

**Aspectos Teóricos Sobre Óptica Difusa Aplicada en el Análisis de Mamografías Asociadas  
a la Detección de Tumores Cancerígenos**

**Daniel Camilo Becerra Villamizar**

**Código: 1094273149**

**Trabajo de grado como requisito para obtener el título de físico.**

**Orientador:**

**PhD. José Luis González Arango**

**PhD. Víctor Saúl Basto**

**UNIVERSIDAD DE PAMPLONA**

**FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS**

**Departamento de Física y Geología.**

**2016**

### Lista de siglas

BF	Blood Flow	Flujo de sangre
CW	Continuous Wave	Onda continua
DCS	Diffuse Correlation Spectroscopy	Espectroscopia de correlación difusa
DE	Diffusion Equation	Ecuación de Difusión
DOS	Diffuse Optical Spectroscopy	Espectroscopia de Óptica difusa
DOT	Diffuse Optical Tomography	Tomografía de óptica difusa
DWS	Diffusing-Wave –Spectroscopy	Espectroscopia de Onda Difusa
FD	Frequency Domain	Dominio de las frecuencias
HbO <sub>2</sub>	Oxy-Hemoglobin Concentration	Concentración de oxi-hemoglobina
Hbr/Hb	De-Oxy Hemoglobin Concentration	Concentración de deoxi-hemoglobina
HG	Heney And Greenstein	Heney y Greenstein
ICG	Indocyanine Green	Verde de indocianina
MBLL	Modified Beer–Lambert Law	Ley de Beer-Lambert modificada
MC	Monte Carlo	Monte Carlo
MRI	Magnetic Resonance Imaging	Imagen de Resonancia Magnética
NIRS	Near-Infrared Spectroscopy	Espectroscopia de infrarrojo cercano
PET	Positron Emission Tomography	Tomografía de Emisión de Positrones
pO <sub>2</sub>	Oxygen Partial Pressure	Presión Parcial de Oxígeno
RBCs	Red Blood Cells	Glóbulos Rojos
RTE	Radiative Transfer Equation	Ecuación de Transferencia Radiativa
THC	Total Hemoglobin Concentration	Concentración total de Hemoglobina
TRS	Time Resolved/Domain Spectroscopy	Espectroscopia en el Dominio del tiempo

### ***AGRADECIMIENTOS***

A mi familia que me apoyo incondicionalmente, sin juzgar mis expectativas en mis proyectos en especial a mi madre Marisol Villamizar, mis abuelos, mis hermanos, mis tíos y tías que en ocasiones difíciles siempre estuvieron hay apoyándome, y en mis triunfos siempre se regocijan, a mi sobrino que ha sido un cambio en mi vida, dándome lecciones a cada rato de lo que significa amar a mis amigos que siempre estaban apoyándome en mis caídas y corrigiendo mis equivocaciones.

A mis profes que me enseñaron con teorías y formulas a amar a la física por todo lo que significa, y por hacerme participe de ese mundo científico que jamás deja de sorprendernos, con sus clases siempre entretenidas y llenas de conocimientos increíbles de la naturaleza.

A todos los científicos que se empeñaron a dejarnos un legado para seguir nuestras investigaciones sobre lo poco que sabemos del universo, y que se empeñaron en llegar hasta el final en la búsqueda de respuestas.

A Dios que es el que hace posible todo lo que existe y lo que no, que nos dio todo lo necesario para cumplir nuestras expectativas, y la perfección de todo lo que conocemos, así como lo que no, y en fin a todas las personas que hicieron posible directa o indirectamente que yo sea lo que soy.

## Contenido

INTRODUCCION.....	8
CAPITULO 1: ANALISIS DE LA ÓPTICA DIFUSA CON LA ECUACION DE TRANSFERENCIA RADIATIVA.....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
1.1 DISPERSION Y ABSORCION.....	10
1.1.1 La Absorción .....	12
1.1.2 La Dispersión. ....	13
1.2 ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO .....	15
1.2.1 Radiancia $L_r, s, t$ .....	15
1.2.2 Ritmo De Fluencia $\Phi(r, t)$ .....	16
1.2.3 Vector de Flujo $J_r, t$ .....	16
1.3 ECUACIÓN DE DIFUSIÓN. ....	21
1.4 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA EN ARMÓNICOS ESFÉRICOS.....	30
1.4.1 Términos Isotrópicos:.....	32
1.4.2 Términos no Isotrópicos:.....	36
1.4.2.1 Parte Real del Vector de Flujo:.....	37
1.4.2.1 Parte Imaginaria del Vector de Flujo.....	40
1.5 CONDICIONES DE FRONTERA .....	49
1.5.1 Las Condiciones de Contorno en la Interfaz entre el Medio Difuso y el Medio no Dispersivo .....	50
CAPITULO 2: CÁNCER DE MAMA, IMÁGENES Y ESPECTROSCOPIA .	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
2.1. MAMOGRAFÍA ÓPTICA DIFUSA BASADA EN EL CONTRASTE DE ENDÓGENA .....	57
2.1.1. Propiedades Endógenas de Tejido Mamario Normal.....	57
2.1.2. La Detección del Cáncer de Mama y su Caracterización.....	58
2.2. MAMOGRAFÍA ÓPTICA BASADA EN EL CONTRASTE DE EXÓGENA.....	62
2.3. PERSPECTIVAS: MAMOGRAFÍA ÓPTICA.....	63
CONCLUSIONES:.....	65

Bibliografía ..... 67

## TABLA DE ILUSTRACIONES

Figura 1. Representación gráfica de la radiancia. .... 15

Figura 2 Tipos de fuentes 1) CW, 2) FD, 3) TRS .Tomada de [T Durduran, 2010] ..... 17

Figura 3 Dispersión del incremento de la radiancia en un volumen ds. Representación gráfica tomada del documento [Cadena Pérez, 2012] ..... 18

Figura 4. Radiancia incidente ( $L_i$ ) y radiancia dispersada ( $L_s$ ),  $S_0$  indica la fuente de luz que en este caso es externa y  $S_0$  el vector unitario que apunta desde la fuente de fotones hasta el vector  $r$ . (Tomada del documento [Cadena Pérez, 2012].) ..... 20

Figura 5. Diagrama de la aproximación por difusión. Gráfica tomada de [Cadena Pérez, 2012]. .... 23

Figura 7. Diagrama para la explicación de la dispersión. Gráfica tomada de [Cadena Pérez, 2012].  
..... **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 8. Dispersión de la radiancia en la frontera de un medio turbio. .... 50

Figura 9. Condiciones de frontera.(frontera extrapolada) Tomada del artículo [Cadena Pérez, 2012]  
..... 53

Figura 10. Receptor-operativo de la curva característica de rTHC mostrando cierta tasa positiva de lesiones malignas en comparación con tasa de falsos positivos para lesiones benignas ..... 59

Figura 11. Relación de hemoglobina total en tumores anormales, con 10 lesiones benignas y 41 malignas ..... 61

## **RESUMEN**

La ecuación de difusión o ecuación de transporte radiativo ha tenido en gran auge en muchos problemas sobre el comportamiento de la luz en diferentes medios, por lo que es una buena opción para hacer un análisis de los tipos de tejidos encontrados en el cuerpo humano, y más aún si estos tejidos son cancerígenos; esto último sugiere de un estudio, que es lo que se quiere realizar en este trabajo, dado que el comportamiento de factores elementales en el cuerpo humano no son muy precisos para determinar si es o no un tejido maligno. En estudios recientes se ha observado que los tumores malignos en la mama específicamente (es el cáncer que más cobra vidas humanas en el mundo), no conservan las mismas características, por lo cual es complicado dar un diagnóstico acertado.

En este trabajo se analizarán los factores que pueden ser claves para un diagnóstico acertado, así como la localización de este en el cuerpo (lo que es clave para el tratamiento), y el tipo de problemas que se pueden encontrar en un escaneo de la zona en cuestión (la mama).

## **ABSTRACT**

The diffusion equation or radiative transfer equation has had a great boom in many problems about the behavior of light in different media, so it is a good choice for analysis of tissue types found in the human body, and even if these tissues are carcinogenic; the latter suggests a study, which is what you want to do in this work, since the behavior of elementary factors in the human body are not very accurate to determine whether or not a malignant tissue. Recent studies have shown that malignant tumors in the breast specifically (is cancer that most takes human lives in the world), do not retain the same characteristics, so it is difficult to give an accurate diagnosis. This paper analyzes the factors that may be key to a successful diagnosis and localization of this in the body (which is key to treatment), and the type of problems that can be found in a scan of the area analyzed concerned (the breast).

## **INTRODUCCION**

En la actualidad los estudios concernientes a aplicaciones y soluciones de tumores cancerígenos, ha desbordado un sinnúmero de estudios, basados en distintos tipos de algoritmos y métodos (método de los elementos finitos, método de las coordenadas discretas, los armónicos esféricos, el método de diferencias finitas, método de Monte Carlo que reconstruye soluciones de la RTE) para mejorar el diagnóstico de esta patología, dado que el número de variables es muy amplio y pueden ser o no precisas, se han realizado estadísticas concretas respecto a cómo podríamos realizar buenas estimaciones de un caso en específico, sin embargo estas estimaciones viene siendo netamente estadísticos. Una solución viable viene siendo la difusión, ya que tienen muchos beneficios que son difíciles de encontrar en otros métodos, como por ejemplo, los bajos costos de operación y traslados, no trae consigo consecuencias por el prolongado contacto con la radiación, no es un método invasivo y puede dar un diagnóstico certero sobre el estado del paciente. En este trabajo se realizara un estudio de la ecuación de difusión para tejidos biológicos, observando el desarrollo del comportamiento de diferentes factores (la hemoglobina y la cantidad de masa entre otros) en tumores cancerígenos, y como estos influyen en el diagnóstico y tratamiento, teniendo en cuenta los métodos utilizados y sus respectivas características, para hacer una comparación entre estos y la difusión.

# CAPITULO 1:

## ANALISIS DE LA ÓPTICA DIFUSA CON LA ECUACION DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

La dispersión en medios difusos puede ser explicada por la física teniendo en cuenta las ecuaciones de maxwell, sin embargo estos procesos son netamente computacionales por tanto una solución práctica es la ecuación de transporte radiativo (RTE) con ciertas simplificaciones y condiciones dado que no todas las longitudes de onda pueden ser utilizadas para describir dichos medios, en nuestro caso como se va a trabajar con tejido biológico es necesario utilizar longitudes de onda que puedan entrar en dicho tejido. Empezaremos describiendo cómo se comportan los fenómenos de dispersión y absorción en un medio difuso. Para esto debemos de tener en cuenta algunas definiciones. Pero antes definiremos la ecuación de difusión general

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} - k_1 \nabla^2 u(\vec{r}, t) + k_2 u(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.1)$$

Donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes que dependen del fenómeno trabajado, como es un proceso netamente difusivo  $k_1$  depende del espacio y el tiempo, por otro lado  $k_2$  es la probabilidad de absorción en las moléculas;  $u(\vec{r}, t)$  es la concentración de material en un espacio-tiempo.

## 1.1 DISPERSION Y ABSORCION

La dispersión elástica, hace referencia a la relación entre el fotón incidente y emitido, en ellos dos la energía es la misma, el cambio se encuentra en la dirección en la que se propaga, esta clase de dispersiones son fáciles de estudiar pues establece pautas sencillas. Por el contrario en la dispersión inelástica el fotón incidente gana energía (scattering Raman-anti Stokes) o cede energía (scattering Raman-Stokes) al interactuar con el átomo o molécula.

Las dispersiones elásticas más conocidas son: La dispersión de Rayleigh ocurre cuando la longitud de onda incidente es mucho mayor que el tamaño de la partícula, la dispersión es isotrópica pues la intensidad dispersada tiene una relación con la dirección de dispersión que equivale a ser simétrica con el ángulo de dispersión. P.ej. la intensidad que es dispersada con un ángulo de  $0^\circ$  grados respecto de la dirección de propagación es igual a la intensidad dispersada con un ángulo de  $180^\circ$  [Cadena Pérez, 2012]. Las cuales dependen de la longitud de onda y el tipo de partículas que se dispersa.

Estos tipos de dispersiones no pueden ser utilizados ya que la dispersión generada es hacia adelante y no es isotrópica, por tanto, se ve necesario utilizar una ecuación de probabilidad en este caso la ecuación de H-G (Henyey-Greenstein)  $P(\hat{s}, \hat{s}')$  (ecuación 1.2) que expresa la probabilidad que tiene un fotón que viaja en la dirección  $\hat{s}'$ , de ser desviado en la dirección  $\hat{s}$  (ambos vectores unitarios), después de un fenómeno de dispersión [Cadena Pérez, 2012], el ángulo formado entre ellos se denota como  $\theta$ , la dispersión es isotrópica cuando la probabilidad de dispersarse en cualquier dirección con ángulo  $\theta$  es la misma y es anisotrópica cuando es más probable que se disperse a cierto ángulo  $\theta$  con respecto al rayo incidente.

$$P(\hat{s}, \hat{s}') = \frac{1 - g^2}{4 \pi (1 + g^2 - 2g \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{1}{\text{sr}} \right] \quad (1.2)$$

Donde  $g$  es el factor de anisotropía y  $\theta$  el ángulo de dispersión. La luz sigue cierto comportamiento en los tejidos biológicos que son considerados medios turbios o heterogéneos, lo cual genera un sin número de cambios en sus propiedades ópticas, las cuales dependen específicamente de los cambios de absorción y dispersión presentes en el tejido, en general este volumen es isotrópico y homogéneo hablando en términos macroscópicos, en todo este desarrollo de la óptica difusa se implementara la simetría azimutal para hacer los cálculos más sencillos.

Para poder observar que tan isotrópico o anisotropico es el comportamiento del medio biológico dispersivo debemos definir el factor de anisotropía  $g$  (ecuación 1.3 a) también puede definirse como  $\langle \cos(\theta) \rangle$  (ecuación 1.3 b); en los procesos, es isotrópico si  $g = 0$ , anisotropico si  $g = -1$  y  $1$ , en el primer caso la dispersión tiende hacia atrás, en el segundo la dispersión tiende hacia adelante; es importante decir que este dato no es exacto y en el tejido varía entre 0.8 y 0.99, la dispersión es hacia adelante; si tenemos en cuenta los dispersores isotrópicos, la función solo dependerá del ángulo de dispersión  $\theta$  de esta manera  $P(\hat{s}, \hat{s}') = P(\theta)$ .

$$g = \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}')(\hat{s}, \hat{s}') d\Omega \quad (1.3 a)$$

$$g = \langle \cos(\theta) \rangle = 2\pi \int_0^\pi \cos(\theta) P(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (1.3 b)$$

### 1.1.1 La Absorción

La absorción se define como la excitación de un electrón en un estado base en un átomo a un estado excitado a causa del choque de un fotón con este; esto se logra colocando el tejido en un haz luminoso.

La interacción luz-materia debido a la absorción se describe por el coeficiente de absorción  $\mu_a$ , definido como la relación entre la potencia absorbida en la unidad de volumen y la potencia incidente por unidad de área. La interacción debido a la dispersión se describe por el coeficiente de dispersión  $\mu_s$  y por la función de fase de dispersión de  $P(\hat{s}, \hat{s}')$  (Martelli, 2010).

El proceso de absorción es muy importante en chequeos médicos ya que colocando un sensor en la parte a analizar se puede observar un análisis interno de los componentes biológicos del paciente, también es utilizada para intervenciones donde la luz provoca cambios en el organismo (cirugía láser).

### 1.1.2 La Dispersión.

El proceso de dispersión ocurre cuando la frecuencia del haz de partículas enviado no es suficientemente alta comparada con las partículas dispersoras del medio, esto ocasiona que no sea capaz de llevar a un nivel energético más alto los átomos presentes en las partículas del medio difuso causando dispersión.

También podemos decir que la dispersión se origina a partir de las fluctuaciones de densidad, tanto en medios turbios como en medios homogéneos, esto ocasiona que el número de moléculas o partículas dentro del volumen estudiado también sufran de fluctuaciones en el tiempo, aunque el número promedio de moléculas se mantiene constante. La interferencia presente en este fenómeno puede ser descartada siempre y cuando sea pequeña la concentración de partículas desordenadas en el medio (dispersión independiente); Las definiciones de los coeficientes de dispersión y absorción además de otros parámetros físicos también suelen ser válidos para los medios difusos, los cuales son densamente dispersivos, en ellos las partículas y los medios pueden confundirse, este es el caso de los tejidos biológicos, en estos medios turbios, la propagación puede ser descrita por una ecuación aproximada más simple, la ecuación de difusión (Martelli, 2010).

La absorción o difusión por la unidad de volumen generan una potencia total extraída descrita por el coeficiente de atenuación total  $\mu_t$  (ecuación 1.4), que describe la onda electromagnética, las unidades de los coeficientes son en mm. La fracción de potencia extraída de la dispersión se define a continuación (ecuación 1.5).

$$\mu_t = \mu_a + \mu_s \quad (1.4)$$

$$\Lambda = \frac{\mu_s}{\mu_t} \quad (1.5)$$

Donde  $\mu_t$  es el coeficiente de transmisión,  $\mu_a$  el coeficiente de absorción y  $\mu_s$  el coeficiente de dispersión. Se debe tener en cuenta también que en el proceso de absorción, es útil distinguir la absorción debida a las moléculas del medio de fondo  $\mu_{am}$  y la absorción por partículas dispersas  $\mu_{ap}$ , dependiendo del tipo y la concentración de moléculas, podemos tener  $\mu_{am} > \mu_{ap}$  o viceversa, además cuando el fotón alcanza su punto máximo de propagación y el peso que le es proporcionado cuando se lanza desde la fuente es reducido a causa de la absorción, esta partícula será dispersada, desviándolo de su dirección de propagación un ángulo polar  $\theta$  o un ángulo azimutal  $\phi$ , generando variables aleatorias (Martelli, 2010)

Podemos tomar las partículas de forma esférica para reducir cálculos así la función de probabilidad normalizada nos quedara de la forma. (Ecuación 1.6).

$$\int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}')(\hat{s}, \hat{s}')d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \text{Cos}(\theta)P(\theta)\text{Sin}(\theta)d\theta = 1 \quad (1.6)$$

## 1.2 ECUACIÓN DE TRANSPORTE RADIATIVO

La ecuación de transporte radiativo (RTE) es una ecuación que describe el transporte de energía a través de fotones que atraviesan un medio dispersivo, (en nuestro caso tejido biológico) esta ecuación utiliza diferentes cantidades físicas como la radiancia y la fluencia entre muchas otras; para observar el comportamiento de los fenómenos de dispersión y absorción, que se presenta al emitir un haz luminoso en un medio dispersivo. Esta ecuación se limita en la descripción de todos los fenómenos de dispersión y absorción presentes en el medio; dado que la incidencia de fotones es realizada desde un haz luminoso que contiene un sinfín de partículas, chocando con moléculas o átomos de diferentes materiales creando múltiples dispersiones lo cual sería un problema estadístico muy complejo de resolver. Para analizar el comportamiento de esta ecuación primero definiremos las siguientes magnitudes físicas.

### 1.2.1 Radiancia $L(\vec{r}, \vec{s}, t)$

La radiancia es el diferencial de potencia  $dP$  [W] que fluye dentro de un ángulo sólido  $d\Omega$  [srd] a través de un diferencial de área  $dA$  [m<sup>2</sup>] en el punto  $\vec{r}$  y que se propaga en la dirección del vector unitario  $\hat{s}$  en un tiempo  $t$ . Cuando  $\hat{s}$  no es perpendicular a  $dA$ , se tiene que utilizar la proyección de  $dA$  en el plano perpendicular a  $\hat{s}$ , por lo que  $dA_0 = dA \cos(\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre la normal de  $dA$  y  $\hat{s}$  [Cadena Pérez, 2012].

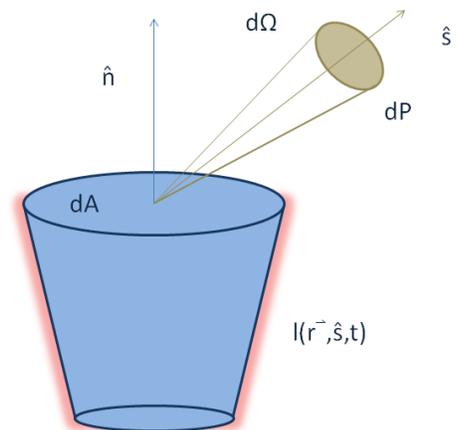


Figura 1. Representación gráfica de la radiancia.

Esta puede expresarse como (ecuación 1.7):

$$L(\vec{r}, \hat{s}, t) = \frac{\partial P(\vec{r}, \hat{s}, t)}{\partial A \cos(\theta) d\Omega} \left[ \frac{W}{\text{srd. m}^2} \right] \quad (1.7)$$

### 1.2.2 Ritmo De Fluencia $\Phi(\vec{r}, t)$

Es la potencia que incidente sobre una diferencial de una esfera pequeña dividida entre el área  $dA$  en un tiempo  $dt$ , esta depende de la orientación del área transversal y es representada a continuación (ecuación 1.8):

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_0^{4\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) \left[ \frac{W}{m^2} d\Omega \right] \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Vector de Flujo $\vec{j}(\vec{r}, t)$

Es el flujo de energía neto por diferencial área y tiempo (ecuación 1.9), su dirección es hacia el flujo dominante de fotones y puede ser expresada como la fluencia con dirección al flujo mencionado anteriormente.

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_0^{4\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s} d\Omega \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (1.9)$$

Las magnitudes físicas descritas anteriormente pueden ser definidas con independencia del tiempo para describir la propagación de energía en medios difusos. En muchas aplicaciones la fuente de luz utilizada es de onda continua donde la potencia es independiente del tiempo (CW) pero pueden ser utilizadas fuentes tipo (FD fuentes de intensidad modulada), y (TRS) de tiempo pulsado que son ilustradas a continuación:

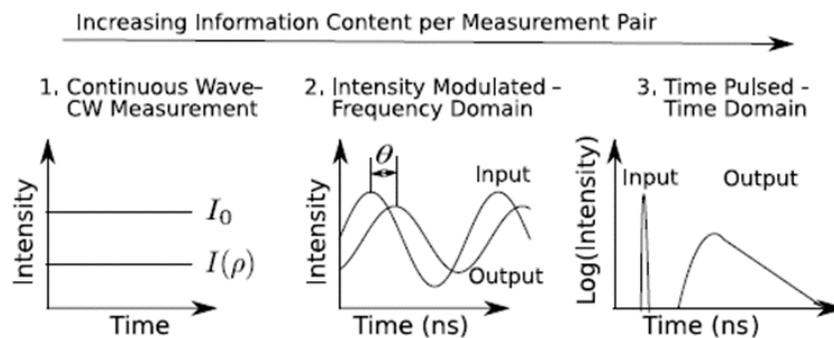


Figura 2 Tipos de fuentes 1) CW, 2) FD, 3) TRS .Tomada de [T Durduran, 2010]

Para utilizar el método de la difusión se tiene que realizar un paralelo con la geometría de Fresnell relacionada con la reflexión y la transmisión. La RTE se obtiene equilibrando de diversos mecanismos por los cuales la radiancia  $L(\vec{r}, \hat{s}, t)$  a una longitud de onda dada puede disminuir o aumentar dentro de un medio turbio en cierto volumen [Martelli, 2010]. Las disminuciones de radianza debidas al medio difuso se generalizan en la expresión. (Ecuación 1.10).

$$dL(\vec{r}, \hat{s}, t) = -\mu_t L(\vec{r}, \hat{s}, t) v dt \quad (1.10)$$

En un punto  $\vec{r}$  de cierto volumen dado un vector unitario  $\hat{s}$  con un diferencial de distancia  $ds$  o  $v dt$ , siendo  $v$  la velocidad de la luz en el medio turbio. Sabiendo que en dicho medio muchos procesos de dispersión propagados en direcciones  $\hat{s}'$  Pueden generar dispersiones en dirección  $\hat{s}$  se observara un incremento de la radianza (Ecuación 1.10, Ilustración 3) en dicha dirección.

$$\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t) = v \partial t \mu_t \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}, \hat{s}', t) d\Omega' \quad (1.11 a)$$

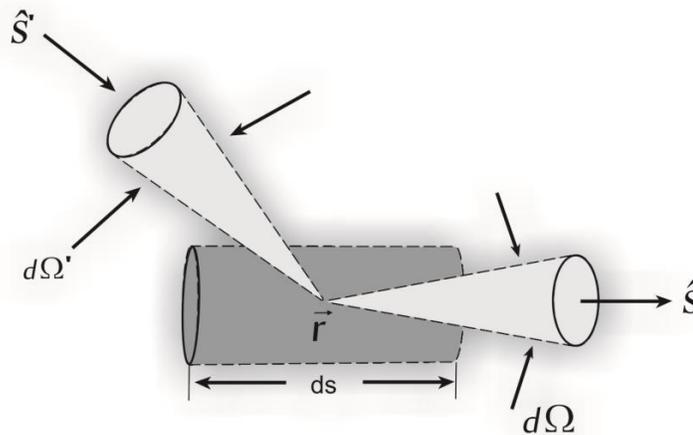


Figura 3 Dispersión del incremento de la radiancia en un volumen ds. Representación gráfica tomada del documento [Cadena Pérez, 2012]

Para simplificar cálculos la fuente de fotones trabajada va a ser una fuente externa al medio, pues pueden existir fuentes internas; y está representada de la forma (Ecuación 1.11 b):

$$\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t) = \zeta(\vec{r}, \hat{s}, t) v \partial t \quad (1.11 b)$$

En la ecuación 1.12 se representa el gradiente de radianza, que se define como la energía total que se propaga en dirección del vector unitario  $\hat{s}$ . Si sumamos las ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.11), y luego dividimos entre  $v dt$  obtenemos la ecuación de transporte (Ecuación 1.13), mostradas a continuación:

$$\frac{\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t)}{v \partial t} = \hat{s} \cdot \nabla [L(\vec{r}, \hat{s}, t)] = \nabla \cdot [L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s}] \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t)}{v \partial t} = -\mu_t L(\vec{r}, \hat{s}, t) + \mu_s \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\Omega' + \zeta(\vec{r}, \hat{s}, t) \quad (1.13)$$

Si adicionamos a la ecuación 1.13 el gradiente de radianza encontramos la ecuación de transferencia de radiación (Ecuación 1.14) que para estados estacionarios se define en la ecuación 1.15.

$$\begin{aligned} & \mu_t L(\vec{r}, \hat{s}, t) + \nabla \cdot [L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s}] \\ & = \mu_s \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\Omega' + \zeta(\vec{r}, \hat{s}, t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\mu_t L(\vec{r}, \hat{s}) + \nabla \cdot [L(\vec{r}, \hat{s}) \hat{s}] = \mu_s \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega' + \zeta(\vec{r}, \hat{s}) \quad (1.15)$$

Hasta ahora hemos expresado la radianza en términos generales, sin embargo existen dos tipos de radianza en este proceso (ilustración 3); la radianza reducida incidente  $L_i(\vec{r}, \hat{s})$  que es la emitida por la fuente pero su dirección no es afectada por la absorción ni la dispersión al llegar al medio dispersor, y la radianza dispersada  $L_s(\vec{r}, \hat{s})$  que es el producto de las múltiples dispersiones en el tejido biológico.

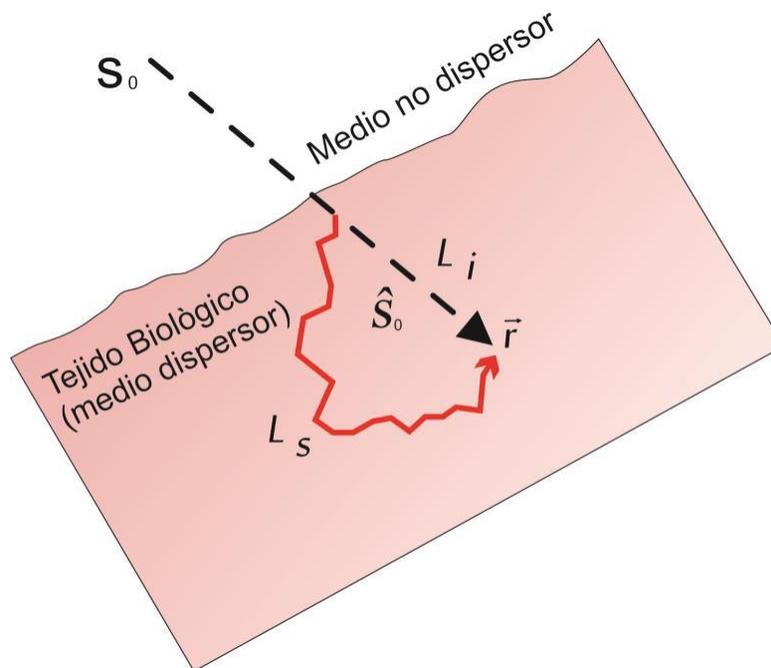


Figura 4. Radiancia incidente ( $L_i$ ) y radiancia dispersada ( $L_s$ ),  $S_0$  indica la fuente de luz que en este caso es externa y  $\hat{S}_0$  el vector unitario que apunta desde la fuente de fotones hasta el vector  $r$ . (Tomada del documento [Cadena Pérez, 2012].)

En la ecuación 1.16 se muestra la radianza total expresada como la adición de los tipos de radianza anteriores; Sin embargo si en nuestra fuente externa de fotones

se realiza algún cambio, este se verá reflejado en un término interferencia (ecuación 1.17), lo cual presentara un cambio en la ecuación 1.11

$$L(\vec{r}, \hat{s}) = L_i(\vec{r}, \hat{s}) + L_s(\vec{r}, \hat{s}) \quad (1.16)$$

$$\zeta(\vec{r}, \hat{s}) = \mu_s P(\hat{s}, \hat{s}_0) \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \quad (1.17)$$

Se observa en la ecuación 1.17 que la luz incidente queda dependiendo del vector unitario  $\hat{s}_0$  y de la probabilidad de que las partículas se dirijan en dirección  $\hat{s}$  ( $P(\hat{s}, \hat{s}_0)$ ).

Teniendo en cuenta lo anterior la ecuación de transporte (ecuación 1.13) queda expresada en términos de la radianza dispersada (ecuación 1.18), donde  $\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)$  Puede representar un haz de luz colimado o una fuente puntual isotrópica [Cadena Pérez, 2012].

$$\frac{\partial L_s(\vec{r}, \hat{s})}{v \partial t} = -\mu_t L_s(\vec{r}, \hat{s}) + \mu_s \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L_s(\vec{r}, \hat{s}') d\Omega' + \mu_s P(\hat{s}, \hat{s}_0) \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \quad (1.18)$$

### 1.3 ECUACIÓN DE DIFUSIÓN.

La ecuación de difusión es una compleja ecuación integro diferencial la cual no tiene soluciones analíticas, sus soluciones son netamente computacionales, entre las más conocidas se encuentran: el método de los elementos finitos, método de las coordenadas discretas, los armónicos esféricos, el método de diferencias finitas, entre otros, también existen métodos estocásticos como el método de Monte Carlo que reconstruye soluciones de la RTE, para simplificar esta ecuación se utiliza una aproximación por difusión (esta puede ser utilizada cuando en la propagación de las partículas predomina una dispersión múltiple), que nos permite trabajar con una ecuación analítica que describe el comportamiento de la luz en medios difusos. Hay que tener en cuenta que las fronteras y la fuente lumínica deben estar lejos de los puntos de observación, con una radianza isotrópica predominante, conservando algo de anisotropía para que exista un gradiente de concentración de fotones; teniendo en cuenta lo anterior el flujo de energía debe estar orientado en una dirección específica  $\hat{s}_f$ , podemos describir entonces la aproximación por difusión, que es una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico, (ecuación 1.20 a), como la suma de la radianza que se propaga de manera isotrópica (ecuación 1.19) y el vector de flujo  $\vec{J}(\vec{r}, t)$ .

$$L_O(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} L_S(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega \quad (1.19)$$

La intensidad difusa  $L_S(\vec{r}, \hat{s})$  se aproxima por los dos primeros términos (isotrópico y linealmente anisotrópicos), la ecuación [1.20b] introduce dos cantidades importantes una de ellas el ritmo de fluencia que se define como el potencial total por área, que se mueve hacia afuera con una posición  $\vec{r}$  desde un elemento de volumen infinitesimal en un tiempo  $t$  [T Durduran, 2010].

$$L_S(\vec{r}, \hat{s}) = L_O(\vec{r}) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \hat{s}_x \quad (1.20 a)$$

$$L_S(\vec{r}, \hat{s}) = \frac{1}{4\pi} \Phi_s(\vec{r}) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \hat{s}_x \quad (1.20 a)$$

La absorción selectiva extingue fotones con longitudes de trayectorias largas; en consecuencia, los fotones con pocos eventos de dispersión no serán absorbidos. Por lo tanto, el régimen de difusión de propagación de la luz puede ser establecida cuando los efectos de dispersión son predominantes en la absorción [Martelli, 2010].

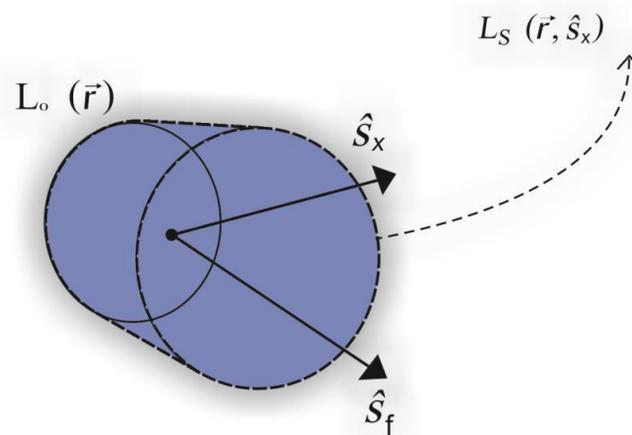


Figura 5. Diagrama de la aproximación por difusión. Gráfica tomada de [Cadena Pérez, 2012].

Igualando las ecuaciones 1.18 y 1.12 (ecuación 1.21 se describe en la ecuación 1.22. el último término de la ecuación 1.21 es la potencia emitida por una fuente isotrópica (ecuación 1.25), quedando finalmente la ecuación 1.26 de la recopilación de lo anterior.

$$\hat{s} \cdot \nabla [L(\vec{r}, \hat{s})] = -\mu_t L_s(\vec{r}, \hat{s}) + \mu_s \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega' + \mu_s P(\hat{s}, \hat{s}_0) \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \quad (1.21)$$

Integrando la ecuación anterior con respecto a  $d\Omega$  de 0 a  $4\pi$ , donde el término de la izquierda o el gradiente de radianza también puede ser escrito como:

$$\int_0^{4\pi} \hat{s} \cdot \nabla [L_s(\vec{r}, \hat{s})] d\Omega = \int_0^{4\pi} \nabla \cdot \hat{s} [L_s(\vec{r}, \hat{s})] d\Omega = \nabla \cdot \int_0^{4\pi} [L_s(\vec{r}, \hat{s}) \hat{s}] d\Omega = \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) \quad (1.22)$$

Las dos primeras expresiones de la derecha de la ecuación 1.21 pueden ser reemplazadas con los términos de radianza (ecuaciones 1.5 y 1.7) dando como resultado:

$$\int_0^{4\pi} -\mu_t L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega = -\mu_t \int_0^{4\pi} L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega = -\mu_t \Phi_s(\vec{r}) \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} & \mu_s \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega d\Omega' \\ &= \mu_s \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \int_0^{4\pi} (L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega) d\Omega' = \mu_s \Phi_s(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

El último término de la ecuación 1.21 es la potencia emitida por una fuente isotrópica

$$\int_0^{4\pi} \mu_s P(\hat{s}, \hat{s}_0) \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) d\Omega = \mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \quad (1.25)$$

Insertando los términos anteriores en (1.21) tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = -\mu_t \Phi_s(\vec{r}) + \mu_s \Phi_s(\vec{r}) + \mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)$$

Que también se puede escribir en términos del coeficiente de absorción:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = -\mu_a \Phi_s(\vec{r}) + \mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)$$

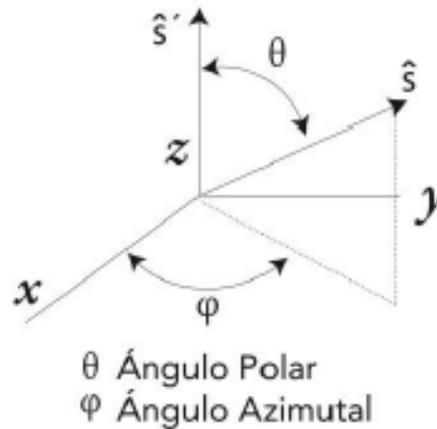


Figura 6. Diagrama para la explicación de la dispersión. Gráfica tomada de [Cadena Pérez, 2012].

Para obtener la ecuación de difusión debemos realizar otro procedimiento, primero multiplicaremos a la ecuación 1.21 por  $\hat{s}$  integrándola con respecto a  $d\Omega$  desde 0 a  $4\pi$

$$\hat{s} \cdot \nabla [L(\vec{r}, \hat{s})] = -\mu_t L_s(\vec{r}, \hat{s}) + \mu_s \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L_s(\vec{r}, \hat{s}') d\Omega'$$

$$+\mu_s P(\hat{s}, \hat{s}_0) \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \quad (1.21)$$

En la parte izquierda de esta ecuación asumimos el valor de la ecuación 1.28 o la ecuación de la aproximación por difusión, siendo D la constante de difusión (ecuación 1.27 a, ecuación 1.27 b) que depende de las propiedades ópticas del medio.

$$D = \frac{v}{3(\mu_a + \mu_s')} \quad (1.27 a)$$

Índice de difusión reducida

$$\mu_s' = \mu_a + \mu_s(1 - g) \quad (1.27 b)$$

$$\int_0^{4\pi} \hat{s} \cdot \nabla L_s(\vec{r}, \hat{s}) \hat{s} d\Omega = [\mu_a + \mu_s(1 - g)] D \nabla \vec{\Phi}_s(\vec{r}) \quad (1.28)$$

El primer término de la derecha a la ecuación 1.21 queda expresado en función del vector de flujo:

$$\int_0^{4\pi} -\mu_t \hat{s} L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega = -\mu_t \vec{J}(\vec{r}) \quad (1.29)$$

En el segundo término utilizamos la propiedad vectorial  $\hat{s} = \hat{s}'(\hat{s} \cdot \hat{s}') + \hat{s}' \times (\hat{s} \times \hat{s}')$ , haciendo el cambio mostrado en la ecuación 1.30, de la anterior igualdad y con ayuda de la ecuación [1.3 a], la primera integral interna de dicha expresión (ecuación 1.31); La otra integral de la ecuación (1.30) es igual a cero

$$\begin{aligned}
 \mu_s \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \hat{s} L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega d\Omega' \\
 = \mu_s \int_0^{4\pi} \left[ \int_0^{4\pi} \hat{s}'(\hat{s}, \hat{s}') P(\hat{s}, \hat{s}') d\Omega + \hat{s}' \right. \\
 \left. \times \int_0^{4\pi} \hat{s} P(\hat{s}, \hat{s}') d\Omega \times \hat{s}' \right] L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega' \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_s \int_0^{4\pi} \int_0^{4\pi} \hat{s}'(\hat{s}, \hat{s}') P(\hat{s}, \hat{s}') L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega d\Omega' = \mu_s \int_0^{4\pi} g L_s(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega' \\
 = \mu_s g \vec{J}(\vec{r}) \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

En el tercer término de la derecha aplicamos las mismas condiciones anteriores (ecuación 1.32).

$$\int_0^{4\pi} \mu_s P(\hat{s}, \hat{s}_0) \hat{s} \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) d\Omega = \quad (1.32)$$

$$\mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \left[ \int_0^{4\pi} \hat{s}_0(\hat{s}, \hat{s}_0) P(\hat{s}, \hat{s}_0) d\Omega + \hat{s}_0 \times \int_0^{4\pi} \hat{s}_0 P(\hat{s}, \hat{s}_0) d\Omega \times \hat{s}_0 \right] = \mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) g \hat{s}_0$$

$$\mu_{tr} = \mu_a + \mu_s' \quad (1.33)$$

Uniendo los términos y con ayuda de la ecuación 1.33, obtenemos la ecuación (1.36), que es parecida a la primera ley de Fick de la difusión, la cual dice que las partículas (fotones) tienden a viajar a un lugar en el medio donde haya menos densidad de partículas.

$$[\mu_a + \mu_s(1 - g)]D\nabla\Phi_s(\vec{r}) = -\mu_t \vec{J}(\vec{r}) + \mu_s g \vec{J}(\vec{r}) + \mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) g \hat{s}_0$$

$$[\mu_a + \mu_s(1 - g)]D\nabla\Phi_s(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})(-\mu_t + \mu_s g) + \mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) g \hat{s}_0$$

Despejando  $\vec{J}(\vec{r})$

$$[\mu_a + \mu_s(1 - g)]D\nabla\Phi_s(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})(-\mu_a - \mu_s + \mu_s g) + \mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) g \hat{s}_0$$

$$\frac{[\mu_a + \mu_s(1 - g)]}{[\mu_a + \mu_s(1 - g)]} D\nabla\Phi_s(\vec{r},) = -\vec{J}(\vec{r},) \frac{[\mu_a + \mu_s(1 - g)]}{[\mu_a + \mu_s(1 - g)]} + \frac{\mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) g \hat{s}_0}{[\mu_a + \mu_s(1 - g)]}$$

$$D\nabla\Phi_s(\vec{r}) = -\vec{J}(\vec{r}) + \frac{\mu_s \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) g \hat{s}_0}{[\mu_a + \mu_s']}$$

$$D\nabla\Phi_s(\vec{r}) = -\vec{J}(\vec{r}) + \frac{\mu_s g}{\mu_{tr}} \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \hat{s}_0$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D\nabla\Phi_s(\vec{r}) + \frac{\mu_s g}{\mu_{tr}} \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \hat{s}_0 \quad (1.34)$$

Introduciendo la ecuación 1.34 en la 1.26 quedando la ecuación 1.35, en esta reemplazamos la constante de difusión 1.27 a y la igualdad 1.33, para obtener la ecuación de difusión ecuación 1.36

$$\nabla \cdot (-D\nabla\Phi_s(\vec{r}) + \frac{\mu_s g}{\mu_{tr}} \zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)\hat{s}_0) = -\mu_a\Phi_s(\vec{r}) + \mu_s\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)$$

$$-D\nabla^2\Phi_s(\vec{r}) + \frac{\mu_s g}{\mu_{tr}} \nabla \cdot [\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)\hat{s}_0] = -\mu_a\Phi_s(\vec{r}) + \mu_s\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) \quad (1.35)$$

$$\frac{-1}{3(\mu_a + \mu_s')} \nabla^2\Phi_s(\vec{r}) + \frac{\mu_s g}{\mu_{tr}} \nabla \cdot [\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)\hat{s}_0] + \mu_a\Phi_s(\vec{r}) - \mu_s\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) = 0$$

$$\nabla^2\Phi_s(\vec{r}) - 3\mu_s g \nabla \cdot [\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0)\hat{s}_0] - 3\mu_a\mu_{tr}\Phi_s(\vec{r}) - 3\mu_s\mu_{tr}\zeta(\vec{r}, \hat{s}_0) = 0 \quad (1.36)$$

La ecuación de transporte radiativo puede volverse la ecuación de difusión si el ritmo de fluencia de la luz no cambia bruscamente en el tiempo, lo que se observa campos con ritmo de fluencia isotrópicos.

### 1.4 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA EN ARMÓNICOS ESFÉRICOS

Tomando la ecuación RTE (1.18), la cual representa los diferentes cambios de energía en el tejido teniendo en cuenta la fuente y los diferentes procesos que allí ocurren. Para una primera aproximación por armónicos esféricos utilizamos la serie mostrada en la ecuación (1.37) y su correspondiente expansión (1.38), en donde los términos con subíndices iguales representan la componente isotrópica (1.39) y los otros la componente anisotrópica de la radiación (1.40).

$$L(\vec{r}, \hat{s}, t) = \sum_{n=0}^{p=1} \sum_{m=-n}^n L_{n,m}(\vec{r}, t) Y_{n,m}(\hat{s}) \quad (1.37)$$

$$L(\vec{r}, \hat{s}, t) = L_{0,0}(\vec{r}, t) Y_{0,0}(\hat{s}) + L_{1,-1}(\vec{r}, t) Y_{1,-1}(\hat{s}) + L_{1,0}(\vec{r}, t) Y_{1,0}(\hat{s}) + L_{1,1}(\vec{r}, t) Y_{1,1}(\hat{s}) \quad (1.38)$$

$$L_{0,0}(\vec{r}, t) Y_{0,0}(\hat{s}) \quad (1.39)$$

$$L_{1,-1}(\vec{r}, t) Y_{1,-1}(\hat{s}) + L_{1,0}(\vec{r}, t) Y_{1,0}(\hat{s}) + L_{1,1}(\vec{r}, t) Y_{1,1}(\hat{s}) \quad (1.40)$$

Los armónicos esféricos son funciones que representan la variación espacial de un conjunto ortogonal, estos conjuntos ortogonales cuyas soluciones son representadas por la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, se visualizan a través de funciones trigonométricas y de polinomios de Legendre [Medina, 2009]. Los armónicos esféricos son descritos por la relación (1.41) en la cual  $P_{n,m}$  representa los polinomios de Legendre (1.42), los armónicos esféricos siguen cierta simetría (1.43) donde \* es la conjugada compleja; la ortogonalidad (1.44), donde la integral representa el producto interno de la función y  $\delta_{nn',mm'}$  es un

delta de Krönecker (1.45); si escribimos el vector unitario  $\hat{s}$  en función de las coordenadas esféricas nos queda (1.46).

Los armonicos esfericos se representan como:

$$Y_{n,m}(\hat{s}) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_{n,m}(\cos(\theta)) e^{im\phi} \quad (1.41)$$

Donde  $P_{n,m}$  son los polinomios de legendre

$$P_{n,m} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} d^{m+n}}{2} (x^2-1)^n \quad (1.42)$$

Y los cuales cumplen la siguiente simetría:

$$Y_{n,m}(\hat{s}) = (-1)^m Y_{n,m}^*(\hat{s}) \quad (1.43)$$

Y la condición de ortogonalidad:

$$\int Y_{n,m}(\hat{s}) Y_{n',m'}^*(\hat{s}) ds = \delta_{nn',mm'} \quad (1.44)$$

Donde es un delta de Krönecker que cumple las siguientes condiciones

$$\delta_{nn',mm'} = \begin{cases} n = n', m = m' & 1 \\ \text{otros casos} & 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Teniendo en cuenta la definición del vector unitario  $\hat{s}$  en coordenadas esféricas:

$$\hat{s} = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)) \quad (1.46)$$

Los términos isotrópico y no isotrópico se relacionan con la radiación  $L(\vec{r}, \hat{s}, t)$  (ecuación 1.20 b) la cual puede describirse como:

$$L_s(\vec{r}, \hat{s}, t) = \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \quad (1.47)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación anterior es la forma general de la intensidad y resulta de integrar sobre un círculo y no sobre una esfera, pues se trabajara el vector de fluencia en 2D.

#### 1.4.1 Términos Isotrópicos:

En esta sección se demostrara la relación entre la ecuación 1.39 (radiación) y la ecuación 1.47 para llegar a la siguiente ecuación:

$$L_{0,0}(\vec{r}, t) Y_{0,0}(\hat{s}) = \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t)$$

Tomando el ritmo de fluencia (ecuación 1.8) e introducimos la ecuación 1.38 cambiando los límites para un espacio bidimensional (ecuación 1.48) esta ecuación requiere los primeros armónicos esféricos que se calculan a partir de las ecuaciones 1.41, 1.42, 1.46, 1.47 lo cual se realiza a continuación tomando la consideración de que  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_0^{2\pi} [L_{0,0}(\vec{r}, t)Y_{0,0}(\hat{s}) + L_{1,-1}(\vec{r}, t)Y_{1,-1}(\hat{s}) + L_{1,0}(\vec{r}, t)Y_{1,0}(\hat{s}) + L_{1,1}(\vec{r}, t)Y_{1,1}(\hat{s})] d\Omega \quad (1.48)$$

A continuación hallamos los armónicos esféricos presentes en la ecuación anterior:

- $Y_{0,0}(\Phi) = (-1)^0 \sqrt{\frac{(2(0)+1)(0-0)!}{4\pi(0+0)!}} P_{0,0}(\cos(\theta)) e^{i(0)\Phi}$

$$Y_{0,0}(\Phi) = (-1)^0 \sqrt{\frac{(2(0) + 1)(0 - 0)!}{4\pi(0 + 0)!}} P_{0,0}(\cos(\theta)) e^{i(0)\Phi}$$

$$Y_{0,0}(\Phi) = (-1)^0 \sqrt{\frac{(2(0) + 1)(0 - 0)!}{4\pi(0 + 0)!} \frac{(1 - \cos(\theta)^2)^{\frac{0}{2}} d^0}{2}} \cos(\theta)^2$$

$$Y_{0,0}(\Phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (1.49)$$

- $Y_{1,0}(\Phi) = (-1)^0 \sqrt{\frac{(2(1)+1)(1-0)!}{4\pi(1+0)!}} P_{1,0}(\cos(\theta)) e^{i(0)\Phi}$

$$Y_{1,0}(\Phi)$$

$$= (-1)^0 \sqrt{\frac{(2(1) + 1)(1 - 0)!}{4\pi(1 + 0)!} \frac{(1 - \cos(\theta)^2)^{\frac{0}{2}} d^{0+1}}{2}} ((\cos(\theta)^2 - 1) e^{i\Phi})$$

$$Y_{1,0}(\Phi) = 0 \quad (1.50)$$

- $Y_{1,-1}(\Phi) = (-1)^{-1} \sqrt{\frac{(2(1)+1)(1+1)!}{4\pi(1-1)!}} P_{1,-1}(\cos(\theta)) e^{-i\phi}$

$$Y_{1,-1}(\Phi) = (-1)^{-1} \sqrt{\frac{(2(1)+1)(1+1)!}{4\pi(1-1)!}} \frac{(1-\cos(\theta)^2)^{\frac{-1}{2}} d^{-1+1}}{2} (\cos(\theta)^2 - 1) e^{-i\phi}$$

$$Y_{1,1}(\Phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \quad (1.51)$$

- $Y_{1,1}(\Phi) = (-1)^1 \sqrt{\frac{(2(1)+1)(1-1)!}{4\pi(1-1)!}} P_{1,1}(\cos(\theta)) e^{i\phi}$

$$Y_{1,1}(\Phi) = (-1)^1 \sqrt{\frac{(2(1)+1)(1-1)!}{4\pi(1-1)!}} \frac{(1-\cos(\theta)^2)^{\frac{1}{2}} d^{1+1}}{2} (\cos(\theta)^2 - 1) e^{i\phi}$$

$$Y_{1,1}(\Phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \quad (1.52)$$

Reemplazando esos armónicos en la ecuación 1.48 y resolviendo la integral cada término por separado en orden obtenemos las ecuaciones

(1.53),(1.54),(1.55),(1.56) que corresponden a la solución de dichos términos, lo cual se muestra a continuación:

$$\int_0^{2\pi} L_{0,0}(\vec{r}, t) Y_{0,0}(\Phi) d\Phi = \int_0^{2\pi} L_{0,0}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{1}{4\pi}} d\Phi$$

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi}} L_{0,0}(\vec{r}, t) \int_0^{2\pi} d\Phi = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} L_{0,0}(\vec{r}, t) 2\pi \quad (1.53)$$

$$\int_0^{2\pi} L_{1,-1}(\vec{r}, t) Y_{1,-1}(\Phi) d\Phi = \int_0^{2\pi} L_{1,-1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\Phi} d\Phi$$

$$L_{1,-1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\Phi} d\Phi = L_{1,-1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left( \frac{\cos \Phi - i \sin \Phi}{-i} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (1.54)$$

$$\int_0^{2\pi} L_{1,0}(\vec{r}, t) Y_{1,0}(\Phi) d\Phi = \int_0^{2\pi} L_{1,0}(\vec{r}, t) (0) d\Phi = 0 \quad (1.55)$$

$$\int_0^{2\pi} L_{1,1}(\vec{r}, t) Y_{1,1}(\Phi) d\Phi = - \int_0^{2\pi} L_{1,1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\Phi} d\Phi$$

$$L_{1,1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\Phi} d\Phi = -L_{1,1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left( \frac{\cos \Phi - i \sin \Phi}{-i} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0 \quad (1.56)$$

Recopilando los resultados anteriores con la ecuación 1.48 tenemos:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} L_{0,0}(\vec{r}, t) 2\pi + 0 + 0 + 0 \quad (1.57)$$

Y por tanto:

$$L_{0,0}(\vec{r}, t) Y_{0,0}(\hat{s}) = \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \quad (1.58)$$

#### 1.4.2 Términos no Isotrópicos:

Los términos no isotrópicos que denotaremos como una sumatoria tendrán una equivalencia con el vector de flujo bidimensional. Lo cual se demostrara a continuación

$$\sum_{m=-1}^1 L_{1,m}(\vec{r}, t) Y_{1,m}(\hat{s}) = \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s}$$

Empezaremos reemplazando la función de intensidad de los armónicos esféricos en la definición de vector de flujo (ecuación 1.9), de el mismo modo introduciremos el vector unitario  $\hat{s}$  en 2D que esta descrito en la ecuación 1.59. El vector de flujo se compone de parte reales como imaginarias, las cuales depende de las componentes (parte real en x e imaginaria en y), y están descritas en la siguiente sección.

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int_0^{2\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s} d\Omega \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (1.9)$$

$$\hat{s} = (\text{Cos}(\phi), \text{Sin}(\theta)) = \left( \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)], \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i[Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)] \right) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} ([Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)], i[Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)]) \quad (1.59)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) ([Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)], i[Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)]) d\Omega \quad (1.60)$$

#### 1.4.2.1 Parte Real del Vector de Flujo:

$$\vec{J}_x(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) [Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)] d\Omega \quad (1.61)$$

$$\vec{J}_x(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} [L_{0,0}(\vec{r}, t) Y_{0,0}(\hat{s}) + L_{1,-1}(\vec{r}, t) Y_{1,-1}(\hat{s}) + L_{1,0}(\vec{r}, t) Y_{1,0}(\hat{s}) + L_{1,1}(\vec{r}, t) Y_{1,1}(\hat{s})] [Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)] d\Omega$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_x(\vec{r}, t) = & \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} [L_{0,0}(\vec{r}, t)[Y_{0,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) - Y_{0,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi)] \\ & + L_{1,-1}(\vec{r}, t)[Y_{1,-1}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,-1}(\phi)Y_{1,1}(\phi)] \\ & + L_{1,0}(\vec{r}, t)[Y_{1,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi)] + L_{1,1}(\vec{r}, t)[Y_{1,1}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) \\ & - Y_{1,1}(\phi)Y_{1,1}(\phi)] d\phi \end{aligned}$$

A continuación resolveremos las integrales anteriores por aparte, teniendo en cuenta las propiedades de simetría (ecuación 1.43) y las propiedades de ortogonalidad (1.44) para simplificar los cálculos. Las integrales (1.62) y (1.63) tienden a cero por la ortogonalidad, y las integrales (1.64) y (1.65) también tienden a cero por la simetría, por otro lado las integrales (1.66) y (1.67) dan como resultado un valor determinado, cabe resaltar que para resolver estas integrales es necesario reemplazar los armónicos esféricos hallados anteriormente.

$$\int_0^{2\pi} Y_{0,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} Y_{0,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi) d\phi = 0 \quad (1.62)$$

$$\int_0^{2\pi} Y_{1,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} Y_{1,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi) d\phi = 0 \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} Y_{1,-1}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \right] d\phi = \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-2i\phi}] d\phi \\ &= \frac{3}{8\pi} \left( \frac{(\cos \phi)^2 - i(\sin \phi)^2}{-2i} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} Y_{1,1}(\phi)Y_{1,1}(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \right] d\phi = \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} [ e^{2i\phi} ] d\phi \\
 &= \frac{3}{8\pi} \left( \frac{(\cos \Phi)^2 - i (\sin \Phi)^2}{2i} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} Y_{1,1}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \right] d\phi = -\frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= -\frac{3}{8\pi} 2\pi \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} Y_{1,-1}(\phi)Y_{1,1}(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \right] d\phi = -\frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= -\frac{3}{8\pi} 2\pi \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

La parte real del vector de flujo (1.68) se encuentra reescribiendo la ecuación 1.61 con los resultados anteriores.

$$\vec{J}_x(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left[ L_{0,0}(\vec{r}, t)(0) + L_{1,-1}(\vec{r}, t) \left( \frac{3}{4} \right) + L_{1,0}(\vec{r}, t)(0) - L_{1,1}(\vec{r}, t) \left( \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}\vec{J}_x(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left[ L_{1,-1}(\vec{r}, t) \left(\frac{3}{4}\right) - L_{1,1}(\vec{r}, t) \left(\frac{3}{4}\right) \right] \\ \vec{J}_x(\vec{r}, t) &= \left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [L_{1,-1}(\vec{r}, t) - L_{1,1}(\vec{r}, t)]\end{aligned}\quad (1.68)$$

#### 1.4.2.1 Parte Imaginaria del Vector de Flujo.

Tomamos ahora la parte imaginaria del vector de flujo (ecuación 1.60) y aplicamos el mismo procedimiento. Comenzamos con las ecuaciones 1.70 y 1.71 que se hacen cero por ortogonalidad y las ecuaciones 1.72 y 1.73 que son cero por simetría, las demás tienen un valor específico (ecuaciones 1.74 y 1.75)

$$\begin{aligned}\vec{J}_y(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) i [Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)] d\Omega \\ \vec{J}_y(\vec{r}, t) &= \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} [L_{0,0}(\vec{r}, t) Y_{0,0}(\hat{s}) + L_{1,-1}(\vec{r}, t) Y_{1,-1}(\hat{s}) \\ &\quad + L_{1,0}(\vec{r}, t) Y_{1,0}(\hat{s}) + L_{1,1}(\vec{r}, t) Y_{1,1}(\hat{s})] i [Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)] d\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_y(\vec{r}, t) &= \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2\pi} [L_{0,0}(\vec{r}, t)i[Y_{0,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) + Y_{0,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi)] \\
 &\quad + L_{1,-1}(\vec{r}, t)i[Y_{1,-1}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,-1}(\hat{s})Y_{1,1}(\phi)] \\
 &\quad + L_{1,0}(\vec{r}, t)i[Y_{1,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi)] \\
 &\quad + L_{1,1}(\vec{r}, t)i[Y_{1,1}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) \\
 &\quad + Y_{1,1}(\phi)Y_{1,1}(\phi)]]d\phi \quad (1.69)
 \end{aligned}$$

Integrando cada termino por aparte

$$i \int_0^{2\pi} Y_{0,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) d\phi = i \int_0^{2\pi} Y_{0,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi) d\phi = 0 \quad (1.70)$$

$$i \int_0^{2\pi} Y_{1,0}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) d\phi = i \int_0^{2\pi} Y_{1,0}(\phi)Y_{1,1}(\phi) d\phi = 0 \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned}
 i \int_0^{2\pi} Y_{1,-1}(\phi)Y_{1,-1}(\phi) d\phi &= i \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \right] d\phi \\
 &= \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} [i e^{-2i\phi}] d\phi = \frac{3}{8\pi} \left( \frac{(\cos \phi)^2 - i(\sin \phi)^2}{-2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0 \quad (1.72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i \int_0^{2\pi} Y_{1,1}(\phi) Y_{1,1}(\phi) d\phi &= i \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \right] d\phi = \frac{3i}{8\pi} \int_0^{2\pi} [e^{2i\phi}] d\phi \\
 &= \frac{3}{8\pi} \left( \frac{(\cos \Phi)^2 - i(\sin \Phi)^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

$$\begin{aligned}
 i \int_0^{2\pi} Y_{1,1}(\phi) Y_{1,-1}(\phi) d\phi &= i \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \right] d\phi = -\frac{3i}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= -\frac{3i}{8\pi} 2\pi \\
 &= -\frac{3i}{4}
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned}
 i \int_0^{2\pi} Y_{1,-1}(\phi) Y_{1,1}(\phi) d\phi &= i \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \right] d\phi = -\frac{3i}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= -\frac{3i}{8\pi} 2\pi \\
 &= -\frac{3i}{4}
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

Por lo que, la parte imaginaria del vector de flujo queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_y(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left[ L_{0,0}(\vec{r}, t)(0) + L_{1,-1}(\vec{r}, t) \left( -\frac{3i}{4} \right) + L_{1,0}(\vec{r}, t)(0) \right. \\
 &\quad \left. + L_{1,1}(\vec{r}, t) \left( -\frac{3i}{4} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\vec{J}_y(\vec{r}, t) = -\frac{3i}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [L_{1,-1}(\vec{r}, t) + L_{1,1}(\vec{r}, t)] \quad (1.76)$$

Introducimos la parte real e imaginaria del vector de flujo en su ecuación general (ecuación 1.77), y luego resolvemos el producto punto de con el vector unitario  $\hat{s}$ . A esta ecuación resultante le adicionaremos el termino  $L_{1,0}(\vec{r}, t)Y_{1,0}(\phi)$  que es equivalente a cero por tanto no afecta la igualdad (1.78).

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} ([L_{1,-1}(\vec{r}, t) - L_{1,1}(\vec{r}, t)], -i[L_{1,-1}(\vec{r}, t) + L_{1,1}(\vec{r}, t)]) \quad (1.77)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} = \frac{\pi}{2} ([L_{1,-1}(\vec{r}, t) - L_{1,1}(\vec{r}, t)], -i[L_{1,-1}(\vec{r}, t) + L_{1,1}(\vec{r}, t)]) \cdot ([Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)], i[Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)])$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} = \frac{\pi}{2} ([L_{1,-1}(\vec{r}, t) - L_{1,1}(\vec{r}, t)][Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)] + [L_{1,-1}(\vec{r}, t) + L_{1,1}(\vec{r}, t)][Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)])$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} = \frac{\pi}{2} ([L_{1,-1}(\vec{r}, t) - L_{1,1}(\vec{r}, t)][Y_{1,-1}(\phi) - Y_{1,1}(\phi)] + [L_{1,-1}(\vec{r}, t) + L_{1,1}(\vec{r}, t)][Y_{1,-1}(\phi) + Y_{1,1}(\phi)])$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} = \frac{\pi}{2} (2[L_{1,-1}(\vec{r}, t)Y_{1,-1}(\phi) + L_{1,1}(\vec{r}, t)Y_{1,1}(\phi)])$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} = \pi[L_{1,-1}(\vec{r}, t)Y_{1,-1}(\phi) + L_{1,1}(\vec{r}, t)Y_{1,1}(\phi)] \quad (1.78)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} = \pi[L_{1,-1}(\vec{r}, t)Y_{1,-1}(\phi) + L_{1,1}(\vec{r}, t)Y_{1,1}(\phi) + L_{1,0}(\vec{r}, t)Y_{1,0}(\phi)]$$

Finalmente se obtiene el termino de sumatoria que se quería demostrar (1.79).

$$\sum_{m=-1}^1 L_{1,m}(\vec{r}, t)Y_{1,m}(\hat{s}) = \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \quad (1.79)$$

A partir de los armónicos esféricos y todo lo realizado anteriormente llegaremos de la ecuación de transporte (1.14) en forma integral a la RTE en forma diferencial (1.36) o también llamada ecuación de diferencia escalar. Por consiguiente tomaremos la ecuación 1.14 en un espacio bidimensional y la integraremos de 0 a  $2\pi$  con respecto al ángulo ( $\phi$ ) (ecuación 1.80).

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\partial L(\vec{r}^-, \hat{s}, t)}{v \partial t} d\phi + \int_0^{2\pi} \mu_t L(\vec{r}^-, \hat{s}, t) d\phi + \int_0^{2\pi} \nabla \cdot [L(\vec{r}^-, \hat{s}, t) \hat{s}] d\phi \\ & = \int_0^{2\pi} \left[ \mu_s \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}^-, \hat{s}, t) d\Omega' \right] d\phi \\ & + \int_0^{2\pi} \zeta(\vec{r}^-, \hat{s}, t) d\phi \end{aligned} \quad (1.80)$$

Con los armónicos esféricos y con la ecuación (1.79), se mostrara que el termino  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} = 0$ , también en el primer término sustituimos la radianza en 2D (ecuación 1.47).

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} d\phi &= \int_0^{2\pi} \sum_{m=-1}^1 L_{1,m}(\vec{r}, t) Y_{1,m}(\hat{s}) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} [L_{1,-1}(\vec{r}, t) Y_{1,-1}(\phi) + L_{1,1}(\vec{r}, t) Y_{1,1}(\phi) + L_{1,0}(\vec{r}, t) Y_{1,0}(\phi)] d\phi \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} d\phi = L_{1,-1}(\vec{r}, t) \int_0^{2\pi} Y_{1,-1}(\phi) d\phi + L_{1,1}(\vec{r}, t) \int_0^{2\pi} Y_{1,1}(\phi) d\phi + 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} d\phi = L_{1,-1}(\vec{r}, t) \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} d\phi + L_{1,1}(\vec{r}, t) \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} d\phi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} d\phi &= L_{1,-1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left( \frac{\cos \phi - i \sin \phi}{-i} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &+ L_{1,1}(\vec{r}, t) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left( \frac{\cos \phi - i \sin \phi}{i} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.81}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t)}{v \partial t} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \left( \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right)}{2\pi} d\phi$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t)}{v\partial t} d\phi &= \frac{\partial}{v\partial t} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right) d\phi = \\
 &= \frac{\partial}{v\partial t} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right) d\phi = \\
 &= \frac{\partial}{v\partial t} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \right) d\phi + \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right) d\phi \right] = \\
 &= \frac{\partial}{v\partial t} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) 2\pi \right) + 0 \right]
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t)}{v\partial t} d\phi = \frac{\partial \left( \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \right)}{v\partial t} \quad (1.82)$$

Teniendo en cuenta la definición de vector de flujo en 2D (1.83) y reemplazándola en el tercer término  $\int_0^{2\pi} \nabla \cdot [L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s}] d\phi$  obtenemos la ecuación 1.84.

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int_0^{2\pi} [L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s}] d\phi \quad (1.83)$$

$$\int_0^{2\pi} \nabla \cdot [L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s}] d\phi = \nabla \cdot \int_0^{2\pi} [L(\vec{r}, \hat{s}, t) \hat{s}] d\phi = \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (1.84)$$

Para el segundo término reemplazamos la definición de fluencia bidimensional (1.8)

$$\int_0^{2\pi} \mu_t L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\phi = \mu_t \int_0^{2\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\phi = \mu_t \Phi(\vec{r}, t) \quad (1.85)$$

Sustituimos la ecuación 1.44 en el cuarto término de 1.80  $\int_0^{2\pi} \left[ \mu_s \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\Omega' \right] d\phi$  para simplificar los cálculos luego con ayuda de la ecuación 1.6 resolvemos la integral que depende del ritmo de fluencia, en la otra integral aplicamos la definición de producto punto (1.88), y luego reemplazamos en (1.86).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \left[ \mu_s \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\Omega' \right] d\Omega \\
 &= \mu_s \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \left( \frac{1}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right) d\Omega' d\Omega \\
 &= \frac{\mu_s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \left( \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \right) d\Omega' d\Omega \\
 &+ \frac{\mu_s}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \left( \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right) d\Omega' d\Omega \tag{1.86}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \left( \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \right) d\Omega' d\Omega &= \frac{\mu_s}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \int_0^{2\pi} d\Omega = \frac{\mu_s}{2\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) 2\pi \\
 &= \mu_s \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \tag{1.87}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_s}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \left( \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right) d\Omega' d\Omega &= \frac{\mu_s}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') \left( |\vec{J}(\vec{r}, t)| |\hat{s}| \cos \phi \right) d\phi' d\phi \\
 &= \frac{\mu_s}{\pi} |\vec{J}(\vec{r}, t)| |\hat{s}| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') (\cos \phi) d\phi' d\phi \\
 &= \frac{\mu_s}{\pi} |\vec{J}(\vec{r}, t)| |\hat{s}| \int_0^{2\pi} (\cos \phi) d\phi = 0 \tag{1.88}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \left[ \mu_s \int_0^{2\pi} P(\hat{s}, \hat{s}') L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\Omega' \right] d\Omega = \mu_s \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \quad (1.89)$$

Para el último término de (1.80) consideraremos una fuente isotrópica para representarla como (1.90):

$$\int_0^{2\pi} \zeta(\vec{r}, \hat{s}, t) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{\zeta(\vec{r}, t)}{2\pi} d\phi = \frac{\zeta(\vec{r}, t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \zeta(\vec{r}, t) \quad (1.90)$$

Con lo anterior (ecuaciones 1.82; 1.84; 1.85; 1.89; 1.90) ahora reconstruimos la ecuación (1.80) o RTE, lo que quiere decir que los armónicos esféricos son una solución de esta ecuación:

$$\frac{\partial (\vec{\Phi}(\vec{r}, t))}{v \partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \mu_t \Phi(\vec{r}, t) = \mu_s \Phi(\vec{r}, t) + \zeta(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial (\vec{\Phi}(\vec{r}, t))}{v \partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \mu_a \Phi(\vec{r}, t) = \zeta(\vec{r}, t) \quad (1.91)$$

Esta última ecuación puede ser descrita en términos de la fluencia y el coeficiente de difusión fotonica (1.27 a), utilizaremos el gradiente de la fluencia que se describe en la ecuación (1.92), como resultado obtendremos la RTE en forma diferencial (ecuación 1.93).

$$\nabla\Phi(\vec{r}, t) = -3(\mu_a + \mu'_s)\vec{J}(\vec{r}, t) \quad (1.92)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\nabla\Phi(\vec{r}, t)}{-3(\mu_a + \mu'_s)} \quad (1.92)$$

Reemplazando  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  en (1.91)

$$\frac{\partial(\vec{\Phi}(\vec{r}, t))}{v \partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{-\nabla\Phi(\vec{r}, t)}{3(\mu_a + \mu'_s)} \right) + \mu_a\Phi(\vec{r}, t) = \zeta(\vec{r}, t) \quad (1.91)$$

$$\frac{\partial(\vec{\Phi}(\vec{r}, t))}{\partial t} - \nabla \cdot (D(\vec{r})\nabla\Phi(\vec{r}, t)) + v\mu_a\Phi(\vec{r}, t) = v\zeta(\vec{r}, t)$$

Ordenando los términos tenemos la RTE:

$$\nabla \cdot (D(\vec{r})\nabla\Phi(\vec{r}, t)) - \frac{\partial(\vec{\Phi}(\vec{r}, t))}{\partial t} - v\mu_a\Phi(\vec{r}, t) + v\zeta(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.92)$$

### 1.5 CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera son muy importantes cuando se trabaja una ecuación diferencial, pues dan información en este caso de los procesos que ocurren en los límites del medio dando así mayor claridad sobre las dependencias de ciertas variables, a los cambios del sistema.

### 1.5.1 Las Condiciones de Contorno en la Interfaz entre el Medio Difuso y el Medio no Dispersivo

Los límites de la superficie de dispersión pueden ser de distintas formas entre ellas planas o convexas, una característica de la interfaz plana es que el tejido es semi-infinito ya que la mitad está limitada por aire que no es dispersivo, por tanto en esta área la radianza será total, en la ilustración 7 se muestra la radiación que entra al medio difuso en la dirección  $\hat{s}$  con un ángulo de dispersión  $\theta$ , esta es dispersada en una dirección  $\hat{s}'$  con el mismo ángulo por una fuente espejo con respecto a  $\Sigma$ .

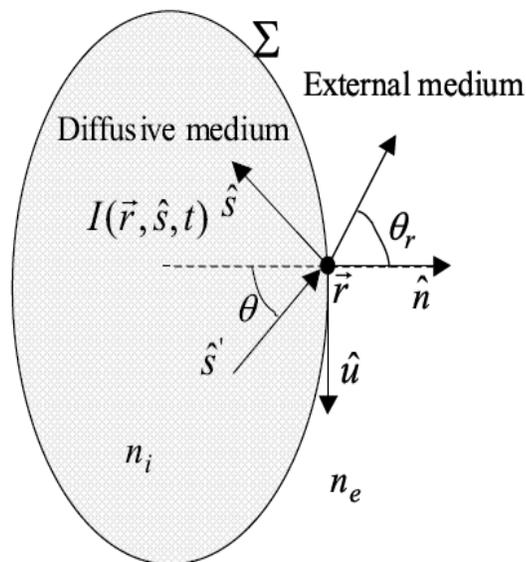


Figura 7. Dispersión de la radianza en la frontera de un medio turbio.

Este proceso puede ser representado por la ley de Fresnel, que describe a  $(\hat{s} \cdot \hat{n})$  como el coeficiente de reflexión de Fresnel para luz no polarizada que viene del medio (ecuación 1.93)

$$(\hat{s} \cdot \hat{n}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{n_i \cos(\theta) - n_e \cos(\theta_r)}{n_i \cos(\theta) + n_e \cos(\theta_r)} \right)^2 + \left( \frac{n_e \cos(\theta) - n_i \cos(\theta_r)}{n_e \cos(\theta) + n_i \cos(\theta_r)} \right)^2 \right], & 0 < \theta < \theta_c \\ 1, & \theta \geq \theta_c = \arcsen\left(\frac{n_e}{n_i}\right) \end{cases} \quad (1.93)$$

Asumiremos para este caso que en la frontera entre el aire y el tejido la radianza dispersada es nula ya que esta solo se presenta cuando esta la luz en contacto con el tejido, debemos tener en cuenta que si se anula la radianza dispersada el vector unitario  $\hat{s}$ , debe apuntar a adentro del tejido que debe tener un índice de refracción diferente; esto quiere decir que no habrá energía viajando por la frontera y si la hay la despreciaremos. El vector de flujo que va en dirección del tejido también se anula por ser la radianza dispersada cero, sin embargo va a existir una proyección de vector de flujo sobre  $\hat{n}$  definido como  $\vec{J}_n(\vec{r}, t)$ , que es una condición de contorno para la radiación total en el sistema; entonces la radianza incidente es causada por las reflexiones de Fresnel que va hacia fuera de la interfaz.

$$\vec{J}_n(\vec{r}, t) = \int_0^{2\pi} L_s(\vec{r}, \hat{s}, t) (\hat{s} \cdot \hat{n}) d\Omega = 0 \quad (1.94)$$

Si introducimos la ecuación 1.20 a (radianza dispersada) en la ecuación anterior tenemos la ecuación 1.95, por la ecuación de continuidad podemos deducir la ecuación (1.96) donde los índices de refracción, la fluencia y el vector de flujo deben mantenerse constantes en la frontera.

$$\vec{J}_n(\vec{r}, t) = \int_0^{2\pi} L_o(\vec{r}, t)(\hat{s} \cdot \hat{n})d\Omega + \int_0^{2\pi} \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} (\hat{s} \cdot \hat{n})d\Omega = 0 \quad (1.94)$$

$$|\vec{J}_n(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}|_{\vec{r} \in A} = |\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}|_{\vec{r} \in A} \quad (1.95)$$

Teniendo en cuenta que  $n_e$  representa el índice de refracción del medio externo y  $n_i$  se define como el índice de refracción del medio difuso, así como  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia en dirección  $\hat{s}$  y  $\theta_r = \arcsen\left(\frac{n_i}{n_e}\right) \sin \theta$  es el ángulo de refracción, por tanto  $(\hat{s} \cdot \hat{n}) = \text{Cos}(\theta)$ . Definiremos a  $z$  paralelo a  $\hat{n}$  (ilustración 9), y utilizando la ecuación 1.20 b así como el vector de flujo se definirá como  $\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}_u \hat{u} + \vec{J}_n \hat{n}$  con  $\hat{u}$  tangente a la superficie, por tanto  $(\hat{u} \cdot \hat{n}) = \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta)$ , recordando también la definición de ángulo solido  $d\Omega = \text{Sen}(\theta) d\theta d\varphi$  procedemos a resolver las integrales (ecuación 1.94). Quedando las ecuaciones (1.97) y (1.98), reescribiendo la ecuación 1.94 quedando como (1.99) lo que significa que el vector de flujo va en dirección de  $\hat{n}$ . En la ecuación (1.100) se define el vector de flujo en la superficie que es nulo ya que la radianza dispersada también lo es

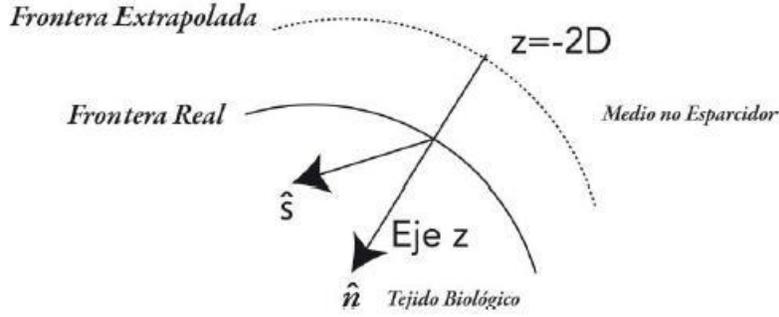


Figura 8. Condiciones de frontera.(frontera extrapolada) Tomada del artículo [Cadena Pérez, 2012]

$$\vec{J}_n(\vec{r}, t) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right] (\hat{s} \cdot \hat{n}) d\Omega = 0 \quad (1.96)$$

Haciendo por aparte las dos integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \right] (\hat{s} \cdot \hat{n}) d\Omega \\ = \frac{1}{4\pi} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) 2\pi \int_0^{\pi/2} \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) d\theta = \frac{1}{4} \vec{\Phi}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{s} \right] (\hat{s} \cdot \hat{n}) d\Omega &= \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\vec{J}_u \hat{u} + \vec{J}_n \hat{n}) \hat{s} (\hat{s} \cdot \hat{n}) d\Omega \\ &= \frac{3}{4\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\vec{J}_u \hat{u} \cdot \hat{s}) (\hat{s} \cdot \hat{n}) d\Omega + \int_0^{2\pi} (\vec{J}_n \hat{n} \cdot \hat{s}) (\hat{s} \cdot \hat{n}) d\Omega \right) \\ &= \frac{3}{4\pi} \left[ \vec{J}_u \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(\varphi) \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 d\theta d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \vec{J}_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\theta) (\cos(\theta))^2 d\theta \right] = \frac{3}{4\pi} \vec{J}_n \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{\vec{J}_n}{2} \end{aligned} \quad (1.98)$$

Recopilando lo anterior:

$$\vec{J}_n(\vec{r}, t) = \frac{1}{4}\Phi_S(\vec{r}, t) + \frac{1}{2}\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} = 0 \quad (1.99)$$

$$\Phi_S(\vec{r}, t) + 2\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} = 0 \quad (1.100)$$

Sustituyendo la ecuación (1.34) en (1.100), y asumiendo que  $\vec{r}$  esta alejado de la fuente, podemos escribir la ecuación (1.101)

$$\Phi_S(\vec{r}, t) - 2D \frac{\partial}{\partial z} \Phi_S(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} = 0$$
$$\Phi_S(z = 2D, t) = \Phi_S(z = 0, t) - 2 \left[ D \frac{\partial}{\partial z} \Phi_S(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} \right] \Big|_{z=0} = 0 \quad (1.101)$$

En el capítulo 1 se realizó un análisis de la utilidad de la óptica difusa dando un bosquejo de los términos más importantes en el tratamiento de esta tecnica con la aproximación de la RTE por difusión y sus respectivas soluciones, tomando en cuenta las condiciones de los tejidos biológicos los cuales determinan diferentes aproximaciones en nuestra ecuación en términos de difusión y condiciones de frontera, dado que la cantidad de partículas presente en este análisis es muy grande se trabajó con una ecuación probabilística (la ecuación de H-G (Henyey-Greenstein)  $P(\hat{s}, \hat{s}')$  (ecuación 1.2)) que mide la cantidad de energía presente en todo el proceso. Estos parámetros son las bases para trabajar el cáncer de mama, lo cual se analizara en el siguiente capítulo.

# CAPITULO 2: CÁNCER DE MAMA, IMÁGENES Y ESPECTROSCOPIA

El cáncer de mama es una patología que afecta a aproximadamente una de cada ocho mujeres y aproximadamente el 30% de estas tienden a fallecer (Street). Muchas técnicas reducen las tasas de morbilidad y de mortalidad de cáncer de mama, la modalidad de diagnóstico solo es capaz de predecir la mayoría de situaciones que se presentan. Para un buen diagnóstico es necesaria la detección precisa y caracterización de tumores, mientras que para realizar el tratamiento son necesarias las predicciones sobre la eficacia la terapia. Existen varias técnicas que se utilizan para la detección de cáncer, una de ellas es la Mamografía de rayos X, esta tiene una alta tasa de falsos canceres (falsos negativos) en mujeres menores 50 años de edad y debido a la ionización de los rayos x no puede ser utilizado con demasiada frecuencia, el alto costo y el bajo rendimiento de otras técnicas tales como la ecografía y resonancia magnética (MRI), y la mamografía de rayos X que no son muy específicas (MRI) y técnicas con una baja sensibilidad (ultrasonido). Casi Todas las técnicas de imagen mencionadas anteriormente se basan en las diferencias anatómicas entre los tumores y tejidos sanos. La tomografía por emisión de positrones (PET) utiliza el contraste del tumor funcional, revisando el comportamiento de la glucosa; esta técnica es utilizada para mirar el estado de metástasis del tumor, una desventaja de esta técnica es el costo y la inyección de isótopo radiactivo. Por lo anterior son necesarios nuevos métodos que realicen mejor diagnóstico y ayuden a controlar la progresión del tumor durante la terapia del cáncer.

La tomografía óptica difusa y la espectroscopia del Infrarrojo cercano se vuelven alternativas con potencial para mejorar la sensibilidad y certeza en la detección y diagnóstico del cáncer de mama, ya que son procesos de contraste muy utilizados. La óptica difusa por presentar información respecto a la oxigenación y la vascularización del tumor es una buena alternativa, además su uso no representa algún peligro en cuanto a ionización o invasión (cirugías), es de bajo costo, rápido y portátil.

Se han realizado muchos algoritmos e instrumentos que utilizan la óptica difusa, con el fin de utilizarse para el desarrollo de la mamografía óptica y de monitorización de tumores. Estos van desde hand-held sistemas de remisión (Xuefeng Cheng, 2003), a los sistemas de escaneo en tándem (Xuefeng Cheng, 2003) para tomografías tridimensionales complejas. Estos instrumentos tienen diferentes características, como: la geometría de medición (remisión, placas paralelas, anillo / cono), tipo de detección (CW, FD, TD), tipo de longitud de onda utilizado (banda ancha o banda discreta de longitudes de onda) y los números de fuente / detector (Durduran, 2010).

## **2.1. MAMOGRAFÍA ÓPTICA DIFUSA BASADA EN EL CONTRASTE DE ENDÓGENA**

### **2.1.1. Propiedades Endógenas de Tejido Mamario Normal**

Para estudiar el comportamiento de la óptica difusa en el tejido mamario, primero definiremos las propiedades de la mama normal, los tejidos mamarios por lo general tienden a ser sensibles dependiendo de la edad de la paciente y del estado hormonal.

Los tejidos subcutáneos de la mama son el tejido adiposo, glandular y estroma fibroso, siendo por lo anterior el suministro de sangre más rico en las áreas glandulares, por lo que la concentración de hemoglobina será grande en zonas con alto contenido glandular y pequeña en zonas con alto tejido adiposo.

Es difícil saber en realidad la cantidad de tejido adiposo que contiene la mama, para poder establecer una aproximación de esta se utiliza el índice de masa corporal (IMC) o patrones mamográficos del parénquima. Una correlación significativa entre el THC y el IMC, se ha encontrado que el IMC elevado es una indicación de alto contenido de tejido adiposo, patrones de parénquima de mamografía se pueden derivar de las características de atenuación de rayos X de grasa (radio lúcida) y tejidos epiteliales y del estroma (radio densos) (Durduran, 2010). También tendremos en cuenta que el contenido de agua y de lípidos junto con el patrón del parénquima mamográfica, es un indicador de la composición del tejido adiposo y fibroso Contenido.

Los estudios de clasificación de patrones de la mamografía de rayos X, se encontró que las mujeres con tejido denso en más de un 60-75% de la mama están en 4-6 veces mayor en riesgo de padecer cáncer de mama que otros.

### 2.1.2. La Detección del Cáncer de Mama y su Caracterización.

Las propiedades de los tejidos pueden ser identificadas con las técnicas del DOT y DOS, con estas técnicas en muchos estudios se ha visto un gran contraste de THC en tumores malignos (Jakubowski, y otros, 2004), las cantidades THC son mayores en tumores que en tejidos normales, porque los tumores tienden a tener una angiogénesis, para una mayor oxigenación y una gran entrada de nutrientes.

Por lo que un gran contraste de THE representa gran densidad micro vascular en los tumores es común que su crecimiento sea acelerado, por esto los organelos de las células cancerígenas presentan una alta densidad, lo que afecta el fenómeno de difusión de la luz, esto está siendo utilizado para la predecir con una mayor eficacia las posibles terapias para tratar el cáncer. Muchos tumores presentan niveles bajos de oxígeno (hipoxia) que son debidos al hipermetabolismo o pueden tener niveles altos, esto es debido a múltiple factores como el metabolismo, la etapa del cáncer, el tipo de cáncer. Se puede decir que las ubicaciones del tumor hechas por contraste óptico (difusión) coinciden con las ubicaciones fisiológicas resonancia magnética y / o PET. (Soren D. Konecky 1, 2008)

Si tenemos una variable X la cual denota el tipo de lesión , X es mayor si es un cáncer maligno y menor si es benigno, va a existir un valor umbral ( $X_{\text{limite}}$ ), todas las lesiones en consideración se pueden agrupar en los siguientes cuatro categorías

**Verdadero positivo TP**, lesiones que son malignas con total certeza; **Falso negativo FN**, lesiones malignas pero no con certeza , pueden resultar benignas; **verdadero negativo TN**, lesiones totalmente benignas; **falso positivo FP**, lesiones benignas, pero no con exactitud, pueden resultar malignas.

Podemos representar las variables anteriores como tasas, de la siguiente manera:

$$FPR = \frac{FP}{(TN + FP)} \quad (\text{Tasa de falsos positivos})$$

$$TPR = \frac{TP}{(TP + FN)} \quad (\text{tasa de verdaderos positivos})$$

Por consiguiente la curva ROC es construida colocando la tasa de verdaderos positivos en el eje horizontal y la tasa de falsos positivos en el eje vertical con diferentes  $X_{\text{limite}}$ . (Valores umbrales). Un buen diagnóstico en esta curva se da cuando la *tasa de verdaderos positivos* es 1 y *Tasa de falsos positivos* es 0, se diferencian los enfermos y los sanos; por el contrario en un mal diagnóstico, la curva ROC representa una recta lineal (con pendiente 1) en la cual la probabilidad de los enfermos y sanos es de 50%, independientemente del umbral.

Por lo tanto, un «espacio más grande bajo curva ROC '(AUC) implica una mejor prueba / método. AUC del 50% corresponde a una pendiente ROC de la unidad (es decir, una prueba inútil). Se utiliza un umbral basado en una combinación de THC relativa y StO<sub>2</sub> (derivado por DOS) de los tumores en comparación con el tejido de la mama contralateral y obtenida 95 % AUC de discernir el cáncer a partir de tejido normal. (Durduran, 2010).

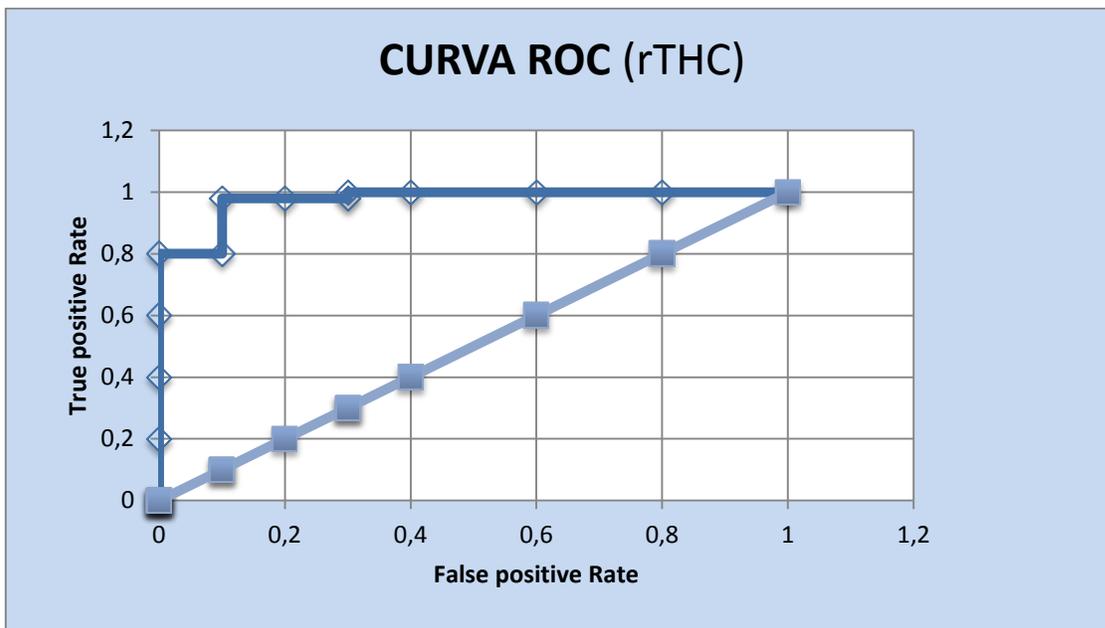


Figura 9. Receptor-operativo de la curva característica de rTHC mostrando cierta tasa positiva de lesiones malignas en comparación con tasa de falsos positivos para lesiones benignas

False positive Rate	True positive Rate
0	0
0	0,2
0	0,4
0	0,6
0	0,8
0,1	0,8
0,1	0,98
0,2	0,98
0,3	0,98
0,3	1
0,4	1
0,6	1
0,8	1
1	1

Tabla 1.DATOS DE LA CURVA ROC (Tomados del documento (Durduran, 2010))

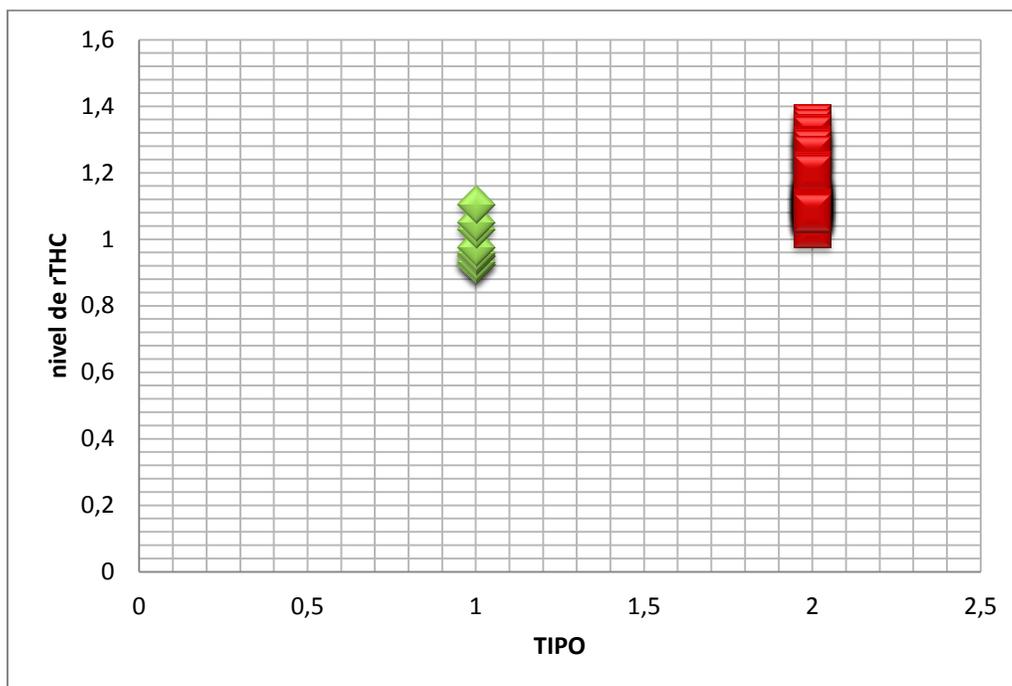


Figura 10. Relación de hemoglobina total en tumores anormales, con 10 lesiones benignas y 41 malignas

En otro estudio Steven P. Poplack obtuvo un 88% AUC para la diferenciación de cáncer del tejido normal (Steven P. Poplack, 2007), y 76% AUC utilizando RTHC para diferenciar de lesiones benignas a las malignas con 3D DOT imágenes para un subconjunto de sujetos con lesiones mayores de 6 mm (Durduran, 2010); su ABC se redujo cuando las lesiones más pequeñas se incluyen en el conjunto de datos. En otros trabajos se han extraído los parámetros ópticos de imágenes reconstruidas en 3D basados en la selección guiada por RM en la región de interés, hay una clara distinción entre lesiones benignas y malignas en relación tumor-a la normalidad de THC con AUC mayor que 90%. Se observaron tendencias similares en contraste tumoral-anormal de HbO<sub>2</sub> y el coeficiente de dispersión del tejido. Mientras AUC de DOS / DOT son relativamente altos, mostrando el potencial de DOS / DOT para diferenciar los tumores malignos de tumores benignos o incluso saludables, la metodología de óptica difusa necesita más evaluación ya que el número de sujetos sigue siendo bajo en comparación con otras modalidades de imagen (Choe R1, 2009)

## **2.2. MAMOGRAFÍA ÓPTICA BASADA EN EL CONTRASTE DE EXÓGENA**

La óptica difusa puede ser aplicada usando el contraste del tumor, el cual es provocado por colorantes exógenos, esto con el fin de mejorar los resultados (Vasilis Ntziachristos, 2000).

La utilización de colorantes en la detección de lesiones cancerígenas, da gran una ventaja en la ubicación del carcinoma (detección y especificidad) y pueden establecer los parámetros en el tejido, como la pO<sub>2</sub>, el pH y el calcio en las células.

Esta técnica se ha empezado a utilizar también en el monitoreo de la terapia, con la quimioterapia se puede extender el tiempo de vida para un cáncer avanzado (alcanzan aproximadamente los 5 cm), pues con esto se controla las respuestas del tumor con el tratamiento, y se pueden ver los avances, ya que los cambios producidos por la quimioterapia se ven reflejados en alteraciones biológicas y fisiológicas de este.

Los resultados demuestran que, incluso antes de clínica eO imagen de la evidencia de la reducción del tumor son medibles, los cambios en la vascularización del tumor se pueden ver a través de embotamiento de la curva de aumento dinámico después de la administración intravenosa de agentes de contraste de gadolinio. Además, la tomografía por emisión de positrones (PET) se ha encontrado que los cambios metabólicos de cáncer debido a la terapia del cáncer pueden preceder a cambios morfológicos por hasta ocho días (L, 1998) DCEMRI y PET, sin embargo, son caros y no son prácticos para la monitorización frecuente. La viabilidad de la aplicación de técnicas ópticas difusas en el contexto de monitorización de la terapia del cáncer se ha demostrado con éxito en instrumentos de imagen (Choe, 2005) y con sondas de mano (Zhou, 2007). Hasta el momento, el tamaño y / o propiedades de tumor (por ejemplo, el THC, HbO<sub>2</sub>, agua) detectada por métodos ópticos difusas han correlacionado bien con la respuesta del paciente a la quimioterapia (es decir, completa, parcial o ninguno) (Jiang, 2009)

### **2.3. PERSPECTIVAS: MAMOGRAFÍA ÓPTICA**

El campo de la óptica difusa, tal como se aplica a la detección y la vigilancia del cáncer de mama, está evolucionando rápidamente. Instrumentación innovadora y de reconstrucción con algoritmos se han desarrollado y combinado para mejorar la fidelidad de la imagen, y estos factores seguirán mejorando con el tiempo. Además, las estadísticas a partir de datos de cáncer de mama en vivo proporcionan información sobre los aspectos biológicos y ayudan a la orientación para el uso de una instrumentación más enfocada y el desarrollo de mejores algoritmos. (Durduran, 2010).se ha demostrado que el tamaño del tumor influye en su detectabilidad, los tumores de 1 cm son fácilmente detectables con el contraste de hemoglobina (Choe R1, 2009), la sensibilidad del tumor y disminución especificidad que el tamaño de la lesión se hace más pequeño (Poplack S P, 2007).

Los resultados de la tomografía de óptica difusa depende de varios factores, como por ejemplo: el volumen en cuestión y su profundidad(tumor), el número de fuentes y detectores, la información a priori de espacio, el campo de observación de las optodes y optodos Mientras que el nivel actual de puntos de resolución plantea algunas barreras para su uso, como una modalidad de imagen independiente para la detección del cáncer, la detectabilidad del cáncer no está limitada por la resolución y puede ser utilizada de manera complementaria con otras modalidades de formación de imágenes en la detección y el diagnóstico de tumores (Durduran, 2010)

Se han realizado estudios para mejorar la diferenciación de tumores con tejido normal, empleando más longitudes de onda para explorar las concentraciones agua, lípidos colágeno; por consiguiente se ha encontrado que la concentración de agua es mayor en tumores que en tejido normal, y que la concentración de lípidos es menor en tumores. (Gu X J, 2004).los experimentadores han encontrado que el flujo de sangre en el cáncer de mama es más grande que en los tejidos normales de mama (Zhou, 2007)

El papel clínico más eficaz para tomografía óptica difusa en la detección, el diagnóstico y el tratamiento de monitoreo de cáncer de mama aún no se ha determinado. Sin embargo, está claro que el DOT y DOS proporcionan información funcional exquisita directamente relacionada con la fisiopatología del tumor (por ejemplo, la actividad metabólica, la angiogénesis y el flujo de sangre / concentración), y complementaria a la información estructural y funcional proporcionada por los métodos convencionales. (Durduran, 2010)

Podemos decir que la óptica difusa puede satisfacer las necesidades en el ámbito de detección y tratamiento del cáncer, como vimos en el capítulo 2 la óptica difusa aplicada al cáncer de mama tiene múltiples ventajas en comparación con otros. Sin embargo, así como en otros métodos para este fin, y dado que el cáncer tiene un sinfín de características diferentes en cada paciente la óptica difusa necesita un historial de mediciones para los diferentes casos de lesiones o tumores, así como características médicas del paciente y del tumor. En conclusión el estudio de la óptica difusa hasta ahora comienza, y es necesario hacerlo para dar diagnósticos aún más precisos.

### **CONCLUSIONES:**

En el análisis realizado en este trabajo y los resultados que muestra el artículo (Durduran, 2010) se puede deducir que la óptica difusa puede ser herramienta en cuanto a la detección de tumores dado que su solución por armónicos esféricos es una ecuación fácil de manejar, teniendo en cuenta las distintas variables presentes en el tejido. Cómo se observó en el trabajo anterior el nivel de investigación de la óptica difusa sigue siendo muy pequeño con respecto a los estudios concernientes con métodos más utilizados, por tanto hay una gran gama de aplicaciones y observaciones por hacer con respecto a la óptica difusa; hablando del cáncer de mama las observaciones hechas en pacientes también son mínimas comparadas con estudios con otros métodos, (Choe R1, 2009) (Choe, 2005) (Durduran, 2010) (Zhou, 2007) aunque hay muchos factores que quedan por estudiar o están siendo estudiados, para hacer de la óptica difusa la mejor opción para la detección del cáncer.

En el capítulo 1 se realizó un análisis de la utilidad de la óptica difusa dando un bosquejo de los términos más importantes en el tratamiento de esta técnica con la aproximación de la RTE por difusión y sus respectivas soluciones, tomando en cuenta las condiciones de los tejidos biológicos los cuales determinan diferentes aproximaciones en nuestra ecuación en términos de difusión y condiciones de frontera, dado que la cantidad de partículas presente en este análisis es muy grande se trabajó con una ecuación probabilística (la ecuación de H-G (Henyey-Greenstein)  $P(\hat{s}, \hat{s}')$  (ecuación 1.2)) que mide la cantidad de energía presente en todo el proceso.

Podemos decir que la óptica difusa puede satisfacer las necesidades en el ámbito de detección y tratamiento del cáncer, como vimos en el capítulo 2 en donde se

observó resultados presentes en el artículo (Durduran, 2010) la óptica difusa aplicada al cáncer de mama tiene múltiples ventajas en comparación con otros. Sin embargo, así como en otros métodos para este fin, y dado que el cáncer tiene un sinfín de características diferentes en cada paciente la óptica difusa necesita un historial de mediciones para los diferentes casos de lesiones o tumores, así como características médicas del paciente y del tumor. En conclusión el estudio de la óptica difusa hasta ahora comienza, y es necesario hacerlo para dar diagnósticos aún más precisos.

## Bibliografía

- Choe. (2005). Diffuse optical tomography of breast cancer during neoadjuvant chemotherapy: a case study with comparison to MRI. *Med. Phys.*
- Choe R1, K. S. (2009, MARZO-ABRIL). *NCBI*. Retrieved from <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19405750>
- Durduran, T. (2010). Diffuse optics for tissue monitoring and. *IOPSCIENCE*.
- Gu X J, Z. Q. (2004). Differentiation of cysts from solid tumors in the breast with diffuse optical tomography *Acad. Radiol.*
- Jakubowski, D. B., Cerussi, A. E., Bevilacqua, F., Shah, N., Hsiang, D., Butler, J., et al. (2004). *SPIE*. Retrieved from <http://biomedicaloptics.spiedigitallibrary.org/article.aspx?articleid=1101690>
- Jiang. (2009). Evaluation of breast tumor response to neoadjuvant chemotherapy with tomographic diffuse optical spectroscopy: case studies of tumor region-of-interest changes.
- L, W. R. (1998). Overview of the current status of PET in breast cancer imaging. *Q. J. Nucl.*
- Martelli, F. (2010). *Ligth Propagation through Biological Tissue and Other Diffusive Media*. Bellingham, Washington: SPIE(Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers).
- Ntziachristos V, Y. A. (2000). *PNAS*. Retrieved from <http://www.pnas.org/content/97/6/2767.full>
- Poplack S P, T. T. (2007). Electromagnetic breast imaging. *Results of a pilot study in women with abnormal mammograms radiology*.
- Society, A. C. (n.d.). *American Cancer Society*. Retrieved 2016, from <http://www.cancer.org/research/cancerfactsstatistics/index>
- Soren D. Konecky 1, a. ., (2008). *Medical Physis*. Retrieved from <http://scitation.aip.org/content/aapm/journal/medphys/35/2/10.1118/1.2826560>
- Steven P. Poplack, M. T. (2007, mayo). Electromagnetic Breast Imaging: Results of a Pilot Study in Women with Abnormal Mammograms.
- Vasilis Ntziachristos, B. C. (2000, noviembre 29). *Breast Cancer*. Retrieved from <http://breast-cancer-research.biomedcentral.com/articles/10.1bcr269186/>
- Xuefeng Cheng, J.-m. M. (2003). *The Optical Society (The Optical Society of America, Inc)*. Retrieved from The Optical Society (The Optical Society of America, Inc): <https://www.osapublishing.org/ao/abstract.cfm?uri=ao-42-31-6412>

Zhou. (2007). Diffuse optical monitoring of blood flow and oxygenation in human breast cancer during early stages of neoadjuvant chemotherapy. J. Biomed. Opt.