“TÓPICOS SELECTOS DE CÁLCULO"

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Grado

Presentado por:

Nelson Enrique Molina Obispo

Dirigido por:

Juan Carlos López Carreño

Pamplona, I Semestre 2016

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme la oportunidad de vivir.

A mi tutor , Juan Carlos López, por su paciencia y motivación a lo largo de esta monografía.

A mis padres, por su apoyo incondicional.

A todos los profesores del departamento de matemáticas de la Universidad de Pamplona, por contribuir en mi formación académica, por su tiempo y dedicación

A todas aquellas personas que me brindaron su apoyo incondicional.

Junio del 2016.

Introducción

En este trabajo se plasma el estudio de los artículos,

[1] Dana-Picard, Th., 2007, ***Two Related Parametric Integrals***, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology., 38(3), 1106-1113.

[4] Carter C. Gay, Akalu Tefera, Aklilu Zeleke, 2008,***The Naive Product Rule for Derivates***, The College Mathematics Journal., vol 39, num 2, 145-148

[5] C. Gay., A: Tefera., A. Zeleke., 2009, ***The Fresnel Integrals Revisted***, The College Mathematics Journal., vol 40, num 4, 259-262.

THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, publicada por la Asociación Americana de Matemáticas, es una revista de carácter expositivo dirigida a profesores de matemáticas de la universidad, en particular los que imparten los dos primeros años. Cubre todos los aspectos de las matemáticas. Publica artículos destinados a mejorar la enseñanza de pregrado y aprendizaje en el aula, incluyendo artículos expositivos, notas cortas, problemas, etc.
En el publindex de COLCIENCIAS, la revista está indexada en categoría A.2.

La INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICAL EDUCATION IN SCIENCE AND TECHNOLOGY, proporciona un medio por el cual se puede presentar una amplia gama de experiencia en educación matemática, asimilado y, finalmente, adaptado a las necesidades cotidianas de las escuelas, las universidades, politécnicos, universidades, la industria y el comercio.
En el publindex de COLCIENCIAS, la revista está indexada en categoría A.2.

La presente monografía tiene la siguiente distribución:

En el **Capítulo uno**, se presenta los resultados obtenidos, luego de un estudio de la referencia [4], En ésta se introduce el concepto un par PP-n:

Sean $\{f, g\}$ funciones no constantes, que admiten derivadas de orden n. Se dice que $\{f, g\}$ es un par PP-n, si la n-ésima derivada de su producto satisface $(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g^{(n)}$. Es decir, dada una función f , hallar, si es posible, una fórmula general para aquellas funciones g para las cuales $\{f, g\}$ es un par PP-2.

En el teorema 2, del artículo [4] el autor presenta la respuesta. Sin embargo, la demostración de este resultado la hace solo en el caso $n = 2$, es decir toda $f(x) = x^2$, y encuentra, luego de resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden 2, por el método de solución de series de potencias, la expresión para $g(x)$ dada anteriormente con $n = 2$. En el caso de funciones potencias con exponentes negativos o exponentes racionales, presenta respuestas parciales, en esta sección se persigue precisamente, hallar las formas cerradas para la función g (que figura en los teoremas 2, 3 y 4) y encontrar la expresión para $g(x)$, dado que $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$, de tal manera que $\{f, g\}$ sea un par PP-2.

En el artículo [5], se calcula las integrales de Fresnel:

$$F_c = \int_0^\infty \cos x^2 dx, \qquad F_s = \int_0^\infty \sin x^2 dx,$$

Para ello plantea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$F_c'(p) = -\frac{pF_c(p) + tF_s(p)}{2(t^2 + p^2)}, \qquad F_s'(p) = \frac{tF_c(p) - pF_s(p)}{2(t^2 + p^2)}$$

La solución de éste sistema se resuelve de “manera ingeniosa". En el **Capítulo dos**, se resuelve el sistema anterior, usando para ello sólo técnicas que se enseñan en el curso de ecuaciones diferenciales.

En el **Capítulo tres**, se aborda el análisis y estudio del artículo [1]:

En esta referencia se estudia la sucesión de integrales definidas,

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Mostrando que I_n se puede escribir como $I_n = a_n + b_n\pi$, $n \in \mathbb{Q}$ racionales, mostrados a partir de las siguientes proposiciones

Proposición 1 Para cada entero no negativo p, se tiene

$$a_{2p} = -1 + \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{2p-2k-1}(p-k)((p-k-1)!)^2}{(2p-2k-1)!}$$

$$b_{2p} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{p} \frac{2(p-k)(2p-2k-2)!}{2^{2p-2k+1}((p-k)!)^2}$$

Proposición 2 Para cada entero no negativo p, se tiene

$$a_{2p+1} = 1 - \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{2p-2k-1}(p-k)((p-k-1)!)^2}{(2p-2k+1)!}$$

$$b_{2p} = -\frac{1}{4} - \sum_{k=0}^{p} \frac{2(p-k+1)(2p-2k)!}{2^{2p-2k+3}((p-k)!)^2}$$

El objetivo de este capítulo, es encontrar expresiones “cerradas"para éstos coeficientes, expresiones más concisas que permitan de una manera más sencilla observar las consecuencias y relaciones entre estos coeficientes dada por el autor del artículo bajo estudio. Para lograr este objetivo se hace uso de algunas propiedades de las funciones Beta y gamma. Y finalmente, se responde a una inquietud formulada en [1], relacionada con la forma que debe tener los numeradores de a_n.

En esta monografía se presenta algunos tópicos selectos de cálculo. En este trabajo se mostró que, por medio de elementos básicos de ecuaciones diferenciales de segundo orden y algunas funciones especiales, podemos llegar a demostraciones más sencillas y rigurosas de algunas afirmaciones ya expuestas, que aparecen publicados en revistas de prestigio internacional.

Índice general

Capítulo 1

LA INGENUA REGLA DEL PRODUCTO PARA DERIVADAS

1.1. Introducción

En los cursos de cálculo se enseña que la derivada es un operador lineal; en particular, se enseña que la derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las derivadas. A él seguramente le gustaría que algo similar ocurriese con el producto; esto es,

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g', \tag{1.1}$$

Es muy sencillo hacer caer en cuenta a los estudiantes que una regla como (1.1) en general es falsa. Sin embargo surge la cuestión de determinar para que par de funciones $\{f, g\}$ una igualdad como (1.1) se cumple.

La respuesta a ésta pregunta fue dada en [2], [3].

En el artículo [4], el autor investiga esta situación para derivadas de orden superior. Con el objetivo de establecer sus resultados, se introduce el siguiente concepto:

Definición 1 *Sean $\{f, g\}$ funciones no constantes, que admiten derivadas de orden n. Se dice que $\{f, g\}$ es un par PP-n, si la n-ésima derivada de su producto satisface*

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g^{(n)},$$

En particular, se concentra en el caso $n = 2$. Es decir, dada una función f, hallar, si es posible, una fórmula general para aquellas funciones g para las cuales $\{f, g\}$ es un par PP-2.

Asi, para la función f, dada por $f(x) = x^n$, ¿existe una función g tal que $\{f, g\}$ es un par PP-2?.
En el teorema 2, del artículo [4] el autor presenta la respuesta:

Teorema 2 *Si $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, y*

$$g(x) = \frac{A}{(x - \sqrt{n(n-1)})^{n-1}} + \frac{B}{(x + \sqrt{n(n-1)})^{n-1}},$$

entonces $\{f, g\}$ en un par PP-2.

Sin embargo, la demostración de este resultado la hace sólo en el caso $n = 2$, es decir toma $f(x) = x^2$, y encuentra, luego de resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden 2, por el método de solución de series de potencias, la expresión para $g(x)$ dada anteriormente con $n = 2$.

En el caso de funciones potencias con exponentes negativos o exponentes racionales, presenta respuestas parciales en los siguientes teoremas:

Teorema 3 *Una función potencia $f(x) = x^{-n}(n \geq 1)$ y un polinomio $g(x)$ constituyen un par PP-2 si y sólo si el grado de g es $n+1$ y*

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k x^k,$$

con c_0 y c_1 arbitrarias y para $k \geq 1$

$$c_{2k} = \frac{(n-1)!}{(n+1-2k)!(2k)!}\frac{1}{(n(n+1))^{k-1}}c_0,$$

$$c_{2k+1} = \frac{(n-1)!}{(n-2k)!(2k+1)!}\frac{1}{(n(n+1))^{k}}c_1,$$

Teorema 4 *Si $f(x) = \sqrt[k]{x}$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, con*

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0, \qquad c_3 = -\left(\frac{k+1}{6(k-1)}\right)c_1,$$

y para $n \geq 2$,

$$c_{2n} = c_0 \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(k-1)^{n-1}} \prod_{i=1}^{2n-2}(ki+1),$$

$$c_{2n+1} = c_1 \frac{k(-1)^{n}}{(2n+1)!(k-1)^{n}} \prod_{i=1}^{2n-2}(ki+k+1),$$

entonces $\{f, g\}$ constituyen un par PP-2.

En la parte final del artículo, el autor menciona que la demostración del teorema 3, se puede hacer de manera similar a la hecha en el teorema 2, hace la demostración solo en el caso $n = 2$. En relación con el teorema 4, se invita al lector verificar el resultado para $k = 2, 3$. Finalmente, menciona que sería interesante obtener fórmulas cerradas para la función g.

El objetivo que se persigue en esta capítulo es precisamente, hallar las formas cerradas para la función g (que figura en los teoremas 2, 3 y 4) y encontrar la expresión para g dado que $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$, de tal manera que $\{f, g\}$ sea un par PP-2.

1.2. Algunos casos especiales

1.2.1. El caso $k = 2$

Para $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, la función $g(x)$, para la cual $\{f, g\}$ es un par PP-2, de acuerdo al resultado del teorema 4, del artículo [4] viene dada por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_2 = \frac{1}{2}c_0, \quad c_3 = \frac{-1}{2}c_1,$$

$$c_{2n} = c_0 \frac{(-1)^n}{(2n)!} \prod_{i=1}^{2n-2} (2i+1) \quad c_{2n+1} = c_1 \frac{2(-1)^n}{(2n+1)!} \prod_{i=1}^{2n-2} (2i+3) \tag{1.2}$$

con el fin de observar la dificultad de encontrar una expresión “cerrada"para esta g a partir de (1.2), se procede a encontrar g por otro método que se describe a continuación.

Para

$$f = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}},$$

entonces la ecuación diferencial que debe cumplir g es

$$\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) g''(x) + x g'(x) - \frac{1}{4} g(x) = 0, \tag{1.3}$$

mediante la sustitución,

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} \quad , \tag{1.4}$$

y la aplicación de la regla de la cadena, se obtiene

$$g'(x) = \frac{dg}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} g'(z),$$

$$g''(x) = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}} \left[g''(z) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} g'(z) \right], \tag{1.5}$$

al reemplazar (1.5) en la ecuación diferencial (1.3) se llega a la ecuación diferencial con coeficientes constantes

$$g''(z) - \frac{1}{4}g = 0,$$

cuya solución general es

$$g(z) = c_1 e^{z/2} + c_2 e^{-z/2}, \tag{1.6}$$

al efectuar la integral que figura en (1.4), se tiene

$$z = \ln|2x + \sqrt{1+4x^2}|,$$

de donde, al reemplazar en la ecuación (1.6)

$$g(x) = c_1\left(\sqrt{2x + \sqrt{1+4x^2}}\right) + \frac{c_2}{\sqrt{2x + \sqrt{1+4x^2}}}, \tag{1.7}$$

se verifica de manera directa que la función g dada en (1.7) constituye la solución general de la ecuación (1.3) y así $\{f, g\}$ es un par PP-2.

Nota 5 *Se puede observar, de la expresión para* $g(x)$ *que aparece en (1.7), la dificultad de hallar* $g(x)$*, más aún, la verdaderamente difícil tarea de llegar de (1.2) a (1.7).*

1.2.2. El caso $n = 2$

Para $f(x) = x^2$, la función g para la cual el par $\{f, g\}$ es un par PP-2 par debe verificar la ecuación

$$(x^2 - 2)g''(x) + 4xg'(x) + 2g(x) = 0,$$

ecuación que se puede escribir como

$$(x^2 - 2)g''(x) + 2xg'(x) + 2xg'(x) + 2g(x) = 0,$$
$$[(x^2 - 2)g'(x)]' + [2xg(x)]' = 0,$$

integrando respecto a x, se tiene

$$[(x^2 - 2)g'(x)] + 2xg(x) = c_1,$$

nuevamente el lado izquierdo de la ecuación anterior se puede escribir como la derivada de un producto, en efecto,

$$[(x^2 - 2)g(x)]' = c_1,$$

una nueva integración:

$$(x^2 - 2)g(x) = c_1x + c_2,$$

de donde

$$g(x) = \frac{c_1x + c_2}{x^2 - 2} = \frac{A_1}{x - \sqrt{2}} + \frac{A_1}{x + \sqrt{2}}.$$

1.2.3. El caso $n = -1$

si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, la función g que hace que $\{f, g\}$ sea un par PP-2 debe ser solución de la ecuación

$$(x^2 - 2)g''(x) - 2xg'(x) + 2g(x) = 0,$$

se busca una solución g en la forma

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

así,

$$(x^2 - 2)(2A) - 2x(2Ax + b) + (Ax^2 + Bx + C) = 0,$$

efectuando las operaciones indicadas y simplificando se obtiene

$$C = 2A,$$

de esta manera, la solución general de la ecuación diferencial anterior es

$$g(x) = Ax^2 + Bx + 2A,$$

un polinomio de grado 2.

Los casos particulares considerados en esta sección, nos indican que puede resultar oportuno buscar un método de solución, diferente a la solución en serie de potencias, que permita resolver la ecuación diferencial que se obtiene para encontrar la función g, una vez dada la función f.

1.3. El caso general

Consideremos la siguiente ecuación

$$(x^2 - a^2)g''(x) + 2bxg'(x) + b(b-1)g(x) = 0, \tag{1.8}$$

sea

$$g(x) = e^{w(x)}, \tag{1.9}$$

con esta transformación las primeras derivadas de g son

$$g'(x) = e^w \frac{dw}{dx},$$

$$g''(x) = e^w \Big(\frac{dw}{dx}\Big)^2 + e^w \frac{d^2w}{dx^2},$$

por la tanto la ecuación (1.8) se puede escribir como

$$(x^2 - a^2)\frac{d^2w}{dx^2} + (x^2 - a^2)\Big(\frac{dw}{dx}\Big)^2 + 2bx\frac{dw}{dx} + b(b-1)g(x) = 0, \tag{1.10}$$

si,

$$\frac{dw}{dx} = u, \tag{1.11}$$

entonces la ecuación (1.10) se transforma en la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dx} = -u^2 - \frac{2bx}{x^2 - a^2}u - \frac{b(b-1)}{x^2 - a^2}, \tag{1.12}$$

que se reconoce como una ecuación diferencial de Riccati, con el propósito de “eliminar” el término lineal en la variable dependiente, se utiliza la sustitución

$$u = z + h, \tag{1.13}$$

así,

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} = -z^2 - 2zh - h^2 - \frac{2bx}{x^2 - a^2}z - \frac{2bx}{x^2 - a^2}h - \frac{b(b-1)}{x^2 - a^2},$$

escogiendo h de modo que

$$-2h - \frac{2bx}{x^2 - a^2} = 0,$$

es decir,

$$h(x) = -\frac{bx}{x^2 - a^2}, \tag{1.14}$$

con lo cual,

$$h'(x) = \frac{bx^2 + a^2 b}{(x^2 - a^2)^2}, \tag{1.15}$$

reemplazando (1.14) y (1.15) en la anterior ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 + \frac{a^2 b(b-2)}{(x^2 - a^2)^2}, \tag{1.16}$$

por la apariencia de la ecuación diferencial (1.16), se intenta buscar una solución particular de ella, en la forma

$$z = \frac{Ax + B}{x^2 - a^2},$$

reemplazando z y $\frac{dz}{dx}$ en (1.16) e igualar los coeficientes de las respectivas potencias de x, se obtiene

$$A^2 = A; \quad BA = B; \quad a^2 b(b-2) + a^2 = B^2,$$

* si A=0; entonces B=0, con lo cual z=0, y se encontraría una solución de (1.16) para algunos valores particulares de a y b; así que se descarta esta posibilidad. luego $A = 1$ y $B_1 = a(b-1)$, $B_2 = -a(b-1)$ de esta manera dos soluciones particulares de (1.16) son

$$z_1 = \frac{x + a(b-1)}{x^2 - a^2}, \quad y, \quad z_2 = \frac{x - a(b-1)}{x^2 - a^2}, \tag{1.17}$$

teniendo en cuenta las soluciones z_1, z_2 dadas en (1.17) y las relaciones (1.13) y (1.14) se encuentra que dos soluciones particulares de la ecuación (1.12) vienen dadas por, u_1 y u_2 donde

$$u_1 = z_1 + h = \frac{x + a(b-1)}{x^2 - a^2} - \frac{bx}{x^2 - a^2} =$$

$$= \frac{(1-b)x + a(b-1)}{x^2 - a^2} = \frac{(1-b)x - a(1-b)}{x^2 - a^2} =$$

$$= \frac{((1-b)(x-a)}{x^2 - a^2} = \frac{1-b}{x+a},$$

de forma análoga, se tiene

$$u_2 = \frac{1-b}{x-a},$$

de esta manera, utilizando (1.11), y las expresiones para u_1, u_2 anteriormente descritas, se obtiene dos soluciones de la ecuación (1.10), a saber

$$w_1(x) = \int u_1(x)dx = (1-b)\int \frac{dx}{x+a} = (1-b)\ln|x+a|,$$

y similarmente

$$w_2 = (1-b)\ln|x-a|,$$

finalmente, teniendo presente la ecuación (1.9), se encuentran dos soluciones linealmente independientes para la ecuación (1.8)

$$g_1(x) = e^{w_1(x)} = e^{(1-b)\ln|x+a|} = |x+a|^{1-b},$$

$$g_2(x) = e^{w_1(x)} = e^{(1-b)\ln|x-a|} = |x-a|^{1-b},$$

la discusión anterior, la podemos resumir en el siguiente resultado.

Proposición 6 *La solución general de la ecuación diferencial*

$$(x^2 - a^2)g''(x) + 2bxg'(x) + b(b-1)g(x) = 0,$$

viene dada por,

$$g(x) = c_1(x+a)^{1-b} + c_1(x-a)^{1-b}.$$

Un análisis completamente similar, nos permite establecer el siguiente resultado

Proposición 7 *La solución general de la ecuación diferencial*

$$(x^2 + a^2)g''(x) + 2bxg'(x) + b(b-1)g(x) = 0,$$

viene dada por,

$$(x^2 + a^2)^{(1-b)/2}[c_1 sen\varphi + c_2 cos\varphi],$$

en donde,

$$\varphi = (1-b)\arctan\left(\frac{a}{x}\right).$$

Para f dada la función g que hace que $\{f, g\}$ sea un par PP-2 debe cumplir la ecuación diferencial

$$(f(x) - f''(x))g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x) = 0. \tag{1.18}$$

Nota 8 *Si* $f(x) = x^n \quad n > 1$, *$g(x)$ debe satisfacer la ecuación*

$$(x^2 - n(n-1))g''(x) + 2nxg'(x) + n(n+1)g(x) = 0,$$

de esta manera utilizando la proposición 6, con $a = \sqrt{n(n-1)}$, $b = n$, *se obtiene*

$$g(x) = c_1\left(x + \sqrt{n(n-1)}\right)^{1-n} + c_2\left(x - \sqrt{n(n-1)}\right)^{1-n},$$

expresión que en efecto, coincide con la dada para $g(x)$ en el teorema 2, del artículo de la referencia.

Nota 9 *Si* $f(x) = x^{-n} \quad n \geqslant 1$. *La función g que hace que $\{f, g\}$ sea un par PP-2, debe satisfacer la ecuación*

$$[x^2 - n(n+1)]g''(x) + 2(-n)xg'(x) + (-n)(-n-1)g(x) = 0,$$

que se obtiene de (1.18) con

$$f(x) = x^{-n}, \quad f'(x) = -nx^{-n-1}, \quad f''(x) = -n(-n-1)x^{-n-2},$$

así que tomando $a^2 = n(n+1)$, $b = -n$ *en la proposición 6, se tiene*

$$g(x) = c_1(x + n(n+1))^{1+n} + c_2(x - n(n+1))^{1+n},$$

que evidentemente se trata de un polinomio de grado $n + 1$.

Nota 10 *Si* $f(x) = \sqrt[k]{x}, k \geqslant 2$. *El par $\{f, g\}$ constituye un par PP-2 si g satisface la ecuación, obtenida de (1.18) con*

$$f(x) = x^{1/k}; \quad f'(x) = \frac{1}{k}x^{(1/k)-1}; \quad f''(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)x^{(1/k)-2},$$

$$\left[x^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\right]g''(x) + \frac{2}{k}g'(x) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)g(x) = 0,$$

es decir, una aplicación de la proposición 7, esta vez con $a^2 = \dfrac{1}{k}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$, *y* $\quad b = \dfrac{1}{k}$,

$$g(x) = \left[x^2 + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right][c_1 sen\varphi + c_2 cos\varphi],$$

en donde,

$$\varphi = \left(\frac{k-1}{k}\right)\arctan\left(\frac{\sqrt{\dfrac{k-1}{k^2}}}{x}\right).$$

Los resultados establecidos en las proposiciones 6 y 7, permiten encontrar la función g para un $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, como queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 11 *Sea* $f(x) = x^\alpha$, *con* $\alpha \in \mathbb{R}$.
(i) *si* $\alpha < 0$ *ó* $\alpha > 1$. *La función*

$$g(x) = c_1\left|x - \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\right|^{1-\alpha} + c_2\left|x + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\right|^{1-\alpha},$$

c_1, c_2 *constantes arbitrarias; hace que* $\{f, g\}$ *sea un par PP-2.*

(ii) *si* $0 < \alpha < 1$. *La función* g *para la cual el par* $\{f, g\}$ *es un par PP-2 es*

$$g(x) = (x^2 - \alpha(\alpha-1))^{(1-\alpha)/2}[c_1 \operatorname{sen}\varphi + c_2 \cos\varphi],$$

donde, $\varphi = (1-\alpha)\arctan\left(\frac{\sqrt{-\alpha(\alpha-1)}}{x}\right)$, *con* c_1, c_2 *constantes arbitrarias.*

Demostración. *Si* $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *la ecuación a resolver para* g *es,*

$$[x^2 - \alpha(\alpha-1)]g''(x) + 2\alpha x g'(x) + \alpha(\alpha-1)g = 0, \tag{1.19}$$

(i) *si* $\alpha < 0$ *ó* $\alpha > 1$*; entonces* $\alpha(\alpha - 1) > 0$*, así, si se llama,*

$$\alpha(\alpha - 1) = a^2, \quad b = \alpha,$$

la ecuación (1.19) corresponde a la ecuación en el enunciado de la proposición 6, y por lo tanto su solución es,

$$g(x) = c_1|x + \alpha(\alpha - 1)|^{1-\alpha} + c_2|x - \alpha(\alpha - 1)|^{\alpha - 1},$$

(ii) *si* $0 < \alpha < 1$*; entonces* $\alpha(\alpha - 1) > 0$*, así, si se llama,*

$$-\alpha(\alpha - 1) = a^2, \quad b = \alpha,$$

de acuerdo a la proposición 7, $g(x)$ *viene dada por,*

$$g(x) = (x^2 - \alpha(\alpha - 1))^{(1-\alpha)/2}[c_1 \operatorname{sen}\varphi + c_2 \cos\varphi],$$

donde,

$$\varphi = (1 - \alpha)\arctan\left(\frac{\sqrt{-\alpha(\alpha - 1)}}{x}\right).$$

1.4. Otra mirada a las proposiciones 6 y 7

1.4.1. Ecuación hipergeométrica

El propósito de esta sección es mostrar en detalle como se obtienen las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación hipergeométrica. Las funciones especiales surgen, en la historia de la matemática, en la búsqueda de soluciones por medio de series de potencias a ecuaciones ordinarias, la ecuación diferencial que se estudia a continuación fue inicialmente estudiada por Euler, pero fue; K. Gauss, en su escrito de 1812 sobre las series hipergeométricas, que profundizó sobre este tema. La ecuación hipergeométrica de Gauss, es la ecuación,

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0. \tag{1.20}$$

Se observa que $x = 0$, es un punto singular regular de la ecuación; en efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\gamma - (\alpha+\beta+1)x]}{x(1-x)} x = \gamma; \quad \lim_{x\to 0} x^2 \frac{-\alpha\beta}{x(1-x)} x = 0,$$

así se utiliza el método de Frobenius para buscar una solución de la ecuación (1.20) en la forma,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s}, \quad c_0 \neq 0, \tag{1.21}$$

las dos primeras derivadas de (1.21) nos da,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) c_n x^{n+s-1}; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) c_n x^{n+s-2}, \tag{1.22}$$

sustituyendo (1.21) y (1.22) en la ecuación (1.20),

$$x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) c_n x^n - x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) c_n x^{n+1} +$$

$$x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma (n+s) c_n x^n - x^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+\beta+1)(n+s) c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\beta c_n x^{n+1} = 0,$$

suprimiendo el factor común x^{s-1}, la expresión anterior se escribe como,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1+\gamma) c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(\alpha+\beta+n-s) + \alpha\beta] c_n x^{n+1} = 0,$$

con el fin de reducir las dos sumatorias anteriores a una sola, expandimos el primer término de la primera serie y en la segunda usamos el cambio de variable $k = n+1$, así,

$$\gamma(s+\gamma-1)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+s)(n+s-1+\gamma) c_n x^n - \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1+s)(\alpha+\beta+k-1-s) + \alpha\beta] c_{k-1} x^k = 0,$$

$$\gamma(s+\gamma-1)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+s)(n+s-1+\gamma) c_n [(n-1+s)(\alpha+\beta+n-1-s) + \alpha\beta] c_{n-1} \Big) x^n = 0.$$

La idea es encontrar los coeficientes c_n que hacen que cada potencia de x sea cero. Así, el término independiente debe anularse,

$$s(s+\gamma-1)c_0 = 0,$$

y como $c_0 \neq 0$, entonces,

$$s = 0 \qquad s = 1-\gamma, \tag{1.23}$$

si $s = 0$, la ecuación que permite determinar los coeficientes es,

$$n(n+\gamma-1)c_n = [(n-1)(\alpha+\beta+n-1)+\alpha\beta]c_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

expresión que se puede escribir como:

$$c_n = \frac{(n-1)^2+(n-1)(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{n(n-1+\gamma)}c_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

de esta manera, con $c_0 = 1$,

$$n=1, \qquad c_1 = \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}$$

$$n=2, \qquad c_2 = \frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{2(1+\gamma)}c_1 = \frac{(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)(\alpha\beta)}{1\cdot 2\gamma(1+\gamma)} = \frac{\alpha(1+\alpha)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(1+\gamma)}$$

$$n=3, \qquad c_3 = \frac{4+2(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{3(2+\gamma)}c_2 = \frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

continuando de esta manera se obtiene,

$$c_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{1}{n!}, \tag{1.24}$$

en donde, $(\alpha)_n$ representa el símbolo de pocchammer que se define,

$$(\alpha)_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1), & n>0 \\ 1, & n=0 \end{cases}$$

utilizando (1.21) y (1.24) se encuentra que una solución de la ecuación hipergeométrica (1.20) viene dada por,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!},$$

la expresión para y dada anteriormente se llama función hipergeométrica y se acostumbra a notar,

$$y_1 = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ & \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}. \tag{1.25}$$

La expresión para y_1 tiene sentido si γ no es un entero positivo. Con un procedimiento similar al anterior, y utilizando $s = 1 - \gamma$, se puede encontrar una segunda solución de la ecuación (1.20). Sin embargo, preferimos utilizar el siguiente método. Sea

$$y = x^{1-\gamma} w, \tag{1.26}$$

de donde,

$$\begin{aligned} y' &= (1-\gamma)x^{-\gamma} w + x^{1-\gamma} w', \\ y'' &= -\gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1} + 2(1-\gamma)x^{-\gamma} w' + x^{1-\gamma} w'', \end{aligned} \tag{1.27}$$

reemplazando las expresiones (1.26) y (1.27) en la ecuación (1.20), se obtiene luego de simplificar,

$$x(1-x)w'' + [2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)x]w' - (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)w = 0,$$

que se reconoce como una ecuación hipergeométrica con parámetros,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + 1 - \gamma \\ \beta' &= \beta + 1 - \gamma \\ \gamma' &= 2 - \gamma, \end{aligned}$$

es decir, se puede utilizar la fórmula (1.25),

$$w = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha + 1 - \gamma & \beta + 1 - \gamma \\ 2 - \gamma & \end{matrix} \middle| x \right) \quad ,$$

la expresión para w tiene sentido si $\gamma \neq 2$ o de un entero positivo de donde por la ecuación (1.26), una segunda solución de la ecuación diferencial hipergeométrica de Gauss,

$$y_2 = x_2^{1-\gamma} F_1\left(\begin{array}{cc} \alpha + 1 - \gamma & \beta + 1 - \gamma \\ \multicolumn{2}{c}{2 - \gamma} \end{array} \middle| x \right) \quad ,$$

la discusión anterior la podemos resumir en la siguiente proposición.

Proposición 12 *Si α , β , γ son números complejos con $\gamma \notin z$, la ecuación diferencial*

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

admite como solución general,

$$y =_2 F_1\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \multicolumn{2}{c}{\gamma} \end{array} \middle| x \right) c_1 \quad + \quad {}_2F_1\left(\begin{array}{cc} \alpha + 1 - \gamma & \beta + 1 - \gamma \\ \multicolumn{2}{c}{2 - \gamma} \end{array} \middle| x \right) c_2 x^{1-\gamma} \quad , \tag{1.28}$$

con c_1,c_2 complejos arbitrarios.

Nota 13 *1. Si $\gamma = 0, -1, -2, -3, ...$, una solución particular de la ecuación hipergeométrica es y_2.*
2. Si $\gamma = 1, 2, 3, 4, ...$, una solución particular de la ecuación hipergeométrica es y_1. En cualquiera de los dos casos anteriores una segunda solución puede encontrarse con la fórmula de reducción de orden: Si y_0 es una solución particular de la ecuación lineal homogénea de segundo orden,

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0,$$

una segunda solución es,

$$y = y_0 \int \frac{e^{-F}}{y_0^2} dx, \quad F(x) = \int \frac{f_1}{f_2} dx.$$

1.4.2. Reducción a una hipergeométrica

En esta sección, se mostrará que algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden, con coeficientes polinomiales se pueden reducir a una ecuación diferencial hipergeométrica, utilizando una transformación adecuada. Las ecuaciones que se han considerado en este capítulo tienen la forma,

$$(x^2 + k)y'' + 2bxy' + b(b-1)y = 0, \tag{1.29}$$

si λ_1, λ_2 son las raíces de $x^2 + k = 0$; esto es:

$$\lambda_1 = -\sqrt{-k}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-k},$$

sea,

$$z = \frac{x - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{x + \sqrt{-k}}{2\sqrt{-k}}, \tag{1.30}$$

con lo cual,

$$x = \sqrt{-k}(2z - 1), \tag{1.31}$$

utilizando la regla de la cadena, de (1.30) se tiene :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{-k}}\frac{dy}{dz}, \tag{1.32}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4(\sqrt{-k})^2}\frac{d^2y}{dz^2}, \tag{1.33}$$

con,

$$\left(\sqrt{-k}\right)^2 = \begin{cases} k, & k \leq 0 \\ -k, & k > 0 \end{cases}$$

reemplazando (1.32) y (1.33) en la ecuación (1.29) se obtiene:

$$z(z-1)y''(z) + [b - 2bz]y'(z) - b(b-1)y = 0, \tag{1.34}$$

que corresponde a una ecuación diferencial hipergeométrica. Al identificarla con la ecuación (1.20) con $\gamma = b$; $\alpha = b$, $\beta = b - 1$; se tiene que la solución general de (1.34), de acuerdo a la proposición viene dada por (1.28),
es decir;

$$\begin{aligned} y = & \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} b & b-1 \\ & b \end{matrix} \middle| z \right)\widetilde{c_1} \quad + \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ & b \end{matrix} \middle| z \right)\widetilde{c_2} z^{1-b}, \\ = & \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} b-1 \\ - \end{matrix} \middle| z \right)\widetilde{c_1} \quad + \quad \widetilde{c_2} z^{1-b}, \end{aligned}$$

esto es,

$$y = \widetilde{c_1}(1-z)^{1-b} \quad + \quad \widetilde{c_2} z^{1-b}.$$

Teniendo en cuenta el valor de z que aparece en (1.30), la expresión para y toma finalmente el siguiente valor,

$$y = c_1(\sqrt{-k} - x)^{1-b} + c_2(x + \sqrt{-k})^{1-b}. \tag{1.35}$$

Nota 14 *Caso de la proposición 6.*

La ecuación considerada en esta proposición corresponde a la ecuación (1.29) con, $k = -a^2$. De esta manera, la relación dada en (1.35) proporciona la solución general,

$$y = c_1(x-a)^{1-b} + c_2(x+a)^{1-b},$$

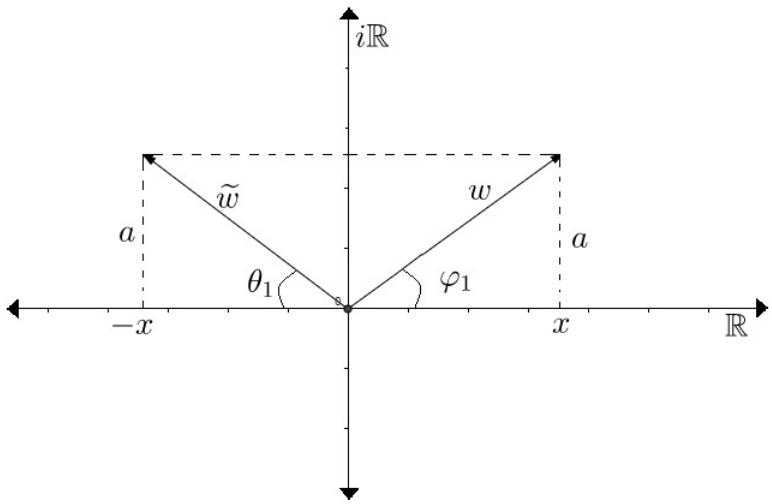
como en efecto, quedó establecido en la proposición 6.

Nota 15 *Caso de la proposición 7.*

Para esta proposición, la ecuación diferencial considerada allí corresponde a la ecuación (1.29) con $k = a^2$.
En este caso, la solución general vendrá dada de acuerdo a (1.35) por la expresión,

$$y = c_1(ai - x)^{1-b} + c_2(ai + x)^{1-b}, \tag{1.36}$$

sin pérdida de generalidad, supongamos que $x > 0$, $a > 0$, *ver figura,*



De acuerdo con lo anterior,

$$(ai + x)^{1-b} = w^{1-b} = |w|^{\frac{1-b}{2}}(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)^{1-b}, \tag{1.37}$$

$$(ai - x)^{1-b} = \widetilde{w}^{1-b} = |\widetilde{w}|^{\frac{1-b}{2}}(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)^{1-b}, \tag{1.38}$$

pero,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1,$$

así,

$$\cos\theta_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi_1) = \operatorname{sen}\varphi_1,$$
$$\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \varphi_1) = \cos\varphi_1,$$

luego (1.38) se puede escribir como,

$$(ai - x)^{1-b} = \widetilde{w}^{1-b} = |\widetilde{w}|^{\frac{1-b}{2}}(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)^{1-b}, \tag{1.39}$$

utilizando la fórmula de D'Moivre en (1.37) y (1.39) éstas se pueden escribir,

$$(ai + x)^{1-b} = w^{1-b} = |w|^{\frac{1-b}{2}}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi),$$
$$(ai - x)^{1-b} = \widetilde{w}^{1-b} = |\widetilde{w}|^{\frac{1-b}{2}}(\sin\varphi + i\cos\varphi),$$

con $\varphi = (1-b)\varphi_1$.

Teniendo en cuenta las dos expresiones anteriores y (1.36) se tiene,

$$y = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}[c_1(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) + c_2(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)],$$
$$y = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}[(c_1 + ic_2)\cos\varphi + (c_2 + ic_1)\operatorname{sen}\varphi],$$

finalmente si se toma $c_3 = c_2 + ic_1$, $c_4 = c_1 + ic_2$, se llega a,

$$y = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}[(c_3\operatorname{sen}\varphi + c_4\cos\varphi],$$

con $\varphi = (1-b)\arctan\left(\frac{a}{x}\right)$. Como estaba establecida en la proposición 7.

De esta manera, se observa que lo considerado en esta sección, nos permite ver las proposiciones 6 y 7 de una manera unificada a través de la reducción, de la ecuación diferencial considerada en (1.29), una ecuación hipergeométrica de Gauss.

Capítulo 2

DE LAS INTEGRALES DE FRESNEL

2.1. Introducción

Es usual en los cursos de variable compleja, utilizar el teorema de Cauchy ó el teorema del residuo para evaluar las integrales de Fresnel:

$$F_c = \int_0^\infty \cos x^2 dx, \qquad F_s = \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

En [5], el autor considera las integrales dependientes de un parámetro $p \in \mathbb{R}$, y para $t > 0$:

$$F_c(p) = \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos px^2 dx, \qquad F_s(p) = \int_0^\infty e^{-tx^2} \sin px^2 dx.$$

Establece el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$F_c'(p) = -\frac{pF_c(p) + tF_s(p)}{2(t^2 + p^2)}, \qquad F_s'(p) = \frac{tF_c(p) - pF_s(p)}{2(t^2 + p^2)}$$

sistema que resuelve de una “manera ingeniosa”, para obtener expresiones explícitas de $F_c(p)$ y $F_s(p)$ en términos de p y t. Finalmente, toma $p = 1$ y hace tender $t \to 0^+$ para obtener,

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

El objetivo de este capítulo es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, usado para ello las técnicas que se enseñan en el curso de pregrado de ecuaciones diferenciales.

2.2. Solución alterna

El sistema de ecuaciones diferenciales considerado anteriormente se puede escribir como:

$$F_c'(p) = -\frac{p}{2(t^2+p^2)}F_c(p) - \frac{t}{2(t^2+p^2}F_s(p), \tag{2.1}$$

$$F_s'(p) = \frac{t}{2(t^2+p^2)}F_c(p) - \frac{p}{2(t^2+p^2}F_s(p), \tag{2.2}$$

al multiplicar la ecuación (2.1) por $F_s(p)$ y la ecuación (2.2) por $F_c(p)$, se tiene,

$$F_s(p)F_c'(p) = -\frac{p}{2(t^2+p^2)}F_s(p)F_c(p) - \frac{t}{2(t^2+p^2}F_s(p)^2, \tag{2.3}$$

$$F_s'(p)F_c(p) = \frac{t}{2(t^2+p^2)}F_c(p)^2 - \frac{p}{2(t^2+p^2}F_c(p)F_s(p), \tag{2.4}$$

restando (2.4) de (2.3),

$$F_s(p)F_c'(p) - F_s'(p)F_c(p) = -\frac{t}{2(t^2+p^2)}[F_s(p)^2 + F_c(p)^2],$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad anterior por $F_c(p)^2$,

$$-\frac{F_s(p)F_c'(p) - F_s'(p)F_c(p)}{F_c(p)^2} = \frac{t}{2(t^2+p^2)}\left[\left(\frac{F_s(p)}{F_c(p)}\right)^2 + 1\right],$$

reconociendo el lado izquierdo de la igualdad anterior como la derivada de un cociente, se tiene,

$$\left(\frac{F_s(p)}{F_c(p)}\right)' = \frac{t}{2(t^2+p^2)}\left[1 + \left(\frac{F_s(p)}{F_c(p)}\right)^2\right],$$

haciendo el cambio de variable $w(p) := \dfrac{F_s(p)}{F_c(p)}$,

$$\frac{dw}{dp} = \frac{t}{2(t^2+p^2)}[1+w^2],$$

ecuación diferencial de primer orden de variables separables,

$$\frac{dw}{1+w^2} = \frac{t}{2(t^2+p^2)}dp, \tag{2.5}$$

integrando la ecuación (2.5), se obtiene,

$$\arctan(w) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{p}{t}\right) + \arctan(c),$$

donde c es una constante. Así,

$$\begin{aligned}
2\arctan(w) &= \arctan\left(\frac{p}{t}\right) + \arctan(c),\\
\arctan(w) + \arctan(w) &= \arctan\left(\frac{p}{t}\right) + \arctan(c),\\
\arctan\left(\frac{2w}{1-w^2}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{p}{t}+c}{1-\frac{cp}{t}}\right),
\end{aligned}$$

tomando tangente en ambos lados:

$$\frac{2w}{1-w^2} = \frac{p+ct}{t-cp},$$

despejamos w:

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1+a^2}}{a}, \quad \text{con} \;\; a = \frac{p+ct}{t-cp},$$

tomando $c = 0$, recordando $w(p) = \dfrac{F_s(p)}{F_c(p)}$,

$$\frac{F_s(p)}{F_c(p)} = -\frac{t}{p} + \frac{\sqrt{p^2+t^2}}{p}, \tag{2.6}$$

De (2.1) y (2.6) se tiene,

$$\frac{F_c'(p)}{F_c(p)} = -\frac{p}{2(t^2+p^2)} + \frac{t}{2p(t^2+p^2)} - \left(\frac{t(t^2+p^2)^{1/2}}{2p(t^2+p^2)}\right),$$

así,

$$\frac{F_c'(p)}{F_c(p)} = \frac{t^2-p^2-t\sqrt{t^2+p^2}}{2p(t^2+p^2)},$$

$$\frac{F_c'(p)}{F_c(p)} = \frac{t^2+p^2}{2p(t^2+p^2)} - \frac{2p^2}{2p(t^2+p^2)} - \frac{t\sqrt{t^2+p^2}}{2p(t^2+p^2)},$$

$$\frac{F_c'(p)}{F_c(p)} = \frac{1}{2p} - \frac{p}{t^2+p^2} - \frac{t}{2p\sqrt{t^2+p^2}}, \tag{2.7}$$

al integrar la ecuación diferencial (2.7) se tiene,

$$\ln|F_c(p)| = \frac{1}{2}\ln|p| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + p^2\right| + \frac{1}{2}\ln|\frac{t + \sqrt{t^2 + p^2}}{p}| + \ln|k|,$$

$$\ln|F_c(p)| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{kp\left(\frac{t + \sqrt{t^2 + p^2}}{p}\right)}{t^2 + p^2}\right|,$$

$$\ln|F_c(p)| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{k(t + \sqrt{t^2 + p^2})}{t^2 + p^2}\right|,$$

aplicando propiedades de los logaritmos, se obtiene finalmente la expresión para $F_c(p)$,

$$F_c(p) = \sqrt{\frac{k(t + \sqrt{t^2 + p^2})}{t^2 + p^2}}, \tag{2.8}$$

de la integral que define la función $F_c(p)$ y de (2.8) tomando $p = 0$,

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \sqrt{\frac{k(t + 1)}{t^2}}, \tag{2.9}$$

recordando que el valor de la integral gaussiana que figura en el lado izquierdo de (2.9) viene dada por (ver nota 16),

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{2.10}$$

al igualar las expresiones en (2.9) y (2.10) y haciendo $t = 1$, se tiene,

$$\sqrt{k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

de esta manera (2.8) se puede escribir, como,

$$F_c(p) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 + p^2}}{t^2 + p^2}}.$$

Finalmente si en la igualdad anterior se toma $t = 0$, $p = 1$ se obtiene,

$$F_c(1) = \int_0^{\infty} cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{2.11}$$

para obtener el valor de la integral $\int_0^{\infty} sen(x^2)dx$, tomamos (2.11); haciendo $p = 1$, $t = 0$ en (2.6) y en la definición de $F_s(p)$,

$$F_s(1) = F_c(1),$$

y

$$F_s(1) = \int_0^{\infty} sen(x^2)dx = F_c(1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Nota 16

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2}dx = \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{t}x)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Capítulo 3

INTEGRAL PARAMÉTRICA

3.1. Introducción

Sucesiones cuyos términos son integrales definidas que dependen de un parámetro entero no negativo, constituyen un tópico interesante en cálculo. En [1] Dana-Picard, estudia la sucesión de integrales definidas,

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

y muestra que I_n dada en (3.1) se puede escribir como $I_n = a_n + b_n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ con a_n y b_n racionales, más precisamente demuestra.

Proposición 1 *Para cada entero no negativo p, se tiene,*

$$a_{2p} = -1 + \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{2p-2k-1}(p-k)((p-k-1)!)^2}{(2p-2k-1)!}, \tag{3.2}$$

$$b_{2p} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{p} \frac{2(p-k)(2p-2k-2)!}{2^{2p-2k+1}((p-k)!)^2}, \tag{3.3}$$

Proposición 2 *Para cada entero no negativo p, se tiene,*

$$a_{2p+1} = 1 - \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{2p-2k-1}(p-k)((p-k-1)!)^2}{(2p-2k+1)!}, \tag{3.4}$$

$$b_{2p+1} = -\frac{1}{4} - \sum_{k=0}^{p} \frac{2(p-k+1)(2p-2k)!}{2^{2p-2k+3}((p-k)!)^2}. \tag{3.5}$$

Posteriormente, con estos resultados y la ayuda de su sistema algebraico de computación encuentra algunas relaciones interesantes estos coeficientes a_n, b_n; comparando estos resultados con la enciclopedia de sucesiones enteras, disponible de manera gratuita en la web.

El objetivo principal que nos proponemos es encontrar expresiones cerradas para a_n, b_n dadas en las proposiciones anteriores, que permita a su vez la deducción de las propiedades de las sucesiones establecidas en [1].

3.2. Buscando las expresiones cerradas

Considerando la integral definida dada por el autor, se procedió de la siguiente manera para dar una expresión explicita para a_n y b_n,

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_0^1 x^n \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}dx = \int_0^1 x^n(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x)dx,$$

luego,

$$I_n = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}xdx - \int_0^1 x^n(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}xdx.$$

Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$, con lo cual $xdx = \frac{dt}{2}$ se obtiene:

$$I_n = \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{dt}{2} - \int_0^1 t^{\frac{n}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{dt}{2}, \tag{3.6}$$

recordando la definición de la función Beta de Euler:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

la expresión dada en (3.6) se escribe como,

$$2I_n = B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{n}{2}+1, \frac{1}{2}\right).$$

Usando la relación que existe entre la función Beta con la función Gamma,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

se obtiene,

$$2I_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}, \tag{3.7}$$

la fórmula de recurrencia $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, aplicada en el denominador del segundo término de (3.7) con $z = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, permite escribir (3.7) de la siguiente manera:

$$2I_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\frac{n+1}{2}\quad\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)},$$

teniendo en cuenta la fórmula de duplicación de Legendre,

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}, \tag{3.8}$$

con $z = \frac{n}{2}$, se tiene,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
2I_n &= \sqrt{\pi}\left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{\Gamma(n)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}\Gamma(n)}\right] \\
2I_n &= \frac{\pi\Gamma(n)}{2^{n-1}n\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} - \frac{n}{n+1}\frac{2^{n-2}\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(n)}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Si en (3.9), tomamos $n = 2m$,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma(m) = (m-1)!,$$

se llega a:

$$\begin{aligned}
I_{2m} &= \frac{\Gamma(2m)\pi}{2^{2m-1}(2m)\Gamma(m-1)!(m-1)!} - \frac{2m}{(2m+1)}2^{2m+2}\frac{(m-1)!(m-1)!}{\Gamma(2m)}, \\
I_{2m} &= \frac{(2m)\Gamma(2m)\pi}{2^{2m+1}(2m)\Gamma m!m!} - \frac{2^{2m}}{(2m+1)}2^{2m+2}\frac{m!m!}{\Gamma(2m)(2m)},
\end{aligned}$$

como,

$$(2m)\Gamma(2m) = \Gamma(2m+1) = 2m! \quad \text{y} \quad \frac{(2m)!}{m!m!} = \binom{2m}{m}.$$

Se obtiene finalmente que:

$$I_{2m} = \frac{\pi}{2^{2m+1}}\binom{2m}{m} - \frac{2^{2m}}{(2m+1)}\cdot\frac{1}{\binom{2m}{m}}. \qquad (3.10)$$

Procediendo de manera similar si en (3.9) se toma $n = 2m + 1$,

$$I_{2m+1} = \frac{\Gamma(2m+1)\pi}{2^{2m}(2m+1)\left[\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^2} - \frac{2m+1}{2(m+1)}\frac{2^{2m-1}}{\Gamma(2m+1)}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^2.$$

Si en la fórmula de duplicación de Legendre (3.8), tomamos $z = m$, se obtiene,

$$\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2m)}{2^{2m-1}\Gamma(m)},$$

al reemplazar en la expresión dada anteriormente y simplificando se obtiene:

$$I_{2m+1} = \frac{2^{2m}}{(2m+1)\binom{2m}{m}} - \frac{\pi}{2^{2m+2}} \cdot \frac{2m+1}{(m+1)}\binom{2m}{m}, \tag{3.11}$$

siguiendo la notación que figura en el artículo [1], escribimos $I_n = a_n + b_n\pi$.

De esta manera las expresiones dadas en (3.10) y (3.11) permiten establecer las siguientes afirmaciones.

Proposición 1 Para cada entero no negativo m, se tiene que:

$$a_{2m} = -\frac{2^{2m}}{(2m+1)} \cdot \frac{1}{\binom{2m}{m}},$$

$$b_{2m} = \frac{1}{2^{2m+1}}\binom{2m}{m}.$$

Proposición 2 Para cada entero no negativo m, se tiene:

$$
\begin{aligned}
a_{2m+1} &= \frac{2^{2m}}{(2m+1)} \cdot \frac{1}{\binom{2m}{m}}, \\
b_{2m+1} &= -\frac{(2m+1)}{2^{2m+2}} \frac{1}{(m+1)} \binom{2m}{m}.
\end{aligned}
$$

Nota 1

1. *A partir de las expresiones para* a_{2m}, a_{2m+1}*, es evidente que*

$$a_{2m+1} = -a_{2m}.$$

2. *De las expresiones de* $b_{2m+1}, b_{2m}, m \geq 0$ *se obtiene*

$$
\begin{aligned}
b_{2m-1} = b_{2(m+1)-1} &= -\frac{1}{2^{2(m-1)+2}} \frac{(2(m-1)+1)}{(m-1+1)} \binom{2m}{m} \\
&= -\frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m-1)}{(m)} \frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!} \\
&= -\frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!} = -\frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m-1)!(2m)}{2(m-1)!m.m!} \\
&= -\frac{1}{2^{2m+1}} \frac{(2m)!}{m!m!} = -\frac{1}{2^{2m+1}} \binom{2m}{m} = -b_{2m}.
\end{aligned}
$$

Nota 2

En el artículo [1], con la ayuda de la base de datos [6]. se halla que,

$$Numerador(a_n) = Denominador(\frac{n+1}{2^n}C_n), \tag{3.12}$$

donde C_n es el n-ésimo número de Catalan; es decir,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Pero es claro, que de las expresiones para $\{a_n\}$ dada en las proposiciones anteriores se establece facilmente la relación (3.12); en efecto;
si $n = 2m$

$$\begin{aligned} Numerador(a_n) = num(a_{2m}) &= 2^{2m} \\ Denominador\left(\frac{n+1}{2^n}C_n\right) &= Den\left(\frac{2m+1}{2^{2m}}\cdot\frac{1}{2m+1}\binom{4m}{2m}\right) \\ &= Den\left(\frac{1}{2^{2m}}\binom{4m}{2m}\right) = 2^{2m}. \end{aligned}$$

De manera similar se establece (3.12) para el caso $n = 2m+1$.

Finalmente, el autor del artículo bajo estudio, ver [1] pag 1111 afirma "the question whether such a do sed form for $Num(a_n)$ can be derived is still open", afirmación claramente falsa, como lo muestra las expresiones para a_{2m} y a_{2m+1} dadas en las proposiciones 1 y 2 respectivamente.

Conclusiones

* Los resultados obtenidos en algunos artículos, se pueden en algunos casos ser mejorados, como es la situación de lo mostrado en el capítulo 1; o se pueden presentar demostraciones alternas como es el caso de lo indicado en los capítulos 2 y 3.

* Es importante en la formación de pregrado,que el estudiante se enfrente al estudio de artículos publicados en revistas especializadas del aréa.

Recomendaciones

Para trabajos futuros se puede pensar en hallar la función g para la cual $\{f, g\}$ sea un par PP-2, en el caso de que $f(x) = \sin x$, $f(x) = \log x$, $f(x) = \arcsin x$, o funciones similares. De la misma manera, hacer un estudio similar para otros valores de n.

Bibliografía

[1] Dana-Picard, Th., 2007, *Two related parametric integrals* International journal of Mathematical Education in Science and Technology., 38(3), 1106-1113).

[2] L.G. Maharan, E.P. Shaughnessy., 1976, *When does (fg)′=f′g′* Two-year college math.J.738-39

[3] M. Hurwitz, 2001, *Is the derivate of a product the product of the derivates?* math teacher 94 , 26-27.

[4] Carter C. Gay, Akalu Tefera, Aklilu Zeleke, 2008, *The naive product rule for derivates* The College Mathematics Journal. vol 39, num 2, 145-148.

[5] C. Gay., A: Tefera., A. Zeleke, 2009, *The fresnel integrals revisted* The college mathematics journal. vol 40, num 4 259-262.

[6] *The on-line encyclopedia of integer sequences* http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas Sloane, N.J.A. (2007)