

**CARACTERIZACIÓN DEL APRENDIZAJE DE POLÍGONOS USANDO UNA
INTERVENCIÓN MEDIADA POR GEOGEBRA**

JESSICA ANDREA CABALLERO DÍAZ

**UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL
PAMPLONA
2016**

**CARACTERIZACIÓN DEL APRENDIZAJE DE POLÍGONOS USANDO UNA
INTERVENCIÓN MEDIADA POR GEOGEBRA**

JESSICA ANDREA CABALLERO DÍAZ

Trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Pedagogía Infantil

Asesor

Dr. Élgar Gualdrón Pinto

**UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA INFANTIL
PAMPLONA
2016**

DEDICATORIA

*La presente memoria está dedicada a mi hijo **Nicolás Alejandro**, por ser la luz de mi vida, mi motivación, apoyo, fortaleza e inspiración para cumplir mis metas, por sus palabras, cariño y su eterno amor.*

*A mi madre, **Blanca Isbelia Díaz**, por los consejos, el apoyo y la perseverancia que la caracterizan, por el valor mostrado para salir adelante, el cual me ha permitido llegar hasta estas instancias; por su sacrificio, entrega y más que nada, por su eterno amor.*

*A mi padre, **José Benito Caballero**, por haberme apoyado en los momentos difíciles, por el interés, el orgullo y la felicidad que irradia al hablar de mí, por la motivación constante que me ha permitido salir adelante y por su eterno amor.*

AGRADECIMIENTOS

Primeramente doy gracias Dios por haberme permitido llegar a este punto de mi formación.

A mis padres por apoyarme con su paciencia, entrega y comprensión incondicional en todo mi proceso de formación profesional.

A cada uno de mis familiares que con su apoyo incondicional fueron parte importante de mi proceso.

A mi asesor de tesis, Dr. Élgar Gualdrón Pinto, por su esfuerzo, dedicación, consejos y su manera de trabajar. Su paciencia y su motivación fueron fundamentales para mi formación como investigadora.

CONTENIDO

RESUMEN -----	9
INTRODUCCIÓN -----	11
CAPÍTULO 1 -----	14
1. JUSTIFICACIÓN -----	14
CAPÍTULO 2 -----	17
2. OBJETIVOS -----	17
2.1. General -----	17
2.2. Específicos -----	17
CAPÍTULO 3 -----	18
3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA -----	18
3.1. Formulación de la pregunta de investigación -----	18
3.2. Descripción del problema de investigación -----	18
CAPÍTULO 4 -----	20
4. MARCO REFERENCIAL -----	20
4.1 Antecedentes -----	20
4.1.1. Internacional -----	20
4.1.2. Nacional -----	21
CAPÍTULO 5 -----	24
5. MARCO TEÓRICO -----	24
5.1. Modelo Teórico de Van Hiele -----	24
5.1. Constructo teórico Humanos- con- medios -----	29
5.3. Software de geometría dinámica Geogebra -----	32
5.4. El uso de los medios tecnológicos y el modelo teórico de Van hiele como estrategias de enseñanza y aprendizaje de polígonos. -----	33
CAPÍTULO 6 -----	36
6. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN -----	36
6.1. Enfoque -----	36
6.2. Nivel -----	36
6.3. Diseño -----	37
6.4. Población -----	37
6.5. Muestra -----	38
6.6. Técnica para la recolección de la información -----	38

6.7. Instrumento para la recolección de la información (Unidad de Enseñanza) -----	38
6.7.1. Descripción del taller N° 1 -----	41
6.7.2. Descripción de los talleres N° 2 y N° 3.-----	43
6.7.3. Descripción de los talleres N°4 y N°5 -----	49
6.7.4 Descripción de los talleres N°6 y N°7 -----	52
CAPITULO 7 -----	57
7. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES-----	57
CAPÍTULO 8 -----	83
8. CONCLUSIONES GLOBALES, LIMITACIONES E IMPLICACIONES -----	83
RECOMENDACIONES -----	87
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS -----	88
ANEXOS-----	91

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura N°1	57
Figura N°2	58
Figura N°3	58
Figura N° 4	59
Figura N°5	59
Figura N°6	60
Figura N°7	60
Figura N°8	61
Figura N°9	61
Figura N°10	62
Figura N°11	63
Figura N°12	63
Figura N°13	64
Figura N°14	64
Figura N°15	65
Figura N°16	65
Figura N° 17	66
Figura N°18	66
Figura N°19	67
Figura N°20	68
Figura N°21	68
Figura N°22	69
Figura N°23	70
Figura N°24	71
Figura N°25	72
Figura N°26	73
Figura N°27	74

Figura N°28	75
Figura N°29	76
Figura N°30	77
Figura N°31	77
Figura N°32	78
Figura N°33	78
Figura N°34	79
Figura N°35	79
Figura N°36	80
Figura N°37	80
Figura N°38	80

RESUMEN

En la presente investigación se busca caracterizar el aprendizaje de los polígonos basado en el modelo teórico de Van Hiele. Para lograr esto se diseña e implementa una unidad de enseñanza con las pautas de dos modelos, Humanos-con-Medios y el modelo teórico de Van Hiele. Esto permitió darle un aire innovador a la investigación dado que se implementó el software Geogebra como herramienta mediadora entre los dos modelos; por consiguiente se obtuvo una mejor caracterización del razonamiento de los estudiantes en el tema (polígonos). La metodología usada incluye un paradigma cualitativo, con un diseño de investigación acción participativa y en un nivel descriptivo. Se asumió como muestra el grupo de 5° del Instituto Técnico San Francisco De Asís sede José Antonio Galán de la ciudad de Pamplona, el cual consta de 30 estudiantes que oscilan entre 9 y 11 años de edad. El análisis de la información recogida (producciones de los estudiantes y diarios de campo de la investigadora) permite afirmar que un pequeño porcentaje de los estudiantes se encuentran en nivel 1 de razonamiento Van Hiele, con un manejo precario de las herramientas tecnológicas; la mayoría, se encuentra transitando al nivel 2, presentado un manejo adecuado del software y sus herramientas, y el porcentaje restante, en nivel 2 de razonamiento, con un manejo óptimo de las herramientas tecnológicas y las funciones del software. Dada la importancia del razonamiento visual en el aprendizaje de los polígonos, este estudio considera pertinente que los profesores al momento de diseñar sus planes tengan en cuenta que deben incluir actividades y mediaciones que motiven y agraden al estudiante.

Palabras claves: Razonamiento, caracterización, geometría, Geogebra, enseñanza, aprendizaje, polígono.

ABSTRACT

In this research seeks to characterize learning polygons based on the theoretical model of Van Hiele. To achieve this it is designed and implemented a unit of teaching guidelines two models, human-with-Media and the theoretical model of Van Hiele. This allowed air to give an innovative research since the Geogebra software tool as a mediator between the two models was implemented; therefore a better characterization of students' reasoning on the subject (polygons) was obtained. The methodology used includes a qualitative paradigm, with a design of participatory action research and a descriptive level. Group 5 of the Technical Institute San Francisco De Asís José Antonio Galán headquarters city of Pamplona, which consists of 30 students ranging between 9 and 11 years old, was assumed as a sample. The analysis of the information collected (student productions and field diaries of research) to suggest that a small percentage of students are at Level 1 Van Hiele reasoning, with poor management of technological tools; most is traveling to level 2, provided a proper management of software and tools, and the remaining percentage, level 2 reasoning, with optimal management of technological tools and software functions. Given the importance of visual reasoning in learning polygons, this study considers it appropriate that teachers when designing their plans take into account that should include activities and mediations that motivate and please the student.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación consiste en la caracterización del aprendizaje de los polígonos mediante la utilización del software Geogebra, bajo la luz del modelo teórico de Van Hiele, en los estudiantes de quinto grado del Instituto Técnico San Francisco de Asís sede José Antonio Galán de Pamplona. Se pretende realizar una descripción del razonamiento de los estudiantes en situaciones matemáticas presentadas mediante una unidad de enseñanza.

La inclinación por el estudio del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, y en específico de la geometría, surge al observar a lo largo de la experiencia formativa como docente por parte de la investigadora, las graves dificultades que presentan los estudiantes en el nivel educativo de primaria, al argumentar en cualquier situación geométrica. Los serios desatinos en el razonamiento dificultan el aprendizaje de otros conceptos y procesos geométricos frecuentes en el currículo del ya mencionado nivel educativo.

Una factible causa de lo indicado anteriormente es la transición de contenidos geométricos por parte de los docentes, sin profundizar ni estimular el razonamiento a través de la exploración. De acuerdo con lo anterior, la poca comprensión de los conceptos produce dificultades en el desempeño académico pues si no se utilizan los métodos y estrategias pertinente, los estudiantes no podrán construir un razonamiento geométrico adecuado, es decir expresar argumentaciones incompletas y no comprender significados, por lo tanto el estudiante no tiene la habilidad de conectar los temas vistos en la escuela con la realidad de su vida cotidiana.

Los principios planteados por la NCTM (2000) describe las características específicas para lograr una educación matemática de calidad. En reciprocidad con el currículo, uno de los apartados es la geometría y una de las nociones básicas que debería ocupar un lugar relevante, son las figuras geométricas, dentro de la cual se encuentran los polígonos.

Cabe señalar que para la enseñanza, la NCTM (2000) plantean que los docentes utilicen materiales curriculares y didácticos apropiados y que deberían comprometerse con una práctica reflexiva que permita la autoformación. En cuanto al aprendizaje, plantean, entre otros aspectos que la geometría, más que definiciones, es describir relaciones y razonar. Están de acuerdo con la idea de construir el conocimiento geométrico a través de los niveles de Van Hiele, desde el

pensamiento informal al más formal, reconocen la importancia de la visualización como medio para la construcción y manipulación mental de representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y también sugieren una enseñanza que enfatice la utilización de medios tecnológicos para la construcción de ideas matemáticas, lo que permite a los estudiantes no sólo aprender matemáticas sino también ser conscientes de las diferentes utilidades de los medios.

En el marco teórico existen dos aspectos importantes, el modelo teórico de Van Hiele y el constructo teórico Humanos-con-Medios. Estos junto al software de geometría dinámica Geogebra, fueron los pilares fundamentales para el diseño de la unidad de enseñanza y para la concreción de descriptores para el análisis de las producciones de los estudiantes.

En cuanto a la metodología, se usó el paradigma cualitativo, con un diseño de investigación acción participativa, en un nivel descriptivo. La técnica empleada es la observación y como instrumento de recolección de información, las actividades diseñadas que conforman la unidad de enseñanza.

El trabajo de investigación desarrollado permite contribuir a la tarea de clarificar las maneras de llevar a cabo la enseñanza y el aprendizaje de los polígonos.

Para concluir, se dará una breve mirada a la composición de esta investigación. En el capítulo 1 se encuentra la justificación de este proceso (se dan a conocer las razones por las cuales plantear la misma). En el capítulo 2 se presentan los objetivos de la investigación (como pilares importantes del estudio). En el capítulo 3 se observa el planteamiento del problema (el cual manifiesta la formulación de la pregunta de investigación y la descripción del problema de investigación). En el capítulo 4 se encuentra el marco referencial (el cual consta de estudios realizados de acuerdo al tema escogido a nivel nacional e internacional). En el capítulo 5 se visualiza el marco teórico (es la base de toda la investigación). En el capítulo 6 se enfoca en todo lo referente a la metodología utilizada para llevar a cabo la investigación. En el capítulo 7 se realiza el análisis de las producciones de los estudiantes (mostrando diversos ejemplos paradigmáticos que clarifican las conclusiones a las que ha llegado). En el capítulo 8 se presenta las conclusiones globales, limitaciones e implicaciones encontradas en el campo del razonamiento geométrico de los estudiantes en torno a los polígonos.

Este documento culmina con el anexo que recoge la unidad de enseñanza completa para el estudio.

CAPÍTULO 1

1. JUSTIFICACIÓN

Partiendo de que la enseñanza de la geometría en los primeros niveles académicos es fundamental para que el estudiante construya su razonamiento geométrico y lo pueda aplicar en la cotidianidad, es necesario implementar estrategias que contribuyan a su desarrollo. El docente debe reflexionar, tener en cuenta no solo se quiere enseñar, sino mirar ¿Por qué? ¿Para qué? y ¿Cómo va a enseñarlo?; esto no quiere decir que el docente tiene la autonomía de elegir o discriminar algunos temas; sino que debe basarse en los ejes que se tienen en cuenta como guías y orientaciones para el ordenado proceso educativo (Gualdrón, Giménez y Gutiérrez, 2012).

La construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial ofrecen vías para interpretar y describir entornos físicos y pueden construir herramientas importantes en la resolución de problemas (NCTM, 2000).

Como repuesta al anterior enunciado, la presente propuesta busca contribuir al desarrollo de algunos aspectos geométricos (polígonos), en especial su estructura, características y clasificación, para lo cual se pretende trabajar con la ayuda de las nuevas tecnologías. La visualización y el razonamiento espacial se enriquecen mediante la interacción con animaciones de ordenador y otros contextos tecnológicos (Clements 1997; Yates 1998).

Por lo anterior, este trabajo se enfatiza en una estrategia apropiada para el desarrollo del aprendizaje de los polígonos por medio del software Geogebra con los estudiantes de quinto grado del Instituto Técnico San Francisco de Asís, Sede José Antonio Galán de Pamplona¹, considerado el modelo teórico de Van Hiele; debido a que durante la práctica pedagógica se evidenciaron ciertas falencias en la ejecución de dichos procesos y es pertinente que tanto la institución como los docentes implementen nuevas estrategias

¹ A partir de este momento se concebirá el Instituto Técnico San Francisco de Asís sede José Antonio Galán como ITSFAJAG, por cuestiones de comodidad.

didácticas con las cuales puedan aumentar la participación y motivación de los estudiantes e ir a la vanguardia en los modelos educativos.

Este proyecto beneficiará, primero que todo, a los estudiantes ya que los llevará a explorar más sus conocimientos y fortalecer sus aprendizajes lógico-matemáticos; segundo, a los docentes, dado que evidenciarán un proyecto innovador el cual les ayudará a implementar nuevas estrategias pedagógicas en sus clases; en tercer lugar, a la institución, debido a que se le está dando un uso adecuado a los recursos de la institución en especial los medios tecnológicos.

La investigación en mención es pertinente ya que propone una metodología innovadora que contribuye al desarrollo de un objeto matemático de estudio como lo son los polígonos. Dicho proyecto será ejecutado específicamente en las aulas de informática de la institución con los estudiantes de quinto grado, dado que se necesita de estos medios para trabajar el software y generar ambientes de educación adecuados y productivos para desarrollar el pensamiento geométrico en los infantes.

Por consiguiente, es adecuado un trabajo con el software Geogebra, el cual permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático. Este software es una manera diferente de concebir la enseñanza de la geometría. Según Borba y Villarreal (2005), las herramientas influyen y reorganizan la manera en la que los humanos conocen y producen conocimiento. Así mismo, las actividades para este estudio serán diseñadas de manera didáctica bajo la luz del modelo teórico de Van Hiele.

El constructo Humanos con Medios, (Borba y Villarreal, 2005), en su tesis central, expone que “El conocimiento es siempre producido por un colectivo de humanos con medios”. Lo cual permite tener una mirada diferente sobre como los humanos construimos nuestros conocimientos a partir de los medios del entorno, por lo tanto se considera este postulado como parte fundamental de este trabajo.

A manera de conclusión, se espera que el trabajo con este medio sea innovador, eficiente, claro y acorde al nivel educativo de los infantes para así lograr una comprensión adecuada del tema de polígonos y contribuir al óptimo desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes debido a que: La enseñanza de la geometría genera en el

ámbito educativo la necesidad de responder el papel que desempeña en la vida diaria, permitiendo crear un conocimiento geométrico básico (Gualdrón y Gutiérrez, 2014).

Por lo anterior, se espera que los docentes comprendan la importancia de implementar nuevos métodos didácticos y utilicen de manera adecuada los medios que poseen en las instituciones, para así lograr aprendizajes significativos en los educandos.

CAPÍTULO 2

2. OBJETIVOS

2.1. General

Caracterizar el aprendizaje de los estudiantes de quinto grado del ITSFAJAG usando una intervención mediada por el software Geogebra, considerando el modelo teórico de Van Hiele.

2.2. Específicos

- Diseñar actividades para la enseñanza de polígonos en los estudiantes de quinto grado del ITSFAJAG, usando el software Geogebra y el modelo teórico de Van Hiele.
- Determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes de quinto grado del ITSFAJAG, sobre el concepto de polígono, teniendo en cuenta el modelo teórico de Van Hiele.

CAPÍTULO 3

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

3.1. Formulación de la pregunta de investigación

¿De qué manera el software Geogebra contribuye al aprendizaje de polígonos en los estudiantes de quinto grado del ITSFAJAG, considerando el modelo teórico de Van Hiele?

3.2. Descripción del problema de investigación

La Geometría es más que definiciones, es describir relaciones y razonar (NCTM, 2000). Es por ello que ha sido considerada como parte central para el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del razonamiento en los estudiantes. Según el MEN (1998), la geometría “constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación”. Lo cual hace que los estudiantes estén en contacto con su entorno y creen su conocimiento teniendo en cuenta los medios que el contexto le pueda facilitar.

El aprendizaje de la geometría es clave para desarrollar el pensamiento espacial en los niños, debe ser primordial en los niveles iniciales, además debe ser dinámico, creativo y conciso (Gualdrón, 2011). Esto permitirá una mejor comprensión de las demás áreas del saber y la vida cotidiana dado que se tendrá la capacidad de razonar y crear soluciones.

Uno de los temas relevantes de la geometría, en la Educación Primaria, es el concepto de polígono; considerado este como una figura geométrica plana compuesta por una línea poligonal cerrada, en la cual se distinguen: lados, vértices y ángulos.

Todo lo anterior se encuentra estipulado en documentos oficiales de la educación matemática colombiana (por ejemplo MEN, 1998) y posturas internacionales (por ejemplo NCTM, 2000), lo cual debería ser tenido en cuenta por los docentes al realizar sus clases de geometría. Durante mi² proceso de formación, concretamente en las prácticas pedagógicas, se pudo evidenciar que los profesores en ejercicio no le dan importancia a la enseñanza de la geometría, en especial los polígonos, debido probablemente a que se trabajan de manera

² En este caso es inevitable escribir en primera persona dado que las circunstancias lo ameritan.

superficial, memorística e irreflexiva; lo que ocasiona un aprendizaje trivial, por parte de los estudiantes, que se ve reflejado en un bajo desempeño.

A nivel internacional en las pruebas PISA Y TIMSS se tiene un panorama no muy alentador sobre la evaluación en matemáticas para Colombia, al igual que a nivel nacional con las pruebas SABER, en las cuales se evidencia que especialmente el componente geométrico incide en gran medida, en los resultados generales del área y, por tanto, en la calificación nacional trascendiendo hasta el nivel internacional (Cedeño, 2011).

Considerando la postura anterior, es fundamental ayudar al estudiante a construir sus conocimientos de una manera en la cual pueda razonar y estimular sus capacidades cognitivas. Por esta razón, se considera que la enseñanza de los polígonos, unificada con los medios del contexto, permite al estudiante comprender los contenidos para lograr un adecuado razonamiento geométrico, lo cual le ayudará a estimular su pensamiento y dar una resolución a problemas (Gutiérrez y Jaime, 1998).

Debido a la búsqueda de una nueva estrategia para la enseñanza de la geometría, este proyecto de investigación se fundamenta en la aplicación de un software de geometría dinámica (Geogebra), teniendo en cuenta el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele (Gualdrón, 2011) y el constructo Humanos Con Medios (Borba y Villarreal, 2005); los cuales complementan la relación entre la tecnología y la educación, proporcionan un sentido para realizar una propuesta innovadora que permita la enseñanza de los polígonos de una manera diferente, para que así los estudiantes puedan desarrollar un aprendizaje significativo y participen activamente del proceso enseñanza-aprendizaje.

En conclusión, este proyecto de investigación hace énfasis en la enseñanza y el aprendizaje de los polígonos utilizando medios tecnológicos que permitan a los estudiantes participar activamente en las clases y generar unas posturas críticas, lógicas y adecuadas, que les permitan mejorar su desempeño académico.

CAPÍTULO 4

4. MARCO REFERENCIAL

4.1 Antecedentes

Para dar comienzo a este capítulo, es necesario aclarar que, después de realizar un barrido en la búsqueda de estudios que traten el problema que se aborda en esta investigación (y que conjuntamente usen como marco teórico el Modelo teórico de Van Hiele y H.C.M), no se encontró ninguno; por tal motivo, se dan a conocer tres estudios que tuvieron en cuenta en su marco teórico el Modelo teórico de Van Hiele y el constructo humanos con medios. Se menciona uno a nivel internacional y dos a nivel nacional.

4.1.1. Internacional

➤ Un trabajo desarrollado por William Burger y Michael Shaughnessy, y publicado en 1986 por la revista *Journal for Research in Mathematics Education*, tiene como título “Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry”. Este trabajo contiene una clara y precisa descripción de los niveles de Van Hiele de razonamiento geométrico, para los conceptos de triángulo y cuadrilátero; fue un estudio con 13 estudiantes de los grados de primero a undécimo y un estudiante de universidad. El objetivo de este trabajo fue conseguir una caracterización adecuada y clara acerca de los niveles de Van Hiele en los polígonos; para lograr este, se necesitaron tres años de investigación en los que se planteó el proyecto y la implementación del mismo para dar con dicha caracterización. Todas las actividades fueron presentadas a los estudiantes en diferentes momentos y se plantearon tareas como: dibujos de formas, identificación y definición de formas, ordenación de formas, determinación de una forma misteriosa, establecimiento de propiedades de paralelogramos y comparación de componentes de un sistema matemático.

Las actividades requerían de los dos razonamientos, el informal y el formal, sobre las formas geométricas. Las actividades fueron diseñadas para reflejar las descripciones de los niveles Van Hiele que estaban disponibles en la literatura y para incorporar algunas de las ideas de las actividades que Dina Van Hiele había realizado con sus propios estudiantes en su investigación. En el estudio clínico se entrevistó en

profundidad a los estudiantes sobre los conceptos de triángulo y cuadrilátero. Fueron cuatro los entrevistadores y tres los investigadores que dirigieron y analizaron los datos de las entrevistas. Se produjeron algunos desacuerdos entre los investigadores, aunque muchos se mitigaron cuando se aclararon los datos confusos. Los resultados de este estudio son descriptivos, revelando aspectos de los procesos cognitivos de los estudiantes en las actividades, pero dicen poco de los esfuerzos específicos para perfeccionar los propios procesos.

Las conclusiones a las que se llegaron están relacionadas con el logro de la descripción de los procesos de pensamiento de los estudiantes, teniendo en cuenta el modelo de Van Hiele y una caracterización del mismo modelo, por medio de la conducta del estudiante.

También se dieron cuenta que se necesitan largos periodos de tiempo para el establecimiento de conceptos acerca de la geometría, requiriendo instrucciones determinadas; todo esto, debido a que ciertos estudiantes proporcionaron nociones incompletas acerca de figuras geométricas básicas y sus propiedades, y finalizan diciendo que los estudiantes razonan en los niveles, usando diferentes lenguajes y diversos procesos de resolución de problemas en las actividades propuestas.

4.1.2. Nacional

➤ El otro titulado “Humans-with-Media en una producción de conocimiento matemático. El caso de Geogebra”, publicado en el año 2011, por Jhony Alexander Villa-Ochoa y Marcelo C. Borba en el 12° *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Los autores utilizan el constructo teórico Humans-with-Media para analizar una situación construida con el software Geogebra para aproximarse a la comprensión de la derivada como una función; se desarrolló una herramienta en el software con la cual se podía calcular una extensión del mecanismo de “triángulo” para analizar la tasa de variación. Dicha herramienta implementada consiste en usar una secuencia de triángulos y sus respectivos valores de la tasa de variación para analizar la manera cómo cambia la tasa de variación en una gráfica cartesiana.

Así mismo, la aplicación de este software demostró que las estrategias planteadas contribuyeron a mejorar la visualización de otras relaciones y así tener una mejor utilización de las herramientas.

Para concluir, los autores hacen énfasis en que la enseñanza a través de un software o medios tecnológicos no es algo fácil, sino por el contrario, es algo complejo al momento de desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje. Pero aun así, afirman que los medios tecnológicos son una manera de redimensionar la manera de producir conocimiento matemático en las aulas de clase debido a que los medios hacen parte de nuestra naturaleza y de esa manera el proceso de aprendizaje se debe realizar a través de un equipo de humanos y medios.

➤ Otro trabajo, denominado “Análisis de la comprensión de polígonos basado en el modelo teórico de Van Hiele”, El cual fue desarrollado por Tania Flórez, Maura Quintero y Yanith Villarreal, en la Universidad de Pamplona (Colombia). El objetivo era analizar la comprensión de polígonos en estudiantes de tercer grado, basado en el Modelo teórico de Van Hiele y la Enseñanza para la comprensión (EpC). Para lograr esto, se diseñó e implementó una unidad de enseñanza con pautas de dos modelos, la enseñanza para la comprensión (EpC) y el modelo teórico de Van Hiele. La aplicación de esta unidad permitió a las investigadoras describir los procesos de razonamiento geométrico de los estudiantes en un tema específico como lo fueron los polígonos; teniendo en cuenta una serie de descriptores planteados previamente y el análisis de la información obtenida, las autoras llegaron a la conclusión de que un pequeño porcentaje de los estudiantes se encontraba en el nivel 1 de razonamiento Van Hiele, con una comprensión ingenua, mientras que la mayoría se encontraba transitando al nivel 2, con una comprensión de novatos, y el porcentaje restante se ubicó en el nivel 2 de razonamiento, adquiriendo la comprensión de aprendiz.

Para concluir, las autoras plantean que este estudio presenta una mirada diferente sobre la enseñanza de la geometría ya que su naturaleza es didáctica, innovadora y participativa. Por ende, presentó espacios propicios para la implementación y desarrollo de las actividades lo cual arrojó muy buenos resultados

en cuanto al razonamiento geométrico de los estudiantes y se pudo analizar el nivel de razonamiento de cada uno de ellos.

CAPÍTULO 5

5. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se estipula todo lo concerniente con las teorías de apoyo para lograr una caracterización del aprendizaje de polígonos, usando una intervención mediada por *Geogebra*; por tal motivo se considera fundamental dos teorías y un software de geometría dinámica: El modelo teórico de Van Hiele, el constructo humanos con medios y el software Geogebra.

Las teorías mencionadas anteriormente permitirán orientar el estudio que se comenzó, el cual se enfatiza en la caracterización de los polígonos.

5.1. Modelo Teórico de Van Hiele

El propósito de este apartado es dar a conocer, de manera más profunda, el modelo teórico de Van hiele, mediante la reseña de algunos autores, para así tomar como referencia todo lo concerniente a este. Esta descripción se centra en los dos momentos de la enseñanza de la geometría inmersos en este modelo, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

Los profesores holandeses de matemáticas de secundaria Pierre Marie y Dina Van Hiele-Geldof, en sus tesis doctorales, presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Van Hiele, 1957) y una aplicación concreta del modelo en algunos cursos de geometría (Van Hiele-Geldof. 1957). La estructura de este modelo está basada en la idea central “de que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento que son secuenciales, ordenados y de tal manera que no se puede saltar ninguno” (Jaime, 1993). Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de reconocerlos, definirlos, clasificarlos, y realizar demostraciones (Jaime, 1993). Según los Van Hiele, los estudiantes, ayudados por unas experiencias guiadas apropiadas, diseñadas de acuerdo a las fases de aprendizaje definidas por el modelo, van alcanzando ordenadamente cinco niveles de razonamiento geométrico (Gualdrón, 2011).

El modelo de Van Hiele tiene dos partes, una de las cuales es la descripción del razonamiento matemático y la otra la prescripción de cómo enseñarlo. La parte *descriptiva* identifica una secuencia de tipos de razonamiento (“niveles de razonamiento”), a través de los

cuales progresa el razonamiento geométrico de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo. La parte instructiva sugiere a los profesores pautas (“fases de aprendizaje”) sobre cómo ayudar a los estudiantes a avanzar en su nivel de razonamiento geométrico.

Las principales propiedades del modelo, las cuales permiten ampliar el entendimiento del modelo en la enseñanza de la geometría, se presentan a continuación, siguiendo a Cabanne y Ribaya (2009).

- **Recursividad:** Es imposible encarar un nivel o fase si no se trabajó suficientemente el anterior.
- **Secuencialidad:** El orden es secuencial y no se puede alterar. El nivel 4 se alcanza solo si se superaron los tres anteriores.
- **Especificidad en el lenguaje:** Cada nivel tiene un lenguaje propio.
- **Continuidad:** El desarrollo es continuo y pausado. El paso (del 3 al 4) puede durar varios años.
- **Localidad:** Cada persona puede tener un nivel distinto.

Niveles de razonamiento

Los niveles de razonamiento han sufrido algunos cambios desde su aparición (Pegg y Davey, 1998). Lo anterior, puesto que las ideas del propio Van Hiele evolucionaron, desde su propia manera, se enumeran los niveles de razonamiento desde el nivel 0 al 4 y, en otras publicaciones, se muestra una totalmente diferente, desde el nivel 1 al 5. Con estas indicaciones, y para mayor comodidad, se ha decidido tomar los niveles de 1 a 5, al mismo tiempo que se ha prescindido, para el estudio, de los dos últimos niveles, pues, en muchos estudios se ha sugerido que los educandos en el ámbito escolar de educación Básica Primaria, no superan los tres primeros niveles.

De manera concreta, se dará a conocer los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele específicos para los polígonos siguiendo a Burger y Shaughessy (1986). Cabe aclarar que

dichos descriptores específicos solo se trabajarán en los niveles 1 y 2 debido a la escolaridad de los educandos y el objeto de estudio de este trabajo.

Nivel 1: visualización

Los estudiantes en este nivel realizan las siguientes labores:

1. Uso de propiedades imprecisas (cualidades) para comparar dibujos e identificar, características y clasificar figuras.
2. Referencias a prototipos visuales para caracterizar figuras.
3. Inclusión de atributos irrelevantes al identificar y describir figuras, tales como la orientación de la figura en la hoja.
4. Incapacidad para concebir una variedad infinita de tipos de figuras.
5. Clasificaciones inconscientes; es decir, clasificaciones que no poseen todas las figuras seleccionadas.
6. Incapacidad para usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura; por ejemplo, adivinar la figura en la actividad de la figura misteriosa después de pocas pistas como si las pistas provocaran una imagen visual.

Nivel 2: Análisis

Los estudiantes en este nivel realizan las siguientes labores:

1. Comparar figuras explícitamente por medio de propiedades de sus componentes.
2. Prohibir inclusiones de clases entre los tipos generales de figuras, tales como cuadriláteros.
3. Clasificar por atributos simples, tales como propiedades de los lados, mientras descuidan ángulos, simetrías, etc.
4. Aplicar una letanía de propiedades necesarias en lugar de determinar propiedades suficientes cuando identifican figuras, explican identificaciones y se deciden por una misteriosa.
5. Descripciones de tipos de figuras mediante uso explícito de sus propiedades más que por los nombres de los tipos, incluso si los conocen. Por ejemplo, en lugar de

rectángulo, se puede mencionar la figura como cuadrilátero con otros ángulos rectos.

6. Rechazo explícito de las definiciones de figuras de los libros de texto en favor de la caracterización personal.
7. Tratamiento de la geometría como física cuando se comprueba la validez de una proposición; por ejemplo, contando con una variedad de dibujos y haciendo observaciones sobre ellos.
8. Carencia explícita de comprensión de la prueba matemática.

Nivel 3: Deducción informal

Los estudiantes en este nivel realizan las siguientes labores:

1. Formación de definiciones completas de tipos de figuras.
2. Habilidad para modificar definiciones y aceptar y usar inmediatamente definiciones de nuevos conceptos.
3. Referencias explícitas a las definiciones.
4. Habilidad para aceptar formas equivalentes de definiciones.
5. Aceptación de la ordenación parcial lógica entre tipos de figuras, incluyendo inclusiones de clases.
6. Habilidad para clasificar figuras conforme a una variedad de atributos matemáticamente precisos.
7. Uso explícito de enunciados “si, entonces”.
8. Habilidad para formar correctamente argumentos deductivos informales, cuanto implícitamente formas lógicas como la regla de la cadena (si p implica q y q implica r , entonces p implica r) y la ley de separación (modus ponens).
9. Confusión entre los papeles de axioma y teorema.

Nivel 4: Deducción formal

En este nivel el estudiante:

1. Clasificación de cuestiones ambiguas y reformulación de problemas en un lenguaje preciso.
2. Conjeturas frecuentes e intentos de verificar conjeturas deductivamente.
3. Confianza en la demostración como autoridad final para decidir la verdad de una proposición matemática.
4. Comprensión de los papeles de los componentes en un discurso matemático, tales como axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones.
5. Aceptación implícita de los postulados de la geometría euclídea.

Fases de aprendizaje

Las fases de aprendizaje son pautas para que los profesores guíen a sus estudiantes en el desarrollo y mejoramiento, es decir, para cada uno, el profesor diseña la instrucción teniendo en cuenta las fases desde la primera hasta la última. Se pueden alcanzar niveles más altos si se consiguen las experiencias correctas.

A continuación, se dará a conocer, de manera concisa, siguiendo líneas de Gualdrón (2011), la descripción de las fases:

Fase 1: Información

El profesor en esta fase dialoga con los estudiantes y les informa del tema que van a desarrollar, los objetivos de estudio y las actividades que planea desarrollar. También, el profesor tendrá la oportunidad de enterarse de los conocimientos previos que tienen los estudiantes que son pertinentes para el desarrollo del nuevo, además los estudiantes conocerán la futura dirección a la cual el nuevo tema los conducirá.

Fase 2: Orientación dirigida

En esta fase el profesor presenta gradualmente el material, compuesto de tareas cortas que generen respuestas específicas, que han preparado cuidadosamente para que los estudiantes

exploren el nuevo tema de estudio. Dicha exploración incluye que los estudiantes descubran y aprendan las posibles relaciones o componentes básicos que deben formar.

Fase 3: Explicitación

Es en esta fase donde se realiza un afianzamiento del tópico que se está estudiando, el cual incluye el manejo adecuado del lenguaje técnico, características, propiedades, relaciones y entre los mismos estudiantes. Esta fase no debe entenderse como una más cronológicamente hablando, sino más bien una fase que complementa a las otras.

Fase 4: Orientación libre

Es una fase en la cual el profesor debe preparar tareas que sean novedosas, diferentes a las que ha propuesto antes (con muchos pasos e incluso más complejas), que tengan diferentes vías de resolución, que le permitan a los estudiantes establecer relaciones entre los objetos que están estudiando. La intervención del profesor en esta fase debe ser mínima, de tal forma que los estudiantes intenten por sí solos buscar la solución.

Fase 5: Integración

En esta fase los estudiantes, con ayuda del profesor, realizan un resumen de todo lo aprendido, lo que les permitirá tener una visión global de los objetos y relaciones en relación al tema de estudio. Es una fase en la cual no se realiza el desarrollo de temas nuevos, solo la recopilación y organización de los ya adquiridos.

5.1. Constructo teórico Humanos- con- medios

En esta sección se describirá algunos de los elementos que hacen parte del constructo teórico *Humanos-con-Medios* (Marcelo Borba y Mónica Villareal, 2005) mediante la reseña de algunos autores, para así tomar como referencia todo lo referente a este.

Borba y Villarreal (2005) presentan un constructo teórico denominado Humanos-con-Medios en el cual se evidencia cómo el conocimiento matemático es producido por un colectivo pensante de seres-humanos-con-medios. Estos autores señalan que los medios empleados para comunicar, representar y para producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos (Villa-Ochoa y Borba, 2011).

Este constructo teórico se fundamenta en dos ideas principales: la primera es que “la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva” (Villa- Ochoa y Ruiz, 2010) y, la segunda, que la construcción del conocimiento incluye “herramientas, dispositivos, artefactos y medios”.

La expresión *seres-humanos-con-medios* fue creada como una metáfora para hacer alusión a la relación entre quien conoce y los medios (Borba, 1999), Considerando como base teórica fundamental las nociones de tecnologías de la inteligencia de Tikhomirov (1981) y colectivos pensantes de Lévy (1993).

De acuerdo con Borba, Scucuglia y Gadanidis (2014), las siguientes ideas resumen la noción de *seres-humanos-con-medios*:

- El surgimiento de una nueva tecnología permite que nuevos tipos de problemas matemáticos sean explorados.
- Un problema que se resuelve con lápiz y papel, por ejemplo, puede tornarse trivial u obsoleto, al ser resuelto por medio de un software.
- Se debe evitar la domesticación de una nueva tecnología. Es decir, no se debe dejar que esta sea utilizada de la misma manera y anclada a las mismas prácticas que eran condicionadas por otros medios.
- Se debe evitar el uso domesticado de nuevas tecnologías, buscando crear nuevos problemas y actividades investigativas.
- La matemática basada en el uso del lápiz y papel es cualitativamente diferente de la matemática basada en el uso de software.
- Hay una modelación recíproca entre pensamiento y tecnología.
- La producción de conocimiento matemático es condicionada por la tecnología utilizada.
- Las tecnologías no son neutras al pensamiento matemático.
- Las tecnologías transforman la matemática.
- Las tecnologías no son figurantes en los escenarios cognitivos. Humanos y tecnología son protagonistas de la ecología cognitiva.

- Los colectivos pensantes son formados por amalgamas de tipo Humanos tecnologías, humanos-con-medios, seres-humanos-con-tecnologías o, como se ha utilizado, seres-humanos- con-medios.
- Al proponer, actuar o investigar en un escenario pedagógico, nos enfocamos en pensar-con-tecnologías.

En *Humanos-con-Medios* se presta especial atención a cómo a través de la modelación, la visualización, la Educación On-line y la experimentación se construye conocimiento matemático escolar. Particularmente, en dicho constructo se muestra una perspectiva de la modelación con un enfoque pedagógico que está en sinergia con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. Para Borba y Villarreal (2005) la experimentación-con-tecnología, aunado con la modelación se convierte en un ambiente en el que se promueve la formulación de conjeturas su discusión y prueba. De esa manera, estos investigadores resaltan que en el planteamiento de problemas, en estrecha relación con la modelación, va mucho más allá de la formulación de un problema matemático; ello implica que son los estudiantes quienes deben elegir, en asesoría con sus profesores, el tema o fenómeno de estudio el cual puede estar fuera del ámbito matemático.

Con respecto a la visualización, Borda y Villarreal (2005) establecen que desde la literatura, este proceso ha sido considerado como una forma de razonamiento en la investigación en matemáticas y en Educación Matemática. En ese mismo sentido, Villa-Ochoa y Ruiz (2010) presentan dos niveles en los que puede considerarse la visualización: el primero asociado a su uso en la prueba matemática formal; y otro, relacionado con su uso en otras actividades matemáticas tales como la elaboración de conjeturas, la solución de problemas o los intentos de explicar algunos resultados matemáticos a colegas o estudiantes. Borba y Villarreal (2005) se apoyan en las palabras de Hanna (2000) para afirmar que en el primer caso las representaciones visuales no son aceptadas como parte de una prueba formal sino como un acompañamiento heurístico a la prueba que inspira a un teorema o su demostración; en la segunda, la visualización no es más que un recurso periférico o pedagógico.

De acuerdo con este constructo y en el escenario educativo, el proceso de enseñanza y aprendizaje se observa de una manera diferente: ya no se habla de un profesor solo, ni de un estudiante aislado o de una herramienta sola e independiente de los dos actores anteriores

(Esteley, 2006; Santa y Jaramillo, en prensa). Se habla de una unidad compuesta por humanos (profesores y estudiantes)-con-medios, los cuales interaccionan para producir conocimiento.

5.3. Software de geometría dinámica Geogebra

En este apartado se describirán algunas de las características del software de geometría dinámica con el fin de explicar su pertinencia en esta investigación.

Geogebra es un software de matemáticas que reúne geometría, álgebra y cálculo, desarrollado por Markus LLohenwartre en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática escolar.

Por un lado, Geogebra es un sistema de geometría dinámica que permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como funciones a posteriori pueden modificarse dinámicamente.

Por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, Geogebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función. De manera muy sencilla, se pueden construir figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y también gráficas de funciones que pueden ser fácil y dinámicamente modificadas mediante el ratón.

Dentro de la diversidad de software matemático se decidió utilizar Geogebra debido a que resuelve cualquier inconveniente, es un programa de geometría dinámica con la ventaja añadida de ser de código libre. Geogebra es un programa similar a Cabri en cuanto a instrumentos y posibilidades pero incorporando elementos algebraicos y de cálculo. La gran ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en pantalla: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

Esta presentación de la pantalla del programa cuenta con dos ventanas activas: una es la zona de dibujo en la que se crean y manipulan objetos geométricos: puntos, segmentos, rectas, vectores, triángulos, polígonos, círculos, arcos, cónicas etc. (los mismos que en Cabri); la otra zona es donde aparecen las coordenadas de los puntos y las ecuaciones de las rectas y curvas trazadas que se actualizan simultáneamente con los cambios en la región gráfica.

Por ello, Geogebra es uno de los software de mayor importancia ya que facilita y ayuda al docente a interactuar dinámicamente con contenidos temáticos en el área de matemáticas; este programa es una de las opciones tecnológicas que enriquece la calidad de las investigaciones y visualiza las matemáticas desde diferentes perspectivas, apoyando a la retroalimentación; además de ofrecer a los docentes estrategias para la instrucción de acuerdo a las necesidades de los alumnos. De igual manera, facilita el aprendizaje mediante representaciones virtuales que son representaciones de la realidad y concentra beneficios pedagógicos.

5.4. El uso de los medios tecnológicos y el modelo teórico de Van hiele como estrategias de enseñanza y aprendizaje de polígonos.

Borba (1999) manifiesta que, con el desarrollo de las nuevas interfaces de los computadores, se puede extender las ideas de Tikhomirov (1981); es decir, se puede mencionar que todos los procesos que son mediados a través de las imágenes y sonidos de los monitores y más recientemente, por otros medios que se encuentran en proceso de desarrollo, posibilitan una reorganización mucho más intensa que aquella analizada por el autor ruso (Borba, 1999).

Por otro lado, los estudios de Lévy (1993) sugieren una alternativa para finalizar la supuesta oposición entre el hombre y la máquina, con un doble propósito, primero, dejar de ver el computador como una técnica, para verlo como una dimensión característica de los humanos y, segundo, dejar de hacer énfasis en la dicotomía entre los humanos y su tecnología, como si fueran dos conjuntos disjuntos. En este sentido, Lévy (1993) argumenta que aquellos que exponen que la tecnología es nociva para los seres humanos, no están considerando que la forma en la que están expresando (la oralidad o la escritura) son medios que también estructuran su práctica. Esto es, la dicotomía entre seres humanos y medios no tiene razón de ser, dado que las tecnologías juegan un papel importante en la construcción de la cultura y de la inteligencia grupal.

Levy (1993) también explica que las tecnologías deben ser vistas como una articulación con los seres humanos y su producción de conocimiento, dado que las diferentes tecnologías han moldeado la forma como las personas han producido conocimiento a lo largo de la historia. En este escenario, se plantea la idea central de la ecología cognitiva, en la cual

las tecnologías de la inteligencia condicionan, pero no determinan, el pensamiento, que se da en un colectivo dinámico (Souto, 2013).

Así mismo, el uso de las tecnologías de la información y la comunicación han generado procesos de aprendizaje más significativos y participativos los cuales cautivan la atención del estudiante y promueven una integración entre docentes, estudiantes y el aprendizaje. De acuerdo con esto, Borba y Villareal (2005) asumen que el conocimiento es producido en colectivos dinámicos, tal como lo afirma Lévy (1993). Es importante resaltar que Borba y Villarreal (2005) focalizan su atención en las tecnologías de la información, tanto que las utilizan en muchos apartados como sinónimos de medios, debido a que establece que “la tecnología se utiliza siempre para comunicarse, y un medio siempre puede ser visto como tecnología”.

Siguiendo con esta línea, Van Hiele (1957) expresa que la adquisición de la comprensión depende de la enseñanza, así que considera, por ejemplo, en la interdisciplinariedad (entre asignaturas en la escolaridad), un importante medio para el desarrollo de la comprensión, y alcanzar el pleno desarrollo de ella en diversos ámbitos escolares y cotidianos. Es por ello que los métodos de enseñanza deben de ser planteados y ejecutados de tal forma que el docente y el estudiante junto con los medios de su contexto integren los aprendizajes y sean protagonistas de la construcción del conocimiento.

Para que existan procesos de enseñanza y el aprendizaje adecuados, Van Hiele (1957) plantea unas pautas, las cuales se consideran necesarias en la relación teórico-práctica del modelo. Se presentan a continuación:

1. **Interés por un determinado tema.** La falta de interés implica una grave barrera para lograr la comprensión. La principal labor del docente en la enseñanza es profundizar en la motivación y entusiasmo en la asignatura, ya que así se observará los medios adecuados para lograr la aparición de la comprensión en los educandos.
2. **Recapitación.** Todo persona que quiera alcanzar dicha comprensión debe tener en cuenta que profundizar es uno de los puntos de partida para empezar este proceso. Puesto que el niño encuentra en la etapa de desarrollo establecido una organización de ideas y conceptos acerca de los diversos temas que le generan

problemas fuera de su contexto, por esto no le queda el tiempo suficiente para profundizar en los temas netamente escolares.

3. **Material didáctico.** *Consta de* medios de apoyo que pueden ser abstractos y concretos. Contando que cada material debe proporcionar una estructuración propia. Dicho material debe cumplir altísimas obligaciones; como no ser tan complicado como para despistar la atención del verdadero problema; tampoco ser tan esquemático que muestre una articulación escasa del problema.
4. **Contacto personal.** Como ya se conoce la comprensión no es transferible de una persona a otra. Al hablar que una persona posee comprensión es porque tiene la capacidad de imaginarse ideas y conceptos eficaces para la solución al problema no ha sido suministrada por las demás personas.

Con lo anterior, en el estudio que se abordó, se considera que el modelo de Van Hiele puede ser complementado, para el logro de una mayor comprensión por parte de los estudiantes, con medios tecnológicos, para el caso el Geogebra.

En su momento el modelo de Van Hiele fue planteado para ser desarrollado en el aula de clase con los recursos del momento: principalmente la pizarra. En la actualidad, los avances tecnológicos permiten su incorporación en el aula de clase como un mediador instrumental del aprendizaje.

Está mediación permite que tanto los estudiantes como el docente disfruten de un ambiente educativo más atractivo y motivador, generando así mejores construcciones en el aprendizaje debido a que se visualiza y exploran los polígonos de una manera minuciosa y práctica las cuales ayudan a la identificación de las características y propiedades geométricas de los polígonos y permiten una mejor caracterización del aprendizaje.

CAPÍTULO 6

6. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

6.1. Enfoque

El proceso de investigación se desarrolla incorporando el enfoque propio de la *investigación cualitativa*, debido a que se ajusta al contexto educativo, permite explorar y describir un fenómeno en específico a partir de la interacción directa con los individuos estudiados, sin hacer ninguna clase de medición, suministrando una gran cantidad de información valiosa.

Taylor y Bogdan (1984) consideran la investigación cualitativa como “la investigación que produce y analiza los datos descriptivos”, como en el caso del trabajo. Estos autores amplían su conocimiento cuando afirman que “la investigación cualitativa no busca la generalización, sino que es ideográfica y se caracteriza por estudiar en profundidad una situación concreta. Desarrollando hipótesis individuales que se dan en casos individuales. No busca la explicación o la casualidad, sino la comprensión, y puede establecer inferencias plausibles entre los patrones de configuración en cada caso”.

El paradigma cualitativo describe cada aspecto actitudinal presentado, dado que facilita la comprensión del razonamiento geométrico, a través de la interacción con los estudiantes, permitiendo a la investigadora conseguir un conocimiento objetivo, claro y preciso, como producto de la observación y participación en los momentos relevantes y así cumplir el objetivo propuesto.

6.2. Nivel

Teniendo en cuenta el paradigma de investigación, el grado de profundidad y el alcance de investigación, se opta por el *nivel descriptivo*, donde se tiene en cuenta la descripción de fenómenos sociales en un temporal; su finalidad es describir y su propósito es estimar parámetros.

Según Fidias (2012), la investigación descriptiva consiste en “la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento.

Los resultados de este tipo de investigación se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere”. Esto se refiere a la caracterización de un acontecimiento presentado, logrando establecer un nuevo conocimiento.

La investigación descriptiva consiste en la búsqueda de la precisión clara de un objeto. Este nivel de investigación se identifica por organizar datos de primera mano, para lograr un análisis preciso, claro y verídico, de la información de fuente primaria, secundaria y de teorías establecidas. Méndez (1988) afirma que “el estudio descriptivo identifica características del universo de investigación, señala formas de conducta y actitudes, establece comportamientos concretos descubre, comprueba y analiza las variables de investigación”.

6.3. Diseño

Teniendo en cuenta el nivel de esta investigación se decidió utilizar el diseño de *investigación acción participativa (IAP)*. Este diseño permite recoger la información de la investigación de forma clara y precisa para el alcance del objetivo general; en este sentido, Eizagirre y Zabala (2006) defiende la IAP como “Método de investigación y aprendizaje colectivo de la realidad, basado en un análisis crítico con la participación activa de los grupos implicados, que se orienta a estimular la práctica transformadora y el cambio social”.

La IAP tiene como finalidad la participación de las personas investigadas, a lo largo de todo el proceso de investigación, existe una gran relación entre la teoría y la práctica, permitiendo así la relación de estos dos aspectos, el de conocer y el de actuar, un método para analizar y comprender mejor la realidad de la población y que posibilita un excelente aprendizaje (Eizagirre y Zabala, 2006).

6.4. Población

Arias (2006) afirma que una población es “Como el conjunto finito o infinito de elementos con características comunes para los cuales serán extensivas las conclusiones de la investigación”.

La población seleccionada para esta investigación fue el Instituto Técnico San Francisco de Asís en su sede José Antonio Galán, de carácter público, de la ciudad de Pamplona, en el Primer semestre del año 2016.

6.5. Muestra

Hurtado (2000) considera la muestra como “una porción de la población que se toma para realizar el estudio, la cual se considera representativa de la población”. Por tal atribución, la muestra escogida es el grado de quinto A del ITSFAJAG, de carácter público, de la ciudad de Pamplona, en el primer semestre del año 2016. El curso seleccionado está constituido por 29 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 9 y 11 años de edad.

6.6. Técnica para la recolección de la información

Para Arias (1999) las técnicas de recolección de datos son “las distintas formas de obtener la información”; en este sentido, para el estudio se utilizó la *observación directa* y la *observación participante*. Según Hernández, Fernández y Baptista (1998) la observación consiste en “el registro sistemático, cálido y confiable de comportamientos o conductas manifestadas”. La observación se basa en la percepción que el investigador tiene de la realidad y la conducta de sus participantes.

La observación directa es definida por Tamayo (1991) como “aquella en la que el investigador puede observar y recoger datos mediante su propia observación”. En términos más específicos, es cuando el investigador tiene una interacción con el fenómeno investigado. En cuanto a la observación participante, el investigador desempeña un papel relevante dentro de la comunidad donde se realiza la investigación. Ibarra (2001) estipula que en la observación participante “el investigador participa de las tareas y actividades del grupo cuya conducta quiere observar, aunque no necesariamente participa en todas ellas”. Por otra parte, Rodríguez, Gil y García (2004) exponen que “podemos considerar a la observación participante como un método interactivo de recogida de información que requiere una implicación del observador en los acontecimientos o fenómenos que está observando”.

6.7. Instrumento para la recolección de la información (Unidad de Enseñanza)

Diario de campo

Porlán y Martín (1993) definen el diario de campo como un “*instrumento de análisis del pensamiento reflexivo de profesores tanto en formación como en ejercicio*”. El diario de campo radica en describir detalladamente de manera objetiva la información significativa de las actividades realizadas por los estudiantes después de cada una de las sesiones.

Según Porlán (1987) los posibles objetivos del diario son:

- Recoger información significativa sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Acumular información histórica sobre el aula y el centro.
- Favorecer actitudes investigativas del profesor:
 - Descripción de sucesos.
 - Detección de problemas.
- Reflexión crítica:
 - Diseño de alternativas (hipótesis).
 - Capacidad de observación, etc.

El diario de Campo fue usado por la investigadora para plasmar las actitudes, situaciones y progresos que puedan presentar los estudiantes durante el proceso de aplicación de la unidad de enseñanza, para así tener un soporte verás y confiable sobre los sucesos de cada jornada de aplicación, los cuales serán fundamentales para la elaboración del análisis de las producciones de los estudiantes.

Unidad de enseñanza

Durante este apartado se hará hincapié concretamente en el diseño y descripción de cada uno de los talleres propuestos para la unidad de enseñanza, teniendo en cuenta los aspectos fundamentales que se encuentran implícitos en el referente teórico planteado, haciendo énfasis en que dicha unidad será el instrumento indispensable para la recolección de la información, logrando el desarrollo del objetivo principal.

Como se ha enunciado en apartados anteriores, los talleres de la unidad de enseñanza se diseñaron teniendo en cuenta, principalmente, el modelo de razonamiento de Van Hiele y utilizando el software Geogebra como mediador del aprendizaje basado en el constructo teórico Humanos-con-medios. Durante la ejecución de la unidad de enseñanza, la docente titular del grupo estuvo presente, pero sin intervenir en el proceso, es decir, se limitó a observar el desarrollo de cada una de las actividades propuestas por la investigadora.

El tema³ escogido para esta investigación fue el concepto de polígono, particularmente los triángulos y cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, rombo y trapecio). Los tópicos⁴ se clasificaron de la siguiente manera: definición de polígono, clasificación de los polígonos según el número de sus lados y clasificación de polígonos según la medida de sus ángulos. En cuanto a los objetivos, se espera que los estudiantes alcancen el aprendizaje de polígonos en el *nivel 2 de razonamiento de Van Hiele* (con los procesos matemáticos de pensamiento: identificación, clasificación, definición y construcción de la definición) el cual se entiende como una figura geométrica plana compuesta por segmentos de línea recta que se unen en sus extremos hasta cerrarse. Así mismo, el constructo teórico –Humanos-con-Medios se utiliza durante todo el proceso ejecución de los talleres y sus diferentes actividades, empezando con un taller de exploración y reconocimiento del software Geogebra, seguido de diferentes talleres los cuales contribuyen al aprendizaje de los diferentes tópicos escogidos en el nivel 1 y 2.

La unidad de enseñanza está conformada por siete talleres, diseñados teniendo en cuenta los niveles 1 y 2 de razonamiento Van Hiele; los cuales están propuestos y organizados por tópicos teniendo en cuenta los niveles 1 y 2 de razonamiento Van Hiele y las fases de aprendizaje. Se presenta el taller N°1 como una actividad de reconocimiento y exploración del software Geogebra, los siguientes corresponden al desarrollo de cada uno de los tópicos, realizando la explicación del tema en los dos niveles, es decir el taller N°1 y N°2 comprenden el tópico que trabaja la definición de polígonos tanto en nivel 1 como en nivel 2 de razonamiento Van Hiele; esto se hace con el fin de llevar la continuidad de los tópicos y realizar una mejor caracterización del aprendizaje de los mismos.

Así mismo, los talleres N°4 y N°5 comprenden el tópico en el cual se trabaja la clasificación de polígonos según el número de sus lados en nivel 1 y 2 de razonamiento Van Hiele respectivamente y, los talleres N°6 y N°7, comprenden el tópico de en el cual se trabaja la caracterización de los polígonos según la medida de sus ángulos en nivel 1 y 2 de razonamiento Van Hiele respectivamente. Cabe aclarar que en el diseño de los talleres, las representaciones

³ Para este estudio se entiende por tema al concepto superior (polígono).

⁴ Para este estudio se entiende por tópico al concepto derivado (definición de polígono, clasificación, etc.).

gráficas de los polígonos aparecen de manera estándar⁵ y no estándar, con el fin de no generar estereotipos en el aprendizaje de los estudiantes.

6.7.1. Descripción del taller N° 1

La actividad que se muestra más adelante, está diseñada para desarrollar una exploración y familiarización del software Geogebra, se espera que los estudiantes realicen un dibujo con las herramientas de dicho software utilizando únicamente las herramientas que permiten construir figuras geométricas. Así mismo se espera que el estudiante adquiera una habilidad básica en el conocimiento del software.

Con este taller se le da inicio a la mediación del aprendizaje utilizando una herramienta tecnológica, lo cual permite desarrollar conocimientos producidos por conjunto de humanos con medios, lo cual genera aprendizajes significativos, dicho proceso se fundamenta en el constructo Humanos-con-medios (Borba, Villarreal. 2005).

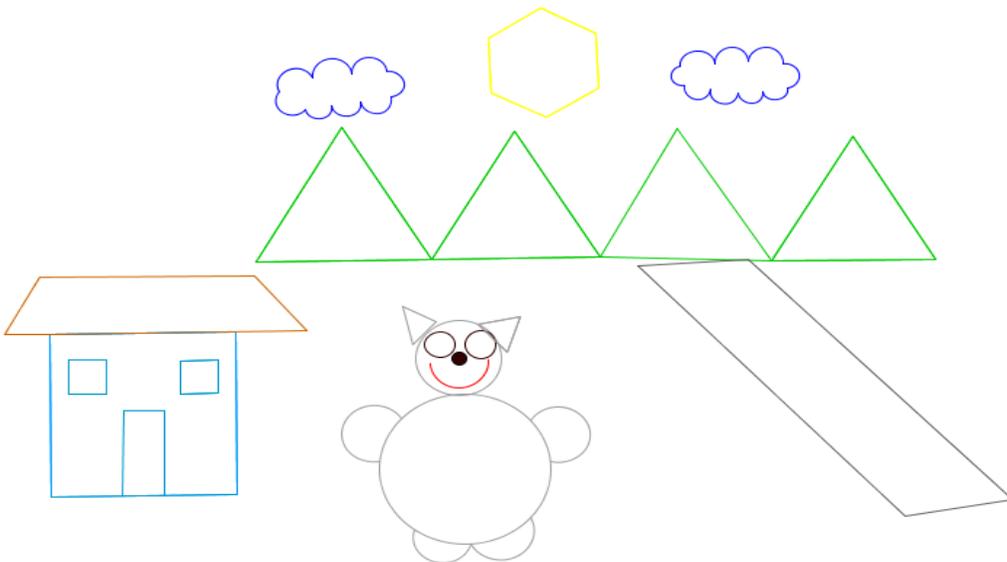
Al ser este el primer taller se permite realizar la fase N°1 de aprendizaje Van Hiele, en donde gracias a las diferentes instrucciones y actividades propuestas el estudiante puede realizar un trabajo concreto que le permita construir sus propios conocimientos y definiciones. El presente taller será tomado como la fase N°1 de todos los tópicos trabajados durante la ejecución de la unidad de enseñanza. Debido a esto, dicho taller está compuesto por tres partes, en primer lugar el proceso de información en el cual se indica cómo se realizarán todos los talleres, el nombre del software y su utilidad, en segundo lugar los estudiantes realizarán una exploración libre de todas las herramientas del software, en último lugar desarrollarán una conclusión de esta experiencia, con el fin de concluir la utilidad del software y un acercamiento al tema objeto de estudio (polígonos).

⁵ Se entiende por estándar a aquel dibujo de polígono donde uno de sus lados aparece de forma horizontal en relación al plano en que se dibuja.

TALLER N°1

1. Explora las herramientas de Geogebra y enuncia las que más te gustaron explicando su función.

2. Realiza el siguiente dibujo utilizando las herramientas que desees excepto la denominada "lápiz".



3. Escribe cuales fueron las herramientas que utilizaste para hacer el dibujo.

4. ¿De qué figuras geométricas planas están constituidas las formas presentes en tus dibujos?

5. ¿Te gusto trabajar en Geogebra? ¿Por qué?

6. Con base en tu trabajo ¿Qué crees que es Geogebra?

6.7.2. Descripción de los talleres N° 2 y N° 3.

Con los talleres que se presentan a continuación se trabajará el tópico que agrupa lo referente a la definición de polígono, bajo la luz del modelo de razonamiento teórico de Van Hiele. En una primera instancia se aclara que se realizará la descripción individual de los talleres debido a que corresponden a diferentes niveles de razonamiento Van Hiele.

➤ Descripción del taller N° 2

Las actividades propuestas en este taller están encaminadas a desarrollar el concepto y definición de polígono en nivel 1 de razonamiento de Van Hiele, se espera que lo hagan de manera global, tales como formas simples, por medio de valoraciones visuales, pero sin tener en cuenta elementos ni propiedades matemáticas de cada figura elegida. En este nivel los estudiantes habitualmente no usan vocabulario geométrico, solo realizan una visualización y pueden realizar ciertas clasificaciones pero solo considerando pequeñas similitudes o diferencias físicas observadas de forma total entre los mismos.

En este caso los polígonos son visualizados por sus atributos y apariencia física, en primera instancia por su forma, como sus lados y número de lados; pero en ningún momento sobre sus propiedades matemáticas. En este nivel, el estudiante no reconoce, ni descubre relaciones entre los polígonos, tampoco sus partes. Un ejemplo es que él tiene la destreza de identificar y diseñar un cuadrado, un rombo y un rectángulo, pero no tiene la capacidad de relacionar a los tres como cuadriláteros. Para el estudiante estos polígonos no presentan ningún

tipo de conexión, pues los consideran figuras desiguales y aisladas, en otras palabras, no crean ningún tipo de clasificación matemática.

Este taller está diseñado para trabajar el primer tópico “definición de polígonos”, para el cual se realizan cinco actividades, tres para realizar propiamente en Geogebra y dos preguntas que complementan el taller. En primera instancia se presenta *la fase N°2 de orientación dirigida*, la cual se representa con un archivo que contiene ejemplos y contra ejemplos para la identificación de los polígonos. En él se dejan puntos libres para que el estudiante de manera global manipule la figura, visualice y explore sus características, cambios y atributos. Posteriormente se les indicará a los estudiantes que teniendo en cuenta la exploración de las figuras, realicen una definición de lo que sería para ellos un polígono. En segunda instancia, partiendo de la actividad anterior y la definición construida, se realizará una clasificación de figuras en dos grupos de ejemplos y contra ejemplos de los mismos, utilizando unas canastas y las herramientas del software las cuales permiten arrastrar la figura hasta la canasta correspondiente, esta mediación genera agrado y aumenta la motivación por la actividad y fomenta la construcción del aprendizaje. En tercera instancia se reafirma la diferencia entre los dos grupos debido a que deberán contestar una pregunta donde se les dice ¿Por qué las figuras de una de las canastas no son polígonos?, de igual manera para concretar la definición, se construirán en Geogebra ejemplos de polígonos y no polígonos con la condición de no repetir las figuras presentadas anteriormente, para así estimular la imaginación acerca de los polígonos. En última instancia, se presenta *la fase N°4 de Orientación libre*, donde los estudiantes tendrán que recurrir a todos los conocimientos adquiridos para construir un polígono, renombrar sus puntos, modificarlo y explorarlo con el fin de conseguir una nueva figura y determinar si dicha figura obtenida sigue siendo polígono y justificando su respuesta, todo esto es con el fin de ratificar la definición de polígono. De igual manera, se espera que se evidencie *la fase N°3 de explicitación*, la cual se hace presente gracias al trabajo colaborativo y la discusión de las posibles respuestas entre docente y estudiantes o estudiantes y estudiantes.

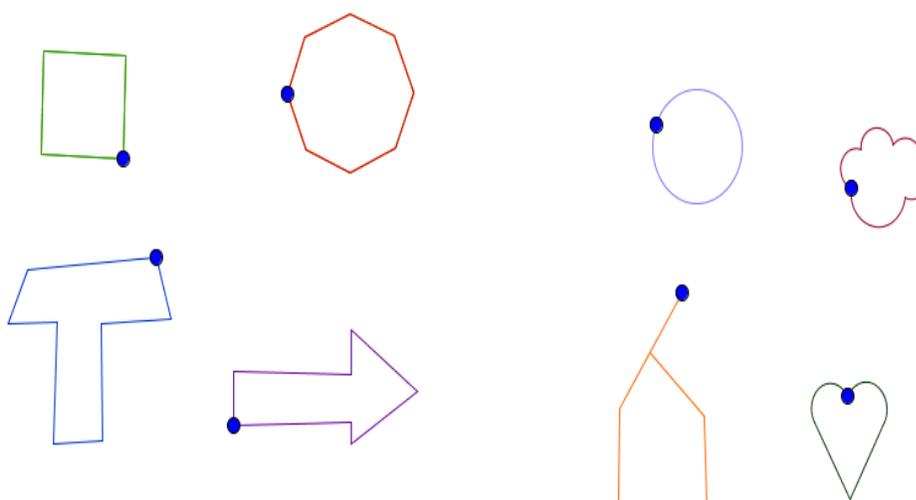
TALLER N° 2

Nivel 1: visualización

Objetivo: Construir la definición de polígono

1. Abre el archivo de Geogebra llamado taller número 2 y observa los ejemplos de figuras geométricas planas presentes en él y realiza las actividades allí propuestas.

ACTIVIDAD # 1



EJEMPLOS DE POLÍGONOS

EJEMPLOS DE NO POLÍGONOS

2. Teniendo en cuenta el anterior ejercicio, responde la siguiente pregunta.

2.1 ¿Qué es un POLÍGONO?

3. Realiza la clasificación de las figuras planas en el archivo de Geogebra.



3.1 ¿Por qué crees que las figuras de una de las canastas no son polígonos?

3.2. En Geogebra elabora ejemplos diferentes a los ya vistos de 4 polígonos y 4 no polígonos y llama al archivo polígono 1, seguido de tu nombre.

3.3 Nombra todos los puntos de cada polígono con las letras A, B, C... según el número presente en cada polígono (Dale clic derecho sobre cada punto y posteriormente clic en renombra, en el recuadro digita la letra que corresponda a dicho punto).

3.4 Mueve libremente los puntos A, B, C de cada polígono. ¿Cambia de forma la figura al mover dichos puntos? ¿La figura obtenida sigue siendo un polígono? ¿Por qué?

➤ Descripción del taller N° 3

Las actividades propuestas en este taller, pretenden que los estudiantes alcancen un nivel 2 de razonamiento Van Hiele en el concepto de polígono. Este nivel de razonamiento se identifica por un análisis informal de los componentes y características del objeto de estudio, que para este caso es el concepto de polígono. En dicho nivel los estudiantes comprenden que las definiciones están compuestas por ciertos atributos críticos (características matemáticas pequeñas que hacen que un objeto se logre identificar con ellas).

El diseño de este taller, en su mayor parte, contiene una serie de preguntas las cuales tienen como fin identificar y clasificar algunos polígonos teniendo en cuenta sus propiedades geométricas, utilizando el software como apoyo para medir, construir, modificar y dar respuesta a las mismas, debido a que para dar respuesta a dichas preguntas se deberán construir los polígonos que cumplan con las características de las respuestas correctas, justificando las mismas y en algunos casos se deberá cambiar en color de los polígonos y las palabras, estas actividades corresponden a la *fase N°2 de orientación dirigida* ya que se da una breve indicación para realizar cada una de las actividades. Así mismo, otra de las actividades consiste en construir un polígono y localizar en él las diferentes propiedades, lo cual es fundamental para que el estudiante consolide la información sobre los atributos críticos, la cual está diseñada teniendo en cuenta la *fase N°5 de integración* dado que para construir este polígono el estudiante debe recordar y utilizar todos los conocimientos aprendidos

TALLER N° 3

Nivel N°2: Análisis.

Objetivo: Concretar los conceptos de polígono en lenguaje geométrico.

TALLER # 3

Analiza los siguientes problemas y construye el polígono que consideres que es la respuesta correcta o coloca de verde la opción escogida

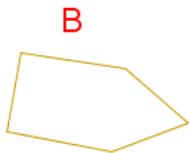
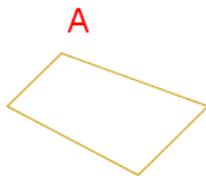
1. Laura quiere construir una figura geométrica plana que tengan dos pares de lados paralelos y cuatro lados iguales, pero no recuerda su nombre ¿cómo es el nombre de esta figura?

- A. Rectángulo
- B. Trapecio
- C. Rombo
- D. triángulo

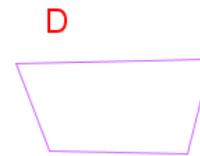
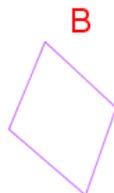
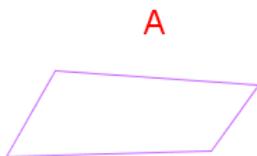
2. Lucas hizo un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos, dos lados cortos y dos lados largos. ¿Qué polígono dibujó?

- A. Un rombo
- B. Un triángulo
- C. Un cuadrado
- D. Un rectángulo

3. ¿Cuál de las siguientes figuras geométricas planas tiene tres lados y tres vértices? Justifica tu respuesta.



4. ¿Cuáles de las siguientes figuras tiene dos pares de lados paralelos?



6.7.3. Descripción de los talleres N°4 y N°5

Con los talleres que se presentan a continuación se trabajará el tópico que agrupa lo referente a la clasificación de polígonos según el número de sus lados, bajo la luz del modelo de razonamiento teórico de Van Hiele. Al igual que el tópico anterior, se aclara que se realizará la descripción individual de los talleres debido a que corresponden a diferentes niveles de razonamiento Van Hiele.

➤ Descripción del taller N°4

Este taller está enmarcado al desarrollo de la clasificación de polígonos según el número de sus lados en nivel 1 de razonamiento Van Hiele, en este nivel el interés será un eje fundamental debido a que las actividades con el software generan una atención aún más prolongada y un alto grado de concentración, lo cual permite que el estudiante asimile e interiorice de una manera más rápida y práctica los conceptos dados.

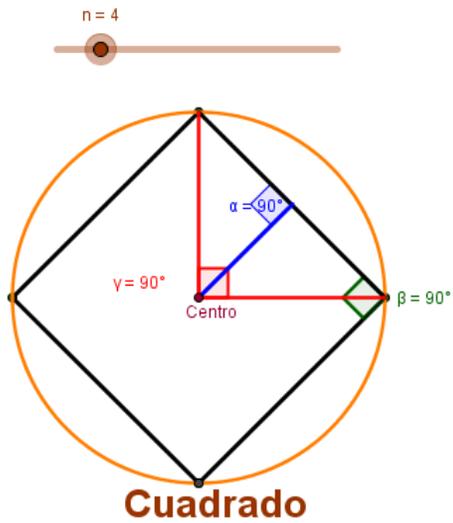
Las actividades de este taller hacen hincapié en un tipo de clasificación de los polígonos, donde la importancia de las características visuales son importantes, lo cual lleva a utilizar en una primera instancia una herramienta del software Geogebra, llamada deslizador la cual los estudiantes pueden mover y a medida que lo hacen se van construyendo uno a uno varios polígonos con su respectivo número de lados y nombre de forma ascendente; esta actividad es tomada como *Fase N°2 de orientación dirigida* donde los estudiantes con las orientaciones de la investigadora van conociendo los nombre y las características de los polígono dados.

Después de ello, los estudiantes deben abrir otro archivo que se denominó taller N°4 complemento, en el cual están expuestas dos actividades; la primera corresponde a la *fase N°4 de orientación libre*, en donde los estudiantes haciendo uso de los conocimientos recientemente adquiridos deberán denominar cada uno de los polígonos irregulares allí presentes teniendo en cuenta sus números de lados; todo ello con el fin de clasificar y corroborar los tipos de polígonos. De igual manera, la segunda actividad hace referencia a la *fase N°5 de integración*, para la cual los estudiantes deben utilizar todos sus conocimientos para la elaboración de cinco polígonos sabiendo su número de lados junto con su nombre.

TALLER N° 4

Nivel: N°1 información

Objetivo: Clasificar y reconocer los polígonos teniendo en cuenta el número de sus lados.

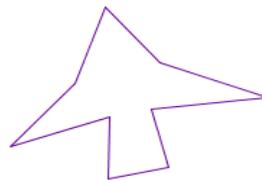
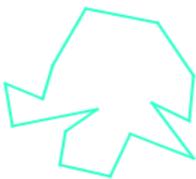


N° de lados = 4

Ángulo Interior = 90°

Suma de Ángulos interiores = 360°

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, Analiza los siguientes polígonos y con la Herramienta llamada "texto" coloca el nombre correspondiente de bajo de cada polígono.



ACTIVIDAD

Construye los siguientes polígonos sin repetir los ejemplos dados anteriormente, escribe su número de lados y enuncia si son polígonos regulares o irregulares:

- Heptágono.
- Endecágono.
- Pentadecágono.
- Hexágono.
- Icoságono.

➤ Descripción del taller N° 5

Las actividades propuestas en este taller pretenden que los estudiantes alcancen un nivel 2 de razonamiento Van Hiele en la clasificación de polígonos según el número de sus lados. En este nivel se espera que los estudiantes definan y estructuren sus ideas de una manera más amplia y utilizando un lenguaje geométrico que les permita crear conceptos avanzados e interpretarlos.

Este taller está compuesto por dos actividades, la primera corresponde a la *fase N°5 de integración*, en donde los estudiantes deben construir ciertos polígonos y utilizando los conocimientos adquiridos debe identificar las partes de cada uno de ellos y nombrarlas; de igual manera, la segunda actividad corresponde a la *fase N°4 de orientación libre*, en la cual el estudiante gracias a su práctica y aprendizaje debe trazar las diagonales de cada uno de los polígonos, con el fin de reconocerlas como un atributo más de los mismos.

TALLER N° 5

Nivel: análisis.

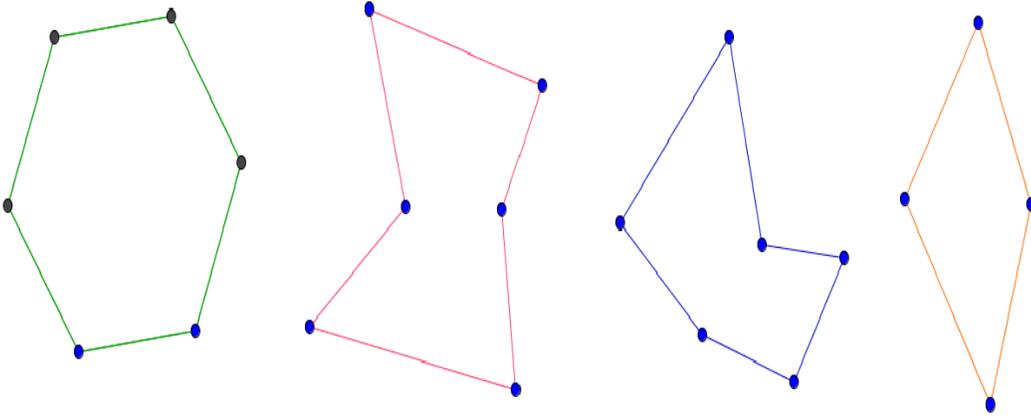
Objetivo: Consolidar los nombres y la clasificación de los polígonos según el número de sus lados, reconociendo las características geométricas de cada uno de ellos.

TALLER # 5

1. Representa gráficamente los siguientes polígonos, enuncia e identifica: los números de lados, números de ángulos y número de vértices.

- A. triángulo.
- B. Trapecio.
- C. Tetradecágono.
- D. Rectángulo.

2. Traza las diagonales de los siguientes polígonos.



6.7.4 Descripción de los talleres N°6 y N°7

Con los talleres que se presentan a continuación se trabajará el tópico que agrupa lo referente a clasificación de polígonos según la medida de sus ángulos, bajo la luz del modelo de razonamiento teórico de Van Hiele. Al igual que los anteriores tópicos, se aclara que se realizará la descripción individual de los talleres debido a que corresponden a diferentes niveles de razonamiento Van Hiele.

➤ Descripción del taller N°6

Al ser un taller de nivel 1 de razonamiento de van Hiele, se basa en reconocimiento visual y selección por medio de atributos básicos, debido a esto se plantearon tres tipos de actividades. inicialmente se realiza una explicación de lo que es un ángulo y la clasificación

de los polígonos según la medida de los ángulos, lo cual hace referencia a la *fase N°2 de orientación dirigida*; posteriormente se hace un proceso de selección, del cual se espera que los estudiantes realicen de forma visual, dado que en este nivel es poco común que los estudiantes midan los ángulos para confirmar de manera concreta la clasificación de los polígonos, dicho proceso se fundamenta en la *fase de orientación libre* donde el estudiante es autónomo de elegir y clasificar los polígonos en estos grupos. Para terminar, la última actividad consiste en construir ejemplos de cada uno de estos tipos de polígonos teniendo en cuenta lo aprendidito en la fase N°2, por ello dicha actividad corresponde a la *fase N°5 de integración*.

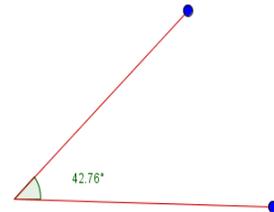
TALLER N°6

Nivel 1: información

Objetivo: conocer la pertinencia de la medida de los ángulos de los polígonos con la clasificación de los mismos.

TALLER # 6

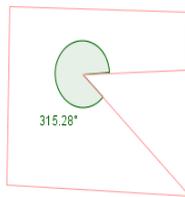
Un ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o vértice.



Los polígonos se pueden clasificar en dos tipos según la medida de sus ángulos pueden ser:

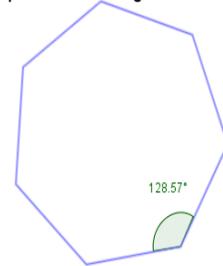
POLÍGONOS CÓNCAVOS

Son aquellos en los que ALGÚN ángulo es mayor que 180° .

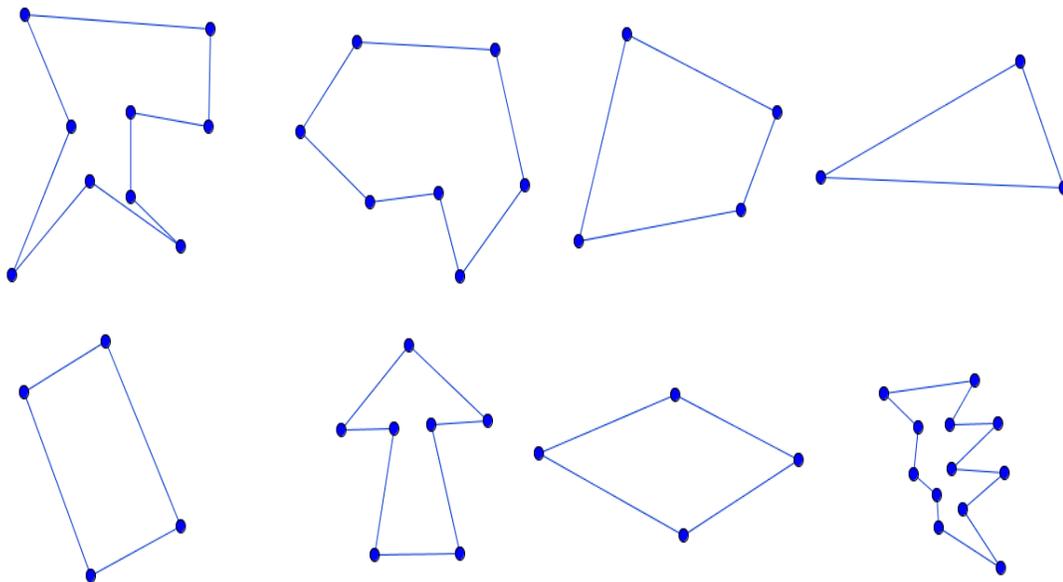


POLÍGONOS CONVEXOS

Son aquellos en los que TODOS los ángulos son menores que 180° .



Clasifica los siguientes polígonos teniendo en cuenta la explicación anterior colocando de color verde los cóncavos y naranja los convexos.



ACTIVIDAD # 2

Construye 5 polígonos concavos y 4 polígonos convexos teniendo en cuenta sus características

➤ Descripción del taller N° 7

Las actividades propuestas en este taller pretenden que los estudiantes alcancen un nivel 2 de razonamiento Van Hiele en la clasificación de polígonos según la medida de sus ángulos. En dicho nivel se espera que los estudiantes reconozcan los atributos críticos de los polígonos y los utilicen al momento de realizar su clasificación.

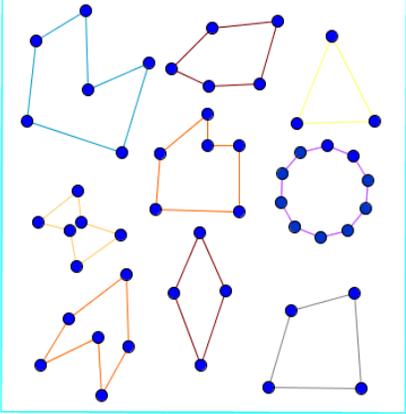
El taller consta de tres actividades en las cuales el estudiante debe utilizar todos los conocimientos adquiridos lo cual hace referencia a la *fase N° 5 de integración*, dado que se presenta un mapa conceptual donde en primea instancia se deben catalogar los polígonos en cóncavos y convexos según la medida de sus ángulos; en segunda instancia se debe colocar una definición geométrica de cada uno de los grupos; en tercera instancia, se construirán 5 polígonos los cuales tienen ciertas características geométricas específicas fundamentales en su elaboración; para concluir, se realizarán unas preguntas con el fin de verificar si los conocimientos impartidos fueron interiorizados de forma significativa por parte de los estudiantes.

TALLER N°7

Nivel N° 2: Análisis

Objetivo: Determinar los atributos críticos propios de cada uno de los grupos de polígonos teniendo en cuenta la medida de sus ángulos.

1. Observa los siguientes polígonos y clasifícalos en el recuadro correspondiente. Finalmente escribe la definición de cada grupo.

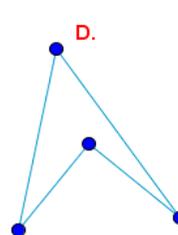
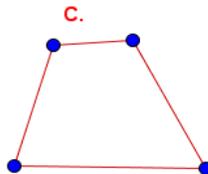
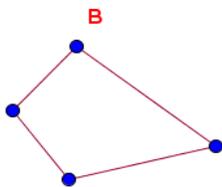
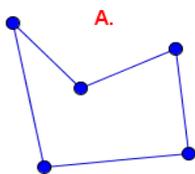
POLÍGONOS CONCAVOS		POLÍGONOS CONVEXOS
DEFINICIÓN		DEFINICIÓN

2. Realiza polígonos que cumplan con las siguientes características y escribe si son CÓNCAVOS o CONVEXOS:

- A. Polígono con un ángulo de 302° .
- B. Polígono con todos sus ángulos de 90°
- C. Polígono con un ángulo de 30° .
- D. Polígono con un ángulo de 190° .

3. Responde las preguntas y justifica la respuesta:

1. ¿Cuáles de los siguientes polígonos son cóncavos?



- A). Sólo A.
- B). Sólo D.
- C). Sólo A y D.
- D). Sólo C.

CAPITULO 7

7. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

La educación hoy en día está enfrentada a constantes cambios y adaptaciones, ya sean por ejemplo por medio de las nuevas generaciones o la tecnología; esto implica una reforma en cómo enseñar los contenidos y lograr de igual manera un razonamiento en los estudiantes que puedan construir aprendizajes y utilizarlos en la resolución de problemas y situaciones de la vida cotidiana. Por esta razón, esta investigación hace un aporte a la caracterización de la comprensión del razonamiento geométrico de los polígonos, dando importancia a dos elementos descritos en el marco teórico (capítulo 5): la forma de razonamiento utilizada por los estudiantes, que se identificó a través del modelo de teórico de Van Hiele y la mediación tecnológica teniendo como fundamentos el constructo teórico humanos-con-medios. El presente capítulo está dedicado al análisis de dichos componentes en las producciones de los estudiantes y elaboración de resultados.

Para analizar las actividades de los estudiantes se enfocó principalmente en su actividad cognitiva, la cual obedece a la forma de razonamiento, la coherencia, comprensión e interpretación de sus producciones escritas y verbales. Para lograr estos objetivos, se ha considerado un grupo de 13 estudiantes quienes presentan una trayectoria completa, es decir, que de los 30 estudiantes del grupo muestral, fueron quienes asistieron a todas las secciones de la mediación programada.

CARACTERIZACIÓN DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

En este apartado se presenta el análisis de diversas producciones de los estudiantes en las actividades diseñadas para el estudio, como ejemplo del conjunto de datos obtenidos que ha permitido identificar características específicas de los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Por consiguiente, se presentan ejemplos de respuestas de estudiantes que ilustran, por una parte, las respuestas a una determinada actividad y, al mismo tiempo, el trabajo con una mediación tecnológica.

A continuación, se hará un recorrido por los talleres de la unidad de enseñanza mostrando los tipos de respuestas obtenidas y analizándolas desde la visión de los niveles de razonamiento empleados y la interacción de esta población con los medios utilizados durante la investigación.

TALLER N° 1

En términos generales los estudiantes desarrollaron las actividades sin mayor dificultad, con una gran motivación y ganas de conocer el manejo del software; se observó un ambiente de colaboración, por ejemplo cuando se ayudaban y explicaban el funcionamiento de algunas de las herramientas del software, o cuando se mostraban sus logros y descubrimientos en la exploración y procuraban copiar el dibujo guía. Todos comenzaron muy motivados por el hecho de realizar un nuevo trabajo y más aún por contar dentro de su aula de clases con un computador para cada uno. Dentro de las actividades propuestas se desarrolló la familiarización con el software y una pequeña introducción a las figuras geométricas.

ANÁLISIS DEL TALLER N°1

- Actividad N°1

En el análisis de este taller, en la primera actividad, se encontraron los casos de Diego y Jhon, quienes al realizar la exploración del software no se limitaron a hacer solo líneas y sus nombres con el lápiz, si no que utilizaron herramientas más avanzadas y construyeron algunos polígonos. (ver figura 1 y 2); por lo que se consideró como un avance en el razonamiento y demostrando algunos saberes geométricos.

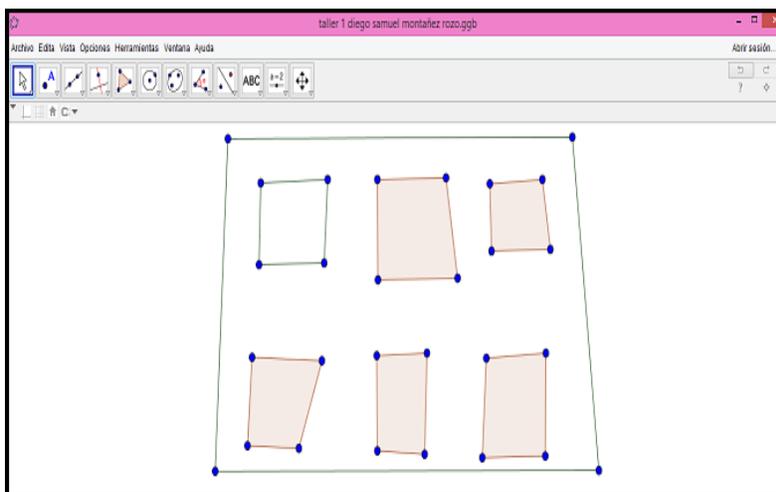


Figura 1. Desarrollo presentando por Diego en el taller N°1, en la actividad 1

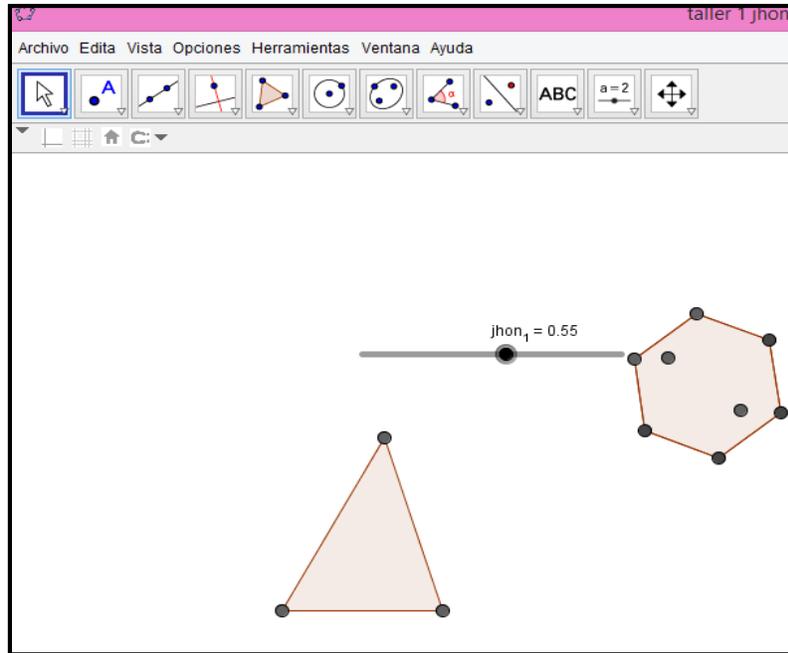


Figura 2. Desarrollo presentado por Jhon en el taller N°1, en la actividad 1

En cuanto a la parte de enunciación de las herramientas, se presentó un aspecto común en todos los estudiantes, los cuales exponen que la función de las herramientas del software solo es hacer dibujos. Por el contrario, se presenta el caso de Elkin, quien plantea que las herramientas que le gustaron son “la elipse y el ángulo porque la elipse hace círculos y, el ángulo, los ángulos” (ver figura 3). A pesar de que esta respuesta habla de ciertos temas de geometría, no contiene un proceso de análisis ordenado y coherente, por lo tanto indica que se realiza a través de algunos pre-saberes; de manera que, el estudiante se encuentra en el nivel N° 1 de razonamiento Van Hiele.

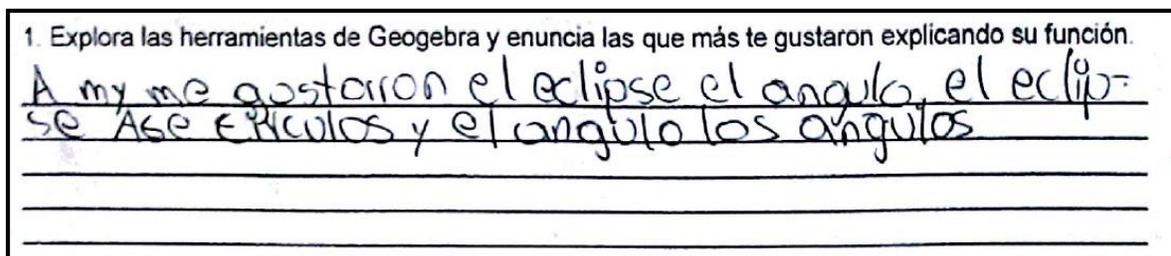


Figura 3. Respuesta de Elkin sobre las herramientas y sus funciones, en el taller N° 1, en la actividad 1

- Actividad N°2

Se encontraron dos casos interesantes y muy parecidos, en los cuales los estudiantes cambiaron la vista gráfica de hoja en blanco a cuadrícula, para realizar un mejor trabajo con el paisaje; estos fueron los casos de Andrey y Juan Diego (Ver figura 4 y 5). Con esto se evidenció un mejor trabajo por parte de los estudiantes y mejor percepción visual, así pues se produjo curiosidad en el grupo y permitió un trabajo colaborativo.

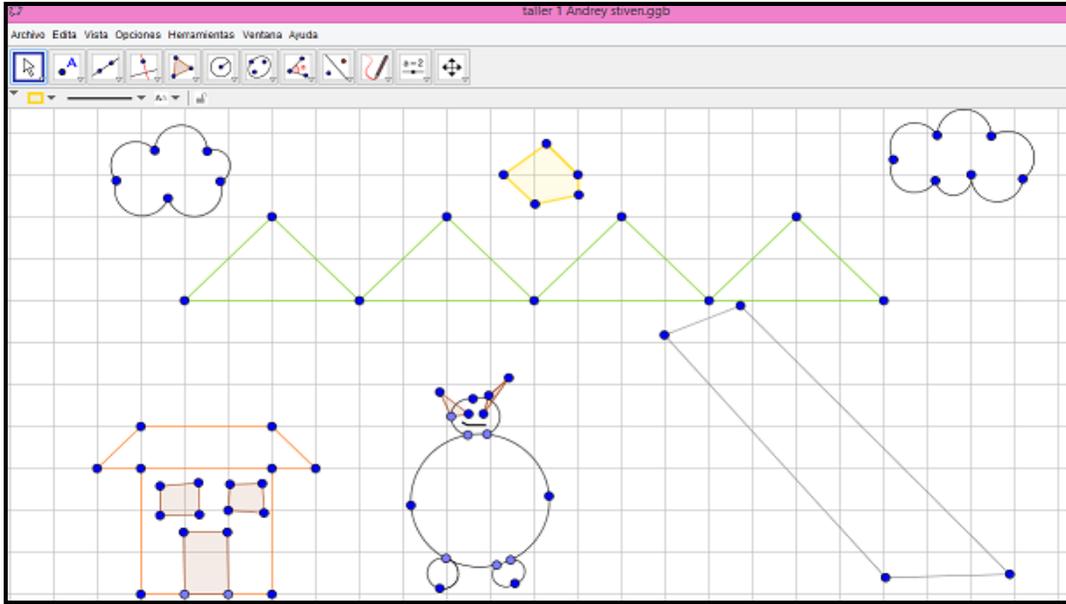


Figura 4. Construcción del paisaje por parte de Andrey en el taller N°,1 en la actividad 1

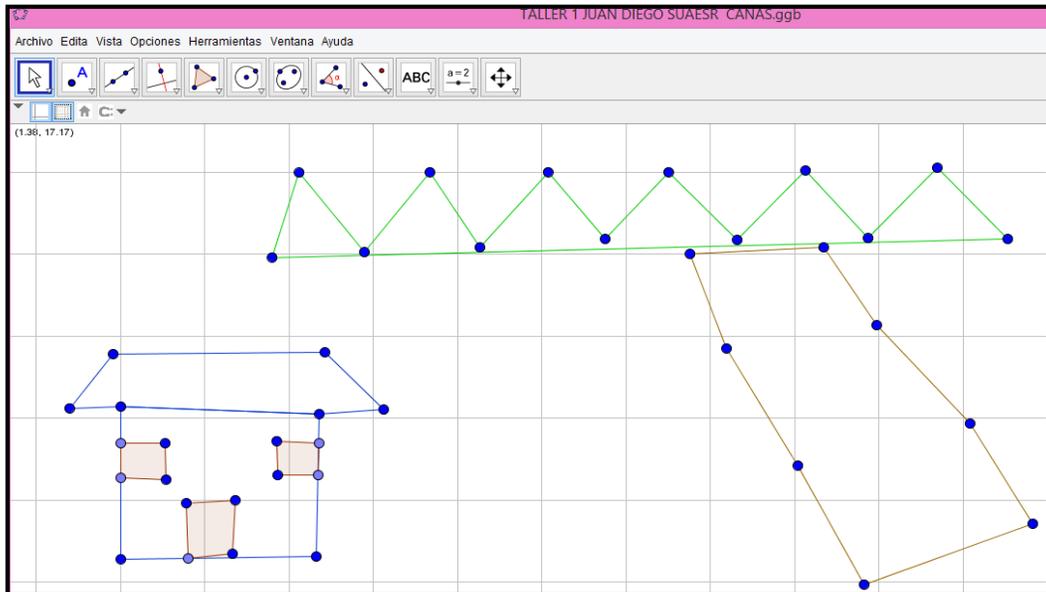


Figura 5. Construcción del paisaje por parte de Juan Diego en el taller N°1, en la actividad 1

- Actividad N°3

Los estudiantes realizaron una descripción de las herramientas que utilizaron para construir el dibujo; además de ello, algunos explicaron con qué herramienta específicamente elaboraron el dibujo, como lo fue el caso de Ana (ver figura 6), por eso lo anterior sugiere que, con el paso de las actividades, los estudiantes se apropian del funcionamiento del software y de los contenidos de este taller.

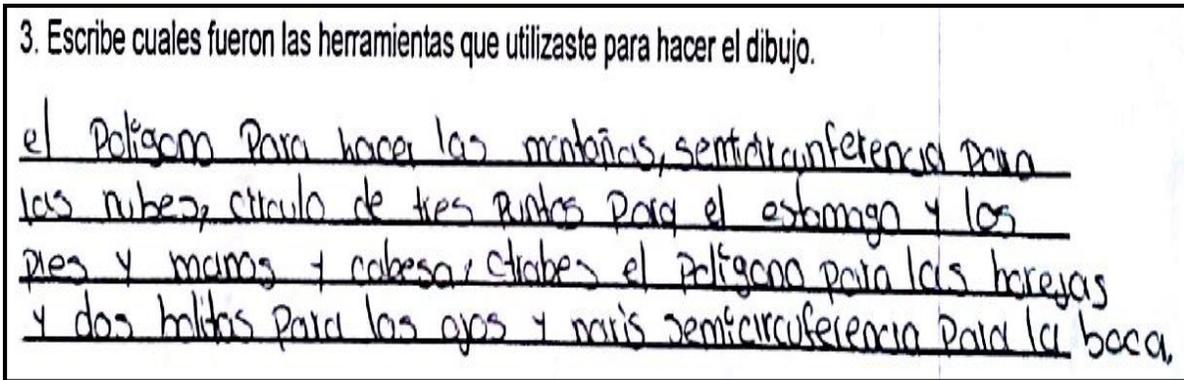


Figura 6. Descripción de las herramientas que Ana utilizo para la construcción del paisaje en el taller N°,1 en la actividad 3

- Actividad N° 4

Se seleccionó el caso de Yesid porque fue uno de los estudiantes que logró responder de forma correcta, debido a que la mayoría de sus compañeros enunciaron nuevamente las herramientas y no figuras geométricas (ver Figura 7), en la cual claramente se enuncian algunas figuras geométricas.

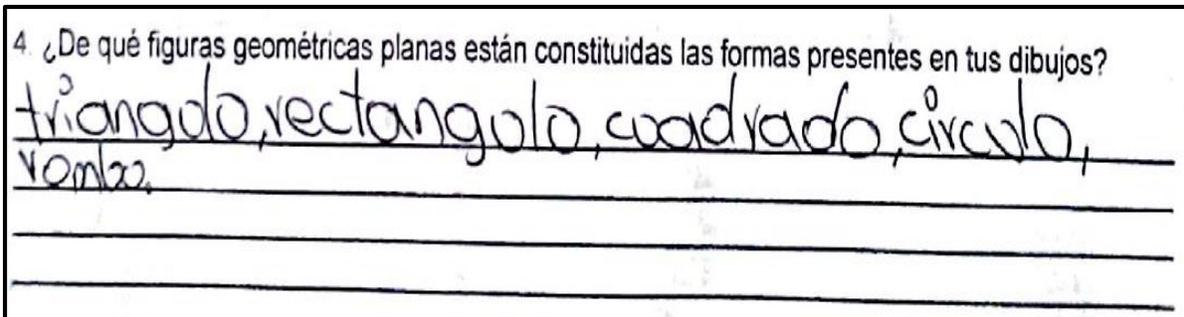


Figura 7. Respuesta por parte de Yesid en el taller N°1, en la actividad 4

- Actividad N°5

La respuesta destacada de esta actividad fue la de Franyer, debido a que asoció el software con el aprendizaje de los polígonos (ver figura 8). Esto marcó diferencia, debido a que los demás estudiantes expresaron que era un programa para hacer dibujos.

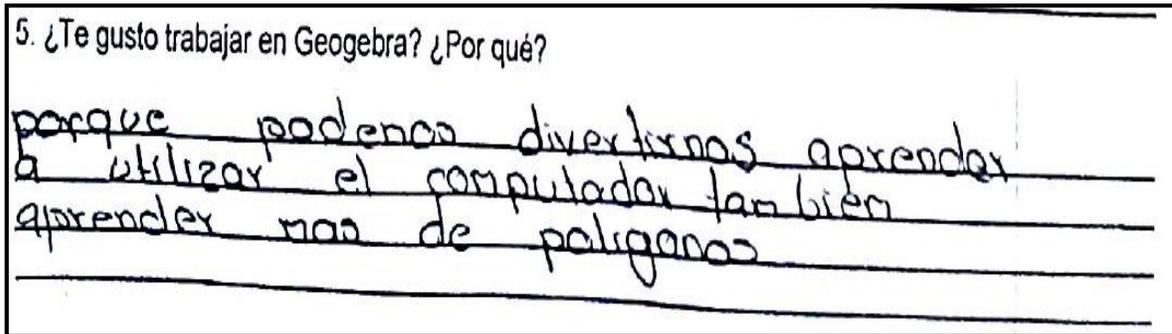


Figura 8. Respuesta por parte de Franyer en el taller N°1, en la actividad 5

- Actividad N° 6

En las respuestas de Yurley se encontró que en las expectativas del trabajo con el software concluyó cual era una de sus funcionalidades (ver figura 9); con esto se evidencia que la estudiante posee pre saberes sobre el tema y los asocia con el nombre de algunas herramientas.

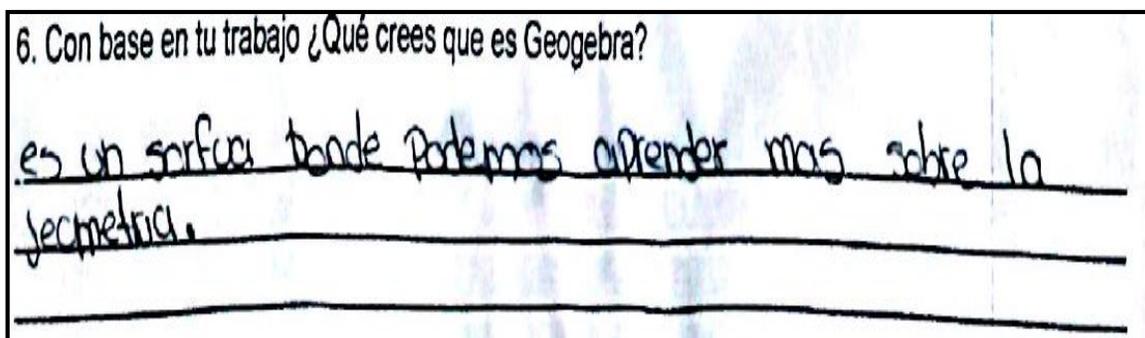


Figura 9. Respuesta por parte de Yurley en el taller N° 1, en la actividad 6

TALLERES N° 2 Y N° 3

Durante el desarrollo de estas actividades se evidenció un alto grado de interés, tanto por el tema como por los medios utilizados, de modo que se generaron bastantes aprendizajes y se trabajó de manera amena este tópico de la unidad de enseñanza. Por otra parte, se identificó el caso de algunos estudiantes que no habían tenido la oportunidad de trabajar con computadores, por esta razón se hizo que antes de explicar el tema polígono, se diera una breve ilustración sobre el manejo de los computadores.

Dentro de las actividades del taller N°2 se espera el nivel 1 de razonamiento Van Hiele. Se observó que los estudiantes realizaron una percepción visual global de los polígonos, identificando estos por su forma y no por sus propiedades matemáticas.

TALLER N°2

- Actividad 1

Algunos de los estudiantes no se limitaron a solo observar los ejemplos y no ejemplos de polígonos. En el trabajo de Joaquín se pudo evidenciar una manipulación de las figuras para ver qué sucedía si movía los puntos allí presentes (ver figura 10). Este acto de curiosidad hace que el estudiante construya nuevas nociones y conocimientos lo cual fue llamativo y ameno debido a los medios empleados para comunicar, representar y producir sus ideas matemáticas.

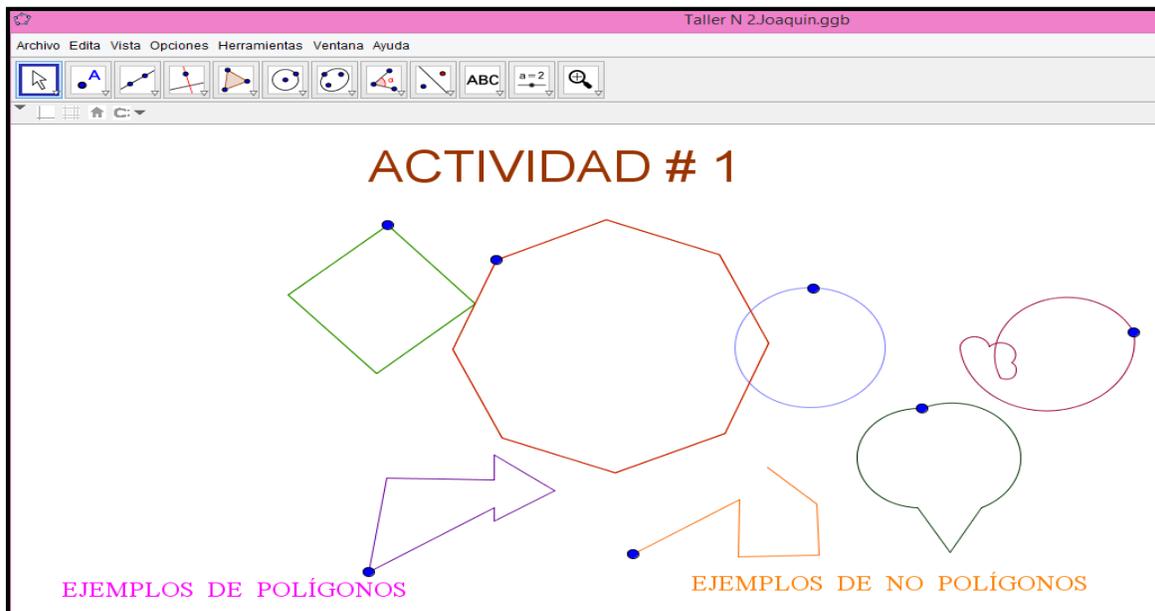


Figura 10 Exploración por parte de Joaquín en el taller N° 2, en la actividad 1

- Actividad N°2

En cuanto a la construcción de la definición de un polígono se destaca el caso de Nathalia, quien plantea que un polígono es “una figura geométrica plana compuesta por segmentos de recta, tienen extremos y vértices” (ver figura 11). Con esta respuesta se considera que la estudiante percibió de manera global, observando las propiedades físicas y algunas propiedades matemáticas. Se puede afirmar que Nathalia se encuentra en el nivel 2 de razonamiento de Van Hiele.

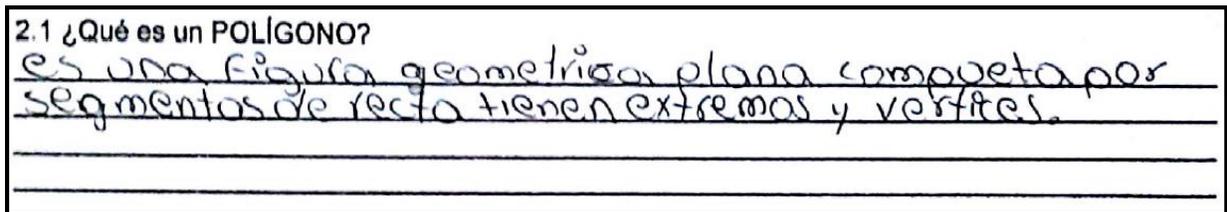


Figura 11. Definición de polígono expresada por Nathalia en el taller N°2, en la actividad 2

Otro ejemplo es el de Leidy, quien define polígono como “es líneas rectas para hacer cualquier figura” (ver figura 12). Esta definición no contiene un proceso de análisis de la información ordenado y coherente, se realiza a través de la intuición, de tal forma que se ubica a la estudiante en el nivel 1 de razonamiento Van Hiele.

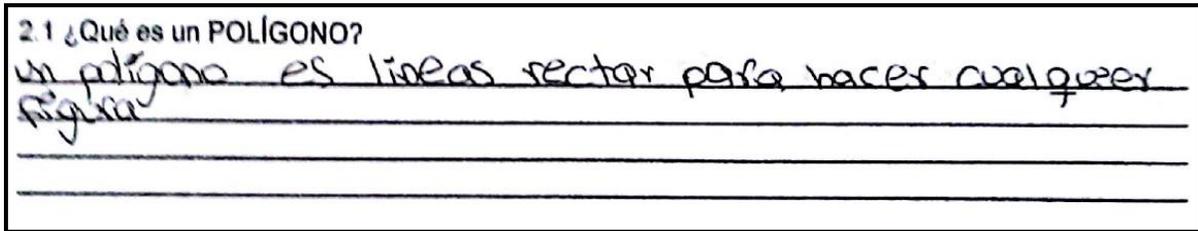


Figura 12. Definición de polígono expresada por Leidy en el taller N°2, en la actividad 2

- Actividad N°3

En la clasificación, todos los estudiantes agruparon de manera adecuada los polígonos y no polígonos; se vio una cooperación, puesto que entre todos llegaron a la conclusión de como clasificar. Se seleccionó el caso de Cristian (ver figura 13) debido a que él fue uno de los que tomó la iniciativa y descubrió que herramienta utilizar; con esta acción se confirma que los

procesos cognitivos deben incluir herramientas, dispositivos, artefactos y medios con los cuales el conocimiento es producido (Villarreal y Borba, 2010).

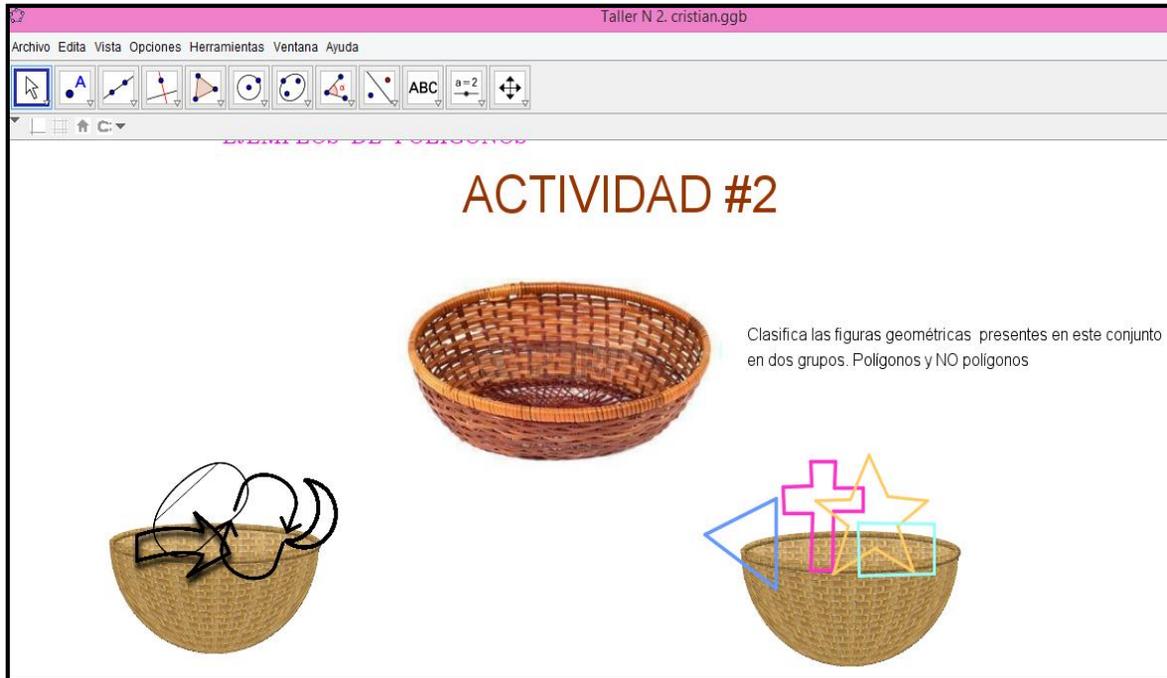


Figura 13. Clasificación de polígonos y no polígonos por parte de Cristian en el taller N°2, en la actividad 3

En cuanto a la explicación de la clasificación de estas figuras, se destaca la hecha por Aljadis, quien dice que las figuras de una de las canastas no son polígonos “*porque están abiertas*” (ver figura 14). Aunque la definición es básica y está hecha teniendo en cuenta características visuales, se observa un avance en el nivel 1 de razonamiento Van hiele.

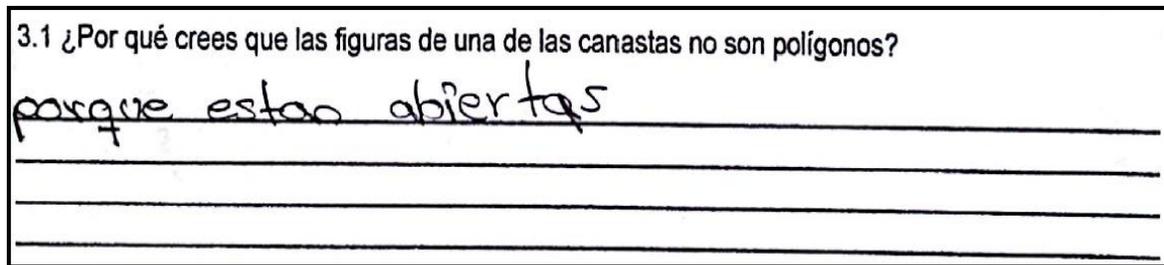


Figura 14. Explicación de la clasificación de las figuras por parte de Aljadis en el taller N°2, en la actividad 3

- Actividad N°4

Los estudiantes desarrollaron de manera correcta las indicaciones dadas, construyendo los polígonos, por tal motivo se evidenció en los estudiantes un avance en el nivel 1 de razonamiento Van Hiele (ver figura 15); la visualización y experimentación de este medio tecnológico permitió que la construcción del conocimiento matemático fuera más dinámico y participativo.

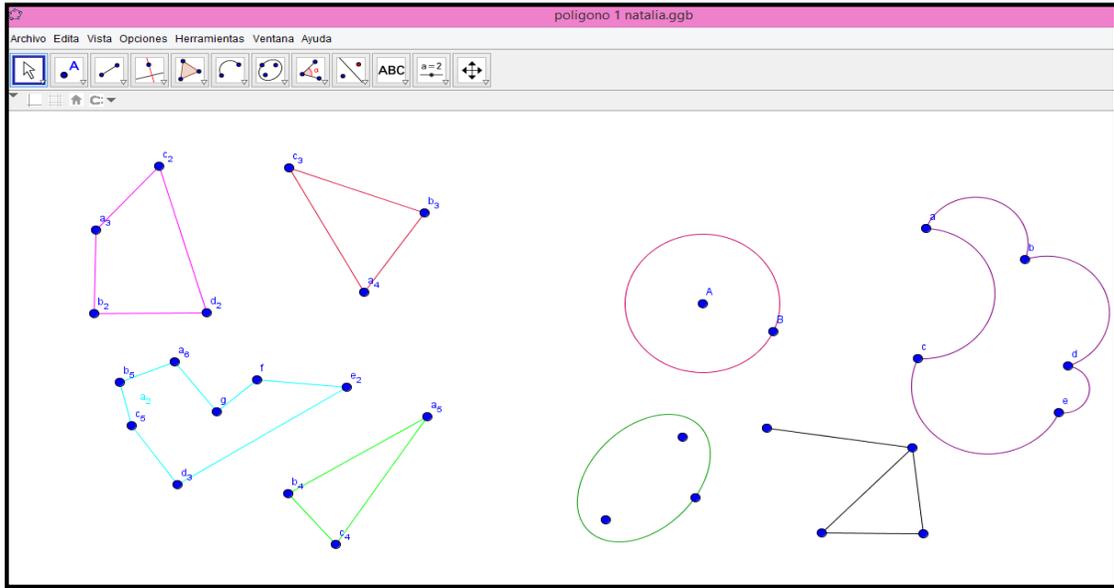


Figura 15. Desarrollo de la actividad por parte de Nathalia en el taller N°2, en la actividad 4

En cuanto a lo sucedido con el movimiento de los puntos, los estudiantes sacaron sus conclusiones y según como lo hicieron se pudo definir si las figuras obtenidas fueron polígonos o no, para ello se presentan las siguientes respuestas (ver figuras 16 y 17)

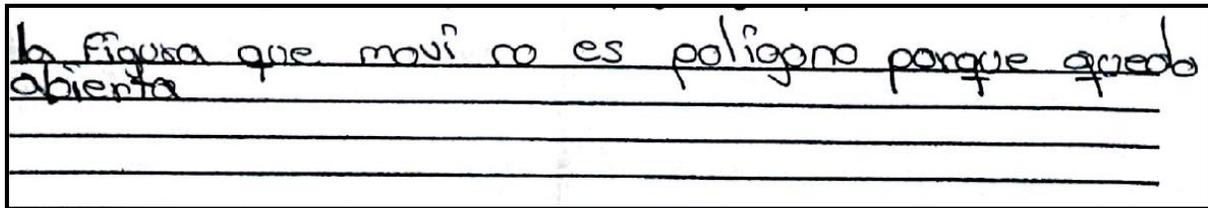


Figura 16. Respuesta por parte de Daniela en el taller N° 2, en la actividad 4

si por que sigue siendo polígono pues queda líneas
rectas y cerradas

Figura 17. Respuesta por parte de Nathalia en el taller N°2, en la actividad 4

TALLER N°3

En las actividades del nivel 2 de razonamiento de Van Hiele, el estudiante visualiza el polígono con propiedades matemáticas, compara figuras teniendo en cuenta sus componentes, realiza una lista de propiedades para la identificación de polígonos, los cuales se describen por sus propiedades.

- Actividad N°1

Se destaca el caso de Andrey, quien para dar respuesta a esta pregunta, además de escribir su opción correcta, construyó una figura similar a la determinada con algunas de las propiedades geométricas dadas (ver figura 18). Por consiguiente se indica que se realiza una transición al nivel 2 de razonamiento Van Hiele; al utilizar el software Geogebra para construir el polígono, se permite analizar cada uno de los elementos y modificar ciertas propiedades sin tener que elaborar una figura diferente.

The screenshot shows the Geogebra software interface. At the top, the title bar reads "Taller 3 andrey.ggb". Below it is a menu bar with "Archivo", "Edita", "Vista", "Opciones", "Herramientas", "Ventana", and "Ayuda". A toolbar contains various geometric construction tools. The main workspace displays a question in Spanish: "1. Laura quiere construir una figura geométrica plana que tengan dos pares de lados paralelos y cuatro lados iguales, pero no recuerda su nombre ¿cómo es el nombre de esta figura?". Below the question are four options: "A. Rectángulo", "B. Trapecio", "C. Rombo", and "D. triángulo". To the right of the options, a blue rhombus has been constructed with four vertices marked by blue dots. The word "rombo" is written in blue text inside the rhombus.

Figura 18. Respuesta y construcción de polígono por parte de Andrey en el taller N°3, en la actividad 1

- Actividad N°2

En la respuesta de esta pregunta, se evidenció que los estudiantes contestaron acertadamente, dado que identificaron y construyeron de manera correcta el polígono que se estaba describiendo (ver figura 19). Se observa un avance en el razonamiento, pues comparan figuras por medio de sus componentes matemáticos, al mismo tiempo que utilizan éstos para identificar figuras; muestra una conexión entre ideas simples y conceptos, generando una construcción del conocimiento de forma crítica y reflexiva.

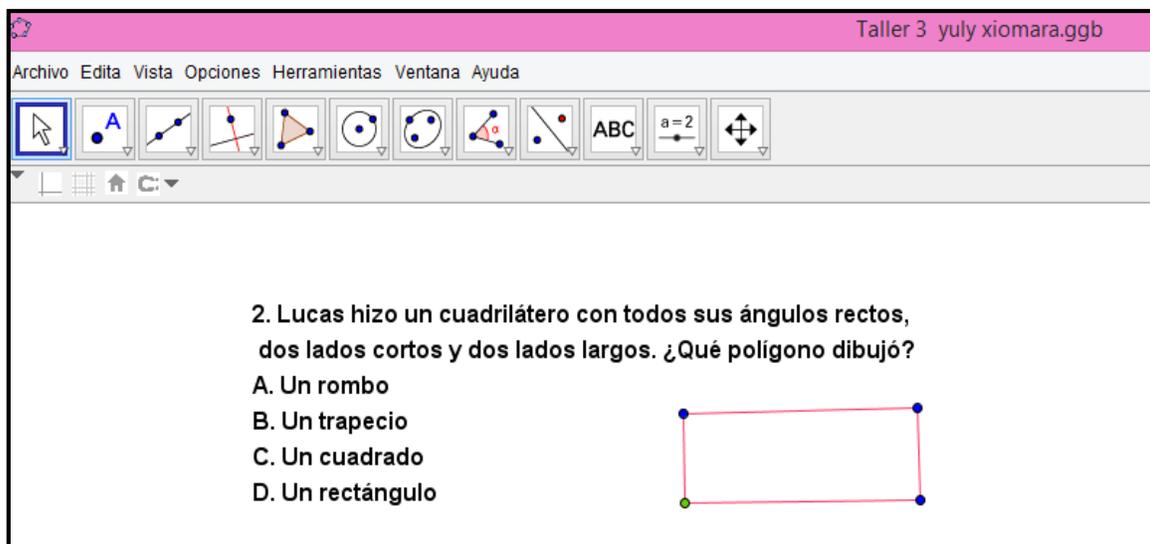


Figura 19. Construcción de polígono por parte de Yuly en el taller N°3, en la actividad 2

- Actividad 3

Los estudiantes desarrollaron de manera adecuada la indicación dada, contestando y justificando sus respuestas, por tal motivo se evidencia un avance al nivel 2 de razonamiento Van Hiele, así como una mejor manipulación del software y sus herramientas (ver figura 20). Con estas evidencias se demuestra que el conocimiento se construye y fortalece a partir de un conjunto de humanos con medios. Por otra parte se evidenció que algunos estudiantes realizaron las actividades de manera visual mirando solo las características básicas de las figuras así mismo, no realizaron la justificación de las respuestas dadas por lo cual se ubican en el nivel 1 de razonamiento Van hiele a pesar que la actividad es diseñada para nivel dos (ver figura 21), esto

indica que los una pequeña cantidad de estudiantes aún no está preparada para hacer la transición de nivel en cuanto a este tópico.

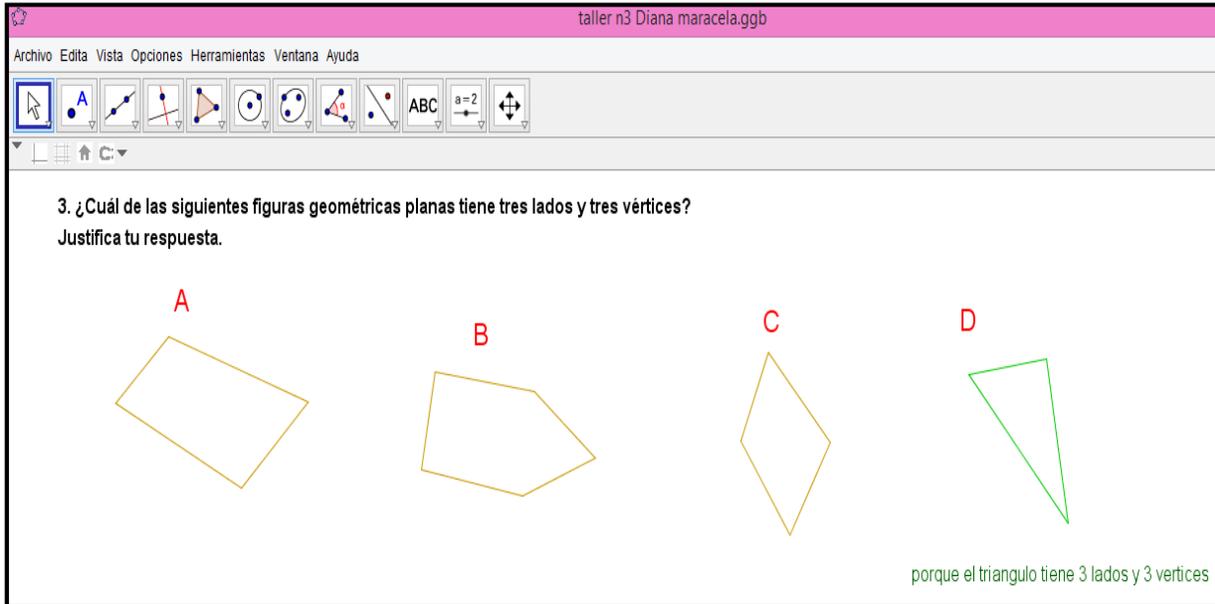


Figura 20. Respuesta por parte de Diana en el taller N°3, en la actividad 3

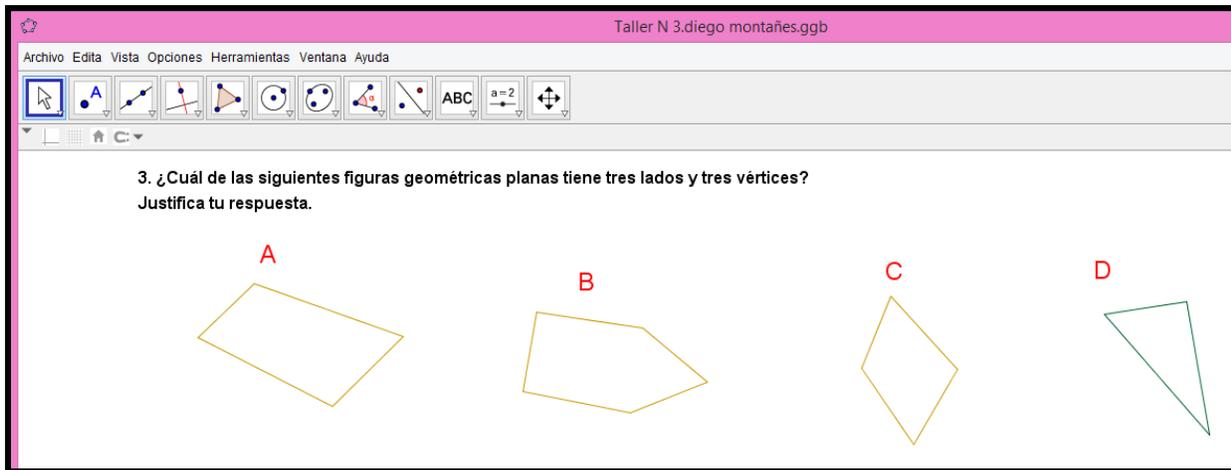


Figura 21. Respuesta por parte de Diego en el taller N°3, en la actividad 3

- Actividad 4

Se destaca el caso de Franyer, quien identifica el cuadrado como el polígono correcto debido a que todos sus dos pares lados son paralelos. (ver figura 21) De tal forma que se indica una apropiación del lenguaje geométrico y un avance en el nivel 2 de razonamiento Van Hiele.

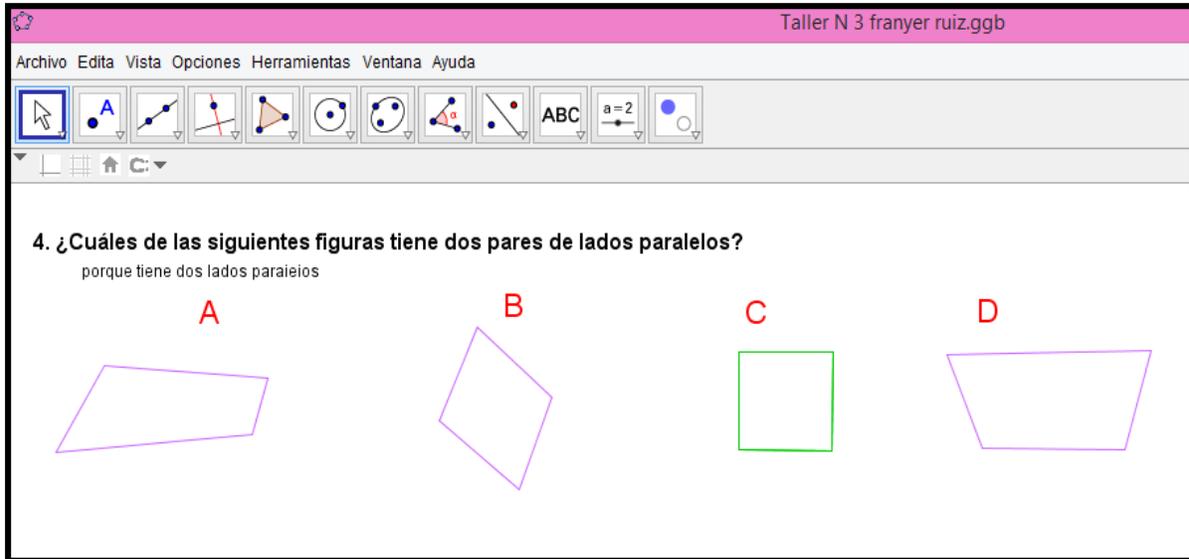


Figura 22. Respuesta por parte de Franyer en el taller N°3, en la actividad número 4

- Actividad N°5

Se evidenció un avance en el razonamiento de los estudiantes debido a que todos desarrollaron adecuadamente la identificación de los polígonos con sus respectivos nombres, por medio de la percepción visual, dando a conocer sus propiedades como condiciones necesarias para determinar el polígono (ver figura 23).

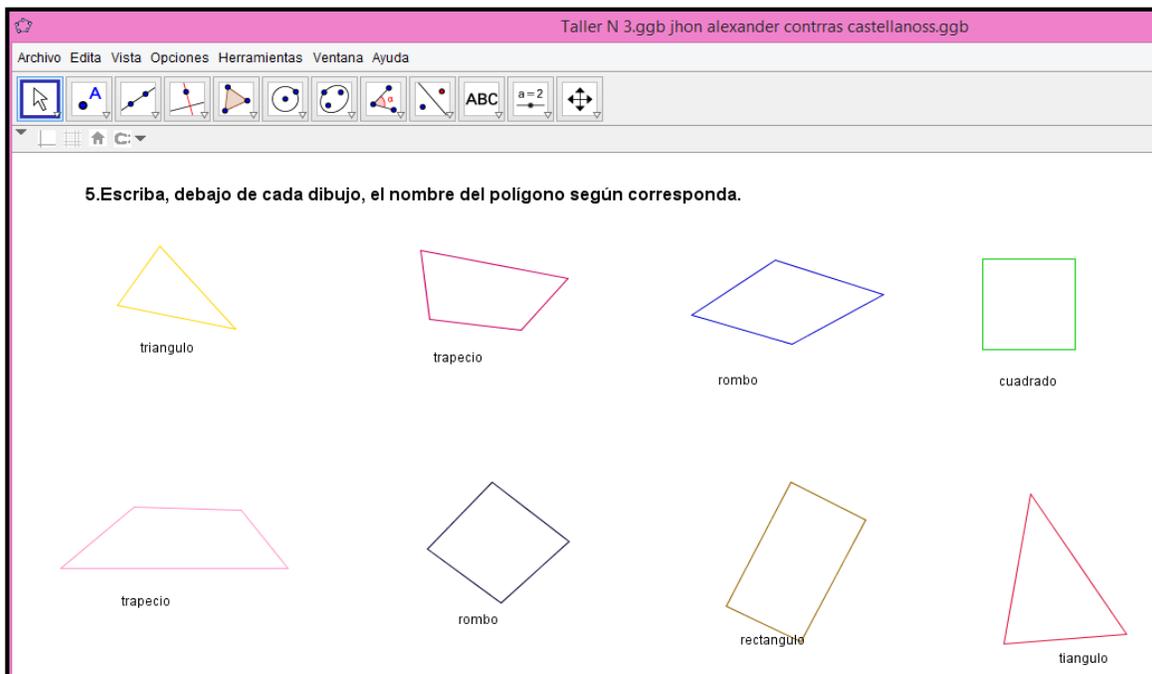


Figura 23. Identificación de polígonos por parte de Jhon en el taller N° 3 en la actividad 5

- Actividad N° 6

Se destaca el caso de Nathalia, quien en la construcción e identificación de las propiedades del polígono realizó una distinción utilizando el mismo color tanto nombres como partes del polígono (ver figura 24); debido a ello se comprueba un avance en el nivel 2 de razonamiento Van Hiele, en el cual la estudiante utiliza un proceso de especificación un poco más complejo; esto además de ser un avance en el razonamiento, contribuye a una mejor visualización de los polígonos y sus propiedades lo cual es posible gracias a los medios tecnológicos utilizados.

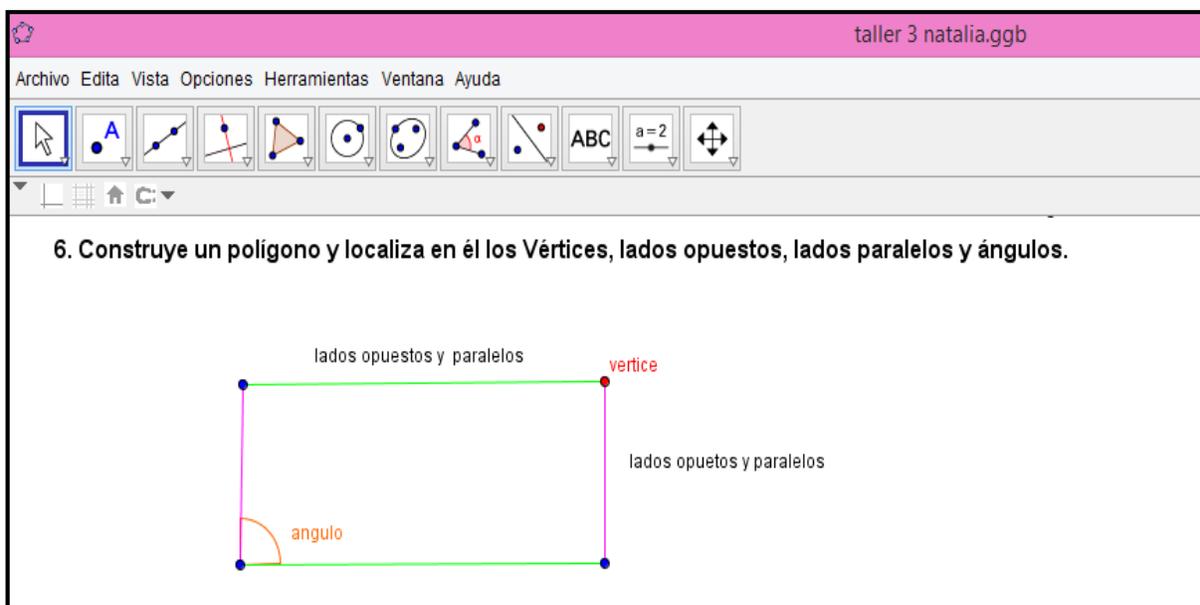


Figura 24. Construcción e identificación de las partes del polígono por parte de Nathalia en el taller N°3, en la actividad 6

TALLERES N° 4 Y N°5

En este apartado se destacó la participación y la motivación de los estudiantes gracias a que con la implementación del software en las actividades y diseños de los talleres se vio un alto grado de interés y aprendizaje; un aspecto importante fue el uso una nueva herramienta llamada deslizador, que se implementó en el taller N°4, lo que llamó: La atención y permitió recordar fácilmente los aspectos relevantes de este tópico, el cual consiste en la clasificación de los polígonos según el número de lados. De igual manera, los estudiantes realizaron con agrado y sin

dificultad las actividades tanto de nivel 1 como de nivel 2, de manera que se demuestra un avance en el razonamiento Van Hiele.

TALLER N°4

- Actividad N°1

Se destaca el caso de Ferney (ver figura 25). Quien en el desarrolló las actividades tuvo más aciertos y participo con mucha facilidad y entusiasmo, terminando siempre de primero y expectante a las nuevas instrucciones. Esta actitud y comprensión, por parte del estudiante, demuestran que está ubicado en el nivel 1 de razonamiento Van Hiele y que con un poco más de trabajo pasará al siguiente nivel de una manera más rápida que sus compañeros.

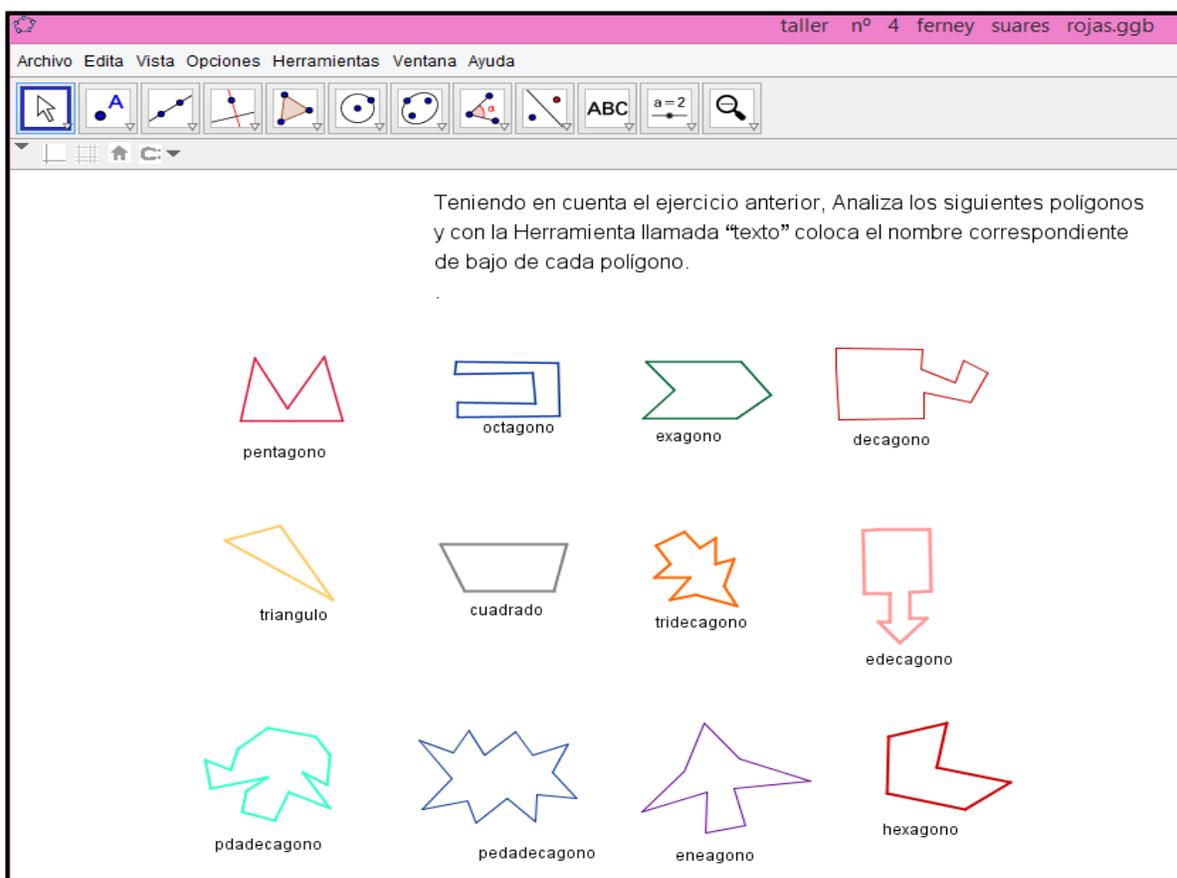


Figura 25. Asignación de nombres a los polígono hecha por Ferney en el taller N° 4, en la actividad 1

- Actividad N°2

En esta actividad se destaca el desarrollo presentado por Daniela, quien además de construir los polígonos correspondientes a los nombres dados, escribió el número de lados que

conforman dichos polígonos (ver figura 26). Esta estudiante también presenta mucho interés por los polígonos y realiza las actividades de manera ágil y fluida, lo cual demuestra que se encuentra ubicada en el nivel 1 de razonamiento Van Hiele y, que al igual que Esteban, solo necesitan un poco de trabajo y orientación para pasar al siguiente nivel.

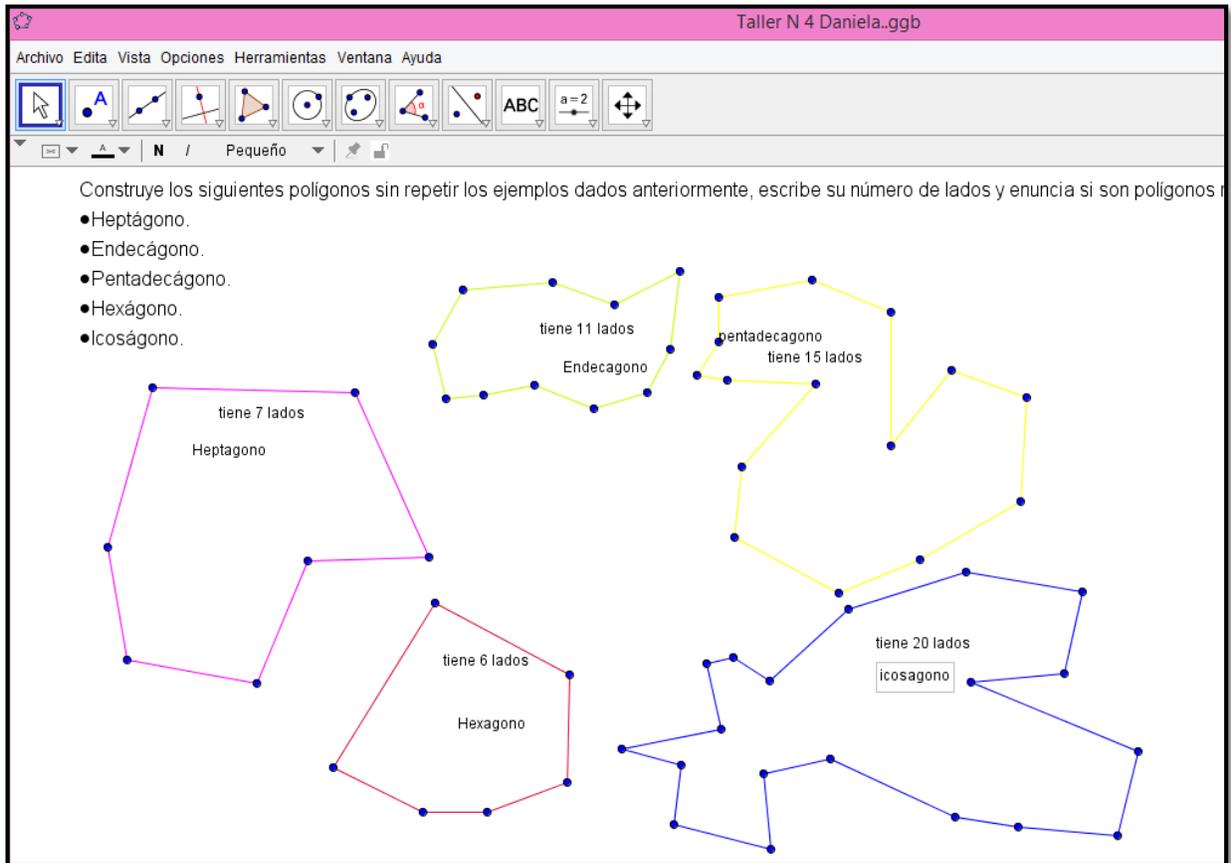


Figura 26. Construcción y clasificación por parte de Daniela sobre los polígonos según el número de sus lados, en el taller N°4 en la actividad 2

TALLER N°5

- Actividad N°1

El desarrollo de este taller fue óptimo debido a que el tema se trabajó de manera seguida y animada. Para la ejecución, el grupo mostró todos los conocimientos adquiridos e identificó las propiedades geométricas correspondientes al construir determinados polígonos e identificar sus partes, aunque en algunos casos la ubicación no fue la adecuada y en otros no se alcanzó la transición al nivel 2. Si se evidencia mayor razonamiento en las respuestas se presentan dos casos para observar de manera concreta dos tipos de razonamientos diferentes en el mismo topico; el primero es de un estudiante que se encuentra en nivel 2 (ver figura 27); y el segundo de un estudiante que no logra la transición de nivel debido a que al construir los polígonos lo hace de manera visual sin especificar las propiedades de cada uno como lo pide la instrucción (ver figura 28). Con estas acciones de algunos de los estudiantes se evidencia un avance en el razonamiento geométrico, lo cual indica que realizan la transición al nivel N°2 de razonamiento Van Hiele mientras otros necesitan de un poco más de tiempo para la realización de la misma, en cuanto al Desarrollo de este tópico; al identificar las propiedades de los polígonos se demostró que con la implementación de medios tecnológicos se redimensiona la manera de producir el conocimiento; debido a que con las herramientas del software los estudiantes encontraron una manera diferente de identificar las propiedades de los polígonos.

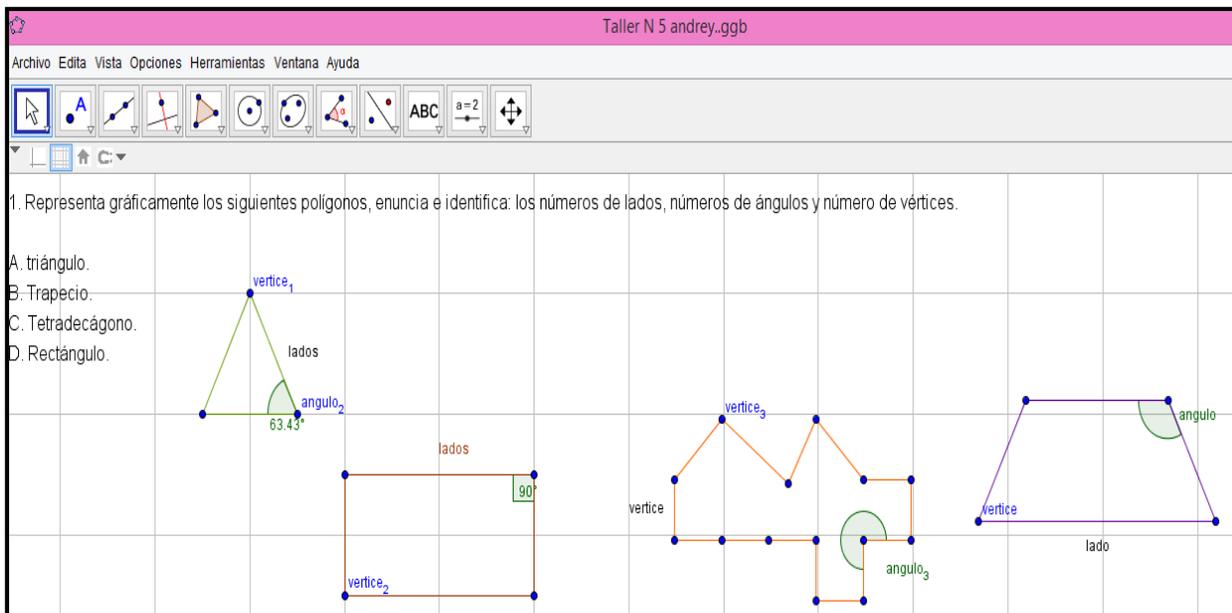


Figura 27. Construcción de polígonos e identificación de sus partes por parte de Andrey en el taller N°5, en la actividad 1

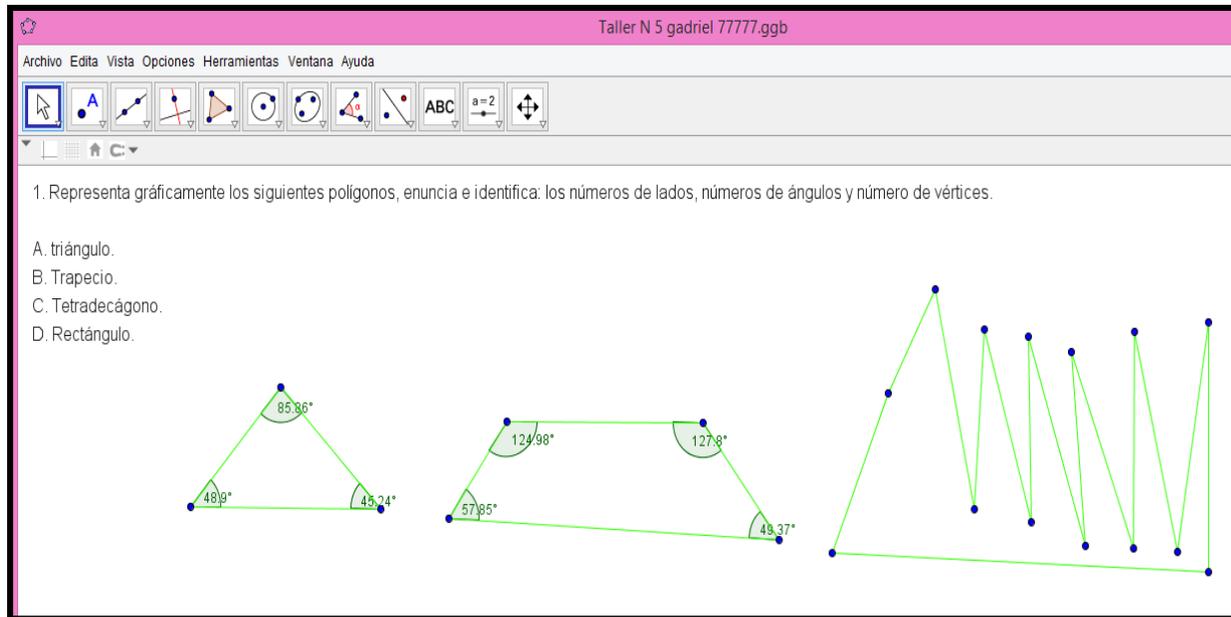


Figura 28. Construcción de polígonos e identificación de sus partes por parte de Andrey en el taller N°5, en la actividad 1

- Actividad N°2

En la producción de Juan Diego se resaltó su trabajo, debido a que identificó la totalidad de las diagonales presentes en cada polígono de manera coherente y ordenada, teniendo en cuenta lo aprendido sobre esta propiedad del polígono (ver figura 29). Así pues se representa un avance en el razonamiento geométrico.

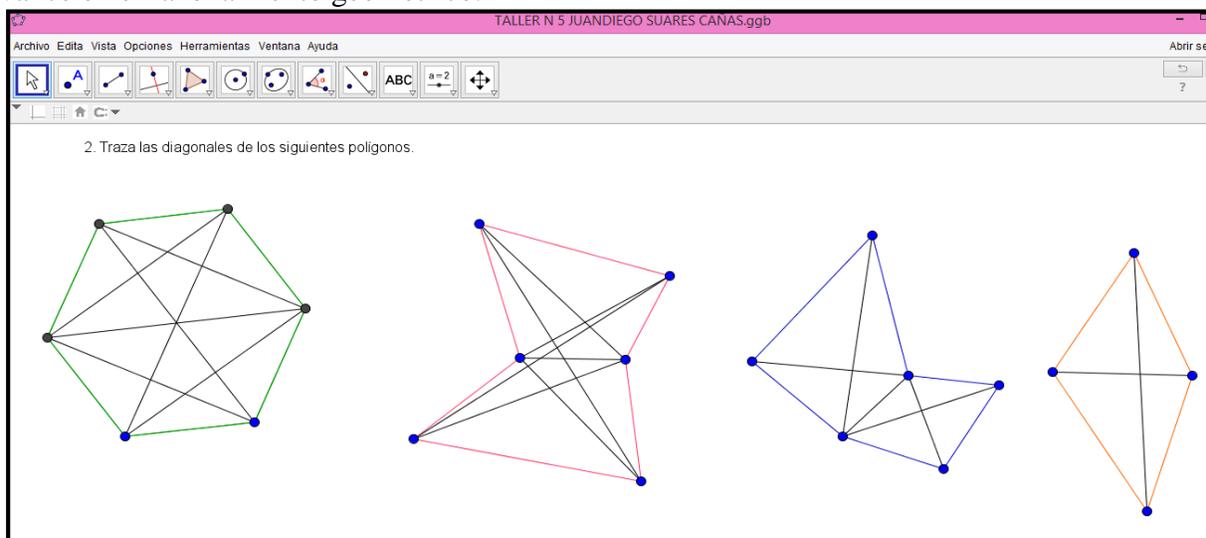


Figura 29. Construcción de diagonales por parte de Juan Diego en el taller N°5 en la actividad 2

TALLERES N°6 Y N°7

Durante el desarrollo de este tópico se destacó la participación de los estudiantes gracias a que la forma de hallar ángulos en los polígonos fue innovadora, debido a que se utilizó el software y los estudiantes conocieron como se realizaba este proceso, lo cual contribuye al desarrollo del razonamiento y genera mayor participación en las diferentes actividades.

- Actividad N°6

Se destaca dos tipos de desarrollo utilizados por los estudiantes, el primero es el ejemplo de Nathalia quien, al igual que muchos de sus compañeros, se limitó a clasificar los polígonos solo según sus impresiones visuales y características básicas (ver figura 30). Por esa razón se ubica en el nivel 1 de razonamiento Van Hiele.

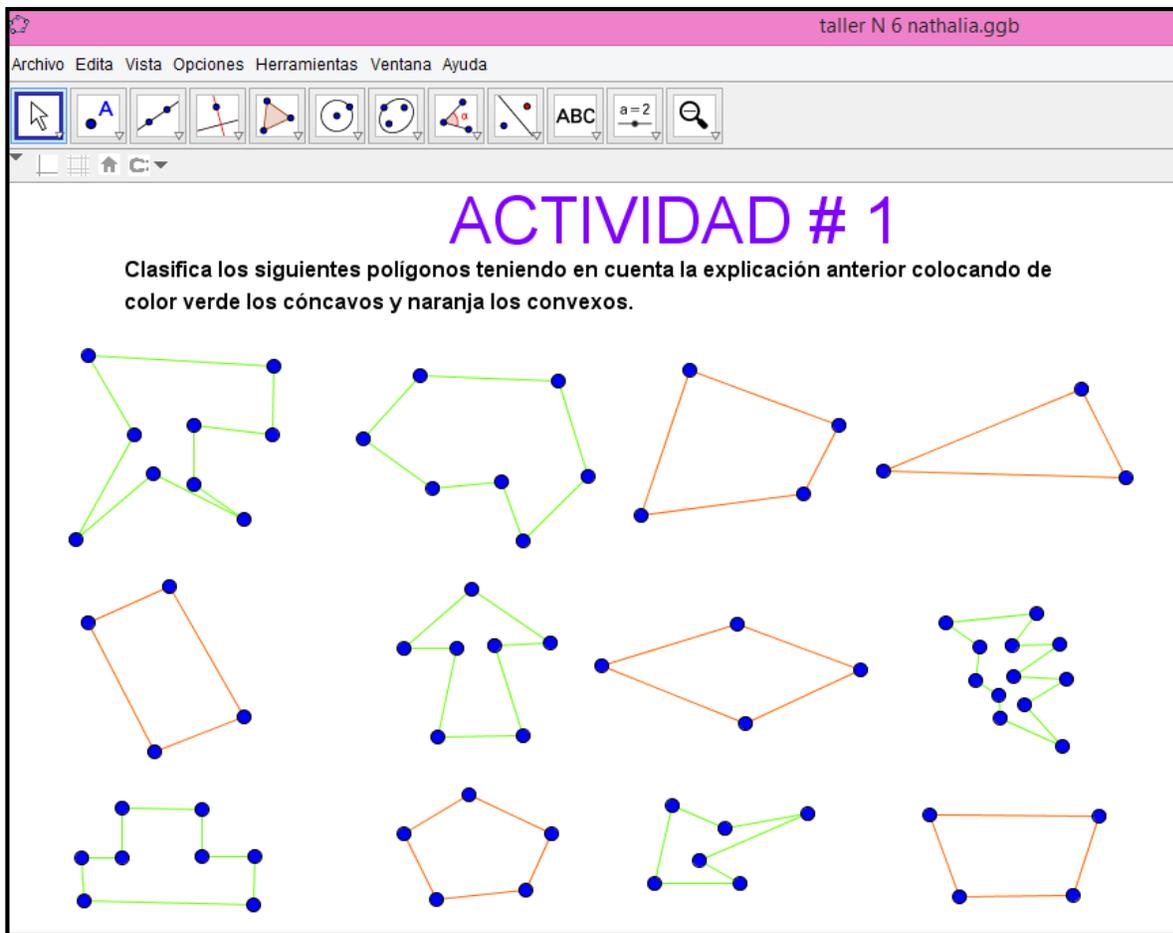


Figura 30. Clasificación de polígonos por parte de Nathalia en el taller N°6, en la actividad 1

El segundo caso del desarrollo fue el demostrado por Daniela, quien, al igual que algunos compañeros, consideró que no era suficiente clasificar los polígonos a simple vista, si no que se dedicó a medir ciertos ángulos para comprobar con propiedades geométricas la veracidad de sus respuestas, es decir, está teniendo en cuenta la medida de los ángulos para organizar su respuesta (ver figura 31). Con este comportamiento se evidencia que la estudiante se encuentra próxima a la transición de nivel de razonamiento, de manera que se le ubicaría en el nivel 2 de razonamiento Van Hiele, en cuanto a este tópico; al tener acceso a nuevas tecnologías, la estudiante aprovechó que el software tiene una herramienta que permite medir los ángulos de los polígonos y la utilizó para darle veracidad a su respuesta, con esto se evidencia que el trabajo conjunto con los medios adecuados produce un mejor aprendizaje.

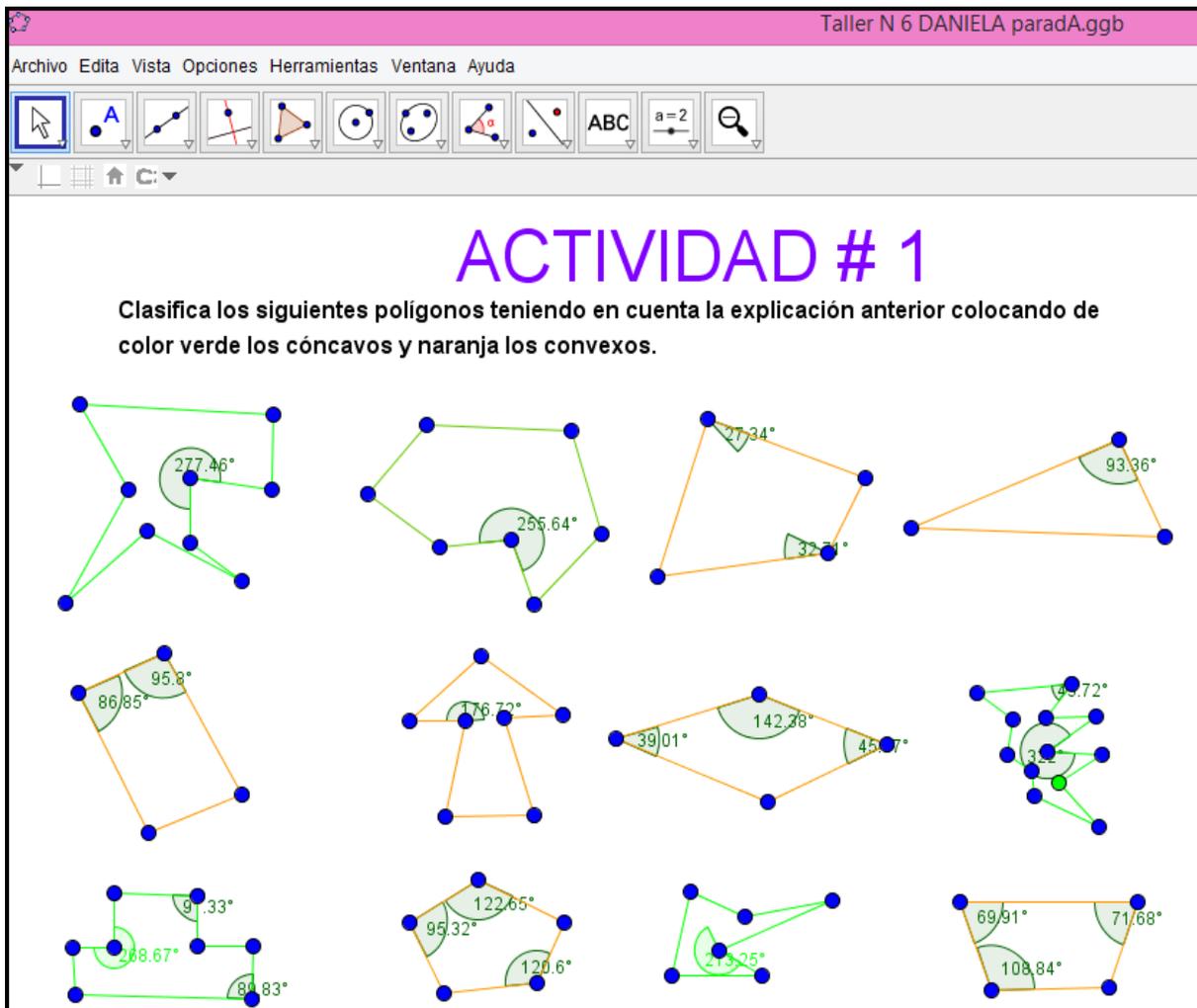


Figura 31. Clasificación de polígonos por parte de Daniela en el taller N°6, en la actividad 1

- Actividad N°2

En la producción de Franyer se observó que las construcciones de los polígonos iban acompañadas de las medidas que comprueban sus propiedades, al igual se observó que el estudiante realizó una clasificación de colores a pesar de no estar en las indicaciones (ver figura 32); con esto el estudiante demuestra que es necesario tener un soporte de medida para poder dar respuesta de manera adecuada a esta actividad del taller; esto indica un aumento en el nivel de razonamiento por parte del estudiante y lo ubica en el nivel 2 de razonamiento Van hiele a pesar que la actividad está diseñada para el nivel 1.

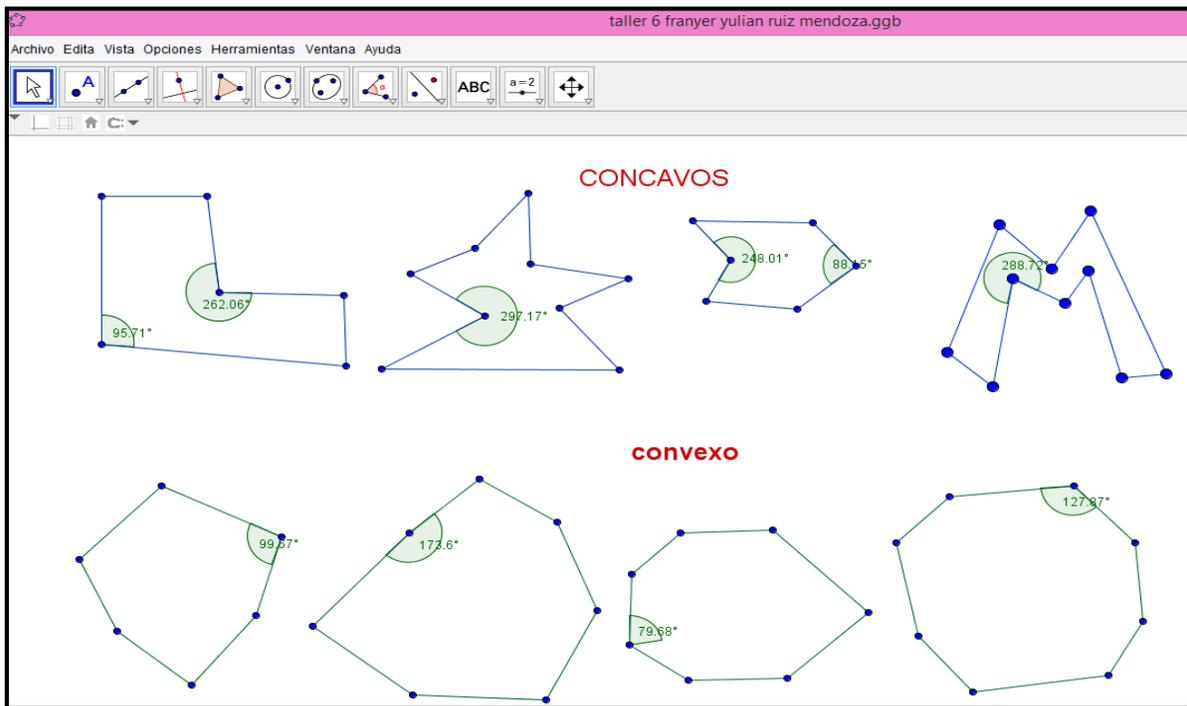


Figura 33. Construcción y clasificación de polígonos por parte de Franyer en el taller N°6, en la actividad 2

TALLER N°7

Los estudiantes mostraron progreso en su razonamiento debido a que identificaron los polígonos colocando en cada una de las partes correspondientes del mapa conceptual el polígono correspondiente (ver figura 34); aunque no en todos los casos se logró que los estudiantes midieran los ángulos al momento de clasificar los polígonos, este es el caso de Joaquín quien solo los clasificó teniendo en cuenta sus propiedades visuales y no las matemáticas (ver figura 35), por ello se puede estipular que el estudiante aún se encuentra en el nivel 1 de razonamiento Van Hiele. Cabe resaltar que la clasificación de los polígonos por parte de los demás estudiantes se realizó a través de la medida de los ángulos, la cual fue realizada de manera correcta.

The screenshot shows a software window titled "Taller N 7 esteban.ggb". The main content area is titled "TALLER # 7" and contains the instruction: "1. Observa los siguientes polígonos y clasificalos en el recuadro correspondiente. Finalmente escribe la definición de cada grupo." Below this, there are two boxes:

- POLÍGONOS CONCAVOS:** Contains several concave polygons with interior angles labeled: 4.25° , 5.0° , 80.78° , 88.45° , 290.86° , and 284.86° . Below this box is a yellow box with the definition: "DEFINICIÓN tiene que tener 1 angulo que mida mas de 180° ".
- POLÍGONOS CONVEXOS:** Contains several convex polygons with interior angles labeled: 14.3° , 68.24° , 68.8° , 132.77° , 109.03° , 13.83° , 49.54° , 80.01° , 66.19° , 64.28° , and 13.4° . Below this box is a yellow box with the definition: "DEFINICIÓN todos los angulos miden menos de 180° ".

Blue arrows point from the polygons to their respective definition boxes. A cyan line connects the two definition boxes, with small green boxes containing 180° at the connection points.

Figura 34. Identificación y definición de polígonos por parte de esteban en el taller N°7, en la actividad 1

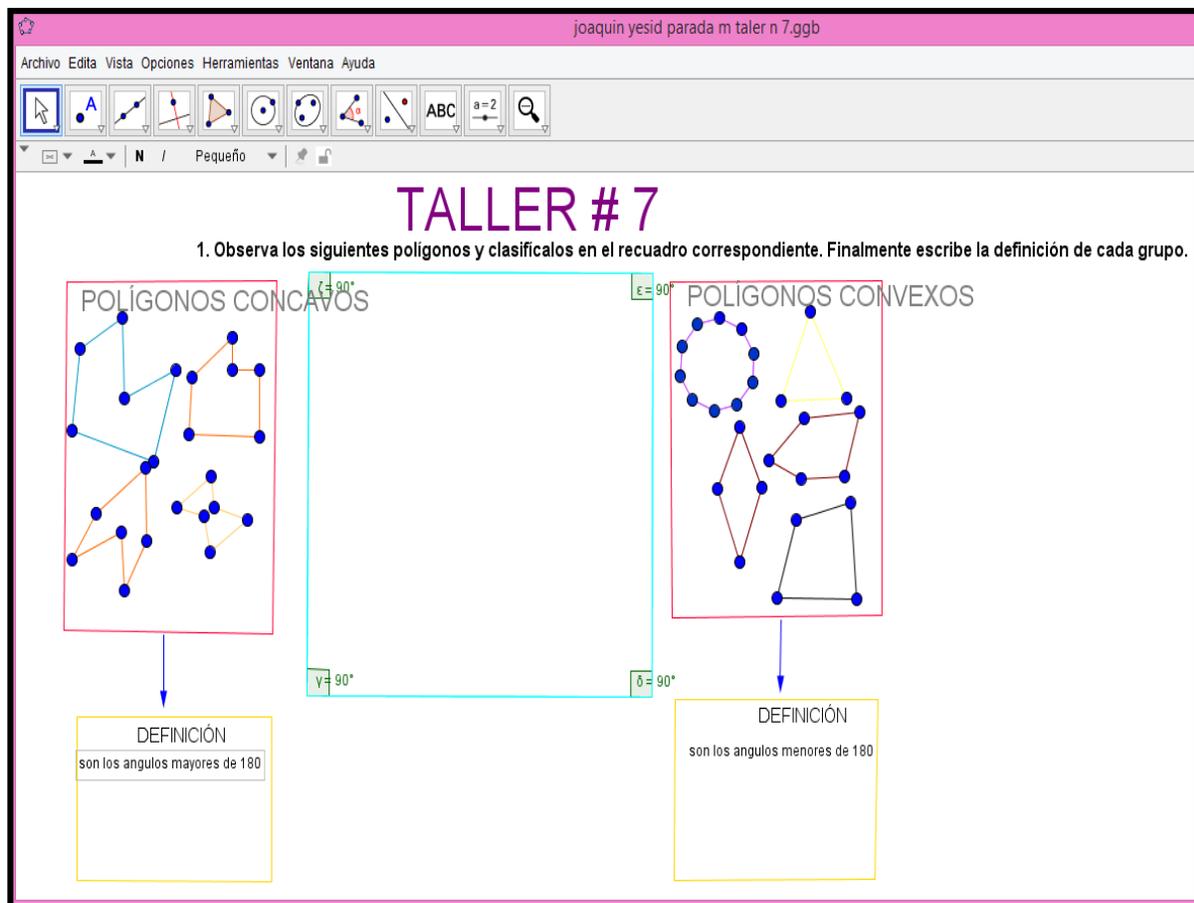


Figura 35. Identificación y definición de polígonos por parte de Joaquín en el taller N°7, en la actividad 1

- Actividad N°2

En la producción de Juan Diego se observó la adecuada construcción de los polígonos teniendo en cuenta las medidas de los ángulos estipuladas (ver figura 35). Lo cual demuestra un buen manejo de los términos geométricos y las herramientas del software, demostrando así un aumento en el razonamiento ubicando al estudiante en el nivel 2 de Van Hiele.

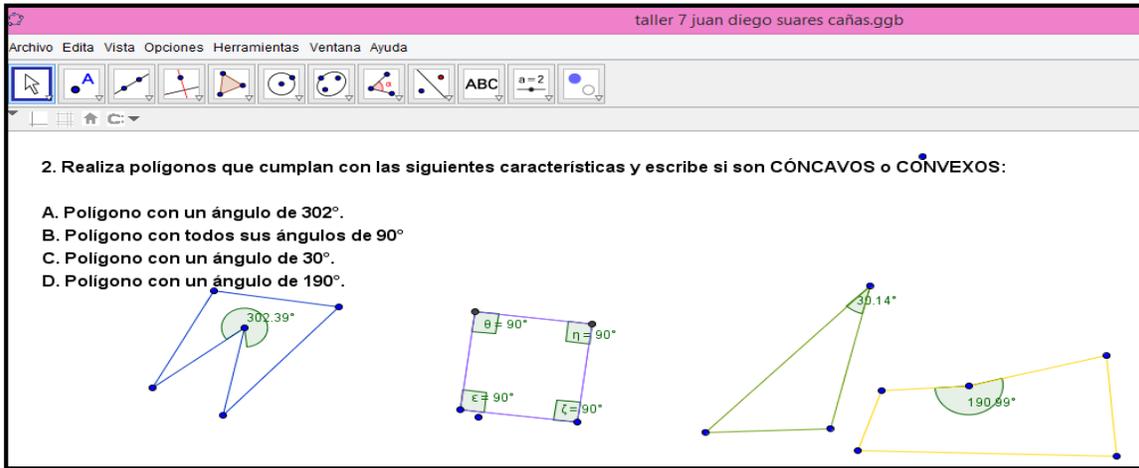


Figura 36. Construcción de polígonos por parte de Diego en el taller N°7, en la actividad 2

- Actividad N°3

Está formada por dos subactividades. En el punto número 1, se resaltó a Gabriel, “por su justificación *porque los ángulos miden más de 180°*”, que consta de descripciones por medio de propiedades geométricas (ver figura 37); además, midió los ángulos de todos los polígonos antes de dar su respuesta

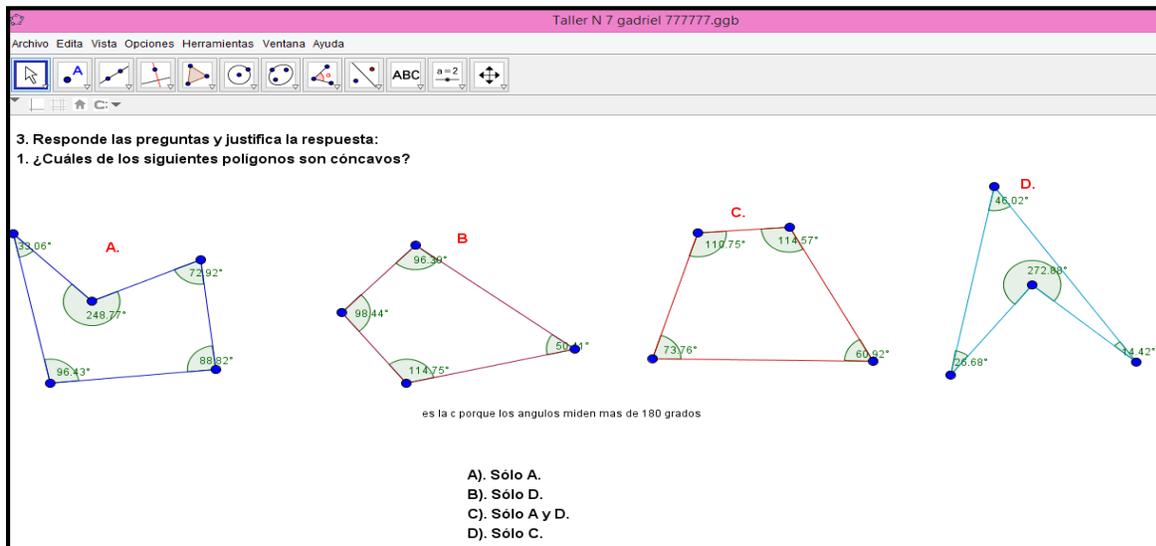


Figura 37. Respuesta por parte de Gabriel en el taller N°7, en la pregunta N°1, en la actividad 3

En el punto 2, se encontró el caso de Yusely quien da respuesta correcta “*porque medí los ángulos y miden menos de 180°*” utilizando una justificación con las propiedades matemáticas adecuadas para identificar los polígonos (ver figura 38). Se observa un avance en su razonamiento, pues a cada polígono le tomó medidas para identificar la respuesta correcta, detectando propiedades geométricas mediante la experimentación y práctica de las herramientas del software.

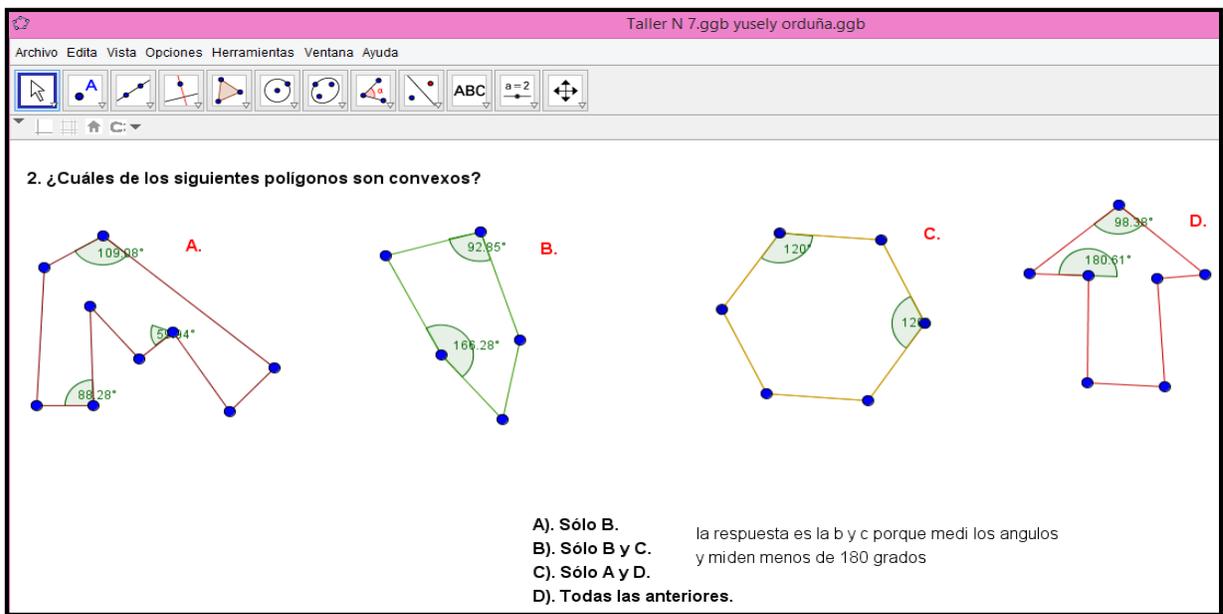


Figura 38. Respuesta por parte de Yusely en el taller N°7, en la pregunta N°1, en la actividad 3

CAPÍTULO 8

8. CONCLUSIONES GLOBALES, LIMITACIONES E IMPLICACIONES

Se considera pertinente presentar en este capítulo conclusiones globales, implicaciones e implicaciones derivadas todas del proceso de investigación llevado a cabo.

8.1. Conclusiones globales

En este apartado se dará a conocer las diversas conclusiones de la investigación, teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes, el alcance de los objetivos, la influencia del marco teórico, la implementación de medios tecnológicos y, por último, lo concerniente a la unidad de enseñanza, logrando una visión clara y objetiva de todo el proceso aplicado.

Sobre los objetivos

- En cuanto a los objetivos propuestos al inicio de la investigación, se considera que se cumplieron a cabalidad pues se logró caracterizar el aprendizaje de los estudiantes usando el software Geogebra como mediador en una unidad de enseñanza con la cual se evidenció y analizó el trabajo de los estudiantes y su razonamiento geométrico teniendo en cuenta el modelo Van Hiele.

Sobre el marco teórico

- La teoría de Van Hiele demuestra que, a pesar de su descubrimiento no tan reciente, sigue siendo vigente en cuanto a los procesos de aprendizaje en geometría, y su grado de pertinencia le permite adaptarse a nuevas teorías lo cual la hace aún más completa.

- El marco teórico fue claro, coherente y puntual para el esbozo y cumplimiento de la unidad de enseñanza, así como para analizar la caracterización del aprendizaje de los estudiantes.

- Se identificó la pertinencia de implementar el constructo Humanos-con-Medios junto al modelos Van Hiele, para diseñar una unidad de enseñanza utilizando el software Geogebra permitiendo así un mejor aprendizaje por parte de los infantes y una óptima caracterización de dicho aprendizaje por parte de la investigadora.

Sobre la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes

En este apartado, se pretende dar a conocer los logros obtenidos por los estudiantes participantes, en torno al trabajo con el software y el modelo teórico de Van Hiele. En cuanto al constructo Humanos-con-Medios, se genera en los estudiantes aprender por medio de exploración, construcción y elaboración de polígonos utilizando herramientas tecnológicas, las cuales permiten que el estudiante cree su propio aprendizaje significativo y el docente sea un guía en el proceso.

- Se evidenció en las producciones de los estudiantes algunas características propias del razonamiento Van Hiele, en cuanto al aprendizaje de los polígonos, lo cual permitió realizar una caracterización adecuada sobre el aprendizaje de dicho tema.

- En el transcurso de la aplicación de los talleres, se evidenció que a medida que avanzaba la unidad de enseñanza las respuestas por parte de los estudiantes eran más evolucionadas y contenían un alto nivel de lenguaje geométrico así mismo en cuanto a la utilización y funcionamiento del software y sus herramientas, por ejemplo, cuando los estudiantes compartían, explicaban y analizaban sus definiciones y construcciones con las de sus compañeros.

- Se logró demostrar que al final del proceso de aplicación una pequeña parte del grupo no paso del nivel 1 de razonamiento Van Hiele, un buen número de estudiantes se encuentra en el paso al nivel 2, y una pequeña proporción de estudiantes termino la unidad de enseñanza razonando en nivel 2.

- Al momento de realizar los talleres, algunos de los estudiantes mostraron dominio en el campo de la informática, por lo que su trabajo fue más ágil que el de sus demás compañeros y esto permitió un mejor aprendizaje de los tópicos derivados.

- En torno al modelo teórico de Van Hiele, se considera que un pequeño porcentaje de estudiantes, mostraron pre saberes ante los polígono, y otros expresaron avance en su razonamiento, pues siendo talleres del nivel 1 las desarrollaban con habilidades del nivel 2.

- Los estudiantes al principio de la experimentación se sentían motivados pues al tener un computador para cada uno y trabajar con un nuevo programa sus procesos de aprendizaje estaban variando y se evidenció una mejor construcción del conocimiento integrando las tecnologías a su entorno generando un mejor ambiente de trabajo.

Sobre la unidad de enseñanza

- La implementación de medios tecnológicos hacen que el diseño instruccional contemple elementos agradables y de fácil acceso tanto para los estudiantes, al momento de ejecutar las actividades, como de la investigadora al momento de realizar la recolección de la información, para así realizar un mejor análisis.

- Al analizar las producciones de los estudiantes, se permite evidenciar que los resultados en cuanto al aprendizaje de los polígonos es una complementación del diseño instruccional de los talleres y el compromiso y la labor desempeñada por el docente.

- Se logró diseñar una unidad de enseñanza innovadora, en el marco del constructo teórico Humanos-con-Medios y el modelo teórico de Van Hiele, permitiendo un mejor razonamiento y aprendizaje de los polígonos, en los estudiantes del grado quinto del ITSFAJAG.

8.2. Limitaciones

Se considera importante exponer algunas limitaciones presentadas durante el proceso de investigación:

- El periodo de tiempo permitido por la institución educativa y la docente titular, para la aplicación de la unidad de enseñanza por parte de la investigadora, fue preciso y riguroso.

- La utilización de los computadores para realizar otras actividades o explorar mientras se daba la explicación, generó distracción en algunos de los estudiantes.

- La inasistencia de algunos de los estudiantes del curso durante la implementación de la unidad de enseñanza, no permitió caracterizar en ellos su trayectoria de aprendizaje; de igual manera la cancelación de las clases por parte de actividades de la institución obstaculizó dicho proceso.

8.3. Implicaciones

Desde la investigación realizada se ponen de manifiesto una serie de contribuciones, implicaciones y consideraciones para futuros estudios como las que se plantean a continuación:

- Capacitar y motivar a los profesores para diseñar y aplicar estrategias tecnológicas como herramientas para mejorar y facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría.

- Incentivar la realización de estudios inclinados a lograr caracterizaciones de nivel de Van Hiele en otros temas de geometría.

- El estudio permite avanzar en la caracterización del razonamiento de los estudiantes de primaria, particularmente en edades comprendidas entre 9 y 11 años, identificando elementos clave en el aprendizaje de temas geométricos. Dichos elementos aportan información a aquellas investigaciones que se dedican al análisis de modelos que buscan explicar cómo los estudiantes razonan y comprenden los polígonos.

RECOMENDACIONES

En este apartado, se enuncian algunas recomendaciones que se pueden tener en cuenta al momento de desarrollar investigaciones similares:

- Al momento de planificar las actividades, el docente debe tener en cuenta que es importante incentivar y desarrollar el razonamiento de los estudiantes por medio de tareas y tecnologías que permitan explorar, argumentar y utilizar sus ideas y conocimientos.

- El proceso educativo involucra que el docente innove sobre su propia práctica, lo que le podría permitir implementar diversas estrategias de enseñanza-aprendizaje y lograr una enseñanza de calidad.

- Dada la importancia del razonamiento visual en el aprendizaje de los polígonos, este estudio considera pertinente que los profesores, al momento de diseñar sus planes, tengan en cuenta que deben incluir actividades y mediaciones que motiven y agraden al estudiante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arias, F. (1999). *El Proyecto de Investigación*. Caracas: Episteme.
- Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación introducción a la metodología científica*. Caracas: Episteme.
- Borba, M. (1999). Tecnologías Informáticas na Educação Matemática e Reorganização de Pensamento. En: M. Bicudo (org.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas* (pp. 285-295). São Paulo: Editora UNESP.
- Borba, M. y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking. Information and communication technologies, modelling, experimentation and visualization*, U.S: Springer.
- Borba, M. y Villa-Ochoa, J. (2011). *Humans-with-Media en una producción de conocimiento matemático. El caso de Geogebra*. 12° Encuentro colombiano de Matemática Educativa. Quindío, Colombia.
- Borba, M., Scucuglia, R. e Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação matemática. Sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, vol.17 (1), 31-48.
- Cabanne, N. y Ribaya, M. (2009). *Didáctica de la Matemática en el nivel inicial*. Buenos Aires: Bonum.
- Cedeño, M. G. (2011). *Pensamiento Geométrico y Métrico*. Bogotá D.C, Universidad Nacional de Colombia.
- Eizagirre, M y Zabala, N. (2006). Investigación acción participativa (IAP). *Diccionario de Acción Humanitaria y Cooperación al Desarrollo*. Recuperado el 04 de noviembre de 2015 desde <http://www.dicc.hegoa.ehu.es/listar/mostrar/132>.
- Esteley, C. (2006). Reseña del libro: *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking. Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. En: *Yupana*, 3 (6), pp. 89 – 93.

- Fidias, G. (2012). *El proyecto de investigación*. Caracas: Episteme.
- Flórez, T., Quintero, M., y Villareal, Y. (2015). *Análisis de la comprensión de polígonos basado en el modelo teórico de Van Hiele*. Trabajo de grado. Universidad de Pamplona, Colombia.
- Gualdrón, É. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.
- Gualdrón, É., Jiménez, J. y Gutiérrez, Á. (2012). Análisis de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio de caso. En J. Rodríguez, A. Urieles y A. Villareal (Eds.), *Resúmenes de la vigésima sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, (Vol. 1, pp. 196). Belo Horizonte, Brasil.
- Gualdrón, É. y Gutiérrez, Á. (2014). La visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Un ejemplo. En J. Rodríguez, A. Urieles y A. Villareal (Eds.), *Resúmenes de la vigésima octava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, (Vol. 1, pp. 196). Barranquilla, Colombia.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 20 (2 y 3), 27-46.
- Hurtado, J. (2000). *Metodología de la investigación holística*. Caracas: Fundación Sypal.
- Ibarra, F. (2001). *Metodología de la Investigación Social*. La Habana: Félix Varela.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.
- Lévy, P. (1993). As tecnologias da inteligencia. O futuro do pensamento nu era da Informática. C.I. Costa (Traductor). *Les technologies de l'intelligence*. Brasil, Sao Pablo: Editora 34.
- M.E.N. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
- Méndez, C. (1988). *Metodología, guía para elaborar diseños de Investigación en ciencias económicas, contables y administrativas*. Bogotá: Mac Graw-Hill Latinoamericana.

- N.C.T.M. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (S.A.E.M. Thales, Trans. 1 ed.). Reston: N.C.T.M.
- Pegg, J. y Davey, G. (1998). Interpreting student understanding in geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 109-135). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Porlán, R. (1987). El Maestro como Investigador en el Aula. Investigar para Conocer, Conocer para Enseñar. *Revista Investigación en la Escuela*, vol.1, 63-69.
- Porlán, R. y Martín, J. (1991). *El Diario del Profesor*. Sevilla: Diada.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (2004). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. La Habana: Félix Varela.
- Santa, Z. (2015). *Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel*. Tesis doctoral. Universidad de Antioquia, Colombia.
- Souto, D. (2013). *Transformações expansivas em um curso de educação matemática a distância online*, (tese de doutorado no publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ríó Claro, SP.
- Tamayo, M. (1991). *Metodología, formal de investigación, científica*. México D. F.: Limusa/Noriega.
- Tikhomirov, O. (1981). The psychological consequences of computerization. In: Wertsch, J. (Ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology* (pp. 256-278). New York: M. E. Sharpe Inc. Recuperado de: <http://www.dma.uem.br/kit/textos/pcm/tikhomirov.doc>
- Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School*. Tesis doctoral. University of Utrecht, Holanda. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes y Tischler, 1984, pág.1-206)
- Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral. Universidad de Utrecht, Holanda. (Traducción al español). Recuperado el 05 de junio de 2015 desde <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>

Villa-Ochoa, J., Y Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: Seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de noción variacional. *Educação matematica pesquisa*.

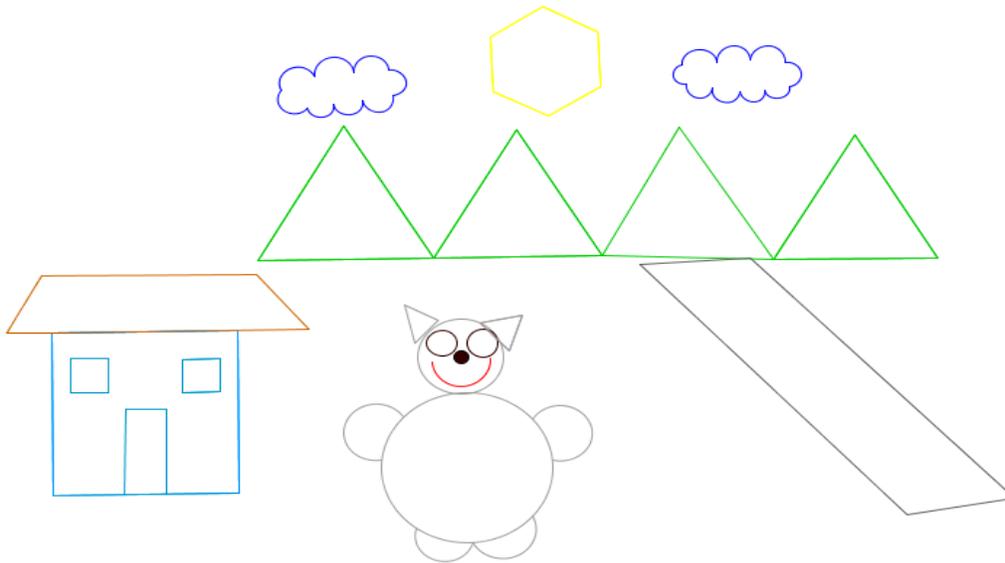
ANEXOS

UNIDAD DE ENSEÑANZA

ANEXO 1
TALLER N°1

1. Explora las herramientas de Geogebra y enuncia las que más te gustaron explicando su función.

2. Realiza el siguiente dibujo utilizando las herramientas que desees excepto la denominada “lápiz”.



3. Escribe cuales fueron las herramientas que utilizaste para hacer el dibujo.

4. ¿De qué figuras geométricas planas están constituidas las formas presentes en tus dibujos?

5. ¿Te gusto trabajar en Geogebra? ¿Por qué?

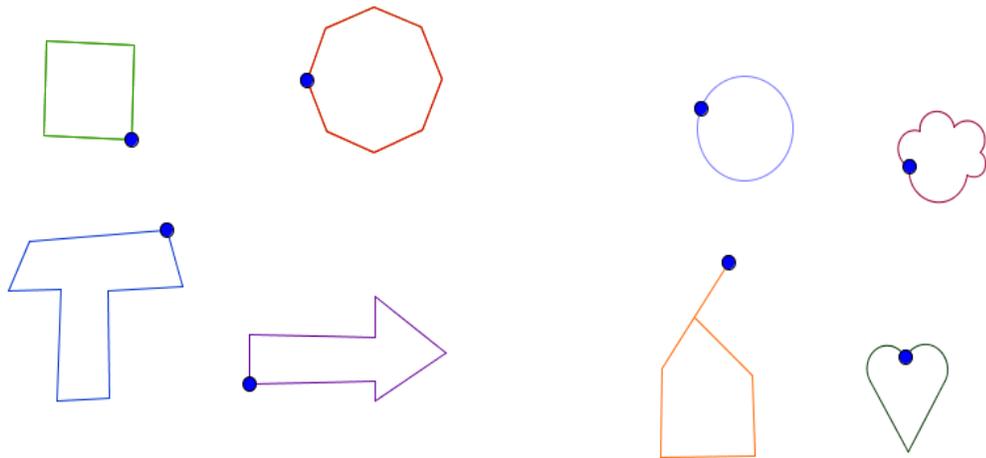
6. Con base en tu trabajo ¿Qué crees que es Geogebra?

ANEXO 2

TALLER N° 2

1. Abre el archivo de Geogebra llamado taller número 2 y observa los ejemplos de figuras geométricas planas presentes en él y realiza las actividades allí propuestas.

ACTIVIDAD # 1



EJEMPLOS DE POLÍGONOS

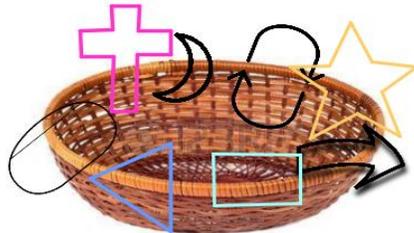
EJEMPLOS DE NO POLÍGONOS

2. Teniendo en cuenta el anterior ejercicio, responde la siguiente pregunta.

2.1 ¿Qué es un POLÍGONO?

3. Realiza la clasificación de las figuras planas en el archivo de Geogebra

ACTIVIDAD #2



Clasifica las figuras geométricas presentes en este conjunto en dos grupos. Polígonos y NO polígonos



3.1 ¿Por qué crees que las figuras de una de las canastas no son polígonos?

3.2. En Geogebra elabora ejemplos diferentes a los ya vistos de 4 polígonos y 4 no polígonos y llama al archivo polígono 1, seguido de tu nombre.

3.3 Nombra todos los puntos de cada polígono con las letras A, B, C... según el numero presente en cada polígono (Dale clic derecho sobre cada punto y posteriormente clic en renombra, en el recuadro digita la letra que corresponda a dicho punto).

3.4 Mueve libremente los puntos A, B, C de cada polígono. ¿Cambia de forma la figura al mover dichos puntos? ¿La figura obtenida sigue siendo un polígono? ¿Por qué?

ANEXO 3

TALLER # 3

Analiza los siguientes problemas y construye el polígono que consideres que es la respuesta correcta o coloca de verde la opción escogida

1. Laura quiere construir una figura geométrica plana que tengan dos pares de lados paralelos y cuatro lados iguales, pero no recuerda su nombre ¿cómo es el nombre de esta figura?

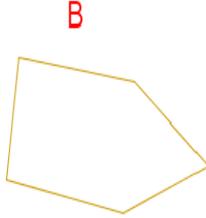
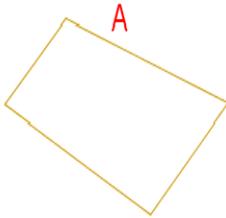
- A. Rectángulo
- B. Trapecio
- C. Rombo
- D. triángulo

2. Lucas hizo un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos, dos lados cortos y dos lados largos. ¿Qué polígono dibujó?

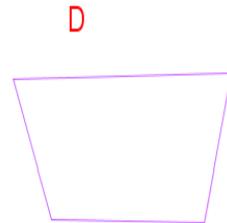
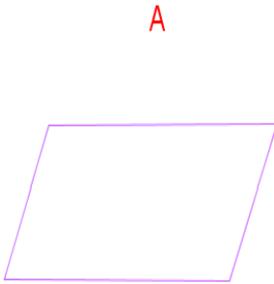
- A. Un rombo
- B. Un triángulo
- C. Un cuadrado
- D. Un rectángulo

3. ¿Cuál de las siguientes figuras geométricas planas tiene tres lados y tres vértices?

Justifica tu respuesta.

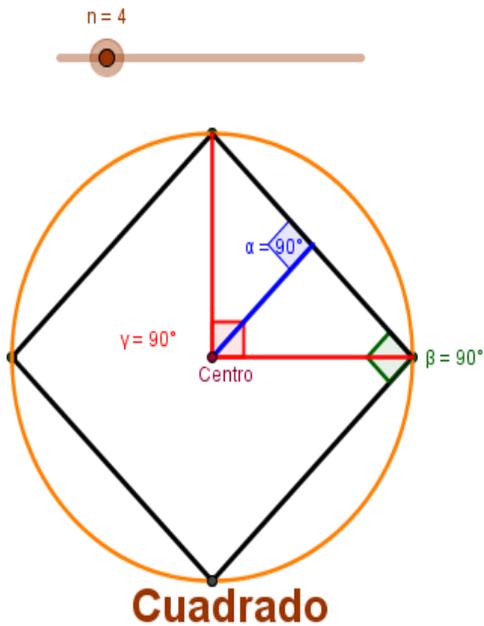


4. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene dos pares de lados paralelos?



ANEXO 4

TALLER N° 4

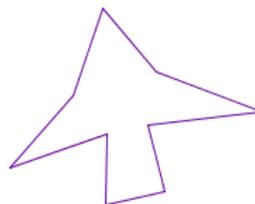
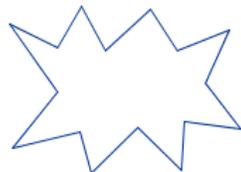
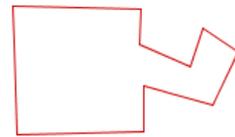
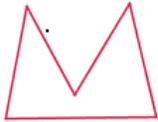


N° de lados = 4

Ángulo Interior = 90°

Suma de Ángulos interiores = 360°

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, Analiza los siguientes polígonos y con la Herramienta llamada “texto” coloca el nombre correspondiente de bajo de cada polígono.



ACTIVIDAD

Construye los siguientes polígonos sin repetir los ejemplos dados anteriormente, escribe su número de lados y enuncia si son polígonos regulares o irregulares:

- Heptágono.
- Endecágono.
- Pentadecágono.
- Hexágono.
- Icoságono.

ANEXO 5

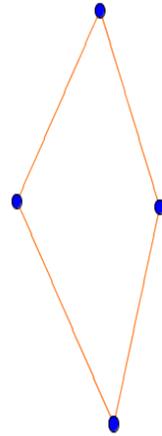
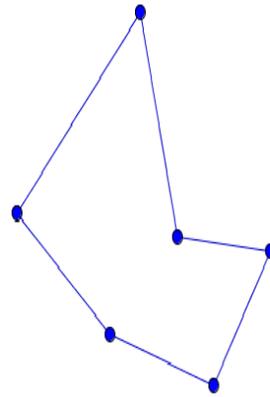
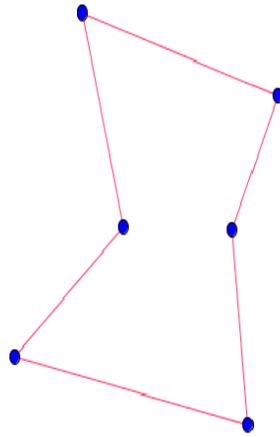
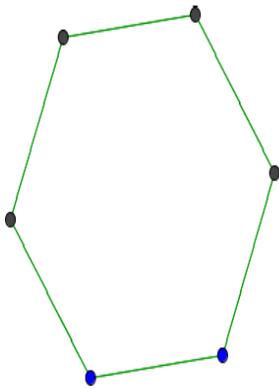
TALLER N° 5

TALLER # 5

1. Representa gráficamente los siguientes polígonos, enuncia e identifica: los números de lados, números de ángulos y número de vértices.

- A. triángulo.
- B. Trapecio.
- C. Tetradecágono.
- D. Rectángulo.

2. Traza las diagonales de los siguientes polígonos.

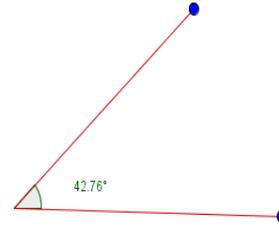


ANEXO 6

TALLER N°6

TALLER # 6

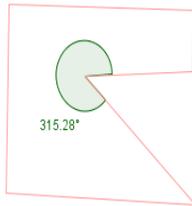
Un ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o vértice.



Los polígonos se pueden clasificar en dos tipos según la medida de sus ángulos pueden ser:

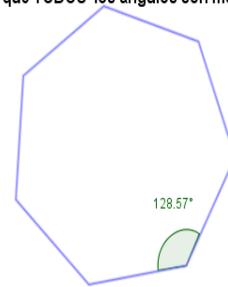
POLÍGONOS CÓNCAVOS

Son aquellos en los que ALGÚN ángulo es mayor que 180°.

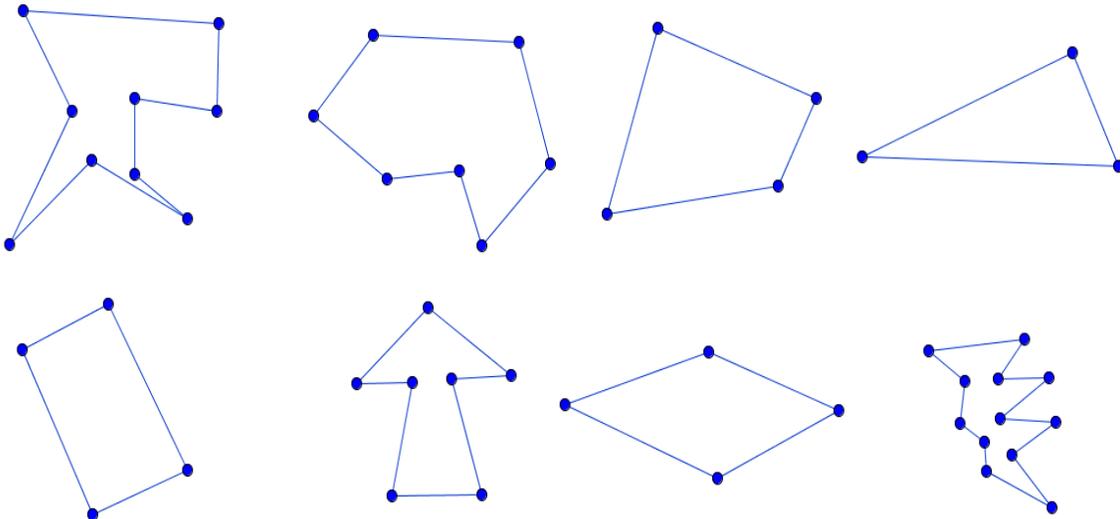


POLÍGONOS CONVEXOS

Son aquellos en los que TODOS los ángulos son menores que 180°.



Clasifica los siguientes polígonos teniendo en cuenta la explicación anterior colocando de color verde los cóncavos y naranja los convexos.



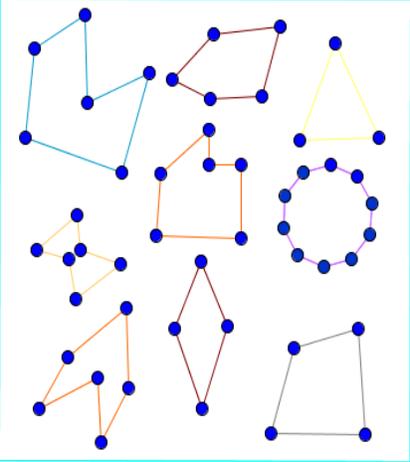
ACTIVIDAD # 2

Construye 5 polígonos concavos y 4 polígonos convexos teniendo en cuenta sus características

ANEEXO 7

TALLER N°7

1. Observa los siguientes polígonos y clasifícalos en el recuadro correspondiente. Finalmente escribe la definición de cada grupo.

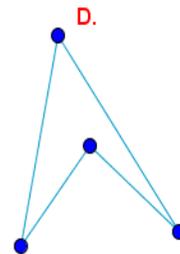
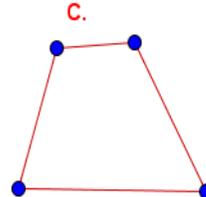
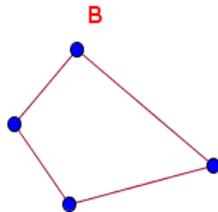
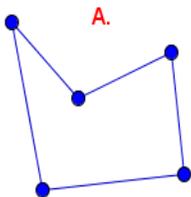
<p>POLÍGONOS CONCAVOS</p>		<p>POLÍGONOS CONVEXOS</p>
↓		↓
DEFINICIÓN		DEFINICIÓN

2. Realiza polígonos que cumplan con las siguientes características y escribe si son **CÓNCAVOS** o **CONVEXOS**:

- A. Polígono con un ángulo de 302° .
- B. Polígono con todos sus ángulos de 90° .
- C. Polígono con un ángulo de 30° .
- D. Polígono con un ángulo de 190° .

3. Responde las preguntas y justifica la respuesta:

1. ¿Cuáles de los siguientes polígonos son cóncavos?



- A). Sólo A.
- B). Sólo D.
- C). Sólo A y D.
- D). Sólo C.

