LAS NOCIONES DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

AUTOR: L. Melissa Niño Vera
DIRECTOR: Prof. Arnaldo De La Barrera

Monografía presentada a la Universidad de Pamplona, programa de Matemáticas como requisito para obtener del título de Matemática.

Departamento de Matemáticas
Pamplona – Colombia
2016

Resumen

En este trabajo se realiza breve recorrido histórico, un estudio matemático, un estudio de referentes didácticos y de algunos antecedentes de investigación relacionados a las nociones de independencia y dependencia lineal.

También para apreciar cómo se encuentra el estado actual de la enseñanza de estas nociones se presentan los esquemas que se proponen en diferentes libros de textos.

Finalmente siguiendo los procesos del pensamiento matemático avanzado se presenta una posible ruta para la enseñanza del concepto de independencia lineal.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

El álgebra lineal es un pilar importante en las matematicas. Esta permite abirdar una multitud de problemas en matemática pura y sus aplicaciones. Uno de los conceptos que se estudia es el de dependencia lineal, esta noción resulta importante para la construcción de otros conceptos tales como: sistema generador, base, rango de una matriz, solución con ecuaciones diferenciales, entre otros.

En esta monografía se realiza un estudio de una manera breve de las nociones de dependencia e independencia lineal.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el capítulo uno la presente introducción.

En el capítulo 2 se presenta la propuesta del trabajo.

En el capítulo 3 se hace una revisión de manera breve del desarrollo histórico de algunos conceptos de álgebra lineal presentando los conceptos más relevantes para formalizar el álgebra vectorial, y más específicamente la dependencia e independencia lineal.

En el capítulo 4 un referente matemático formal de estos conceptos, donde se aprecian los diferentes objetos matemáticos donde está presente la dependencia e independencia lineal.

En el capítulo 5 una estudio de los registros de representación y los procesos del pensamiento matemático avanzado, para tener un referente didáctico que aplicar a la hora de la enseñanza-aprendizaje de los concepto de dependencia e independencia lineal.

En el capítulo 6 una revisión de algunos antecedentes de investigación, divididos en dos categorías: a la enseñanza de los conceptos de combinación lineal y a la enseñanza de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

En el capítulo 7 se realiza una revisión de algunos libros de textos, con el fin de ver las diferentes maneras en las que los conceptos se presentan, mostrando un cuadro comparativo para identificar cual es mejor para la enseñanza y cual para el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

En el capítulo 8 se presenta el esquema que se propone para la enseñanza de la independencia lineal. Terminando con algunos comentarios finales del proceso general en la ejecución del estudio en mención.

Capítulo 2

Propuesta del trabajo.

2.1. Motivación del problema.

Dentro del álgebra lineal los conceptos de dependencia e independencia lineal se consideran de gran importancia, ya que son generadores de otros conceptos también importantes, tales como lo son base, conjunto generador, etc. Siendo estos conceptos tan importantes se desearía que su enseñanza fuera algo sencillo, pero se observa que la mayoría de los estudiantes presentan diversas dificultades a la hora de enfrentarse con estos conceptos, como se va a observar en los antecedentes de investigación. Se desean identificar dichas dificultades y analizar cuáles podrian ser las mejores estrategias para superarlas.

2.2. Planteamiento del problema.

1. ¿Cuál sería la manera apropiada de organizar la enseñanza de las nociones de dependencia e independencia lineal en el curso de álgebra lineal I?

2. ¿Cómo incorporar la historia de las matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal

3. ¿Qué dificultades y obstáculos se pueden presentar en la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado?

4. ¿Cuáles serían las situaciones problema, representaciones apropiadas para conceptualizar, la dependencia e independencia lineal?

2.3. Objetivos

2.3.1. Objetivo general.

Realizar un estudio hisroríco, matemático y de algunos antecedentes de investigación de los conceptos de dependencia e independencia lineal, para proponer algunas ideas para su enseñanza.

2.3.2. Objetivos específicos.

1. Realizar un estudio matemático de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

2. Realizar una revisión de algunas investigaciones en torno a la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

3. Realizar una revisión en los libros de texto de las diferentes definiciones y el entramado que se presentan alrededor de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

2.4. Justificación.

En años recientes muchas investigaciones en educación matemática han evidenciado las dificultades relacionadas con el aprendizaje de los estudiantes en los cursos de algebra lineal, y más específicamente en los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Según estas investigaciones para identificar estas dificultades se justifica hacer un estudio desde varios punto de vista de los conceptos de dependencia e independencia lineal, y sobre todo las construcciones mentales que tienen los estudiantes al aprenden estos conceptos, esto con el fin de proponer algunas ideas que sean posibles soluciones para superar estas dificultades y mejorar su enseñanza y aprendizaje

2.5. Metodología.

Para realizar el estudio descrito en los objetivos de la dependencia e independencia lineal se siguieron las siguientes estrategias: un breve recorrido histórico para entender mejor como surgieron estos conceptos. Un estudio de referentes didácticos (sistemas de representación y pensamiento matemático avanzado) para aplicarlos a la hora de proponer ideas para la enseñanza aprendizaje de estos conceptos. Un referente matemático formal de los conceptos de dependencia e independencia lineal. Una selección de algunos trabajos de investigación referentes a la enseñanza y aprendizaje de la dependencia e independencia lineal, que permiten identificar algunas propuestas para mejorar la didáctica aplicada a estos conceptos. Selección de algunos libros de textos que son utilizados en los cursos de algebra lineal.

Por último se propone un posible esquema para su enseñanza, con algunas ideas que se pueden utilizar para mejorar la enseñanza de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Capítulo 3

Breve recorrido histórico a través del algebra lineal

En este capítulo realizara un breve recorrido histórico exponiendo los principales tópicos que permitieron desarrollar el álgebra lineal y más específicamente la dependencia e independencia lineal. Para este recorrido se consultaron las investigaciones de Jean-Luc Dorrier, (*Use of history in a research work on de teaching of lineal algebra* [3]) y de Deivi Luzardo, Alirio J. Peña (*Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX* [2]).

El álgebra lineal es reconocida como una de las ramas de las matemáticas más importantes por sus aplicaciones en diversos campos, a pesar que la teoría que formaliza el álgebra lineal es reciente (finales del siglo XIX y principios del XX). Alrededor del mundo se proponen cursos de álgebra lineal generalmente en los primeros dos años de universidad, y se aprecia que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades con las nociones principales, Dorier (2000) explica estas dificultades:

una razón es la falta conocimiento en lógica y teoría de conjuntos, otra es que en dichos cursos no se tiene en cuenta el desarrollo histórico que se tuvo para desarrollar el álgebra.

El planteamiento y solución de ecuaciones de primer y segundo grado se desarrolló desde la antigüedad, las primeras anotaciones fueron problemas de primer grado aplicados a la agrimensura, encontradas en el papiro de Rhind escrito por el sacerdote egipcio Ahmés (1650 a.C.); los babilonios sabían cómo resolver problemas que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, entre los siglos III y IV a.C. los matemáticos chinos continuaron con la tradición de los babilonios, son los primeros que muestran los indicios de un pensamiento lineal, los matemáticos islámicos y europeos siguieron cultivando el pensamiento lineal en la época medieval.

Hallar las raíces de polinomios con coeficientes reales capto la atención de los matemáticos desde los árabes, con las ecuaciones de segundo grado los matemáticos se encontraron con el problema que por ejemplo el polinomio $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en los números reales, descubriendo así la unidad imaginaria, el precursor de los números complejos fue Girolano Cardano (1501-1576). El considerar a los números complejos como una extensión de los reales, lo cual se podía representar en un plano como parejas ordenadas ayudo al desarrollo de los espacios vectoriales, porque daba una manera re representarlos gráficamente.

Según Luzardo y Peña (2006) el matemático James Joseph Silvester(1814-1897) fue el primero en utilizar el término matriz, definiéndolo como un *arreglo cuadrilongo de términos*. Cayley desarrolla el álgebra de matrices, definiendo operaciones básicas de adición, multiplicación y multiplicación por un escalar, así como la inversa de una matriz invertible. Leibniz, Colin Maclaurin, Gabriel Cramer, entre otros matemáticos trabajaron en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, lo que dio origen a lo que se conoce como determinantes.

Según Dorier (2000) Euler en su texto *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes* trabaja sobre la dependencia lineal en ecuaciones" evaluó el caso cuando una ecuación es múltiplo de otra:

$$\begin{gathered} 3x - 4y = 5 \\ 4y = 6x - 10 \;\Rightarrow\; 6x - 4y = 10. \end{gathered}$$

O cuando alguna se puede escribir como combinación lineal de las otras:

$$\begin{array}{cc} 5x + 7y - 4z + 3v = 0 & (1) \\ 2x - 3y + 5z - 6v = 0 & (2) \\ x - 13y - 14z - 15v - 16 = 0 & (3) \\ 3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0 & (4) \end{array}$$

Despejando (3)

$$x = -13y + 14z - 15v + 16.$$

Sustituyendo en (2)

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29} \quad , \quad x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}.$$

Se puede establecer las relaciones $(1) - (2) = (4)$ y $(1) - 2x(2) = (3)$. Llegando a la conclusión *una dependencia lineal entre n ecuaciones con n incógnitas es equivalente al hecho de que el sistema no tendrá una solución única* [3] . También en este texto se presentan las primeras ideas sobre rango, con la relación: *(número de incógnitas) - (rango del sistema) = (dimensión del conjunto de soluciones)* aunque se tardó un siglo en formalizarla.

Según Dorier(2000) Cramer el 1750 publico su tratado donde introdujo el uso de determinantes, que fue la base para el estudio de las ecuaciones lineales hasta el siglo XX. Frobernius en 1875 da la primera definición de independencia lineal para ecuaciones lineales que no varía mucho de la que se conoce actualmente para vectores.

Capítulo 4

Referentes matemáticos.

Para el desarrollo de este caítulo se utilizaran los textos *Álgebra lineal (Hoffman - Kunze) y Matrix Analysis and Applied Linear Álgebra (Meyer).*

4.1. Sistemas de ecuaciones lineales.

Supóngase que F es un cuerpo. Se considera el problema de encontrar n escalares (elementos de F) $x_1, ..., x_n$ que satisfagan las ecuaciones.

$$\begin{aligned}
&A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + ... + A_{1n}x_n = y_1 \\
&A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + ... + A_{2n}x_n = y_2 \\
&\vdots \\
&A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + ... + A_{mn}x_n = y_m
\end{aligned}$$

donde $y_1, ..., y_m$ y A_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, Son elementos de F. El sistema se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incognitas.** Todo n-tuple $(x_1, ..., x_n)$ de elementos de F que satisface cada una de las ecuaciones del sistema se llama **solución** del sistema.

4.2. Espacios vectoriales

Definición 4.1 *Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) consta de lo siguiente:*

1. *un cuerpo F de escalares;*
2. *un conjunto V de objetos llamados vectores;*
3. *una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V, que se llama suma de α y β, de tal modo que:*
   - *(a) la adición es conmutativa, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;*
   - *(b) la adición es asociativa $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;*
   - *(c) existe un único vector 0 de V, llamado vector nulo, tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para todo α de V;*
   - *(d) para cada vector α de V, existe un único vector $-\alpha$de V, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;*
4. *una regla (u operación) llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar c de F y cada vector α en V, llamado producto de c y α, de tal modo que:*

(a) $1\alpha = \alpha$ *para todo* α *de* V*;*

(b) $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$*;*

(c) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$*;*

(d) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$*.*

Ejemplo 4.2 ***El espacio de matrices*** $m \times n$, $F^{m\times n}$. *Sea* F *cualquier cuerpo y sean* m *y* n *enteros positivos. Sean* $F^{m\times n}$ *el conjunto de todas las matrices* $m \times n$ *sobre el cuerpo* F*. La suma de dos vectores* A *y* B *en* $F^{m\times n}$ *se define por*

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

El producto de un escalar c *y de la matriz* A *se define por*

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}.$$

obsérvese que $F^{1\times n} = F^n$*.*

Ejemplo 4.3 ***El espacio de funciones de un conjunto en un cuerpo.*** *Sea* F *cualquier cuerpo y sea* S *cualquier conjunto no vacio. Sea* V *el conjunto de todas las funciones de* S *en* F*. La suma de dos vectores* f *y* g *de* V *es el vector* $f + g$*; es decir, la función de* S *en* F *definida po*

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s).$$

El producto del escalar c *y la funcion* f *es la funcion* cf *definida por*

$$(cf)(s) = cf(s).$$

Ejemplo 4.4 ***El espacio de las funciones polinomios sobre el cuerpo*** F***.*** *Sea* F *un cuerpo y sea* V *el conjunto de todas las funciones* f *de* F *definidas en la forma*

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots c_nx^n$$

donde $c_0, c_1, ..., c_n$ *son escalares fijos en* F *(independiente de* x*). Una función de este tipo se llama función polinomio sobre* F*. Sean la adición y la multiplicación definidas como en el ejemplo 4.2. Se debe observar que si* f *y* g *son funciones polinomios y* c *está en* F*. Entonces* $f + g$ *y* cf *son tambien funciones polinomios.*

Ejemplo 4.5 *El cuerpo* $\mathbb{C}$ *de los números complejos puede considerarse como un espacio vectoriar sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *de los números reales. En forma mas general, sea* F *el cuerpo de los numeros reales y sea* V *el conjunto de los* n*-tuples* $\alpha = \{x_1, ..., x_n\}$ *donde* $x_1, ..., x_n$ *son numeros complejos. Se define la adición vectorial y la multiplicación por un escalar como en el ejemplo 4.1. De este modo se obtiene un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *que es muy diferente del espacio* $\mathbb{C}^n$ *y del espacio* $\mathbb{R}^n$*.*

Definición 4.6 *Un vector* β *de* V *se dice* ***combinación lineal*** *de los vectores* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *en* V*, si existen escalares* $c_1, ..., c_n$ *de* F *tales que*

$$\beta = c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i.$$

4.3. Dependencia e independencia lineal.

Definición 4.7 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Un subconjunto S de V se dice* ***linealmente dependiente*** *(o simplemente dependiente) si existen vectores distintos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y escalares $c_1, ..., c_n$ de F, no todos ceros tales que*

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice ***linealmente independiente.***

Ejemplo 4.8 *Determinar si el conjunto*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente o no.
simplemente determinaremos si existe o no una solución no trivial para los α en la ecuación homogénea

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

o equivalentemente, si existe una solucion no trivial para el sistema homogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, *entonces La matriz escalonada*

$$E_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto existe solución no trivial. en consecuencia, S es un conjunto linealmente dependiente.

4.3.1. Independencia lineal y matrices.

Sea A una matriz $m \times n$

- Cada una de las siguientes afirmaciones es equivalente a decir que las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente.
  - $N(A) = \{0\}$.
  - $rango(A) = n$.
- Cada una de las siguientes afirmaciones es equivalente a decir que las filas de A forman un conjunto linealmente independiente.

- ▶ $N(A^T) = \{0\}$.
- ▶ $rango(A) = m$.

- Cuando A es una matrix cuadrada, cada una de las siguientes afirmaciones es equivalente a decir que a A no es singular.
  - ▶ Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente.
  - ▶ Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 4.9 *Cualquier conjunto* $\{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{in}\}$ *conformado por vectores unitarios distintos, es un conjunto linealmente independiente porque* $rango(e_{i1} \mid e_{i2} \mid ... \mid e_{in}) = n$. *por ejemplo el conjunto de vectores unitarios* $\{e_1, e_2, e_4\}$ *en* $\mathbb{R}^4$ *es linelmente independiente porque* $rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

4.4. Bases y dimensión.

Definición 4.10 *Sea V un espacio vectorial. Una* ***base*** *de V es un conjunto de vectores linealmente dependientes de V que genera el espacio V. El espacio V es de* ***dimensión finita*** *si tiene una base finita.*

Definición 4.11 *Si V un espacio vectorial de dimensión finita, una* ***base ordenada*** *de V es una sucesión finita de vectores linealmente independientes y que genera V.*

4.5. Transformaciones lineales.

Definición 4.12 *Sean V y W dos espacion vectoriales sobre el cuerpo F. Una* ***transformación lineal*** *de V en W es una funcion T de V en W tal que*

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F.

Definición 4.13 *Sean V y W dos espacion vectoriales sobre el cuerpo F y sea T una transformación lineal de V en W. El* ***espacio nulo*** *de T es el conjuntoo de todos los vectores α de V tales que $T\alpha = 0$*
Si V es de dimensión finita, el ***rango*** *de T es la dimensión de la imagen de T, y la* ***nulidad*** *de T es la dimensión del espacio nulo de T.*

Teorema 4.14 *Sean V y W dos espacion vectoriales sobre el cuerpo F y sea T una transformación lineal de V en W. Supóngase que V es de dimensión finita. Entonces*

$$\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = \text{dim } V$$

Demostración 4.15 *Sea $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ una base de N, el espacio nulo de T. Existen vectores $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ en V tales que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es una base de V. Podemos demostrar ahora que $\{T\alpha_{k+1}, ..., T\alpha_n\}$ es una base para la imagen de T. Los vectores $T\alpha_{k+1}, ..., T\alpha_n$ generan evidentemente la imagen de T, y como $T\alpha = 0$ para $j < k$, se ve que $T\alpha_{k+1}, ..., T\alpha_n$ generan la* *imagen. Para ver que estos vectores son linealmente independientes, supóngase que se tienes escalares c_i tales que*

$$\sum_{i=k+1}^{n} c_i T(\alpha_i) = 0.$$

Esto dice que

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{n} c_i \alpha_i\right) = 0.$$

y en consecuencia, el vector $\alpha = \sum_{i=k+1}^{n} c_i \alpha_i$ pertenece al espacio nulo de T. Como $\alpha_1, ..., \alpha_k$ forman una base de N, deden existir escalares $b_1, ..., b_k$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i.$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i - \sum_{i=k+1}^{n} c_i \alpha_i = 0.$$

y como $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son linealmente dependientes, se debe tener que

$$b_1 \ = \ \cdots \ = b_n \ = \ c_{k+1} \ = \ \cdots \ = c_n = 0.$$

Si el rango de T es r, el hecho que $T\alpha_{k+1}, ..., t\alpha_n$, formen una base de la imagen de T nos dice que $r = n - k$. Como k es la nulidad de T y n es la dimensión de V, se tiene lo afirmado. ■

4.6. Wronskiano.

Dado un intervalo I de $\mathbb{R}$, recordamos que $\mathbf{C}(I)$ denota al espacio vectorial compuesto por todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son continuas en I y que $\mathbf{C}^n(I)$, con $n \in \mathbb{N}$, denota al subespacio de $\mathbf{C}(I)$ formado por las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son n-veces derivables con continuidad en I. Recordemos que el conjunto de funciones continuas $\{f_1, ..., f_n\}$, con $f_i \in \mathbf{C}(I)$, $1 \leq i \leq n$ es linealmente independiente si la única combinación lineal de las f_i que verifica la condición

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n = 0$$

es la trivial, es decir, $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.
Observamos que la ecuación de arriba es equivalente a la condición

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Dado un conjunto de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$, con $f_i \in \mathbf{C}^{n-1}(I)$ para $i = 1, ..., n$ se define el wronskiano de $\{f_1, ..., f_n\}$ mediante

$$W(f_1, ..., f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si el Wronskiano es distinto de cero decimos que las funciones son linealmente independientes.

Ejemplo 4.16 *Si consideramos las funciones* $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ *y* $f_3(x) = e^{-x}$, *tenemos que*

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = det \left(\begin{vmatrix} x & e^x & e^{-x} \\ 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \right) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como el determinante es distinto de cero, las funciones son linealmente independientes.

Capítulo 5

Respecto a lo didáctico.

5.1. Sistemas de representación.

Para apreciar los tipos de representación con los que un alumno se puede encontrar al estudiar los conceptos de dependencia e independencia lineal se consultó la investigación: *Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento* De Marcela Parraguez Gonzáles y Jorge Bozy Ortiz. En el marco teórico de esta investigación se aprecian tres tipos de pensamiento que los estudiantes presentan parar representar y entender la dependencia e independencia lineal de vectores, uno practico (sintético - geométrico) y dos teóricos (analítico-aritmético, analítico estructural). Citando el texto:

Pensamiento Sintético-geométrico (SG):
Aquí los objetos son presentados mediante una representación geométrica. La visualización matemática que tenga el sujeto del objeto toma un rol fundamental en el entendimiento de dicho objeto. Por ejemplo, una recta sería entendida a través de su gráfica, lo mismo que un plano, un vector puede ser representado mediante una flecha dirigida, la solución de un sistema de ecuaciones lineales $\mathbb{R}^2$ como la intersección común de, la solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ planos en el espacio, etc.

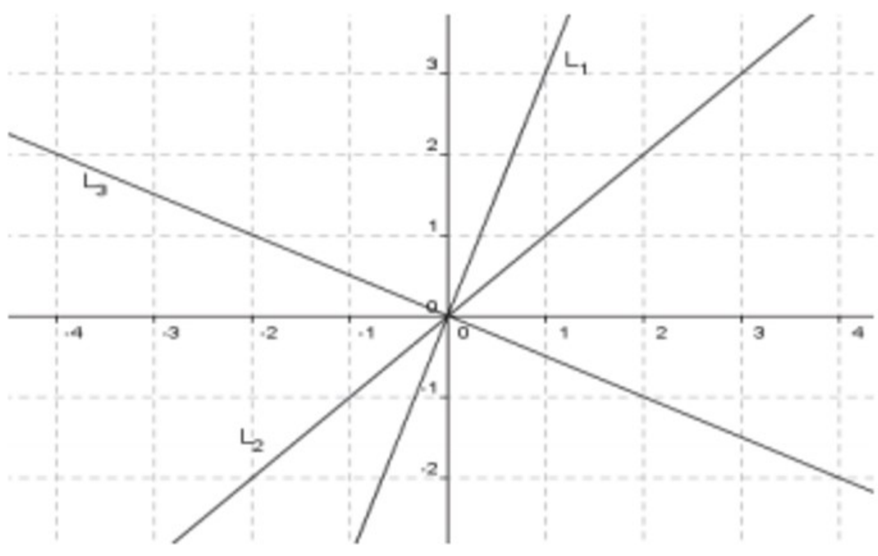


Figura 5.1: Solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incognitas.

Pensamiento Analítico-aritmético (AA):
Aquí los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas. Así, por ejemplo, los vectores aquí son representados por sus componentes (n-uplas), las rectas y planos por sus ecuaciones, los sistemas de ecuaciones lineales son comprendidos y expresados a través de las ecuaciones que los componen

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x - 3y &= 0. \end{aligned}$$

Las combinaciones lineales de vectores son comprendidas a partir de las coordenadas de cada uno

$$x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1) = (0,0,0).$$

Pensamiento Analítico-estructural (AE):
Aquí se recurre a las propiedades de los objetos o a los axiomas que permiten explicarlos. Así, por ejemplo, el cero vector es entendido como aquel que deja a todo vector invariante bajo la suma de vectores, las combinaciones lineales de vectores dependen de la estructura del espacio vectorial y de las operaciones que se definan en él, como por ejemplo las operaciones suma ($\oplus$) y ponderación ($*$) definidas en el espacio vectorial $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ por:

$$\begin{aligned} (a,b) \oplus (c,d) &= (ac, bd) \\ \lambda * (a,b) &= (a^\lambda, b^\lambda). \end{aligned}$$

5.2. Algunas nociones acerca del pensamiento matemático avanzado.

El principal trabajo que se puede encontrar sobre el pensamiento matemático avanzado (PMA) escrito por David Tall, con ayuda de Vinner en 1991, este se consultó para presentar un breve análisis sobre algunas nociones del PMA.

En la mayoria de cursos la manera como se presentan los tópicos a la hora de enseñar no concuerda con la manera en que se genera el conocimiento en la mente humana, muchas veces dicha presentación lógica de los conceptos le brinda obstáculos al estudiante. El pensamiento matemático avanzado tiene como un objetivo visualizar cuales son las construcciones mentales que constituyen el conocimiento, y para esto se divide en dos procesos cognitivos principales: representación y abstracción, cada uno de ellos subdivididos en más procesos.

Es importante hacer una distinción del pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado, al respecto Tall (1991) expresa:

"En las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia, en las avanzadas las propiedades de los objetos se construyen a partir de las definiciones... en el primero las matemáticas se describen, en el segundo las matemáticas se definen".

Aunque generalmente se cree que el PMA es exclusivo de la educación universitaria, también se puede dar en la matemática en niveles básicos, teniendo en cuenta que para que el pensamiento sea avanzado lo único que se requiere es pasar a un nivel de pensamiento superior. Por ejemplo Piaget en Dubinsky [15] notó que las construcciones mentales que realizan los niños en edades tempranas para apropiarse de un conocimiento matemático, son equivalentes a las que realizan estudiantes universitarios

De esta manera, un estudiante al encontrase con un nuevo concepto, lo primero que se le viene a la mente no siempre es una representación verbal, lo que sería la definición formal, sino todos las diferentes representaciones que pueda tener y de las que tenga conocimiento, puede ser una gráfica, las características que posee, o algún ejercicio que realizo con anterioridad, esto es la llamado imagen mental. A partir de estas imágenes mentales se empiezan a hacer las construcciones para aprender el concepto. Según Dubinsky [17] existen cinco tipos de construcciones mentales:

1 INTERIORIZACIÓN: construcción de procesos internos como una forma de dar sentido a fenómenos percibidos.

2 COORDINACIÓN: composición o coordinación de dos o más procesos para construir uno nuevo.

3 ENCAPSULACIÓN: o conversión de procesos dinámicos a objetos estáticos.

4 GENERALIZACIÓN: cuando el sujeto aprende a aplicar un esquema existente a una colección de fenómenos más amplio.

5 INVERSIÓN: la constricción de un nuevo proceso que consiste en invertir el proceso original.

Para estudiar y entender el PMA hay que tener claros los procesos cognitivos que se involucran en el: representar, visualizar y generalizar – clasificar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer y formalizar. Siendo la abstracción el más importante de ellos, porque muchos de los conceptos matemáticos pueden ser vistos como objetos y/o procesos, si la abstracción se realiza con éxito sobre un concepto se hace evidente esta división y se facilita el paso entre verlo como objeto (concepto con todas sus representaciones mentales) a verlo como proceso (operaciones que se utilizan para la reconstrucción de un concepto). Hablando propiamente sobre el proceso de abstracción, Dubinsky la define como:

sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados a la mente.”

Piaget en Dubinsky distingue tres tipos principales de abstracción:

- ABSTRACCIÓN EMPIRICA: el conocimiento que viene de las propiedades de los objetos, que aparece de las interacciones (acciones) del sujeto con el exterior.
- ABSTRACCIÓN PSEUDO-EMPIRICA: entre la empírica y la reflexiva.
- ABSTRACCIÓN REFLEXIVA: interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas, y nuevos objetos.

Piaget considero que es la abstracción reflexiva es en su forma más avanzada la que conduce al pensamiento matemático avanzado.

Finalmente otro objetivo del PMA es la realización de un esquema, que dibuja el camino mental que se puede seguir para llegar al aprendizaje de un concepto, aunque se proponga un esquema para uno en específico, teniendo en cuenta que como el aprendizaje varia de un individuo a otro, podrían haber diversos esquemas para el mismo concepto.

Teniendo como referente el trabajo de Ed Dubinsky [15] en Tall(1991) se hará un análisis de los esquemas que se presentan en el texto de los conceptos inducción matemática y cálculo de predicados, estos son esquemas que presenta el autor, no significa que sean los únicos que se puedan encontrar para estos conceptos, esto con el fin de entender como es la organización de un esquema, por ultimo se presentara el en esquema del concepto de independencia lineal.

La estructura de cualquier esquema se muestra en la siguiente gráfica:

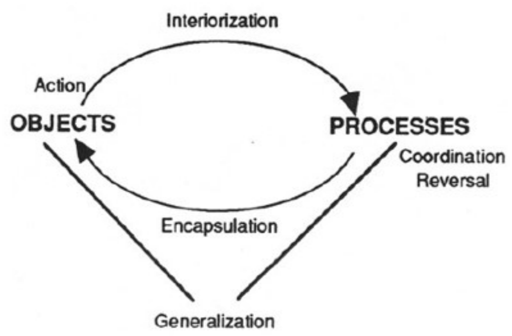


Figura 5.2: Esquema y su construcción.

Los objetos y procesos a que se pueden observar son esquemas más antiguos que los estudiantes deben tener claros, esto es porque el aprendizaje en matemáticas es estructurado y se interrelaciona. Los *objetos* son las nociones matemáticas que se utilizaran, y los *procesos* las operaciones que se aplicaran a estos objetos para crear nuevos objetos; los proceos cognitivos que se utilizan se pueden apreciar en la grafica.

Inducción matemática:
El autor presenta este esquema:

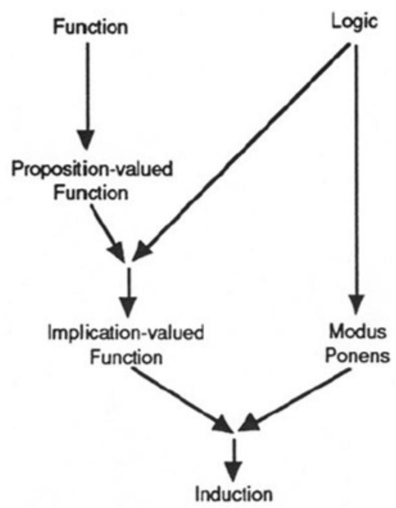


Figura 5.3: Descomposición genética de inducción matemática.

El objeto (función) y el proceso (lógica), son esquemas que se supone el estudiante ya tiene claros, el siguiente objeto es definir con una función proposicional(una función cuyas variables son proposiciones), lo que ocurre con los primeros n términos, (para $f(1)$ hasta $f(n)$) a continuación se combina con la lógica para expresar lo que implicaría definir la función evaluada en $n+1$, por último el proceso de modus ponens $(((p \Rightarrow q) \wedge (p)) \Rightarrow (q))$ es la herramienta que se utiliza para generalizar el proceso de inducción.

Cálculo de predicados.
El autor presenta este esquema:

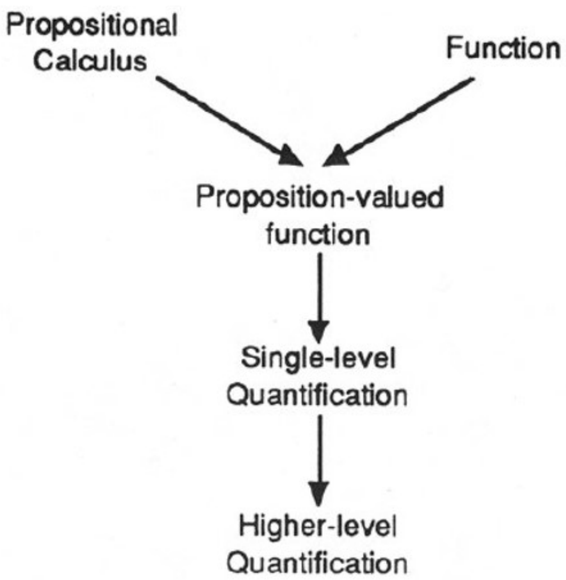


Figura 5.4: Descomposición genética de calculo de predicados.

El cálculo proposicional se refiere el uso de conectivos lógicos ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) y la negación ($\neg$). Se combina con la lógica para expresar una función proposición, esto evoluciona al nivel de cuantificación simple que se refiere al uso de cuantificadores ($\exists$, $\forall$). Y por último el nivel de cuantificación mayor se refiere a cuando se combinan los conectivos cuantificadores para crear expresiones lógicas más extensas.

Capítulo 6

Algunos antecedentes de investigación.

En este capítulo se realizara una breve revisión de algunas investigaciones que podemos consultar en torno al concepto de dependencia e independencia lineal, de cada uno se presentara un breve resumen, mostrando lo que propone el autor, y también se identificara los procesos del pensamiento matemático avanzado, y los tipos de representación que se utilizan.

6.1. Con Relación a la enseñanza del álgebra lineal

Respecto a lo relacionado con la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal se hizo una revisión de las siguientes investigaciones:

Autor: J-L Dorier.(2002)

Teaching linear algebra at university.

El autor afirma que en la mayoría de carreras universitarias en los primeros años contempla la enseñanza de cursos de cálculo y álgebra lineal. La enseñanza del álgebra es prácticamente la misma en todo el mundo, se presentan los conceptos de una manera progresiva de tal modo que el aprendizaje tenga una continuidad; sin embargo se puede observar que los estudiantes no comprenden muy bien estos temas por falta de un entrenamiento matemático más formal.

Dorier menciona a otros autores haciendo énfasis en que para estudiar el álgebra hay varios tipos de lenguajes, esto con el fin de mostrar que los cursos de álgebra que se imparten pueden ser más versátiles, el autor es consiente que en las aulas de clase no se hace lo necesario para que los estudiantes pasen de un sistema de representación a otro, si los educadores le dieran una mayor importancia a este traspaso de un sistema a otro esto podría ayudar a su mayor comprensión, aunque a su vez representa una dificultad por la diferencia de estilos que tienen estos lenguajes.

Propone las siguientes ideas en un experimento de enseñanza, que debería seguir ciertas características, que dejan indicadas:

- Dar unas actividades para identificar la naturaleza epistemológica de los conceptos.
- Enseñar los conceptos elementales de espacios vectoriales.
- Los estudiantes tienen participación en los cambios que se hacen para la enseñanza del álgebra.

- El concepto de rango tiene un papel fundamental en el proceso.

En esta investigación se aprecia que el autor primero hace un barrido histórico por el desarrollo del álgebra lineal, como es un documento acerca de didáctica no se identifican los tipos de pensamiento, pero si se resalta la importancia que tiene que los estudiantes sean capaces de transitar de uno a otro. En la propuesta del experimento didáctico se ve que se siguen los procesos del pensamiento matemático avanzado, porque los estudiantes tienen un papel fundamental en la enseñanza y son ellos los que realizan un esquema para que sea más sencillo su aprendizaje.

Autores: Barbara Jaworski, Stephanie Treffert-Thomas, Thomas Bartsch (2011)

Linear algebra with a didactical focus.

Según estos autores, ya que el álgebra lineal hace parte de muchas carreras universitarias se ve la necesidad de crear una especie de introducción al álgebra, plantean a través de una serie de preguntas el enfoque de este artículo:
¿Cómo se construiría un curso introductorio al álgebra?
¿Qué temas se tocarían en esta introducción?

En primer lugar lo que los autores quieren es identificar y analizar todos los conceptos que se podrían tratan en el primer curso de álgebra en las universidades, esto para tener una base para su estudio; se reúnen con los estudiantes y hacen preguntas para ver como ellos abordan los problemas y ver como los solucionan. Una de las tareas propuestas es:

Example 3.14. Consider an unknown 2×3 matrix A. We know that A satisfies $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ and $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, where

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. Is $\mathbf{b}_1$ in the range of A? Is $\mathbf{b}_2$ in the range of A?
   Solution:
   $\mathbf{b}_1 \in$ range A because the equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ is solvable ($\mathbf{x}_1$ is a solution).
   $\mathbf{b}_2 \in$ range A because the equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ is solvable ($\mathbf{x}_2$ is a solution).

b. Is $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ in the range of A?
   Solution: Yes. The equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ is solvable, and $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ is a solution because
   $$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

c. Take the number $\lambda = 3$. Is $\lambda\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ in the range of A?
   Solution: Yes. The equation system $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{b}_1$ is solvable, and $\lambda\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -21 \end{pmatrix}$ is a solution because
   $$A(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda\, A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{b}_1.$$

d. Is the zero vector $\mathbf{o}$ in the range of A?
   Solution: Yes. The equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ solvable, and $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ is a solution because $A\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

In this example, we have verified that the range of a matrix has the three properties of Observation 3.5. We can therefore conclude:

Observation 3.15. *The range of a matrix is a subspace.*

Figura 6.1: Tarea propuesta y su solución.

Con esta tarea lo que intentan los investigadores es presentar un posible esquema didáctico, donde a partir de los problemas y las características que se ven al resolverlos, los estudiantes se hagan una imagen mental de algunos conceptos de álgebra lineal.

En esta investigación no se tiene en cuenta la historia del álgebra lineal. El pensamiento matemático avanzado está presente porque los autores lo que buscan es una visualización de los conceptos antes de presentarlos, como se observa las tareas tratan de manipulación de vectores y no de dependencia e independencia lineal. El sistema de representación que más se utiliza es el analítico-aritmético.

Autor: Ghislaine Gueudet-Chartier(2003)

Should we teach linear álgebra through geometry?

En este artículo el autor habla principalmente de como la geometría y el álgebra lineal están relacionadas entre sí. Empezando por notar que la mayoría de estudiantes presentan algún problema en los conceptos propios del álgebra y esto se debe a como se está enseñando. Los docentes pueden utilizar la geometría como instrumento para que estas dificultades no se hagan tan comunes, bien sea graficando las situaciones en un plano o utilizando programas computacionales. Si bien la geometría puede ser una gran herramienta para la enseñanza, también puede presentar una dificultad, por ejemplo, porque no todos los estudiantes se les facilitan aprender gráficamente, o por la gran diferencia que existe entre el lenguaje geométrico y el formal, lo cual no permite hacer una transición entre los sistemas de representación.

Posteriormente se muestra el desarrollo que ha tenido el álgebra gracias a la geometría. Por último se presentan las ventajas y desventajas de usar la geometría como un método de enseñanza para el álgebra, un ejemplo de una desventaja seria que para espacios vectoriales de dimensión mayor a 3 es imposible hasta ahora hacer una interpretación geométrica.

Aunque en este trabajo no se hace un desarrollo histórico como tal, si se aprecia la importancia que la geometría ha tenido para desarrollar el álgebra vectorial. A pesar que se habla de geometría los registros de representación no están presentes en el trabajo porque los conceptos no se presentan, pero si se observa la importancia que tiene que los estudiantes puedan traspasar de un sistema a otro. Respecto al pensamiento matemático avanzado se ve el proceso de visualización ya que quieres que la geometría sea un medio para llegar a los conceptos del álgebra lineal.

Autores: Asuman Oktac, María Trigueros (2010)

¿Cómo se aprende los conceptos del álgebra lineal?

En este trabajo los autores quieren entender los esquemas mentales que presentan los estudiantes al aprender los conceptos de álgebra lineal y las dificultades a las que se enfrentan al hacerlo, para esto los autores se apoyan en la teoría APOE (acciones – procesos – objetos - esquemas).

En primer lugar ilustran una reseña histórica con el fin de resaltar la importancia que tiene la teoría APOE como una manera de enseñar álgebra lineal. Ellos diseñan e implementan un experimento prestando principal atención a los conceptos que componen el estudio álgebra lineal y como se relacionan entre ellos. Los enfoques que presentan los autores son: analizar las construcciones mentales que se involucran en cada concepto, validar este análisis por experimentos y hacer sugerencias didácticas para la enseñanza. Finalmente presentan los resultados en la construcción de esquemas en los conceptos de:

- Espacio vectorial.
- Transformación lineal.
- Base.
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Por ultimo los autores tienen claro que la tarea de la enseñanza del álgebra no es fácil, y es algo que puede resultar muy extenso; se le deja al lector la idea abierta de proponer en un futuro ayudas didácticas para la enseñanza del álgebra lineal.

En este trabajo no se tiene en cuenta la historia ni los diferentes registros de representación. El pensamiento matemático avanzado está estrechamente relacionado con la teoría APOE, esta se basa en los mismos procesos del PMA, y se ve que el objetivo es crear esquemas mentales para ver como los estudiantes aprenden diversos tópicos, uno de los objetivos del PMA también.

6.2. Respecto a la enseñanza de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Respecto a lo relacionado con la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal se hizo una revisión de las siguientes investigaciones:

Autores: Sepideh Stewart, Michael O. J. Thomas.

Embodied, symbolic and formal thinking for linear combination and Independence in linear álgebra.

Los autores en este artículo se percatan que cuando los estudiantes se enfrentan en los primeros años de universidad a los cursos de álgebra lineal, muchas veces estos cursos son el primer acercamiento a una matemática formal y estructurada, por la forma como se está enseñando el álgebra lineal los estudiantes no presentan dificultades en utilizar lo aprendido teóricamente para resolver los problemas que se les presentan, simplemente aplican la definición, pero si para formalizar el problema y la solución del mismo, a continuación los autores presentan una tabla donde se muestran las difilcutades al pasar de un sistema de representación a otro.

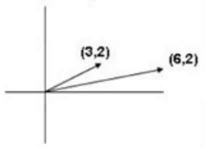
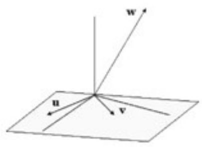
Worlds APOS	Embodied World	Symbolic World Algebraic Rep.	Symbolic World Matrix Rep.	Formal World
Action	Can draw two specific linearly independent vector 	Can arrange $c_1\mathbf{v_1}+c_2\mathbf{v_2}+c_3\mathbf{v_3}=0$ to get a linear combination $v_1=-\frac{c_2}{c_1}v_2-\frac{c_3}{c_1}v_3, c_1\neq 0$ (To show dependent)	$c_1\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ This equation has trivial solution, where $c_1=c_2=c_3=0$. Also $\begin{pmatrix}1&1&3\\3&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ Vectors are not multiples, or linear combination of each other.	
Process	Can show any 3 linear independent vectors 	Can see that for linearly dependent vectors one can always be written as a linear combination of the others.	Can relate linear independence and dependence to row-reduced echelon form of a relevant matrix.	Can see processes that relate linear independence to other linear algebra concepts such as: linear combination, span, rank and basis.
Object	Any two vectors define a plane, and if the third vector does not lie on the same plane means vectors are independent.	Can think of a set of linearly independent vectors, $\mathbf{v}_i$ as an entity and can use it eg as a basis.	Can think of a matrix as a set of linearly independent vectors $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \ldots, a_{ni})$ and as an entity, and can use it eg as a basis.	Understands the formal definition, where the equation $c_1\mathbf{v_1}+c_2\mathbf{v_2}+\ldots+c_n\mathbf{v_n}=0$ has only the trivial solution, $c_1=c_2=c_3=0$. $\mathbf{v}_i\in\mathbf{V},\ c_i\in F$

Figura 6.2: A framework for the concept of linear independence

Los autores realizan un experimento con dos grupos de estudiantes, al primer grupo les explicaban el tema de una manera formal, y al segundo grupo les enseñan con más de un tipo de lenguaje, porteriormente se les aplicaba un cuestionario a ambos grupos de estudiantes, para observar que tanto se habían apropiado de los conceptos.

1. Describe the following terms in your own words. (a) Linear combination; (b)span of a set of vectors; (c)linearly independent; (d)basis; (e)subspace; (f)eigenvectors
2. Determine whether $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ lie in the same plane when positioned so their initial points coincide.
   $\mathbf{u}=(1,1,0), \mathbf{v}=(3,0,-1), \mathbf{w}=(1,0,0)$
3. Which one of the following diagrams represents linearly dependent vectors? Explain.

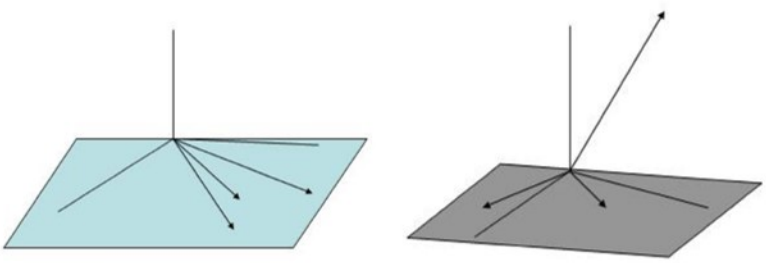


Figura 6.3: The questions used to investigate understanding of linear independence.

Los resultados mostraron que el aprendizaje es muy relativo, depende de cada estudiante y de cómo sea su tipo de aprendizaje para escoger el método más adecuado para enseñarles álgebra a cada uno .

En este trabajo no encontramos ningún desarrollo histórico, como se aprecia en la figura tienen en cuenta los diferentes sistemas de representación, incluso quieren observar si enseñar los conceptos de dependencia e independencia lineal con más de un sistema ayuda a los estudiantes a entenderlos mejor que con solo la presentación formal. Al utilizar la teoría APOE para descomponer los conceptos están presentes los procesos del pensamiento matemático avanzado, incluso al final del documento muestran algunos esquemas que los estudiantes construyen para la dependencia e independencia lineal.

Autores: Marcela Parraguez Gonzáles, Vivian Libeth Uzuriaga López (2014)

Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores.

Los autores en este artículo muestran la importancia que tiene el concepto de combinación lineal en el álgebra lineal,ya que puede ser considerado un concepto generador de otros conceptos, no menos importantes como son: la dependencia e independencia lineal, base, conjunto generador.

Los autores proponen los siguinetes esquemas, una descomposición genética y una célula generadora del concepto de combinación lineal, se presentan.

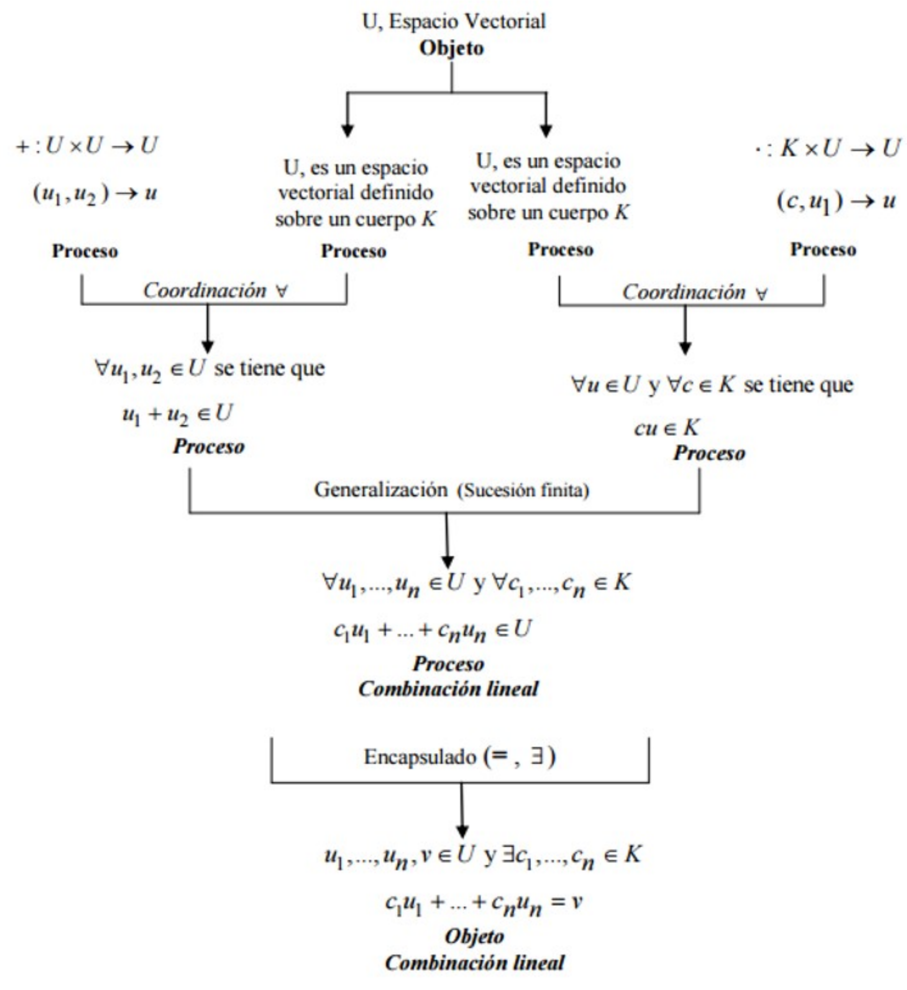


Figura 6.4: Descomposición genética del concepto de combinación lineal.

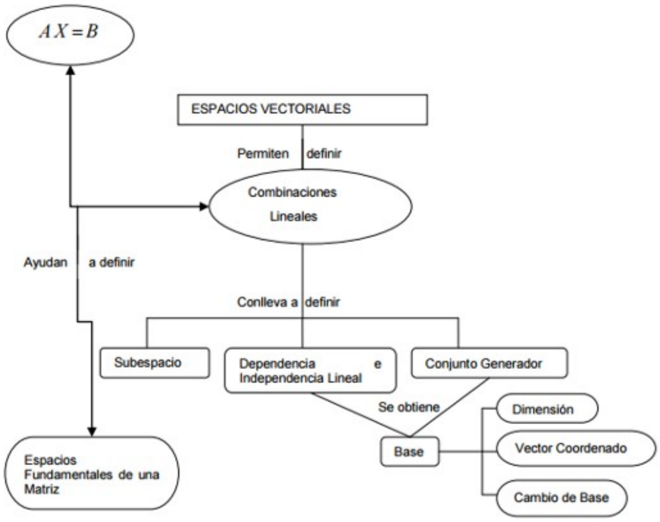


Figura 6.5: Combinación Lineal como célula generadora.

Presentan estas dos graficas, ya que apropiándose de la génesis del concepto se construyen y generalizan con más facilidad los demás conceptos, con la ayuda de la teoría APOE se analizan las construcciones mentales que los estudiantes hacen, y la dificultad que presenta que no vean dichos conceptos como objeto.

En este trabajo no se encuentra historia del concepto de combinación lineal, y el sistema de representación que está presente es el analítico-aritmético. Como trabajan a partir de la teoría APOE están presentes los procesos del pensamiento matemático avanzado, como se puede observar en la descomposición genética, además lo que buscan los autores es identificar las construcciones mentales de los estudiantes.

Autores: Marcela Parraguez Gonzáles, Jorge Bozt Ortiz.

Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y la de solución de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ desde el punto de vista de los modos de pensamiento.

Este artículo los autores quieren analizar las fases del pensamiento que tienen los estudiantes al enfrentarse con los conceptos de dependencia e independencia lineal, en primer lugar quieren descubrir de donde surgen dichos conceptos, haciendo una reseña histórica de los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se estudian las clases de pensamiento que tienen los estudiantes al estudiar álgebra: SG (sintético - geométrico), AA (analítico – aritmético), AE (analítico – estructural).

Los autores proponen las siguientes tareas donde los problemas estan relacionados con el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales.

5. Sean $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (0,1,1)$ tres vectores en $\mathbf{R}^3$, con las operaciones suma y ponderación usuales. Para cualquier combinación lineal de la forma

$$x \cdot (1,1,0) + y \cdot (1,0,1) + z \cdot (0,1,1) = (0,0,0) \qquad (x, y, z \in \mathbf{R})$$

e igualando coordenada a coordenada se obtiene el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & + & z & = & 0 \\ y & + & z & = & 0 \end{array}\right|$$

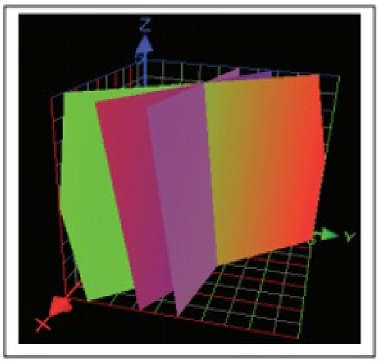
a. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifique su respuesta.

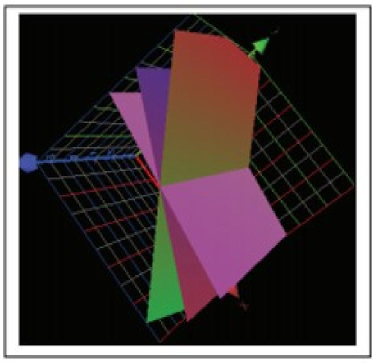
b. ¿El conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ es linealmente independiente? Justifique su respuesta.

6. Sean $\overrightarrow{v_1} = (6,-3,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (-2,1,-4)$ tres vectores en $\mathbf{R}^3$, con las operaciones suma y ponderación usuales. Para cualquier combinación lineal de la forma

$$x \cdot (6,-3,1) + y \cdot (2,-1,1) + z \cdot (-2,1,-4) = (0,0,0) \qquad (x, y, z \in \mathbf{R})$$

e igualar coordenada a coordenada se obtiene un sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, cuya solución gráfica, vista desde distintas posiciones, es: la siguiente:





a. ¿Cuál es el conjunto solución del sistema? Justifique su respuesta.

b. ¿El conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ es linealmente independiente? Justifique su respuesta.

Se puede observar que estas tareas se pueden encontrar mas de un tipo de representación, los autores proponen esto con el fin de ver qué tipo de pensamiento manejan con más frecuencia los estudiantes, y cual de ellos les resulta mas sencillo, quieren analizar como los estudiantes enfrentan las situaciones problemas y como plantean una posible solución y en el caso de que los estudiantes sean capaces examinar como transitan de un tipo de pensamiento al otro.

En este trabajo se aprecia de manera muy completa los sistemas de representación, respecto al pensamiento matemático avanzado se puede apreciar que las tareas van desde la más elemental como los sistemas de ecuaciones lineales, y por último se pregunta de dependencia e independencia lineal, es el proceso de visualización.

Autores: Cerutti, Rubén A. – Adreoli, Daniela I.

Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de universidad (primera fase).

En este artículo los autores reconocen que el álgebra lineal es un curso que se estudia alrededor de todo el mundo, la enseñanza de álgebra se volvió un proceso mecánico y se percibe únicamente como una herramienta para solucionar problemas netamente algorítmicos. es por esto que la mayoría de los estudiantes tienen problemas al apropiarse de ciertos conceptos.

Los autores presentan un esquema de cómo debería ser la enseñanza en los primeros años universitarios, haciendo énfasis en la importancia que tiene el desarrollo histórico para estudiar estos conceptos, Realizan un diagnóstico para observar qué tan claros están estos conceptos en la mente de los estudiantes, a continuación se presentan unas de las tareas propuestas por los autores:

1. ¿El vector $(-3, 2)$ es combinación lineal de los vectores $(0, 1)$ y $(3, 2)$?
2. ¿Los vectores $(-3, 2)$ y $\left(\frac{-3}{2}, 1\right)$ son linealmente dependiente?

La dependencia e independencia lineal no solo puede ser enseñada a través de la definición formal, también poder ser mediante el planteamiento y solución de ecuaciones lineales.

En este trabajo se hace un breve desarrollo histórico del algebra lineal. El registro de representación que predomina es en analítico-aritmético. Con respecto al pensamiento matemático avanzado lo único que se puede resaltar es que antes de formalizar la definición se ve la importancia de estudiar los sistemas de ecuaciones lineales.

Autor: Carmen Aranda, M. Luz Callejo (2010)

Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos.

En este artículo los autores presentan un experimento de enseñanza, con el fin de evidenciar el dominio que poseen los estudiantes respecto al concepto de independencia y dependencia lineal.

En el experimento de enseñanza los autores quieren señalar la versatilidad de lenguajes en los que se puede expresar las nociones del álgebra lineal, lo que pretenden con este experimento es que costruyan el concepto de dependecia lineal a partir de sus caracteristicas, e identifiquen su equivalencia con otros lenguajes.

Los estudiantes a los que se les aplica la prueba ya habian vito el curso previo de álgebra lineal, ayudándose de herramientas tecnológicas, se les pedia que en un programa computacional que manipularan vectores en $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$, para identificar las caracteristicas geometricas que posee la dependencia e independencia lineal.

Uno de los aportes mas importantes que se puede encontrar en este trabajo es un cuadro donde comparan las tareas que proponen, y como se pueden expresar en diversos tipos de leguajes, a continuación se presentara una de las tareas que proponen, para observar lo que pretenden los autores, y el cuadro comparativo que nos presentan estos autores.

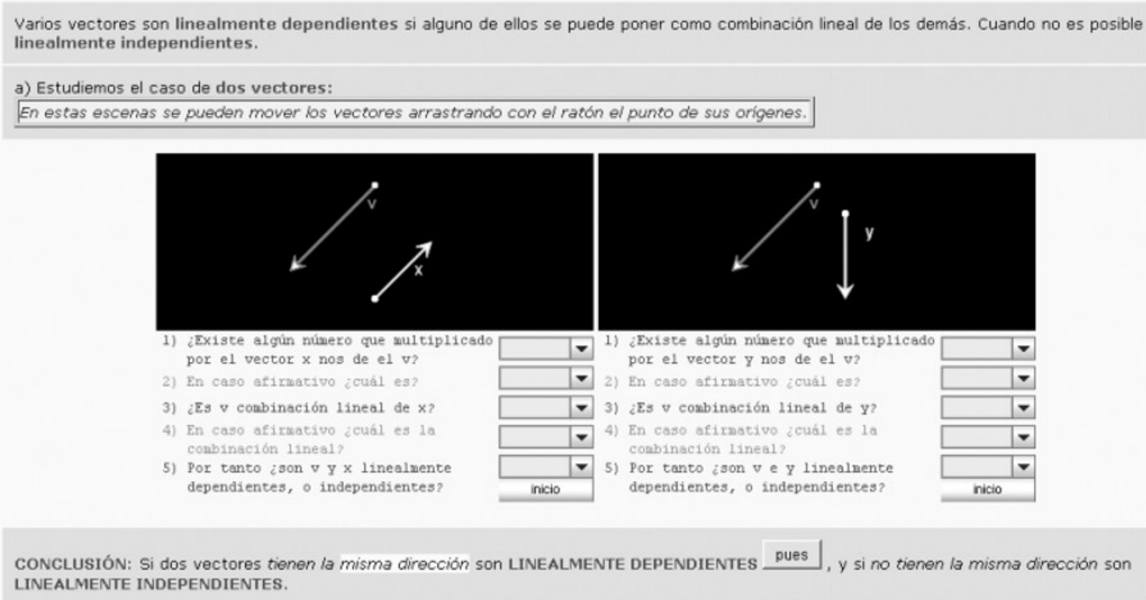


Figura 6.6: Escena correspondiente a la tarea 'dos vectores'.

	Relación entre lenguajes		
Escenas	Geométrico	Analítico	Acciones
Tarea 1: Dependencia lineal de dos vectores en R^2	Representación geométrica de vectores (flechas) $\vec{x}, \vec{v}$ e $\vec{y}, \vec{v}$ paralelos o no paralelos. (Figura 2)	Existe (no existe) un número que multiplicado por el vector $\vec{x}$ ó $\vec{y}$ da el vector $\vec{v}$	Mover los vectores $\vec{x}, \vec{v}, \vec{y}$ cambiando su origen y conservando módulo y dirección. Multiplicar el vector $\vec{v}$ por un escalar para obtener $\vec{x}$
Tarea 2: Dependencia lineal de tres vectores en R^2	Trama de paralelogramos en la dirección de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$. Paralelogramo de lados los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y diagonal el vector $\vec{A}$. (Figura 3)	$t\vec{u}+s\vec{v}=(a_1, a_2)$	Modificar los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{A}$ (módulo, dirección y sentido) pinchando en los extremos.
Tarea 3: Dependencia lineal de tres vectores en R^3	Proyección en el plano de un paralelogramo y una diagonal que están en el espacio, de lados los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y diagonal $t\vec{u}+s\vec{v}$. (Figura 4)	$\vec{u}=(x_u, y_u, z_u)$ $\vec{v}=(x_v, y_v, z_v)$ $t\vec{u} + s\vec{v}=(x_w, y_w, z_w)$	Cambiar coordenadas de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y los escalares t, s.

Figura 6.7: Relación entre lenguajes.

La conclusión a las que llegan los autores es que se puede observar en los resultados que aunque la interpretación geométrica podría ser una alternativa de enseñanza no siempre es la mejor por la dificultad que se presenta al pasar de una representacion a otra.

En este trabajo no tienen en cuenta el desarrollo histórico, el registro de representación sintético-geométrico es el que está más presente. La visualización y la representación son los procesos del pensamiento matemático avanzado que se encuentran, pues manipulando las gráficas se quieren inferir las propiedades de independencia y dependencia lineal.

Capítulo 7

Revisión de textos.

7.1. Álgebra Lineal.

ÁLGEBRA LINEAL
Stanley I. Grossman, Jose Job Flores Godoy.
Editorial Mc Graw Gil.
Septima edición.

En este texto el concepto de la dependencia e independencia lineal se encuentra en el capítulo 5, este capítulo esta dedicado al desarrollo de espacios vectoriales.

CAPITULO 5: ESPACIOS VECTORIALES

5.1 Definición y propiedades básicas.

5.2 Subespacios vectoriales.

5.3 Combinación lineal y espacio generado.

5.4 Independencia lineal.

5.5 Bases y dimensión.

5.6 Cambio de bases.

5.7 Rango, nulidad, espacio región y espacio columna.

5.8 Fundamentos de la teoría de espacios vectoriales: existencia de una base (opcional).

Ejemplo 7.1 *¿Qué tienen de especial los vectores* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$ *?*
Así es sencillo verificar que $v_3 = 3v_1 + 2v_2$*, se obtiene el vector cero de la forma*

$$3v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$$

se pudo escribir el vector cero de una manera no trivial, es decir, con coeficientes diferentes de 0 *se dice que los vectores son linealmente dependientes.*

Definición 7.2 *Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependiente si existen $c_1, c_2, ..., c_n$ no todos cero tales que*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dicen que son linealmente independientes.

Teorema 7.3 *Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es múltiplo escalar de otro.*

Ejemplo 7.4 *Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en R^3*
Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ *son linealmente dependientes o independientes.*
SOLUCIÓN
Suponga que $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *Entonces multiplicando y sumando se obtiene* $\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 7c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Esto lleva al sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas c_1, c_2, c_3*

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 0 \\ -2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 7c_3 = 0 \end{gathered}$$

De este modo, los vectores serian linealmente dependiente si y sólo si el sistema tiene soluciones no triviales. Se escribe el sistema usando la matriz aumentada y despues se reduce por renglones. La forma escalonada reducida por renglones de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ -2 & -2 & 1 & | & 0 \\ 3 & 0 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} es \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Este último sistema de ecuaciones se lee $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Por tanto no tiene soluciones no triviales y los vectores dados son linealmente dependiente.

Interpretación geométrica:
Suponga que u, v y w son tres vectores lineamente dependientes en R^3. se pueden tratar los vectores como si tuvieran un punto terminal en el origen. Entonces existen costantes c_1, c_2 y c_3, no todos cero, tales que

$$c_1u + c_2v + c_3w = 0$$

Suponga que $c_3 \neq 0$. Entonces se pueden dividir ambos lados entre c_3 y reacomodar los términos para obtener

$$w = -\frac{c_1}{c_3}u - \frac{c_2}{c_3}v = Au + Bv$$

donde $A = -c_1/c_3$ y $B = -c_2/c_3$. Ahora se probara que u, v y w son cooplanares. Se calcula

$$w \cdot (u \times v) = (Au \times Bv) = A[u \cdot (u \times v)] + B[v \cdot (u \times v)] = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$$

porque u y v son ortogonales a $v \times v$. Sean $n = 0$, entonces u y v son paralelos. Así u, v y w estan en cualquier plano que contiene tanto a u como a v y por consiguiente son cooplanares. Si $n \neq 0$ entonces u y v estan el plano que consiste en aquellos vectores que pasan por el origen que son ortogonales a n. Pero w esta en el mismo plano porque $w \cdot n = w \cdot (u \times v) = 0$. Esto muestra que u, v y w son cooplanares.

Se concluye que:

Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y soló si son coplanares.

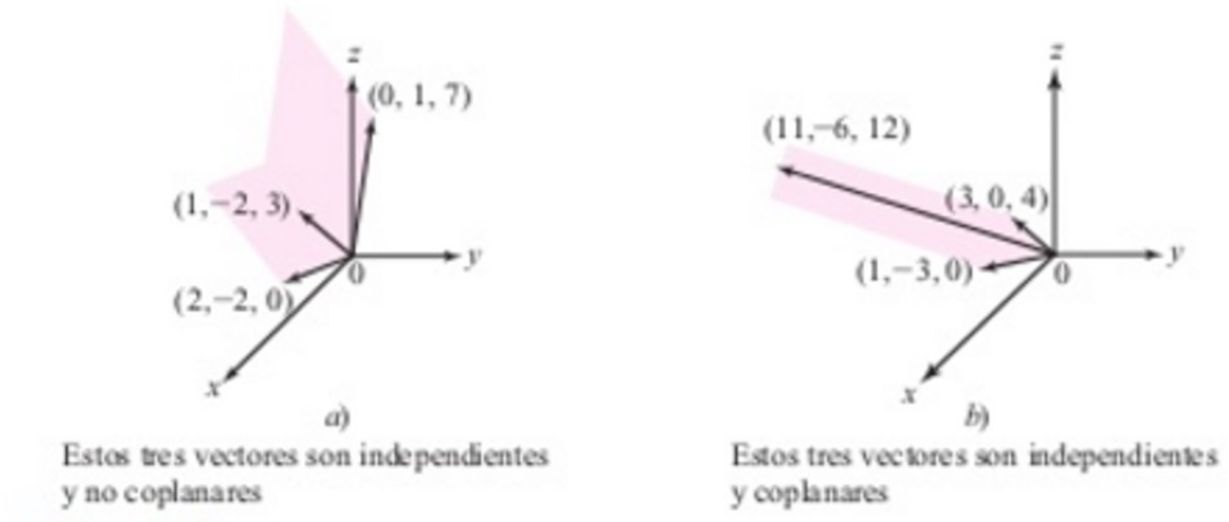


Figura 7.1: Interpretación geométrica. Dos conjuntos de tres vectores

Teorema 7.5 *Un conjunto de n vectores en R^m es siempre linealmente dependiente si $n > m$.*

Ejemplo 7.6 *Los vectores* $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ *son linealmente dependientes ya que constituyen un conjunto de cuatro vectores de tres elementos.*

Corolario 7.7 *Un conjunto de vectores linealmente dependientes en R^n contiene a lo sumo n vectores.*

Teorema 7.8 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces las columnas de A consideradas como vectores son linealmente dependientes si y sólo si el sistema

$$\begin{gathered} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = 0. \end{gathered}$$

Que se puede escribir como $Ac = 0$, tiene soluciones no triviales, donde $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Ejemplo 7.9 *Considere el sistema homogéneo*

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{gathered}$$

Haciendo una reducción de reglones se tiene en el sistema

$$\begin{gathered} x_1 - 9x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{gathered}$$

Se ve que este sistema tiene un número infinito de soluciones, que se escriben como una combinación lineal de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observe que

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son soluciones linealmente independientes porque ninguno de los dos es múltiplo de otro. Como x_3 y x_4 números reales arbitrarios, se ve que el conjunto de soluciones al sistema es un subespacio de R^4 generado por estos dos vectores solución linealmente independientes.

Teorema 7.10 *Sean $v_1, V_2, ..., v_n$, n vectores en R^n y sea A una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $v_1, V_2, ..., v_n$. Entonces $v_1, V_2, ..., v_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solucion al sistema homogéneo $Ac = 0$ es la solución trivial $x = 0$.*

Teorema 7.11 *Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.*

Teorema 7.12 *Sea A una matriz de $n \times n$, Entonces las ocho afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $As = 0$ es la solucion trivial $(x = 0)$.

iii) El sistema $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n b.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

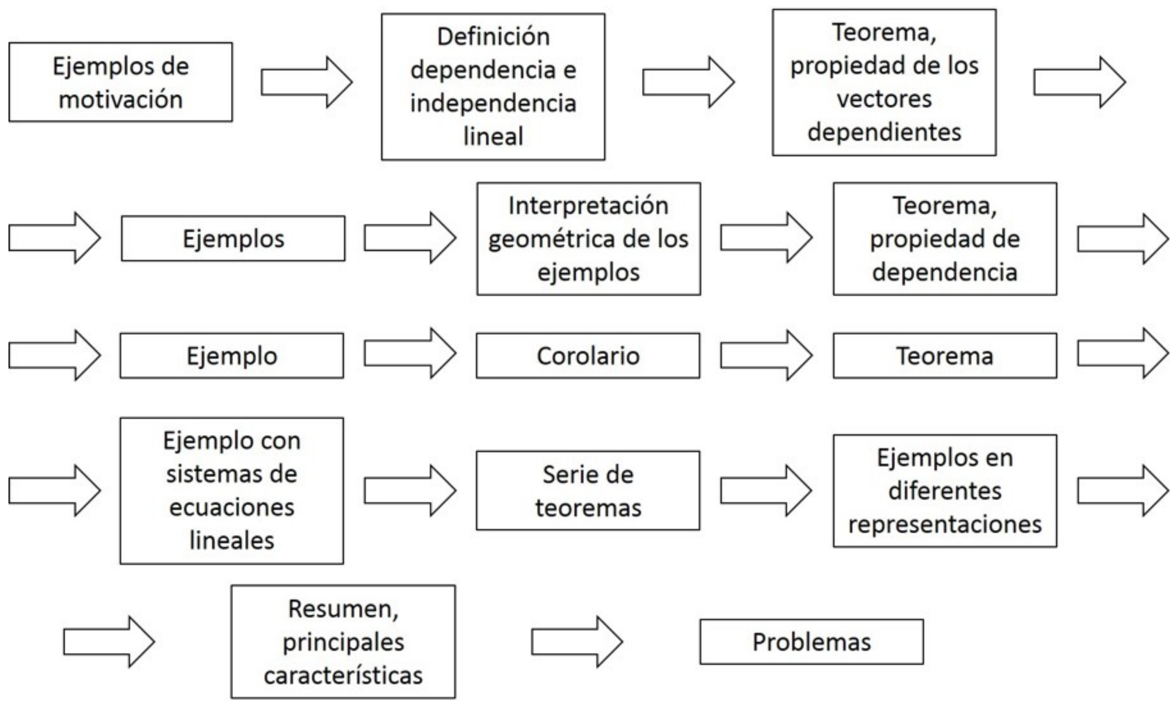
vii) det $A \neq 0$.

viii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

Teorema 7.13 *Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n genera a R^n.*

En la parte final de este capítulo se presentan unos ejemplos, un resumen de todo lo desarrollado, y una serie de ejercicios.

Organización del texto



7.2. Teoria y Problemas de Álgebra Lineal.

TEORIA Y PROBLEMAS DE ALGRBRA LINEAL
Seymour Lipschutz.
McGraw-Hill

En este libro los conceptos de la dependencia e independencia lineal se presenta en el capítulo 5.

Capítulo 5: BASE Y DIMENSIÓN
Introducción.
Dependencia lineal.
Bases y dimensión.
Dimensión y subespacios.
Rango de una matriz.

Aplicaciones a las ecuaciones lineales.
Coordenadas.

Definición 7.14 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Se dice que los vectores $v_1, ..., v_m \in V$ son linealmente dependientes sobre K, o simplemente dependientes si existen escalares $a_1, ..., a_m \in K$ no todos 0, tales que*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_mv_m = 0$$

En caso contrario, se dice que los vectores son linealmente independientes sobre K, o simplemente independientes.

Ejemplo 7.15 *Mostramos que los vectores $u = (6, 2, 3, 4)$, $v = (0, 5, -3{,}1)$ y $w = (0, 0, 7, -2)$ son independientes. Supongamos que $xu+yv+zw = 0$ donde x, y y z son escalares desconocidos. Entonces*

$$\begin{aligned}(0, 0, 0, 0) &= x(6, 2, 3, 4) + y(0, 5, -3, 1) + z(0, 0, 7, 2)\\ &= (6x, 2x + 5y, 3x - 3y + 7z, 4x + y - 2z)\end{aligned}$$

y luego, igualando las componentes correspondientes.

$$\begin{aligned}6x &= 0\\ 2x + 5y &= 0\\ 3x - 3y + 7z &= 0\\ 4x + y - 2z &= 0\end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene que $x = 0$; de la segunda ecuación se obtiene $y = 0$; y de la tercera ecuación con $x = 0$ y $y = 0$ se obtiene que $z = 0$. Por tanto

$$xu + yv + zw = 0 \quad \textit{implica} \quad x = 0, y = 0, z = 0$$

En consecuencia u, v y w son linealmente independientes.

Teorema 7.16 *Las filas distintas de cero de una matriz en forma escalonada son linealmente independientes.*

Lema 7.17 *Los vectores $v_1, ..., v_m$ distintos de cero son linemalmente dependientes si y sólo si uno de ellos, por ejemplo v_i, es una combinación lineal de los vectores anteriores a él*

$$v_i = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_{i-1}v_{i-1}$$

Observación 1. El conjunto $\{v_1, ..., v_m\}$ se llama un conjunto dependiente o independiente según sean los vectores $v_1, ..., v_m$ dependientes o independientes. Definimos el conjunto $\varnothing$ como independientes.

Observación 2. Si dos de los vectores $v_1, ..., v_m$ son iguales, por ejemplo $v_1 = v_2$, entoces los vectores son dependientes. Pues

$$v_1 - v_2 + 0v_3 + ... + 0v_m = 0$$

y el coeficiente de v_1 no es 0

Observación 3. Dos vectores v_1 y v_2 son dependientes si y sólo si uno de ellos es múltiplo del otro.

Observación 4. Un conjunto que contiene un subconjunto dependiente es a su vez dependiente. Por tanto, cualquier subconjunto de un conjunto independiente es independiente.

Observación 5. Si el conjunto $\{v_1, ..., v_m\}$ es dependiente, entonces cualquier reordenación de los vectores $\{v_{i_1}, v_{i_2} ..., v_{i_m}\}$ tambien es independiente.

Observación 6. en el espacio real R^3, se puede describir geométricamente la dependencia de vectores de la manera siguiente: dos vectores u y v son dependientes si y sólo si están situados sobre una misma recta que pasa por el origen; y tres vectores u, v y w son dependientes si y sólo si están situados sobre un mismo plano que pasa por el origen.

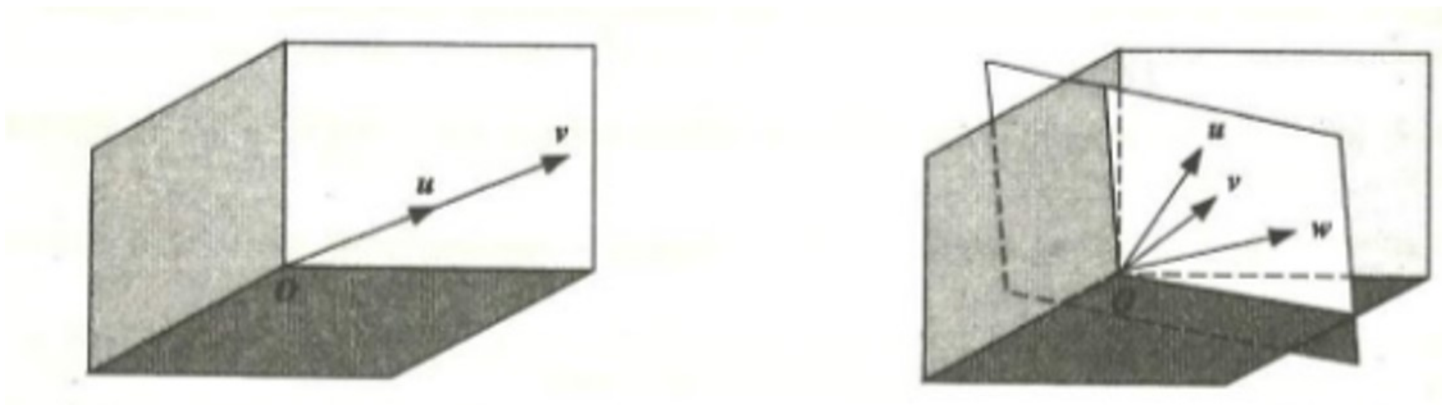
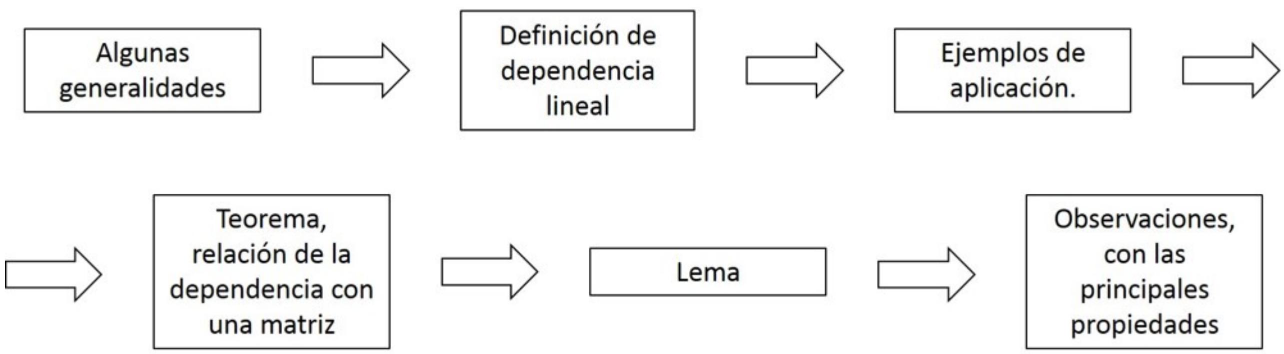


Figura 7.2: Observación 6.

Organización del texto



7.3. Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.

ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES
David Lay.
Tercera edición.

En este texto los conceptos de la dependencia e independencia lineal se encuentra en el capitulo 1.

CAPITULO 1: ECUACIONES LINEALES EN ÁLGEBRA LINEAL

El autor inicia planteando el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.18 *Considere la ecuación*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esta ecuacion tiene una solución trivial, donde $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, el aspecto principal es considerar si es la solución trivial única.

Definición 7.19 *Un conjunto de vectores indexado $\{v_1, ..., v_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial*

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_pv_p = \boldsymbol{0}$$

tiene únicamente la solución trivial. El conjunto $\{v_1, ..., v_p\}$ es linealmente dependiente si existen pesos $c_1, ..., c_p$ no todos iguales a cero, tales que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_pv_p = \boldsymbol{0}$$

Ejemplo 7.20 *Sean* $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a. Determine si el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.

b. Si es posible, encuentre una relacion de dependencia entre v_1, v_2, v_3.

SOLUCIÓN:

a. *Debe determinarse si hay una solucion no trivial de la ecuación anterior. Usando operaciones elementales de fila en la matriz aumentada asociada muestre que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es claro que x_1 *y* x_2 *son las variables básicas mientras que* x_3 *es libre. Cada valor diferente de cero de* x_3 *determina una solucion no trivial. Por tanto,* v_1, v_2, v_3 *son linealmente dependientes.*

b. *Para encontrar una relación de dependencia lineal entre* v_1, v_2, v_3, *realice una reduccion por filas completa a la matriz aumentada y escriba el nuevo sistema*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Así $x_1 = 2x_3$, $x_2 = -x_3$ *y* x_3 *es libre. Seleccione cualquier valor distinto de cero para* x_3, *por ejemplo* $x_3 = 5$. *Entonces,* $x_1 = 10$ *y* $x_2 = -5$. *Sustituya valores y obtenga*

$$10v_1 - 5v_2 + 5v_3 = 0$$

esta es una posible relación (existe una infinidad) de dependencia lineal entre v_1, v_2, v_3.

Las columnas de una matriz A *son linelmente independientes si y sólo si la ecuación* $Ax = 0$ *tiene unicamente la solución trivial.*

Ejemplo 7.21 *Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes*

a. $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

b. $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

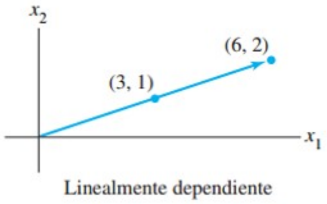
SOLUCIÓN

a. *Observe que* v_2 *es un multiplo escalar de* v_1, *a saber,* $v_2 = 2v_1$. *Por lo tanto,* $-2v_1 + v_2 = 0$, *lo cual muestra que* $\{v_1, v_2\}$ *es linealmente dependiente.*

b. *Desde luego, los vectores* v_1 *y* v_2 *no son multiplos uno del otro. ¿Podrían ser linealmente independientes? Suponga que* c *y* d *satisfacen*

$$cv_1 + dv_2 = 0$$

si $c \neq 0$, *entonces* v_1 *puede resolverse en terminos de* v_2, *a saber,* $v_1 = (d/c)v_2$. *Este resultado es imposible porque* v_1 *no es múltiplo de* v_2. *Así que* c *debe ser cero. De manera similar,* d *debe ser tambien cero. Por tanto,* $\{v_1, v_2\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*



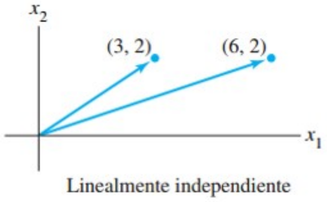


Figura 7.3: Interpretación geométrica del ejemplo 6.21

Un conjunto de dos vectores $\{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es múltiplo del otro. El conjunto es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo del otro.

Teorema 7.22 *Un conjunto indezado $S = \{v_1, ..., v_p\}$ de dos o más vectores es linealmente dependientes si y sólo si, al menos uno d elos vectores presentes en S es una combinación lineal de los otros. De hecho, si S es linelmente dependiente y $v_1 \neq 0$, entonces algún v_j (con $j > 1$) es una combinacion linal de los vectores precedentes, $v_1, ..., vj - 1$.*

Ejemplo 7.23 *Sean $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$. Describa el conjunto generado por u y v, y explique por que un vector w esta en Gen$\{u, v\}$ si y sólo si $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente.*
SOLUCIÓN
Los vectores u y v son linealmente independientes, porque ninguno es múltiplo escalar del otro, así que generan un plano en $\mathbb{R}^3$. De hecho, Gen$\{u, v\}$ es el plano x_1x_2 (con $x_3 = 0$). Si w es una combinación lineal de u y de v, entonces $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente. Por otra parte suponga que $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente, algun vector en $\{u, v, w\}$ es una combinacion lineal de los vectores anteriores, puesto que $u \neq 0$ este vector debe ser w ya que v no es multiplo de u. Por lo tanto, w esta en Gen$\{u, v\}$.

Teorema 7.24 *Si un conjunto contiene más vectores que entradas en cada vector, entonces es linealmente dependiente. Esto es que cualquier conjunto $\{v_1, ..., v_p\}$ en $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente si $p > n$.*

Ejemplo 7.25 *Los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes, debido a que hay tres vectores en el conjunto y sólo dos entradas en cada vector. Sin embargo, observe que ninguno de los vectores es múltiplo de alguno de los otros vectores.*

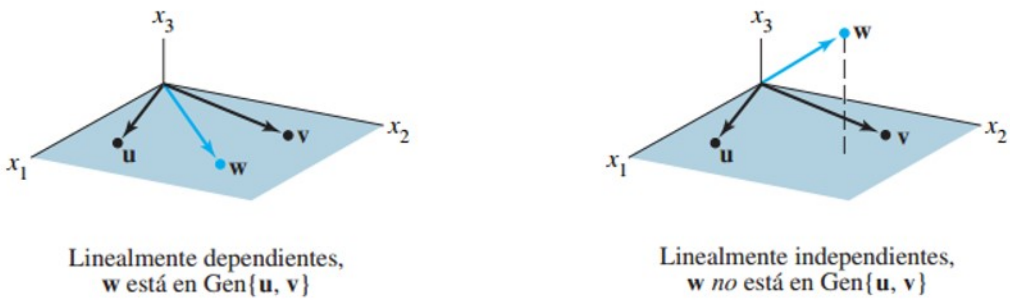


Figura 7.4: Dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$

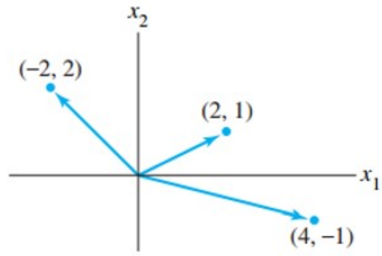
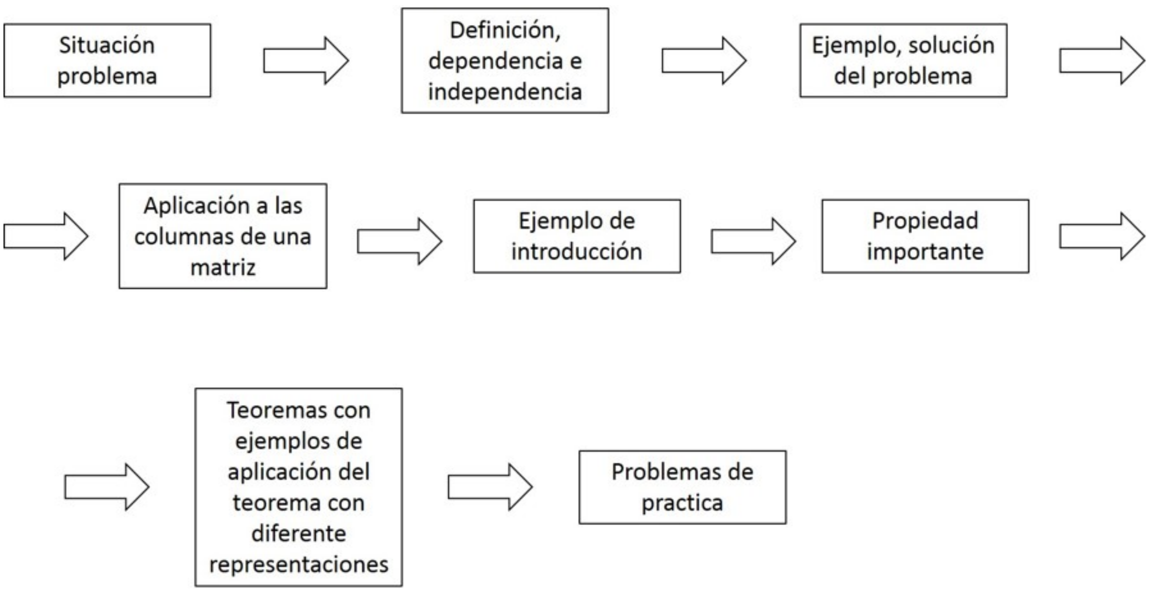


Figura 7.5: Ejemplo 6.25. Un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^2$

Teorema 7.26 *Si un conjunto* $S = \{v_1, ..., v_p\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *contiene el vector cero, entonces el conjunto es linealmente dependiente.*

Organización del texto



7.4. Linear Álgebra.

LINEAR ÁLGEBRA
Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence
Prentice Hall

Este texto es uno de los libros más utilizados cuando se estudia álgebra lineal de una manera rigurosa. Como el idioma original del texto es ingles, se respetará este hecho y se realizará la presentación en dicho idioma.
El primer capítulo esta destinado al estudio de espacios vectoriales dentro de este se contempla el estudio de los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Definición 7.27 *A subset S of a vector space V is called* linear dependent *if there exist a finite number of distinct vectors $u_1, u_2, ..., u_n$ in S and scalars $a_1, a_2, ..., a_n$ not all zero, such that*

$$a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 0$$

In this case we also say that the vectors of S are linear dependent.

Ejemplo 7.28 *Consider the set*

$$S = \{(1, 3, -4, 2), (2, 2, -4, 0), (1, -3, 2, -4), (-1, 0, 1, 0)\}$$

in R^4. We show that S is linearly dependent and then express one of the vectors in S as a linear combination of the other vectors in S. To show that S is linearly dependent, we must find scalars a_1, a_2, a_3 and a_4, not all zero such that

$$a_1(1, 3, -4, 2) + a_2(2, 2, -4, 0) + a_3(1, -3, 2, -4) + a_4(-1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Finding such scalars amounts to finding a nonzero solution to the system of linear equations

$$\begin{gathered} a_1 + 2a_2 + a_3 - a_4 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \\ -4a_1 - 4a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ 2a_1 - 4a_3 = 0 \end{gathered}$$

One such solution is $a_1 = 4$, $a_2 = -3$, $a_3 = 2$ and $a_4 = 0$ thus linearly dependent subset of R^4, and

$$4(1, 3, -4, 2) - 3(2, 2, -4, 0) + 2(1, -3, 2, -4) + 0(-1, 0, 1, 0) = 0$$

.

Definición 7.29 *A subst S of a vector space that is not linearly dependent is called* linearly independent. *As before, we also say that the vectors of S are linear independent.*

The following facts about linearly independent sets are true in any vector space.

1. The empty set is linearly independent, for linearly dependent sets must be non empty.

2. A set consisting of a single non zero vector is linearly independent. For if $\{u\}$ is linearly dependent, then $au = 0$ for some non zero scalar a. Thus

$$u = a^{-1}(au) = a^{-1}0 = 0$$

3. A set is linearly independent if and only if the only representations of 0 as linear combinations of its vectors are trivial representation.

Ejemplo 7.30 *To prove that set*

$$S = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$$

is linearly independent, we must show that the only linearly combination of vectors in S that equal the zero vectors is the one in which all the coefficients are zero. Suppose that a_1, a_2, a_3 and a_4 are scalars such that

$$a_1(1,0,0,-1) + a_2(0,1,0,-1) + a_3(0,-0,1,-1) + a_4(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

Equating the corresponding coordinates of the vectors on the left and the right sides of this equation, we obtain the following system of linear equations.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

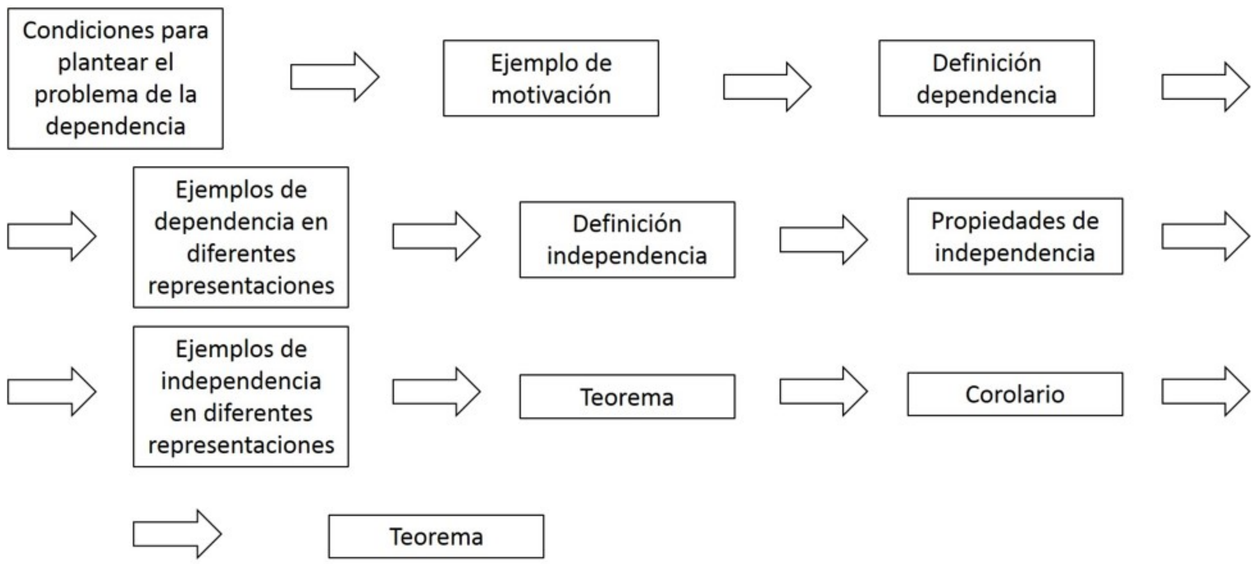
Clearly the only solution to this system is $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, and so S in linearly independent.

Teorema 7.31 *Let V a vector space, and let $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. If S_1 is linearly dependent, them S_2 is linearly dependent.*

Corolario 7.32 *Let V a vector space, and let $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. If S_2 is linearly independent, them S_1 is linearly independent.*

Teorema 7.33 *Let S Be a linearly independent subset of a vector space V, and let v be a vector in V that is not in S. Them $S \cup \{v\}$ is linearly dependen if and only if $v \in span(s)$.*

Organización del texto



7.5. Álgebra Lineal

ÁLGEBRA LINEAL
Fraleigh Beauregard
Addison-Wesley Iberoamericana

En este libro los conceptos de la dependencia e independencia lineal se presenta en el capítulo 3.

3. ESPACIOS VECTORIALES

3.1 Geometría en $\mathbb{R}^n$.

3.2 Espacion vectoriales y algebra en $\mathbb{R}^n$.

3.3 Conbinación lineal y subespacios.

3.4 Independencia y bases.

3.5 Dimensión y rango.

Definición 7.34 *Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ de vectores en un espacio vectorial V es linealmente dependiente si existe una relación de dependencia.*

$$r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_kv_k = \boldsymbol{0}, \quad \text{para algun} \;\; r_j \neq 0.$$

Dependencia de un conjunto de vectores distintos de cero
Una lista finita de vectores distintos de cero en un espacio vectorial V es linealmente dependiente si, y sólo si, algún vector de la lista ees igual a una combinación lineal de sus predecesores.

Definición 7.35 *Un conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *de vectores en un espacio vectorial* V *es linealmente independiente si no existe ninguna relación de dependencia, de modo que* $r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_kv_k = \boldsymbol{0}$, *sólo ai todos los coeficientes* r_i *son cero.*

Independencia de un conjunto de vectores distintos de cero
Una lista de vectores distintos de cero de un espacio vectorial V es linealmente independiente si, y sólo si, níngun vector de la lista es igual a una combinación lineal de sus predecesores.

Teorema 7.36 *Sea* A *una matriz de* $n \times k$. *El sistema homogéneo* $Ax = \boldsymbol{0}$ *no tiene solución no trivial si, sólo si, los vectores columnas de* A *son independientes.*

Cualquier conjunto de más de n vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.

Ejemplo 7.37 *Determinar si los vectores* $(1, -2, 1), (3. - 5, 2), (2, -3, 6)$ *y* $(1, 2, 1)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *son independientes.*
SOLUCIÓN
Como hay mas vectores que las 3 componentes, los vectores son dependientes.

Teorema 7.38 *Sean* $v_1, v_2, ..., v_n$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *Los vectores son independientes.*
2. *Los vectores generan todo* $\mathbb{R}^n$.
3. *La matriz* A *que tiene estos vectores como vectores columna es invertible.*

Ejemplo 7.39 *Mostrar que* $\{x, x^2\}$ *es un conjunto independiente de funciones en el espacio vectorial* F *de todas las funciones que tranaforman* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$.
SOLUCIÓN
Supóngase que tenemos las relación de la forma

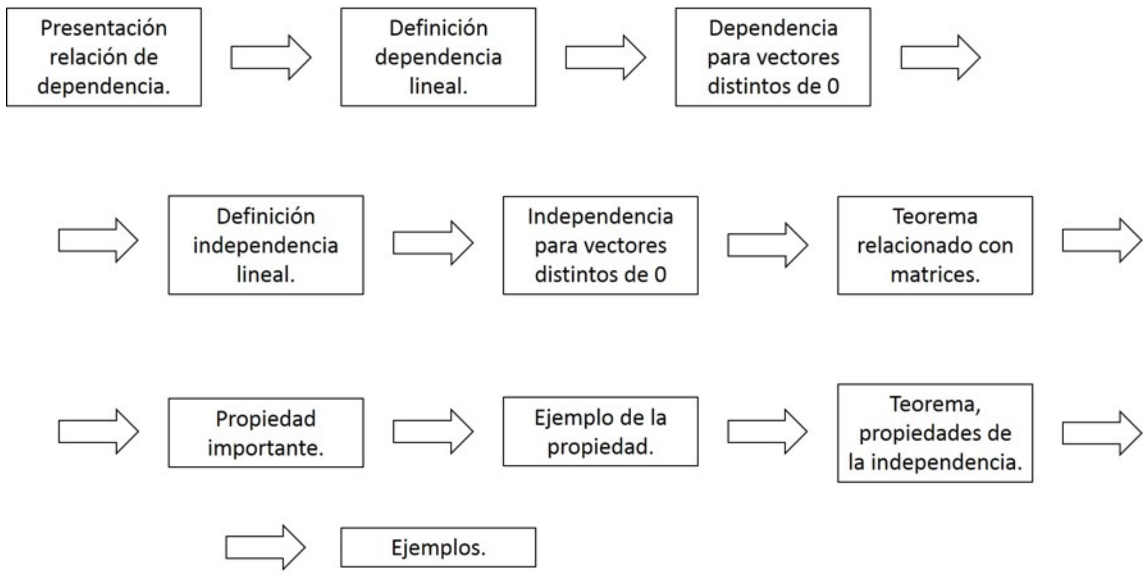
$$r_1x + r_2x^2 = \boldsymbol{0}.$$

Donde consideramos que $\boldsymbol{0}$ *es la función cero. Al evaluar esta ecuación para* $x = 1$ *y para* $x = -1$, *obtenemos*

$$\begin{array}{rl} r_1 + r_2 = 0 & \textit{tomando } x = 1 \\ -r_1 + r_2 = 0 & \textit{tomando } x = -1 \end{array}$$

Hallamos fácilmente que estas dos ecuaciones de cos incógnitas, r_1 *y* r_2 *tienen sólo la solución trivial* $r_1 = r_2 = 0$. *de la definición 35 resulta que* x *y* x^2 *son independientes en el espacio vectorial* F.

Organización del texto



7.6. Calculus.

CALCULUS - TOMO I
Tom M. Apostol
Reverté

12. ÁLGEBRA VECTORIAL

12.1 Introducción histórica.

12.2 El espacio vectorial de las n-plas de números reales.

12.3 Interpretación geometrica para $n \leq 3$.

12.4 Ejercicios.

12.5 Producto escalar.

12.6 Longitud o norma de un vector.

12.7 Ortogonalidad de vectores.

12.8 Ejercicios.

12.9 Proyecciones. Ángulo de dos vectores en el espacio de n dimensiones.

12.10 Los vectores coordenados unitarios.

12.11 Ejercicios.

12.12 Envolvente lineal de un conjunto infinito de vectores.

12.13 Independencia lineal.

12.14 Bases.

12.15 Ejercicios.

12.16 El espacio vectorial $V_n(C)$ de n-plas de números complejos.

12.17 Ejercicios.

Sea $S = \{A_1, ..., A_k\}$ un conjunto no vacío que consta de k vectores de V_n, donde k es el número de vectores, puede ser menor, igual o mayor que n, la dimensión del espacio. Si un vector X de V_n puede representarse como combinacion lineal de $A_1, ..., A_k$

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i$$

se dice que S genera al vector X

El conjunto de todos los vectores generados por S se denomina *envolvente lineal* se S y se designa por $L(S)$

Un conjunto S genera un vector cualquiera de $L(S)$ con unicidad si y sólo si S genera con unicidad al vector cero.

Definición 7.40 *Un conjunto $S = \{A_1, ..., A_k\}$ que genera con unicidad el vector cero se denomina conjunto de vectores* linealmente independientes*. De no ser asi S es un conjunto* linealmente dependiente*.*

Dicho de otro modo, la independencia significa que S genera 0 únicamente con la repesentacion trivial

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = 0 \ \ \textit{implica todo } c_i = 0$$

La dependencia significa que S genera 0 en alguna forma no trivial. Esto es, para unos ciertos escalares $c_1, ..., c_k$. tenemos.

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = 0 \ \ \textit{pero no todo } c_i = 0$$

Ejemplo 7.41 *Si un subconjunto T de un conjunto S es dependiente, el mismo S es dependiente, porque si T genera O en forma no trivial, lo mismo hace S. Esto es lógicamente.*

Teorema 7.42 *Sea $S = \{A_1, ..., A_k\}$ un conjunto linealmente independiente de k vectores de V_n, y sea $L(S)$ la envolvente lineal de S. Todo conjunto de $k+1$ vectores de $L(S)$ es linealmente dependiente.*

Definición 7.43 *Un conjunto de vectores $S = \{A_1, ..., A_k\}$ de V_n se denomina ortogonal si $A_i \cdot A_j$ siempre que $i \neq j$. Dicho de otro modo, dos vectores distintos cualesquiera de un conjunto ortogonal, son perpendiculares.*

Teorema 7.44 *Cualquier conjunto ortogonal $S = \{A_1, ..., A_k\}$ de vectores no nulos de V_n es linealmente independientes. Ademas si S genera el vector X. sea este*

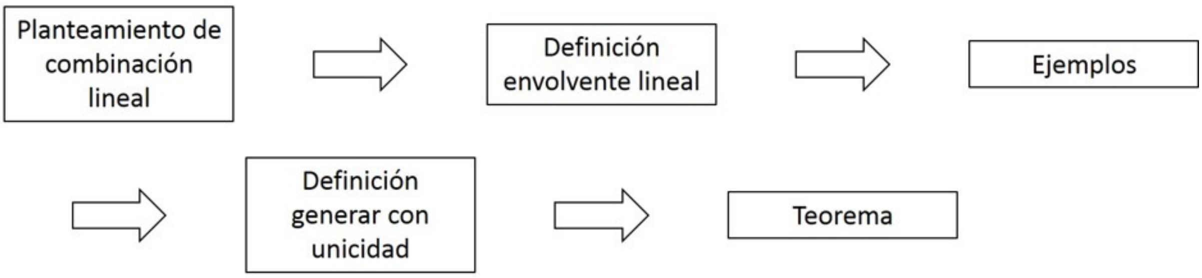
$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i$$

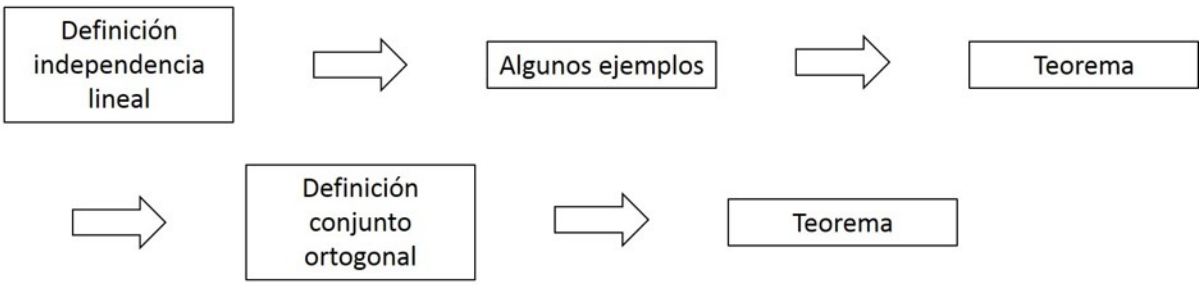
entonces los factores escalares $c_1, ..., c_k$ vienen dados por las formulas

$$c_j = \frac{X \cdot A_j}{A_j \cdot A_j} \quad para\ j = 1, 2, ..., k$$

.

Organización del texto





7.7. Definiciones

TEXTO	INDEPENDENCIA	DEPENDENCIA
Álgebra lineal-Grossman	NEGACIÓN Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V ,son linealmente independientes si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$ Implica que $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$.	Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos ceros tales que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$.
Teoría y problemas de álgebra lineal-Lipschutz	NEGACIÓN Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectores linealmente independientes en un espacio vectorial sobre un cuerpo K, si $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0$ Implica $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_m = 0$.	Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Se dice que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ son linealmente dependientes sobre K, si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K$ no todos 0 tales que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0$.
Álgebra lineal y sus aplicaciones-Lay	Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0$ Tiene únicamente la solución trivial.	El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ no todos iguales a cero tales que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p = 0$.
Linear algebra-Friedberg	Un subconjunto S de un espacio vectorial V que no es linealmente dependiente es llamado linealmente independiente.	Un subconjunto S de un espacio vectorial V es llamado linealmente dependiente si existe un numero finito de vectores distintos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en S y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no todos ceros tales que $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = 0$.
Álgebra lineal-Fraleigh	Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ en un espacio vectorial V es linealmente independiente si no existe ninguna relación de dependencia, de modo que $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = 0$ Sólo si todos los coeficientes r_i son cero.	Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ en un espacio vectorial V es linealmente dependiente si existe una relación de dependencia $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = 0$ Para algún $r_j \neq 0$.
Calculus-Apostol	Un conjunto $S = \{A_1, , \ldots, A_k\}$ que genera con unicidad el vector cero se denomina conjunto de vectores linealmente independiente. La independencia significa que S genera a 0 únicamente con la representación trivial $\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = 0$, para todo $c_i = 0$	S genera al vector 0 en alguna forma no trivial. Para unos ciertos escalares $c_1, \ldots, c_k$, tenemos $\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = 0$, pero no todo $c_i = 0$

Figura 7.6: Cuadro comparativo de las definiciones. Los recuadros con fondo azul son la definiciones en los libros.

¿Qué definición sería más apropiada desde el punto de vista de la enseñanza?

En el texto Álgebra lineal – Fraleigh encontramos los conceptos de dependencia e independencia por separado, aunque un concepto es el opuesto del otro no le dejan la negación al lector, es la más apropiada porque si nos fijamos en el texto primero se muestra lo que es la relación de dependencia donde definen los escalares, y al momento de enunciar la dependencia lineal definen el espacio vectorial y el subconjunto, lo que simplifica la definición, a partir de ahí se aprecia la condición para que se cumpla da dependencia.

¿Qué definición sería más apropiada desde el punto de vista del aprendizaje?

En el texto Teoría y aplicaciones de álgebra lineal – Lay primero se encuentra el concepto de independencia lineal, el cual es más sencillo pues es más fácil suponer que todos los escalares son cero, en cambio el condicional existe de la dependencia lineal implica encontrar el escalar que es distinto de cero y mostrar cual es. Además la definición está escrita para el caso particular de vectores en $\mathbb{R}^n$, en una sección del libro más adelante se generaliza la definición para cualquier espacio vectorial, lo que sigue el proceso de generalización del pensamiento matemático avanzado. También se observa que presentan los conceptos de dependencia aparte del de independencia y no los presentan como opuestos.

Capítulo 8

Esquema o descomposición genética del concepto

A continuación se propone el siguiente esquema para el concepto de independencia lineal.

Figura 8.1: Descomposición genética propuesta de independencia lineal.

Para complementar este esquema se deben presentar tareas apropiadas para complementarlo, como por ejemplo: problemas de sistemas de ecuaciones lineales (homogéneo y no homogéneo), vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, rectas que se cortan, algunas podrían ser las extraidas de los antecedentes de investigación, por ejemplo:

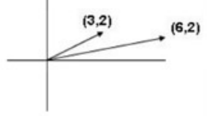
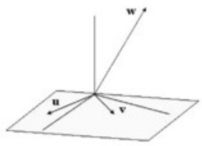
Worlds APOS	Embodied World	Symbolic World: Algebraic Rep.	Symbolic World: Matrix Rep.	Formal World
Action	Can draw two specific linearly independent vector 	Can arrange $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = 0$ to get a linear combination $v_1 = -\frac{c_2}{c_1}v_2 - \frac{c_3}{c_1}v_3, c_1 \neq 0$ (To show dependent)	$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ This equation has trivial solution, where $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Also $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vectors are not multiples, or linear combination of each other.	
Process	Can show any 3 linear independent vectors 	Can see that for linearly dependent vectors one can always be written as a linear combination of the others.	Can relate linear independence and dependence to row-reduced echelon form of a relevant matrix.	Can see processes that relate linear independence to other linear algebra concepts such as: linear combination, span, rank and basis.
Object	Any two vectors define a plane, and if the third vector does not lie on the same plane means vectors are independent.	Can think of a set of linearly independent vectors, $\mathbf{v}_i$ as an entity and can use it eg as a basis.	Can think of a matrix as a set of linearly independent vectors $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \ldots, a_{ni})$ and as an entity, and can use it eg as a basis.	Understands the formal definition, where the equation $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\mathbf{v_n} = 0$ has only the trivial solution, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V},\ c_i \in F$

Figura 8.2: Fuente: Stewart S. y Thomas M. O. J.. Embodied, symbolic and formal thinking for linear combination, and independence in linear algebra.

Escenas	Relación entre lenguajes: Geométrico	Relación entre lenguajes: Analítico	Acciones
Tarea 1: Dependencia lineal de dos vectores en R^2	Representación geométrica de vectores (flechas) $\vec{x}, \vec{v}$ e $\vec{y}, \vec{v}$ paralelos o no paralelos. (Figura 2)	Existe (no existe) un número que multiplicado por el vector $\vec{x}$ ó $\vec{y}$ da el vector $\vec{v}$	Mover los vectores $\vec{x}, \vec{v}, \vec{y}$ cambiando su origen y conservando módulo y dirección. Multiplicar el vector $\vec{v}$ por un escalar para obtener $\vec{x}$
Tarea 2: Dependencia lineal de tres vectores en R^2	Trama de paralelogramos en la dirección de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$. Paralelogramo de lados los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y diagonal el vector $\vec{A}$. (Figura 3)	$t\vec{u} + s\vec{v} = (a_1, a_2)$	Modificar los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{A}$ (módulo, dirección y sentido) pinchando en los extremos.
Tarea 3: Dependencia lineal de tres vectores en R^3	Proyección en el plano de un paralelogramo y una diagonal que están en el espacio, de lados los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y diagonal $t\vec{u} + s\vec{v}$. (Figura 4)	$\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ $t\vec{u} + s\vec{v} = (x_w, y_w, z_w)$	Cambiar coordenadas de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y los escalares t, s.

Figura 8.3: Fuente: Aranda C. y Callejo M. L. Construcción de dependencia lineal en un contexto de geometría dunámica:un estudio de casos.

En estos dos cuadros se pueden apreciar los objetos y procesos que se mensionan en el pensamiento matemático avanzado. los diversos sistemas de representación, es importante que se observe la transicion de un sistema a otro, lo que hace que se puedan distinguir algunas propiedades, aquí se encuentran los procesos de representación, vizualización y modelado del pensamiento matemático avanzado.

Capítulo 9

Comentarios finales.

Para entender porque estas nociones de dependencia e independencia lineal son tan complicadas de aprender se deberían identificar las dificultades que tienen los estudiantes a la hora de asimilarlas, y buscar una manera de superar dichas dificultades, esto es un punto que tratan mucho los autores en los antecedentes de investigación.

Los estudiantes la mayoría de las veces no han visto un curso de teoría de conjuntos y/o lógica, por lo que al enfrentarse a los conceptos del algebra lineal, es su primer acercamiento a una matemática muy formal, esta una de las dificultades más grande que presentan los estudiantes.

A continuación se enumeran algunas ideas didácticas que se pueden encontrar en estas investigaciones, y que se podrían utilizar en lugar de impartir el curso de álgebra de la manera tradicional.

1 Realizar un estudio histórico y epistemológico de los conceptos, instruirse acerca de su origen podría ayudar a asimilarlos mejor.

2 Presentar situaciones problemas enfocadas al planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales.

3 Basarse en la teoría APOE, para hacer de los conceptos objetos mentales.

4 Utilizar la geometría en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para mostrar cómo se comportan los vectores linealmente dependientes e independientes.

5 Manejar los diferentes tipos de representación para ilustrar las características de estas nociones, y tratar de construir caminos entre ellos.

6 Apoyarse con programas computacionales que nos permitan manipular vectores y estudiar sus particularidades.

En el esquema que se propone el objeto final es la independencia lineal, una pregunta importante es ¿Por qué independencia lineal y no dependencia lineal? esto es porque la ecuación vectorial de la definicion se iguala a cero, a partir de ahí mentalmente es más sencillos suponer que todos los escalares son cero, caso contrario a la dependencia lineal, el condicional que existe algún escalar diferente a cero implica que debería mostrarse.

También se puede observar que al hacer una revisión de los libros de textos, estos no siguen los procesos que plantea el pensamiento matemático avanzado, aunque algunos presenten ejemplos antes de la definición, no son suficientes para los procesos de generalización y visualización, esta presentación de los temas en los libros de texto, donde la formalización se presenta como primer proceso cognitivo, es uno de los primeros obstáculos, como ya se especificó, la falta de entrenamiento fomal impide que el estudiante se apripie de este concepto, pero esto no le dificulta que lo aplique en la resolución de problemas.

Bibliografía

[1] Dorier J-L. A general outline of the genesis of the vector space theory. Historia mathematica, vol. 22, No 3, pp 227-261. (1995).

[2] Luzardo D., Peña A. Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 2, pp. 153-170, (2006).

[3] Dorier J-L. Use of history in a research work on the teachin of linear algebra. The mathematical association of american, pp. 99-110 (2000).

[4] Dubal R. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el regitro de representación. La gaseta de la RSME, pp 143-168 (2006)

[5] Dorier J-L. Teaching linear algebra at university. ICM 2002, Vol. III, (2002).

[6] Jaworski B., Treffert-Thomas S., Bartsch T. Linear algebra with a didactical focus. NAW 5/12 nr. 4 december 2011.

[7] Gueudet-Chartier G. Should we teach linear algebra through geometry? Linear algebra and its applications, Volume 379, pp 491-501, (2004).

[8] Oktac A., Trigueros M. ¿Cómo se aprende los conceptos del algebra lineal?. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en linea] (2010).

[9] Stewart S., Thomas M.: Embodied, symbolic and formal thinking for linear combination and Independence in linear algebra. The University of Auckland.

[10] Parraguez M., Uzuriaga V. Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. Revistas.utp.edu.co, Vol. 19, No. 3, (2014).

[11] Parraguez M., Bozt J.: Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. Scientia et Technica Año XIX, Vol. 19, No. 3, Septiembre de 2014.

[12] Rubén A. – Adreoli, Daniela I: Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de universidad (primera fase). Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE.

[13] Aranda C., Callejo M. Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (2), pp 129-158, (2010).

[14] Manson J. Pensamiento matemático avanzado. Reseña del libro David Tall (Ed.). (1991). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer. Biblioteca de Educación Matemática, volumen 11, Universidad de los Andes. (1996)

[15] Macías J.Los registro semióticos en matemática como elemento de personalización en ell aprendizaje. Revista de Investigación Educativa Conect@2, 4(9), pp 27-57, (2014).

[16] Tall D.: The psychology advanced mathematical thinking. University of Warwick. (1991)

[17] Ed Dubisnky Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking

[18] Kenneth Hoffman, Ray Kunze: Álgebra lineal. Prentice-Hall hispanoamerica.

[19] Cael D. Meyer: Matrix Analysis ans Applied Linear Algebra (2000)

[20] Stanley I. Grossman, Jose Job Flores Godoy: Álgebra Lineal. Editorial Mc Graw Gil. Septima edición.

[21] Seymour Lipschutz: Teoria y Problemas de Algebra Lineal. McGraw-Hill

[22] David Lay: Algebra Lineal y sus Aplicaciones. Tercera edición.

[23] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence: Linear Algebra. Prentice Hall

[24] Fraleigh Beauregard: Álgebra lineal. Addison-Wesley Iberoamericana

[25] Tom M. Apostol: Calculus- TomoI. Reverté