Trabajo de Grado

ELEMENTOS DE POLINOMIOS DE LEGENDRE.

Presentado por:
Wilmer Alberto Ramiréz Rincón.
Dirigido por:
Juan Carlos López Carreño.

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
II SEMESTRE 2016.

Introducción

En matemáticas existen funciones que son lo suficientemente importantes que ameritan que se les dé su propio nombre, éstas se conocen como 'funciones especiales'. Dentro de ellas están las bien conocidas funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, y se extienden para cubrir las funciones gamma, beta y la clase de polinomios ortogonales. El vasto campo de aplicación de estas funciones en matemáticas puras, así como en áreas aplicadas como acústica, corriente eléctrica, dinámica de fluidos, ecuaciones de conducción de calor, de onda, etc, (ver [1], [3], [5]) ameritan su estudio.

Dentro de este amplio espectro de las funciones especiales, se encuentra los polinomios de Legendre, que constituyen una familia importante de los llamados polinomios ortogonales clásicos. Estos polinomios de Legendre y sus funciones asociadas aparecen frecuentemente en la físico-matemáticas, como soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Es precisamente sobre estos polinomios, el contenido de la presente monografía.

El concepto, polinomios de Legendre, tiene diferentes acepciones; es decir, no se define de manera estándar en los libros de texto. Por lo anterior, se hizo una revisión preliminar en diferentes libros, sobre la manera de definir éstos polinomios. En el capítulo 1, se presentan las diferentes definiciones de los polinomios de Legendre encontradas en la literatura consultada. En la sección 1.2 se calculan los primeros polinomios de Legendre de orden menor o igual a tres con cada una de estas definiciones. El principal aporte del autor en este capítulo, queda plasmado en la tercera sección, en el cual se demuestra la equivalencia de las seis definiciones dadas de los polinomios de Legendre.

En las dos primeras secciones del capítulo 2, se presentan algunas propiedades de los polinomios bajo estudio, como son ciertos valores especiales que asumen estos polinomios así como su paridad. En la sección 2.3 se establece la propiedad más importante de los polinomios de Legendre, como es la relación de ortogonalidad, la cual queda plasmada en el teorema 1. De este resultado se presentan, debido a su importancia, tres demostraciones diferentes. La primera de ellas, el autor de la presente monografía la aprendió del director del trabajo, quien en su momento expresó haberla visto en alguna exposición, pero "su frágil memoria" no le permite recordar en donde la observó. La relevancia de esta demostración, es que no considera por separado, los dos casos, que usualmente se consideran en la demostración de este resultado, y que figura en los libros de texto consultado, y que se pueden apreciar en las otras dos demostraciones que se presentan en esta sección. El capítulo finaliza con algunas aplicaciones de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, entre las que se destacan la expansión de una función de cuadrado integrable en el intervalo [-1,1] en una serie de Fourier-Legendre, y la aproximación de funciones por polinomios.

Finalmente, en el capítulo 3, se presentan de manera original, demostraciones a los resultados de dos artículos, relacionados con la aplicación de los polinomios de Legendre. Demostraciones que el autor del trabajo y su director, consideran mucho más sencillas que las presentadas por los autores de dichos artículos, (ver [8], [7]).

Con el fin de facilitar y hacer autocontenida la lectura del trabajo, se presenta en la parte final, tres apéndices, que incluyen algunas definiciones, y resultados con sus respectivas pruebas, que se utilizan a lo largo de la monografía.

Agradecimientos

A Dios, su poder infinito me mantuvo y me reconfortó siempre,

a mi madre Nelly Rincón por su amor y apoyo incansable para conmigo,

a la Universidad de pamplona y a cada docente que me brindó su amistad y aporte para mi formación profesional,

a mi tutor Juan Carlos López por guiarme hasta alcanzar con éxito este sueño; sus enseñanzas, me hicieron crecer como persona y Matemático.

Por último y no menos importante, a mi Profe de secundaria Rafael Niño; sus consejos fueron claves para emprender este camino en el cual disfruté cada una de sus etapas.

Diciembre del 2016.

Índice general

Capítulo 1

NOCIONES GENERALES

1.1. Algunas definiciones.

Los polinomios de Legendre, en honor al matemático Francés Adrien Marie Legendre (1752-1833), tienen muchas aplicaciones importantes en física matemática, por ejemplo en la teoría del potencial gravitacional, en el estudio de la temperatura de estado estacionario en una esfera, en el estudio del potencial electrostático dipolar, entre otras.

En esta sección se presentan algunas definiciones, que usualmente aparecen en los libros de texto, que dependiendo del contexto puede ser útil una cierta forma de estos polinomios.
Sea $f_n(x)$ una sucesión de funciones definidas en un dominio A. Una función $F(x,t)$ se llama una función generatriz de $\{f_n\}$ si $F(x,t)$= $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n$.
La idea de las funciones generadoras es que éstas "contienen" la sucesión $\{f_n\}$, así estas funciones $F(x,t)$ pueden resultar útiles para el estudio de las propiedades de los elementos de la sucesión $\{f_n\}$.
Con este concepto, informal, de función generatriz introducimos nuestra primera definición.

1.1.1. Definición 1, (Ver [1]).

Sea $g(x,t)$ la función dada por

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

Los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, corresponden a los coeficientes en la serie de Taylor de $g(x,t)$ alrededor de $t = 0$, es decir

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \qquad |x| \leq 1, \quad |t| < 1.$$

Los polinomios de Legendre, se pueden definir por medio de una expresión explícita, como se consigna en la siguiente definición.

1.1.2. Definición 2, (Ver [2]).

Los polinomios de Legendre $P_n(x)$, vienen dados por la fórmula:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

donde

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar .} \end{cases}$$

La siguiente manera de introducir los polinomios de Legendre, es muy usual en el estudio de los polinomios ortogonales, viene dada por una fórmula de recurrencia de tres términos.

1.1.3. Definición 3,(ver [3]).

Los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, son las soluciones de la siguiente relación de recurrencia:

$$(1+2n)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \qquad n\text{=1,2,3,...}$$

Sujeta a las condiciones iniciales

$$P_0(x) = 1, \;\; P_1(x) = x.$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, la ecuación diferencial de Legendre, corresponde a la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0.$$

De la teoría general correspondiente a las ecuaciones diferenciales lineales, se sabe que la ecuación anterior admite dos soluciones linealmente independientes.
En el caso $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$; se demuestra que una de estas soluciones corresponde a un polinomio de grado n.
Lo anterior permite introducir la siguiente definición:

1.1.4. Definición 4,(ver [4]).

Para $n \in \mathbb{N}$, el polinomio de Legendre, $P_n(x)$, es la solución polinomial de la ecuación de Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

con

$$\text{y(1)=1.}$$

Olinde Rodrigues (1794-1851), economista y reformador Francés, introduce una expresión explicita para $P_n(x)$. En 1816, descubrió la fórmula que se menciona en la siguiente definición. Una ventaja de la fórmula de Rodrigues es su forma cómo una derivada n-ésima. Esto significa que en una integral, esta puede ser usada de manera iterada, en una integración por partes para evaluar la integral.

1.1.5. Definición 5,(ver [5]).

Los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, se definen apartir de la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Finalmente, otra representación "curiosa" de los polinomios de Legendre fué dada por Laplace en 1817. La fórmula integral de Laplace para polinomios de Legendre queda consignada en la próxima definición.

1.1.6. Definición 6,(ver [5]).

El n-ésimo polinomio de Legendre, $P_n(x)$ viene dado por

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos\theta)^n \, d\theta, \qquad n\text{=0,1,2,3,...}$$

1.2. Polinomios de Legendre de orden inferior.

El objetivo de esta sección es calcular los polinomios de Legedre: $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$, utilizando para ello cada una de las definiciones establecidas en la sección anterior.

1.2.1. Polinomios de Legendre usando la definición 1.

Haciendo uso de la serie binomial (ver (A.1.1.1), Apéndice 1)

$$(1-y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{n!},$$

con $a = 1/2$, $y = (2xt - t^2)$, se tiene

$$[1-(2xt-t^2)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (2xt-t^2)^n}{n!}. \qquad (1.2.1.1)$$

Para los primeros polinomios de Legendre, esto es $P_0(x),\ P_1(x)\ y\ P_2(x)$ se requiere de los coeficientes de $1,\ t,\ t^2$, estas potencias de t aparecen solo en los términos correspondientes a n=0, 1 y 2.

De esta manera en la expresión (1.2.1.1) fijamos nuestra atención en los tres primeros términos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{t^2+1-2tx}} &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_1}{1!}(2xt-t^2) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_2}{2!}(2xt-t^2)^2 + 0(t^3) \\
&= 1 + xt - \frac{1}{2}t^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{2}(4x^2t^2 - 2xt^3 + t^4) + 0(t^3) \\
&= 1 + xt - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}(4x^2t^2) + 0(t^3) \\
&= 1 + xt + \Big(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\Big)t^2 + 0(t^3). \qquad (1.2.1.2)
\end{aligned}$$

De la definición 1,

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1-2tx}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + ...$$

de esta ultima relación y de (1.2.1.2) se sigue, al igualar coeficientes de las potencias correspondientes de t.:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

1.2.2. Polinomios de Legendre usando la definición 2.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

Supongase que n=0,

$$P_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k(-2k)!}{k!(-k)!(-2k)!} x^{-2k} = \frac{(-1)^0(-2(0))!}{(0)!(0)!(-2(0))!} x^{-2(0)} = \frac{(1)(1)}{(1)(1)(1)} x^0 = 1,$$

si n=1

$$P_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k(2-2k)!}{k!(1-k)!(1-2k)} x^{1-2k} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^0(2-0)!}{0!(1)!(1)!} x^1 = \frac{1}{2}\frac{(1)(2)!}{(1)(1)(1)} x = x,$$

para n=2

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k(4-2k)!}{k!(2-k)!(2-2k)!} x^{2-2k} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{(-1)^0(4)!x^2}{0!(2)!(2)!} - \frac{(4-2)!}{(1)!(1)!(0)!} x^{2-2}\right) \\ &= \frac{1}{2^2}\left(6x^2 - 2x^0\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right). \end{aligned}$$

1.2.3. Polinomios de Legendre usando la definición 3.

Despejando $P_{n+1}(x)$, de la relación de recurrencia dada en la definición 3, se obtiene:

$$P_{n+1}(x) = \frac{(1+2n)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{(n+1)},$$

con los valores iniciales

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

hallamos $P_2(x)$ al tomar n=1, entonces

$$P_2(x) = \frac{(1+2)(x)P_1 - P_0(x)}{(2)} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

1.2.4. Polinomios de Legendre usando la definición 4.

Los polinomios de Legendre son la solución de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \qquad \text{con } y(1) = 1.$$

Para n=1, la ecuación a resolver es:

$$(1-x^2)y'' - 2x' + 2y = 0, \tag{1.2.4.1}$$

suponemos que una solución es un polinomio de grado 1,

$$y = ax + b;$$

de donde

$$y' = a, \quad y'' = 0$$

reemplazando y, y', y'' en (1.2.4.1), resulta

$$-2ax + 2ax + 2b = 0,$$

luego,

$$b = 0,$$

como $y(1) = 1$, implica que, $1 = a + b$, por lo tanto

$$a = 1.$$

Concluimos que la solución polinomial a la ecuación diferencial (1.2.4.1) es

$$P_1(x) = x.$$

Para n=2, la ecuación a resolver es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0, \tag{1.2.4.2}$$

suponemos que una solución de la ecuación anterior, es un polinomio de grado 2, es decir

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

de esta manera

$$y'(x) = 2ax + b, \quad y''(x) = 2a,$$

reemplazamos y, y', y'' en (1.2.4.2), y agrupando términos semejantes, resulta

$$4bx + (2a + 6c) = 0,$$

de donde

$$b = 0 \ \text{ y } \ c = \frac{-a}{3}.$$

Así, el polinomio solución es

$$y(x) = ax^2 - \frac{a}{3},$$

como $y(1) = 1$, de la expresión anterior para $y(x)$ se obtiene $a = \dfrac{3}{2}$. Finalmente, la solución polinomial de la ecuación (1.2.4.2) es

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

1.2.5. Polinomios de Legendre usando la definición 5.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Supóngase que n=0,

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0(0)!}\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2-1\right)^0 = \frac{1(1)(1)}{1(1)} = 1.$$

Si n=1,

$$P_1(x) = \frac{1}{2(1)}\frac{d}{dx}(x^2-1) = \frac{1}{2}(2x) = x.$$

Para el caso n=2,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{2^2 2!}\left(\frac{d}{dx}(4x)(x^2-1)\right) \\ &= \frac{1}{2^2 2!}\left(4(x^2-1)+8x^2\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right). \end{aligned}$$

1.2.6. Polinomios de Legendre usando la definición 6.

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta.$$

Si n=0

$$P_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^0 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\pi}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(2\pi) = 1.$$

Supóngase que n=1

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(x\int_0^{2\pi}d\theta + \sqrt{x^2-1}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[x(2\pi)+\sqrt{x^2-1}(\sin(2\pi)-\sin(0)\right] = \frac{1}{2\pi}(2\pi x) = x. \end{aligned}$$

Si n=2

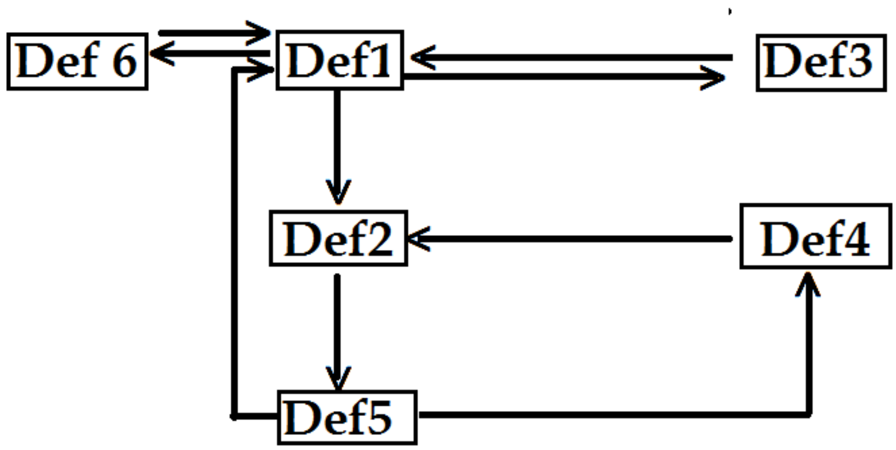
$$P_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^2 d\theta,$$

al desarrollar el binomio, utilizar la linealidad de la integral y desarrollar las integrales nos resulta:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(x^2(2\pi) + \frac{1}{2}(2\pi)x^2 - \frac{1}{2}2\pi\right) \\ &= \frac{2\pi}{2\pi}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right). \end{aligned}$$

1.3. Equivalencia de las definiciones.

En esta sección se va a establecer que, las seis definiciones dadas en la sección 1.1 resultan equivalentes, para ello se establecerán las implicaciones que figuran en el siguiente esquema:



1.3.1. Proposición 1. La definición 1, implica la definición 2.

Demostración.

La definición 1 de los polinomios de Legendre dada por su función generatriz es:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2tx + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{1.3.1.1}$$

Veamos que es posible expandir la función que aparece en el lado izquierdo de (1.3.1.1), usando la serie binomial. Si $| x | \leqslant r$ con r arbitrario, y $| t | < \sqrt{1+r^2} - r$, entonces

$$| 2xt - t^2 | \leq 2 | x || t | + | t |^2 < 2r(\sqrt{1+r^2} - r) + 1 + r^2 + r^2 - 2r\sqrt{1+r^2}$$
$$< 2r\sqrt{1+r^2} - 2r^2 + 1 + 2r^2 - 2r\sqrt{1+r^2} = 1,$$

luego

$$|2xt - t^2| < 1.$$

Haciendo uso de la serie binomial, (ver (A.1.1.1), Apéndice 1)

$$(1-y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{n!}, \qquad \text{con } a = 1/2, \ y = (2xt - t^2)$$

y de la identidad (ver (A.1.2.1), Apéndice 1)

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!},$$

el lado izquierdo de (1.3.1.1) se puede ver como:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2tx + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (2xt - t^2)^n.$$

Aplicando el teorema del binomio y tras organizar términos, la expresión anterior se transforma en:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!}{2^{2n} n! (n-k)!} (2x)^{n-k} t^{n+k}. \tag{1.3.1.2}$$

En (1.3.1.2) se tiene una serie doble de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$,

donde:

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^k (2n)!}{2^{2n} n! (n-k)!} (2x)^{n-k} t^{n+k}. \tag{1.3.1.3}$$

Utilizando la identidad (ver (A.1.3.1), Apéndice 1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n-k,k},$$

y la expresión (1.3.1.3), la relación dada en (1.3.1.2) se puede escribir

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1-2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\right)t^n.$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior y la expresión dada en (1.3.1.1), se tiene luego de igualar los coeficientes correspondientes a t^n, que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k};$$

la anterior expresión corresponde a los polinomios $P_n(x)$ dados en la definición 2.

1.3.2. Proposición 2. La definición 2, implica la definición 5.

Demostración.

Supongase que el polinomio de Legendre de orden n, $P_n(x)$ viene dado por la sumatoria:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \tag{1.3.2.1}$$

donde $\left[\frac{n}{2}\right]$ representa el mayor entero menor o igual a $n\backslash 2$.
Se puede observar que:

$$\begin{aligned}(x^{2n-2k})^{(1)} &= (2n-2k)x^{2n-2k-1},\\ (x^{2n-2k})^{(2)} &= (2n-2k)(2n-2k-1)x^{2n-2k-2},\end{aligned}$$

continuando de esta manera, se tiene para la j-ésima derivada:

$$\begin{aligned}(x^{2n-2k})^{(j)} &= (2n-2k)(2n-2k-1)...(2n-2k-(j-1))x^{2n-2k-j},\\ &= \frac{(2n-2k)\cdots(2n-2k-(j-1))(2n-2j-j)..,3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3...(2n-2k-j)}x^{2n-2k-j},\end{aligned}$$

en particular para $j = n$,

$$(x^{2n-2k})^{(n)} = \frac{(2n-2k)!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2k)}x^{n-2k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

Teniendo en cuenta esta expresión para la n-ésima derivada del monomio x^{2n-2k} en (1.3.2.1) y utilizando la linealidad de la derivada, se obtiene:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}, \tag{1.3.2.2}$$

si $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$, entonces $n < 2k \leq 2n$, luego $2n - 2k < n$, así que para los indices $k \in (n, 2n]$ la derivada n-ésima del termino x^{2n-2k} es cero, así, la suma dada en (1.3.2.2) no cambia si extendemos la suma desde k=0 a $k = n$; luego

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k},$$

multiplicando numerador y denominador por $n!$ en el cociente de la expresión anterior, y recordando que el número combinatorio $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, se tiene:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2n-2k}. \tag{1.3.2.3}$$

Por el teorema del binomio

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2n-2k},$$

y la expresión dada en (1.3.2.3), se concluye:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

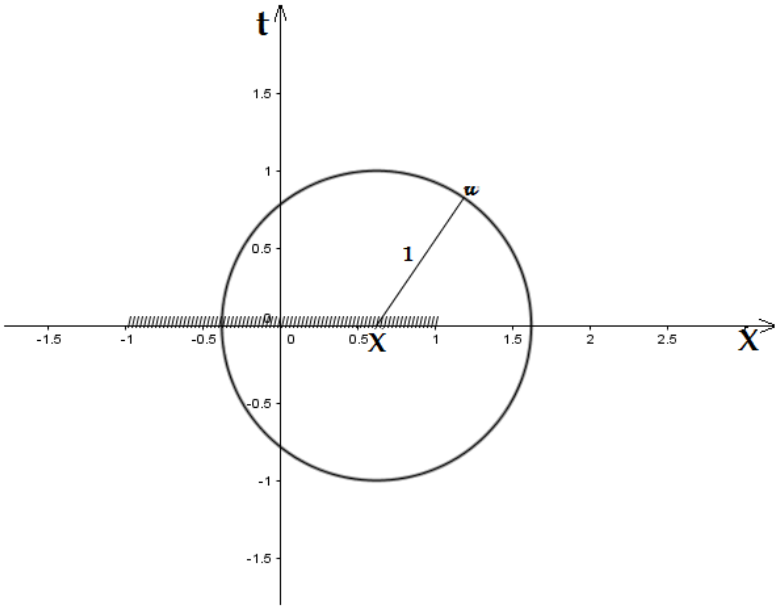
1.3.3. Proposición 3. La definición 5, implica la definición 1.

Demostración.

Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios definidos por la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad |x| \leq 1, \tag{1.3.3.1}$$

sean $x \in [-1, 1]$ y C el círculo con centro x y radio 1, como se muestra en la figura:



Por la fórmula integral de Cauchy para derivadas

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{(w^2-1)^n}{(w-x)^{n+1}}dw,$$

de esta manera de (1.3.3.1) se tiene,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(w^2-1)^n}{(w-x)^{n+1}}dw,$$

por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(w^2-1)t}{2(w-x)}\right)^n \cdot \frac{1}{w-x}dw,$$

así, si se toma $|\, t \,|$ suficientemente pequeño, por ejemplo $|t| < \frac{2}{5}$ (ver nota 1.3.1 al final de la prueba), para que la serie geométrica que figura en la expresión anterior converja uniformemente para $w \in \mathbb{C}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(w-x)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{(w^2-1)t}{2(w-x)}}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2}{-tw^2+2w+t-2x}dw$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_c \frac{1}{-tw^2+2w+(t-2x)}dw. \qquad (1.3.3.3)$$

Sea $f(w) = -tw^2 + 2w + (t - 2x)$, los ceros de f, se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática

$$-tw^2 + 2w + (t - 2x) = 0,$$

así,

$$w_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2xt + t^2}}{t}, \quad y \quad w_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2xt + t^2}}{t}.$$

Si hacemos $g(t) = \sqrt{1 - 2xt + t^2}$, y tomamos $|\, t \,|$ suficientemente pequeño se tiene una aproximación lineal para g:

$$g(t) \approx g(0) + g'(0)t,$$

pero

$$g'(t) = \frac{t - x}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}, \text{ luego } g'(0) = -x,$$

así

$$g(t) \approx 1 - xt,$$

de esta manera,

$$w_1 \approx \frac{1 - (1 - xt)}{t} = \frac{xt}{t} = x, \quad \text{y} \quad w_2 \approx \frac{2 - xt}{t},$$

es decir, si $|\, t \,|$ es suficientemente pequeño, w_1 está muy cerca de x, miéntras $|\, w_2 \,|$ es muy grande; en otras palabras w_1 está en el interior de c, mientras w_2 está en el exterior de c.

Al aplicar el teorema del residuo para evaluar la integral que figura en el lado derecho de (1.3.3.3) se tiene:

$$\int_c \frac{1}{-tw^2 + 2w + (t - 2x)} dw = 2\pi i \; res\left(\frac{1}{f}, w_1\right),$$

y como w_1 es un polo simple de $\dfrac{1}{f}$,

$$\text{res}\left(\frac{1}{f}, w_1\right) = \lim_{w \to w_1} \frac{(w - w_1)}{(-t)(w - w_1)(w - w_2)} = \frac{-1}{t} \frac{1}{(w_1 - w_2)} = \frac{1}{2\sqrt{1 - 2xt + t^2}},$$

por lo tanto:

$$\int_c \frac{1}{-tw^2 + 2w + (t - 2x)} dw = \frac{\pi i}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}},$$

teniendo en cuenta esta última integral en (1.3.3.3), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \tag{1.3.3.4}$$

La expresión anterior se ha establecido, suponiendo que $\mid t \mid$ es suficientemente pequeño, pero la serie del lado izquierdo de (1.3.3.4) es la serie de Taylor de la función analitica que figura en el lado derecho de (1.3.3.4), y su radio de convergencia es la distancia del origen a la singularidad más cercana de esta función; esto es

$$t = x \pm i\sqrt{1-x^2},$$

es decir 1. De esta manera (1.3.3.4) es válida para todos los $t \in \mathbb{C}$, con $\mid t \mid < 1$.

Nota 1.3.1 *Si $x \in [-1,1]$ y w es un punto de la circunferencia con centro en x y radio 1, se tiene que*

$$|w| = |w - x + x| \leq |w - x| + |x| \leq 2,$$

así,

$$\left|\frac{(w^2-1)t}{2(w-x)}\right| = \frac{|t|}{2}\frac{|w^2-1|}{|w-x|} = \frac{|t|}{2}|w^2-1| \leq \frac{|t|}{2}\left(|w|^2+1\right) \leq \frac{5}{2}|t|,$$

luego si se quiere que $\left|\frac{(w^2-1)t}{2(w-x)}\right| < 1$, *es suficiente tomar $t \in \mathbb{C}$, de modo que $|t| < 2/5$.*

1.3.4. Proposición 4. La definición 1, implica la definición 3.

Demostración.

La definición 1, establece que para $\mid x \mid \leq 1, \mid t \mid < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \tag{1.3.4.1}$$

derivando ambos miembros de (1.3.4.1) con respecto a t:

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

utilizando (1.3.4.1) la anterior igualdad se puede escribir como,

$$\frac{(x-t)}{(1-2xt+t^2)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-t)P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)(1-2xt+t^2)t^{n-1},$$

la cual puede ser reformulada como:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1} - xP_0(x) - x\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)t^n + P_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n+1} = 0,$$

agrupando términos y teniendo en cuenta que, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, se obtiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)P_n(x)t^{n+1} - x\sum_{n=1}^{\infty}(1+2n)P_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1} = 0,$$

si en la primera sumatoria hacemos el cambio de variable $k = n+1$; en la segunda $k = n$ y en la tercera $k = n-1$, la igualdad anterior se puede escribir como:

$$\sum_{k=1}^{\infty}kP_{k-1}(x)t^k - x\sum_{k=1}^{\infty}(1+2k)P_k(x)t^k + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)P_{k+1}(x)t^k = 0,$$

utilizando la propiedad de linealidad de las series convergentes, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+2k)xP_k(x)t^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)P_{k+1}(x) + kP_{k-1}(x)\right]t^k,$$

de donde se concluye qué, para $k \geq 1$

$$(1+2k)xP_k(x) = (k+1)P_{k+1}(x) + kP_{k-1}(x),$$

y como

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

se obtiene así que $\{P_n\}$ satisface la definición 3.

Vemos ahora qué, la recíprocidad de la proposición 4 también es válida.

1.3.5. Proposición 5. La definición 3, implica la definición 1.

Demostración:

Supongamos que $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios que satisface la definición 3, esto es:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \tag{1.3.5.1}$$

$$P_0(x) = 1 \ \text{ y } \ P_1(x) = 1.$$

Sea $g(x,t)$ la función generatríz de $P_n(x)$, es decír:

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \tag{1.3.5.2}$$

al derivar con respecto a t la expresión (1.3.5.2) se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n. \tag{1.3.5.3}$$

Multiplicando la relación de recurrencia a tres términos dada en (1.3.5.1) y tomando sumatoria resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n. \tag{1.3.5.4}$$

Examinemos cada una de las series que figuran en (1.3.5.4), comenzando por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_nt^n = 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 2xt\frac{\partial g}{\partial t} + xg, \tag{i}$$

en donde se ha tenido en cuenta (1.3.5.2) y (1.3.5.3) respectivamente.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^{n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n = \frac{\partial g}{\partial t}, \tag{ii}$$

en esta última igualdad se ha hecho uso de (1.3.5.3), finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = t\sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^{n-1} = t\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)t^n,$$

es decír,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nxP_{n-1}t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = t^2\frac{\partial g}{\partial t} + \ tg. \tag{iii}$$

Al reemplazar (i), (ii) y (iii) en la expresión (1.3.5.4), se obtiene:

$$2xt\frac{\partial g}{\partial t} + xg = \frac{\partial g}{\partial t} + t^2\frac{\partial g}{\partial t} + tg,$$

que se puede ver como una ecuación diferencial ordinaria de variables separables

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial g}{\partial t} = (-t+x)g,$$

separando las variables e integrando

$$\begin{aligned}
\int \frac{dg}{g} &= \int \frac{-t+x}{1-2xt+t^2}dt \\
ln(g) &= -\frac{1}{2}\int \frac{2t-2x}{1-2xt+t^2}dt = -\frac{1}{2}ln(1-2xt+t^2) + lnC_1,
\end{aligned}$$

es decír

$$g(x,t) = \frac{C_1}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

para $t = 0$,

$$g(x,0) = C_1,$$

de otra parte, útilizando (1.3.5.2), $g(x,0) = P_0(x) = 1$, de donde se tiene

$$C_1 = 1,$$

así,

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

1.3.6. Proposición 6. La definición 1, implica la definición 6.

Demostración.

La expresión $1-2x+t^2$ se puede escribir como la diferencia de dos cuadrados:

$$1-2xt+t^2 = (1-xt)^2 - \left(t\sqrt{x^2-1}\right)^2,$$

de esta manera

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}, \quad \text{con } a = 1-xt, \quad b = t\sqrt{x^2-1}, \tag{1.3.6.1}$$

recordando la fórmula integral (ver (A.1.4.1), Apéndice 1)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a-b\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad a > |b|,$$

entonces (1.3.6.1) se puede escribir

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-xt)-t\sqrt{x^2-1}\cos\theta}d\theta, \tag{1.3.6.2}$$

por hipótesis, el lado izquierdo se puede escribir para $|x| \leq 1$, $|t| < 1$ como

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \tag{1.3.6.3}$$

donde $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre.

No obstante, de (1.3.6.2) se observa que para tener una expansión válida para x, se debe tener $|\ x\ | > 1$ debido a la presencia del radical $\sqrt{x^2-1}$, lo que a su vez requiere una restricción sobre t, cuando se tome $|\ x\ | > 1$ si se quiere expandir el integrado que figure en el lado derecho de (1.3.6.2) como una serie de potencias que pueda ser integrada término a término sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

Con el fin de expander $\left[1-(2xt-t^2)\right]^{-1/2}$ en una serie de potencias, se requiere que $|\ 2xt-t^2\ | < 1$, que será el caso si $|\ t\ ||\ 2x-t\ | < 1$. Esta última desigualdad será valida para x, con $|\ x\ | \leq 2$ si

$$\begin{aligned}
|t|(4+|t|) &< 1,\\
t^2+4|t|+4 &< 5,\\
|t| &< \sqrt{5}-2,
\end{aligned}$$

de esta forma podemos decir que la expansión en (1.3.6.3) es válida para $|\ x\ |\leq 2$ y $|\ t\ |< \sqrt{5}-2$. Ahora considerando la integral en el lado derecho de (1.3.6.2) y observando que éste integrando se puede escribir como

$$(1-u)^{-1} = \left[1-(xt+t)\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right]^{-1},$$

con el fín de utilizar la serie geométrica

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \tag{1.3.6.4}$$

se requiere que $|\ u\ |< 1$, así, debe tenerse

$$|xt+t\sqrt{x^2-1}\cos\theta| < 1,$$
$$|t|\ |x+\ \sqrt{x^2-1}\cos\theta| < 1,$$

esta última desigualdad será válida si se cumple

$$|t|\left(\sqrt{x^2-1}\right) < 1,$$

pues $|\ cos\theta\ |< 1$ y la desigualdad triangular.
Si se toma x tal que $1\ \leq|\ x\ |< 2$, se tendra $|xt+t\sqrt{x^2-1}\cos\theta| < 1$, para todos los valores de t tales que

$$|t|(2+\ \sqrt{3}\ ) < 1,$$
$$|t| < \frac{1}{2+\ \sqrt{3}} = 2-\ \sqrt{3}.$$

Así la expansión en serie en la expresión (1.3.6.4) donde $u = xt + t\sqrt{x^2-1}\,cos\theta$, converge uniformemente en $[0, 2\pi]$, cuando x, t son tales que $1 \le |x| \le 2$, y $|t| < 2 - \sqrt{3}$, luego la integración término a término es valida, de (1.3.6.2), (1.3.6.3) y (1.3.6.4) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta\right]t^n,$$

válida para $1 \le |x| \le 2, \quad |t| < \sqrt{5}-2$, por lo tanto, para $1 \le |\, x\,| \le 2$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^n d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1.3.6.5}$$

si $H_n(x)$ representa la integral en el lado derecho de (1.3.6.5), veamos que

$$H_n(x) = P_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

En efecto,

$$(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n = x^n + nx^{n-1}\sqrt{x^2-1}\cos\theta + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\sqrt{x^2-1})^2\cos^2\theta +$$

$$... + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}(\sqrt{x^2-1})^3\cos^3\theta + ... + (\sqrt{x^2-1})^n\cos^n\theta,$$

se observa que cada término que contiene una potencia impar de $\sqrt{x^2-1}$ también tiene una potencia impar de $\cos\theta$ por lo que

$$\int_0^{2\pi}(\sqrt{x^2-1})^{2m-1}\,(\cos\theta)^{2m-1}d\theta = 0, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

De otra parte cada término que tiene una potencia par de $\cos\theta$, en consecuencia su integral no se anula, es multiplicada por un polinomio de grado n en x; es decir,

$$H_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta,$$

es un polinomio de grado n. Puesto que los polinomios, de grado n, $P_n(x)$, y $H_n(x)$ son iguales para $x \in [1, 2]$ se debe tener que $H_n(x) = P_n(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, finalmente

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta, \quad n = 0, 1, 2, ... \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.3.7. Proposición 7. La definición 4, implica la definición 2.

Demostración.

Sea $y = y(x)$ una solución, no trivial, de la ecuación diferencial de Legendre:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \tag{1.3.7.1}$$

se observa que x=0, es un punto ordinario de la ecuación (1.3.7.1) en efecto, si f, g son definidas por

$$f(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}, \quad g(x) = \frac{n(n+1)}{1 - x^2},$$

resulta que f, g son analíticas alrededor de $x = 0$, pues

$$\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad \text{para } |\, x \,| < 1,$$

luego f, g admiten desarrollos en serie de potencias en el intervalo (-1,1),
de esta manera, usando el método de series de potencias, resolvemos (1.3.7.1) suponiendo una solución de la forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{1.3.7.2}$$

las dos primeras derivadas de (1.3.7.2) nos da

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}; \tag{1.3.7.3}$$

al sustituir (1.3.7.2) y (1.3.7.3) en la ecuación diferencial (1.3.7.1), se obtiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1) a_k x^k = 0,$$

la igualdad anterior, se puede escribir como,

$$[2a_2 + n(n+1)a_0] + [6a_3 - 2a_1 + n(n+1)a_1]\, x + \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [n(n+1) - 2k - k(k-1)]\, a_k x^k = 0, \tag{1.3.7.4}$$

de donde

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2} a_0, \\ a_3 &= \frac{2 - n(n+1)}{6} a_1. \end{aligned}$$

Con el fin de reducir las dos sumatorias que figuran en (1.3.7.4) a una sola, usamos el cambio de variable $k-2=j$ en la primera serie y el cambio $k=j$ en la segunda; así se tiene

$$\sum_{j=2}^{\infty}\Big[(j+2)(j+1)a_{j+2}-\big[j(j+1)-n(n+1)\big]\,a_j\Big]\,x^j=0,$$

esta útima produce la relación de recurrencia

$$a_{j+2}=\frac{j(j+1)-n(n+1)}{(j+1)(j+2)}a_j, \qquad j=0,1,2,... \tag{1.3.7.5}$$

obsérvese que para j=0, y j=1, se obtiene, respectivamente, los valores de a_2, a_3 obtenidos con anterioridad.

De la relación (1.3.7.5), es claro que cada coeficiente con subíndice par es multiplo de a_0 y cada coeficiente con subíndice impar es un multiplo de a_1. Lo anterior significa que a_0 determina a_2 el cual determina a_4, y así sucesivamente, y a_1 determina a_3 que a su vez determina a a_5, a_7, a_9...

De esta manera, si se toma $a_0=1, a_1=0$, se obtiene la solución

$$y_1(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x^{2k},$$

si se toma $a_0=0,\quad a_1=1$, se obtiene la solución

$$y_1(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1},$$

por lo tanto y_1, y_2 son linealmente independientes, así que la solución general de la ecuación de Legendre (1.3.7.1) puede escribirse como

$$y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x),\quad a_0,\ a_1,\ \ \text{arbitrarios.}$$

Nota 1.3.2 *Aplicando el criterio del cociente, se observa que la serie que determina la solución a la ecuación (1.3.7.1) es convergente; en efecto,*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}\ x^{k+2}}{a_k x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_k}\right|x^2,$$

de la relación (1.3.7.5)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+1)(k+2)}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+k-n(n+1)}{k^2+3k+2}=1,$$

luego

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_k}\right|x^2=x^2,$$

por lo tanto, la serie converge cuando $\mid x\mid<1$.

Nota 1.3.3 *De la relación de recurrencia dada en (1.3.7.5) es claro que si n es un entero positivo par, se tiene* $a_{n+2} = 0$ *y en consecuencia* $a_{n+4} = a_{n+6}... = 0$*, así tenemos que*

$$y_1(x) = a_0 + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n},$$

por lo tanto, $y_1(x)$ *es un polinomio.*
De manera similar, $y_2(x)$ *es un polinomio, en el caso que n sea un número natural impar.*

A continuación se encuentra una expresión explícita para los coeficientes a_k.

(i) "serie par".
Supongamos que n es un entero par. Si $n = 2m$, la relación de recurrencia (1.3.7.5) toma la forma

$$a_{2k+2} = \frac{2k(2k+1) - 2m(2m+1)}{(2k+1)(2k+2)}a_{2k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1.3.7.6}$$

observemos que

$$x(x+1) - y(y+1) = x^2 - y^2 + x - y = (x+y)(x-y) + (x-y) = (x-y)(x+y+1),$$

usando esta identidad con $x = 2k,\ y = 2m$, en el numerador del lado derecho de (1.3.7.6), se puede escribir como

$$a_{2k+2} = \frac{(2k-2m)(2k+2m+1)}{(2k+1)(2k+2)}a_{2k} = (-1)\frac{(2m-2k)(2m+2k+1)}{(2k+1)(2k+2)}a_{2k},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= (-1)\frac{(2m-2k+2)(2m+2k-1)}{(2k-1)(2k)}a_{2k-2}, \\
&= (-1)^2\frac{(2m-2k+2)(2m+2k-1)(2m-2k+4)(2m+2k-3)}{(2k-1)(2k)\qquad\qquad\qquad (2k-3)(2k-2)}a_{2k-4}, \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2m-2k+2)(2m+2k-1)(2m-2k+4)(2m+2k-3)\cdots(2m)(2m+1)a_0, \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{(2m)!!(2m-2k-1)!!}{(2m-2k)!!\quad(2m-1)!!}a_0,
\end{aligned}$$

en donde,

$$\begin{aligned}
(2s)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2s), \\
(2s+1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1).
\end{aligned}$$

Luego

$$y_1(x) = \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}a_0\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{(2m+2k-1)!!}{(2m-2k)!!}x^{2k},$$

escogiendo a_0, de modo que

$$\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}a_0 = (-1)^m,$$

se tiene

$$y_1(x) = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{(2m+2k-1)!!}{(2m-2k)!!} x^{2k}.$$

Ahora, reservamos el orden de términos en la suma anterior, para ello efectuamos el cambio de variables $k = m - s$, entonces

$$y_1(x) = \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s}{(2m-2s)!} \frac{(4m-2s-1)!!}{(2s)!!} x^{2m-2s}, \tag{1.3.7.7}$$

simplifiquemos el cociente de los dobles factoriales $\dfrac{(4m-2s-1)!!}{(2s)!!}$, con el fin de simplificar la expresión, hagamos $2m - s = t$, así

$$\begin{aligned}
\frac{(4m-2s-1)!!}{(2s)!!} = \frac{(2t-1)!!}{(2s)!!} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2t-3)(2t-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2s)}, \\
&= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdots(2t-3)(2t-2)(2t-1)(2t)!!}{2^s(1\cdot 2\cdot 3\cdots s)\,2\cdot 4\cdot 6\cdots(2t-2)(2t)}, \\
&= \frac{(2t)!}{2^s\, s!\, 2^t\,(1\cdot 2\cdot 3\cdots t)} = \frac{(2t)!}{2^{s+t}\, s!\, t!},
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{(4m-2s-1)!!}{(2s)!!} = \frac{(4m-2s)!}{(2^{2m})s!(2m-s)!},$$

por lo tanto la igualdad (1.3.7.7) se puede escribir

$$y_1(x) = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s \quad (4m-2s)!}{(2m-2s)!s!(2m-s)!} x^{2m-2s}, \tag{1.3.7.8}$$

que corresponde a $P_n(x)$ dada en la definición 2, haciendo $n = 2m$.

(ii)"serie impar".
Procediendo de manera similar en el caso de que $n = 2m + 1$, se obtiene

$$y_2(x) = \frac{1}{2^{2m+1}} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s \quad (4m-2s+2)!}{s!(2m+1-2s)(2m+1-s)!} x^{2m+1-2s}, \tag{1.3.7.9}$$

comparando las expresiones (1.3.7.8) y (1.3.7.9), con la dada definición 2 se observa que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k \quad (2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k}.$$

1.4. Otras formas para los polinomios de Legendre.

1.4.1. Forma hipergeométrica.

Mediante una sustitución adecuada se puede transformar la ecuación de Legendre a una ecuación diferencial hipergeométrica, la solución de ésta última permitirá dar otra expresión para el polinomio de Legendre de orden n.
Consideremos la ecuación

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \tag{1.4.1.1}$$

con $n \in \mathbb{N}$, y sea

$$z = \frac{1-x}{2}, \tag{1.4.1.2}$$

con lo cual,

$$x = 1 - 2z, \tag{1.4.1.3}$$

utilizando la regla de la cadena, de (1.4.1.2) se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{dz}, \tag{1.4.1.4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dz^2}, \tag{1.4.1.5}$$

reemplazando (1.4.1.3), (1.4.1.4) y (1.4.1.5) en la ecuación (1.4.1.1) se obtiene

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (1-2z)\frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0, \tag{1.4.1.6}$$

que corresponde a una ecuación diferencial hipergeométrica, (ver nota 1.4). Al realizar las correspondientes identificaciones $\gamma = 1,\ \alpha + \beta + 1 = 2, -\alpha\beta = n(n+1)$, se tiene que $\gamma = 1,\ \alpha = -n,\ \beta = n+1$, con lo cual una solución particular de la ecuación (1.4.1.6) viene dada por

$$y = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & n+1 \\ & 1 \end{matrix}\middle|\, z\right),$$

por lo tanto, teniendo en cuenta (1.4.1.2), una solución la ecuación (1.4.1.1), es decir $P_n(x)$ se puede expresar

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2}\right), \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (n+1)k}{(1)_k} \frac{1}{k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Nota 1.4.1 *Si α, β, γ son números complejos, la diferencial hipergeométrica*

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)y'] - \alpha\beta y = 0,$$

admite como solución general

$$y = y_1(x) + y_2(x) :=_2 F_1\left(\begin{matrix} \alpha \quad \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right) C_1 + 2F_1\left(\begin{matrix} \alpha + 1 - \gamma \quad \beta + 1 - \gamma \\ 2 - \gamma \end{matrix} \middle| x\right) C_2\, x^{1-\gamma},$$

con C_1, C_2 arbitrarios (ver (A.3.1.8)),
·Si $\gamma = 1, 2, 3, 4...$ una solución partiular de la ecuación es $y_1(x)$.

1.4.2. El polinomio $P_n(x)$ como un determinante.

Utilizando cualquiera de las seis definiciones dadas en la sección 1.1, hallamos qué, los polinomios de Legendre para n=0,1,2,3, son:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, & P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.
\end{aligned}
$$

Empezamos, definiendo

$$
\begin{aligned}
D_0(x) &= 1 = P_0(x), \\
D_1(x) &= |x| = x = P_1(x), \\
D_2(x) &= \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = P_2(x), \\
D_3(x) &= \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 3x & 2 \\ 0 & 2 & 5x \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left[5x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 3x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right],
\end{aligned}
$$

luego

$$3D_3(x) = (5x)\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 3x \end{vmatrix} - \frac{1}{2}(2)(2x) = (5x)D_2(x) - 2D_1(x).$$

Las observaciones anteriores, permiten conjeturar que si $D_n(x)$, representa el determinante

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3x & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & n-1 & (2n-1)x \end{vmatrix};$$

entonces $D_n(x) = P_n(x)$. En efecto, al expandir por la última columna y luego uno de los dos determinantes, el correspondiente al menor de $(n-1)$ por su última fila se obtiene

$$nD_n(x) = (2n-1)xD_{n-1}(x) - (n-1)D_{n-2}(x), \qquad n \geq 2.$$

Así, con $D_0(x) = 1, D_1(x) = x$, $D_n(x)$ satisface la relación de recurrencia a tres términos dada en la definición 3 para los polinomios de Legendre, por lo tanto se afirma qué $D_n(x) = P_n(x)$.
Esta representación de $P_n(x)$ como un determinante, se debe al matemático Stanley Rabinowitz.

1.4.3. El proceso de Gram-Schmidt.

Otra manera de hallar los polinomios de Legendre, salvo una costante, es atravez del metodo de ortogonalización de Gram-Schmidt para el producto interno definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} (fg)dx, \qquad (1.4.3.1)$$

cuando los vectores son polinomios en el intervalo $[-1, 1]$, la base a este espacio es $\beta = \{1, x, x^2, \dots\}$.
Al recordar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, se tiene

$$U_k = V_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle V_k, U_j \rangle}{\langle U_j, U_j \rangle} U_j, \qquad (1.4.3.2)$$

donde los V_k se toman de la base β.
Al ortogonalizar por el método de Gram-Schmidt,

•Para $k = 1$, en la expresión (1.4.3.2)

$$U_1 = V_1 = 1,$$

al relacionar U_1, con $P_0(x) = 1$, decimos,

$$P_0(x) = U_1 = 1.$$

•Si k=2, en la expresión (1.4.3.2), se tiene

$$U_2 = V_2 - \frac{\langle V_2, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle} U_1,$$

al desarrollar la anterior expresión con los valores $V_2 = x$, $U_1 = 1$, al utílizar la definición (1.4.3.1) para los productos $\langle\cdot,\cdot\rangle$, se tiene

$$U_2 = x,$$

así

$$P_1(x) = U_2 = x.$$

•De igual forma si $k = 3$, al reemplazar en (1.4.3.2)

$$U_3 = V_3 - \frac{\langle V_3, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle}U_1 - \frac{\langle V_3, U_2\rangle}{\langle U_2, U_2\rangle}U_2, \tag{1.4.3.3}$$

con las equivalencias $V_3 = x^2$, dado en la base β inicialmente, $U_1 = 1$, $U_2 = x$, y el desarrollo de los productos $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se tiene

$$\frac{\langle V_3, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle}U_1 = \frac{1}{3}, \qquad \frac{\langle V_3, U_2\rangle}{\langle U_2, U_2\rangle}U_2 = 0,$$

qué al reemplazar en (1.4.3.3) se obtiene

$$U_3 = x^2 - \frac{1}{3},$$

así, al relacionar U_3 anterior con $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, se llega á

$$P_2(x) = \frac{3}{2}U_3.$$

• Si $k = 4$, reemplazando en (1.4.3.2), tenemos

$$U_4 = V_4 - \frac{\langle V_4, U_1\rangle}{\langle U_1, U_1\rangle}U_1 - \frac{\langle V_4, U_2\rangle}{\langle U_2, U_2\rangle}U_2 - \frac{\langle V_4, U_3\rangle}{\langle V_4, U_3\rangle}U_3,$$

como $V_4 = x^3$ de la base del espacio de los polinomios β, $U_1 = 1$; $U_2 = x$; $U_3 = x^2 - \frac{2}{3}$, hallados anteriormente, se puede hallar que

$$\frac{\langle V_4, U_1 \rangle}{\langle U_1, U_1 \rangle} U_1 = \frac{\langle V_4, U_3 \rangle}{\langle V_4, U_3 \rangle} U_3 = 0, \text{ y } \frac{\langle V_4, U_2 \rangle}{\langle U_2, U_2 \rangle} U_2 = \frac{3}{5}(x),$$

Luego $U_4 = x^3 - \dfrac{3}{5}(x)$; como $P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, entonces

$$P_3(x) = \frac{5}{2} U_4.$$

Las observaciones anteriores permiten conjeturar qué $P_n(x) = C_n U_{n+1}$, con $C_n \in \mathbb{R}$, es decír, los polinomios de Legendre son hallados salvo una constante, apartír del metodo de ortogonalización de Gram-Schmidt, atrevéz de la base $\beta = \{1, x, x^2, ...\}$, con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} (fg) dx$, cuando el espacio es el de los polinomios.

Capítulo 2

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE.

2.1. Valores especiales.

De la función generatriz

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \tag{2.1.1}$$

al sustituir x=1 en la anterior expresión, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n,$$

al factorizar el trinomio y cancelar con la raiz se tiene

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0} P_n(1)t^n, \tag{2.1.2}$$

teniendo en cuena la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \, |t| < 1,$$

reemplazando la anterior expresión en (2.1.2), se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0} P_n(1)t^n,$$

de donde deducimos que

$$P_n(1) = 1.$$

De manera análoga al tomar $x = -1$, en (2.1.1)

$$\frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n,$$

nuevamente la serie geométrica puesto que $|-t| < 1$, de la expresión anterior resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n,$$
$$P_n(-1) = (-1)^n.$$

Sí, en (2.1.1) se toma x=0, resulta

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n. \tag{2.1.3}$$

Al aplicar la siguiente fórmula (ver (A.1.1.1), Apéndice 1),

$$(1-y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{n!},$$

con la identificación

$$y = -t^2; \quad a = \frac{1}{2},$$

la espresión (2.1.3), se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n (t^{2n})}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n,$$

sí, en la anterior expresión utilizamos (ver (A.1.2.1), Apéndice 1)

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n)!}$$

se obtiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n,$$

de la igualdad anterior se observa: en el lado izquierdo aparecen sólo potencias pares de t, así, para subindices impares $P_{2n+1}(0)$ se tiene que

$$P_{2n+1}(0) = 0.$$

Por otro lado, al comparar coeficientes de potencias pares se tiene

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La discusión realizada anteriormente queda resumida en el siguiente resultado.

Proposición 2.1 Si $P_n(x)$ es el $n-$esímo polinomio de Legendre entonces

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1, & P_{2n+1}(0) &= 0, \\ P_n(-1) &= (-1)^n, & P_{2n}(0) &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n(n!)^2}. \end{aligned}$$

Nota 2.1.1
Los valores especiales encontrados en esta sección, se pueden encontrar de una manera más sencilla, si se hace úso de la definición 6 para los polinomios de Legendre, en efecto sí

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}cos\theta\right)^n d\theta, \tag{2.1.4}$$

al tomar $x = 1$, en la (2.1.4) resulta

$$P_n(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1)^n d\theta = \frac{1}{2\pi}(2\pi) = 1.$$

Si en (2.1.4) se toma $x = -1$, se obtiene

$$P_n(-1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-1)^n \quad d\theta = (-1)^n\frac{1}{2\pi}(2\pi) = (-1)^n.$$

Finalmente, si $x = 0$, la expresión para $P_n(x)$ dada en (2.1.4) se transforma en:

$$P_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i^n(cos\theta)^n \quad d\theta, \tag{2.1.5}$$

de la expresión (2.1.5) es claro que para subindices ímpares de n, la integral es cero, es decir

$$P_{2n+1}(0) = \frac{1}{2\pi}i^{2n+1}\int_0^{2\pi} (cos\theta)^{2n+1} d\theta = 0.$$

Para el caso n sea par:

$$P_{2n}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-1)^n(cos\theta)^{2n} d\theta = \frac{(-1)^n}{2\pi}4\int_0^{\pi/2} (cos\theta)^{2n} d\theta,$$

al utilizar la expresión (ver (A.2.3.8) del Apéndice 2)

$$2\int_0^{\pi/2} (cos\theta)^{2n} d\theta = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

se tiene

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

2.2. Paridad.

Veamos que los polinomios de Legendre de orden par, son efectivamente funciones pares y de la misma manera, los polinomios de Legendre de orden impar corresponden a funciones impares, mostraremos que

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= P_{2n}(-x), \\ P_{2n+1}(-x) &= -P_{2n+1}(x), \end{aligned}$$

es decír, mostraremos que

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x). \tag{2.2.1}$$

En efecto, al considerar la función generatriz

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

de igual forma al reemplazar $x = -x, \;\; t = -t$, en la función generatriz anterior, se tiene que

$$g(-x,-t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-1)^n t^n.$$

De las dos igualdades anteriores, se obtiene el resultado (2.2.1).

Nota 2.2.1
En la relación (1.4.1), se establecío que $P_n(x)$ se puede escribir como una función hipergeométrica

$$P_n(x) =_2 F_1\left(\begin{matrix} -n, n+1 \\ 1 \end{matrix}\middle| \frac{1-x}{2}\right),$$

si aplicamos en esta fórmula, el resultado, (2.2.1)

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x),$$

decimos que

$$P_n(x) = (-1)^n \;\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+1 \\ 1 \end{matrix}\middle| \frac{1+x}{2}\right),$$

es decir, hemos hallado otra forma de expresar $P_n(x)$ como una función hipergeométrica.

2.3. Ortogonalidad.

En esta sección se establecerá la propiedad más importante de los polinomios de Legendre, la cual, queda consignada en los dos teoremas que constituyen la sección.

Teorema 1.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{si} \quad n = m \end{cases}$$

Demostración 1.
Para comenzar esta prueba, haremos uso de la función generatriz dos veces, es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

y sea

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)h^m,$$

al multiplicar las anteriores expresiones e integrar la variable x entre -1 y 1,

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(x)P_m(x) \right) t^n h^m \qquad (2.3.1.1)$$

tomando la parte izquierda, y al hacer las sustituciones

$$a = \frac{1+t^2}{2t}, \quad b = \frac{1+h^2}{2h}, \qquad (2.3.1.2)$$

se tiene:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2t(a-x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2h(b-x)}}dx,$$

multiplicamos y dividimos por $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}$,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\sqrt{th}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}dx\\
&= \frac{1}{2\sqrt{th}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{b-x}}+\frac{1}{\sqrt{a-x}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}\right)dx\\
&= \frac{1}{2\sqrt{th}}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{\sqrt{b-x}}+\frac{1}{\sqrt{a-x}}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}dx,
\end{aligned}
$$

si sustituimos

$$
u=\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x};\quad \text{entonces}\quad -2du=\left(\frac{1}{\sqrt{a-x}}+\frac{1}{\sqrt{b-x}}\right)dx,
$$

por lo qué, la integral toma la forma

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\sqrt{th}}\int_{-1}^{1}-\frac{2du}{u}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{th}}\ln\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{th}}\left[\ln\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\right)-\ln\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{th}}\ln\left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}}\right). \tag{2.3.1.3}
$$

Con el fin de aplicar en la relación anterior, la fórmula (ver (A.1.5.1), Apéndice 1)

$$
2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right)=ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \tag{2.3.1.4}
$$

debemos encontrar una expresión para z, de tal forma que

$$
\frac{1+z}{1-z}=\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}}=\mathbf{A} \tag{2.3.1.5}
$$

de donde

$$
z=\frac{A-1}{A+1},
$$

es decir

$$
z=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}+\sqrt{b+1}-\sqrt{b-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{b+1}},
$$

al reemplazar los valores de a y b, dados en (2.3.12)

$$a = \frac{1+t^2}{2t}, \quad b = \frac{1+h^2}{2h},$$

y luego de efectuar las operaciones indicadas, se tiene que

$$z = \sqrt{ht}.$$

Ahora, teniendo encuenta el valor $z = \sqrt{ht}$, y las expresiones (2.3.1.4), (2.3.1.5), la expresión para I dada en (2.3.1.3) se transforma en

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{th}}\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{th})^{2n+1}}{(2n+1)}\right) \\ I &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(th)^n}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

al comparar la anterior expresión, con (2.3.1.1), se obtiene

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\right)(th)^n = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{n,m=0}^{\infty}P_n(x)P_m(x)\right)t^n h^m,$$

de lo anterior se observa: en el lado izquierdo para t y h, solo aparecen potencias de grado n, mientras qué, en el lado derecho aparecen potencias n y m, por lo tanto:

para $n \neq m$,

$$0 = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx,$$

y sí, $n = m$,

$$\frac{2}{2n+1} = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx,$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Demostración 2.
En esta prueba se hará uso de la ecuación diferencial de Legendre y la función generatríz, puesto que $P_m(x), P_n(x)$ son soluciones de la ecuación de Legendre de ordenes m y n respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) &= 0, \\ (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $P_m(x)$, la segunda ecuación por $P_n(x)$ y sustrayendo, se obtiene

$$(1-x^2)\left[P_m P_n''(x) - P_n(x)P_m''(x)\right] - 2x\left[P_m(x)P_n'(x) - P_n(x)P_m'(x)\right] = \left[m(m+1) - n(n+1)\right]P_n(x)P_m(x),$$

la anterior ecuacion se puede escribir

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left[P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'\right]\right\}=[m(m+1)-n(n+1)]\,P_n(x)P_m(x),$$

integrando ambos miembros de la igualdad anterior, entre -1 y 1 se tiene:

$$0=[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx,$$

por lo tanto , si $m \neq n$, se debe cumplir que

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0.$$

Para establecer la segunda parte del teorema, usamos la función generatríz:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)P_m(x)t^{n+m},$$

entonces integrando desde -1 hasta 1, con respecto a x, se tiene:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-2xt+t^2}dx=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx\right)t^{n+m}. \tag{2.2.2}$$

Realizando la integral del lado izquierdo de (2.2.2) y haciendo uso de lo ya demostrado en la primera parte, la igualdad (2.2.2) se escribe como

$$\frac{-1}{2t}\ln(1-2xt+t^2)\Big|_{x=-1}^{x=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx\right)t^{2n},$$

qué, a su vez, se escribe como

$$\frac{1}{t}ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx\right)t^{2n},$$

teniendo en cuenta la fórmula (ver (A.1.5.1) Ánexo 1),

$$\frac{1}{t}ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n},$$

se llega a
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx\right\}t^{2n},$$
al igualar, para cada n, los coeficientes de t^{2n}, se obtienen finalmente
$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}.$$

Demostración 3.
Sea f cualquier función de clase $C^{(n)}$ sobre $[-1,1]$, es decir, una función con, al menos, n derivadas continuas en el intervalo $-1\leq x\leq 1$. Si I se puede escribir como
$$I=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx,$$
usando para $P_n(x)$ la expresión dada por la fórmula de Rodrigues, la integral I se puede escribir como
$$I=\frac{1}{2^n n}\int_{-1}^{1}f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx.$$
Al aplicar integración por partes, con
$$\begin{aligned} u &= f(x), & dv &= \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx,\\ du &= f'(x)\,dx; & v &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n;\end{aligned}$$
$$I=\frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Bigg|_{x=1}^{x=1}\right]-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\quad dx,$$
por la presencia del término $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$, las primeras $(n-1)$ derivadas se anulan en $x=\pm 1$, el primer término del lado derecho de la igualdad anterior se anula, así
$$I=\frac{-1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx,$$
continuando de esta manera, aplicando $(n-1)$ veces integración por partes, se obtiene:
$$I=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx.$$
Si f es un polinomio de grado menor que n, entonces $f^{(n)}(x)=0$, así $I=0$. En particular, esto es verdadero para $P_0, P_1..., P_{n-1}$, luego

$$\langle P_m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \qquad \text{para } m < n.$$

Utilizando el mismo razonamiento, intercambiando m y n, se tiene

$$\langle P_m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \qquad \text{para } m > n,$$

luego $\{P_m\}$ es un conjunto ortogonal.

De otra parte, si se toma $f(x) = P_n(x)$ y teniendo en cuenta que (ver (A.1.6.1), Apéndice 1)

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + ...$$

se tiene

$$P_n{}^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

luego

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{(2n)!}{2^n n!}(x^2-1)^n \quad dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n \quad dx \\ &= \frac{2.(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n \quad dx. \end{aligned}$$

Utilizando la sustitución $x = sen\theta$, la integral I se convierte en

$$I = \frac{2.(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\pi/2}(cos\theta)^{2n+1} \quad d\theta$$

haciendo uso de la siguiente identidad (ver (A.2.3.7), Apéndice 1)

$$\int_{0}^{\pi/2}(cos\theta)^{2n+1}d\theta = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$$

$$I = \frac{2}{2n+1}.$$

Nota 2.3.1
La fórmula

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx = \frac{2}{2n+1},$$

se puede tambien establecer con ayuda de la fórmula de recurrencia a tres términos y de la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad si \quad n \neq m. \tag{1}$$

En efecto, consideremos la relación de recurrencia

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \tag{2}$$

cambiando en (2), n por n $-$ *1, y multiplicando la igualdad resultante por* $(2n+1)P_n(x)$ *se obtiene*

$$(4n^2-1)xP_{n-1}(x)P_n(x) = n(2n+1)P_n^2(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x), \tag{3}$$

multiplicando, la igualdad (2) por $(2n-1)P_{n-1}(x)$ *se obtiene:*

$$(4n^2-1)xP_{n-1}(x)P_n(x) = (n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + n(2n-1)P_{n-1}^2(x). \tag{4}$$

Al restar (4) de (3), e integrando con respecto a x entre -1 y 1, utilizando la relación de ortogonalidad (1) se llega a:

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{1} [P_{n-1}(x)]^2 dx.$$

Al iterar la identidad anterior

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx &= \frac{(2n-1)}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1} \int_{-1}^{1} [P_{n-2}(x)]^2\, dx \\
&= \frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\frac{2n-5}{2n-3} \int_{-1}^{1} [P_{n-3}(x)]^2 dx \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= \frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}\frac{2n-5}{2n-3} \cdots \frac{5}{7}\,\frac{3}{5} \int_{-1}^{1} [P_1(x)]^2 dx,
\end{aligned}$$

como

$$\int_{-1}^{1} (P_1(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

entonces

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Teorema 2
$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortogonal del espacio $L^2([-1,1])$.

Demostración: Ver[3].

2.4. Aplicación de la ortogonalidad.

2.4.1. Relación de recurrencia.

En esta sección de demostrará la relación de recurrencia de polinomios de Legendre a tres terminos dada por la definición 3,

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$

para esto haremos uso de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, supongase que los polinomios $\{P_n(x)\}$ satisfacen la siguiente relación:

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \tag{2.4.1.1}$$

al organizar (2.4.1.1) de manera conveniente tenemos:

$$P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x) = B_n P_n(x) - C_n P_{n-1}. \tag{2.4.1.2}$$

De la expresión (2.4.1.2) notamos qué, el lado derecho es un polinomio de grado n, esta observación permite afirmar qué, sí, el coefciente principal del polinomio P_{j+1} es K_{j+1}, entonces

$$K_{n+1} - A_n K_n = 0, \tag{2.4.1.3}$$

donde

$$K_j = \frac{1}{2^j}\frac{(2j)!}{(j!)^2}, \tag{2.4.1.4}$$

es el coeficiente principal de $P_j(x)$ (ver (A.1.6.1), Apéndice 1), de esta manera, de (2.4.1.3)

$$A_n = \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\frac{2^n(n!)^2}{2n}!$$

al simplificar, resulta

$$A_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Para hallar el valor de C_n, se multipla por $P_{n-1}(x)$ la expresión (2.4.1.2), luego de integrar resulta

$$\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx - \int_{-1}^{1} A_n x P_n(x)P_{n-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} B_n P_n(x)P_n{-}1(x) - \int_{-1}^{1} C_n P_{n-1}(x)P_{n-1}(x).$$

Al utilizar el resultado de ortogonalización dado en la sección previa, la expresión anterior, se convierte en

$$\int_{-1}^{1} A_n x P_{n-1}P_n(x)dx = C_n\left(\frac{2}{2n-1}\right), \tag{2.4.1.5}$$

de la expresión (2.4.1.5), queremos analizar $xP_{n-1}(x)$, esto es:

$$xP_{n-1}(x) = x[K_{n-1}(x)^{n-1} + S_{n-2}(x)],$$

donde $S_{n-2}(x)$ es es un polinomio de grado menor o igual a $n-2$, al operar de manera conveniente, tenemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{K_{n-1}}{K_n}\left[K_n x^n + \frac{K_n S_{n-2}(x)x}{k_{n-1}}\right],$$

al sumar y restar por $a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, ..., a_0$ los terminos que le faltan a $K_n x^n$ para ser $P_n(x)$,

$$xP_{n-1}(x) = \frac{K_{n+1}}{K_n}[P_n(x) + Q_{n-1}(x)], \tag{2.4.1.6}$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es la suma de $\dfrac{K_n S_{n-2}(x)x}{k_{n-1}}$ con $-a_{n-1}x^{n-1}, -a_{n-2}x^{n-2}, ..., -a_0$, al retomar la expresión dada en (2.4.1.5) y teniendo en cuenta (2.4.1.6)

$$A_n \int_{-1}^{1} \frac{K_{n-1}}{K_n}\left[P_n(x) + Q_{n-1}\right] P_n(x)dx = C_n\left(\frac{2}{2n-1}\right),$$

$$A_n\left\{\frac{K_{n-1}}{K_n}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x) + \frac{K_{n-1}}{K_n}\int_{-1}^{1} Q_{n-1}P_n(x)dx\right\} = C_n\left(\frac{2}{2n-1}\right),$$

al utilizar el resultado de ortogonalización, y el hecho de que los polinomios $\{P_n(x)\}$ son base para todos los polinomios (teorema sección previa), decimos qué, $Q_{n-1}(x)$ se expresa como combinación de polinomios de grado menor o igual a $n-1$, luego:

$$A_n\frac{K_{n-1}}{K_n}\frac{2}{2n+1} = C_n\left(\frac{2}{2n-1}\right),$$

al despejar C_n, se tiene

$$C_n = A_n\frac{2n-1}{2}\frac{K_{n-1}}{K_n}\frac{2}{2n+1},$$

si sustituimos $A_n = \dfrac{2n-1}{2}$, K_{n-1}, K_n dados por (2.4.1.4), tenemos finalmente

$$C_n = \frac{n}{n+1}.$$

Al utilizar, la propiedad $P_n(1) = 1$ en (2.4.1.2), y sustituir los valores encontrados para A_n, C_n, se tiene

$$1 - A_n = B_n - C_n,$$

$$B_n = 1 - \frac{2n+1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 0.$$

Finalmente, al sustituir

$$A_n = \frac{2n+1}{n+1},\ B_n = 0,\ C_n = \frac{n}{n+1},$$

en la ecuación (2.4.1.1),

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1},$$

de donde se tiene la relación de recurrencia

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x).$$

2.4.2. Serie de Fourier-Legendre.

De acuerdo con el teorema 2 de la sección 2.3, si $f \in L^2[-1,1]$ existen costantes $A_k \in \mathbb{C}$, tal que,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x),$$

en donde A_k, según el teorema 1, viene dada por

$$A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{2.3.2.1}$$

Ejemplo 1.

Expandir $f(x) = x^2$ en una serie de Fourier-Legendre.

Solución.

Se debe encontrar los coeficientes $A_k, k = 0, 1, 2, 3, ...$, tales que

$$\begin{aligned} x^2 &= A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + A_3P_3(x) + ... \\ &= A_0(1) + A_1(x) + A_2\left(\frac{3}{2}x^2 \frac{-1}{2}\right) + A_3\left(\frac{5}{2}x^3 \frac{-3}{2}x\right) + ... \end{aligned}$$

puesto que el lado izquierdo, es un polinomio de grado 2, se debe tener que $A_3 = A_4 = ... = 0$, Asi:

$$\begin{aligned} x^2 &= A_0 + A_1x + A_2\left(\frac{3}{2}x^2 \frac{-1}{2}\right) \\ &= \left(A_0 - \frac{1}{2}A_2\right) + A_1x + \frac{3}{2}A_2x^2, \end{aligned}$$

de lo cual
$$A_0 - \frac{1}{2}A_2 = 0, \quad A_1 = 0, \quad \frac{3}{2}A_2 = 1,$$
entonces
$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{2}{3}, \quad A_0 = \frac{1}{3},$$
por lo tanto
$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x).$$

Ejemplo 2.
Expandir la función $f(x) = x^3$ en una serie de Fourier-Legendre.
Solución.
Supóngase que
$$x^3 = \sum_{k=0}^{3} A_k P_k(x),$$
entonces de acuerdo a (2.3.2.1)
$$A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 P_k(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, 3, ..$$
luego,
$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0,\\
A_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 P_1(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 x dx = 3\int_{0}^{1} x^4 dx = \frac{3}{5},\\
A_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^3.P_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^3\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = 0,\\
A_3 &= \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^3.P_3(x)dx = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^3.\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)dx = \frac{2}{5},
\end{aligned}$$
así
$$x^3 = A_1P_1(x) + A_3P_3(x)x^3 = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x).$$

Los dos ejemplos anteriores sugieren que $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, se pueden escribir como una combinación lineal de los polinomios de Legendre $P_n(x)$, en la cual aparecen sólo polinomios de orden par, si n es par; y sólo polinomios de orden impar en caso de que n lo sea; en efecto, éste es el contenido de las dos siguientes proposicones.

Proposición 1.
Para $f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$x^{2k} = \sum_{m=0}^{k} \frac{2^{2m}(4m+1)(2k)!(k+m)!}{(2k+2m+1)!(k-m)!} P_{2m}(x).$$

Demostración.
Se sabe que

$$f(x) = x^{2k} = \sum_{n=0}^{2k} A_n P_n(x),$$

donde

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} x^{2k} P_n(x) dx. \tag{2.3.2.2}$$

Sí n es impar, la función $x^{2k}P_n(x)$ es impar, de donde la integral que figura en (2.3.2.2) debe ser cero. Ahora bien, al considerar el caso n par, es decir n de la forma $n = 2m$ en (2.3.2.2) se tiene

$$A_{2m} = \frac{4m+1}{2} \int_{-1}^{1} x^{2k} P_{2m}(x) dx, \qquad m = 0, 1, 2, , \quad k. \tag{2.3.2.3}$$

Utilizando la fórmula de Rodrigues para polinomios de Legendre, la expresión para A_{2m} dada en (2.3.2.3) se escribe como

$$A_{2m} = \frac{(4m+1)}{2^{2m}(2m)!} \int_{0}^{1} x^{2k} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2-1)^{2m} dx,$$

al integrar por partes $2m$-veces, la igualdad anterior se expresa

$$A_{2m} = \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!} \int_{0}^{1} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^{2k}).(x^2-1)^{2m} dx, \tag{2.3.2.4}$$

como la derivada de orden $2m$ de la función $f(x) = x^{2k}$ viene dada por

$$f^{(2m)}(x) = (x^{2k})^{(2m)} = \frac{(2k)!}{(2m-2k)!} x^{2k-2m},$$

la igualdad (2.3.2.4) se transforma en

$$A_{2m} = \frac{(4m+1)}{2^{2m}(2m)!} \frac{(2k)!}{(2m-2k)!} \int_{0}^{1} (x^2)^{k-m} (x^2-1)^{2m} dx, \tag{2.3.2.5}$$

mediante la sustitución $t = x^2$, y dado que

$$\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{u-1}dt = B(s,u) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(u)}{\Gamma(s+u)},$$

con

$$s = k - m + \left(\frac{1}{2}\right),\ u = 2m+1,$$

de la igualdad (2.3.2.5) se obtiene

$$A_{2m} = \frac{(4m+1)(2k)!}{2^{2m+1}(2m-2k)!}\frac{\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+m+\frac{3}{2}\right)}, \tag{2.3.2.6}$$

teniendo presente, la fórmula de duplicación para la función gamma (ver (A.2.3.4), Apéndice 2)

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

con

$$z = k - m, \quad z = r + m,$$

respectivamente, se tiene

$$\frac{\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+m+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{\left(k+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+m+\frac{1}{2}\right)} = 2^{4m+1}\frac{\Gamma(2k-2m)}{\Gamma(k-m)}\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(2k+2m)}.\frac{1}{(2k+2m+1)}.$$

Así, la expresión para A_{2m} dada en (2.3.2.6) se transforma, teniendo en cuenta la relación de recurrencia (ver (A.2.2.2), Apéndice 2)

$$\Gamma(w+1) = w\Gamma(w),$$

y el hecho (ver (A.2.2.5), Apéndice 2)

$$\Gamma(p+1) = p!, \quad p \in \mathbb{N},$$

en

$$A_{2m} = \frac{2^{2m}(4m+1)(2k)!(k+m)!}{(2k+2m+1)\quad(k-m)!},$$

obteniendose así el resultado.

Al seguir un procedimiento similar al del ejemplo anterior, se tiene el siquiente resultado.

Proposición 2.
Para $f(x) = x^{2k+1},\ k = 0,1,2,,,$ se obtiene

$$x^{2k+1} = \sum_{m=0}^{k}\frac{2^{2m+1}(4m+3)(2k+1)!(k+m+1)!}{(2k+2m+3)!(k-m)!}P_{2m+1}(x),$$

Proposición 3. Identidad de Parseval.
Sea $f \in L^2([-1,1])$, y $\{a_n\}$ los coeficientes de f en la serie de Fourier-Legendre. Entonces

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^2}{2n+1}.$$

Demostración.
Por el teorema 2 de la sección (2.3) se tiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x),$$

al elevar al cuadrado

$$[f(x)]^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mP_m(x)\right),$$

e integrar entre -1 y 1 con respecto a x.

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2 = \sum_{n,m=0}^{\infty}a_na_m\int_{-1}^{1}P_n(x)p_m(x),dx$$

y utilizar la propiedad de ortogonalización dada en la sección 2.4, la expresión inicial resulta

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\left(\frac{2}{2n+1}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n^2}{2n+1}\right).$$

Nota 2.4.1 *Es claro de las dos primeras proposiciones anteriores qué, cualquier polinomio en la variable x, se puede escribir como una combinación lineal de los polinomios de Legendre.*

2.4.3. Aproximación de funciones por mínimos cuadrados.

Sea f una función continua definida en el intervalo $[-1,1]$, y consideremos el problema de aproximar a f, en el sentido de los mínimos cuadrados por polinomios de grado menor o igual a n, es decir, si

$$I = \int_{-1}^{1}[f(x)-p(x)]^2dx, \qquad (2.3.3.1)$$

el problema consiste en encontrar un polinomio $p(x)$ para el que la integral en (2.3.3.1) tenga el valor mínimo posible. Si $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n, entonces en virtud de la nota 2.4 de la sección anterior, se puede expresar como

$$p(x) = b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + .. + b_nP_n(x), \tag{2.3.3.2}$$

en donde $P_j(x)$ es el polinomio de Legendre de orden j. De esta manera, teniendo en cuenta la expresión para p(x) dada en (2.3.3.2), la integral I de (2.3.3.1) se puede escribir como

$$I = \int_{-1}^{1} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x) dx \right]^2 dx,$$

$$I = \int_{-1}^{1} (f(x))^2 - 2\sum_{k=0}^{n} b_k \left[\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx \right] + \int_{-1}^{1} \left[\sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x) \right]^2 dx, \tag{2.3.3.3}$$

debido a la linealidad del producto interno y la ortogonalidad de los polinomios de Legendre el tércer término del lado derecho de (2.3.3.3) se transforma en

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left[\sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x) \right]^2 dx &= \left\langle \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x), \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x) \right\rangle \\
&= \langle b_0P_0 + b_1P_1 + .. + b_nP_n; b_0P_0 + b_1P_1 + .. + b_nP_n \rangle \\
&= {b_0}^2 \langle P_{0,}P_0 \rangle + {b_1}^2 \langle P_{1,}P_1 \rangle + .. + {b_n}^2 \langle P_n, P_n \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} {b_k}^2 \langle P_{k,}P_k \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2(b_k)^2}{2k+1}.
\end{aligned} \tag{2.3.3.4}$$

De otra parte, si a_k son dos coeficientes en el desarrollo de Fourier-Legendre de la función f, entonces

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2k+1} a_k, \tag{2.3.3.5}$$

de las relaciones dadas en (2.3.3.4) y (2.3.3.5), la integral I de (2.3.3.3) se puede escribir como

$$I = \int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{2bk}{2k+1} a_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} {b_k}^2,$$

$$I = \int_{-1}^{1} (f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} (b_k - a_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} {a_k}^2.$$

En la expresión anterior, los a_k son fijos, de hecho vienen dados según la relación (2.3.3.5), así, que si se quiere que I asuma el valor mínimo se debe tener que $b_k = a_k$ para $k = 0,1,2...n$.
De esta manera, el polinomio p(x) que mínimiza la integral.

$$I = \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 \, dx,$$

viene dado por el polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x),$$

con

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx.$$

Capítulo 3

COMENTARIOS A DOS ARTÍCULOS.

3.1. Otra mirada para las series de $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi^2}$.

Calculando los coeficientes de Fourier-Legendre para la función $\left(\sqrt{1-a^2x^2}\right)^{2k-1}$, Levrie [8], halló en 2010 las siguientes formulas para $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi^2}$

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(4n+1)}{(2n-1)(n+1)} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(n!)^3}, \tag{3.1.1}$$

$$\frac{32}{3\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)}{(2n-1)^2(n+1)^2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^4}{(n!)^4}, \tag{3.1.2}$$

donde

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

El objetivo de la presente sección, es establecer las fórmulas (3.1.1) y (3.1.2), usando para ello, propiedades de los polinomios de Legendre y la función hipergeométrica.

De acuerdo con la definición 1, del capítulo 1, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \tag{3.1.3}$$

transformando la cantidad subradical del lado izquierdo de (3.1.3)

$$1-2x+t^2 = 2t\left(\frac{1+t^2}{2t} - x\right) = 2t(d-x), \quad \text{con} \quad d = \frac{1+t^2}{2t}, \tag{3.1.4}$$

así de (3.1.3) se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{2t}\,\sqrt{d-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por $f(x) = (1-x^2)^{k-\frac{1}{2}}$, e integrando con respecto a x, se obtiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-1}^{1} (d-x)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)^{k-\frac{1}{2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{k-\frac{1}{2}} P_n(x)\, dx \right] t^n. \tag{3.1.5}$$

Mediante la sustitución $\dfrac{1+x}{2} = s$, el lado izquierdo de (3.1.5) se escribe como

$$I = \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{2^{2k}}{\sqrt{d+1}} \int_{0}^{1} s^{k-\frac{1}{2}} (1-s)^{k-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{d+1} s\right)^{-\frac{1}{2}} ds. \tag{3.1.6}$$

Al utilizar la siguiente representación integral de Euler para una función hipergeométrica ${}_2F_1$ (ver (A.3.2.1), Apéndice 3),

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} A, & B \\ & C \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \int_{0}^{1} s^{B-1} (1-s)^{C-B-1} (1-zs)^{-A} ds,$$

mediante la identificación

$$B = k + \frac{1}{2}, \quad C = 2k+1, \quad A = \frac{1}{2}, \quad Z = \frac{2}{d+1},$$

la integral I en (3.1.6) se transforma en:

$$I = \frac{2^{2k}}{\sqrt{2t}\,\sqrt{d+1}} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})^2}{\Gamma(2k+1)} \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, & k+\frac{1}{2} \\ & 2k+1 \end{matrix} \middle| \frac{2}{d+1} \right),$$

si en esta última igualdad, reemplazamos el valor de d, dado en (3.1.4) y teniendo en cuenta que $\Gamma(p+1) = p!$, $p \in \mathbb{N}$ (ver (A.2.2.5), Apéndice 2), la relación para I de la anterior expresión se escribe como

$$I = \frac{2^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})^2}{(1+t)} \frac{1}{(2k)!} \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, & k+\frac{1}{2} \\ & 2k+1 \end{matrix} \middle| \frac{4t}{(1+t)^2} \right). \tag{3.1.7}$$

Al utilizar la fórmula de transformación (ver (A.3.2.1), Apéndice 3)

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} A & B \\ & 2B \end{matrix} \middle| \frac{4t}{(1+t)^2} \right) = (1+t)^{2A}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} A, & A+\frac{1}{2}-B \\ & B+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| t^2 \right),$$

aplicada a la función hipergeométrica que figura en (3.1.7), con la respectiva identificación

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = k + \frac{1}{2},$$

se tiene, luego de simplificar que

$$I = \frac{2^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})^2}{(2k)!}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}-k \\ & k+1 \end{matrix} \middle| t^2 \right).$$

Al usar la definición de la función hipergeométrica ${}_2F_1$ como serie de potencias, se tiene que la igualdad anterior se escribe como

$$I = \frac{2^{2k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-k\right)_n}{(k+1)_n n!} t^{2n}. \tag{3.1.8}$$

Al comparar las expresiones para I, dadas en la parte derecha de (3.1.5) y (3.1.8) se concluye que

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{k-\frac{1}{2}} P_{2n}(x)\, dx = \frac{2^{2k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{(2k)!} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (\frac{1}{2}-k)_n}{n!(k+1)_n}. \tag{3.1.9}$$

Además, si A_{2n}, representa los coeficientes de Fourier-Legendre de la función

$$f(x) = (1-x^2)^{k-\frac{1}{2}},$$

se tiene que

$$A_{2n} = \frac{(4n+1)}{2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{k-\frac{1}{2}} P_{2n}(x) dx,$$

así que, de la igualdad anterior y de (3.1.9),

$$A_{2n} = \frac{4n+1}{2} \frac{2^{2k}\{\Gamma(k+\frac{1}{2})\}^2}{(2k)!} \frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{2}-k)_n}{n!(k+1)_n}. \tag{3.1.10}$$

Como

$$\left(1-x^2\right)^{k-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(x),$$

tomando $x = 0$, teniendo en cuenta (3.1.10) y el valor especial dado en la proposición 2.1 del capítulo 2

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

se obtiene

$$\frac{(2k)!}{2^{2k-1}\left\{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n+1)}{2} . \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{(k+1)_n} \frac{(2n)!}{2^{2n} \quad (n!)^3}. \tag{3.1.11}$$

De la fórmula de duplicación para la función gamma (ver (A.2.3.4), Apéndice 2)

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!},$$

además se tiene la identidad (ver (A.1.2.1), Apéndice 1)

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

luego la igualdad (3.1.11) se transforma en

$$\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k)!}\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_n}{(k+1)_n}\left(\tfrac{1}{2}\right)_n^2\frac{1}{(n!)^2}. \qquad (3.1.12)$$

Ahora, si en (3.1.12) se toma $k=1$, y teniendo encuenta la expresión (ver (A.2.1.3), Apéndice 2)

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)_n}{(2)_n}=(-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\frac{1}{(2n-1)n!(n+1)},$$

tenemos que

$$\frac{4}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(2n-1)\quad(n+1)}.\frac{1}{(n!)^3},$$

que corresponde a la fórmula (3.1.1).

Finalmente, si en la fórmula (3.1.10) se toma $k=1$, se obtiene luego de simplificar

$$A_{2n}=\frac{(4n+1)\pi}{4}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(n!)^2}\frac{1}{(2n-1)(n+1)},$$

por la identidad de Parseval (proposición 3, sección (2.4.2))

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n+1}{A_{2n}}^2,$$

en el caso $f(x)=(1-x^2)^{1/2}$, se tiene

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(4n+1)}\frac{(4n+1)^2\pi^2}{16}\frac{1}{(2n-1)^2(n+1)^2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^4}{(n!)^4}.$$

Finalmente, al desarrolar la integral y al organizar los terminos de la expresión anterior se tiene la demostración a la expresión (3.1.2), es decír, se tiene

$$\frac{32}{3\pi^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)}{(2n-1)^2(n+1)^2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^4}{(n!)^4},$$

3.2. Acerca del artículo A Legendre Polynomial Integral.

Si $\{P_n(x)\}$ es la sucesión de polinomios de Legendre, el autor en [7], demuestra la siguiente fórmula integral

$$\int_0^1 P_n(2x-1)\log\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}, \quad n \geq 1. \tag{3.2.1}$$

El autor del árticulo referenciado considera que la fórmula dada en (3.2.1) es aparentemente nueva. El objetivo de esta sección es presentar otra demostración de la fórmula (3.2.1), que considero es más sencilla.

Sea I, la integral a evaluar, es decir,

$$I = \int_0^1 P_n(2x-1)\log\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Sea

$$z = 2x - 1,$$

de modo que

$$dx = \frac{1}{2}dz,$$

cuando $x = 0,\ z = -1$ y cuando $x = 1,\ z = 1$, de esta manera

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P_n(z)\log\left(\frac{2}{z+1}\right)dz.$$

Teniendo en cuenta la expresión para $P_n(z)$ dada por la fórmula de Rodrigues, se tiene

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\left(z^2-1\right)^n\right\}\log\left(\frac{2}{z+1}\right)dz.$$

Al utilizar integración por partes n-veces, resulta

$$I = \frac{1}{2^{n+1}n!}(-1)^n\int_{-1}^1 (z^2-1)^n\frac{d^n}{dz^n}\left\{\log\left(\frac{2}{z+1}\right)\right\}dz, \tag{3.2.2}$$

pero,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}log\left(\frac{2}{1+z}\right) &= (-1)(1+z)^{-1},\\
\frac{d^2}{dz^2}log\left(\frac{2}{1+z}\right) &= (-1)^2(1)(1+z)^{-2},\\
\frac{d^3}{dz^3}log\left(\frac{2}{1+z}\right) &= (-1)^3(1)(2)(1+z)^{-2},\\
\vdots \qquad & \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

continuando de esta manera, por induccción matemática, se establece que

$$\frac{d^n}{dz^n}log\left(\frac{2}{1+z}\right) = (-1)^n(n-1)!(1+z)^{-n},$$

teniendo en cuenta ésta expresión, en el integrando del lado derecho (3.2.2)

$$I = \frac{(n-1)!}{2^{n+1}n!}\int_{-1}^{1}(z^2-1)^n(z+1)^{-n}dz = \frac{1}{2^{n+1}n}\int_{-1}^{1}(z-1)^n dz, \tag{3.2.3}$$

efectuando la integral

$$\int_{-1}^{1}(z-1)^n dz = \left.\frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{-(-2)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n+1}.$$

Así, de la expresión anterior, y la expresión (3.2.3), se tiene

$$I = \frac{1}{2^{n+1}n}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

por lo tanto se tiene la demostración para la proposición

$$I = \int_0^1 P_n(2x-1)\log\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Apéndice 1

Algunas fórmulas útiles.

1. La serie binomial.

Para $a \in \mathbb{C}$, y $x \in R$, con $|x| < 1$ se tiene

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{x^n}{n!}. \tag{A.1.1.1}$$

En efecto, sea $f(x) = (1-x)^{-a}$, f resulta una función analítica en $x = 0$, luego f se puede desarrollar en una serie de Taylor alrededor de $x = 0$; es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \tag{A.1.1.2}$$

pero,

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -a(1-x)^{-a-1}(-1) = a(1-x)^{-(a+1)} \\
f^{(2)}(x) &= a(a+1)(1-x)^{-(a+2)} = (a)_2(1-x)^{-(a+2)} \\
f^{(3)}(x) &= (a)_2(a+2)(1-x)^{-(a+3)} = (a)_3(1-x)^{-(a+3)} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (a)_n(1-x)^{-(a+n)},
\end{aligned}$$

en particular,

$$f^{(n)}(0) = (a)_n,$$

luego de (A.1.1.2) se obtiene el resultado:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n.$$

2. Pochhammer $\left(\frac{1}{2}\right)_n$.

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}, \tag{A.1.2.1}$$

recordemos que el símbolo de Pochhammer se define por la relación

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1),$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n} \\
&= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)(2n)}{2^n(2\cdot 4\cdots(2n))} = \frac{(2n)!}{2^n(1\cdot 2)(2\cdot 2)\cdots(2\cdot n)} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n\cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.
\end{aligned}$$

3.Una sumatoria doble.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-k,k.} \tag{A.1.3.1}$$

Con el fin de establecer la fórmula (A.1.3.1), se establece, procediendo de manera formal, primero las identidades dadas en el siguiente resultado.

Lema 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k,k.} \tag{A.1.3.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-2k,k,} \tag{A.1.3.3}$$

Demostración.

Para demostrar (A.1.3.2), consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}t^{n+k},$$

al introducir los nuevos índices de sumación j y m dados por

$$k = j, \qquad n = m - j.$$

Así, el exponente $(n + k)$ de la serie anterior es

$$(n + k) = (m - j) + j = m.$$

Puesto que n y k son enteros no negativos, entonces $j \geq 0$ y $m - j \geq 0$; es decir $0 \leq j \leq m$.
luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, t^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_{m-j,j} t^{m},$$

la identidad (A.1.3.2) del lema se obtiene tomando $t = 1$ y reemplazando los índices de sumación m, y j del lado derecho de la igualdad anterior por n y k respectivamente.
La demostración de (A.1.3.3) sigue la misma estrategia; consideramos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} t^{n+2k},$$

introduciendo los nuevos índices

$$k = j, \qquad n = m - 2j,$$

así

$$n + 2k = (m - 2j) + 2j = m$$

como $n \geq 0$ y $k \geq 0$ entonces $m - 2j \geq 0, \;\; j \geq 0$
de los cual se tiene $0 \leq 2j \leq m, m \geq 0$, de esta manera $0 \leq j \leq \frac{m}{2}$, y puesto que j es un número entero, el índice j recorre desde 0 hasta $[m/2]$; luego se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} t^{n+2k} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{[m/2]} a_{m-2j,j} t^{m},$$

la parte (A.1.3.3) del lema se obtiene tomando $t = 1$ y efectuando los cambios de las letras m y j del lado derecho en la igualdad anterior, por m y k respectivamente.
Ahora es claro que de las igualdades (A.1.3.2) y (A.1.3.3) se obtiene (A.1.3.1),pues,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-k,k}.$$

4. Una fórmula integral.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \text{ sí } a >\mid b\mid. \tag{A.1.3.1}$$

Demostración.

Utilizando métodos de integración que se aprenden en un curso de cálculo integral, es posible establecer (A.1.3.1). No obstante, preferimos el uso de la variable compleja, en especial el teorema del residuo para calcular esta integral.
Por el cambio de variable

$$z = e^{i\theta}, \tag{A.1.3.2}$$

la integral con respecto a la variable real θ de 0 a 2π, se transforma en una integral de linea a lo largo de la circunferencia con centro el origen (0,0) y radio 1.
De la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

se obtiene

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \tag{A.1.3.3}$$

al derivar (A.1.3.2) con respecto a θ, se tiene

$$d\theta = \frac{1}{iz} dz, \tag{A.1.3.4}$$

reemplazando (A.1.3.3) y (A.1.3.4) en la integral a evaluar se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b\cos\theta} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{2z}{2az - bz^2 - b} . \frac{1}{iz} dz \\ &= \frac{-2}{bi} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - \frac{2a}{b} z + 1} dz \end{aligned} \tag{A.1.3.5}$$

Si z_1, z_2 son las raices de la ecuación $z^2 - \frac{a}{b} z + 1 = 0$,
entonces

$$z^2 - 2\frac{a}{b} z + 1 = (z - z_1)(z - z_2),$$

donde

$$z_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \text{ y } z_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b},$$

como $a >\mid b \mid$, ambas raices son reales, y que el único punto singular de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{2a}{b} z + 1},$$

en el interior de la curva $\mid z \mid= 1$ es un polo simple en $z = z_1$, así:

$$\text{Res}\,(f_1, z_1) = \text{lím}_{z\to z_1} f(z).(z-z_1) = \text{lím}_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)}$$
$$= \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{-b}{2\sqrt{a^2-b^2}}.$$
De esta manera utilizando el teorema del residuo y (A.1.3.5) se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b\cos\theta} d\theta = \frac{-2}{bi} 2\pi i Res(f, z_1) = \frac{-4\pi}{b} . \frac{-b}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

de donde,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

5. Una serie especial.

Si $| z |< 1$, entonces

$$ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{2n+1}. \qquad \text{(A.1.5.1)}$$

Demostración.

para $| z |< 1$, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + ... \quad = \frac{1}{1+z.} \qquad \text{(A.1.5.2)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + ... \quad = \frac{1}{1-z}, \qquad \text{(A.1.5.3)}$$

es conocido que la serie geométrica converge uniformemente en su círculo de convergencia, por lo tanto integrando término a término en (A.1.5.2) y (A.1.5.3) se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = ln(1+z),$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = ln(1-z)$$

de donde

$$ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = ln(1+2) - ln(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-1)^n+1]}{n+1} z^{n+1}, \qquad \text{(A.1.5.4)}$$

si en la serie dada en (A.1.5.4), n es impar $(-1)^n - 1 = 0$, luego

$$ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{2n+1}.$$

6.Una expresión para el coeficiente principal de polinomio de Legendre.

El coeficiente principal para el polinomio $P_n(x)$ es:

$$K_n = \frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}. \tag{A.1.6.1}$$

En efecto al considerar la expresión para los polinomios de Legendre dados por la serie

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

Notamos qué para k=0, se obtiene el coeficiente principal del polinomio $P_n(x)$, al cual llamaremos K_n, es decir

$$K_n = \frac{1}{2^n}\frac{(-1)^0(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Apéndice 2

"Funciones especiales."

1. Símbolo de Pochhammer.

para $\alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, se define $(\alpha)_n$ por

$$(\alpha)_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1), & n \geq 1. \\ 1, \qquad \alpha \neq 0, \ n = 0. & (A{,}2{,}1{,}1) \end{cases}$$

La función $(\alpha)_n$ es una generalización del concepto de factorial de un número natural, pues si $\alpha = 1$; $n \in N$, se tiene

$$(1)_n = (1)(2)(3)..(n) = n!.$$

El símbolo de Pochhammer $(\alpha)_n$, satisface la fórmula de duplicación:
Si $\alpha \in \mathbb{C}, n \in N$, se cumple

$$(\alpha)_{2n} = 2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n \qquad \text{(A.2.1.2)}$$

En efecto, la fórmula (A.2.1.2) se cumple si $\alpha = 0$.
Supongamos qué

$$\alpha \neq 0.$$

•Para $n = 0$, (A.2.1.2) se cumple trivialmente.

•Sí $n = 1$

$$(\alpha)_{2(1)} = (\alpha)_2 = \alpha(\alpha+1),$$

de igual forma

$$2^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)_1 \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_1 = \alpha(\alpha+1).$$

Suponiendo que (A.2.1.2) se cumple para un cierto $n \in \mathbb{N}$, veamos qué también es válida para $n+1$:

$$\begin{aligned}
(\alpha)_{2(n+1)} &= (\alpha)_{2n+2} \\
&= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+2n+2-3)(\alpha+2n+2-2)(\alpha+2n+2-1) \\
&= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+2n-1)(\alpha+2n)(\alpha+2n+1) \\
&= (\alpha)_{2n}(\alpha+2n)(\alpha+2n+1),
\end{aligned}$$

haciendo uso de la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
(\alpha)_{2(n+1)} &= 2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n(\alpha+2n)(\alpha+2n+1) \\
&= 2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n 2\left(\frac{\alpha}{2}+n\right)2\left(\frac{\alpha+1}{2}+n\right) \\
&= 2^{2n+2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha}{2}+n\right)\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha+1}{2}+n\right) \\
&= 2^{2(n+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{n+1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_{n+1}.
\end{aligned}$$

Otra identidad mediante la función Pochhammer es la siguiente

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)_n}{(2)_n} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\frac{1}{(2n-1)n!(n+1)}. \tag{A.2.1.3}$$

En efecto, haciendo uso de defición de (A,2,1,2) se tiene

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)_n}{(2)_n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{(2)_n} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}+1\right)\left(\frac{-1}{2}+2\right)\cdots\left(\left(\frac{-1}{2}\right)+n-1\right)}{(2)(3)\cdots((2)+n-1)},$$

multiplicando el numerador y denominador por $\left(n-\frac{1}{2}\right)$,

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)_n}{(2)_n} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\left(\frac{1}{2}\right)+n-2\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)+n-1\right)}{(1)(2)(3)\cdots(n)(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}.$$

Una nueva aplicación de la definición del símbolo de pochhammer, se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)_n}{(2)_n} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\frac{1}{(2n-1)n!(n+1)}.$$

2.Función Gamma.

si $z \in \mathbb{C}$, con $Re(z) > 0$ se define

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{A.2.2.1}$$

si $z = 1$, se tiene

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{e^{-t}}{-1}\bigg|_{t=0}^{\infty} = 1.$$

Al utilizar integración por partes, para evaluar la integral que figura en (A.2.2.1) se tiene

$$\begin{aligned} u &= e^{-t}, & dv = t^{z-1}dt \\ du &= -e^{-t} & v = \frac{1}{z}t^z, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{e^{-t}t^z}{z}\bigg|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}t^z dt, \\ \Gamma(z) &= \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}t^{(z+1)-1}dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1), \end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene que la función Gamma $\Gamma(z)$ satisface la relación de recurrencia

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{A.2.2.2}$$

al iterar la relación anterior

$$\begin{aligned} \Gamma(z+2) &= \Gamma\left((z+1)+1\right) = (z+1)\Gamma(z+1) = z(z+1)\Gamma(z), \\ \Gamma(z+3) &= \Gamma\left((z+2)+1\right) = (z+2)\Gamma(z+2) = z(z+1)(z+2)\Gamma(z). \end{aligned}$$

Continuando de esta menera, se puede establecer por inducción matemática:

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)\Gamma(z),$$

es decir,

$$\Gamma(z+n) = (z)_n\Gamma(z). \tag{A.2.2.3}$$

la igualdad anterior establece una relación entre la función Gamma y el símbolo de Pochhammer.

Si en la fórmula de duplicación (A.2.1.2) se toma $\alpha = 1, n = k$, Se tiene

$$(1)_{2k} = 2^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k,$$

es decir,

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!}=\left(\frac{1}{2}\right)_k.$$

De otra parte, de (A.2.2.3) se toma $n=k,\ z=\dfrac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k=\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

De las dos igualdades anteriores se concluye

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).(2k)!}{2^{2k}\quad k!}. \tag{A.2.2.4}$$

Si en la fórmula (A.2.2.3) se torma z=1 se tiene

$$\Gamma(n+1)=(1)_n\Gamma(1)=n!. \tag{A.2.2.5}$$

3. Función beta.

La integral que define la función Gamma en (A.2.2.1) se conoce como integral de Euler de segunda clase. La integral de Euler de primera clase, es integral siguente que define la función beta.

Si $Re(x)>0,\ Re(y)>0$, la función beta de Euler es la integral

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \tag{A.2.3.1}$$

mediante la sustitución

$$t=sen^2\theta,$$

la integral anterior, se transforma

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-2}(\cos\theta)^{2y-2}2\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta, \end{aligned}$$

así se tiene

$$\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1} d\theta = \frac{1}{2}B(x,y). \tag{A.2.3.2}$$

En la siguiente fórmula se establece la relación entra la función Gamma y la función Beta.
De la definición de la función Gamma dada en (A.2.2.1)

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-1}dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-s}s^{y-1}ds \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(t+s)}t^{x-1}s^{y-1}\, dt\, ds,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$t = \mu^2; \quad s = v^2$$

se tiene,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(v^2+v^2)}\ \mu^{2x-1}v^{2y-1}\ d\mu\, dv,$$

para evaluar la integral doble anterior, usamos coordenadas polares

$$\mu = r\ cos\theta,\ \ v = r\ sen\theta,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2x+2y-1}(cos\theta)^{2x-1}(sen\theta)^{2y-1}dr\, d\theta \\
&= 4\left(\int_0^{\pi/2} (cos\theta)^{2x-1}(sen\theta)^{2y-1}d\theta\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\ r^{2x+2y-1}\ dr\right),
\end{aligned}$$

haciendo uso de la fórmula (A.2.3.2), se obtiene

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2B(x,y)\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}dr\right),$$

finalmente si en la integral del lado derecho de la igualdad anterior, se toma

$$r^2 = t,$$

con lo que

$$2rdr = dt,$$

entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(y,x)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x+y-1}dt,$$

que de acuerdo a la definición (A.2.2.1) se obtiene

$$B(y,x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{A.2.3.3}$$

Como una primera aplicación de las fórmulas (A.2.3.2) y (A.2.3.3) tomemos en ellas

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

de donde

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi,$$

utilizando (A.2.3.3)

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}, \\ \pi &= \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2, \end{aligned}$$

de donde,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Otra aplicación interesante de la relación (A.2.3.3) es la deducción de la fórmula de duplicación para la función Gamma.

$$\Gamma(2z)\sqrt{\pi} = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{A.2.3.4}$$

En efecto, si en (A.2.3.3) se toma $x = y = z$, se obtiene

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{B(z,z)}, \tag{A.2.3.5}$$

pero por definición de la función beta

$$B(z,z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1}dt = 2\int_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1}dt,$$

por la sustitución

$$t = \frac{1}{2}(1-\sqrt{s}), \quad dt = \frac{-1}{4}s^{-1/2}ds,$$

se tiene
$$t(1-t)=\frac{1}{4}(1-s),$$
así
$$B(z,z) \;=\; 2\int_0^1 \frac{1}{4^{z-1}}(1-s)^{z-1}.\frac{1}{4}s^{-1/2}ds=\frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{z-1}ds=\frac{1}{2^{2z-1}}B\left(\frac{1}{2},z\right).$$
Una vez más al aplicar (A.2.3.3)
$$B(z,z)=\frac{1}{2^{2z-1}}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(Z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}, \tag{A.2.3.6}$$
reemplazando (A.2.3.6) en (A.2.3.5) se obtiene el resultado dado en (A.2.3.4).

Acontinuación veamos que
$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+1}d\theta=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}. \tag{A.2.3.7}$$
En efecto, con el fin de aplicar la fórmula (A.2.3.2), hacemos la identificación
$$2x-1=0,\quad 2y-1=2n+1,$$
es decir,
$$x=\frac{1}{2},\quad y=n+1,$$
de esta manera
$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+1}d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},n+1\right),$$
mediante la aplicación de la relación dada en (A.2.3.3)
$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+1}d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right)}$$
usando (A.2.2.3), (A.2.2.4) y (A.2.2.5), se obtiene
$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+1}d\theta=\frac{2^{2n}((n)!)^2}{(2n+1)(2n)!}.$$

De manera similar, se puede establecer que
$$2\int_0^{\pi/2}(cos\theta)^{2n}\,d\theta=\frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{A.2.3.8}$$

Apéndice 3

Elementos de funciones hipergeometricas.

1. La ecuación hipergeométrica.

La ecuación hipergeometrica estudiada por Euler y posteriormente por Gauss es:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0. \tag{A.3.1.1}$$

Para esta ecuación se observa que $x = 0$, es un punto singular regular de la ecuación; en efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]}{x(1-x)}x = \gamma; \quad \lim_{x\to 0} x^2 \frac{-\alpha\beta}{x(1-x)}x = 0,$$

al utilizar el método de Frobenius para buscar una solución de la ecuación (A.3.1.1) en la forma,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s}, \quad c_0 \neq 0, \tag{A.3.1.2}$$

las dos primeras derivadas de la expresion anterior son

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)c_n x^{n+s-1}; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)c_n x^{n+s-2}, \tag{A.3.1.3}$$

sustituyendo (A.3.1.2) y (A.3.1.3) en la ecuación (A.3.1.1),

$$x^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)c_n x^n - x^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)c_n x^{n+1} +$$

$$x^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma(n+s)c_n x^n - x^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+\beta+1)(n+s)c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\beta c_n x^{n+1} = 0,$$

suprimiendo el factor común x^{s-1}, la expresión anterior se escribe como,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1+\gamma)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}[(n+s)(\alpha+\beta+n-s)+\alpha\beta]c_n x^{n+1} = 0,$$

con el fin de reducir las dos sumatorias anteriores a una sola, expandimos el primer término de la primera serie y en la segunda usamos el cambio de variable $k = n + 1$, así,

$$\gamma(s+\gamma-1)c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)(n+s-1+\gamma)c_n x^n-\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1+s)(\alpha+\beta+k-1-s)+\alpha\beta]c_{k-1}x^k = 0,$$

$$\gamma(s+\gamma-1)c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+s)(n+s-1+\gamma)c_n[(n-1+s)(\alpha+\beta+n-1-s)+\alpha\beta]c_{n-1}\Big)x^n = 0.$$

La idea es encontrar los coeficientes c_n que hacen que cada potencia de x sea cero. Así, el término independiente debe anularse,

$$s(s+\gamma-1)c_0 = 0,$$

y como $c_0 \neq 0$, entonces,

$$s = 0 \quad \text{ó} \quad s = 1-\gamma, \tag{A.3.1.4}$$

si $s = 0$, la ecuación que permite determinar los coeficientes es,

$$n(n+\gamma-1)c_n = [(n-1)(\alpha+\beta+n-1)+\alpha\beta]c_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

expresión que se puede escribir como:

$$c_n = \frac{(n-1)^2+(n-1)(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{n(n-1+\gamma)}c_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

de esta manera, con $c_0 = 1$,

$$n = 1, \qquad c_1 = \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}$$

$$n = 2, \qquad c_2 = \frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{2(1+\gamma)}c_1 = \frac{(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)(\alpha\beta)}{1\cdot 2\gamma(1+\gamma)} = \frac{\alpha(1+\alpha)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(1+\gamma)}$$

$$n = 3, \qquad c_3 = \frac{4+2(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{3(2+\gamma)}c_2 = \frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

continuando de esta manera se obtiene,

$$c_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{1}{n!}, \tag{A.3.1.5}$$

utilizando (A.3.1.2) y (A.3.1.5) se encuentra que una solución de la ecuación hipergeométrica (A.3.1.1) viene dada por,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!},$$

la expresión para y dada anteriormente se llama función hipergeométrica y se acostumbra a notar,

$$y_1 = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha \quad \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}. \tag{A.3.3.6}$$

La expresión para y_1 tiene sentido si γ no es un entero positivo. Con un procedimiento similar al anterior, y utilizando $s = 1 - \gamma$, se puede encontrar una segunda solución de la ecuación (A.3.1.1). Sin embargo, preferimos utilizar el siguiente método.
Sea

$$y = x^{1-\gamma} w, \tag{A.3.1.7}$$

de donde,

$$y' = (1-\gamma)x^{-\gamma} w + x^{1-\gamma} w',$$
$$y'' = -\gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1} + 2(1-\gamma)x^{-\gamma} w' + x^{1-\gamma} w'',$$

reemplazando las anteriores derivadas y la expresión (A.3.1.7) en (A.3.1.1), se obtiene luego de simplificar,

$$x(1-x)w'' + [2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)x]w' - (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)w = 0,$$

que se reconoce como una ecuación hipergeométrica con parámetros,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + 1 - \gamma \\ \beta' &= \beta + 1 - \gamma \\ \gamma' &= 2 - \gamma, \end{aligned}$$

es decir, se puede utilizar la fórmula (A.3.1.6),

$$w = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha + 1 - \gamma \quad \beta + 1 - \gamma \\ 2 - \gamma \end{matrix} \middle| x \right),$$

la expresión para w tiene sentido si $\gamma \neq 2$ ó de un entero positivo de donde por la ecuación (A.3.1.7), una segunda solución de la ecuación diferencial hipergeométrica de Gauss,

$$y_2 = x^{1-\gamma}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha + 1 - \gamma \quad \beta + 1 - \gamma \\ 2 - \gamma \end{matrix} \middle| x \right) \quad ,$$

la discusión anterior la podemos resumir en la siguiente proposición.

Proposición.
Si α , β , γ son números complejos con $\gamma \notin z$, la ecuación diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

admite como solución general,

$$y = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha \quad \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) c_1 \quad + \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha + 1 - \gamma \quad \beta + 1 - \gamma \\ 2 - \gamma \end{matrix} \middle| x \right) c_2 x^{1-\gamma},$$

con c_1,c_2 complejos arbitrarios.

2. Fórmula de representación de Euler.

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} A & & B \\ & C & \end{matrix} \middle| Z \right) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \int_0^1 S^{B-1}(1-S)^{C-B-1}(1-ZS)^{-A}dS. \quad \text{(A.3.2.1)} $$

Demostración.
Analizamos la expresión

$$ I = \int_0^1 S^{B-1}(1-S)^{C-B-1}(1-ZS)^{-A}dS, $$

teniendo en cuenta (ver (A.1.1.1), ánexo 1)

$$ (1-y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{n!}, $$

en el integrando de la expresión para I,

$$ I = \int_0^1 S^{B-1}(1-S)^{C-B-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n Z^n S^n}{n!} \right] dS $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n Z^n}{n!} \left(\int_0^1 S^{B+n-1}(1-S)^{C-B-1} ds \right), \quad \text{(A.3.2.2)} $$

la integral anterior se puede reconocer como función Beta,

$$ B(x,y) = \int_0^1 S^{x-1}(1-S)^{y-1}dS, $$

con

$$ x = B+n; \;\; y = C-B, $$

así, la expresión (A.3.2.2) se transforma en

$$ I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n Z^n}{n!} \left[B(B+n, C-B) \right] \quad \text{(A.3.2.3)} $$

del apéndice 2, tenemos la relación entra la función Gamma y Beta

$$ B(x,y) = \frac{T(x)T(y)}{T(x+y)}; $$

teniendo en cuenta esta relación en (A.3.2.3), además al multiplicar y dividir por $\Gamma(B), \Gamma(C)$ se obtiene

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_nZ^n}{n!}\frac{\Gamma(B+n)}{\Gamma(B)}\frac{\Gamma(C)}{\Gamma(C+n)}\frac{\Gamma(C-B)\Gamma(B)}{\Gamma(C)}, \tag{A.3.2.4}$$

del apéndice 2, tenemos la relación Pochhammer y función Gamma

$$(\alpha)_n=\frac{T(\alpha+n)}{T(\alpha)}.$$

Al sustituir la anterior relación en (A.3.2.4) y al identificar la ${}_2F_1$ decimos

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n(B)_n}{(C)_n}\frac{Z^n}{n!}\frac{\Gamma(C-B)\Gamma(B)}{\Gamma(C)} \\ &= 2F_1\left(\begin{matrix} A & B \\ C & \end{matrix}\middle| Z\right)\frac{\Gamma(C-B)\Gamma(B)}{\Gamma(C)},. \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la fórmula integral de Euler para la función hipergeométrica.

3. Una transformación cuadrática.

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ 2b & \end{matrix}\middle|\frac{4x}{(1+x)^2}\right)=(1+x)^{2a}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a & a+\frac{1}{2}-b \\ & b+\frac{1}{2} \end{matrix}\middle|x^2\right). \tag{A.3.3.1}$$

Demostración.
Sabemos, de la parte 1 del apéndice 3, que la ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)y''+[2b-(a+b+1)x]\,y'-aby=0. \tag{A.3.3.2}$$

tiene por una de sus soluciones, la función hipergeométrica

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ 2b & \end{matrix}\middle|x\right),$$

mediante la sustitución

$$x=\frac{4t}{(1+t)^2},$$

y la aplicación de la regla de la cadena, se obtiene que la primera derivada $y'(x)$ y la segunda derivada $y''(x)$ vienen dadas por

$$y'(x)=\frac{(1+t)^3y'(t)}{4(1-t)},\qquad y''(x)=\frac{(1+t)^5}{16(1-t)^3}\Big((1-t^2)y''(t)+2(2-t)y'(t)\Big).$$

Al sustituir en (A.3.3.2) y simplificar, resulta la siguiente ecuación diferencial

$$t(1-t)(1+t)^2 y'' + 2(1+t)\left[b + bt^2 - 2at - t^2\right] y'(t) - 4ab(1-t)y = 0, \qquad \text{(A.3.3.3)}$$

Así, una solución de ésta ecuación es

$$y(t) =_2 F_1\left(\begin{array}{cc} a & b \\ & 2b \end{array}\middle| \frac{4t}{(1+t)^2}\right).$$

Sea

$$y(t) = (1+t)^{2a} Z(t). \qquad \text{(A.3.3.4)}$$

Una nueva aplicación de la regla de la cadena permite obtener

$$\begin{array}{rcl} y'(t) & = & 2a(1+t)^{2a-1}\left[2aZ + (1+t)Z'(t)\right], \\ y''(t) & = & (1+t)^{2a-2}\left\{4a^2 Z + 2a(1+t)Z'(t) + (1+t)(2a + Z'(t) + (1+t)Z'(t)\right\}, \end{array}$$

al sustituir las anteriores expresiones $y'(t)$, $y''(t)$, y la dada en (A.3.3.4), la ecuación (A.3.3.3) luego de simplificar se transforma en

$$t(1-t^2)Z''(t) + 2\left[b - (2a - b + 1)t^2\right] Z'(t) - 2at(1 + 2ab - 2b)Z = 0, \qquad \text{(A.3.3.5)}$$

por lo tanto, una solución es

$$Z = (1+t)^{-2a} y(t) = (1+t)^{-2a}\ {}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a & b \\ & 2b \end{array}\middle| \frac{4t}{(1+t)^2}\right). \qquad \text{(A.3.3.6)}$$

Sí

$$t^2 = v,$$

las dos primeras derivadas de la función Z(t), están dadas por

$$\begin{array}{rcl} Z'(t) & = & 2\sqrt{v}\dfrac{dZ}{dv}, \\ Z''(t) & = & 2\dfrac{dZ}{dv} + 4v\dfrac{d^2Z}{dv^2}, \end{array}$$

al reemplazar estas derivadas, y la expresión para Z(t) que figura en (A.3.3.6), la ecuación (A.3.3.5), se transforma en

$$v(1-v)\frac{d^2Z}{dv^2} + \left[\left(b + \tfrac{1}{2}\right) - \left(2a - b + \tfrac{3}{2}\right)v\right]\tfrac{dZ}{dv} - a\left(\tfrac{1}{2} + a - b\right)Z = 0, \qquad \text{(A.3.1.7)}$$

al identificar está ecuación con la ecuación (A.3.1.1) para los valores

$$\begin{array}{rcl} \gamma & = & b + \dfrac{1}{2}, \\ \alpha & = & a, \\ \beta & = & \dfrac{1}{2} + a - b. \end{array}$$

Además mediante la aplicación de la proposición enunciada en la parte final de la sección 1 del apéndice 3, se tiene que la solución general de la ecuación (A.3.3.7) es

$$Z(t) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a; & a-b+\frac{1}{2} \\ & b+\frac{1}{2} \end{matrix}\middle| t^2\right) C_1 + {}_2F_1\left(\begin{matrix} a-b+\frac{1}{2}; & a-b+\frac{1}{2} \\ & \frac{3}{2}-b \end{matrix}\middle| t^2\right) C_2 t^{-2b+1}. \qquad (A.3.3.8)$$

Puesto que Z(t) dada en (A.3.3.6) es una solución particular de (A.3.3.7) debe existir valores adecuados de C_1 y C_2 para los cuales

$$(1+t)^{-2a}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & 2b \end{matrix}\middle| \frac{4t}{(1+t)^2}\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a; & a-b+\frac{1}{2} \\ & b+\frac{1}{2} \end{matrix}\middle| t^2\right) C_1 + {}_2F_1\left(\begin{matrix} a-b+\frac{1}{2}; & a-b+\frac{1}{2} \\ & \frac{3}{2}-b \end{matrix}\middle| t^2\right) C_2 t^{-2b+1}.$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior es una función analitica en $t = 0$, de esta manera, se debe tener $C_2 = 0$, luego

$$(1+t)^{-2a}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & 2b \end{matrix}\middle| \frac{4t}{(1+t)^2}\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a; & a-b+\frac{1}{2} \\ & b+\frac{1}{2} \end{matrix}\middle| t^2\right) C_1. \qquad (A.3.3.9)$$

Finalmente el valor de $C_1 = 1$ se obtiene de la igualdad anterior tomando $t = 0$, de esta manera, se obtiene el resultado.

Bibliografía.

[1] Arfken, G; Weber, H; *Mathematical methods for physicists,* sexta edición, Academic press, (2005).

[2] Apostol, T; *Calculus,* Vol 2, segunda edición, Ed reverté, Barcelona, (1986).

[3] Kreyszig, E; *Functional Analysis with applications,* John Wiley and souns, New York, (1978).

[4] Zill, D; *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado,* sexta edición.International Thomson Editores, Mexico 2003.

[5] Folland, G; *Fourier Analysis and its applications,* Wads Worth and brooks/ Cde, California, (1992).

[6] Andrews, G; Askey, R; Roy, R; *Special Functions,* Encyclopedia of mathematics and its applications,The University Press, Cambridge, (1999).

[7] Blue, J; *A Legendre Polynomial Integral,* Mathematics of Computation, Vol 33, Number 146, Abril, (1979), 739-741. volumen 7, Cambridge, (2000).

[8] Levrie, P; *Using Fourier-Legendre expansions to derive series for* $\frac{1}{\pi^2}$ *and* $\frac{1}{\pi^2}$, Ramanujan, J, Vol 22, (2010).