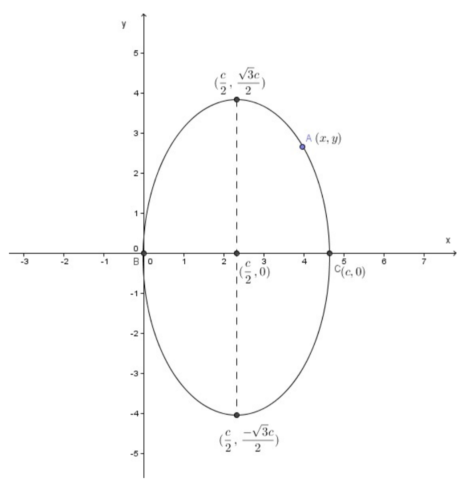
Nota 2.1 *El problema resuelto en el artículo* **[2]**, *se obtiene de (2.6), tomando* $m = 0$*:*

$$3x^2 - 3cx + y^2 = 0,$$

que se identifica como una elipse:

$$\begin{aligned}
3\Big(x^2 - cx + (\frac{c}{2})^2\Big) + y^2 &= \frac{3c^2}{4} \\
3\Big(x - \frac{c}{2}^2\Big) + y^2 &= \frac{3c^2}{4} \\
\frac{\Big(x - \dfrac{c}{2}\Big)^2}{\Big(\dfrac{c}{2}\Big)^2} + \frac{y^2}{\Big(\dfrac{\sqrt{3}c}{2}\Big)^2} &= 1,
\end{aligned}$$

escrita la ecuación de la elipse, en forma cónica, observamos que el centro es el punto $C\Big(\dfrac{c}{2}, 0\Big)$ *y las longitudes de los semiejes mayor y menor son respectivamente* $\dfrac{\sqrt{3}c}{2}, \dfrac{c}{2}$*. Así el lugar geométrico que se pide identificar en* **[2]**, *es sencillamente los dos "arcos abiertos" de la elipse que se muestra en la figura.*



Es claro que se deben excluir los puntos B, C *del lugar geométrico, con el fin de que efectivamente se forme un triángulo* ABC*.*

Retornando a la ecuación (2.6), observemos que ésta se puede escribir como

$$3x^2 + 2mxy + y^2 - 3cx - mcy = 0. \tag{2.7}$$

Por geometría analítica sabemos que los puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación (2.7) es una sección cónica; es decir, una elipse, una hipérbola o una parábola, o algún caso degenerado, un punto, una recta, de acuerdo al valor de m. Es también conocido que la clase de cónica viene caracterizada por los términos de segundo grado, esta es por la expresión

$$\triangle = 3x^2 + 2mxy + y^2. \tag{2.8}$$

Si,

$$X = (x, y) \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ m & 1 \end{pmatrix},$$

la expresión (2.8) se puede escribir matricialmente en la forma

$$\triangle = XAX^t = (x, y) \begin{pmatrix} 3 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A continuación se hará una rotación de ejes con el fin de "eliminar" el término mixto xy que figura en (2.8), con lo cual será más fácil identificar el lugar geométrico descrito en la ecuación (2.7).

Los valores propios de la matriz A se obtienen de:

$$\mid A - \lambda I \mid = \begin{vmatrix} 3-\lambda & m \\ m & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + (3 - m^2) = 0,$$

es decir, los auto-valores de A son:

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

Caso 1. Si un valor propio es cero y el otro no.

Si $\lambda_1 = 2 - \sqrt{1 + m^2}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{1 + m^2}$. Consideremos el caso $\lambda_1 = 0$; es decir, $m = \pm\sqrt{3}$.

Sin perder generalidad sea $m = \pm\sqrt{3}$.

De esta manera $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$.

Para encontrar los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 0$, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da,

$$\begin{aligned} 3x_1 + \sqrt{3}x_2 &= 0 \\ \sqrt{3}x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nótese que la primera ecuación se obtiene de la segunda multiplicando por $\sqrt{3}$ así

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} x_2$$

con lo cual, los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = 0$ son $V_1 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 1\right) t$, siendo t un número real no nulo como $\| V_1 \| = \sqrt{t^2\left(1+\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mid t \mid$, tomemos el vector unitario $U_1 = \frac{V_1}{\| V_1 \|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ como una base del espacio propio asociado al valor $\lambda_1 = 0$.

De manera similar encontramos una base para el espacio propio asociado a $\lambda_2 = 4$

$$U_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Así, una matriz diagonalizante ortogonal es

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Si $Y = (u, v)$, la ecuación de rotación $Y = XC$, permite pasar de la coordenadas (x, y) a las coordenadas (u, v) esto es:

$$X = YC^t$$

$$X = (x, y) = (u, v) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mu, v) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}u + v),$$

$$y = \frac{1}{2}(u - \sqrt{3}v). \tag{2.9}$$

Sustituyendo, las expresiones para x, y dadas en (2.9) en la ecuación (2.7) con $m = \sqrt{3}$. Se obtiene:

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 3cx + \sqrt{3}cy = 4u^2 - 2\sqrt{3}cu = 0$$

es decir,

$$2u(2u - \sqrt{3}) = 0$$

de donde $u = 0$ ó $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

(i) Si $u = 0$. Se sigue de (2.9) que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{2} \\ y &= \frac{-\sqrt{3}}{2}v, \end{aligned}$$

eliminando la variable v:

$$y = -\sqrt{3}x. \tag{2.10}$$

(ii) Si $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}C$. Nuevamente de (2.9) y eliminando v, se obtiene:

$$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}c. \tag{2.11}$$

En conclusión, si $m = \sqrt{3}$, el lugar descrito por la ecuación

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 3cx - \sqrt{3}cy = 0$$

consiste en el par de rectas dadas en (2.10) y (2.11), que se muestra en la figura 6, excluyendo los puntos B y C.

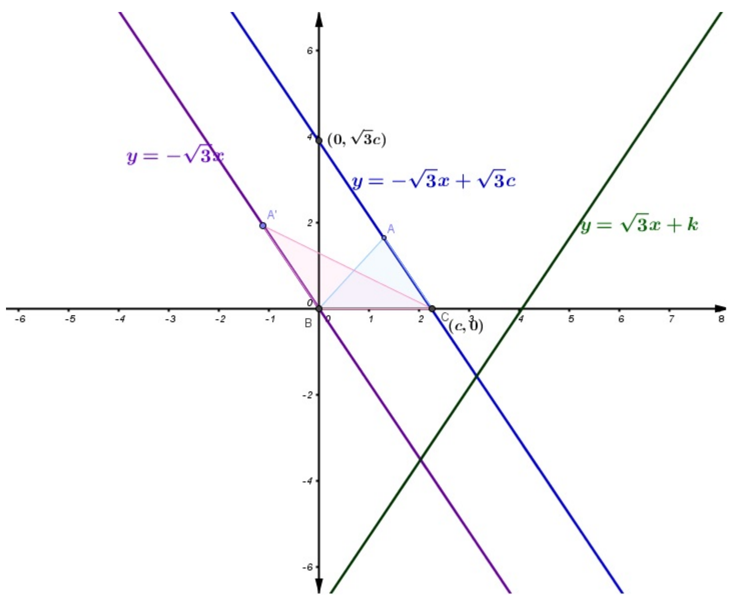


Figura 6:

Procediendo de manera similar al caso **(i)**, encontramos que una matriz diagonalizante C, viene dada por:

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{m}{\sqrt{2(1+m^2+\sqrt{1+m^2})}} & \dfrac{m}{\sqrt{2(1+m^2-\sqrt{1+m^2})}} \\ \dfrac{-(1+\sqrt{1+m^2})}{\sqrt{2(1+m^2+\sqrt{1+m^2})}} & \dfrac{-(1+\sqrt{1+m^2})}{\sqrt{2(1+m^2-\sqrt{1+m^2})}} \end{pmatrix}.$$

Si $X=(x,y)$; $Y=(u,v)$, el paso de las coordenadas (x,y) a las coordenadas u,v viene dado por la ecuación

$$X = YC^t.$$

Así:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m}{\sqrt{2(1+m^2+\sqrt{1+m^2})}}u + \frac{m}{\sqrt{2(1+m^2+\sqrt{1+m^2})}}v \\ y &= \frac{-(1+\sqrt{1+m^2})}{\sqrt{2(1+m^2+\sqrt{1+m^2})}}u + \frac{-(1+\sqrt{1+m^2})}{\sqrt{2(1+m^2+\sqrt{1+m^2})}}v. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Con las ecuaciones dadas en (2.12), la forma cuadrática que figura en (2.8) se reduce a la forma diagonal:

$$3x^2 + 2mxy + y^2 = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 u^2. \tag{2.13}$$

A su vez la parte lineal de (2.7) $-3cx - mcy$ se transforma con ayuda de (2.12) en

$$-3cx - mcy = \frac{mc\left(-2+\sqrt{1+m^2}\right)}{\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}u - \frac{mc\left(2+\sqrt{1+m^2}\right)}{\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}v. \tag{2.14}$$

De esta manera la ecuación (2.7), teniendo en cuenta (2.13) y (2.14) se convierte en

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \frac{mc\left(-2+\sqrt{1+m^2}\right)}{\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}u - \frac{mc\left(2+\sqrt{1+m^2}\right)}{\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}v = 0,$$

con el fin de simplificar la expresión anterior, sean

$$A = \frac{-mc}{\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}; \qquad B = \frac{-mc}{\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}$$

se obtiene,

$$\lambda_1 u^2 + A\lambda_1 u + \lambda_2 v^2 + B\lambda_2 u = 0. \tag{2.15}$$

Al completar cuadrados en u, v (2.15) toma la forma

$$\lambda_1(u + \frac{A}{2})^2 + \lambda_2(v + \frac{B}{2})^2 = \frac{\lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2}{4}. \tag{2.16}$$

Teniendo en cuenta, los valores de A, B,λ_1, λ_2, el lado derecho de (2.16):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\lambda_1 \frac{m^2c^2}{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)} + \lambda_2 \frac{m^2c^2}{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{8}m^2c^2\left(\frac{\lambda_1}{1+m^2+\sqrt{1+m^2}} + \frac{\lambda_2}{1+m^2+\sqrt{1+m^2}}\right) \\
&= \frac{1}{8}m^2c^2\left(\frac{(1+m^2)(\lambda_1+\lambda_2) - \sqrt{1+m^2}(\lambda_1-\lambda_2)}{(1+m^2)^2-(1+m^2)}\right) \\
&= \frac{1}{8}m^2c^2\left(\frac{4(1+m^2)+2(1+m^2)}{(1+m^2)m^2}\right) \\
&= \frac{1}{8}c^2\cdot 6 = \frac{3}{4}c^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (2.16) se convierte en

$$\frac{\left(u+\dfrac{A}{2}\right)^2}{\dfrac{3c^2}{4\lambda_1}} + \frac{\left(v+\dfrac{B}{2}\right)^2}{\dfrac{3c^2}{4\lambda_2}} = 1. \tag{2.17}$$

Caso 2. Si los valores propios tienen el mismo signo.

Como $\lambda_1 = 2 - \sqrt{1+m^2}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{1+m^2}$, este caso ocurre si $m \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.Nuevamente sin perder generalidad supongamos m positivo; esto es $m \in (0, \sqrt{3})$.

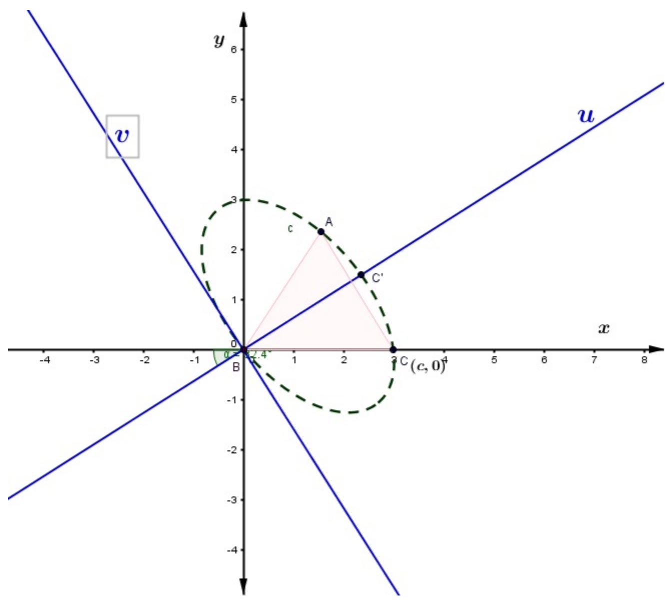
De esta manera (2.17) representa la ecuación de una elipse con centro en el punto

$$C = \left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) = \left(\frac{mc}{2\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}, \frac{mc}{2\sqrt{2\left(1+m^2+\sqrt{1+m^2}\right)}}\right),$$

semiejes de longitudes

$$a = \sqrt{\frac{3c^2}{4\lambda_1}}, \quad \sqrt{\frac{3c^2}{4\lambda_2}} = b$$

en el sistema coordenado uv.



En resumen, el lugar geométrico descrito por la ecuación (2.7) $\big(3x^2+2mxy+y^2-3cx-mcy=0\big)$, es la elipse descrita anteriormente.

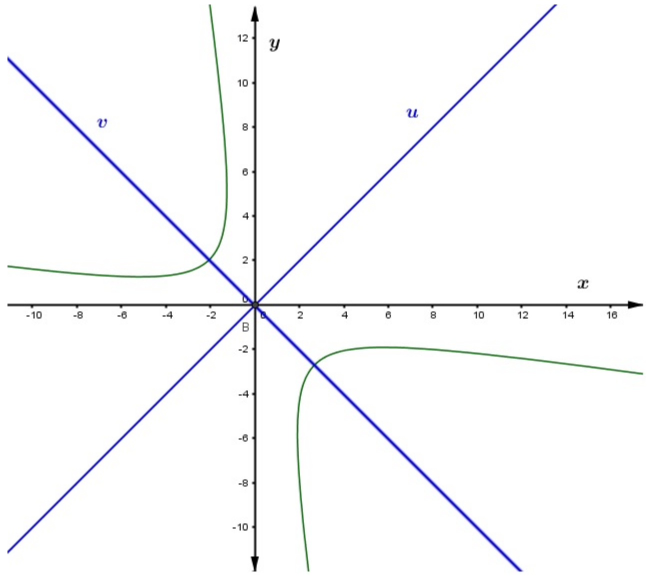
Caso 3. Si los valores propios tienen los signos opuestos

En este caso $m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Sin perder generalidad supongamos que $m > \sqrt{3}$. En este caso, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, luego la ecuación (2.17) toma la forma

$$\frac{\left(v + \dfrac{B}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}c}{2\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{\left(u + \dfrac{A}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{c\sqrt{3}}{2\sqrt{\mid \lambda_1 \mid}}\right)^2} = 1. \tag{2.18}$$

Ecuación que corresponde a una hipérbola.

En resumen, el lugar geométrico descrito por la ecuación (2.7) $\big(3x^2+2mxy+y^2-3cx-mcy=0\big)$, es la hipérbola descrita anteriormente.



3. UNA MIRADA A “UNA NUEVA FUNCIÓN DE DENSIDAD SIMÉTRICA”

3.1. Introducción

En el articulo **[3]**, el autor presenta la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = f_X(x;\mu;\beta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{\beta}\left(\dfrac{x-\mu}{\beta}\right) csch\left(\dfrac{x-\mu}{\beta}\right), & x \neq \mu, \\ \\ \dfrac{\lambda^2}{\beta}, & x = \mu. \end{cases} \tag{3.1}$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, y $\lambda^2 = \dfrac{2}{\pi^2}$.

Entre otras cosas, se demuestra que efectivamente (3.1) define una función de densidad, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;\mu;\beta)dx = 1. \tag{3.2}$$

Adicionalmente, encuentra que la función de distribución de la variable aleatoria X cuya función de densidad es f_X dada en (3.1), viene expresada por:

$$\begin{aligned} F_X(x;\mu;\beta) &= P(X \leq x) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^2}\left\{4Li_2\left(\tanh\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right) - Li_2\left(\tanh^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right)\right. \\ &- \left. 2\frac{x-\mu}{\beta}\ln\left(\tanh\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Finalmente, enuncia y demuestra el siguiente resultado (Teorema 2.2 en el articulo **[3]**).

Teorema: *Los momentos centrales de orden k de una variable aleatoria X con función de densidad dada por la expresión (3.1) vienen dados por*

$$\mu_k = \begin{cases} 2(-1)^m \dfrac{2^{2(m+1)}-1}{m+1} (\beta\pi)^{2m} B_{2(m+1)} & \text{si } k = 2m, \\ \\ 0 & \text{si } k = 2m+1, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde $\mu_k = E[(X-\mu)^k]$ y B_k denota el k-ésimo número de Bernoulli.

Nota 3.1 *Para establecer (3.2), el autor utiliza la sustitución*

$$z = \frac{x-\mu}{\beta},$$

con lo cual la integral dada en (3.2) se puede escribir como

$$I = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sinh z} dz = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{z}{\sinh z} dz, \qquad (*)$$

luego utiliza las identidades

$$\sinh z = 2\sinh\left(\frac{z}{2}\right)\cosh\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\cosh^2\left(\frac{z}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1$$

$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\sinh\left(\frac{z}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{z}{2}\right)},$$

entre otras, para luego, de realizar algunas integrales llegar a escribir I en la forma

$$I = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty} \ln\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) dz, \qquad (**)$$

para evaluar, esta última integral, recurre al libro **[4]**, *en este texto aparece la fórmula:*

$$(15.101) \qquad \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) dz = \frac{\pi^2}{4}.$$

Lo curioso es que en esta misma referencia aparece la fórmula

$$(15.114) \qquad \int_0^{\infty} \frac{z}{\sinh(az)} dz = \frac{\pi^2}{4a^2},$$

con lo cual, se hubiera podido directamente de $(*)$ *establecer que*

$$I = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1,$$

evitándose todo el procedimiento descrito anteriormente para llegar de $(*)$ *hasta* $(**)$.

Nota 3.2 *La expresión dada en (3.3), no corresponde a la función de distribución de la variable aleatoria* X *cuya función de densidad es* $f_X(x;\mu;\beta)$. *Para, ver esto simplemente se puede derivar* F_X *dada en (3.3) y observar que* $\frac{dF_X}{dx} \neq f_X(x;\mu;\beta)$.

Los objetivos que se persiguen en el presente capitulo son:

(1) *Desarrollar los elementos matemáticos necesarios que nos permitan demostrar las fórmulas (3.2) y (3.4).*

(2) *Encontrar la función de distribución* F_X.

3.2. Nociones generales

En esta sección se presentarán las herramientas matemáticas necesarias que permitieron lograr los objetivos trazados anteriormente.

3.2.1. El Problema de Basilea

El problema de Basilea, cuyo nombre se debe a la ciudad de Basilea(Suiza), lugar de nacimiento de L.Euler(1707-1783), consiste en determinar el valor exacto de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Este problema fue planteado en 1644, por el alumno de B. Cavalieri, P Mengoli. Varios matemáticos: Wallis, Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, intentaron, sin éxitos encontrar la solución a este problema. En 1736 el problema fue resuelto por L.Euler, utilizando un método bastante ingenioso en el que hacia uso de las propiedades del seno, incluyendo su desarrollo en series de potencias, y extendiendo a las series de potencias algunos resultados de las raíces de un polinomio.

Después de Euler, se han presentado varias, soluciones a este problema. Siguiendo a **[5]** página 1038, demostraremos el siguiente resultado.

Proposición 3.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración
Consideremos la integral

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy.$$

Se observa que el integrando $\dfrac{1}{1-xy}$, se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón xy, así

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n, \qquad\qquad x, y \neq 1$$

luego,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n \right) dxdy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \left(\int_0^1 y^n dy \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 \right) \left(\frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Obsérvese que el cambio de orden de la sumatoria con la integral queda justificado por la positividad de las funciones.

Haciendo el cambio $n+1 = k$, en la sumatoria anterior, se tiene que

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{3.5}$$

Ahora procedemos al cálculo de la integral doble I, para ello realizamos el cambio de variable

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu - v)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu + v).$$

El Jacobiano de la transformación viene dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 1.$$

Por consiguiente, usando el teorema de cambio de variable:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = \int_D \int \frac{1}{1-\frac{1}{2}(u^2-v^2)} dudv,$$

donde D es la región en el plano UV, mostrada en la figura 6.

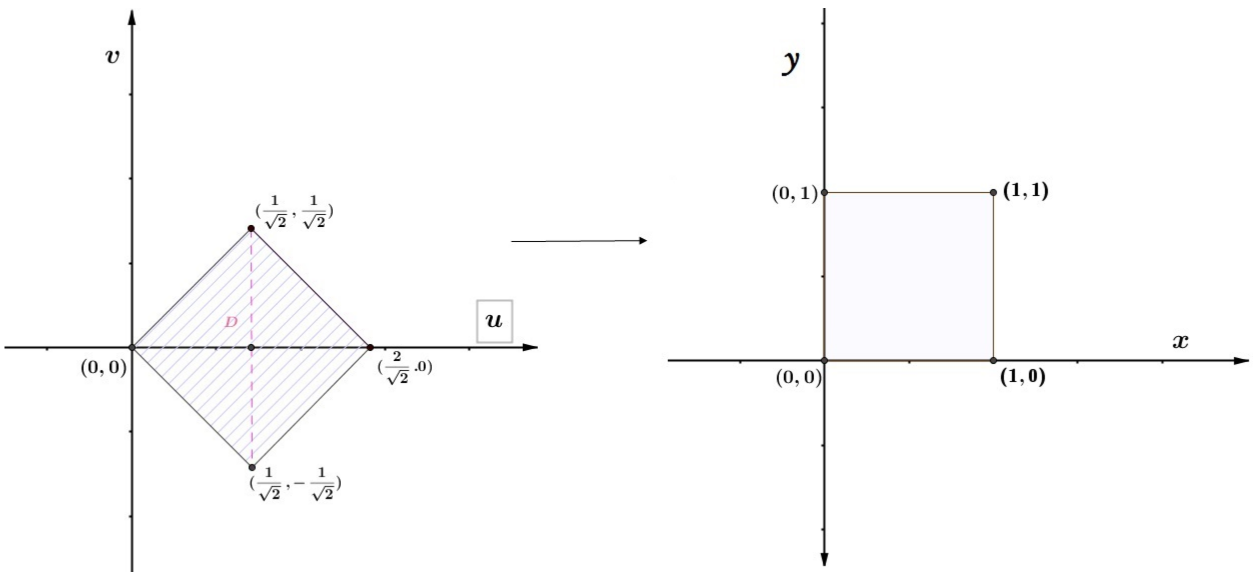


Figura 7:

Debido a la simetría de la función $f(\mu, v) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2}$ con respecto al eje U, y a la simetría del dominio de integración, se tiene que:

$$\begin{aligned} I = \int_D \int f(u,v)dudv &= 2\int_{D_1} \int f(u,v)dudv + 2\int_{D_2} \int f(u,v)dudv \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

con D_1,D_2 regiones que se indican en la figura 7.

Evaluación de I_1:

$$I_1 = 2\int_{D_1} \int \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)+\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2} dudv = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_0^u \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)+\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{dv}{\sqrt{2}}\right] du.$$

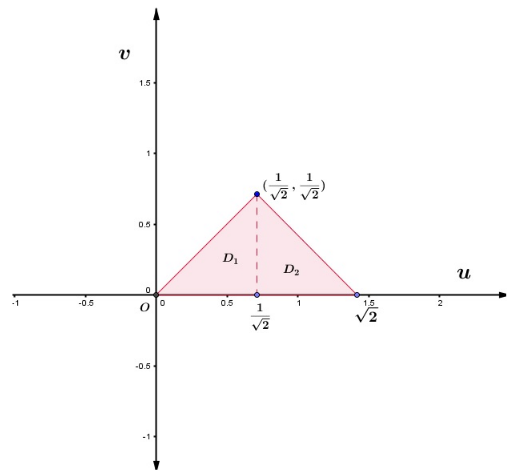


Figura 8:

Utilizando la fórmula
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right),$$
para evaluar la integral interna, con $a^2 = 1-\frac{1}{2}u^2, \quad x = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^u \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)+\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2}\frac{dv}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}}\arctan\left(\frac{\frac{v}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{2-u^2}{2}}}\right)\Bigg|_{v=0}^{v=u} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right),
\end{aligned}$$

luego,
$$I_1 = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)du,$$

si $g(0) = \arctan\left(\dfrac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)^2}\cdot\left[\frac{\sqrt{2-u^2}-\frac{u(-u)}{\sqrt{2-u^2}}}{(2-u^2)}\right] \\
&= \frac{(2-u^2)}{2}\cdot\left[\frac{2-u^2+u^2}{(2-u^2)\sqrt{2-u^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}},
\end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
I_1 &= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} g(0)\cdot g'(0)du = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\left([g(u)]^2\right)'}{2}du \\
&= 2(g(u))^2\Big|_{u=0}^{u=\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\left[g(\frac{1}{\sqrt{2}})\right]^2 - 2\left(g(0)\right)^2 \\
&= 2\left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\frac{1}{2}}}\right)\right)^2 = 2\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2,
\end{aligned}$$

luego,

$$I_1 = \frac{\pi^2}{9}. \qquad (\,*\,)$$

Evaluación de I_2:

$$I_2 = 2\sqrt{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\int_0^{-u+\sqrt{2}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}u^2+\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{dv}{\sqrt{2}}du,$$

procediendo como en la estimación de I_1,

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\sqrt{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}}\cdot\arctan\left(\frac{\frac{v}{2}}{\sqrt{2-u^2}}\right)\Big|_{v=0}^{v=-u+\sqrt{2}}du \\
&= 4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)du.
\end{aligned}$$

Si $h(u) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}}\right)$, con la que,

$$h'(u) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
I_2 &= -8\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} h(u)h'(u)du = -8\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{\left[h(u)^2\right]'}{2}du \\
&= -4\left[h(u)\right]^2\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} = -4\left[\left(h(\sqrt{2})\right)^2 - \left(h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2\right] \\
&= 4\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^2 = 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2,
\end{aligned}$$

luego,

$$I_2 = \frac{\pi^2}{9}. \qquad (**)$$

De esta manera, reemplazando $(*)$ y $(**)$ en (3.6) se obtiene

$$I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalmente de (3.5) obtenemos el resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Siguiendo la estrategia utilizada por Jacob Bernoulli en su intento para resolver el problema de Basilea, establecemos el siguiente resultado, consecuencia de la proposición anterior.

Corolario 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Demostración
En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

utilizando el resultado de la proposición 1, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3.2.2. El Valor exacto de $\zeta(2k), k \in \mathbb{N}$

Para $k \in \mathbb{N}$, se designa por $\zeta(2k)$ la suma de los recíprocos de orden $2k$ de los números naturales

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}. \tag{3.7}$$

En su estudio del problema de Basilea, tratando de “formalizar”sus resultados, Euler fué capaz de determinar los valores de $\zeta(2k)$ para k= 1,2,3,..., para lo cual estableció el siguiente desarrollo de la función cotagente en fracciones parciales

$$\pi x \cot \pi x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{n^2 - x^2}, \tag{3.8}$$

haciendo $y = \pi x$, de la ecuación (3.8)

$$\begin{aligned} y \cot y &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} \\ y \cot y &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{y}{\pi n})^2}, \end{aligned}$$

si $| y |< n\pi$, la suma de la serie geométrica de razón $\left(\dfrac{y}{\pi n}\right)^2$:

$$1 + \left(\frac{y}{\pi n}\right)^2 + \left(\frac{y}{\pi n}\right)^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} = \frac{1}{1 - \left(\frac{y}{\pi n}\right)^2},$$

luego,

$$\begin{aligned} y \cot y &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} \\ &= 1 - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2(1+k)}}{\pi^{2(1+k)}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(1+k)}}, \end{aligned}$$

si hacemos $k + 1 = m$, cuando $k = 0, m = 1$, así la expresión anterior se escribe:

$$\begin{aligned} y \cot y &= 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^{2m}}{\pi^{2m}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}\right) \\ &= 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} y^{2m}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

De esta manera se obtiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $y = 0$, de la funcion $f(y) = y \cot y$.

De otra parte, de la fórmula de Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y,$$

se obtiene

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},$$

con lo que

$$f(y)=y\cot y=iy\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{e^{iy}-e^{-iy}}\right)=iy\left(\frac{e^{2yi}+1}{e^{2yi}-1}\right).$$

Haciendo la sustitucion $z=2iy$, obtenemos,

$$\begin{aligned}f(y)=y\cot y &= \frac{z}{2}\left(\frac{e^{z}+1}{e^{z}-1}\right)\\ &= \frac{z}{2}\left(\frac{e^{z}-1+2}{e^{z}-1}\right)=\frac{z}{2}\left(1+\frac{2}{e^{z}-1}\right).\end{aligned}$$

Así,

$$y\cot y = \frac{z}{2}+\frac{z}{e^{z}-1}. \tag{3.10}$$

De (3.9), (3.10) y teniendo en cuenta que $y=\dfrac{z}{2i}$, se obtiene

$$\frac{z}{e^{z}-1}=1-\frac{z}{2}-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{(2\pi)^{2m}}\zeta(2m)z^{2m}. \tag{3.11}$$

Si definimos,

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{e^{z}-1} & z\neq 0,\\ \\ 1 & z=0.\end{cases}$$

Es claro que h es una función analítica en $\mathbb{R}$, pues es el cociente de dos funciones analíticas y en $z=0$,

$$\lim_{z\longrightarrow 0}h(z)=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{z}{e^{z}-1}=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{1}{e^{z}}=1,$$

así la función $h(z)$, es una función analítica, luego admite un desarrollo en serie de potencias, alrededor de $z=0$, que por razones históricas, es de la forma

$$\frac{z}{e^{z}-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{m!}z^{m}. \tag{3.12}$$

Así

$$\frac{z}{e^{z}-1}=1+B_1Z+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{m!}z^{m}.$$

De esta ecuación y (3.11) se obtiene $B_1=-\dfrac{1}{2}$ y como $\dfrac{z}{e^{z}-1}+\dfrac{z}{2}$ es una función par (ver(3.10)) se tiene que $B_{2k+1}=0$, $k=1,2,3,\ldots$, de esta manera la ecuación anterior se escribe:

$$\frac{z}{e^{z}-1}+\frac{1}{2}z=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}. \tag{3.13}$$

De las ecuaciones (3.11) y (3.13) se recibe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \zeta(2k) z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k},$$

de donde

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

De esta manera, tenemos probado la siguiente proposición.

Proposición 3.2 *Para $k \in \mathbb{N}$*

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}. \tag{3.14}$$

Nota 3.3 *Los coeficientes B_m se conocen como los números de Bernoulli, y como se observo anteriormente $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_{2k+1} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$*

De (3.12) se obtiene

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!} \right) (e^z - 1) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} z^m \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \right) = z,$$

luego,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{k!(m-k)!} = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1. \end{cases}$$

De esta última relación de recurrencia podemos calcular los números $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$, para $m = 3$

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{B_k}{k!(3-k)!} = 0 = \frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{2!} + \frac{B_2}{2!} = 0,$$

luego,

$$B_2 = \left(-\frac{B_0}{6} - \frac{B_1}{2} \right) 2 = 2 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6},$$

continuando de esta manera se tiene:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0

Nota 3.4 *De la ecuación* (3.14) *y los valores registrados en la tabla anterior, obtenemos:*

$$\begin{aligned} k &= 1, \quad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{2!} B_2 \pi^2 = \frac{\pi^2}{6} \\ k &= 2, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{(-1)^3 2^3}{4!} B_4 \pi^4 = \frac{-8}{24}\left(-\frac{1}{30}\right)\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

3.2.3. La función dilogaritmo.

La función dilogaritmo fué introducida por Euler y posteriormente estudiada por muchos matemáticos entre los que se incluyen Abel y Kummer. Sin embargo, es sólo en las tres últimas décadas que ha vuelto a aparecer en distintos contextos de la matemática.

Usualmente, el dilogaritmo se define por la serie:

$$Li_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad para \mid x \mid \leq 1.$$

De la expansión en serie de Taylor de $\log(1-t)$ se sigue que:

$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt.$$

No obstante, como en este capítulo se está comentando el artículo **[3]**, y éste adopta la definición dada en la referencia **[6]**.

Tomaremos como definición del dilogaritmo la siguiente.

Definición 1. Para $y \in \mathbb{C} - (-\infty, 0)$

$$Li_2(y) := \int_1^y \frac{\ln v}{1-v} dv. \tag{3.15}$$

Partiendo de la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad para \mid x \mid < 1,$$

integrando término a término,

$$\begin{aligned} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots &= \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \\ 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots &= \frac{-\ln(1-x)}{x}, \end{aligned}$$

integrando una vez más

$$\begin{aligned} -\int_0^{1-y} \frac{\ln(1-x)}{x} dx &= \int_0^{1-y} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots\right) dx \\ &= x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots \Big|_0^{1-y} \\ &= (1-y) + \frac{(1-y)^2}{2^2} + \cdots + \frac{(1-y)^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots \end{aligned}$$

Luego,

$$-\int_0^{1-y} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)^n}{n^2},$$

si en la integral del lado izquierdo de la igualdad anterior, hacemos la sustitución $1-x=v$, se obtiene

$$Li_2(y) = \int_1^y \frac{\ln v}{1-v} dv = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)^n}{n^2}. \tag{3.16}$$

En particular, si tomamos $y = 0$:

$$Li_2(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Además, si $y = 2$, se obtiene

$$Li_2(2) = -\frac{\pi^2}{12}, \tag{3.17}$$

en efecto, utilizando la representación del dilogaritmo como una serie de potencias, dada en (3.16):

$$\begin{aligned} Li_2(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

por la proposición 1, y su corolario en la sección 3.2.1:

$$Li_2(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8},$$

de donde

$$Li_2(2) = -\frac{\pi^2}{12},$$

con lo cual queda establecido (3.17).

A partir de la definición del dilogaritmo y con ayuda del teorema fundamental del cálculo, se establece la siguiente identidad.

Proposición 3.3

$$Li_2(1+x) - Li_2(x) = -\ln x \ln(1+x) - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}Li_2(x^2) \quad para \quad x > 1. \tag{3.18}$$

Demostración
Definimos la función F, mediante

$$F(x) = Li_2(1+x) - Li_2(x) + \frac{1}{2}Li_2(x^2) + \ln x \ln(1+x),$$

que de acuerdo a (3.15) en la definición 1, se puede escribir como:

$$F(x) = \int_1^{1+x} \frac{\ln v}{1-v}dv - \int_1^{x} \frac{\ln v}{1-v}dv + \frac{1}{2}\int_1^{x^2} \frac{\ln v}{1-v}dv + \ln x \ln(1+x),$$

al derivar F y utilizando el Teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\ln(1+x)}{-x} - \frac{\ln x}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x^2)}{1-x^2}(2x) + \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln x}{1+x} \\
F'(x) &= \frac{2x\ln x}{1-x^2} + \frac{\ln x}{1+x} - \frac{\ln x}{1-x} \\
&= \ln x\left[\frac{2x}{1-x^2} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right] \\
&= \ln x\left[\frac{2x + (1-x) - (1+x)}{1-x^2}\right] \\
&= \ln x\left[\frac{2x - 2x}{1-x^2}\right] = 0,
\end{aligned}$$

así, $F'(x) = 0$, luego $F(x) = c$. Evaluando F en $x = 1$

$$F(1) = Li_2(2) - Li_2(1) + \frac{1}{2}Li_2(1) + \ln 1 \cdot \ln 2,$$

pero por (3.17) $Li_2(2) = -\dfrac{\pi^2}{12}$, por definición $Li_2(1) = 0$, así $F(1) = -\dfrac{\pi^2}{12} = c$, de esta manera

$$Li_2(1+x) - Li_2(x) + \frac{1}{2}Li_2(x^2) + \ln x \ln(1+x) = -\frac{\pi^2}{12},$$

con lo cual queda establecida (3.18).

3.3. Demostración de la fórmula (3.2) y (3.4)

Con los elementos desarrollados en la sección anterior, en ésta se demostrará las ecuaciones (3.2) y (3.4) dadas en la introducción.

3.3.1. La función f_X es una función de densidad

En efecto. Sea

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t;\mu;\beta)dt = \frac{\lambda^2}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t-\mu}{\beta}\right)\operatorname{csch}\,\left(\frac{t-\mu}{\beta}\right)dt,$$

haciendo la sustitución

$$z = \frac{t-\mu}{\beta}, \quad dt = \beta dz,$$

luego,

$$I = \lambda^2\int_{-\infty}^{\infty} z\operatorname{csch}(z)dz = 2\lambda^2\int_{0}^{\infty} z\operatorname{csch}(z)dz,$$

como

$$\operatorname{csch} z = \frac{z}{e^z - e^{-z}} = \frac{ze^{-z}}{1-e^{-2z}},$$

entonces,

$$I = 4\lambda^2\int_0^{\infty}\frac{ze^{-z}}{1-e^{-2z}}dz = 4\lambda^2\int_0^{\infty} ze^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nz}\right)dz,$$

por la positividad de las funciones involucradas, es lícito el cambio de la integral con la sumatoria, así

$$I = 4\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} ze^{-(1+2n)z}dz, \tag{3.19}$$

recordando que para una función f de orden exponencial, la transformada de Laplace de f viene dada por:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

y

$$\mathscr{L}\{z^m\}(s) = \frac{m!}{s^{m+1}}, \tag{3.20}$$

se tiene que

$$\int_0^{\infty} ze^{-(1+2n)z}dz = \mathscr{L}\{z\}(1+2n) = \frac{1}{(1+2n)^2},$$

de la ecuación (3.19) se obtiene:

$$I = 4\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} = 4\left(\frac{2}{\pi^2}\right) \cdot \frac{\pi^2}{8} = 1.$$

En la última igualdad se ha tenido en cuenta el corolario 1 de la sección 3.2.1 y el valor de $\lambda^2 = \dfrac{2}{\pi^2}$.

De esta manera,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t,\mu,\beta)dt = 1,$$

con lo cual queda demostrada la ecuación (3.2).

3.3.2. Los momentos centrales

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema enunciado en la sección 3.1.

$$\begin{aligned} f_X(t,\mu,\beta)dt &= \frac{\lambda^2}{\beta}\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)\text{csch}\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right). \\ \mu_k = E\big((x-\mu)^k\big) &= \frac{\lambda^2}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^{k+1}}{\beta}\text{csch}\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)dx. \end{aligned}$$

Haciendo la sustitucion

$$z = \frac{x-\mu}{\beta} \qquad\qquad dx = \beta dz,$$

obtenemos,

$$\frac{\lambda^2}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \beta^{k+1} z^{k+1} \cdot \text{csch} z \cdot dz,$$

con lo cual,

$$\mu_k = \lambda^2 \beta^k \int_{-\infty}^{\infty} z^{k+1} \cdot \text{csch} z \cdot dz,$$

(i) Si k es impar, $k = 2m+1$, $z^{k+1} \cdot \text{csch} z \cdot = z^{2m+2} \cdot \text{csch} z$ es una función impar, en cuyo caso $\mu_k = 0$.

(ii) Si k es par, $k = 2m$,

$$\begin{aligned}
\mu_k &= \mu_{2m} = \lambda^2\beta^{2m}\int_{-\infty}^{\infty} z^{2m+1}\cdot \mathrm{csch}z\cdot dz = 2\lambda^2\beta^{2m}\int_{0}^{\infty} z^{2m+1}\cdot \mathrm{csch}z\cdot dz\\
&= 2\lambda^2\beta^{2m}\int_{0}^{\infty} z^{2m+1}\frac{2}{e^{z}-e^{-z}}dz = 4\lambda^2\beta^{2m}\int_{0}^{\infty} z^{2m+1}\frac{e^{-z}}{1-e^{-2z}}dz\\
&= 4\lambda^2\beta^{2m}\int_{0}^{\infty} z^{2m+1}\cdot e^{-z}\cdot\sum_{j=0}^{\infty} e^{-2jz}dz\\
&= 4\lambda^2\beta^{2m}\int_{0}^{\infty} z^{2m+1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty} e^{-(1+2j)z}dz\\
&= 4\lambda^2\beta^{2m}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} z^{2m+1}\cdot e^{-(1+2j)z}dz\right),
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta (3.20)

$$\begin{aligned}
\mu_{2m} &= 4\lambda^2\beta^{2m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2m+1)!}{(1+2j)^{2m+2}}\\
&= 4\lambda^2\beta^{2m}\cdot(2m+1)!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^{2m+2}},
\end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned}
\zeta(k) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^k} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j)^k} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^k}\\
\zeta(k) &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^k} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^k}\\
\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\zeta(k) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^k},
\end{aligned}$$

haciendo $k = 2m+2$

$$\left(1-\frac{1}{2^{2m+2}}\right)\zeta(2m+2) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^{2(m+2)}},$$

luego de la expresión anterior para μ_{2m}, obtenemos:

$$\mu_{2m} = 4\lambda^2\beta^{2m}\cdot(2m+1)!\left(1-\frac{1}{2^{2m+2}}\right)\zeta(2m+2), \tag{3.21}$$

de acuerdo a lo establecido en la ecuación (3.14) de la proposición 3.2,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^k 2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k},$$

tomando $k = m + 1$, y sustituyendo en (3.21) se tiene

$$\begin{aligned}
\mu_{2m} &= 4\lambda^2\beta^{2m}\cdot(2m+1)!\frac{2^{2(m+1)}-1}{2^{2m+2}}\cdot\frac{(-1)^m 2^{2m}\cdot 2\pi^{2(m+1)}}{(2m+2)!}B_{2(m+1)} \\
&= \frac{4\lambda^2\pi^2(\beta\pi)^{2m}(2^{2(m+1)}-1)(-1)^m 2}{2^2(2m+2)}B_{2(m+1)} \\
&= \frac{2(-1)^m(2^{2(m+1)}-1)(\beta\pi)^{2m}}{(m+1)}B_{2(m+1)}.
\end{aligned}$$

Así, de **(i)** y **(ii)**:

$$\mu_k = \begin{cases} 2(-1)^m\dfrac{2^{2(m+1)}-1}{m+1}(\beta\pi)^{2m}B_{2(m+1)}, & \text{si } k = 2m, \\ \\ 0, & \text{si } k = 2m+1, \end{cases}$$

como se quería establecer.

3.4. La función de Distribución

Para calcular la función de distribución F_X, por definición

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x,\mu,\beta)dt = \int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda^2}{\beta}\left(\frac{t-\mu}{\beta}\right)\operatorname{csch}\left(\frac{t-\mu}{\beta}\right)dt. \tag{3.22}$$

Sea $z = \dfrac{t-\mu}{\beta}$, entonces $dz = \dfrac{dt}{\beta}$, luego (3.22) toma la forma

$$F_X(x) = \lambda^2\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\beta}} z\operatorname{csch}z\cdot dz.$$

(i) Si $\frac{x-\mu}{\beta} > 0$, esto es si $x > \mu$, entonces

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \lambda^2\int_{-\infty}^{0} z\operatorname{csch}z\cdot dz + \lambda^2\int_{0}^{\frac{x-\mu}{\beta}} z\operatorname{csch}z\cdot dz \\
F_X(x) &= \frac{1}{2} + \lambda^2\int_{0}^{\frac{x-\mu}{\beta}} z\operatorname{csch}z\cdot dz,
\end{aligned}$$

que podemos escribir como:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + 2\lambda^2\int_{0}^{\frac{x-\mu}{\beta}}\frac{ze^{-z}}{1-e^{-2z}}dz. \tag{3.23}$$

Con el fin de evaluar la integral que figura en (3.23), realizamos al cambio de variable:

$$s = e^{-z},$$

con lo cual

$$dz = -\frac{ds}{s},$$

así

$$I(x) = 2\lambda^2 \int_0^{\frac{x-\mu}{\beta}} \frac{ze^{-z}}{1-e^{-2z}} dz = 2\lambda^2 \int_1^w \frac{\ln s}{1-s} ds, \tag{3.24}$$

con $w = e^{-(\frac{x-\mu}{\beta})}$.

Al descomponer en fracciones parciales el integrando del lado derecho de (3.24)

$$\frac{\ln s}{1-s^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln s}{1-s} + \frac{\ln s}{1+s}\right],$$

así, la integral del lado derecho de (3.24) se puede escribir como

$$\lambda^2 \int_1^w \frac{\ln s}{1-s} ds + \lambda^2 \int_1^w \frac{\ln s}{1+s} ds, \tag{3.25}$$

por la definición de la función dilogaritmo (3.15), la expresión anterior es

$$\lambda^2 Li_2(w) + \lambda^2 \int_1^w \frac{\ln s}{1+s} ds,$$

de esta expresion, (3.24) y (3.25) se obtiene

$$I(x) = \lambda^2 Li_2(w) + \lambda^2 \int_1^w \frac{\ln s}{1+s} ds, \tag{3.26}$$

una aplicación de la integración por partes, con

$$u = \ln s \qquad dv = \frac{1}{1+s}$$

$$du = \frac{1}{s} ds \qquad v = \ln(1+s),$$

$$\begin{aligned}
\int_1^w \frac{\ln s}{1+s} ds &= \ln s \ln(1+s)\Big|_1^w - \int_1^w \frac{\ln(1+s)}{s} ds \\
&= \ln(w)\ln(1+w) - \int_1^w \frac{\ln(1+s)}{s} ds,
\end{aligned}$$

mediante la sustitución $v = 1 + s$, $dv = ds$,

$$\int_1^w \frac{\ln s}{1+s} ds = \ln(w)\ln(1+w) + \int_2^{1+w} \frac{\ln v}{1-v} dv,$$

como $0 < w < 1$, (ver(3)), entonces $1 < 1 + w < 2$, así

$$\begin{aligned}\int_2^{1+w} \frac{\ln v}{1-v} dv &= \int_1^{1+w} \frac{\ln v}{1-v} dv - \int_1^2 \frac{\ln v}{1-v} dv, \\ &= Li_2(1+w) - Li_2(2) \\ &= Li_2(1+w) + \frac{\pi^2}{12}, \qquad \text{(ver(3.17))}.\end{aligned}$$

De esta manera de (3.26)

$$I(x) = \lambda^2 Li_2(w) + \lambda^2 \ln(w)\ln(1+w) + \lambda^2 Li_2(1+w) + \lambda^2 \frac{\pi^2}{12},$$

haciendo uso de la identidad (3.18)

$$\begin{aligned}I(x) &= \lambda^2 \left\{ Li_2(w) + Li_2(w) - \frac{1}{2} Li_2(w^2) \right\} \\ &= \lambda^2 \left\{ 2Li_2(w) - \frac{1}{2} Li_2(w^2) \right\}.\end{aligned}$$

Finalmente,teniendo en cuenta (3.23)

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \lambda^2 \left\{ 2Li_2(w) - \frac{1}{2} Li_2(w^2) \right\}, \qquad \text{si } x > \mu, \tag{3.27}$$

con $w = e^{-(\frac{x-\mu}{\beta})}$.

(ii) Si $\frac{x-\mu}{\beta} < 0$, es decir, si $x < \mu$. Procediendo de manera similar al caso anterior, se obtiene

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \lambda^2 \left\{ 2Li_2\left(e^{\frac{x-\mu}{\beta}}\right) - \frac{1}{2} Li_2\left(e^{2(\frac{x-\mu}{\beta})}\right) \right\}. \tag{3.28}$$

(iii) Si $\frac{x-\mu}{\beta} = 0$, entonces $F_X(x) = \lambda^2 \int_{-\infty}^0 z\text{csch}(z)dz = \frac{1}{2}$.

Resumiendo, la función de distribución F_X viene dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi^2}\left\{2Li_2\left(e^{-\frac{(x-\mu)}{\beta}}\right) - \dfrac{1}{2}Li_2\left(e^{-2(\frac{x-\mu}{\beta})}\right)\right\}, & \text{si } x > \mu, \\ \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = \mu \\ \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi^2}\left\{2Li_2\left(e^{\frac{x-\mu}{\beta}}\right) - \dfrac{1}{2}Li_2\left(e^{2(\frac{x-\mu}{\beta})}\right)\right\}, & \text{si } x < \mu. \end{cases}$$

donde,

$$Li_2(y) = \int_1^y \frac{\ln v}{1-v} dv,$$

es la función dilogaritmo.

Nota 3.5 *Verifiquemos que F_X cumple las propiedades de caracterizar una función de distribución.*

1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow \infty} F_X(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\left\{2Li_2(0) - \frac{1}{2}Li_2(0)\right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\frac{3}{2}Li_2(0) = \frac{1}{2} + \frac{3}{\pi^2}\int_1^0 \frac{\ln v}{1-v} dv \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\left\{2Li_2(0) - \frac{1}{2}Li_2(0)\right\} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\frac{3}{2}Li_2(0) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

3) *Claramente F_X es continua por la derecha.*

4) *F_X es creciente,* $\quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

i) $x > \mu$

$$\begin{aligned}
F_X'(x) &= \frac{2}{\pi^2}\left\{2\frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}(x-\mu)}{\beta^2(e^{\frac{x}{\beta}}-e^{\frac{\mu}{\beta}})} - \frac{1}{2}\frac{4e^{\frac{2\mu}{\beta}}(x-\mu)}{\beta^2(e^{\frac{2x}{\beta}}-e^{\frac{2\mu}{\beta}})}\right\} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}(x-\mu)}{\beta^2}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{\beta}}-e^{\frac{\mu}{\beta}}} - \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{e^{\frac{2x}{\beta}}-e^{\frac{2\mu}{\beta}}}\right\} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\frac{(x-\mu)e^{\frac{\mu}{\beta}}}{\beta^2}\left\{\frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{\left(e^{\frac{x}{\beta}}+e^{\frac{\mu}{\beta}}\right)\left(e^{\frac{x}{\beta}}-e^{\frac{\mu}{\beta}}\right)}\right\} > 0
\end{aligned}$$

F_X es creciente en (μ, ∞)

Análogamente, para $x < \mu$ y $x = \mu$.

4. ACERCA DEL PRODUCTO VECTORIAL

4.1. Presentación del concepto en los textos

Los cursos de cálculo y álgebra lineal que se imparten en la Universidad de Pamplona, tienen como una de sus características seguir un texto guía para el desarrollo de las asignaturas. En años recientes se han utilizado los textos **[5]**, **[7]** para el desarrollo de las asignaturas, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable y el libro **[8]** para la materia álgebra lineal. En esta sección hacemos una transcripción de lo presentado en estos libros, acerca de la definición del producto vectorial.

4.1.1. Presentación de Stewart

El producto cruz $a \times b$ de dos vectores a y b, a diferencia del producto punto, es un vector. Por esta razón, también recibe el nombre de producto vectorial. Note que $a \times b$ está definido sólo cuando a y b son vectores tridimensionales.

Definición: Si $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces el producto cruz de a y b es el vector

$$a \times b = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

Está puede parecer una forma extraña de definir un producto. La razón para la forma particular de la definición es que el producto cruz definido en esta forma tiene numerosas propiedades útiles, como veremos pronto. En particular, demostraremos que el vector $a \times b$ es perpendicular tanto a a como a b.

4.1.2. Presentación de Purcell

El producto punto de dos vectores es un escalar. Hemos explorado algunos de sus usos. Ahora presentamos el producto cruz (o producto vectorial); también tendrá muchos usos. El producto cruz $u \times v$ de $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se define como

$$u \times v = \langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \rangle$$

En esta forma, la fórmula es difícil de recordar y su significado es obvio. Observe lo único que es obvio: el producto cruz de dos vectores es un vector.

4.1.3. Presentación de Kolman

En esta sección analizaremos una operación que solo tiene sentido en $\mathbb{R}^3$; a pesar de esta limitación, dicha operación tiene muchas aplicaciones importantes en diferentes situaciones. Aquí consideraremos varias de ellas.

Definición: Si

$$u = u_1i + u_2j + u_3k \quad y \quad v = v_1i + v_2j + v_3k$$

son dos vectores en $\mathbb{R}^3$, su **producto cruz** es el vector $u \times v$ definido por

$$u \times v = \langle u_2v_3 - u_3v_2 \rangle\mathbf{i} + \langle u_3v_1 - u_1v_3 \rangle\mathbf{j} + \langle u_1v_2 - u_2v_1 \rangle\mathbf{k}. \tag{4.1}$$

El producto cruz $u \times v$ puede escribirse como un "determinante",

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{4.2}$$

El lado derecho de (4.2) en realidad no es un determinante, pero es conveniente considerarlo como tal para hacer el cálculo. Si desarrollamos (4.2) a lo largo de la primera fila, obtenemos

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

que es el lado derecho de (4.1). Observe que el producto cruz $u \times v$ es un vector, a diferencia del producto punto $u \cdot v$, que es un número.

OBSERVACIONES:

i) Se presenta una definición de un objeto matemático, en este caso el producto vectorial, sin mayor motivación.
ii) La manera de introducir el concepto y el desarrollo de sus propiedades se presenta de manera muy mecanicista.
iii) No se recurre a ningún pasaje histórico (ni contextual) que motive la introducción de este concepto.
iv) Se dice, se va a definir el producto vectorial como una operación que solo tiene sentido en $\mathbb{R}^3$, afirmación que carece de toda justificación.

4.2. Una motivación desde la Geometría

Una manera, que sugerimos, para introducir el producto vectorial, puede ser la siguiente, en la que se plantea una situación problemática.

Hallar un vector $\overrightarrow{C} = (x, y, z)$*, no nulo, perpendicular a los vectores* $\overrightarrow{A} = (1, 2, 3)$ *y* $\overrightarrow{B} = (-3, 1, 2)$.

Por las propiedades del producto escalar, el producto punto del vector $\overrightarrow{C} = (x, y, z)$ por los vectores dados debe ser cero:

$$\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{A} = x + 2y + 3z = 0 \tag{4.3}$$
$$\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{B} = -3x + y + 2z = 0. \tag{4.4}$$

Las ecuaciones (4.3),(4.4) forman un sistema homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas, el cual sabemos tiene infinitas soluciones; una de ellas es $x = y = z = 0$, sin embargo, el problema pide hallar un vector $\overrightarrow{C} \neq 0$.

Multiplicando la ecuación (4.3) por 3 y sumando con (4.4), se obtiene:

$$7y + 11z = 0. \tag{4.5}$$

De la ecuación (4.5) se deduce que para cada valor que demos a z, se obtiene un valor de y, pues $y = \dfrac{-11z}{7}$, y un valor para x, usando por ejemplo (4.3); de esta manera existen infinitas soluciones, como sabíamos que iba a ocurrir, puesto que el vector buscado $\overrightarrow{C}$, puede variar en longitud y sentido, lo único que se pide es que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$.

Observemos que una solución "simple", no nula de la ecuación (4.5) se obtiene si le damos a y el valor del coeficiente de z y a z el inverso aditivo del coeficiente de y, pues así

$$7(11) + 11(-7) = 0,$$

reemplazando estos valores de $y = 11, z = -7$ en la ecuación (4.3) se obtiene

$$x + 2(11) + 3(-7) = 0,$$

de donde, $x = -1$, así $\overrightarrow{C} = (-1, 11, -7)$ el cual se verifica $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{B}$.

Al generalizar la situación anterior: Se busca un vector $\overrightarrow{C} = (x, y, z)$, no nulo, que sea perpendicular a los dos vectores dados, $\overrightarrow{A} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{B} = (a_2, b_2, c_2)$, como antes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{A} &= a_1x + b_1y + c_1z = 0 & (4.6)\\ \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{B} &= a_2x + b_2y + c_2z = 0. & (4.7) \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación (4.6) por a_2, y la ecuación (4.7) por $-a_1$:

$$\begin{aligned} a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2z &= 0\\ -a_1a_2x - a_1b_2y - a_1c_2z &= 0, \end{aligned}$$

sumando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = 0,$$

procediendo como en el ejemplo, demos a y como valor el coeficiente de z y a z como valor el inverso aditivo del coeficiente de y; esto es:

$$\begin{aligned} y &= a_2c_1 - a_1c_2,\\ z &= -(a_2b_1 - a_1b_2) = a_1b_2 - a_2b_1, \end{aligned}$$

reemplazando estos valores de y, z en la ecuación (4.6), se obtiene el valor de x:

$$x = b_1c_2 - b_2c_1.$$

Así:

$$\overrightarrow{C} = \big(b_1c_2 - b_2c_1; -(a_1c_2 - a_2c_1); a_1b_2 - a_2b_1\big). \tag{4.8}$$

Si se observa cada una de las componentes, encontramos que corresponden a valores de determinantes 2×2 :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= b_1c_2 - b_2c_1 \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} &= -(a_1c_2 - a_2c_1), \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1b_2 - a_2b_1, \end{aligned}$$

por consiguiente, si $\overrightarrow{A} = (a_1, b_1, c_1), \overrightarrow{B} = (a_2, b_2, c_2)$ un vector $\overrightarrow{C}$, perpendicular a $\overrightarrow{A}$ y a $\overrightarrow{B}$ viene dado por:

$$\overrightarrow{C} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right). \tag{4.9}$$

Definición: Al vector $\overrightarrow{C}$ dado por (4.8) ó (4.9), que es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, se le llama **producto vectorial** de $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ y se denota $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$.

4.3. Una motivación desde la Historia

Esta sección sigue muy de cerca el texto **[9]**.

Los orígenes de los productos escalar y vectorial

Con el Renacimiento y el descubrimiento de la ciencia antigua, los matemáticos italianos empezaron a preguntarse acerca de las soluciones de las ecuaciones cúbicas.

Scipione del Ferro, uno de los matemáticos que hacia el año 1500 fue capaz de resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + bx = c$, pero lo mantuvo en secreto. Hasta que apareció un matemático brillante Nicolo Fontana más conocido como Tartaglia el cual proclamó que podía resolver la cúbica y fue capaz de resolver las treinta ecuaciones cúbicas propuestas por Fior. Fior fue el sucesor de Ferro, a quien comunicó antes de su muerte la fórmula.

Girolamo Cardano, el matemático más grande del siglo XVI, fue quien publicó la primera solución de la ecuación general de la cúbica; como consecuencia del método empleado en su solución, algo muy extraño ocurría; la raíz cuadrada de un número negativo esto, era un imposible absoluto en esos tiempos.
Con sentido o sin él, la formula de Tartaglia y Cardano forzó a los matemáticos a enfrentarse a dichas raíces.

Números como $i = \sqrt{-1}$ fueron vistos con gran desconfianza durante más de dos siglos. A mediados del siglo XVIII, el matemático Leonhard Euler relacionó los números universales e y π con el número imaginario i.
A principios del siglo XIX, el matemático Karl Gauss demostró el *teorema fundamental del álgebra* que establece que cualquier polinomio de grado n tiene n raíces. A mediados del siglo, los matemáticos Louis Cauchy y Bernhard Riemman desarrollaron el cálculo diferencial para funciones de una variable compleja. Con la utilización de números imaginarios Cauchy calculó " integrales reales"que antes no habían podido calcularse.

Varios matemáticos después de Cardano hicieron contribuciones a los números imaginarios. Al gran matemático William Hamilton se le debe la definición moderna y rigurosa del número complejo. Fue sin duda el mas importante en el desarrollo del cálculo vectorial. Hamilton fue el que nos lego los términos *vector y cantidad escalar*. Se interesó por los números imaginarios, hacia 1827. Su solución consistió en definir el número complejo $a + bi$ como un punto (a, b) en el plano $\mathbb{R}^2$, como hacemos hoy en día.

De acuerdo con la interpretación de Hamilton, *los números complejos no son más que la extensión de los números reales a dos dimensiones*. En 1843 Hamilton descubrió que lo que no pudo lograr para $\mathbb{R}^3$ podía conseguirlo para $\mathbb{R}^4$; descubrió los cuaterniones, sistema de números completamente nuevo.
Hamilton se había dado cuenta de que la multiplicación que había estado buscando podía definirse para las cuaternas (a, b, c, d), que había denotado por

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

La a se llamaba *la parte escalar* y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ se llamaba *parte vectorial,* lo que en realidad, como los números complejos, representaba el punto (a, b, c, d) en $\mathbb{R}^4$. La tabla de multiplicación que introdujo fue

$$\begin{aligned} ij = k &= -ji \\ ki = j &= -ki \\ jk = i &= -kj \\ i^2 = j^2 = k^2 &= ijk = -1. \end{aligned}$$

Peter Tait, escribió en 1867 su *Elementary Treatises on Quaternions,*su tercer capítulo es el más significativo. Es aquí donde Tait consideró el producto cuaterniónico de dos vectores:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}.$$

Entonces el producto $\mathbf{vw}$, según la definición de Hamilton, resulta:

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})(a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}) = -(aa' + bb' + cc') + (bc' - cb')\mathbf{i} + (ac' + ca')\mathbf{j} + (ab' + ba')\mathbf{k}$$

o, en forma moderna:

$$\mathbf{vw} = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times \mathbf{w},$$

donde $\cdot$ es el producto escalar de vectores, y $\times$ es el producto vectorial. Tait descubrió las fórmulas

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Ademas probó que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ era ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$, dando así una interpretación *geométrica* del producto cuaterniónico de dos vectores.

James Maxwell uno de los científicos responsables de la muerte de los cuaterniones al igual que Oliver Heaviside y Josiah Gibbs. Maxwell escribió sus ecuaciones en lo que ahora llamaríamos " en forma de componentes". También formuló las ecuaciones del campo electromagnético usando cuaterniones, motivando así que otros físicos y matemáticos se fijaran en ellos detenidamente. Maxwell fue quien comenzó el proceso de separar la parte *vectorial* del producto de dos cuaterniones de la parte *escalar*.

Heaviside, investigador independiente interesado en electricidad y magnetismo, y Gibbs, un profesor de física matemática en Yale, casi simultánea e independientemente, crearon nuestro moderno sistema de análisis vectorial.

4.4. Una mirada desde el Álgebra

En esta sección $M_n(K)$, representa el conjunto de matrices cuadradas de orden n, con entradas en el campo K, ($K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$).

Sabemos de los cursos de álgebra lineal, que el conjunto $M_n(K)$ se puede dotar de una estructura de espacio vectorial, definiendo una suma de matrices y multiplicación por, escalar " componente a componente", con mayor precisión se tiene:

$$\begin{aligned} + : M_n(K) \times M_n(K) &\longrightarrow M_n(K) \\ (A, B) &\longrightarrow C := A + B, \end{aligned}$$

si $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ elementos de $M_n(K)$, la suma de A y B es la matriz $C=(c_{ij})$ donde

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad 1\leq i,j\leq n.$$

Para la multiplicación por escalar:

$$\begin{aligned} \cdot : K\times M_n(K) &\longrightarrow M_n(K)\\ (\alpha, A) &\longrightarrow \alpha A, \end{aligned}$$

si $A=(a_{ij})\in M_n(K), \alpha\in K; \alpha A=C=(c_{ij})$ donde

$$c_{ij}=\alpha a_{ij}, \quad 1\leq i,j\leq n;$$

se verifica que $(M_n(K),+,\cdot)$ es un espacio vectorial. Más aún, se puede definir sobre este espacio una multiplicación de matrices:

$$\begin{aligned} \bullet : M_n(K)\times M_n(K) &\longrightarrow M_n(K)\\ (A,B) &\longrightarrow A\bullet B=C, \end{aligned}$$

donde $C=(c_{ij})$ es la matriz dada por

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad 1\leq i,j\leq n,$$

este producto de matrices; satisface, entre otras las siguientes propiedades, si $A,B,C\in M_n(K), \alpha\in K$,

i) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
ii) $(\alpha A)\cdot B=\alpha(AB)$
iii) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
iv) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
v) $A\cdot I_n=A=I_n\cdot A$,

donde I_n es la matriz identidad de orden n, esto es

$$I_n=I_n(\delta_{ij}), \quad \text{con} \quad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{si} \quad i=j,\\ 0, & \text{si} \quad i\neq j.\end{cases}$$

En otras palabras $(M_n(K),+,\cdot,\bullet)$ es un álgebra asociativa con identidad.

Yendo más allá, podemos introducir otro producto de matrices en $M_n(K)$, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} [,] : M_n(K)\times M_n(K) &\longrightarrow M_n(K)\\ (A,B) &\longrightarrow [A,B]=A\cdot B-B\cdot A, \end{aligned}$$

con $\cdot$, el producto usual. Para este producto, es fácil establecer las propiedades enunciadas en el siguiente resultado.

Proposición 4.1 *Si* $A, B, C \in M_n(K), \quad \alpha, \beta \in K,$ *entonces*

$$\begin{array}{lll} a) & [A,B] = -[B,A] & \text{(anticonmutativa)} \\ b) & [A+B,C] = [A,C] + [B,C] & \\ & [A,B+C] = [A,B] + [A,C] & \\ c) & [\alpha A, B] = \alpha[A,B] & \text{(bilinealidad)} \\ & [A, \beta B] = \beta[A,B] & \\ d) & [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0. & \text{(identidad de Jacobi)} \end{array}$$

Demostración: La demostración de *a* $\rightharpoondown$ *d)* se sigue de manera inmediata a partir de la definición del corchete $[,]$ y de las propiedades *i)*$\rightharpoondown$ *iv)* del producto usual de matrices.
En efecto,

$$\begin{array}{ll} a) & [A,B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B,A] \\ b) & [A+B,C] := (A+B)\cdot C - C\cdot(A+B) = AC + BC - CA - CB \\ & = (AC - CA) + (BC - CB) = [A,C] + [B,C] \\ c) & [\alpha A, B] = (\alpha A)\cdot B - B\cdot(\alpha A) \\ & = \alpha(A\cdot B) - \alpha(B\cdot A) \\ & = \alpha((A\cdot B) - (B\cdot A)) \\ & = \alpha[A,B]. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} d) & [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = [AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B] \\ & = (AB - BA)C - C(AB - BA) + (BC - CB)A - A(BC - CB) + (CA - AC)B - B(CA - AC) \\ & = ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB + CAB - ACB - BCA + BAC \\ & = 0 \end{array}$$

De esta manera, $(M_n(K), +, \cdot, [,])$ proporciona un ejemplo de un álgebra de Lie, de acuerdo a la siguiente definición.

Definición: **(Álgebra de Lie).** Un álgebra de Lie es un espacio vectorial $(V, +, \cdot)$ en el cual se ha definido una operación binaria

$$[,] : V \times V \longrightarrow V,$$

que satisface las siguientes condiciones:

i) Bilinealidad. $\forall x, y \in V, \forall a, b \in K$

$$[ax + by, z] = a[x,z] + b[y,z]$$

$$[x, ay + bz] = a[x,y] + b[x,z].$$

ii) Anticonmutativa. $\forall x, y \in V$

$$[x,y] = -[y,x].$$

iii) Identidad de Jacobi. $\forall x, y, z \in V$

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0.$$

Con el fin de introducir en el álgebra de Lie $M_n(K)$, una subálgebra importante para nuestros propósitos, recordamos los siguientes conceptos en el espacio $M_n(K)$.

Definición: Si $A \in M_n(K)$, que define la matriz transpuesta de A, denotada por A^t, como la matriz que se obtiene de A, cambiando las filas por las columnas:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{entonces} \quad A^t = (a_{ij}),$$

por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Las principales propiedades de la operación transpuesta quedan establecidas en la siguiente afirmación, que enunciamos sin demostración.

Proposición 4.2 *Si* $A, B \in M_n(K), \alpha \in K,$ *entonces*

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

4.4.1. En el mundo real

Un subconjunto especial de $M_n(\mathbb{R})$, lo constituye el conjunto de las matrices antisimétricas, concepto que pasamos a recordar.

Definición: Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se llama antisimétrica si se cumple

$$A^t = -A.$$

Teniendo en cuenta la proposición anterior, se deduce de manera inmediata la siguiente afirmación:
Si notamos por $SO(n)$, el conjunto,

$$SO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \diagup A^t = -A\},$$

resulta $SO(n)$ es un subespacio vectorial de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Mas aún, para $A, B \in SO(n)$

$$[A, B]^t = -[B, A],$$

en efecto,

$$\begin{aligned} [A, B]^t &= (AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t \\ &= B^t A^t - A^t B^t \\ &= (-B)(-A) - (-A)(-B) \\ &= BA - AB = [B, A] \\ &= -[A, B], \end{aligned}$$

de esta manera $SO(n)$ es cerrado para la operación corchete: [,]. Luego se tiene:

Proposición 4.3 *$SO(n)$ tiene una estructura de álgebra de Lie. En realidad, una subálgebra de Lie del álgebra de Lie $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, [,])$.*

Ahora bien, para el caso que nos interesa n=3, resulta $SO(3)$ es un álgebra de dimensión 3, de hecho el conjunto

$$\beta = \{A_1, A_2, A_3\},$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es una base para $SO(3)$.

Si definimos

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & SO(3) \\ (a,b,c) & \longrightarrow & f(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

podemos establecer, de manera directa, el siguiente resultado.

Proposición 4.4 *La aplicación f definida anteriormente es una función biyectiva. Más aún es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

De esta manera, la biyección f de la proposición, permite transportar al espacio $\mathbb{R}^3$, el producto (corchete) [,] de $SO(3)$; con mayor precisión:

Si $\overrightarrow{A} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{B} = (x_2, y_2, z_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^3$, y $A = f(\overrightarrow{A}), B = f(\overrightarrow{B})$, definimos

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} := f^{-1}\left([f(\overrightarrow{A}), f(\overrightarrow{B})]\right) = f^{-1}\left([A, B]\right)$$

Sean $\overrightarrow{A} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{B} = (x_2, y_2, z_2)$, así

$$f(\overrightarrow{A}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & -y_1 \\ x_1 & 0 & -z_1 \\ y_1 & z_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad f(\overrightarrow{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_2 & -y_2 \\ x_2 & 0 & -z_2 \\ y_2 & z_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\overrightarrow{A})f(\overrightarrow{B}) = \begin{bmatrix} -x_1x_2 - y_1y_2 & -y_1z_2 & x_1z_2 \\ -y_2z_1 & -x_1x_2 - z_1z_2 & -x_1y_2 \\ x_2z_1 & -x_2y_1 & -y_1y_2 - z_1z_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\overrightarrow{B})f(\overrightarrow{A}) = \begin{bmatrix} -x_1x_2 - y_1y_2 & -y_2z_1 & x_2z_1 \\ -y_1z_2 & -x_1x_2 - z_1z_2 & -x_2y_1 \\ x_1z_2 & -x_1y_2 & -y_1y_2 - z_1z_2 \end{bmatrix}$$

$$[f(\overrightarrow{A}), f(\overrightarrow{B})] = f(\overrightarrow{A})f(\overrightarrow{B}) - f(\overrightarrow{B})f(\overrightarrow{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -y_1z_2 + y_2z_1 & x_1z_2 - x_2z_1 \\ y_1z_2 - y_2z_1 & 0 & -x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 & -x_2y_1 + x_1y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} := f^{-1}([f(A), f(B)]) = (y_1z_2 - y_2z_1; -(x_1z_2 - x_2z_1); x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nota 4.1 *Con el fin de "aligerar" un poco la expresión anterior, notemos con C la matriz $f(\overrightarrow{C})$ y escribamos*

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \equiv_f [A, B].$$

Nota 4.2 *Observemos que de la matriz $f(\overrightarrow{A})f(\overrightarrow{B})$ se tiene,*

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = -\frac{1}{2}tr(f(\overrightarrow{A})f(\overrightarrow{B})) \equiv_f -\frac{1}{2}tr(A \cdot B).$$

Otra manera de definir el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$.

Nota 4.3 *Como una aplicación, mostremos que*

$$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} + (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) \times \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}) \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0},$$

en efecto, de acuerdo al convenio de notación dada en la nota 4.1*, se tiene*

$$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} \equiv [[A, B], C],$$

de esta manera,

$$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times \overrightarrow{C} + (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) \times \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}) \times \overrightarrow{B} = [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \equiv \overrightarrow{0},$$

de acuerdo a la parte d) de la proposición 4.1.

4.4.2. En el mundo imaginario

Notamos por $SU(2)$, el conjunto,

$$SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \diagup A + A^t = 0\}.$$

Primero veamos que si la matriz A pertenece al conjunto $SU(2)$, ésta debe tener la forma

$$A = \begin{pmatrix} xi & -y+zi \\ y+zi & -xi \end{pmatrix}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$.

En efecto, sea $A \in SU(2)$, como $trA = 0$, A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & -a-bi \end{pmatrix},$$

como $A + \overline{A}^t = 0$, entonces

$$\begin{aligned} A + \overline{A}^t &= \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & -a-bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & -a+bi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & (c+e)+(d-f)i \\ (e+c)+(f-d)i & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se concluye :

$$\begin{aligned} 2a = 0, \qquad &\text{de donde} \qquad a = 0 \\ c + e = 0 \qquad &\wedge \qquad d - f = 0 \\ c = -e \qquad &\wedge \qquad f = d. \end{aligned}$$

Asi,

$$A = \begin{pmatrix} bi & -e+fi \\ e+fi & -bi \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $dimSU(2) = 3$, en efecto $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ con,

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ & \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ & \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

es una base para el espacio $SU(2)$.

Si definimos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & SU(2) \\ (a, b, c) & \longrightarrow & \varphi(a, b, c) = \begin{pmatrix} ai & -b + ci \\ b + ci & -ai \end{pmatrix}. \end{array}$$

el siguiente resultado, que se establece de manera directa.

Proposición 4.5 *La aplicación φ es una función biyectiva. Más aún, φ resulta ser un isomorfismo de espacios vectoriales.*

De esta manera, la biyección φ, permite transportar al espacio $\mathbb{R}^3$, el producto (corchete) [,] de $SU(2)$; con mayor precisión:

Si $\overrightarrow{A} = (x, y, z), \overrightarrow{B} = (a, b, c)$ son elementos de $\mathbb{R}^3$, y $A = \varphi(\overrightarrow{A}), B = \varphi(\overrightarrow{B})$, definimos

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} := \varphi^{-1}\left([\varphi(\overrightarrow{A}), \varphi(\overrightarrow{B})]\right) = \varphi^{-1}\left([A, B]\right)$$

Sean

$$\overrightarrow{A} = (x, y, z) \longrightarrow \varphi(\overrightarrow{A}) = \begin{pmatrix} xi & -y + zi \\ & \\ y + zi & -xi \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B} = (a, b, c) \longrightarrow \varphi(\overrightarrow{B}) = \begin{pmatrix} ai & -b + ci \\ & \\ b + ci & -ai \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\overrightarrow{A})\varphi(\overrightarrow{B}) = \begin{bmatrix} -ax - by - cz + i(bz - cy) & -cx + az + i(ay - bx) \\ & \\ cx - az + i(ay - bx) & -ax - by - cz + i(cy - bz) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{B})\varphi(\overrightarrow{A}) = \begin{bmatrix} -ax - by - cz + i(cy - bz) & cx - az + i(bx - ay) \\ & \\ -cx + az + i(bx - ay) & -ax - by - cz + i(bz - cy) \end{bmatrix}$$

de donde,

$$-\frac{1}{2}\left[\varphi(\overrightarrow{A}),\varphi(\overrightarrow{B})\right]=\left[\begin{array}{cc}(cy-bz)i & (cx-az)+(bx-ay)i\\ \\ (-cx+az)+i(bx-ay) & (bz-cy)i\end{array}\right]$$

Nota 4.4 *Observemos que de la matriz* $\varphi(\overrightarrow{A})\varphi(\overrightarrow{B})$ *se tiene,*

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=-\frac{1}{2}tr\left(\varphi(\overrightarrow{A})\cdot\varphi(\overrightarrow{B})\right).$$

ó también

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= -\frac{1}{4}tr\left[\left(\varphi(\overrightarrow{A})\cdot\varphi(\overrightarrow{B})\right)+\left(\varphi(\overrightarrow{B})\cdot\varphi(\overrightarrow{A})\right)\right]\\ &\equiv -\frac{1}{4}tr\left(A\cdot B+B\cdot A\right),\end{aligned}$$

con $\varphi(\overrightarrow{A})=A$; $\quad\varphi(\overrightarrow{B})=B$.

4.5. Producto Vectorial en $\mathbb{R}^n$

4.5.1. Un primer acercamiento

Un objeto matemático, se define de acuerdo a las propiedades que se quiere tenga este objeto. Así, si observamos en $\mathbb{R}^3$, dados dos vectores $\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}$ se quiere definir un vector $\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}$ tal que:

i) $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}=0,\quad\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}=0.$

ii) $\parallel\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\parallel$ mida el área del paralelogramo formado por $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$.

iii) El conjunto $\{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}\}$ resulte un sistema positivamente ordenado, (es decir, satisfaga la ley de la mano derecha) en otras palabras que el

$$det(A,B,C)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}>0.$$

Se muestra que efectivamente

$$\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1),$$

satisface las propiedades *i)*, *ii)* y *iii)*.

Con lo anterior en mente, si se quiere definir un producto vectorial en $\mathbb{R}^2$, se debe pensar, en que este producto sea una operación $1-aria$.

$$\prod : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

que a un vector $\overrightarrow{A}=(x,y)$ le asigne $\overrightarrow{C}=(z,w)$ de modo que se cumplan propiedades análogas a *i)*, *ii)* y *iii)*.

i)

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}=(x,y)\cdot(z,w)=xz+yw=0. \qquad (1)$$

ii) $\quad \parallel \overrightarrow{C} \parallel = \sqrt{z^2+w^2}$, mide la "longitud" de $\overrightarrow{A}$, así

$$\parallel \overrightarrow{C} \parallel = \parallel \overrightarrow{A} \parallel \Leftrightarrow z^2+w^2=x^2+y^2, \qquad (2)$$

de (1) $z=-w\dfrac{y}{x}$, reemplazando en (2) se obtiene:

$$\frac{w^2y^2}{x^2}+w^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow w^2(x^2+y^2)=x^2(x^2+y^2),$$

de donde,

$w^2=x^2$, es decir, $w=\pm x$.

Así,

- Si $w_1=x$, entonces $z_1=-y$

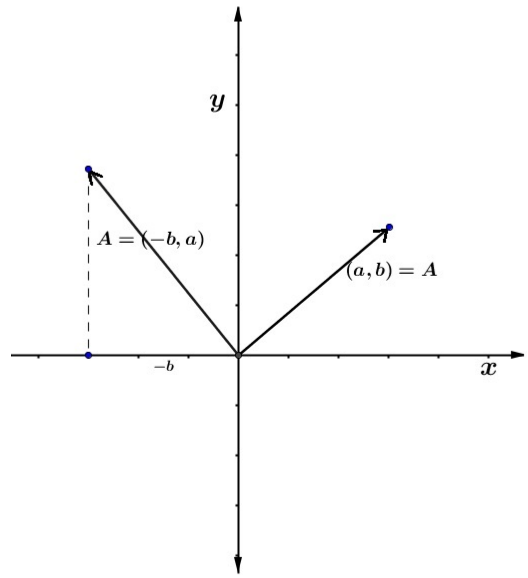
$$\begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x^2+y^2>0,$$

- Si $w_2=-x$, entonces $z_2=y$, pero

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix} = -x^2-y^2=-(x^2+y^2)\leqslant 0.$$

De esta manera,

$$X(x,y)=(z,w)=(-y,x).$$



Intuitivamente, se puede pensar que podemos definir un producto vectorial en $\mathbb{R}^n$, como una operación $(n-1) - aria$.

$$\begin{aligned} X : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(n-1) veces} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (V_1, V_2, \cdots V_{n-1}) \quad &\longrightarrow \quad V = \prod V_i, \end{aligned}$$

que verifique las propiedades:

i) $\quad V_i \cdot \prod V_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$

ii) $\quad \| \prod V_j \|$ mida el volumen del hipercubo formado por $V_1, V_2, \cdots V_{n-1}$.

iii) $\quad W = \prod V_j = (w_1, w_2, \cdots w_n),$

$$det \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{i-1} \\ w \end{pmatrix} > 0.$$

4.6. Producto Escalar + Producto Escalar = Producto Vectorial

4.6.1. Otra mirada al producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

En esta sección, se pretende obtener el producto vectorial usual, partiendo de dos productos escalares. Con mayor precisión, utilizamos los siguientes conceptos:

Definición 1: (*Producto interno usual*). Dados $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in \mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Definición 2: (*Producto "mixto"*). Dados $\overrightarrow{A} = (a_1, a_2, a_3), \overrightarrow{B} = (b_1, b_2, b_3), \overrightarrow{C} = (c_1, c_2, c_3)$, definimos el producto mixto, como el determinante

$$f(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Por las propiedades de los determinantes, se puede verificar que $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, es en efecto una aplicación tri-lineal; es decir, lineal en cada una de las componentes. En particular, tenemos que es válido el siguiente resultado.

Lema: Dados $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ vectores de $\mathbb{R}^3$, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Y & \longrightarrow & \phi(Y) = f(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{Y}), \end{array}$$

es una función lineal.

De esta manera, por el Lema de Representación de Riesz, existe un único vector $W \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\phi(Y) = W \cdot Y, \quad \forall \quad Y \in \mathbb{R}^3.$$

Este único vector W es el producto vectorial de $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$.

Observar que el W cuya existencia, y unicidad, se garantiza por el Teorema de Representación de Riezs, coincide con $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ definido anteriormente.

Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$

$$\phi(Y) = W \cdot Y \quad \forall y \in \mathbb{R}^3, \quad \text{en particular es valido} \quad Y = e_1, Y = e_2, \quad \text{ó} \quad Y = e_3$$

$$\phi(e_1) = W \cdot e_1 = (w_1, w_2, w_3) \cdot (1, 0, 0) = w_1$$

$$\phi(e_2) = w_2, \quad \phi(e_3) = w_3,$$

pero,

$$\phi(e_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = w_1 \qquad \phi(e_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = w_2$$

$$\phi(e_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = w_3.$$

De esta manera, $W = (w_1, w_2, w_3) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$,
luego, $W = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$.

4.6.2. Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

La anterior discusión, motiva la siguiente afirmación (*definición*) del producto vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Proposición: Sean $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, (n-1)$ vectores en $\mathbb{R}^n$, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Y &\longrightarrow \phi(Y) = det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n-1} \\ Y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un único vector $W \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\phi(Y) = W \cdot Y, \quad \forall \quad Y \in \mathbb{R}^n.$$

El vector W se llama el producto vectorial de $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$, y se nota

$$W = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} A_i.$$

Nota: Como se hizo en la sección 4.6.1, se puede observar que las componentes del vector $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ son precisamente

$$w_i = \phi(e_i), \quad \text{para} \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

donde $e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ es el $i - esimo$ vector coordenado. ⊛

Una regla "nemotécnica"para calcular el producto vectorial $V_1, V_2, \cdots, V_{n-1}$, es:

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{n-1} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-1} \\ e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_n \end{vmatrix},$$

desarrollando el anterior "determinante"por los menores de la última fila.

Ejemplo: Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Y = (y_1, y_2) &\longrightarrow \phi(Y) = \begin{vmatrix} a & b \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad \text{es lineal,} \end{aligned}$$

de acuerdo a lo anterior, el producto vectorial $XA = W = (\phi(e_1), \phi(e_2))$ pero,

$$\phi(e_1) = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b, \qquad \phi(e_2) = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a,$$

luego,

$$XA = (-b, a)$$

resultado que coincide con la expresión encontrada anteriormente.

4.7. Algunas aplicaciones

Usualmente, cuando un profesor introduce un tema, quizá la pregunta más recurrente de parte de sus estudiantes sea: profesor, ¿ y eso para que sirve?, ¿ para que sirve definir un producto vectorial en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4, \cdots$?. Con el fin de dar respuesta a éste tipo de inquietudes, ilustramos la "utilidad práctica "de estos conceptos en las siguientes situaciones.

4.7.1. Encontrar una base dual

Si V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$, una transformación lineal $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ se llama una funcional del espacio V. El espacio vectorial $\mathscr{L}(V; \mathbb{K})$ de funcionales de V en $\mathbb{K}$, se llama espacio dual y se acostumbra a notar por V^*. Si $\beta = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ es una base de V, y se define

$$f_i \quad : \quad V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{para} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad \text{mediante,}$$

$$f_i(V_j) \quad = \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

es sencillo verificar que $\beta^* = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ es una base de V^*. β^* se conoce como la base dual de β.

De acuerdo a lo anterior, para encontrar la base β^* a partir de la base dada β, es necesario resolver n sistemas de n ecuaciones, cada uno de los cuales contiene n incógnitas. El resultado que se enuncia y demuestra a continuación, nos muestra que es posible calcular la base β^* aplicando el producto vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.6 *Sean $X \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrario y $\beta = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^n$.*
Sean, para $1 \leqslant i \leqslant n$

$$W_i = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{i-1} \times \widehat{V_i} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_n.$$

(El simbolo $\widehat{\ }$ indica que se excluye este vector).

$$\begin{aligned} Z_i &= \left(\frac{1}{W_i \cdot V_i}\right) W_i, \\ f_i(X) &= Z_i \cdot X. \end{aligned}$$

Entonces, $\beta^* = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ es la base dual de β.

Demostración:
Veamos que el espacio generado por β^*, es $(\mathbb{R}^n)^*$.

Sea $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, y supongamos que

$$f(V_1) = a_1, f(V_2) = a_2, \cdots, f(V_n) = a_n,$$

con $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales.

Si $g \in (\mathbb{R}^n)^*$ definido por

$$g = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n,$$

entonces,

$$\begin{aligned} g(V_1) &= (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n)(V_1) \\ &= a_1 f_1(V_1) + a_2 f_2(V_1) + \cdots + a_n f_n(V_1) \\ &= a_1 \left(\frac{1}{W_1 \cdot V_1}\right) W_1 \cdot V_1 + a_2 \left(\frac{1}{W_2 \cdot V_2}\right) W_2 \cdot V_1 + \cdots + a_n \left(\frac{1}{W_n \cdot V_n}\right) W_n \cdot V_1 \\ &= a_1 + a_2(0) + \cdots + a_n(0) = a_1, \end{aligned}$$

de manera análoga se establece que, para $i = 2, 3, \cdots, n$,

$$g(V_i) = a_i.$$

Por lo tanto, $g(V_i) = f(V_i), 1 \leqslant i \leqslant n$, como β es una base de $\mathbb{R}^n$, se concluye que $g = f$, así

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n,$$

luego, $\beta^* = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ genera a $(\mathbb{R}^n)^*$.

A continuación, ilustramos la aplicación de la proposición anterior en el caso $n = 2$, para simplificar los cálculos.

Ejemplo: Consideremos la siguiente base de $\mathbb{R}^2 : \beta = \{V_1 = (1, 2), V_2 = (-1, 4)\}$.
Hallar la base dual $\beta^* = \{f_1, f_2\}$.

Solución 1: Presentamos primero la solución tradicional.

Se buscan funciones lineales f_1, f_2 de la forma

$$f_1(x, y) = ax + by; \quad f_2(x, y) = cx + dy,$$

con a, b, c, d por determinar.

Por definición de base dual, debe cumplirse que

$$f_1(V_1) = 1, \quad f_1(V_2) = 0; \quad f_2(V_1) = 0, \quad f_2(V_2) = 1,$$

luego,

$$\begin{aligned} f_1(V_1) &= f_1(1, 2) = a + 2b = 1, \\ f_1(V_2) &= f_1(-1, 4) = -a + 4b = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; se obtiene,

$$b = \frac{1}{6}, \quad a = \frac{2}{3},$$

luego,

$$f_1(x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y.$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} f_2(V_1) &= f_2(1, 2) = c + 2d = 0, \\ f_2(V_2) &= f_2(-1, 4) = -c + 4d = 1, \end{aligned}$$

de donde,

$$c = -\frac{1}{3}, \quad d = \frac{1}{6};$$

así,

$$f_2(x, y) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y.$$

Por lo tanto, la base dual es $\beta^* = \{f_1, f_2\}$.

Solución 2: Utilizamos la proposición anterior

$$W_1 = \prod V_2 = (-4, -1), \qquad W_2 = \prod V_1 = (-2, 1)$$

$$W_1 \cdot V_1 = -4 - 2 = -6, \qquad W_2 \cdot V_2 = 2 + 4 = 6$$

$$Z_1 = \left(\frac{1}{W_1 \cdot V_1}\right) W_1 = -\frac{1}{6}(-4, -1) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$$

$$Z_2 = \left(\frac{1}{W_2 \cdot V_2}\right) W_2 = \frac{1}{6}(-2, 1) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$$

$$f_1(x, y) = Z_1 \cdot (x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y$$

$$f_2(x, y) = Z_2 \cdot (x, y) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y.$$

4.7.2. Matriz de cambio de Base

Empecemos recordando al siguiente concepto.

Definición: Sean $\beta_1 = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ y $\beta_2 = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ dos bases de un espacio vectorial V.
Supongamos que

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + \cdots + a_{1n}V_n \\ U_2 & = & a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + \cdots + a_{2n}V_n \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_n & = & a_{n1}V_1 + a_{n2}V_2 + \cdots + a_{nn}V_n. \end{array}$$

Entonces la transpuesta $C_{\beta_1\beta_2}$ de la matriz de los coeficientes, se llama la matriz de cambio de base de la base β_1 a la base β_2; es decir,

$$C_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se demuestra en los cursos de álgebra lineal que si $v \in V$, y $[v]_{\beta_i}$ representa el vector de coordenadas de V con respecto a la base β_i, entonces

$$C_{\beta_1\beta_2}[v]_{\beta_2} = [v]_{\beta_1}.$$

Lo que nos indica como se afectan los vectores coordenados por un cambio de base.

De acuerdo a la definición anterior, para hallar la matriz de cambio de base, correspondiente a dos bases en $\mathbb{R}^n$ se requiere resolver n sistemas de ecuaciones cada uno de ellos con $n-$incógnitas. A continuación, enunciamos y probamos un teorema que permite encontrar esta matriz, como una aplicación del producto vectorial.

Proposición 4.7 *Sean $\beta_1 = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$, y $\beta_2 = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ dos bases en $\mathbb{R}^n$. $\beta_1^* = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ la base dual de β_1, $W_i, Z_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, como en la proposición 4.5. Entonces*

$$C_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} Z_1 \cdot U_1 & Z_1 \cdot U_2 & \cdots & Z_1 \cdot U_n \\ Z_2 \cdot U_1 & Z_2 \cdot U_2 & \cdots & Z_2 \cdot U_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ Z_n \cdot U_1 & Z_n \cdot U_2 & \cdots & Z_n \cdot U_n \end{bmatrix}.$$

Demostración:
Para cada $i \in 1, 2, \cdots, n$, existen escalares $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ tales que

$$U_i = a_{i1}V_1 + a_{i2}V_2 + \cdots + a_{in}V_n. \qquad (*)$$

Puesto que β_1^* es la base dual de β_1, entonces

$$f_i(V_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Así, $(*)$ se puede escribir

$$U_i = f_1(U_i)V_1 + f_2(U_i)V_2 + \cdots + f_n(U_i)V_n, \quad 1 \leq i \leq n$$

es decir,

$$\begin{array}{rcl}
U_1 & = & f_1(U_1)V_1 + f_2(U_1)V_2 + \cdots + f_n(U_1)V_n \\
U_2 & = & f_1(U_2)V_1 + f_2(U_2)V_2 + \cdots + f_n(U_2)V_n \\
. & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
. & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
. & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
U_n & = & f_1(U_n)V_1 + f_2(U_n)V_2 + \cdots + f_n(U_n)V_n,
\end{array}$$

con la notación de la proposición 4.5, de la sección 5.6.3

$$f_i(X) = Z_i \cdot X = \frac{W_i \cdot X}{W_i \cdot V_i},$$

entonces el arreglo anterior toma la forma

$$\begin{array}{rcl}
U_1 & = & (Z_1 \cdot U_1)V_1 + (Z_2 \cdot U_1)V_2 + \cdots + (Z_n \cdot U_1)V_n \\
U_2 & = & (Z_1 \cdot U_2)V_1 + (Z_2 \cdot U_2)V_2 + \cdots + (Z_n \cdot U_2)V_n \\
. & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
. & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
. & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
U_n & = & (Z_1 \cdot U_n)V_1 + (Z_2 \cdot U_n)V_2 + \cdots + (Z_n \cdot U_n)V_n,
\end{array}$$

finalmente, tomando la transpuesta de la matriz de los coeficientes, se obtiene

$$C_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix}
Z_1 \cdot U_1 & Z_1 \cdot U_2 & \cdots & Z_1 \cdot U_n \\
Z_2 \cdot U_1 & Z_2 \cdot U_2 & \cdots & Z_2 \cdot U_n \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
Z_n \cdot U_1 & Z_n \cdot U_2 & \cdots & Z_n \cdot U_n
\end{bmatrix},$$

con lo que queda probada la afirmación.

Como en la subsección anterior, ilustramos la aplicación de la proposición 4.6, para el cálculo de la matriz de cambio de base, en $\mathbb{R}^2$, dejando claro que es igualmente aplicable en el caso $\mathbb{R}^n$, es más, para n " grande"se puede apreciar mucho mejor la solución a este problema usando el producto vectorial que la solución " tradicional "que involucra, como ya se mencionó resolver $n-$sistemas de ecuaciones, cada sistema de orden $n \times n$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^4$, consideremos las bases,

$$\beta_1 = \{V_1 = (1,0,0,0), V_2 = (0,1,1,0), V_3 = (0,0,1,0), V_1 = (0,0,0,1)\}$$

y

$$\beta_2 = \{U_1 = (1,0,0,0), U_2 = (1,1,0,0), U_3 = (1,1,1,0), U_4 = (1,1,1,1)\}.$$

Hallar a matriz de cambio de base $C_{\beta_1\beta_2}$.

Solución
De la proposición 4.5 se tiene:

$$W_i = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{i-1} \times \widehat{V_i} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_n,$$

donde $\widehat{\ }$ indica que se excluye este vector.

$$W_1 = V_2 \times V_3 \times V_4 = \begin{vmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -e_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - e_3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + e_4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -e_1(1) + e_2(0) - e_3(0) + e_4(0) = -e_1. \end{aligned}$$

$$W_2 = V_1 \times V_3 \times V_4 = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_4 \\ e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

$$= -e_1(0) + e_2(1) - e_3(0) + e_4(0) = e_2.$$

$$W_3 = V_1 \times V_2 \times V_4 = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \\ e \end{vmatrix} = -e_1(0) + e_2(1) - e_3(1) + e_4(0) = e_2 - e_3.$$

$$W_4 = V_1 \times V_2 \times V_3 = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ e \end{vmatrix} = -e_1(0) + e_2(1) - e_3(1) + e_4(0) = e_4.$$

Nuevamente, de la proposición 4.5

$$Z_i = \left(\frac{1}{W_i \cdot V_i}\right) W_i, \qquad 1 \leq i \leq 4.$$

Como

$$W_1 \cdot V_1 = (-1, 0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0, 0) = -1,$$

entonces,

$$Z_1 = \left(\frac{1}{W_1 \cdot V_1}\right) W_1 = -W_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0).$$

Para

$$W_2 \cdot V_2 = (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 1, 0) = 1,$$

entonces,

$$Z_2 = \left(\frac{1}{W_2 \cdot V_2}\right) W_2 = W_2 = e_2 = (0, 1, 0, 0).$$

$W_3 = e_2 - e_3 = (0, 1, 0, 0) - (0, 0, 1, 0) = (0, 1, -1, 0).$

Así,

$$W_3 \cdot V_3 = (0, 1, -1, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = -1,$$

y como,

$$Z_3 = \left(\frac{1}{W_3 \cdot V_3}\right) W_3,$$

entonces

$$Z_3 = -W_3 = (0, -1, 1, 0).$$

Para

$$W_4 \cdot V_4 = (0, 0, 0, 1) \cdot (0, 0, 0, 1) = 1,$$

entonces,

$$Z_4 = \left(\frac{1}{W_4 \cdot V_4}\right) W_4 = W_4 = -e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Ahora hallaremos la matriz

$$C_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} Z_1 \cdot U_1 & Z_1 \cdot U_2 & Z_1 \cdot U_3 & Z_1 \cdot U_4 \\ Z_2 \cdot U_1 & Z_2 \cdot U_2 & Z_2 \cdot U_3 & Z_2 \cdot U_4 \\ Z_3 \cdot U_1 & Z_3 \cdot U_2 & Z_3 \cdot U_3 & Z_3 \cdot U_4 \\ Z_4 \cdot U_1 & Z_4 \cdot U_2 & Z_4 \cdot U_3 & Z_4 \cdot U_4 \end{bmatrix}$$

A continuación calcularemos los productos escalares que figuran en cada una de las entradas de la matriz anterior,

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot U_1 = (1,0,0,0)\cdot(1,0,0,0) &= 1 \\ Z_2 \cdot U_1 = (0,1,0,0)\cdot(1,0,0,0) &= 0 \\ Z_3 \cdot U_1 = (0,-1,1,0)\cdot(1,0,0,0) &= 0 \\ Z_4 \cdot U_1 = (0,0,0,-1)\cdot(1,0,0,0) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &Z_1 \cdot U_2 = (1,0,0,0)\cdot(1,1,0,0) = 1 \\ &Z_2 \cdot U_2 = (0,1,0,0)\cdot(1,1,0,0) = 1 \\ &Z_3 \cdot U_2 = (0,-1,1,0)\cdot(1,1,0,0) = -1 \\ &Z_4 \cdot U_2 = (0,0,0,-1)\cdot(1,1,0,0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot U_3 = (1,0,0,0)\cdot(1,1,1,0) &= 1 \\ Z_2 \cdot U_3 = (0,1,0,0)\cdot(1,1,1,0) &= 1 \\ Z_3 \cdot U_3 = (0,-1,1,0)\cdot(1,1,1,0) &= 0 \\ Z_4 \cdot U_3 = (0,0,0,-1)\cdot(1,1,1,0) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &Z_1 \cdot U_4 = (1,0,0,0)\cdot(1,1,1,1) = 1 \\ &Z_2 \cdot U_4 = (0,1,0,0)\cdot(1,1,1,1) = 1 \\ &Z_3 \cdot U_4 = (0,-1,1,0)\cdot(1,1,1,1) = 0 \\ &Z_4 \cdot U_4 = (0,0,0,1)\cdot(1,1,1,1) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C_{\beta_1\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.8. La Historia termina

"Todo tiene su final, nada dura para siempre .... "
Héctor Lavoe.

El propósito de esta última sección es entender, porque los autores de los textos consultados, afirman que el producto vectorial solo se define en $\mathbb{R}^3$.

Sea la operación binaria

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) &\longrightarrow \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades,

i) X es una operación bilineal.

ii) $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = 0, \quad \overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = 0.$

iii) $\|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\|^2 = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})^2 + \|\overrightarrow{A}\|^2 \|\overrightarrow{B}\|^2.$

Empezamos escribiendo $\mathbb{R}^{n+1}$, como una suma ortogonal directa:

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n,$$

esto es "miramos ün vector en $\mathbb{R}^{n+1}$ como una pareja

$$(\alpha, \overrightarrow{A}) \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}^n.$$

En el conjunto $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$, definimos la operación binaria $\odot$:

$$(\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (\beta, \overrightarrow{B}) = (\alpha\beta - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}; \alpha\overrightarrow{B} + \beta\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}). \tag{4.11}$$

Se tiene la siguiente proposición

Proposición 4.8 *La operación binaria $\odot$ cumple las siguientes propiedades:*

a) *$\odot$ es una aplicación bilineal.*

b) *La pareja $(1, \overrightarrow{0})$ es el elemento neutro de $\odot$.*

c) $\|(\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (\beta, \overrightarrow{B})\| = \|(\alpha, \overrightarrow{A})\| \|(\beta, \overrightarrow{B})\|.$

Demostración

a) Sean $(\alpha, \overrightarrow{A}), (\beta, \overrightarrow{B}), (\gamma, \overrightarrow{C})$, elementos de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$, y $a \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha, \overrightarrow{A}) \odot [(\beta, \overrightarrow{B}) + (\gamma, \overrightarrow{C})]$$

$$= (\alpha, \overrightarrow{A}) \odot [(\beta + \gamma, \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})]$$

$$= \Big(\alpha(\beta + \gamma) - \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}), \alpha(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) + (\beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{A} + A \times (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})\Big)$$

$$= \Big(\alpha\beta + \alpha\gamma - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}, \alpha\overrightarrow{B} + \alpha\overrightarrow{C} + \beta\overrightarrow{A} + \gamma\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}\Big), \tag{4.12}$$

$$(\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (\beta, \overrightarrow{B}) + (\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (\gamma, \overrightarrow{C})$$

$$= \left(\alpha\beta - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}, \alpha\overrightarrow{B} + \beta\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) + \left(\alpha\gamma - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}, \alpha\overrightarrow{C} + \gamma\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}\right)$$

$$= \left(\alpha\beta + \alpha\gamma - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}, \alpha\overrightarrow{B} + \alpha\overrightarrow{C} + \beta\overrightarrow{A} + \gamma\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}\right), \quad (4.13)$$

de (4.12) y (4.13) se concluye

$$(\alpha, \overrightarrow{A}) \odot [(\beta, \overrightarrow{B}) + (\gamma, \overrightarrow{C})] = (\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (\beta, \overrightarrow{B}) + (\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (\gamma, \overrightarrow{C}).$$

Análogamente, se muestra que

$$[a \cdot (\alpha, \overrightarrow{A})] \odot (\beta, \overrightarrow{B}) = \alpha[(\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (\beta, \overrightarrow{B})].$$

b)

$$\begin{aligned} (\alpha, \overrightarrow{A}) \odot (1, \overrightarrow{0}) &= (\alpha \cdot 1 - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{0}, \alpha \cdot \overrightarrow{0} + 1 \cdot \overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{0}) \\ &= (\alpha, \overrightarrow{A}), \end{aligned}$$

de manera similar se muestra que $(1, \overrightarrow{0}) + (\alpha, \overrightarrow{A}) = (\alpha, \overrightarrow{A})$.
Finalmente, veamos la prueba de ***c)***.

c) Primero observemos que si $(\gamma, \overrightarrow{C}) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \|(\gamma, \overrightarrow{C})\|^2 &= (\gamma, \overrightarrow{C}) \cdot (\gamma, \overrightarrow{C}) \\ &= \gamma^2 + C_1^2 + \ldots + C_n^2 = \gamma^2 + \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{C}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Utilizando (4.14), ***ii)***, ***iii)*** y las propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha,\overrightarrow{A})\odot(\beta,\overrightarrow{B})\|^2 &= \|(\alpha\beta-\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B},\alpha\overrightarrow{B}+\beta\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\|^2\\
&= (\alpha\beta-\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})^2+(\alpha\overrightarrow{B}+\beta\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\cdot(\alpha\overrightarrow{B}+\beta\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\\
&= \alpha^2\beta^2-2\alpha\beta\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})^2+\alpha^2|\overrightarrow{B}|^2+\alpha\beta\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\alpha\overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})+\alpha\overrightarrow{B}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\\
&+ \beta^2\|\overrightarrow{A}\|^2+\beta\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})+\alpha(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{B}+\beta(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{A}+\|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\|^2\\
&= \alpha^2\beta^2+\alpha^2\|\overrightarrow{B}\|^2+\beta^2\|\overrightarrow{A}\|^2+(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})^2+\|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\|^2\\
&= \alpha^2\left(\beta^2+\|\overrightarrow{B}\|^2\right)+\beta^2\|\overrightarrow{A}\|^2+\|\overrightarrow{A}\|^2\|\overrightarrow{B}\|^2\\
&= \alpha^2\|(\beta,\overrightarrow{B})\|^2+\|\overrightarrow{A}\|^2\left(\beta^2+\|\overrightarrow{B}\|^2\right)\\
&= \left(\alpha^2+\|\overrightarrow{A}\|^2\right)\|(\beta,\overrightarrow{B})\|^2\\
&= \|(\alpha,\overrightarrow{A})\|^2\|(\beta,\overrightarrow{B})\|^2.
\end{aligned}
$$

De donde se obtiene ***c)***.

A. Hurwitz, en **[10]** probó que si en $\mathbb{R}^q$, se define una operación binaria que satisface las propiedades ***a)***, ***b)*** y ***c)*** de la proposición anterior, entonces que debe ser $1, 2, 4$ ó 8 y por lo tanto la operación $\odot$ es isomorfa a la multiplicación de números reales, de números complejos, al producto de cuaterniones o a los octaniones.

De esta manera, el teorema de Hurwitz demuestra que las condiciones ***i)***, ***ii)*** y ***iii)*** caracteriza, salvo isomorfismos, el producto vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^7$.

Para una discusión más completa de lo hecho en esta sección, se puede consultar **[11]** dada en la Bibliografía.

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.1. Introducción

En la enseñanza de las matemáticas la resolución de problemas es una actividad considerada una parte muy importante. Prueba de ello, se puede observar en las siguientes afirmaciones:

• En 1968, George Pólya, afirmaba: *" se justifica que los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso ser considerados como la parte más esencial de la educación matemática".*

• El National Council of Teacher of Mathematics (N.C.T.M), como una organización preocupada por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ha venido destacando la importancia de considerar la resolución de problemas como el eje central de las matemáticas escolares. *Considera la resolución de problemas como una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar.* De esta manera, se concibe la solución de problemas como una parte integral de la educación matemática, fundamental para el aprendizaje de las matemáticas.

• El gran matemático Español, Luis Santaló señalaba: *" Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas".*

Finalmente,

• P. Halmos, uno de los más destacados matemáticos del siglo XX, afirmaba: *" La razón de ser de un matemático no es otra que la de resolver y proponer problemas, pues dicha actividad constituye el corazón de las matemáticas".*

El objetivo de este capítulo no es precisar que se entiende por un problema, ni tampoco presentar y desarrollar las diferentes estrategias que algunos matemáticos como pólya, Schoenfeld, ó Guzmán han propuesto, como " guía"para la solución de problemas en Matemáticas. En contraste de ello, y compartiendo la premisa según la cual, la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas, se han seleccionado algunos problemas, que se resuelven en las siguientes secciones; Problemas que nos han parecido interesantes y creemos se ajustan a la recomendación hecha por el gran matemático Alemán, David Hilbert:

"Un problema debe ser difícil para que nos seduzca, pero no inaccesible como para burlarse de nuestros esfuerzos ".

5.2. Problemas de la Gaceta.

La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, tiene una sección de " Problemas y soluciones", a cargo de Oscar Ciaurri R y José Luis Díaz B. En esta sección de la revista se publican 8 problemas y dejan un plazo de seis meses para recibir las soluciones propuestas.

• Del Volumen 18 N° 1 del 2015, se escogieron los problemas 269 y 271.

A continuación, presentamos la solución de éstos problemas.

Problema 269.

La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo ABC a partir de las longitudes de sus lados a, b y c, y del semiperímetro s mediante

$$\acute{A}rea\,(ABC) = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

a) Determinar fórmulas para el cálculo del área de un triángulo análogas a la de Herón en función de las longitudes de las medianas y en función de las longitudes de las alturas.

Solución. Denotando Δ el área del triángulo ABC, entonces

$$\Delta^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,, \text{ donde } s = \frac{a+b+c}{2}. \tag{5.1}$$

Reemplazando el valor de s y efectuando las operaciones indicadas se tiene:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[(b-a)^2 - c^2\right] \\
&= -\frac{1}{16}\left[(a+b)^2(b-a)^2 - c^2(a+b)^2 - c^2(b-a)^2 + c^4\right] \\
&= -\frac{1}{16}\left[\left(a^2-b^2\right)^2 - c^2\left[(a+b)^2 + (b-a)^2\right] + c^4\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2\right) - \left(a^4 + b^4 + c^4\right)\right],
\end{aligned}$$

así, finalmente

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right)\right]. \tag{5.2}$$

Nota 1. Cada uno de los pasos anteriores son reversibles, es decir; de una relación como la dada en (5.2) se puede deducir (5.1).

Medianas.

Si m_a, m_b y m_c representan las longitudes de las medianas del triángulo ABC correspondientes a los vértices A, B y C respectivamente, por el teorema de Apolonio sabemos que se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} 4m_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_b^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4m_c^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Al sumar miembro a miembro las tres igualdades dadas en (5.3) se obtiene,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right). \tag{5.4}$$

Elevando al cuadrado cada uno de los miembros de las igualdades en (5.4) y sumando miembro a miembro, se obtiene luego de simplificar

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{16}{9}\left(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4\right). \tag{5.5}$$

Reemplazando (5.4) y (5.5) en (5.2)

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{16}\left[\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right)\right] \\ \Delta^2 &= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)^2 - \frac{32}{9}\left(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4\right)\right] \\ \Delta^2 &= \frac{16}{9}\frac{1}{16}\left[\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)^2 - 2\left(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4\right)\right], \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la nota 1, se obtiene finalmente

$$\Delta^2 = \frac{16}{9}p\left(p - m_a\right)\left(p - m_b\right)\left(p - m_c\right), \text{ donde } p = \frac{m_a + m_b + m_c}{2},$$

es decir, que la fórmula de Herón para área triángulo ABC en función de sus medianas viene dada por

$$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{p\left(p - m_a\right)\left(p - m_b\right)\left(p - m_c\right)},$$

con $p = \frac{m_a+m_b+m_c}{2}$.

Alturas.

Si h_a, h_b y h_c son las longitudes de la alturas trazadas de los vértices A, B y C sobre lados BC, AC y AB respectivamente, y $\Delta = \acute{A}rea\,(ABC)$ entonces

$$a = \frac{2\Delta}{h_a}, \quad b = \frac{2\Delta}{h_b}, \quad c = \frac{2\Delta}{h_c},$$

reemplazando en (5.2)

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}\left[16\Delta^4\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right)^2 - 32\Delta^4\left(\frac{1}{h_a^4} + \frac{1}{h_b^4} + \frac{1}{h_c^4}\right)\right], \tag{5.6}$$

Si notamos por $H_a = \dfrac{1}{h_a}, H_b = \dfrac{1}{h_b}$ y $H_c = \dfrac{1}{h_c}$ de la relación (5.6) se obtiene

$$\frac{1}{\Delta^2} = 16 \times \frac{1}{16}\left[\left(H_a^2 + H_b^2 + H_c^2\right)^2 - 2\left(H_a^4 + H_b^4 + H_c^4\right)\right],$$

nuevamente por la nota 1, se puede concluir que

$$\frac{1}{\Delta^2} = 16q\left(q - H_a\right)\left(q - H_b\right)\left(q - H_c\right),$$

donde $q = \frac{H_a + H_b + H_c}{2}$.

Problema 271.

Sea $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ y $n \geq 2$ un número entero. Calcular el producto de matrices $B(2)\,B(3)\,...B(n)$.

Solución 1. La matriz

$$B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix},$$

tiene el polinomio característico

$$\det(B(x) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} x-\lambda & 1 \\ 1 & x-\lambda \end{pmatrix} = (x-\lambda)^2 - 1,$$

con lo que existen dos valores propios distintos $\lambda_1 = x-1$, $\lambda_1 = x+1$. Para encontrar los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = x-1$, resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto da

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $x_2 = -x_1$; con lo cual los autovectores correspondientes a λ_1 son

$$u_1 = t\ (1, -1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

De manera similar los vectores propios correspondientes a λ_2 son

$$u_2 = t\ (1, 1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Con $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, los vectores u_1, u_2 constituyen un conjunto ortonormal. Por consiguiente la matriz ortogonal

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonalizante para $B(x)$. Por un cálculo directo se tiene

$$B(x) = P \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} P^T = PD(x)\,P^T,$$

siendo P^T la matriz transpuesta de P.
De esta manera,

$$\begin{aligned} B(2)\,B(3)\,...B(n) &= \left(PD(2)\,P^T\right)\left(PD(3)\,P^T\right)...\left(PD(n)\,P^T\right) \\ &= PD(2)\,D(3)\,...D(n)\,P^T. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Pero

$$\begin{aligned} D(2)\,D(3)\ldots D(n) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2\cdots(n-2)\cdot(n-1) & 0 \\ 0 & 3\cdot 4\cdots n\cdot(n+1) \end{pmatrix} \\ &= (n-1)! \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

así, reemplazando en (5.7) y teniendo en cuenta la definición de la matriz P

$$B(2)\,B(3)\ldots B(n-1)\,B(n) = \frac{(n-1)!}{4} \begin{pmatrix} n^2+2n+2 & n^2+2n-2 \\ n^2+2n-2 & n^2+2n+2 \end{pmatrix}.$$

Solución 2.
Para $\alpha, \beta \in R$ y $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ consideremos la matriz

$$A(\alpha,\beta) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

De una parte

$$A(\alpha,\beta)\cdot B(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha x+\beta x+\alpha-\beta & \alpha x-\beta x+\alpha+\beta \\ \alpha x-\beta x+\alpha+\beta & \alpha x+\beta x+\alpha-\beta \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

de otra parte, haciendo uso de la definición de la matriz $A(\alpha,\beta)$ dada en (5.8)

$$A(\alpha(x+1),\beta(x-1)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha x+\beta x+\alpha-\beta & \alpha x-\beta x+\alpha+\beta \\ \alpha x-\beta x+\alpha+\beta & \alpha x+\beta x+\alpha-\beta \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

de (5.9) y (5.10) se concluye

$$A(\alpha,\beta)\cdot B(x) = A(\alpha(x+1),\beta(x-1)). \tag{5.11}$$

Tomando $\alpha=\beta=1, x=2$, de las relaciones (5.8), (5.11) y la definición de la matriz $B(x):$

$$A(1,1)\cdot B(2) = A(3,1)$$

$$B(2) = A(3,1),$$

multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por la matriz $B(x)$, teniendo en cuenta (5.11) con $\alpha=3, \beta=1, x=3$,

$$\begin{aligned} B(2)\cdot B(3) &= A(3,1)\cdot B(3) \\ &= A(3\cdot 4, 1\cdot 2) \end{aligned}$$

continuando de esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned}
B(2)\,B(3)\ldots B(n-1)\,B(n) &= A\left(\frac{(n+1)!}{2},(n-1)!\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{(n+1)!}{2}+(n-1)! & \frac{(n+1)!}{2}-(n-1)! \\ \frac{(n+1)!}{2}-(n-1)! & \frac{(n+1)!}{2}+(n-1)! \end{pmatrix}\\
&= \frac{(n-1)!}{2}\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2}+1 & \frac{n(n+1)}{2}-1 \\ \frac{n(n+1)}{2}-1 & \frac{n(n+1)}{2}+1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

así, finalmente

$$B(2)\,B(3)\ldots B(n-1)\,B(n) = \frac{(n-1)!}{4}\begin{pmatrix} n^2+2n+2 & n^2+2n-2 \\ n^2+2n-2 & n^2+2n+2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Revista escolar de la Olimpiada

De la publicación Revista escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, en su último número: Número 53 *(Julio-Diciembre 2015)* se seleccionó el problema 270. Presentamos la solución.

Problema 270.
Si a, b, c son las raíces de la ecuación

$$x^3+px^2+qx+r=1,$$

demostrar que

$$\left(a^3-1\right)\left(b^3-1\right)\left(c^3-1\right)=3pqr-p^3-q^3-r^3.$$

Solución:

En primer lugar veamos que para p, q, r números reales, se cumple

$$3pqr-p^3-q^3-r^3=-(p+q+r)\left(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp\right). \tag{5.12}$$

En efecto, Sea

$$D=\begin{vmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{vmatrix},$$

vamos a evaluar el determinante D de dos maneras

(i) Usando la regla de Sarrus:

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc} p & r & q & p & r \\ q & p & r & q & p \\ r & q & p & r & q \end{array}\right. = -3pqr+p^3+q^3+r^3.$$

(ii) Usando propiedades de los determinantes

$$D = \begin{vmatrix} p+q+r & r & q \\ p+q+r & p & r \\ p+q+r & q & p \end{vmatrix} = (p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 1 & p & r \\ 1 & q & p \end{vmatrix} = (p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 0 & p-r & r-q \\ 0 & q-r & p-q \end{vmatrix}$$
$$= (p+q+r)\begin{vmatrix} p-r & r-q \\ q-r & p-q \end{vmatrix} = (p+q+r)\left(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp\right),$$

De esta manera de (i) y (ii) se sigue la identidad (5.12).

Por otro lado, como a, b, c son las raíces de la ecuación

$$x^3 + px^2 + qx + r = 1,$$

por la fórmulas de Vieta , se tiene

$$\begin{aligned} p &= -(a+b+c), \\ q &= ab+ac+bc, \\ r &= 1-abc. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Así,

$$p+q+r = -(a+b+c) + ab + ac + bc + 1 - abc. \tag{5.14}$$

Si hacemos $a = 1$ en (5.14) se tiene que $p+q+r = 0$, luego $a-1$ es un factor de $p+q+r$; de manera análoga se establece que $b-1$ y $c-1$ son factores, por lo tanto

$$p+q+r = A\,(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\,. \tag{5.15}$$

Con el fín de determinar el valor de la constante A, tomamos $a = b = c = 2$, entonces de (5.14) y (5.15) se obtiene $A = -1$, luego

$$p+q+r = -\,(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\,. \tag{5.16}$$

Utilizando las expresiones para p, q, r dadas en (5.13), el segundo factor del lado derecho de (5.12) se transforma en

$$\begin{aligned} p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp &= c^2\left[1+(a+b)^2+a^2b^2+(a+b)-ab+ab\,(a+b)\right] \\ &\quad + c\left[1+(a+b)^2+a^2b^2+(a+b)-ab+ab\,(a+b)\right] \\ &\quad + 1\left[1+(a+b)^2+a^2b^2+(a+b)-ab+ab\,(a+b)\right] \\ &= \left[1+(a+b)^2+a^2b^2+(a+b)-ab+ab\,(a+b)\right]\left(1+c+c^2\right), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} 1+(a+b)^2+a^2b^2+(a+b)-ab+ab\,(a+b) &= 1+a^2+b^2+ab+a^2b^2+a+b+a^2b+ab^2 \\ &= a^2\left(1+b+b^2\right)+a\left(1+b+b^2\right)+1\left(1+b+b^2\right) \\ &= \left(1+b+b^2\right)\left(1+a+a^2\right), \end{aligned}$$

de esta manera

$$p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp = \left(1 + a + a^2\right)\left(1 + b + b^2\right)\left(1 + c + c^2\right), \tag{5.17}$$

luego de (5.12), (5.16) y (5.17) se tiene finalmente

$$\begin{aligned} 3pqr - p^3 - q^3 - r^3 &= (a-1)\left(1 + a + a^2\right)(b-1)\left(1 + b + b^2\right)(c-1)\left(1 + c + c^2\right) \\ &= \left(a^3 - 1\right)\left(b^3 - 1\right)\left(c^3 - 1\right). \end{aligned}$$

5.4. Olimpiada de Bulgaria.

El libro *" Mathematical Olympiads 1997-1998". Problems and solutions from around the Word;* publicado por The American Mathematics competitions; contiene las soluciones a los problemas de 34 competiciones regionales y nacionales. De la competencia nacional del año 1997 en Bulgaria, se seleccionó el número 2:

- Sea ABC un triángulo equilátero con área 7 y sean M, N puntos sobre los lados AB, AC respectivamente, tales que $AN = BM$. Sea O es el punto de intersección de BN y CM. Suponiendo que el triángulo BOC tiene área 2:

a) Pruebe que $\dfrac{MB}{AB}$ es igual a $\frac{1}{3}$ ó $\frac{2}{3}$.

b) Hallar el $\measuredangle AOB$.

La solución oficial que se presenta en el texto mencionado, utiliza elementos de geometría transformacional: rotaciones, reflexiones; además de usar el teorema de Menelao y ciertas propiedades de los cuadriláteros inscritos en una circunferencia, temas estos no usuales en los cursos básicos de Geometría.
A continuación se presenta la solución a este problema, usando para ello algunos elementos básicos de geometría analítica.

Solución. Consideremos el triángulo equilátero dado (ABC) dispuestos según la siguiente figura:

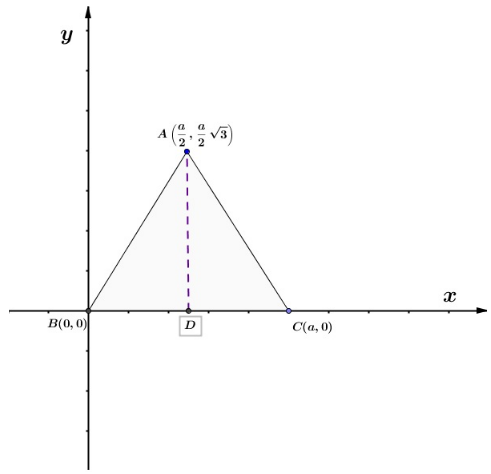
Como el ABC es equilátero, la altura $\overline{AD}$ es también mediatriz, por lo que la abscisa del punto A es $\frac{a}{2}$. Para determinar la ordenada de A, tenemos en cuenta que $\measuredangle ABC = 60°$ y por lo tanto

$$\tan 60° = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}},$$

luego

$$\overline{AD} = \overline{BD}\tan 60° = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

por lo tanto, las coordenadas de $A = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)$.



Como $\tan \measuredangle ABC = \tan 60° = \sqrt{3}$, la ecuación de la recta $\overrightarrow{AB}$ es:

$$y = \sqrt{3}x \tag{5.18}$$

Ecuación de la recta $\overrightarrow{AC}$.

La pendiente de $\overrightarrow{AC}$:

$$m_{AC} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3} - 0}{\frac{a}{2} - a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{-\frac{a}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, para la ecuación de la recta $\overrightarrow{AC}$, usando la fórmula punto-pendiente:

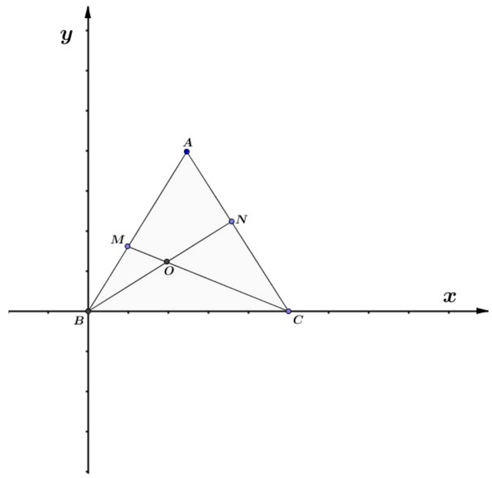
$$\begin{aligned} y - 0 &= m_{AC}(x - a) \\ y &= -\sqrt{3}(x - a) = -\sqrt{3}x + a\sqrt{3} \end{aligned} \tag{5.19}$$

El punto M está sobre el lado $\overline{AB}$ y teniendo en cuenta (5.18)

$$M = (b, b\sqrt{3}).$$

Teniendo en cuenta que N está sobre la recta $\overrightarrow{AC}$ y la ecuación (5.19), el punto N tiene la forma:

$$N = (c, \sqrt{3}a - \sqrt{3}c).$$



Por las condiciones del problema $BM = AN$, como

$$\begin{aligned}
\overline{BM}^2 &= b^2 + 3b^2 = 4b^2 \\
\overline{AN}^2 &= \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - (\sqrt{3}a - \sqrt{3}c)\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{4} - ac + c^2 + \left(\sqrt{3}c - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{4} - ac + c^2 + 3c^2 - 3ac + \frac{3a^2}{4} \\
\overline{AN}^2 &= a^2 - 4ac + 4c^2 = (a - 2c)^2,
\end{aligned}$$

entonces $4b^2 = (a - 2c)^2$, de donde

$$2b = a - 2c \qquad \text{ó} \qquad 2b = -a + 2c,$$

como $b \leqslant \frac{a}{2}$ y $c \leqslant a$, entonces

$$b = c - \frac{a}{2}. \tag{5.20}$$

Si el punto $O = (x_0, y_0)$ representa la intersección de las rectas $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{BN}$, las cuales tienen por ecuaciones, respectivamente

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{b\sqrt{3}}{b-a}(x-a) \\
y &= \frac{\sqrt{3}(a-c)}{c}x,
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

resolviendo el sistema dado en (5.21), obtenemos

$$
x_0 = \frac{abc}{bc+(a-b)(a-c)}, \qquad y_0 = \frac{\sqrt{3}ab(a-c)}{bc+(a-b)(a-c)}. \tag{5.22}
$$

Si (BOC) representa el área del $\triangle BOC$, por las condiciones del problema:

$$
(BOC) = 2 = \frac{ay_0}{2}, \quad \text{de donde} \quad y_0 = \frac{4}{a}. \tag{5.23}
$$

De las expresiones para y_0, dadas en (5.22) y (5.23) se tiene

$$
\frac{4}{a} = \frac{\sqrt{3}ab(a-c)}{bc+(a-b)(a-c)},
$$

es decir,

$$
4[bc+(a-b)(a-c)] = \sqrt{3}a^2b(a-c). \tag{5.24}
$$

Como el área del triángulo $(ABC) = 7$, entonces $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7$, esto es $a^2\sqrt{3} = 28$, y de (5.20) $c = b + \dfrac{a}{2}$.

Sustituyendo éstas dos últimas expresiones en (5.24) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
4\left[b\left(b+\frac{a}{2}\right)+(a-b)\left(a-b-\frac{a}{2}\right)\right] &= 28b\left(a-b-\frac{a}{2}\right) \\
b^2+\frac{ab}{2}+(a-b)\left(\frac{a}{2}-b\right) &= 7b\left(\frac{a}{2}-b\right) \\
b^2+\frac{ab}{2}+\frac{a^2}{2}-ab-\frac{ab}{2}+b^2 &= \frac{7}{2}ab-7b^2 \\
9b^2-\frac{9}{2}ab+\frac{a^2}{2} &= 0 \\
18b^2-9ab+a^2 &= 0 \\
18\left(\frac{b}{a}\right)^2-9\left(\frac{b}{a}\right)+1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Utilizando la fórmula cuadrática:

$$\frac{b}{a} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{36} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{36} = \frac{9 \pm 3}{36},$$

de donde,

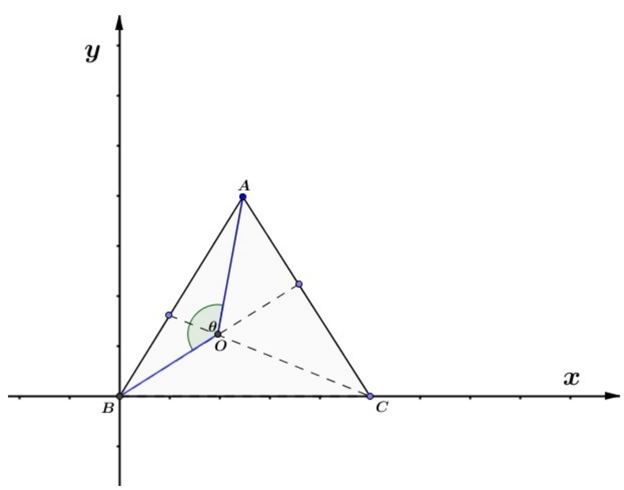
$$\frac{b}{a} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \qquad \text{ó} \qquad \frac{b}{a} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \tag{5.25}$$

como $\overline{BM}^2 = (2b)^2$ y $\overline{AB}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = a^2$, entonces

a) $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{2b}{a} = 2\left(\dfrac{b}{a}\right)$, de donde utilizando (5.25) se obtiene:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{2}{3} \qquad \text{ó} \qquad \frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}.$$

b) De (5.25) se tiene que $a = 6b$ ó $a = 3b$.



i) Si $a = 6b$. De (5.20), se tendrá $c = 4b$, de (5.23) $y_0 = \dfrac{4}{6b} = \dfrac{2}{3b}$, finalmente de (5.22) se obtiene que

$$x_0 = \frac{6bb4b}{4b^2 + (5b)(2b)} = \frac{24b^3}{14b^2} = \frac{17}{2}b, \qquad y_0 = \frac{6\sqrt{3}b}{7}.$$

De esta manera $O\left(\frac{17}{2}b, \frac{6\sqrt{3}b}{7}\right)$; $B(0,0), A(3b, 3\sqrt{3}b)$.

Si $\theta = \measuredangle AOB$, entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |OA||OB| \cos\theta \\
(A - O) \cdot (B - O) &= |OA||OB| \cos\theta \\
\left(\frac{9}{7}b, \frac{15\sqrt{3}b}{7}\right) \cdot \left(\frac{-12}{7}b, \frac{-6\sqrt{3}b}{7}\right) &= |OA||OB| \cos\theta \\
\frac{-378b^2}{49} &= \frac{\sqrt{756}b\sqrt{252}b}{49} \cos\theta
\end{aligned}$$

de donde $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, luego

$$\theta = \frac{5\pi}{6}.$$

ii) Si $a = 3b$ procediendo de manera análoga se muestra que

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

Referencias

[1] Stewart, J. *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* séptima edición, Cengage Learning editores, México., 2012.

[2] Boskoff, W.G., Suceava, B.D. *When Is Euler's Line Parallel to a Side of a Triangle?.* The College Mathematics Journal, Vol. 35, No. 4, 2004.

[3] Jiménez, M.J.A. *Una nueva función de densidad simétrica.* Comunicaciones en Estadística, Vol. 3, No. 2, Colombia., 2010.

[4] Spiegel, M., Lipschutz, S., Liu, J. *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables,* Tercera edición, McGraw-Hill Professional, USA., 2008.

[5] Stewart, J. *Cálculo Multivariable* cuarta edición, Thomson Learning editores, México., 2002.

[6] Abramowitz, M., Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables,* Dover Publications, Inc., New York., 1965.

[7] Purcell, E.J., Varberg, D., Rigdon, S. *Cálculo* novena edición, Pearson, México., 2007.

[8] Kolman, B., Hill,D.R. *Álgebra Lineal* octava edición, pearson, México., 2006.

[9] Marsden, J.E., Tromba, A.J. *Cálculo Vectorial* Quinta edición, Freeman y Company, Nueva York., 1991.

[10] Hurmitz, A. *Uber die komposition der Quadraticscher Forrmen von beliebig vielin variablen,* 1898, 309-316.

[11] Massey, J.W.S. *Cross Products of vectors in Higher dimensional Euclidean Spaces,* The American Mathematical Monthly, vol 90, N° 10(Dec 1983), pp.697-701.

[12] Ciaurri O.R., Díaz B.J.L. *Revista La Gaceta,* Real Sociedad Matemática Española, vol 18, N° 1 (2015).

[13] *Revista escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas,* Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, Bulgaria , 1997 - 1998.

[14] Massey, J.W.S. *Problems and solutions from around the Word,* The American Mathematics competitions, vol 90, N° 10(Dec 1983), pp.697-701.