

INFLUENCIA DE LA RAZÓN DE CONCENTRACIÓN DE IMPUREZAS DEL  
MATERIAL EN EL ACOPLAMIENTO CUASI-DEGENERADO DE DOS ONDAS,  
EN CRISTALES FOTORREFRACTIVOS

Braiylans Miguel Barrera Piñeros

Trabajo de grado presentado para optar el título de físico



GRUPO DE ÓPTICA MODERNA, PROGRAMA DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

PAMPLONA, 2016

INFLUENCIA DE LA RAZÓN DE CONCENTRACIÓN DE IMPUREZAS DEL  
MATERIAL EN EL ACOPLAMIENTO CUASI-DEGENERADO DE DOS ONDAS,  
EN CRISTALES FOTORREFRACTIVOS

Braiylans Miguel Barrera Piñeros

Trabajo de grado presentado para optar el título de físico

Directores:

Dra. Martha Lucía Molina Prado

Dr. Nestor Alonso Árias Hernandez

GRUPO DE ÓPTICA MODERNA, PROGRAMA DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y GEOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

PAMPLONA, 2016

# Dedicatoria

---

Quiero dedicar este logro a mi abuela Ester Piñeros, a mi madre Martha Barrera y a mis tías Barbara Barrera y Elena Barrera.

“Apoyo incondicional!! Gran arma para forjar grandes personas”

# Agradecimientos

---

Agradezco a mi familia, en especial a mi abuela Ester Piñeros, a mis padres Martha Barrera y Rodolfo rojas, a mis tías Barbara Barrera y Elena Barrera por el apoyo incondicional en este proceso de aprendizaje.

También le agradezco: A mi directora de tesis Dra. Martha Lucia Molina Prado por su valioso tiempo dedicado y por creer en mí, a mis compañeros y colegas de física (parceros todos) y a todos los docentes del departamento de física y geología de la Universidad de Pamplona que estuvieron involucrados en mi proceso de aprendizaje.

Muchísimas gracias.

*Brayans M Barrera,*

# Tabla de contenido

|  |           |
|--|-----------|
| Dedicatoria.....   | 3         |
| Agradecimientos.....   | 4         |
| Lista de ilustraciones .....   | 7         |
| Resumen .....  | 9         |
| Introducción.....  | 10        |
| <b>Capítulo 1</b> .....  | <b>1</b>  |
| <b>1. Introducción al fenómeno fotorrefractivo</b> .....   | <b>1</b>  |
| 1.1. Materiales fotorrefractivos .....   | 1         |
| 1.2. Fenómeno fotorrefractivo.....   | 2         |
| 1.2.1. Representación pictórica del efecto fotorrefractivo.....  | 3         |
| 1.3. Modelo de bandas (Kuktharev).....   | 5         |
| 1.3.1. Ecuaciones de los materiales .....  | 6         |
| <b>Capítulo 2</b> .....  | <b>9</b>  |
| <b>2. Mezclado de dos ondas en medios fotorrefractivos</b> .....   | <b>9</b>  |
| 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado. ....  | 10        |
| 2.1.1. Caso co-direccional .....   | 19        |
| 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado .....  | 30        |
| 2.2.1. Caso co-direccional .....   | 45        |
| <b>Capítulo 3</b> .....  | <b>54</b> |
| <b>3. Análisis de las intensidades para el mezclado cuasi-degenerado de dos ondas</b> .....                                | <b>54</b> |
| 3.1. Análisis de las intensidades en términos de la razón de concentración $rNDNA$ , con diferentes modulaciones $M$ ..... | 55        |
| 3.2. Análisis de las intensidades en términos de la frecuencia de oscilación ( $\Omega$ ). ....                            | 58        |
| 3.3. Análisis de las intensidades en términos de la constante de acoplamiento ( $\gamma_0$ ).....                          | 59        |

# Tabla de contenido

---

|                     |  |           |
|---------------------|--|-----------|
| 3.4.                | Análisis de las intensidades Para materiales fotorrefractivos <i>BSO</i> y <i>BaTiO3</i> . .....                                 | 61        |
| <b>Capítulo 4</b>   | .....  | <b>63</b> |
| <b>4.</b>           | <b>Análisis de la ganancia para el mezclado cuasi-degenerado de dos ondas</b> .....  | <b>63</b> |
| 4.1.                | Análisis de la ganancia en términos de la razón de concentración <i>rNDNA</i> , para diferentes modulaciones ( <i>M</i> ). ..... | 63        |
| 4.2.                | Análisis de la ganancia en términos de la diferencia de oscilación ( $\Omega$ ).....   | 66        |
| 4.3.                | Análisis de la ganancia en términos de la constante de acoplamiento ( $\gamma_0$ ). .....  | 67        |
| 4.4.                | Análisis de la ganancia Para materiales fotorrefractivos <i>BSO</i> y <i>BaTiO3</i> . .....                                      | 68        |
| <b>Conclusiones</b> | .....  | <b>69</b> |
| <b>Referencias</b>  | .....  | <b>71</b> |

# Lista de ilustraciones

## Capítulo 1

*Ilustración 1. 1* representación pictórica del efecto fotorrefractivo. [15] ..... 4  
*Ilustración 1. 2* Modelo de bandas de energía del efecto fotorrefractivo. .... 5

## Capítulo 2

*Ilustración 2. 1* Difracción de Bragg debido a la presencia de redes de volumen en un medio fotorrefractivo. .... 10  
*Ilustración 2. 2* Incidencia de 2 ondas en un medio fotorrefractivo, formación de una red de índices. .... 11  
*Ilustración 2. 3* Mezclado de dos ondas co-direccional. .... 20  
*Ilustración 2. 4* Componentes de los vectores de onda dentro del material fotorrefractivo. .... 20

## Capítulo 3

*Ilustración 3.1-3* ). Comportamiento de las intensidades **I1** y **I2** en la mezcla cuasi-degenerada de dos ondas en cristales fotorrefractivos, en función del espesor del cristal **L** y de la razón de concentración **r**. Con valores **Ed = 3.3kVcm**, **Eq = 3.1kVcm**, **Eμ = 1.6kVcm**, **γ0 = 10 cm<sup>-1</sup>**, **Ω = 1 Hz**, **σ = 1 cm<sup>-1</sup>**, (1) **M = 10**, (2) **M = 100**, (3) **M = 1000**. .... 57  
*Ilustración 3. 2* Dependencia de las intensidades de los haces en términos del espesor del cristal, para diferentes valores de **Ω**. Con valores, **Ed = 3.3kVcm**, **Eq = 3.1kVcm**, **Eμ = 1.6kVcm**, **γ0 = 10 cm<sup>-1</sup>**, **r = 800**, **σ = 1 cm<sup>-1</sup>**, **M = 100**. .... 58  
*Ilustración 3. 3-(1,2)*. Intensidad **I1** y **I2** en función del espesor de cristal **L**, para diferentes valores de acoplamiento **γ0**. Con valores **Ed = 3.3kVcm**, **Eq = 3.1kVcm**, **Eμ = 1.6kVcm**, **Ω = 1 Hz**, **r = 800**, **σ = 1 cm<sup>-1</sup>**, **M = 100**. (1) **I2 vs L**, (2) **I1 vs L**. .... 60  
*Ilustración 3. 4-(1,2)*. Intensidad **I1** y **I2** en términos de la razón de concentración, para cristales **BSO** y **BaTiO3**. Con valores **Ed = 3.3kVcm**, **Eq1 = 3.1kVcm**, **Eq2 = 0.2kVcm**, **Eμ = 1.6kVcm**, **γ0 = 10 cm<sup>-1</sup>**, **Ω = 1 Hz**, **σ = 1 cm<sup>-1</sup>**, **M = 100**. (1) **I2 vs r**, (2) **I1 vs r**. .... 62

Capítulo 4

*Ilustración 4.1-(1-3). Variación de la ganancia en la mezcla de dos ondas cuasi-degenerado en cristales fotorrefractivos, en función del espesor del cristal. Para diferentes valores de  $r$ . Con valores  $E_d = 3.3kVcm$ ,  $E_q = 3.1kVcm$ ,  $E_\mu = 1.6kVcm$ ,  $\gamma_0 = 10\text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1\text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1\text{ cm}^{-1}$ ,  $m = 100$ . (1)  $M = 10$ , (2)  $M = 100$ , (3)  $M = 1000$ ). ..... 65*

*Ilustración 4.2. Variación de la ganancia en función del espesor del cristal, para diferentes valores de  $\Omega$ . Con valores ( $E_d = 3.3kVcm$ ,  $E_q = 3.1kVcm$ ,  $E_\mu = 1.6kVcm$ ,  $\gamma_0 = 10\text{ cm}^{-1}$ ,  $r = 800$ ,  $\sigma = 1\text{ cm}^{-1}$ ,  $M = 100$ ). ..... 66*

*Ilustración 4,3. Variación de la ganancia en función del espesor del cristal. Para diferentes valores de acoplamiento  $\gamma_0$ , con valores ( $E_d = 3.3kVcm$ ,  $E_q = 3.1kVcm$ ,  $E_\mu = 1.6kVcm$ ,  $M = 100$ ,  $\Omega = 1\text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1\text{ cm}^{-1}$ ,  $r = 800$ ))..... 67*

*Ilustración 4.4. Variación de la ganancia en función de la razón de concentración  $r$ . Para un cristal de  $BSO$  y  $BaTiO_3$ , con valores ( $E_d = 3.3kVcm$ ,  $E_{q1} = 3.1kVcm$ ,  $E_{q2} = 0.2kVcm$ ,  $E_\mu = 1.6kVcm$ ,  $\gamma_0 = 10\text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1\text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1\text{ cm}^{-1}$ ,  $L = 0.68\text{ cm}$ ,  $M = 100$ )..... 68*

# Resumen

---

En este trabajo se presenta el estudio teórico del acoplamiento degenerado y cuasi-degenerado de dos ondas en cristales fotorrefractivos. En el caso del intercambio energético de la mezcla de dos ondas cuasi-degenerado en cristales fotorrefractivos para altas frecuencias, se presentan resultados que evidencian la influencia que tienen los diferentes parámetros como: la razón de concentración de impurezas del material, la diferencia de oscilación entre las ondas incidentes, campo de saturación, campo drift, y campo de difusión en el intercambio energético. Para la obtención de los resultados teóricos se tomó un cristal BSO y un cristal BaTiO<sub>3</sub>.

**Palabras claves:** cristales fotorrefractivos, mezcla de dos ondas, intercambio energético, razón de concentración.

# Introducción

---

La fotorrefractividad tiene un cierto parecido a sucesos históricos que han sido influyentes en la forma de nuestra civilización. Esta historia está mejor documentada en el primer artículo que se publicó en letras de física aplicada en 1966 por siete autores: Ashkin, Boyd, Dzedzic, Smith, Ballman, Levinstein, y Nassau. Este trabajo fue realizado para los laboratorios Bell telephone, cuyo título es “optically induced refractive index inhomogeneities in  $LiNbO_3$  and  $LiTaO_3$ ” [1], donde en el primer párrafo escribieron: “El efecto aunque es interesante, a su vez es altamente perjudicial para la óptica lineal basados en estos cristales”. El propósito que tenían en mente era doblado de frecuencias. El efecto fue claramente perjudicial, lo que en un principio fue denominado “daño óptico”.

Las aplicaciones de este efecto fueron bastante rápidas, el esquema de F.S. Chen entre otros (1968a) predice que la parte dañada del material ( $LiTaO_3$ ), podría ser utilizado como dispositivo de memoria. Tiempo después F.S. Chen entre otros (1968b) predice que el “daño” reproduce la variación de la intensidad inicial, por lo tanto sería adecuado para el grabado de hologramas. Los primeros experimentos produjeron resoluciones de más de 1600 líneas  $mm^{-1}$ . El efecto en nuevos materiales fueron reportados por: Lin (1968)  $Bi_4Ti_3O_{12}$  [2], Thaxter (1969) en SBN [3] y Townsend y Lamacchia (1970) en  $BaTiO_3$  [4], más un resultado experimental y teórico reportado por F.S. Chen (1969) en  $LiNbO_3$  y  $LiTaO_3$ . [5]

En la fotorrefractividad se puede decir que existe una línea divisoria que marca el efecto fotorrefractivo, debido al grupo de trabajo en Kiev, en el instituto de física de

la academia ucraniana de ciencias. El primer trabajo publicado por Kuktharev en (1979) [6], fue el mayor avance desde el descubrimiento del fenómeno fotorrefractivo. Este avance dio lugar a lo que hoy denominamos ecuaciones del material, y ecuaciones del campo, donde se utilizaron aproximaciones cruciales como: La pequeña modulación del patrón de interferencia para la solución de las ecuaciones de los materiales, y la aproximación de la envolvente lentamente variable para la solución de las ecuaciones de los campos. En un principio estas teorías fueron ignoradas, hasta que Huignard (1980) hizo uso de algunas de sus expresiones. Las teorías de los "kiev" a la cual pertenecía Kuktharev fueron ampliamente adoptadas tan pronto como el trabajo de conjugación de fase tomó impulso. Por ejemplo, Fisher (1981) utiliza la expresión de los "Kiev" para la relación entre el índice de refracción perturbado y el campo de carga espacial. [7]

Existe un consenso de opiniones entre los investigadores del campo de la fotorrefractividad, que las teorías de los "Kiev" proporciona la mejor base para cualquier trabajo teórico en el tema de la fotorrefractividad. Sin embargo, fue difícil el problema de qué nombre llevarían estas teorías, ¿ecuaciones de Kiev?, ¿modelo de transporte de banda?, ¿dar prioridad a Kuktharev?, ¿recompensarlo por ser el primer nombre entre cinco autores? ó darle el nombre de Vinetskii y Kuktharev por publicaciones anteriores que ya mostraban todos los elementos básicos del fenómeno fotorrefractivo. Pero finalmente llegaron a la conclusión de ser llamadas ecuaciones de Kuktharev (1979) [7].

En la literatura reciente otro de los avances en el mezclado de dos ondas en medios fotorrefractivos, es el enfoque al aumento del campo de cargas espaciales. El

aumento de la ganancia utilizando diferencia de frecuencias entre los haces incidentes en el medio fotorrefractivo fue reportado por Huignard (1981) [8] y explicada por Refreiger (1985) [9] y Furman (1987) [10]. Otra técnica para aumentar la migración de portadores de carga es el uso de voltaje externo aplicado al cristal, Stepanov (1985) [11]. Se comienzan a tener en cuenta diferentes consideraciones: influencia del ángulo de polarización de los haces incidentes y el ángulo entre estos, Webb. D (1994) [12]. Se diseñan nuevos métodos de medida para las constantes de acoplamiento, Dos Santos (1997) [13]. Nuevos métodos para medir ganancia en los haces incidentes en el proceso de acoplamiento de dos haces en medios fotorrefractivos (Dous S (1998) [14]. Yadav T.K et. Al, realiza un estudio dinámico de ganancia en la mezcla de dos ondas en materiales fotorrefractivos [16].

Para comprender y desarrollar diversas aplicaciones [15, 16, 17] se hace necesario entonces, comprender la forma en que las ondas electromagnéticas se propagan en estos medios y como se acoplan intercambiando energía entre sí. En nuestro caso será de interés estudiar el caso del acoplamiento cuasi-degenerado de dos ondas para registros de altas frecuencia. Nótese que los procesos de mezcla de ondas son descritos por ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales, la solución a dichos problemas depende de características o parámetros del material y de los aspectos geométricos a ser considerados.

Por otra parte, Considérese que los campos participantes en el efecto fotorrefractivo dependen de las impurezas donoras y aceptoras, en este caso resulta natural analizar como el intercambio de energía es afectado por la modificación de las impurezas mencionadas.

Este documento describe analíticamente el intercambio de energía que presentan dos haces a lo largo de un material fotorrefractivo, para los casos del mezclado de dos ondas degenerado y cuasi-degenerado, cuando estos haces inciden por la misma cara del cristal fotorrefractivo (configuración holográfica de transmisión), sin influencia de polarización, cuyo mecanismo de transporte de portadores de carga será la difusión (sin campo externo aplicado).

En el capítulo 1, se presentan las generalidades del fenómeno fotorrefractivo y una pequeña discusión del modelo de bandas del efecto fotorrefractivo con una breve explicación de las ecuaciones del material (ecuaciones de Kukharev (1979).

En el capítulo 2, se presenta el estudio analítico que describe el acoplamiento degenerado y cuasi-degenerado de dos ondas en materiales fotorrefractivos para el caso co-direccional. En el acoplamiento cuasi-degenerado de dos ondas, se tendrán en cuenta: El espesor del cristal, la razón de modulación, el coeficiente de absorción del material, la razón de concentración, el cambio de frecuencia de oscilación y los campos de difusión, drift y saturación.

En el capítulo 3, se presentan resultados inéditos obtenidos en el análisis teórico del intercambio de energía presente en el acoplamiento cuasi-degenerado de dos ondas en materiales fotorrefractivos.

En el capítulo 4, se presentan los resultados obtenidos en el análisis teórico de la ganancia en el acoplamiento cuasi-degenerado de dos ondas en cristales fotorrefractivos.

# Capítulo 1

---

## 1. Introducción al fenómeno fotorrefractivo

---

### 1.1. Materiales fotorrefractivos

Los materiales fotorrefractivos son materiales foto-conductores electro-ópticos capaces de cambiar sus propiedades bajo incidencia de luz no homogénea. Las propiedades de estos materiales hacen que exista un amplio campo de investigación para desarrollos futuros. Algunas aplicaciones son el procesamiento de imágenes, interferometría holográfica, futuras computadoras con procesamiento en tiempo real, memorias holográficas

Estos materiales se caracterizan por tener un nivel de impurezas que están ubicados en la zona prohibida del GAP entre la banda de valencia y la banda de conducción. Se han sintetizado 5 familias de este tipo de materiales [18].

**Ferroeléctricos:**  $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{LiTaO}_3$ ,  $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{KNbO}_3$ ,  $\text{SBN}$

**Silenitas:**  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO),  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO),  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO)

**Semiconductores:**  $\text{GaAs:Cr}$ ,  $\text{InP:Fe}$ ,  $\text{CdT}$

**Cerámicas piezoeléctricas:** *tipo PLZT*

**Orgánicos:** *poly(N – vinylcarbazole) o PVK, poly(silane)*

## 1.2. Fenómeno fotorrefractivo

En el fenómeno fotorrefractivo se estudia la interacción de la luz y la materia, en otras palabras, se analiza el efecto de la luz sobre el material y a su vez el efecto del material sobre la luz.

El efecto fotorrefractivo se define como la birrefringencia local causada por la acción de un campo eléctrico de carga espacial, generado por distribuciones de intensidades de luz no homogénea, y que se produce en materiales fotoconductores-electroópticos, con centros donadores y aceptores de carga.

La no-linealidad de los materiales fotorrefractivos no es causada por el campo electromagnético incidente en el material, es causada por distribuciones no homogéneas de intensidades de luz. Esta intensidad de luz no homogénea genera un campo eléctrico de cargas espaciales (dentro del material), el cual modula el índice de refracción generando la no-linealidad en los materiales fotorrefractivos.

Los materiales fotorrefractivos permiten generar no-linealidad con intensidades de laser de unos cuantos  $\frac{mW}{cm^2}$  (miliwatts/centímetro cuadrado), mientras que para generar la no-linealidad en los materiales lineales puros se requieren láseres de intensidades del orden de  $\frac{MW}{cm^2}$ . (Megawatts/centímetro cuadrado) [19]

## **1.2.1. Representación pictórica del efecto fotorrefractivo**

---

En el efecto fotorrefractivo existen tres mecanismos de transporte de portadores de carga que son: [19]

**Difusión:** movilidad de portadores de carga una vez iluminado el material de forma no uniforme.

**Arrastre "Drift":** arrastre de portadores de carga cuando se aplican campos eléctricos externos.

**Efecto fotovoltaico:** generación de una diferencia de potencial entre las caras del cristal. Lo presentan algunos materiales ferroeléctricos con simetría no cubica.

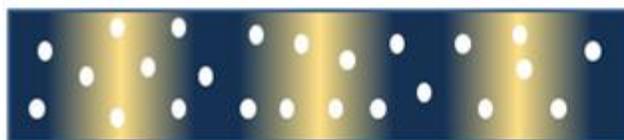
### **1.2.1. Representación pictórica del efecto fotorrefractivo**

En la imagen 1 de la ilustración 1.1, suponemos una distribución de luz no homogénea de forma cosenoidal  $I(x, y, z)$  con frecuencia espacial  $K$ , proyectada sobre el material fotorrefractivo en un instante  $t = 0s$ . Se asume un material con un solo tipo de impurezas. Para un instante  $t > 0s$  el material fotorrefractivo está en proceso de foto-ionización como lo podemos apreciar en la imagen 2, también se puede apreciar que los portadores de carga se mueven (por difusión o drift) a las zonas de menor intensidad de luz. En la imagen 3 podemos ver que todos los portadores de carga son re-atrapados, llegando así al estado de saturación del efecto fotorrefractivo, generándose pequeños campos eléctricos en el interior del material. Debido a estos pequeños campos se genera un campo de cargas

## 1.2.1. Representación pictórica del efecto fotorrefractivo

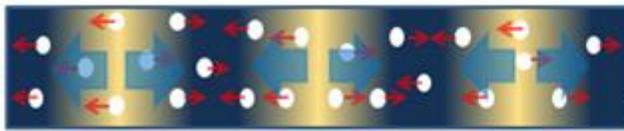
espaciales como se puede apreciar en la imagen 4. Este campo de cargas espaciales es el causante de la modulación del índice de refracción dentro del material por efecto pockel's. Una vez que se deja de iluminar el material vemos que el índice de refracción ya está modulado con un desfase que depende del mecanismo de transporte de los portadores de carga.

Al frente de cada una de las imágenes de la ilustración 1.1 se puede apreciar tres ecuaciones de los materiales fotorrefractivos, las cuales representan los diferentes procesos involucrados en el fenómeno.



$$\vec{I} = I_0 e^{\left(\frac{-\alpha_w z}{\cos\theta_w}\right)} (1 - m \cos(Kx))$$

Iluminación no uniforme  $t = 0s$



$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial N'_D}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \vec{j}$$

Movilidad de portadores de carga  $t > 0s$



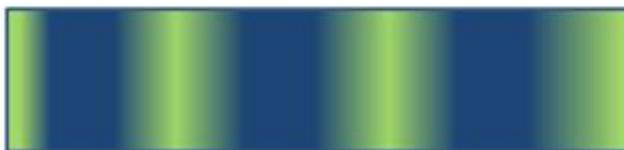
$$\frac{\partial N'_D}{\partial t} = SI(N_D - N'_D) - \gamma_R NN'_D$$

Recombinación de portadores de carga



$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = -q(N + N_A - N'_D)$$

Generación del campo de carga espacial



$$\Delta n$$

Birrefringencia generada por efecto electro-óptico

Ilustración 1. 1 representación pictórica del efecto fotorrefractivo [20].

Utilizando el modelo de transporte de banda básico propuesto por Kuktharev (ilustración 1,2) se mostraran las ecuaciones de los materiales. [6]

### 1.3. Modelo de bandas (Kuktharev)

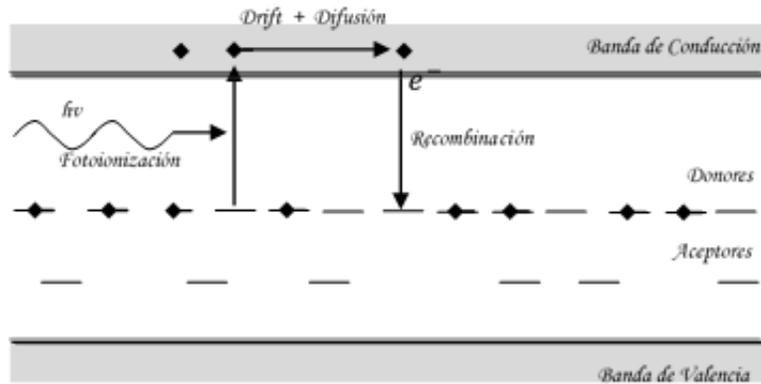


Ilustración 1. 2 Modelo de bandas de energía del efecto fotorrefractivo.

Inicialmente se considera estable el sistema, en equilibrio las impurezas tanto donadoras como aceptoras. Al incidir radiación en el medio, es decir, presencia de fotones, las impurezas donadoras se foto-ionizan liberando electrones que viajan hacia la banda de conducción moviéndose por el cristal. Después de cierto tiempo estos electrones son re-atrapados por impurezas aceptoras de carga. Este proceso durará hasta que el medio alcance el estado de saturación. Se tendrá una densidad de carga, la cual es la responsable de generar un campo eléctrico de cargas espaciales, este campo es el responsable de modular el índice de refracción del medio por efecto electro-óptico.

### 1.3.1. Ecuaciones de los materiales

Consideramos un solo tipo de portadores de carga (solo electrones). Basándose en el esquema de la Ilustración 1.2, las ecuaciones que determinan la distribución espacial del campo eléctrico que modula el índice de refracción cuando sobre el material incide una distribución de luz no homogénea, están dadas por:

#### 1.3.1.1. Ecuación de generación de centros ionizados [15] [19]

Consideremos que  $N_D$  es la densidad total de portadores de carga (impurezas donadoras) que participan en el efecto fotorrefractivo. Estas impurezas pueden estar en dos estados unos están ionizados por termo/fotoexcitación de electrones denotada por  $N_D'$ . Mientras que los demás están neutros y aptos para liberar un electrón, denotados por  $N_D - N_D'$ . Se asume la existencia de impurezas aceptoras  $N_A'$  ionizadas independientemente de la incidencia o no de iluminación las cuales no participan del proceso de fotoionización, pero son indispensables para asegurar la existencia de un gran número de donores vacíos en la oscuridad preservando la neutralidad de la carga.

$$N_0 + N_A' + N_D'$$

$N_0$  Densidad de electrones libres en la oscuridad

$N_0 \ll N_A', N_D'$  Debido a que estos electrones tienden a destruir la modulación espacial de carga foto-inducida.

Estas densidades de carga dependen de las coordenadas espacio-tiempo, ejemplo de la forma  $N_D(x, y, z, t) = N_D$  para abreviar notaciones.

Si  $N$  es la densidad de electrones libres en la banda de conducción podemos escribir la ecuación de generación-recombinación [15]

$$\frac{\partial N'_D}{\partial t} = SI(N_D - N'_D) - \gamma_R NN'_D \quad (1.1)$$

$S$  Sección eficaz de fotoionización,  $I$  Intensidad incidente,  $\gamma_R$  constante de recombinación característica del material.

#### 1.3.1.2. Ecuación de continuidad

Por cada impureza ionizada, hay un electrón generado. Entonces un electrón se elimina cuando se produce una recaptura que llena impurezas vacías. La tasa de generación de electrones es la misma que las impurezas ionizadas, excepto que los electrones están en movimiento, mientras que las impurezas vacías son estacionarias, esto es esencial para el efecto fotorrefractivo. El transporte de electrones puede afectar la densidad de electrones, entonces la ecuación de movilidad, para la densidad de electrones se puede escribir como [15]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial N'_D}{\partial t} = \frac{1}{q} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (1.2)$$

Siendo  $\vec{j}$  Densidad de corriente y  $q$  Carga del electrón.

### 1.3.1.3. Ecuación de conductividad

La presencia de los portadores de carga (electrones) conduce a un campo eléctrico de cargas espaciales, que a su vez afecta el transporte de portadores. La densidad de corriente se compone de las contribuciones de portadores de carga debido al campo eléctrico y a la difusión, debido al gradiente de densidad de portadores. Por lo tanto, la ecuación de conductividad puede ser escrita como [19] [15].

$$\vec{j} = qN\mu\vec{E} + k_B T \mu \vec{\nabla} N \quad (1.3)$$

Siendo  $\mu$  Tensor de movilidad,  $\vec{E}$  Campo eléctrico total dentro del medio,  $k_B$  Constante de Boltzman,  $T$  Temperatura.

### 1.3.1.4. Ecuación de Poisson

Relaciona el campo eléctrico con las redistribuciones de carga en el cristal [15]

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = -q(N + N_A - N_D') \quad (1.4)$$

$\varepsilon$  Permitividad eléctrica

Las cuatro ecuaciones descritas antes, ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) describen el modelo de bandas de un material fotorrefractivo. Estas ecuaciones tienen un rango de validez amplio, ya que permiten variadas condiciones experimentales. Estas ecuaciones son llamadas ecuaciones de Kukharev (1979) [6].

# Capítulo 2

---

## 2. Mezclado de dos ondas en medios fotorrefractivos

---

Cuando dos haces de radiación electromagnética coherentes se interceptan dentro de un medio fotorrefractivo, se genera un patrón de franjas de interferencia. Esta variación periódica de la intensidad inducirá una red de índices de volumen dentro del medio. El vector de onda de la red está dado por  $\vec{K} = \pm(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$ , donde  $\vec{k}_2$  y  $\vec{k}_1$  son los vectores de onda de los haces. La presencia de la red de índices afectará la propagación de estos dos haces. En efecto, estas ondas son fuertemente difractadas por la red de índices, debido a las dispersiones de Bragg. El haz 1 es dispersado por la red de índices este haz difractado está propagándose a lo largo de la dirección del haz 2. Simultáneamente, el haz 2 es dispersado por la misma red y el haz difractado se propaga a lo largo de la dirección del haz 1 (ilustración 2.1). Este acoplamiento de energía y dispersión es conocida como auto-difracción

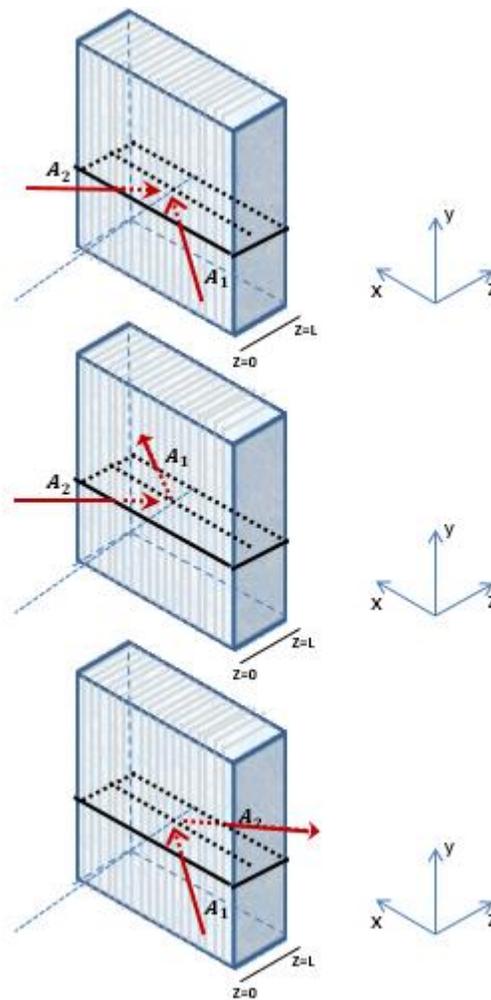


Ilustración 2. 1 Difracción de Bragg debido a la presencia de redes de volumen en un medio fotorrefractivo.

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado.

Consideremos la interacción de dos haces de luz con igual frecuencia dentro de un medio fotorrefractivo, en el cual se forma un patrón de interferencia estacionario. (Ilustración 2.2).

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

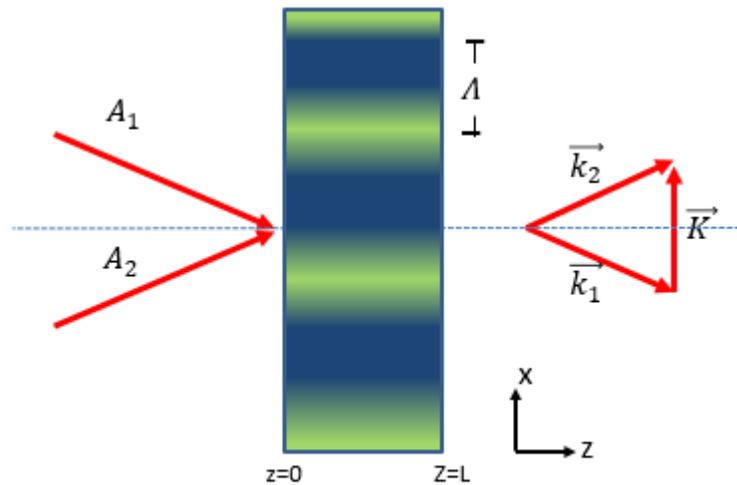


Ilustración 2. 2 Incidencia de 2 ondas en un medio fotorrefractivo, formación de una red de índices.

El campo eléctrico de los haces incidentes en el medio fotorrefractivo está escrito como:

$$E_j = A_j e^{i(\omega t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})} \quad j = 1, 2 \quad \vec{k}_j = \alpha_j + \beta_j \quad (2.1)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las componentes de los vectores de onda de cada uno de los haces en  $X$  y  $Z$  respectivamente

Se asume que el medio es isotrópico y ambos haces polarizados perpendicularmente al plano de incidencia, estando así en su máximo acople.

La intensidad de radiación de los haces está escrita como:

$$I = |E|^2 = |E_1 + E_2|^2 \quad (2.2)$$

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

---

Ahora reemplazando la ecuación (2.1) en la ecuación (2.2), se obtiene:

$$I = \left[ A_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] \left[ A_1^* e^{-i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2^* e^{-i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] \quad (2.3)$$

Solucionando la ecuación (2.3) se obtiene:

$$I = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + A_1 A_2^* e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} + A_2 A_1^* e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (2.4)$$

Donde  $\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$ , cuya magnitud del vector  $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$ ,  $\Lambda$  es el periodo de la red de índices, directamente relacionado con el espaciamiento entre las franjas de interferencia.

La intensidad de radiación (ecuación (2.4)) representa una variación de energía óptica sobre el medio fotorrefractivo. Esta intensidad genera y redistribuye portadores de carga, lo cual produce un campo de cargas espaciales dentro del medio. Esto produce un cambio en el volumen de índices de refracción por efecto Pockels. En general esta red de índices tendrá un desplazamiento de fase con respecto al patrón de interferencia incluyendo la componente fundamental del índice de refracción y de la intensidad de radiación incidente. La red de índices es escrita como [15]:

$$n = n_0 + \left[ \frac{n_1}{2} e^{i\phi} \frac{A_1^* A_2}{I_0} e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} + cc \right] \quad (2.5)$$

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

---

Donde:

$n_0$  parte compleja de la red de índices,  $n_0$  Índice de refracción inicial en ausencia de luz,  $\phi$  grado por el cual la red de índices esta cambiando espacialmente con respecto al patrón de interferencia y  $n_1$  Depende del espaciamiento de la red, del campo eléctrico aplicado, de las propiedades del material y  $I_0 = I_1 + I_2$ .

Para ver el acoplamiento que tienen las dos ondas y sabiendo que  $E = E_1 + E_2$ , sustituimos la ecuación (2.1) en la ecuación de onda. Se asume que las ondas se propagan en el plano  $XZ$  (ilustración 2.2). Si los haces son de extensión finita (comparable con la intersección de los haces), las amplitudes van a depender tanto de  $X$  como de  $Z$ , y por simplicidad se asume que las dimensiones transversales de los haces son de extensión infinita para el caso estacionario, luego las amplitudes son independientes del tiempo.

$$\nabla^2 \left[ A_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \left[ A_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] = 0 \quad (2.6)$$

Recordando que  $\vec{k}_j = \alpha_j + \beta_j$  luego  $\vec{k}_j \cdot \vec{r} = \alpha_j x + \beta_j z$  reemplazando en la ecuación (2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \left[ A_1 e^{i(\omega t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + A_2 e^{i(\omega t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right] + \dots \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \left[ A_1 e^{i(\omega t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + A_2 e^{i(\omega t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

---

Factorizando  $e^{i\omega t}$  de la ecuación (2.7) nos queda:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 [A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}] + \dots \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 [A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}] = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Realizando las respectivas derivadas de la ecuacion (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}]}{\partial x^2} &= -\alpha_1^2 A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + \dots \\ & -\alpha_2^2 A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}]}{\partial z^2} &= \frac{d^2 A_1}{dz^2} e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + \dots \\ -i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} - i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} - \beta_1^2 A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} &+ \dots \\ + \frac{d^2 A_2}{dz^2} e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} - i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} - i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} &+ \dots \\ -\beta_2^2 A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reemplazando las derivadas (ecuación (2.9) y (2.10)) en la ecuación (2.8)

obtenemos:

$$\begin{aligned} & e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} \left[ \frac{d^2 A_1}{dz^2} - 2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} - A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \right] + \dots \\ & + e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \left[ \frac{d^2 A_2}{dz^2} - 2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} - A_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \right] + \dots \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 [A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

---

Utilizando la aproximación de la envolvente lentamente variable (ecuación (2.12)) omitimos las segundas derivadas de la ecuación (2.11).

$$\left| \frac{d^2}{dz^2} A_j \right| \leq \left| \beta_j \frac{d}{dz} A_j \right| \quad j = 1, 2 \quad (2.12)$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} & e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} \left[ -2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} - A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \right] + \dots \\ & + e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \left[ -2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} - A_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \right] + \dots \\ & + \frac{w^2}{c^2} n^2 [A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}] = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ahora reemplazando la red de índices generada por la distribución de luz no homogénea ecuación (2.5) en la ecuación (2.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} & e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} \left[ -2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} - A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \right] + \dots \\ & + e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \left[ -2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} - A_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \right] + \dots \\ & + \frac{w^2}{c^2} \left[ n_0 + \left[ \frac{n_1}{2} e^{i\phi} \frac{A_1^* A_2}{I_0} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} + cc \right] \right]^2 [A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + \dots \\ & + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}] = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

---

Solucionando el término cuadrático de la ecuación (2.14) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} \left[ -2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} - A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \right] + \dots \\
 & + e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \left[ -2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} - A_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \right] + \dots \\
 & + \frac{w^2}{c^2} \left[ n_0^2 + 2 \left( \frac{n_1}{2} e^{i\phi} \frac{A_1^* A_2}{I_0} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{n_1}{2} e^{-i\phi} \frac{A_2^* A_1}{I_0} e^{\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) n_0 + \dots \right. \quad (2.15) \\
 & \left. + \left( \frac{n_1}{2} e^{i\phi} \frac{A_1^* A_2}{I_0} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{n_1}{2} e^{-i\phi} \frac{A_2^* A_1}{I_0} e^{\vec{k} \cdot \vec{r}} \right)^2 \right] \left[ A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} \right. \\
 & \left. + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Donde se anulan términos cuadrados como  $n_0^2$  Y  $n_1^2$  por ser del orden de  $10^{-4}$ .

Quedando la ecuación (2.15) de la forma:

$$\begin{aligned}
 & e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} \left[ -2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} \right] + e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \left[ -2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} \right] + \dots \\
 & + \frac{w^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} \left[ A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{iKx} \right] \left[ A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + \dots \right. \quad (2.16) \\
 & \left. + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Como el vector  $\vec{K}$  solo depende de la dirección  $X$ ,  $\vec{K} \cdot \vec{r} = Kx$  la ecuación (2.16) nos queda:

$$\begin{aligned}
 & e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} \left[ -2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} \right] + e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \left[ -2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} \right] + \dots \\
 & + \frac{w^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} \left[ A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{iKx} \right] \left[ A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + \dots \right. \quad (2.17) \\
 & \left. + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} \right] = 0
 \end{aligned}$$

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

---

Trabajando el tercer término de la ecuación (2.17).

$$\begin{aligned}
 & (A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{iKx}) (A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}) = \\
 & A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)} + \dots \\
 & + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{iKx} A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{iKx} A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Haciendo los siguientes reemplazos  $p_1 = (\cos\theta_1 z - \text{sen}\theta_1 x)$  y  $p_2 = (\cos\theta_2 z + \text{sen}\theta_2 x)$

Sabiendo que  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_B$  entonces:

$$\begin{aligned}
 k(p_2 - p_1) &= k(\cos\theta_2 z + \text{sen}\theta_2 x - (\cos\theta_1 z - \text{sen}\theta_1 x)) = 2k\text{sen}\theta x \\
 &= Kx
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Siendo  $K = 2k\text{sen}\theta$ .

Entonces:

$$kp_1 = k\cos\theta_1 z - k\text{sen}\theta_1 x = \alpha_1 x + \beta_1 z \tag{2.20}$$

$$kp_2 = k\cos\theta_2 z + k\text{sen}\theta_2 x = \alpha_2 x + \beta_2 z \tag{2.21}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.21) y (2.22) en la ecuación (2.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & (A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{iKx}) (A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}) \\
 & = A_1^* A_2 A_1 e^{i\phi} e^{-iKx} e^{-ikp_1} + A_1^* A_2 A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} e^{-ikp_2} + \dots \\
 & + A_2^* A_1 A_1 e^{-i\phi} e^{iKx} e^{-ikp_1} + A_2^* A_1 A_2 e^{-i\phi} e^{iKx} e^{-ikp_2}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

## 2.1. Mezclado de dos ondas degenerado

---

Siendo:

$$\begin{aligned}
 e^{-iKx} e^{-ikp_1} &= e^{-ikp_2} \\
 e^{-iKx} e^{-ikp_2} &= e^{-i(2kp_2 - kp_1)} \\
 e^{-i\phi} e^{iKx} e^{-ikp_1} &= e^{-i(2kp_1 - kp_2)} \\
 e^{-i\phi} e^{iKx} e^{-ikp_2} &= e^{-ikp_1}
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Reemplazando la ecuación (2.23) en (2.22) tenemos:

$$\begin{aligned}
 (A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{-iKx} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{iKx}) &(A_1 e^{-i(\alpha_1 x + \beta_1 z)} + A_2 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 z)}) \\
 &= A_1^* A_2 A_1 e^{i\phi} e^{-ikp_2} + A_1^* A_2 A_2 e^{i\phi} e^{-i(2kp_2 - kp_1)} + \dots \\
 &+ A_2^* A_1 A_1 e^{-i\phi} e^{-i(2kp_1 - kp_2)} + A_2^* A_1 A_2 e^{-i\phi} e^{-ikp_1}
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Reemplazando la ecuación (2.24) en (2.17) y organizando.

$$\begin{aligned}
 e^{-ikp_1} \left[ 2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} \right] + e^{-ikp_2} \left[ 2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} \right] &= \\
 \frac{W^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} \left[ A_1^* A_2 A_1 e^{i\phi} e^{-ikp_2} + A_1^* A_2 A_2 e^{i\phi} e^{-i(2kp_2 - kp_1)} + \dots \right. \\
 \left. + A_2^* A_1 A_1 e^{-i\phi} e^{-i(2kp_1 - kp_2)} + A_2^* A_1 A_2 e^{-i\phi} e^{-ikp_1} \right] &
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Cuyas ondas  $e^{-i(2kp_2 - kp_1)}$  y  $e^{-i(2kp_1 - kp_2)}$  viajan en otras direcciones diferentes de  $\theta$ , por lo tanto, los términos con estos componentes no se tienen en cuenta.

Igualando términos semejantes obtenemos dos ecuaciones acopladas, en términos de las amplitudes.

$$2i\beta_1 \frac{d}{dz} A_1 = \frac{\omega^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} e^{-i\phi} A_2^* A_1 A_2 \quad (2.26)$$

$$2i\beta_2 \frac{d}{dz} A_2 = \frac{\omega^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} e^{i\phi} A_1^* A_2 A_1 \quad (2.27)$$

Donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son las componentes  $Z$  de los vectores de onda  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$  respectivamente.

El acoplamiento de energía depende del signo relativo de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . El mezclado de dos ondas se divide en dos categorías, mezclado de dos ondas co-direccional y el mezclado de dos ondas contra-direccional. En este trabajo se tiene en cuenta el caso co-direccional.

### 2.1.1. Caso co-direccional

Consideraremos el caso cuando los dos haces entran al medio de registro, desde el mismo lado en  $z=0$  (ilustración 2.3), es decir  $\beta_1 = \beta_2$  (componentes en  $z$  de los haces dentro del material).

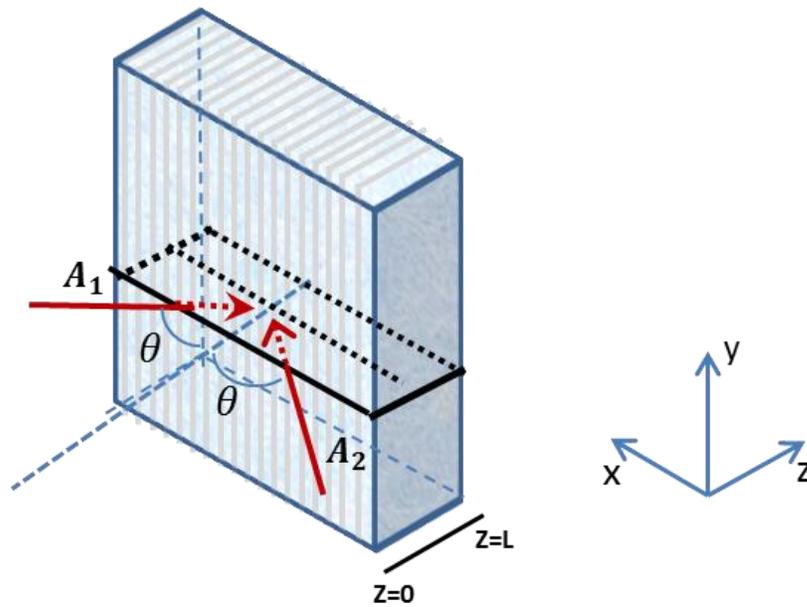


Ilustración 2. 3 Mezclado de dos ondas co-direccional.

Como podemos apreciar en la (ilustracion 2.3) los vectores de onda de los haces tienen componentes en  $X$  y en  $Z$ , entonces:

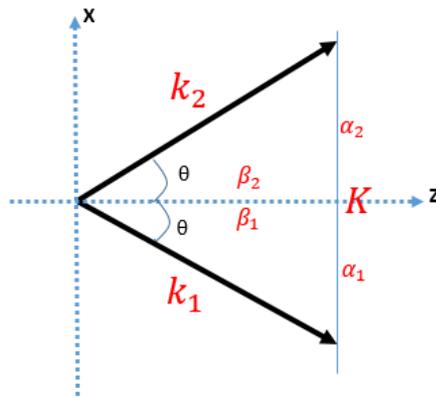


Ilustración 2. 4 Componentes de los vectores de onda dentro del material fotorrefractivo.

Para las componentes  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$  (ilustración 2.4) dentro del cristal, donde  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$  [7] tenemos:

$$\vec{k}_1 = k \cos \theta \hat{z} - k \sin \theta \hat{x} \quad (2.28)$$

$$\vec{k}_2 = k \cos \theta \hat{z} + k \sin \theta \hat{x} \quad (2.29)$$

Donde:

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = k \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \sin[\theta] \quad (2.30)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = k \cos[\theta] = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \cos[\theta] \quad (2.31)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia de los haces y  $n_0$  es el índice de refracción inicial del medio.

Sustituyendo la ecuación (2.31) en (2.26) tenemos:

$$\frac{4\pi i}{\lambda} n_0 \cos[\theta] \frac{d}{dz} A_1 = \frac{w^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} e^{-i\phi} A_2^* A_2 A_1 \quad (2.32)$$

Despejando  $\frac{d}{dz} A_1$  tenemos:

$$\frac{d}{dz} A_1 = \frac{w^2 n_1 \lambda}{4\pi i \cos[\theta] c^2 I_0} e^{-i\phi} A_2^* A_2 A_1 \quad (2.33)$$

Dónde:  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{w}{c}$        $\frac{w^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$       reemplazando en la ecuación (2.33).

$$\frac{d}{dz} A_1 = \frac{2\pi n_1}{2\lambda i \cos[\theta] I_0} e^{-i\phi} A_2^* A_2 A_1 \quad (2.34)$$

Multiplicamos y dividimos por  $i$  la ecuación (2.34):

$$\frac{d}{dz}A_1 = -\frac{i2\pi n_1}{2\lambda \cos[\theta]I_0} e^{-i\Phi} A_2^* A_2 A_1 \quad (2.35)$$

Haciendo:

$$\Gamma = \frac{i2\pi n_1}{\lambda \cos[\theta]} e^{-i\Phi} \quad (2.36)$$

Obtenemos:

$$\frac{d}{dz}A_1 = -\frac{\Gamma}{2I_0} A_2^* A_2 A_1 - \frac{\sigma}{2} A_1 \quad (2.37)$$

Se añadió el término  $\sigma$  que es la constante de absorción que presenta el material [15].

Donde  $\Gamma$  es la constante de acoplamiento compleja.

De la misma manera, se sustituye la ecuación (2.31) en (2.27) se obtiene:

$$\frac{d}{dz}A_2 = \frac{\Gamma^*}{2I_0} A_1^* A_2 A_1 - \frac{\sigma}{2} A_2 \quad (2.38)$$

Siendo las ecuaciones (2.37) y (2.38) las ecuaciones acopladas para las amplitudes.

Por definición [15] las ecuaciones de las amplitudes de los haces de entrada son:

$$A_1 = \sqrt{I_1} e^{-i\varphi_1} \quad (2.39)$$

$$A_2 = \sqrt{I_2} e^{-i\varphi_2} \quad (2.40)$$

Donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son las fases de las amplitudes  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente.

Entonces:

$$A_1^* A_1 = I_1 \quad (2.41)$$

$$A_2^* A_2 = I_2 \quad (2.42)$$

Entonces:

$$I_0 = I_1 + I_2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 \quad (2.43)$$

Derivando las ecuaciones (2.41) y (2.42) con respecto a  $z$ :

$$\frac{dI_1}{dz} = \frac{dA_1^* A_1}{dz} = A_1 \frac{dA_1^*}{dz} + A_1^* \frac{dA_1}{dz} \quad (2.44)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = \frac{dA_2^* A_2}{dz} = A_2 \frac{dA_2^*}{dz} + A_2^* \frac{dA_2}{dz} \quad (2.45)$$

Reemplazando la ecuación (2.37) junto con su conjugada en la ecuación (2.44)

tenemos

$$\frac{dI_1}{dz} = -\frac{A_1 \Gamma^*}{2I_0} |A_2|^2 A_1^* - A_1 \frac{\sigma}{2} A_1^* - \frac{A_1^* \Gamma}{2I_0} |A_2|^2 A_1 - A_1^* \frac{\sigma}{2} A_1 \quad (2.46)$$

Reduciendo (2.46) se obtiene

$$\frac{dI_1}{dz} = -\frac{I_1 I_2}{I_0} \left( \frac{\Gamma^* + \Gamma}{2} \right) - I_1 \sigma \quad (2.47)$$

Ahora si reemplazamos la ecuación (2.38) con su conjugada en la ecuación (2.45) y reduciendo se obtiene:

$$\frac{dI_2}{dz} = \frac{I_1 I_2}{I_0} \left( \frac{\Gamma^* + \Gamma}{2} \right) - I_2 \sigma \quad (2.48)$$

De la ecuación (2,36), tenemos:

$$\Gamma = \frac{i2\pi n_1 \cos[\phi]}{\lambda \cos[\theta]} + \frac{2\pi n_1 \sen[\phi]}{\lambda \cos[\theta]} \quad (2.49)$$

$$\Gamma^* = -\frac{i2\pi n_1}{\lambda \cos[\theta]} e^{i\phi} = -\frac{i2\pi n_1 \cos[\phi]}{\lambda \cos[\theta]} + \frac{2\pi n_1 \sen[\phi]}{\lambda \cos[\theta]} \quad (2.50)$$

Dónde  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \gamma + 2i\delta, \quad \gamma = \frac{2\pi n_1}{\lambda \cos[\theta]} \sen[\phi], \quad \delta = \frac{\pi n_1 \cos[\phi]}{\lambda \cos[\theta]} \quad (2.51)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.49) y (2.50) en las ecuaciones (2.47) y (2.48) se obtienen:

$$\frac{dI_1}{dz} = -\gamma \left[ \frac{I_1 I_2}{I_0} \right] - I_1 \sigma \quad (2.52)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = \gamma \left[ \frac{I_1 I_2}{I_0} \right] - I_2 \sigma \quad (2.53)$$

Siendo  $\frac{\Gamma^* + \Gamma}{2} = \frac{2\pi n_1 \sen[\phi]}{\lambda \cos[\theta]} = \gamma$ .

Sabiendo que  $I_0 = I_1 + I_2$  obtenemos las dos ecuaciones acopladas en términos de las intensidades.

$$\frac{dI_1}{dz} = -\gamma \left[ \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] - I_1 \sigma \quad (2.54)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = \gamma \left[ \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] - I_2 \sigma \quad (2.55)$$

Donde  $\gamma$  es la nueva constante de acoplamiento para el caso degenerado.

Para la solución de  $I_1(z)$  y  $I_2(z)$  de las ecuaciones acopladas (2.54) y (2.55) tenemos:

Sumando las ecuaciones (2.54) y (2.55)

$$\frac{d(I_1 + I_2)}{dz} = -\sigma(I_1 + I_2) \quad (2.56)$$

Integrando (2.56)

$$I_1(z) + I_2(z) = [I_1(0) + I_2(0)]e^{-\sigma z} \quad (2.57)$$

Tomando:

$$U(z) = I_1(z)e^{\sigma z} \quad y \quad V(z) = I_2(z)e^{\sigma z} \quad (2.58)$$

Siendo:

$$U + V = C, \quad C = \text{constante} \quad (2.59)$$

Siendo  $C$  constante. Derivando  $U$  en la ecuación (2.58) con respecto a  $z$  tenemos:

$$\frac{dU}{dz} = \sigma I_1 e^{\sigma z} + \frac{dI_1}{dz} e^{\sigma z} \quad (2.60)$$

Sustituyendo la ecuación (2.54) en la ecuación (2.60) y organizando.

$$\frac{dU}{dz} = -\gamma \left[ \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] e^{\sigma z} \quad (2.61)$$

Reemplazando la ecuación (2.58) en la ecuación anterior ecuación (2.61) y despejando tenemos:

$$\left( \frac{1}{U} + \frac{1}{V} \right) dU = -\gamma dz \quad (2.62)$$

Utilizando la expresión de la ecuación (2.59) en la ecuación (2.62) tenemos:

$$\left( \frac{1}{U} + \frac{1}{C - U} \right) dU = -\gamma dz \quad (2.63)$$

Integrando la ecuación (2.63).

$$\int_{U(0)}^{U(z)} \left( \frac{1}{U} + \frac{1}{C - U} \right) dU = \int_0^z -\gamma dz \quad (2.64)$$

$$\{ \text{Ln}[U(z)] - \text{Ln}[U(0)] \} - \{ \text{Ln}[C - U(z)] - \text{Ln}[C - U(0)] \} = -\gamma z$$

$$\frac{U(z)[C - U(0)]}{U(0)[C - U(z)]} = e^{-\gamma z} \quad (2.65)$$

Reemplazando  $C$  de la ecuación (2.59) en la ecuación (2.65) se obtiene:

$$\frac{U(z)[U(z) + V(z) - U(0)]}{U(0)V(z)} = e^{-\gamma z} \quad (2.66)$$

Reemplazando los valores de  $U(z)$ ,  $V(z)$  y  $U(0)$  de la ecuación (2.58) en la ecuación (2.66) y organizando se obtiene:

$$I_1(z)I_2(0) = I_1(0)I_2(z)e^{-\gamma z} \quad (2.67)$$

Sustituyendo el valor de  $I_2(z)$  de la ecuación (2.57) en la ecuación (2.67) se obtiene:

$$I_1(z)I_2(0) = I_1(0)[(I_1(0) + I_2(0))e^{-\sigma z} - I_1(z)]e^{-\gamma z} \quad (2.68)$$

Despejando  $I_1(z)$

$$I_1(z) = I_1(0) \left[ \frac{(I_1(0) + I_2(0))}{I_1(0) + I_2(0)e^{\gamma z}} \right] e^{-\sigma z} \quad (2.69)$$

Finalmente quedando:

$$I_1(z) = I_1(0) \left[ \frac{1 - M^{-1}}{1 + M^{-1}e^{\gamma z}} \right] e^{-\sigma z} \quad (2.70)$$

Donde es  $M$  es la razón de las intensidades a la entrada del cristal escrita como:

$$M = \frac{I_1(0)}{I_2(0)} \quad (2.71)$$

Realizando el mismo procedimiento aplicado a  $U$  en la ecuación (2.58), esta vez derivando  $V$  con respecto a  $z$  se halla la ecuación correspondiente a  $I_2(z) = I_2$

$$I_2(z) = I_2(0) \left[ \frac{1 - M}{1 + M e^{-\gamma z}} \right] e^{-\sigma z} \quad (2.72)$$

Siendo las ecuaciones (2.70) y (2.72) las ecuaciones de las intensidades  $I_1(z)$  y  $I_2(z)$ , las cuales describen el comportamiento de los haces dentro del medio fotorrefractivo para el caso del mezclado de dos ondas degenerado.

Para obtener las ecuaciones acopladas para las fases, utilizamos las ecuaciones (2.39) y (2.40).

Despejando  $\varphi_1$  de la ecuación (2.39) y aplicando propiedades de logaritmos, tenemos:

$$\varphi_1 = i \ln(A_1) - \frac{i}{2} \ln(I_1) \quad (2.73)$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a  $z$  tenemos:

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{i}{A_1} \frac{dA_1}{dz} - \frac{i}{2} \frac{1}{I_1} \frac{dI_1}{dz} \quad (2.74)$$

Reemplazando la ecuación (2.36) y (2.54) en la ecuación (2.74) tenemos:

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{i}{A_1} \left( -\frac{\Gamma}{2I_0} I_2 A_1 - \frac{\sigma}{2} A_1 \right) - \frac{i}{2I_1} \left( -\gamma \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} - I_1 \sigma \right) \quad (2.75)$$

Reemplazando la ecuación (2.51) en la ecuación (2.75) donde sabemos que  $I_0 = I_1 + I_2$ , Organizando y eliminando términos semejantes tenemos:

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{-iI_2}{2I_0} (\gamma + 2i\delta) + \frac{iI_2\gamma}{2I_0} \quad (2.76)$$

Simplificando finalmente nos queda:

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \delta \left[ \frac{I_2}{I_1 + I_2} \right] \quad (2.77)$$

Ahora despejando  $\varphi_2$  de la ecuación (2.49) y realizando el mismo procedimiento desarrollado para encontrar la ecuación (2.77) pero ahora reemplazando las ecuaciones (2.38), (2.51) y (2.55) obtenemos:

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = \delta \left[ \frac{I_1}{I_1 + I_2} \right] \quad (2.78)$$

Siendo las ecuaciones (2.77) y (2.78) las ecuaciones acopladas para las fases  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de las amplitudes de los haces  $I_1$  y  $I_2$  respectivamente. Para el caso degenerado.

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

Cuando dos haces de diferente frecuencia inciden en un medio fotorrefractivo el patrón de franjas ya no es estacionario, con diferente frecuencia de los haces, todavía se puede inducir una red de índices de volumen [9], de tal manera, que el patrón de franjas no se mueva demasiado rápido.

Si  $w_1$  y  $w_2$  son las frecuencias de los dos haces incidentes,  $w_1$  del haz de mayor intensidad (haz de bombeo) y  $w_2$  del haz de menor intensidad (haz señal), podemos escribir el campo eléctrico de los dos haces como:

$$E_j = A_j e^{i(w_j t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})} \quad j = 1, 2 \quad (2.79)$$

Donde  $A_1$  y  $A_2$  son las amplitudes de los haces y  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$  sus vectores de onda.

Reemplazando la ecuación en la ecuación (2.2)

$$I = \left[ A_1 e^{i(w_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2 e^{i(w_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] \left[ A_1^* e^{-i(w_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2^* e^{-i(w_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] \quad (2.80)$$

Solucionando obtenemos:

$$I = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + A_1 A_2^* e^{-i((\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r}))} + A_2 A_1^* e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \quad (2.81)$$

$$I = I_0 + Re \left( I_p e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \quad (2.82)$$

Donde  $\Omega = w_2 - w_1$  y  $\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Ahora

$$I_0 = I_1 + I_2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 \quad (2.83)$$

$$I_p = 2E_2 \cdot E_1^* \quad (2.84)$$

La distribución de intensidad de la ecuación (2.81) representa un patrón de franjas de interferencia viajando con una velocidad:

$$v = \frac{\Omega}{|\vec{K}|} = \frac{\Omega\Lambda}{2\pi} \quad K = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.85)$$

$\Lambda$  período del patrón de franjas.

La formación de una red de índices de volumen, requiere de un tiempo finito para generar y redistribuir sus portadores de carga. El movimiento del patrón de franjas causará un movimiento similar en la densidad de cargas espaciales. Debido al tiempo de formación finito, la densidad de carga espacial y la red de índices, puede no ser capaz de ajustarse con el movimiento del patrón de intensidad si el movimiento del patrón de franjas se mueve muy rápido. Debido a esto se investiga la formación de una red de índices móvil dentro de un medio fotorrefractivo.

Suponiendo que  $I_p \ll I_0$  se puede escribir las soluciones para el estado estacionario como [15]:

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

$$\vec{N}(r) = N = N_0 + Re \left( N_1 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \quad (2.86)$$

$$\vec{N}'_D(r) = N'_D = N'_{D0} + Re \left( N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \quad (2.87)$$

$$\vec{J}(r) = \vec{J} = \vec{J}_0 + Re \left( \vec{J}_1 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \quad (2.88)$$

$$\vec{E}(r) = \vec{E} = \vec{E}_0 + Re \left( \vec{E}_1 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \quad (2.89)$$

Donde los términos  $N_0$ ,  $N_1$ ,  $N'_{D0}$ ,  $N'_{D1}$ ,  $\vec{J}_0$ ,  $\vec{J}_1$ ,  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{E}_1$  son constantes

$\vec{E}_0$  Campo externo aplicado,  $\vec{E}_1$  campo de cargas espaciales.

Para encontrar una solución nos remitimos a las ecuaciones de los materiales ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4), del capítulo 1:

Reemplazando las ecuaciones (2.82), (2.86) y (2.87) en la ecuación (1.1).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[ N'_{D0} + Re \left( N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \right]}{\partial t} \\ &= S \left\{ I_0 + Re \left( I_p e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \right\} \left\{ N_D - \left[ N'_{D0} + Re \left( N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \right] \right\} \quad (2.90) \\ &- \gamma_R \left\{ \left[ N_0 + Re \left( N_1 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \right] \left[ N'_{D0} + Re \left( N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Operando la ecuación anterior:

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

$$\begin{aligned}
 i\Omega N'_D e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} &= SI_0 N_D - SI_0 N'_{D0} - SI_0 N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \dots \\
 &+ SI_p N_D e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - SI_p N'_{D0} e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - SI_p N'_{D1} e^{2i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \dots \\
 &- \gamma_R N_0 N'_{D0} - \gamma_R N_0 N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - \gamma_R N_1 N'_{D0} e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \dots \\
 &- \gamma_R N_1 N'_{D1} e^{2i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Igualando los términos que tienen  $e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  de la ecuación anterior, simplificando y organizando se obtiene:

$$i\Omega N'_{D1} = SI_p(N_D - N'_{D0}) + SI_0(-N'_{D1}) - \gamma_R N_0 N'_{D1} - \gamma_R N_1 N'_{D0} \tag{2.92}$$

Sustituyendo la ecuación (1.3) en la ecuación (1.2) tenemos:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial N'_D}{\partial t} = \frac{1}{q} \vec{\nabla} \cdot [q N \mu \vec{E} + k_B T \mu \vec{\nabla} N] \tag{2.93}$$

Reemplazando las ecuaciones (2.86), (2.88) y (2.89) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial [N_0 + \text{Re}(N_1 e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})]}{\partial t} - \frac{\partial [N'_{D0} + \text{Re}(N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})]}{\partial t} = \\
 \frac{1}{q} \vec{\nabla} \cdot \left\{ q [N_0 + \text{Re}(N_1 e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})] \mu [\vec{E}_0 + \text{Re}(\vec{E}_1 e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})] + \dots \right. \\
 \left. + k_B T \mu \vec{\nabla} [N_0 + \text{Re}(N_1 e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Sabiendo que  $\vec{K} \cdot \vec{r} = Kx$  solo depende de la dirección  $X$  entonces  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j}{\partial x}$

entonces:

$$\begin{aligned}
 i\Omega N_1 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} - i\Omega N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} &= N_0 \mu \vec{E}_1 \cdot (-i\vec{K}) e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} + \dots \\
 &+ N_1 \mu \vec{E}_0 \cdot (-i\vec{K}) e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} + N_1 \mu \vec{E}_1 \cdot (-2i\vec{K}) e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} + \dots \\
 &+ \frac{K_B T \mu N_1}{q} (-i)^2 \vec{K} \cdot \vec{K} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})}
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Igualando los términos que tienen  $e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})}$  en la ecuación anterior se tiene:

$$i\Omega N_1 - i\Omega N'_{D1} = -i\vec{K} \cdot N_1 \mu \vec{E}_0 - iN_0 \vec{K} \cdot \mu \vec{E}_1 + \frac{K_B T \mu N_1}{q} \vec{K} \cdot \mu \vec{K} \tag{2.96}$$

Ahora reemplazando las ecuaciones (2.86), (2.87) y (2.89) en la ecuación (1.4).

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \varepsilon \left[ \vec{E}_0 + \text{Re} \left( \vec{E}_1 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \right] \\
 = -q \left( N_0 + \text{Re} \left( N_1 e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) + N_A - N'_{D0} + \dots \right. \\
 \left. + \text{Re} \left( N'_{D1} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Igualando términos que tienen  $e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})}$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$-i\vec{K} \cdot \varepsilon \vec{E}_1 = -q(N_1 - N'_{D1}) \tag{2.98}$$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Si:

$$\frac{\partial N'_{D0}}{\partial t} = SI_0(N_D - N'_{D0}) - \gamma_R NN'_{D0} \quad (2.99)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E}_0 = -q(N_0 + N_A - N'_{D0}) \quad (2.100)$$

Entonces:

$$0 = SI_0(N_D - N'_{D0}) - \gamma_R N_0 N'_{D0} \quad (2.101)$$

$$0 = N_0 + N_A - N'_{D0} \quad (2.102)$$

Las ecuaciones (2.101) y (2.102) son idénticas a las ecuaciones [15]:

$$SI(N_D - N'_D) = \gamma_R NN'_D \quad y \quad 0 = N + N_A - N'_D \quad (2.103)$$

Cuyas soluciones son [15]:

$$N'_D = \frac{N_D SI}{(SI + \gamma_R N)} \quad y \quad N = \frac{N_D - N_A}{\gamma_R N_A} (SI)$$

Entonces las soluciones para las ecuaciones (2.86) y (2.87) son:

$$N'_{D0} = \frac{N_D SI_0}{(SI_0 + \gamma_R N_0)} \quad (2.104)$$

$$N_0 = \frac{N_D - N_A}{\gamma_R N_A} (SI_0) \quad (2.105)$$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Reemplazando la ecuación (2.98) en la ecuación (2.96) se obtiene:

$$i\Omega N_1 - i\Omega N'_{D1} = -i\vec{K} \cdot N_1 \mu \vec{E}_0 + iN_0 \mu \frac{q}{\varepsilon} (N_1 - N'_{D1}) + \frac{K_B T \mu N_1}{q} \vec{K} \cdot \mu \vec{K} \quad (2.106)$$

Dejando en términos de  $N'_{D1}$  y  $N_1$  la ecuación anterior se tiene:

$$N'_{D1} \left( i\Omega + \frac{q}{\varepsilon} \mu N_0 \right) = N_1 \left( i\Omega + iK\mu E_0 + \frac{q}{\varepsilon} \mu N_0 + \frac{K_B T \mu}{q} K^2 \right) \quad (2.107)$$

Dejando en términos de  $N'_{D1}$  y  $N_1$  la ecuación (2.92) se tiene:

$$N'_{D1} (i\Omega + sI_0 + \gamma_R N_0) = sI_p (N_D - N'_{D0}) - \gamma_R N_1 N'_{D0} \quad (2.108)$$

Despejando  $E_1$  de la ecuación (2.98) y reemplazando los valores de  $N'_{D1}$  y  $N_1$  (que se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones (2.107) y (2.108) [15]) se obtiene:

$$E_1 = \left[ \frac{iE_d}{1 + \frac{E_d}{E_q}} \right] \left[ \frac{1 + \frac{iE_0}{E_d}}{1 + \frac{iE_0}{(E_d + E_q)}} \right] \left[ \frac{1}{(1 + i\Omega t_0) \left( \frac{E_d + E_\mu + E_0}{E_d + E_q + E_0} \right)} \right] \left[ \frac{I_p}{I_0} \right] \quad (2.109)$$

Considerando el caso donde no hay campo eléctrico externo aplicado  $E_0 = 0$ , el mecanismo de transporte de portadores de carga predominante es la difusión (registros de altas frecuencias). El campo de cargas espaciales se convierte en:

$$E_1 = \left[ \frac{iE_d}{1 + \frac{E_d}{E_q}} \right] \left[ \frac{1}{(1 + i\Omega t_0) \left( \frac{E_d + E_\mu}{E_d + E_q} \right)} \right] \left[ \frac{I_p}{I_0} \right] \quad (2.110)$$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Finalmente el campo de cargas espaciales queda de la forma:

$$E_1 = \left[ \frac{iE_d}{1 + \frac{E_d}{E_q}} \right] \left[ \frac{1}{(1 + i\Omega\tau)} \right] \left[ \frac{I_p}{I_0} \right] \quad (2.111)$$

Cuya magnitud es:

$$|E_1| = \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left( \frac{1}{1 + (\Omega\tau)^2} \right)^{1/2} \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \quad (2.112)$$

Donde

$$\tau = t_0 \left[ \frac{E_d + E_\mu}{E_d + E_q} \right]; \quad t_0 = \frac{1}{rsI_0}; \quad r = \frac{N_D}{N_A} \quad (2.113)$$

Cuyos campos son [15,16].

$$E_d = \frac{KK_B T}{q} \quad (2.114)$$

$E_d$  Campo de difusión.

$K$  Magnitud del vector de red,  $K_B$  constante de Boltzman,  $T$  temperatura.  $q$  Carga del electrón.

$$E_\mu = \frac{\gamma_r N_A}{\mu_e K}; \quad \mu_e = \frac{\vec{K} \cdot \mu \vec{K}}{K^2} \quad (2.115)$$

$E_\mu$  Campo característico (denominado campo drift).

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

$\gamma_r$  Constante de recombinación,  $N_A$  numero de aceptores,  $\mu_e$  constante de movilidad efectiva,  $\mu$  Movilidad de los portadores de carga.

$$E_q = \frac{qN_A}{\epsilon_e K}; \quad \epsilon_e = \frac{\vec{K} \cdot \epsilon \vec{K}}{K^2}, \quad (2.116)$$

$E_q$  Campo de saturación.

$\epsilon_e$  Constante dieléctrica efectiva,  $\epsilon$  Constante dieléctrica

El índice de refracción incluyendo la red de índices inducida por la distribución de intensidades de la ecuación (2. 81) puede ser escrito como [16]:

$$n = n_0 + \frac{n_1}{2} \left[ e^{i\phi} \frac{A_1^* A_2}{I_0} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} + cc \right] \quad (2.117)$$

Donde:

$n_0$  índice inicial en ausencia de luz,  $\phi$  el grado por el cual la red de índices es cambiada espacialmente con respecto al patrón de interferencia. Generado por el campo de cargas espaciales (ecuacion (2.112)),  $n_1$  Depende del espaciamiento de la red del campo eléctrico aplicado, de las propiedades del material,  $cc$  es la parte compleja de la red de indices.

Los valores de  $\phi$  y  $n_1$  están dados por [21, 22].

$$\phi = \phi_0 + \tan^{-1}(\Omega\tau) \quad (2.118)$$

$$n_1 = \frac{n_0^3}{2} r_{eff} |E_1| \quad (2.119)$$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Reemplazando la ecuación (2.112) en la ecuación anterior se tiene:

$$n_1(\Omega) = \frac{n_0^3}{2} r_{ef} \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left( \frac{1}{1 + (\Omega\tau)^2} \right)^{1/2} \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \quad (2.120)$$

$\phi_0$  Es un cambio de fase constante y está relacionado con la respuesta no local del cristal,  $r_{ef}$  coeficiente electro-óptico efectivo.

En el medio fotorrefractivo que opera bajo difusión (ausencia de campo eléctrico externo aplicado)  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ . [15,23]

Para ver el acoplamiento que existe entre dos ondas de diferente frecuencia en medios fotorrefractivos sustituimos la ecuación (2.79) sabiendo que  $E = E_1 + E_2$  en la ecuación de onda (ecuación (2.6)).

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ A_1 e^{i(w_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2 e^{i(w_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] + \frac{w^2}{c^2} n^2 \left[ A_1 e^{i(w_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2 e^{i(w_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \right] \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.121)$$

Donde  $\vec{k}_j \cdot \vec{r} = \alpha_j x + \beta_j z$ .

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right] + \dots \\ + \frac{w^2}{c^2} n^2 \left[ A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

Donde  $\alpha, \beta$  son las componentes de los vectores de onda de los haces en  $x$  y  $z$  respectivamente.

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Se desarrolla el laplaciano de la ecuación (2.122).

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -i\alpha_1 A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} - i\alpha_2 A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\alpha_1^2 A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} - \alpha_2^2 A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial A_1}{\partial z} e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} - i\beta_1 A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \frac{\partial A_2}{\partial z} e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} + \dots \\ &\quad - i\beta_2 A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} - i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \\ &\quad - i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} - \beta_1^2 A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \\ &\quad + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} - i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} + \dots \\ &\quad - i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} - \beta_2^2 A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Reemplazando las derivadas de las ecuaciones (2.123) y (2.124) en la ecuación (2.122) y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} &e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} \left[ -A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} - 2i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} \right] + \dots \\ &+ e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \left[ -A_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - 2i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} \right] + \dots \quad (2.125) \\ &+ \frac{w^2}{c^2} n^2 [A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))}] = 0 \end{aligned}$$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Utilizando la aproximación de la envolvente lentamente variable ecuación (2.16) omitimos las segundas derivadas en la ecuación (2.125).

Nos queda:

$$\begin{aligned}
 & e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} \left[ A_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} \right] + \dots \\
 & + e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \left[ A_2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) + 2i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} \right] \quad (2.126) \\
 & = \frac{w^2}{c^2} n^2 \left[ A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right]
 \end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación (2.117) en la ecuación (2.126) tenemos:

$$\begin{aligned}
 & e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} \left[ 2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} + A_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \right] + \dots \\
 & + e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \left[ 2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} + A_2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \right] = \\
 & \frac{w^2}{c^2} \left[ n_0 + \left[ \frac{n_1}{2} e^{i\phi} \frac{A_1^* A_2}{I_0} e^{i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \dots \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{n_1}{2} e^{-i\phi} \frac{A_2^* A_1}{I_0} e^{-i(\Omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right] \right]^2 \left[ A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \right. \\
 & \left. + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right] \quad (2.127)
 \end{aligned}$$

$n_0^2$  Y  $n_1^2$  se anula por ser del orden de  $10^{-4}$  con relación  $n_0 n_1$ .

Entonces, la ecuación (2.127) queda de la forma:

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

$$\begin{aligned}
 & e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} \left[ 2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} \right] + e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \left[ +2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} \right] \\
 &= \frac{w^2}{c^2} \frac{n_0 n_1}{I_0} \left[ A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{-i(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \right] \left[ A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right]
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

Se desarrolla el término:

$$\left[ A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{i(\Omega t - Kx)} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{-i(\Omega t - Kx)} \right] \left[ A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right]$$

de la ecuación (2.128), cuyo vector de onda está en dirección x. (Ilustración 2.3).

Por simplicidad identificaremos con diferentes colores las partes exponenciales para ver fácilmente el proceso de cada exponente.

$$\begin{aligned}
 & \left[ A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{i(\Omega t - Kx)} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{-i(\Omega t - Kx)} \right] \left[ A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} \right] \\
 &= A_1^* A_2 A_1 e^{i\phi} e^{i(\Omega t - Kx + w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \\
 & \quad + A_1^* A_2^2 e^{i\phi} e^{i(\Omega t - Kx + w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))} + \dots \\
 & \quad + A_2^* A_1^2 e^{-i\phi} e^{i(-\Omega t + Kx + w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \\
 & \quad + A_2^* A_1 A_2 e^{-i\phi} e^{i(-\Omega t + Kx + w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))}
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

Tomando:  $kp_1 = (\alpha_1 x + \beta_1 z)$      $kp_2 = (\alpha_2 x + \beta_2 z)$      $k(p_2 - p_1) = Kx$  en la ecuación (2.68).

Resolviendo los términos exponenciales de la ecuación (2.129).

$$[(w_2 - w_1)t - Kx + w_1t - (kp_1)] = (w_2t - kp_2) \quad (2.130)$$

$$[(w_2 - w_1)t - Kx + w_2t - (k_2)] = (2w_2t - w_1t - 2kp_2 + kp_1) \quad (2.131)$$

$$[-(w_2 - w_1)t + Kx + w_1t - (kp_1)] = (-w_2t + 2w_1t - 2kp_1 + kp_2) \quad (2.132)$$

$$[-(w_2 - w_1)t + Kx + w_2t - (kp_2)] = (w_1t - kp_1) \quad (2.133)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.130), (2.131), (2.132) y (2.133) en la ecuación (2.129), se obtiene:

$$\begin{aligned} & [A_1^* A_2 e^{i\phi} e^{i(\Omega t - Kx)} + A_2^* A_1 e^{-i\phi} e^{-i(\Omega t - Kx)}] [A_1 e^{i(w_1 t - (\alpha_1 x + \beta_1 z))} + \dots \\ & \quad + A_2 e^{i(w_2 t - (\alpha_2 x + \beta_2 z))}] \\ & = A_1^* A_2 A_1 e^{i\phi} e^{i(w_2 t - kp_2)} + A_1^* A_2^2 e^{i\phi} e^{i(2w_2 t - w_1 t - 2kp_2 + kp_1)} + \dots \\ & \quad + A_2^* A_1^2 e^{-i\phi} e^{i(-w_2 t + 2w_1 t - 2kp_1 + kp_2)} + A_2^* A_1 A_2 e^{-i\phi} e^{i(w_1 t - kp_1)} \end{aligned} \quad (2.134)$$

Reemplazando la ecuación (2.134) en la ecuación (2.128) tenemos:

$$\begin{aligned} & e^{i(w_1 t - kp_1)} \left[ 2i\beta_1 \frac{dA_1}{dz} \right] + e^{i(w_2 t - kp_2)} \left[ 2i\beta_2 \frac{dA_2}{dz} \right] \\ & = \frac{w^2}{c^2} \frac{n_0 n_1}{I_0} [A_1^* A_2 A_1 e^{i\phi} e^{i(w_2 t - kp_2)} + \dots \\ & \quad + A_1^* A_2^2 e^{i\phi} e^{i(2w_2 t - w_1 t - 2kp_2 + kp_1)} + \dots \\ & \quad + A_2^* A_1^2 e^{-i\phi} e^{i(-w_2 t + 2w_1 t - 2kp_1 + kp_2)} + A_2^* A_1 A_2 e^{-i\phi} e^{i(w_1 t - kp_1)}] \end{aligned} \quad (2.135)$$

## 2.2. Mezclado de dos ondas cuasi-degenerado

---

Igualando términos de la ecuación (2.135) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$2i\beta_1 \frac{d}{dz} A_1 = \left[ \frac{w^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} \right] e^{-i\phi} A_2^* A_1 A_2 \quad (2.136)$$

$$2i\beta_2 \frac{d}{dz} A_2 = \left[ \frac{w^2 n_0 n_1}{c^2 I_0} \right] e^{i\phi} A_1^* A_2 A_1 \quad (2.137)$$

Si comparamos las ecuaciones (2.136) y (2.137) con las ecuaciones (2.29) y (2.30) vemos que tienen la misma estructura, la diferencia radica en que  $n_1$

para el caso degenerado es  $n_1 = \frac{n_0^3}{2} r_{ef} \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right|$  y  $n_1$

para el caso cuasi-degenerado es  $n_1 = \frac{n_0^3}{2} r_{ef} \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \left( \frac{1}{1 + (\Omega\tau)^2} \right)^{1/2}$ . Entonces las

ecuaciones (2.136) y (2.137) se convierten en:

$$2i\beta_1 \frac{d}{dz} A_1 = \left[ \frac{w^2 n_0 n_1(\Omega)}{c^2 I_0} \right] e^{-i\phi} A_2^* A_1 A_2 \quad (2.138)$$

$$2i\beta_2 \frac{d}{dz} A_2 = \left[ \frac{w^2 n_0 n_1(\Omega)}{c^2 I_0} \right] e^{i\phi} A_1^* A_2 A_1 \quad (2.139)$$

Donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son las componentes z de los vectores de onda  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente

### 2.2.1. Caso co-direccional

Considerando el caso cuando los dos haces entran al medio desde el mismo lado en del cristal fotorrefractivo en  $z=0$  (ilustración 2.4).

Se reemplaza la ecuación  $\beta_1 = \beta_2 = k \cos[\theta] = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \cos[\theta]$  en las ecuaciones (2.138) y (2.139) y realizando el mismo procedimiento utilizado para encontrar las ecuaciones (2.54), (2.55), (2.77) y (2.78) en el mezclado de dos ondas co-direccional para el caso degenerado, se obtienen las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\frac{dI_1}{dz} = - \frac{2\pi n_1(\Omega)}{\lambda \cos[\theta]} \text{sen}[\phi] \left[ \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] - I_1 \sigma \quad (2.140)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = \frac{2\pi n_1(\Omega)}{\lambda \cos[\theta]} \text{sen}[\phi] \left[ \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] - I_2 \sigma \quad (2.141)$$

$$\frac{d\phi_1}{dz} = \frac{\pi n_1(\Omega)}{\lambda \cos[\theta]} \cos[\phi] \left[ \frac{I_2}{I_1 + I_2} \right] \quad (2.142)$$

$$\frac{d\phi_2}{dz} = \frac{\pi n_1(\Omega)}{\lambda \cos[\theta]} \cos[\phi] \left[ \frac{I_1}{I_1 + I_2} \right] \quad (2.143)$$

Donde:

$$\gamma = \frac{2\pi n_1(\Omega)}{\lambda \cos[\theta]} \text{sen}[\phi] \quad (2.144)$$

$$\delta = \frac{\pi n_1(\Omega)}{\lambda \cos[\theta]} \cos[\phi] \quad (2.145)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.118) y (2.120) en la ecuación (ecuación (2.144))

y como  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$  tenemos:

$$\gamma = \frac{\pi n_0^3 r_{eff}}{\lambda \cos[\theta]} \left[ \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \left( \frac{1}{1 + (\Omega\tau)^2} \right)^{1/2} \right] \text{sen} \left[ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\Omega\tau) \right] \quad (2.146)$$

Utilizando la propiedad  $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \text{sen}(b)$  en la ecuación

(2.146) tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\pi n_0^3 r_{eff}}{\lambda \cos[\theta]} \left[ \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \left( \frac{1}{1 + (\Omega\tau)^2} \right)^{1/2} \right] & \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos(\tan^{-1}(\Omega\tau)) \right. \\ & \left. + \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) \text{sen}(\tan^{-1}(\Omega\tau)) \right] \end{aligned} \quad (2.147)$$

Entonces:

$$\gamma = \frac{\pi n_0^3 r_{eff}}{\lambda \cos[\theta]} \left[ \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \left( \frac{1}{1 + (\Omega\tau)^2} \right)^{1/2} \right] \cos(\tan^{-1}(\Omega\tau)) \quad (2.148)$$

Como  $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  la ecuación anterior nos queda:

$$\gamma = \frac{\pi n_0^3 r_{eff}}{\lambda \cos[\theta]} \left[ \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \right] \left( \frac{1}{1 + \Omega^2 \tau^2} \right) \quad (2.149)$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \Omega^2 \tau^2} \quad (2.150)$$

Donde  $\gamma_0$  es constante de acoplamiento para el caso degenerado.

$$\gamma_0 = \frac{\pi n_0^3 r_{eff}}{\lambda \cos[\theta]} \left[ \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \right] \quad (2.151)$$

Reemplazando la ecuación (2.150) en las ecuaciones (2.140) y (2.41) se obtienen las ecuaciones acopladas en términos de las intensidades para el caso cuasi-degenerado.

$$\frac{dI_1}{dz} = - \frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)} \left[ \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] - I_1 \sigma \quad (2.152)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = \frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)} \left[ \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] - I_2 \sigma \quad (2.153)$$

Se observa que en ausencia del coeficiente de absorción ( $\sigma=0$ ).  $I_2$  Es una función de  $Z$  proporcional a  $\gamma_0$  positivo esto significa que la energía fluye del haz 1 a el haz2.

Ahora se procede a encontrar las ecuaciones acopladas para las fases  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de las amplitudes de los haces  $I_1$  y  $I_2$  respectivamente.

Reemplazando las ecuaciones (2.118) y (2.120) en la ecuación (ecuación (2.144))

y como  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$  tenemos:

$$\delta = \cos \left[ \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\Omega \tau) \right] \quad (2.154)$$

Utilizando la propiedad  $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - (\text{sen}(a)\text{sen}(b))$

$$\delta = \frac{\pi n_0^3 r_{eff}}{2\lambda \cos[\theta]} \left[ \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \left( \frac{1}{1 + (\Omega\tau)^2} \right)^{1/2} \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\tan^{-1}(\Omega\tau)) + \dots \right. \\ \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(\tan^{-1}(\Omega\tau)) \right] \quad (2.155)$$

Sabiendo que  $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  en la ecuación (80) nos queda:

$$\delta = \frac{\pi n_0^3 r_{eff}}{2\lambda \cos[\theta]} \left[ \left( \frac{E_d E_q}{E_d + E_q} \right) \left| \frac{I_p}{I_0} \right| \right] \left[ \frac{\Omega\tau}{(1 + \Omega^2\tau^2)} \right] \quad (2.156)$$

$$\delta = \frac{\Omega\tau\gamma_0}{2(1 + \Omega^2\tau^2)} \quad (2.157)$$

Reemplazando las ecuación (2.157) en las ecuaciones (2.142) y (2.143) obtenemos las ecuaciones acopladas para las fases  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  respetivamente.

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = - \left[ \frac{\Omega\tau\gamma_0}{2(1 + \Omega^2\tau^2)} \right] \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad (2.158)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = - \left[ \frac{\Omega\tau\gamma_0}{2(1 + \Omega^2\tau^2)} \right] \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad (2.159)$$

Para la solución de las intensidades  $I_1(z)$  y  $I_2(z)$  de las ecuaciones (2.152) y (2.153) tenemos:

Sumando las ecuaciones (2.152) y (2.153) se obtiene:

$$\frac{d(I_1 + I_2)}{dz} = -\sigma(I_1 + I_2) \quad (2.160)$$

Integrando la ecuación (2.127).

$$\int_0^z \frac{d(I_1 + I_2)}{(I_1 + I_2)} = \int_0^z -\sigma z dz$$

$$I_1(z) + I_2(z) = [I_1(0) + I_2(0)]e^{-\sigma z} \quad (2.161)$$

Tomando:

$$U(z) = I_1(z)e^{\sigma z} \quad y \quad V(z) = I_2(z)e^{\sigma z} \quad (2.162)$$

Siendo:

$$U + V = C, \quad C = \text{constante} \quad (2.163)$$

Derivando  $U$  de la ecuación (2.162) con respecto a  $z$  se tiene:

$$\frac{dU}{dz} = \sigma I_1 e^{\sigma z} + \frac{dI_1}{dz} e^{\sigma z} \quad (2.164)$$

Sustituyendo la ecuación (2.152) en la ecuación (2.164) y organizando.

$$\frac{dU}{dz} = -\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) \left[\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}\right] e^{\sigma z} \quad (2.165)$$

Reemplazando la ecuación (2.162) en la ecuación anterior ecuación (2.165) y despejando se obtiene:

$$\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right) dU = -\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) dz \quad (2.166)$$

Utilizando la expresión de la ecuación (2.163) en la ecuación (2.166):

$$\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{C - U}\right) dU = -\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) dz \quad (2.167)$$

Integrando la ecuación (2.167).

$$\int_{U(0)}^{U(z)} \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{C - U}\right) dU = \int_0^z -\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) dz \quad (2.168)$$

$$\{Ln[U(z)] - Ln[U(0)]\} - \{Ln[C - U(z)] - Ln[C - U(0)]\} = -\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) z$$

$$\frac{U(z)[C - U(0)]}{U(0)[C - U(z)]} = e^{-\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) z} \quad (2.169)$$

Reemplazando  $C$  de la ecuación (2.163) en la ecuación (2.169) se obtiene:

$$\frac{U(z)[U(z) + V(z) - U(0)]}{U(0)V(z)} = e^{-\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) z} \quad (2.170)$$

Reemplazando los valores de  $U(z)$ ,  $V(z)$  y  $U(0)$  de la ecuación (2.162) en la ecuación (2.170) y organizando se obtiene:

$$I_1(z)I_2(0) = I_1(0)I_2(z)e^{-\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) z} \quad (2.171)$$

Sustituyendo el valor de  $I_2(z)$  de la ecuación (2.161) en la ecuación (2.171) se obtiene:

$$I_1(z)I_2(0) = I_1(0)[(I_1(0) + I_2(0))e^{-\sigma z} - I_1(z)]e^{-\left(\frac{\gamma_0}{(1 + \Omega^2 \tau^2)}\right) z} \quad (2.172)$$

Despejando  $I_1(z)$  de la ecuación anterior:

$$I_1(z) = I_1(0) \left[ \frac{(I_1(0) + I_2(0))}{I_1(0) + I_2(0) e^{\left(\frac{\gamma_0}{(1+\Omega^2\tau^2)}\right)z}} \right] e^{-\sigma z} \quad (2.173)$$

Dividiendo por  $I_1(0)$  la ecuación (2.173) se obtiene:

$$I_1(z) = I_1(0) \left[ \frac{1 - M^{-1}}{1 + M^{-1} e^{\left(\frac{\gamma_0}{(1+\Omega^2\tau^2)}\right)z}} \right] e^{-\sigma z} \quad (2.174)$$

Donde es  $M$  es la razón de las intensidades a la entrada del cristal escrita como:

$$M = \frac{I_1(0)}{I_2(0)} \quad (2.175)$$

Derivando  $V$  de la ecuación (2.162) con respecto a  $z$  y con un proceder similar al utilizado para hallar la ecuación (2.174) se obtiene:

$$I_2(z) = I_2(0) \left[ \frac{1 - M}{1 + M e^{-\frac{\gamma_0}{(1+\Omega^2\tau^2)}z}} \right] e^{-\sigma z} \quad (2.176)$$

Remplazando  $\tau = t_0 \left[ \frac{E_d + E_\mu}{E_d + E_q} \right]$  (ecuación (2.113)) sabiendo que  $t_0 = \frac{1}{rsI_0}$ ,  $r = \frac{N_D}{N_A}$  (razón de concentración) en las ecuaciones (2.174) y (2.176) finalmente se obtienen:

$$I_1(z) = I_1(0) \frac{1 + M^{-1}}{1 + M^{-1} \exp \left[ \left( \frac{\gamma_0}{1 + \Omega^2 \left[ \frac{1}{rsI_0} \left[ \frac{E_d + E_\mu}{E_d + E_q} \right] \right]^2} \right) z \right]} \exp(-\sigma z) \quad (2.177)$$

$$I_2(z) = I_2(0) \frac{1 + M}{1 + M \exp \left[ \left( \frac{-\gamma_0}{1 + \Omega^2 \left[ \frac{1}{rsI_0} \left[ \frac{E_d + E_\mu}{E_d + E_q} \right] \right]^2} \right) z \right]} \exp(-\sigma z) \quad (2.178)$$

Las ecuaciones (2.177) y (2.178) son las ecuaciones acopladas para las intensidades las cuales dependen no solo de la constante de acoplamiento para el caso degenerado y del coeficiente de absorción, sino también de las propiedades del material, tales como: la concentración de impurezas, el tiempo de respuesta (donde ya están incluidos los campos) y de la diferencia de frecuencias de los haces.

Un parámetro útil es la ganancia:

Para la intensidad  $I_1$ :

$$g_1 = \frac{I_1(L)}{I_1(0)} \quad (2.179)$$

$$g_1 = \frac{1 + M^{-1}}{1 + M^{-1} \exp \left[ \frac{\gamma_0 L}{1 + \Omega^2 \left[ \frac{1}{rsI_0} \left[ \frac{E_d + E_\mu}{E_d + E_q} \right] \right]^2} \right]} \exp(-\sigma L) \quad (2.180)$$

Para la intensidad  $I_2$ :

$$g_2 = \frac{I_2(L)}{I_2(0)} \quad (2.181)$$

$$g_2 = \frac{1 + M}{1 + M \exp \left[ \frac{-\gamma_0 L}{1 + \Omega^2 \left[ \frac{1}{rsI_0} \left[ \frac{E_d + E_\mu}{E_d + E_q} \right] \right]^2} \right]} \exp(-\sigma L) \quad (2.182)$$

Las ecuaciones (2.180) y (2.182) a partir de estas ecuaciones se puede determinar cómo varia la energía dentro del cristal, dependiendo de diferentes parámetros, tales como: la concentración de impurezas del material, el tiempo de respuesta (donde ya están incluidos los campos) y de la diferencia de frecuencias de los haces.

# Capítulo 3

(En este documento “energía óptima de transferencia” hace referencia al lugar donde se presenta el mayor intercambio de energía).

## 3. Análisis de las intensidades para el mezclado cuasi-degenerado de dos ondas.

Las ecuaciones (2.177) y (2.178) son las expresiones analíticas de las intensidades en la mezcla de dos ondas cuasi-degenerado en cristales fotorrefractivos. Los resultados presentados en este trabajo son para frecuencias de red de 2000 *lineas/mm*,  $\lambda = 532 \text{ nm}$  y orientación del cristal ( $\vec{K} \parallel \langle 001 \rangle$ ) [25] en un cristal *BSO*.  $I_1$  Representa el haz de bombeo y  $I_2$  representa el haz señal.

Los parámetros físicos utilizados para la simulación de la mezcla cuasi-degenerada de dos ondas son [15, 16, 17, 24]:

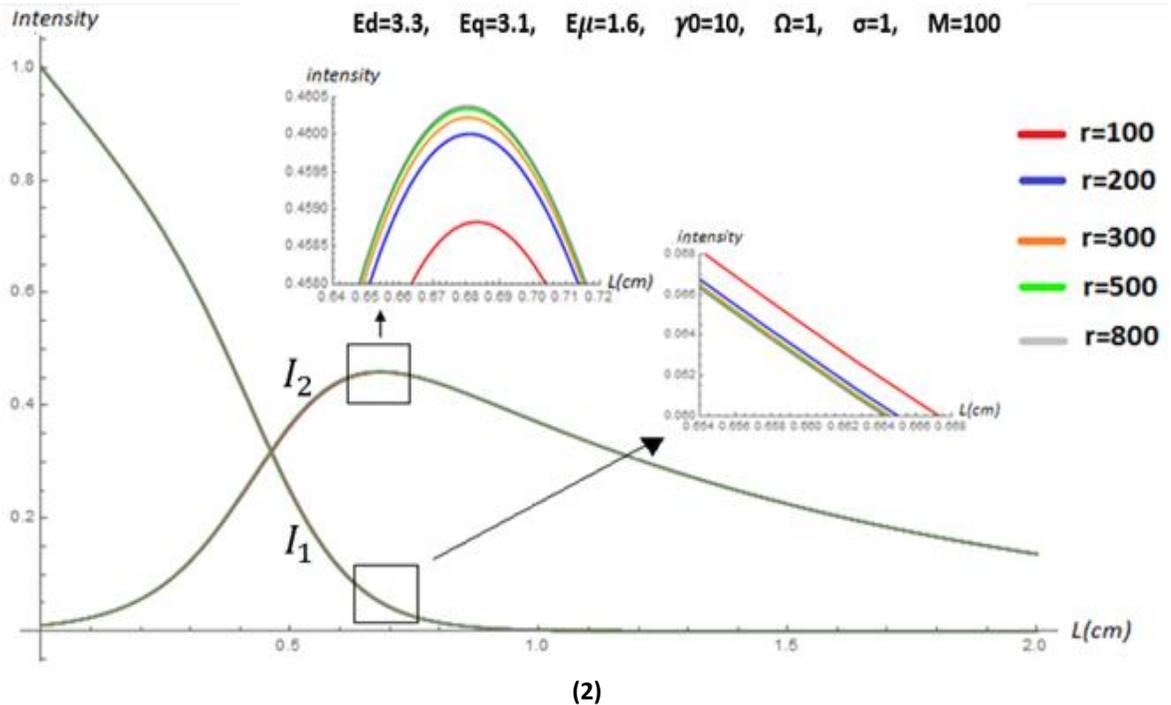
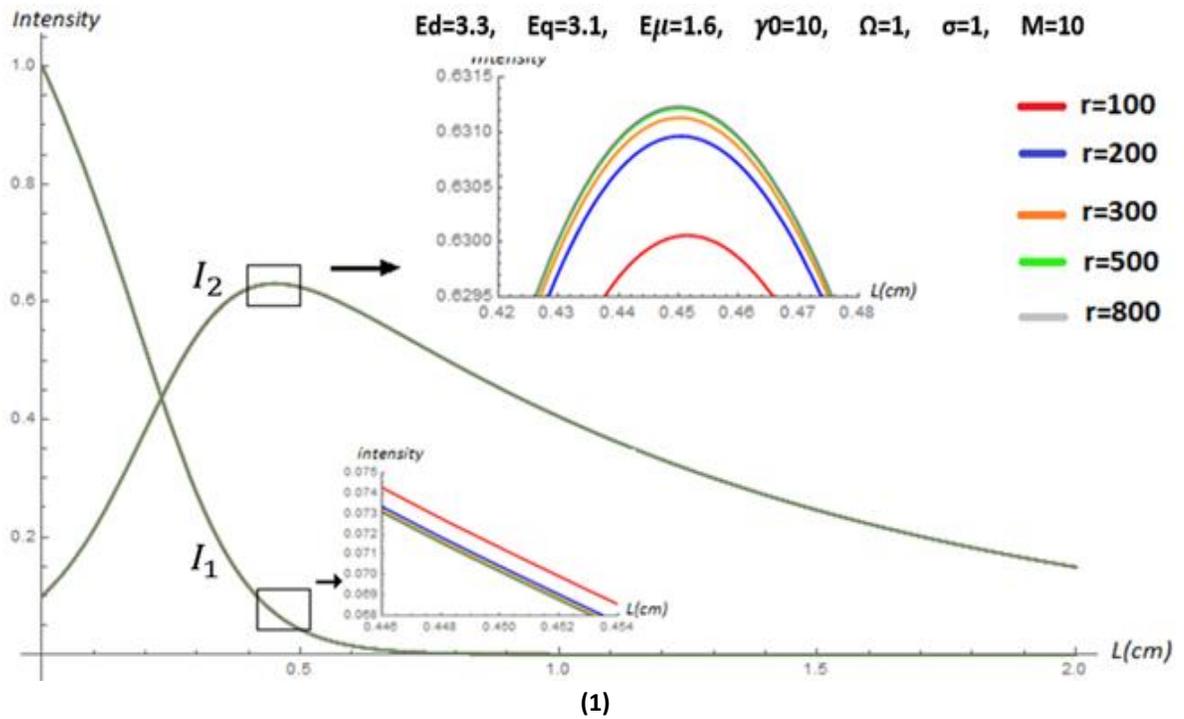
| Parámetros constantes |   |  |
|-----------------------|---|--|
| $\gamma_r$            | Constante de recombinación ( $cm^{-3}s^{-1}$ )      | $1.65 \times 10^{-11}$                     |
| $\mu_e$               | constante de movilidad efectiva( $cm^2V^{-1}$ )     | $1 \times 10^{-3}$                         |
| $\varepsilon$         | Constante dieléctrica ( <i>BSO</i> )                | 56   |
| $\varepsilon$         | Constante dieléctrica ( <i>BaTiO<sub>3</sub></i> )  | 1000                                       |
| $N_A$                 | densidad de aceptores ( $cm^{-3}$ )                 | $1.2 \times 10^{16}$                       |
| $r_{41}$              | coeficiente electro-óptico efectivo ( $cm V^{-1}$ ) | $4.7 \times 10^{-10}$                      |
| $n_0$                 | Índice de refracción inicial                        | 2.5  |
| $\sigma$              | Coeficiente de absorción ( $cm^{-1}$ )              | 1  |
| $s$                   | Sección eficaz ( $cm^2V^{-1}$ )                     | $1.06 \times 10^{-1}$                      |
| Parámetros variables  |   | Desde ---- Hasta                           |
| $\Omega$              | Diferencia de frecuencia ( <i>Hz</i> )              | 0.1 -- 1                                   |
| $N_D$                 | Densidad de donores ( $cm^{-3}$ )                   | $0.5 \times 10^{19}$ -- $2 \times 10^{19}$ |
| $\gamma_0$            | Constante de acoplamiento ( $cm^{-1}$ )             | 5 -- 25                                    |

**3.1. Análisis de las intensidades en términos de la razón de concentración  $r \left( \frac{N_D}{N_A} \right)$ , con diferentes modulaciones  $M$ .**

Ilustración 3.1-(1-3) intensidades  $I_1$  y  $I_2$  en función del espesor del cristal  $L$  para diferentes valores de razón de concentración  $r$ . Donde la Ilustración 3.1-1 es para una modulación  $M = 10$ , Ilustración 3.1-2  $M = 100$  y 3.1-3  $M = 1000$ . En las tres ilustraciones 3.1-(1-3) se puede apreciar que la intensidad del haz  $I_2$  aumenta a medida que avanza dentro del cristal alcanzando un máximo de intensidad, luego disminuye exponencialmente debido a la absorción que presenta el medio a lo largo del cristal, mientras que la intensidad del haz  $I_1$  disminuye a medida que avanza dentro del cristal, haciéndose evidente el intercambio de energía. También se puede apreciar que para una razón mayor a  $r \approx 800$  las intensidades de los haces  $I_1$  y  $I_2$  son independientes de la razón de concentración de impurezas  $\left( r = \frac{N_D}{N_A} \right)$ . Ahora bien, si se aumenta la modulación  $M$  se puede apreciar que los máximos de energía se presentan para diferentes espesores de cristal, como vemos en la Ilustración 3.1-1 con  $M = 10$ , se evidencia que la energía optima de transferencia se presenta en  $L = 0.45 \text{ cm}$ , en la Ilustración 3.1-2 con  $M = 100$ , la energía optima de transferencia se presenta para  $L = 0.68 \text{ cm}$ , en la Ilustración 3.1-3 para  $M = 1000$ , la energía optima de transferencia se presenta para  $L = 0.91 \text{ cm}$ . Concluyendo que donde se presenta la energía optima de transferencia depende de la modulación  $M$ . Cabe

### 3.1. En términos de la razón de concentración $r \left( \frac{N_D}{N_A} \right) \dots$

resaltar que el haz  $I_1$  le sede energía al el haz  $I_2$  debido al acoplamiento que presentan.



### 3.1. En términos de la razón de concentración $r \left( \frac{N_D}{N_A} \right) \dots$

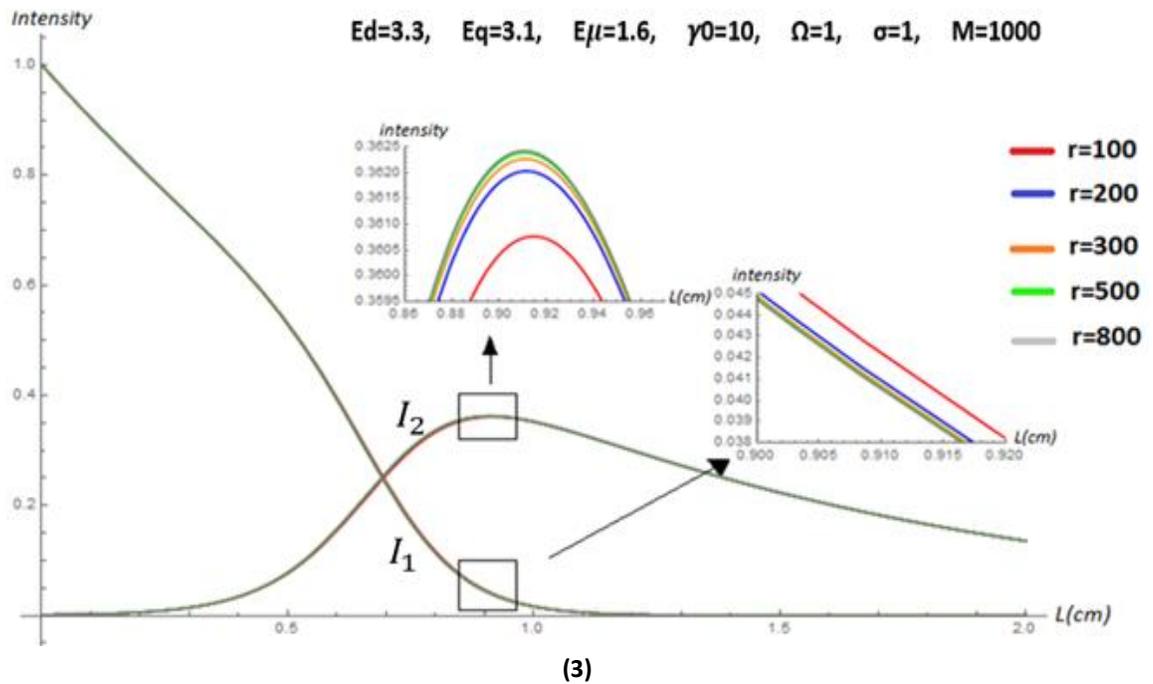
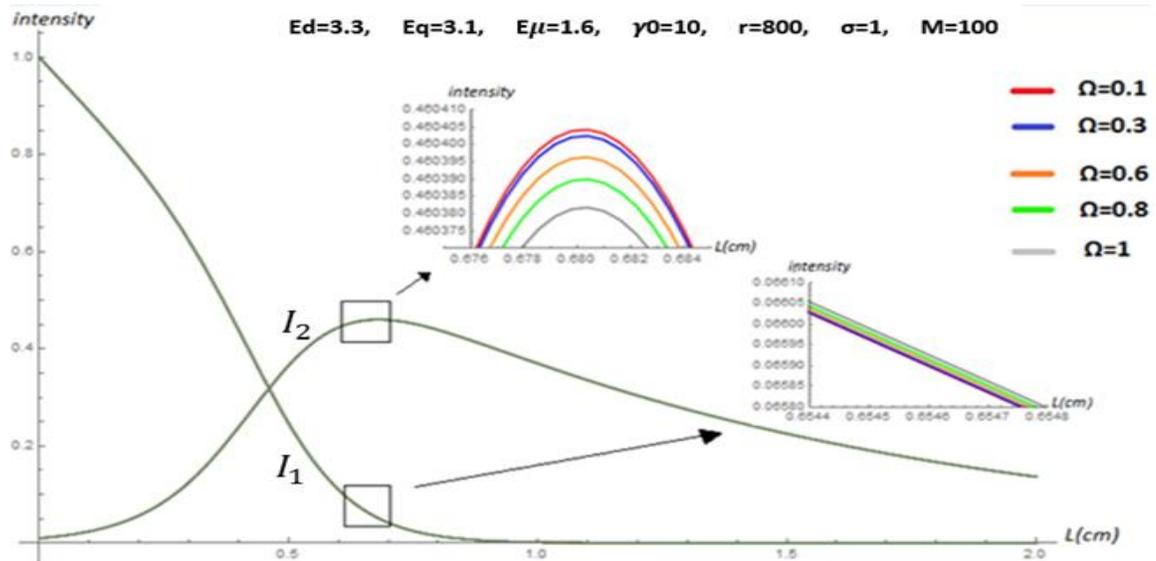


Ilustración 3.1-3 ). Comportamiento de las intensidades  $I_1$  y  $I_2$  en la mezcla cuasi-degenerada de dos ondas en cristales fotorrefractivos, en función del espesor del cristal  $L$  y de la razón de concentración  $r$ . Con valores  $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_q = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ , (1)  $M = 10$ , (2)  $M = 100$ , (3)  $M = 1000$ .

### 3.2. Análisis de las intensidades en términos de la frecuencia de oscilación ( $\Omega$ ).

Ilustración 3.2 intensidades  $I_1$  y  $I_2$  en función del espesor del cristal para diferentes valores  $\Omega$  (0.1Hz, 0.3Hz, 0.6Hz, 0.8Hz, 1Hz). Se puede apreciar que el intercambio de energía depende de la diferencia de oscilación  $\Omega$  entre los haces. Para el valor de modulación  $M = 100$ , la energía óptima de transferencia se presenta en la misma longitud de cristal  $L = 0.68cm$  de la (Ilustración 3.1-2). Se puede evidenciar que donde se presenta la energía óptima de transferencia no se altera si se varia la diferencia de oscilación  $\Omega$  entre los haces. A medida que disminuye la diferencia de oscilación  $\Omega$  entre los haces, el intercambio de energía es mayor para la misma longitud de cristal  $L = 0.68cm$ . Para valores inferiores a  $\Omega \approx 0.1Hz$  las intensidades  $I_1$  y  $I_2$  son independientes de la diferencia de oscilación entre los haces.

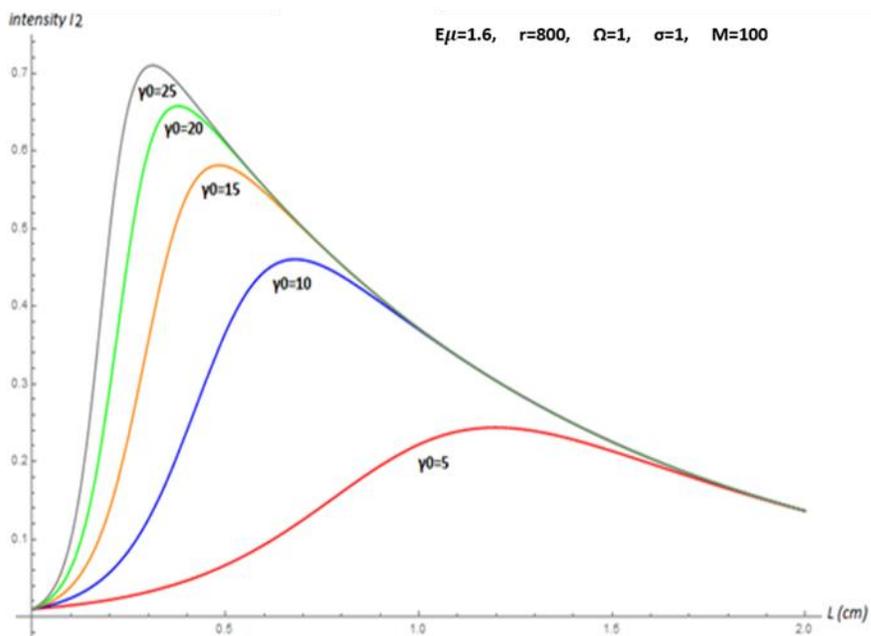


**Ilustración 3. 2** Dependencia de las intensidades de los haces en términos del espesor del cristal, para diferentes valores de  $\Omega$ . Con valores,  $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_q = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $r = 800$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $M = 100$ .

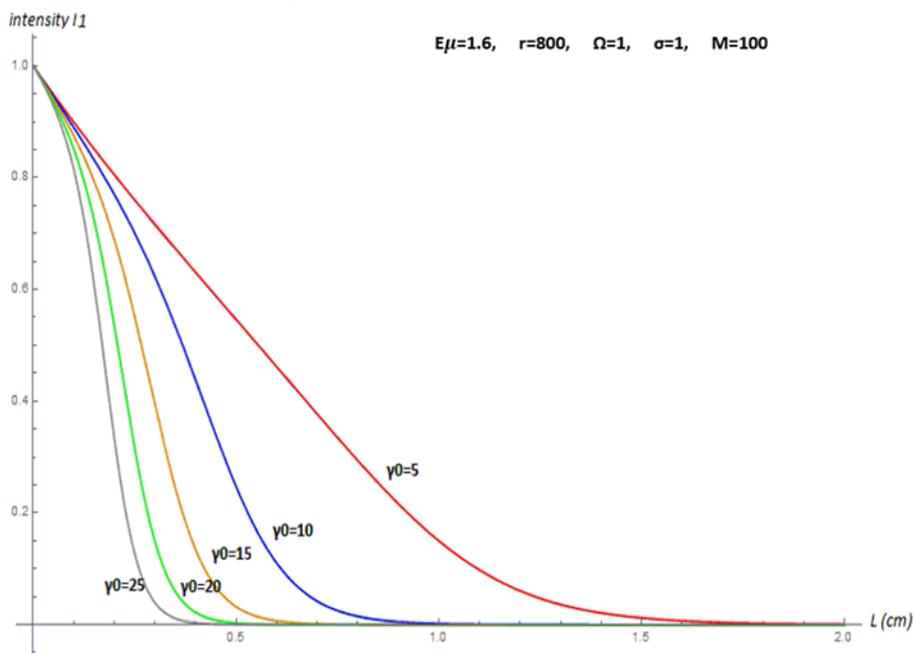
#### 3.3. Análisis de las intensidades en términos de la constante de acoplamiento ( $\gamma_0$ ).

Ilustración 3.3-(1,2) intensidades  $I_1$  y  $I_2$  en función del espesor del cristal para diferentes valores de  $\gamma_0$  ( $5\text{cm}^{-1}$ ,  $10\text{cm}^{-1}$ ,  $15\text{cm}^{-1}$ ,  $20\text{cm}^{-1}$ ,  $25\text{cm}^{-1}$ ), se puede ver que el intercambio de energía que presentan los haces, depende del acople  $\gamma_0$  que existe entre ellos. Al observar las ilustraciones 3.3-(1,2) se puede apreciar que a medida que se aumenta el acople  $\gamma_0$  entre los haces, se hace mayor el intercambio de energía, siendo apreciable que la energía óptima de transferencia se presenta cada vez para cristales de menor espesor, por ejemplo para un valor de  $\gamma_0 = 25\text{cm}^{-1}$  la energía óptima de transferencia se presenta para un valor de  $L \approx 0.3\text{ cm}$  y el intercambio de energía es mayor, en comparación con los demás valores de  $\gamma_0$ .

### 3.3. En términos de la constante de acoplamiento ( $\gamma_0$ )



(1)



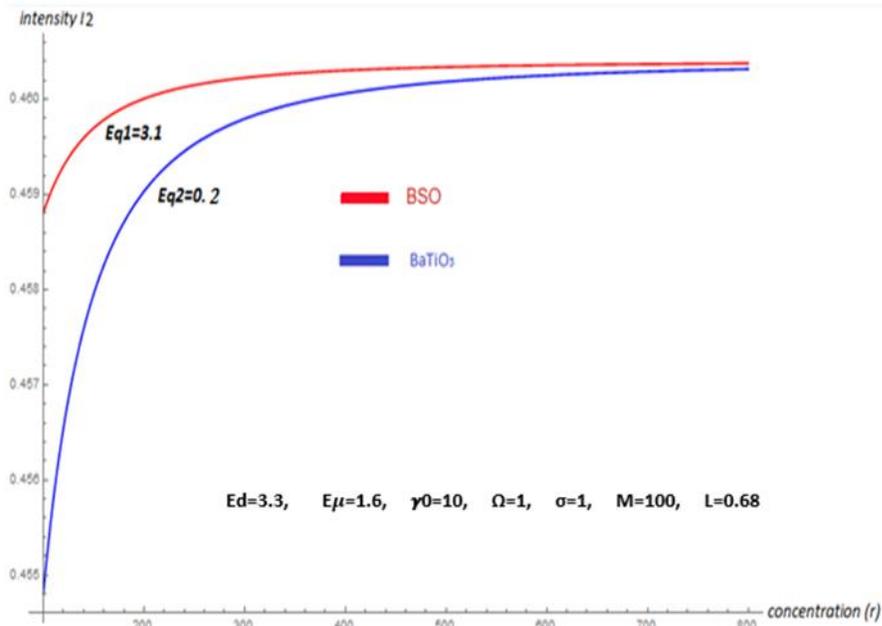
(2)

**Ilustración 3. 3-(1,2).** Intensidad  $I_1$  y  $I_2$  en función del espesor de cristal  $L$ , para diferentes valores de acoplamiento  $\gamma_0$ . Con valores  $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_q = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $r = 800$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $M = 100$ . (1)  $I_2$  vs  $L$ , (2)  $I_1$  vs  $L$ .

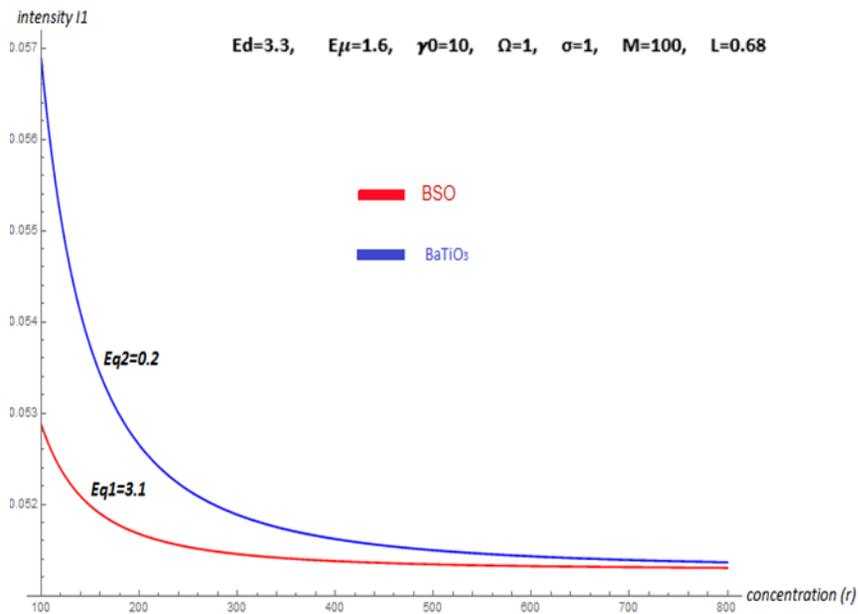
#### 3.4. Análisis de las intensidades Para materiales fotorrefractivos *BSO* y *BaTiO<sub>3</sub>*.

Ilustración 3.4-(1,2) intensidades  $I_1$  y  $I_2$  en función de la razón de concentración  $r$  para un cristal *BSO* y *BaTiO<sub>3</sub>*, con valores:  $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q1} = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q2} = 0.2 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L = 0.68 \text{ cm}$ ,  $M = 100$ . Se puede apreciar que el intercambio energético es mayor para un cristal *BSO* que para un cristal *BaTiO<sub>3</sub>*, debido a que el campo de saturación  $E_q$  es menor para el cristal *BaTiO<sub>3</sub>*, esto se debe a que la constante de permitividad  $\epsilon_e$  del cristal *BaTiO<sub>3</sub>* es mayor en comparación con la permitividad del cristal *BSO*. Siendo apreciable que para los dos cristales, el intercambio de energía es independiente de la razón de concentración de impurezas mayores a  $r \approx 800$ .

### 3.4. Para diferentes materiales fotorrefractivos



(1)



(2)

**Ilustración 3. 4-(1,2).** Intensidad  $I_1$  y  $I_2$  en términos de la razón de concentración, para cristales *BSO* y *BaTiO<sub>3</sub>*. Con valores  $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q1} = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q2} = 0.2 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $M = 100$ . (1)  $I_2$  vs  $r$ , (2)  $I_1$  vs  $r$ .

# Capítulo 4

---

## 4. Análisis de la ganancia para el mezclado cuasi-degenerado de dos ondas.

---

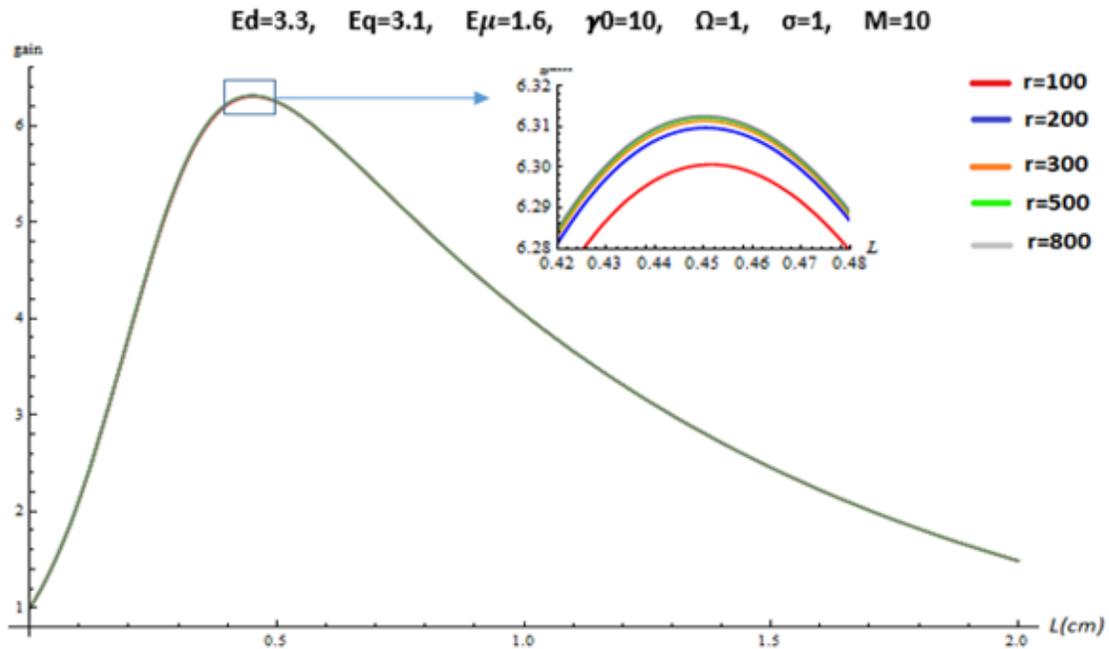
Si bien lo enunciamos en el capítulo 2 (pág. 47), la energía fluye del haz 1 (haz de bombeo) hacia el haz 2 (haz señal), la ganancia la presenta el haz 2, utilizando la ecuación (2.182) se analiza como varía la ganancia energética a lo largo del cristal. Los resultados se presentan para frecuencias de red de  $2000 \text{ líneas/mm}$ ,  $\lambda = 532 \text{ nm}$  en un cristal *BSO*. El software Wolfram Mathematica fue utilizado para graficar la ecuación (2.182), con respecto a los diferentes parámetros.

### 4.1. Análisis de la ganancia en términos de la razón de concentración $r \left( \frac{N_D}{N_A} \right)$ , para diferentes modulaciones ( $M$ ).

En la Ilustración 4.1-(1-3) se presenta la ganancia energética en función del espesor  $L$  para diferentes valores de concentración  $r$ . Con 4.1-(1) ( $M = 10$ ), 4.1-(2) ( $M = 100$ ) y 4.1-(3) ( $M = 1000$ ). Se puede apreciar que a medida que aumenta el espesor del cristal la ganancia es mayor, llegando a un máximo, para la Ilustración 4.1-(1) ese máximo se presenta para  $L = 0.45 \text{ cm}$ , para la Ilustración 4.1-(2) en  $L = 0.68 \text{ cm}$  y para la Ilustración 4.1-(3) en  $L = 0.91 \text{ cm}$ . Luego de ese máximo de energía que se

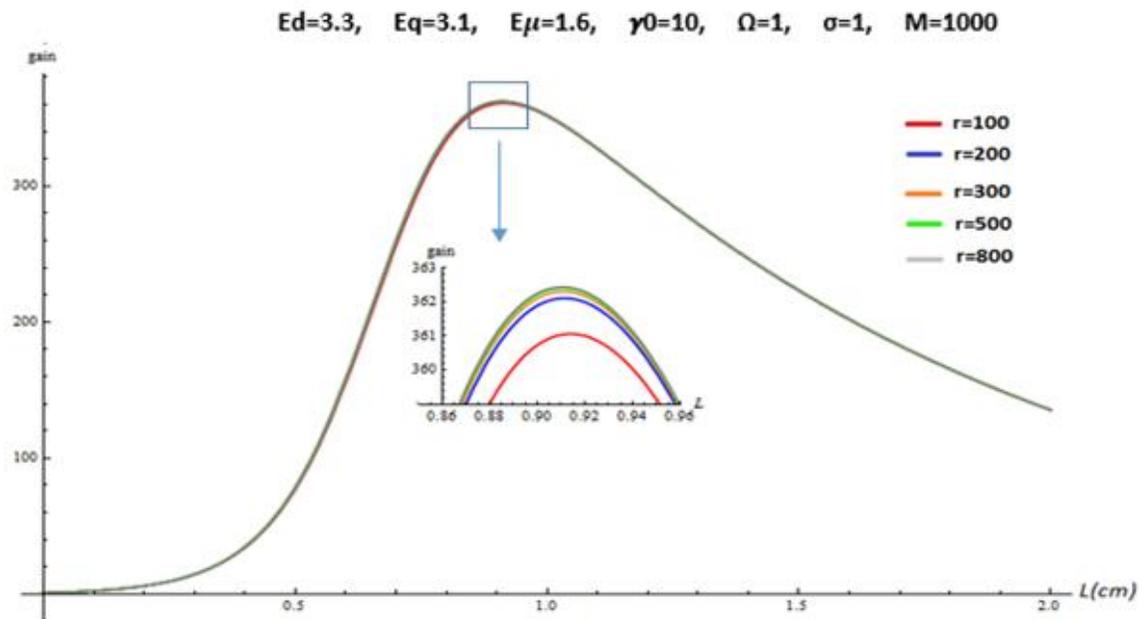
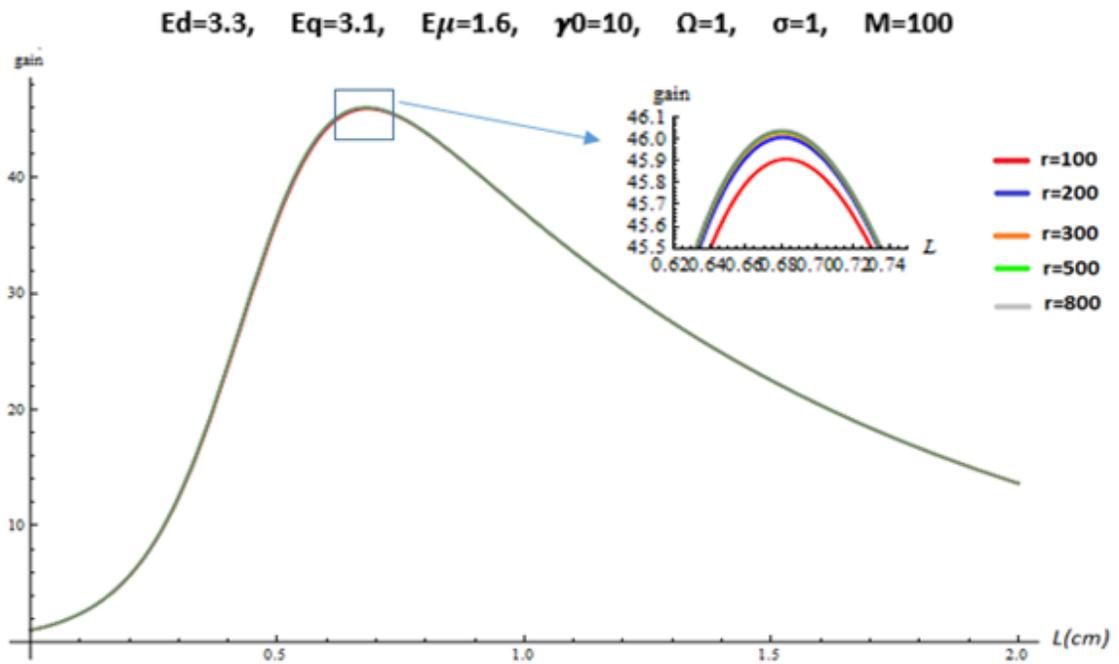
## 4.1. En términos de la razón de concentración $r \left( \frac{N_D}{N_A} \right) \dots$

presenta, la energía disminuye exponencialmente debido a la absorción que presenta el material a lo largo del cristal. Es apreciable que para valores mayores a  $r \approx 800$  la ganancia es independiente de la razón de concentración de impurezas. A medida que se aumenta la modulación  $M$ , se aumenta la ganancia y el máximo de energía, esto debido a la diferencia que presenta el haz1 de referencia o de bombeo, con respecto al el haz2 haz señal.



(1)

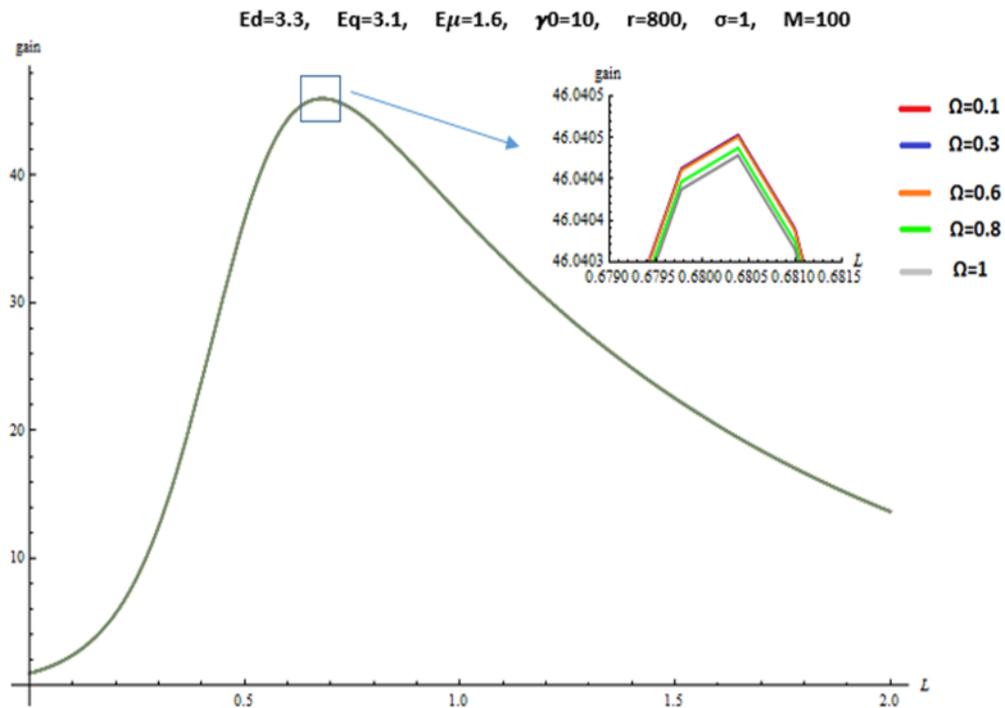
## 4.1. En términos de la razón de concentración $r = \left(\frac{N_D}{N_A}\right) \dots$



**Ilustración 4.1-( 1-3 ).** Variación de la ganancia en la mezcla de dos ondas cuasi-degenerado en cristales fotorrefractivos, en función del espesor del cristal. Para diferentes valores de  $r$ . Con valores  $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_q = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $m = 100$ . (1)  $M = 10$ , (2)  $M = 100$ , (3)  $M = 1000$ .

### 4.2. Análisis de la ganancia en términos de la diferencia de oscilación ( $\Omega$ ).

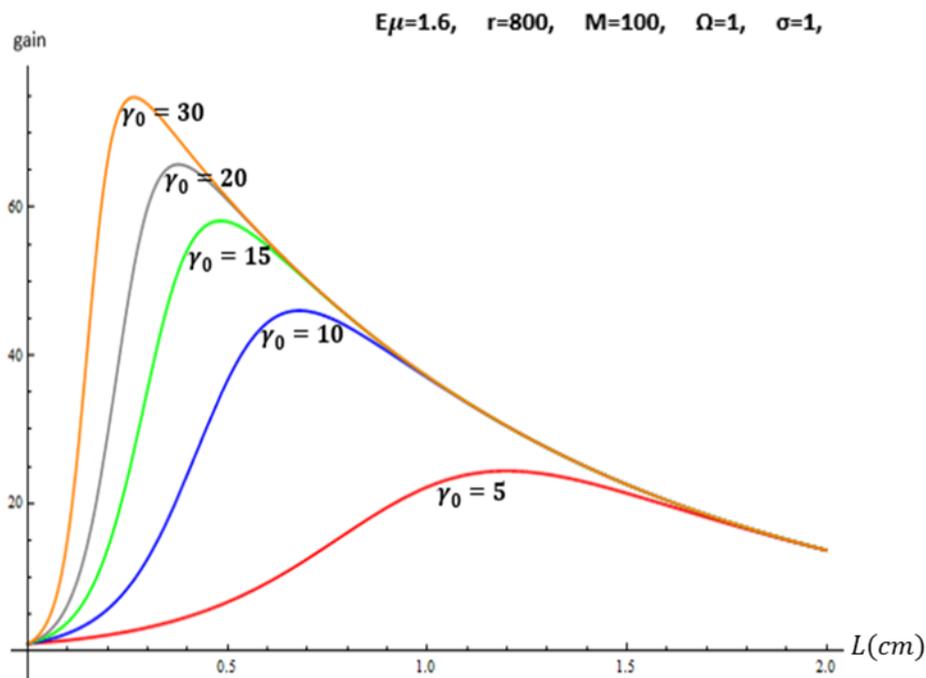
En la Ilustración 4.2 se presenta la ganancia energética en función del espesor del cristal, para diferentes valores de  $\Omega$ . Con valores. Es evidente que a medida que disminuye la diferencia de oscilación  $\Omega$  entre los haces, la ganancia energética se hace mayor, siendo apreciable que para valores menores a  $\Omega \approx 0.1 \text{ Hz}$  la ganancia es independiente de la diferencia de oscilación entre los haces.



**Ilustración 4.2.** Variación de la ganancia en función del espesor del cristal, para diferentes valores de  $\Omega$ . Con valores ( $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_q = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $r = 800$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $M = 100$ ).

#### 4.3. Análisis de la ganancia en términos de la constante de acoplamiento ( $\gamma_0$ ).

En la Ilustración 4.3. Se presenta la ganancia energética en función del espesor del cristal  $L$ , para diferentes valores de acoplamiento  $\gamma_0$ , con valores  $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_q = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $M = 100$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $r = 800$ . Se puede apreciar que a mayor constante de acoplamiento  $\gamma_0$  que exista entre los haces, la ganancia es mayor y el máximo de energía (energía óptima de transferencia) se presenta para cristales de menor espesor. Siendo  $\gamma_0$  una constante proporcional a la ganancia.

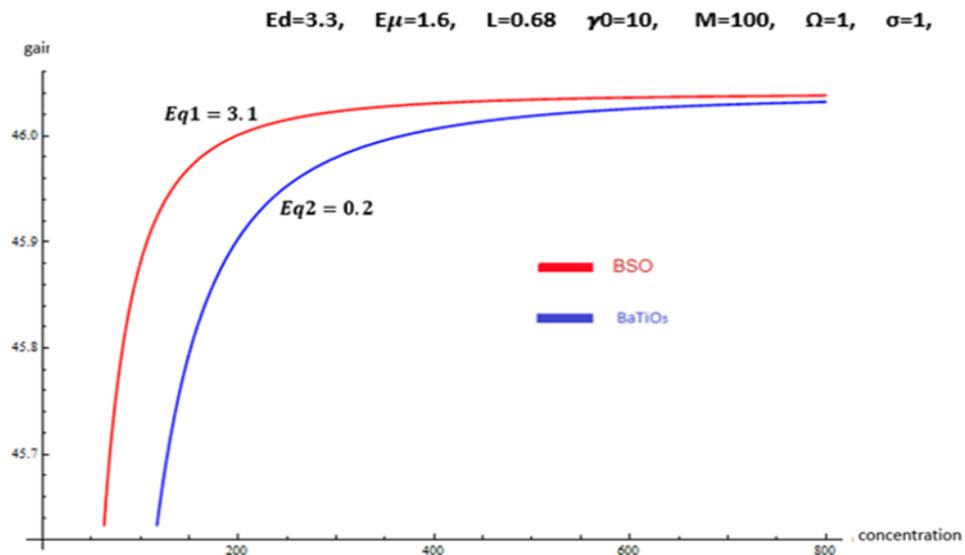


**Ilustración 4.3.** Variación de la ganancia en función del espesor del cristal. Para diferentes valores de acoplamiento  $\gamma_0$ , con valores ( $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_q = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $M = 100$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $r = 800$ ).

### 4.4. Análisis de la ganancia Para materiales fotorrefractivos

#### *BSO y BaTiO<sub>3</sub>.*

En la Ilustración 4.4. Se presenta la ganancia energética en función de la razón de concentración  $r$ . Para un cristal *BSO* y *BaTiO<sub>3</sub>*, con valores ( $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q1} = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q2} = 0.2 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L = 0.68 \text{ cm}$ ,  $M = 100$ ). En la gráfica se puede apreciar que para el cristal *BSO* la ganancia energética es mayor que la ganancia para un cristal *BaTiO<sub>3</sub>*, esto se debe a que la constante dieléctrica efectiva es menor para el cristal *BSO*, como resultado de ello el campo de saturación del cristal *BSO*, es mayor que el campo de saturación del cristal *BaTiO<sub>3</sub>*. También se puede apreciar que la ganancia es independiente de la razón de concentración  $r$  para un valor de  $r \approx 800$ .



**Ilustración 4.4.** Variación de la ganancia en función de la razón de concentración  $r$ . Para un cristal de *BSO* y *BaTiO<sub>3</sub>*, con valores ( $E_d = 3.3 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q1} = 3.1 \text{ kV/cm}$ ,  $E_{q2} = 0.2 \text{ kV/cm}$ ,  $E_\mu = 1.6 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma_0 = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\Omega = 1 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $L = 0.68 \text{ cm}$ ,  $M = 100$ )

---

## Conclusiones

---

- El intercambio energético en el mezclado cuasi-degenerado de ondas es un parámetro importante en los materiales fotorrefractivos. Este depende no solamente del espesor del cristal (L), de la modulación (M) y del coeficiente de absorción del material, sino también de la razón de concentración  $r = \frac{ND}{NA}$ , del cambio de frecuencia de oscilación  $\Omega$  y de los campos de difusión, drift y saturación.
- En el capítulo 2 se encontraron expresiones analíticas (ecuación (2.177) y (2.178)), las cuales describen el comportamiento que presenta la mezcla cuasi-degenerada de dos ondas en cristales fotorrefractivos, para registros de altas frecuencias; en cristales tipo silenitas estas ecuaciones son utilizadas en el capítulo 3 para describir la influencia que tienen los diferentes parámetros como: espesor del cristal (L), modulación (M) y del coeficiente de absorción del material, en el intercambio de energía así como también de la razón de concentración  $r = \frac{ND}{NA}$ , del cambio de frecuencia de oscilación  $\Omega$  y de los campos de difusión, drift y saturación,. Obteniendo resultados inéditos mostrados en el capítulo 3.
- La constante de acoplamiento del mezclado cuasi-degenerado de dos ondas depende de la diferencia de frecuencia de los haces de entrada y del tiempo de respuesta del material  $\left(\gamma = \frac{\gamma_0}{1+\Omega^2\tau^2}\right)$ , parámetro importante para el intercambio de energía, el cual incluye la razón de impurezas del material en  $\tau = \frac{1}{rsI_0} \left[ \frac{E_d+E_\mu}{E_d+E_q} \right]$  donde

$r = \frac{ND}{NA}$ , lo cual influye en el intercambio energético, evidenciado en los resultados del capítulo 3.

- La ganancia en la mezcla cuasi-degenerada de dos ondas en materiales fotorrefractivos es un parámetro importante y útil, y no es función sólo del coeficiente de acoplamiento de energía, el grosor del cristal, de la relación de modulación, coeficiente de absorción, sino también es función de la relación de concentración  $r = \frac{ND}{NA}$  y el cambio de frecuencia de oscilación.

- La ganancia aumenta con el aumento de la relación de concentración  $r = \frac{ND}{NA}$  y se observa que la ganancia es mayor para el cristal BSO a valores más bajos de relación de concentración que la del cristal BaTiO<sub>3</sub>. Por lo tanto la respuesta del cristal BSO es mejor que la respuesta del cristal BaTiO<sub>3</sub>.

---

## Referencias

---

- [1]. Ashkin A; Boyd G. D; Dzedzic J.M; Smith R. G; Ballman A. A; Levinstein J. J; and Nassau K. optically induced refractive index in homogeneities in  $LiNbO_3$  and  $LiTaO_3$ , *appl. Phys. Lett.*, 9, 72-4.(1966)
- [2] Lin L. H. Holographic measurements of optically induced refractive index inhomogeneities in bismuth titanate. *Proc. IEEE*, 57, 152-3. (1968).
- [3] Thaxter J. B. Electrical control in holographic storage in strontium-barium-niobate. *Appl. Phys. Lett.*, 15. 210-12. (1969).
- [4] Townsend R. L and Lamacchia J. T. Optically induced refractive index changes in  $BaTiO_3$ . *J. Appl. Phys.*, 41, 5188-92. (1970).
- [5] Chen F.S. Optically induced change of refractive index in  $LiNbO_3$  and  $LiTaO_3$ . *J. Appl. Phys.*, 40,3389-96. (1969).
- [6] Kukharev N. V, Markov V. B, Odulov S. G, Soskin M. S and Vinetskii V. L. Holographic in electrooptic crystals. i. steady state. 22. 949-960. (1979).
- [7] Solimar L, Webb D.J and Grunnet-Jepsen A. the physics and Applications of photorefractive materials. *Clarendon press-oxford*. (1996).
- [8] Huignard J and Marrakchi A. Two-wave mixing and energy transfer in  $Bi_{20}SiO_{20}$  crystals: application to image amplification and vibration analysis. *Opt. lett.* 6. 662. (1981).

- [9] Refregier P, Solymar L, Rajbenbach and Huignard J. P. Two-beam coupling in photorefractive crystals with moving grating. *Appl. Phys.* 58. 45-57. (1985).
- [10] Furman A. Spontaneous growth of trap charging waves in uniformly illuminated non-centrosymmetric crystals. *Sov. Phys solid state* 29. 617-622. (1987).
- [11] Stepanov S. L and Petrov M. P. Efficient unstatioary holographic recording in photorefractive crystals under external alternating electric field. *Opt commun* 53. 292-295. (1985).
- [12] Webb d. J. Klessning A, sturman B. I, shamonina E and Ringhofer K. H. Verification of the standard model of the photorefractive nonlinearity. *Opt commun* 108. 31-36. (1994).
- [13] Dos Santos P. Nader G. Experimental photorefractive and absorption coupling factor determination in the  $Bi_{12}TiO_{20}$  crystal. *Opt. eng.*36. 1760-1765. (1997).
- [14] Dous S.X, Kimj, Yis, Yi J, Cha S and Shin S-H. Method for determining the two-beam coupling gain coefficients of photorefractive crystals. *Opt lett.* 23. 753-755. (1998).
- [15] P. Yeh, Introduction to Photorefractive Nonlinear Optics, *Wiley, New York*, (1993). Capítulos (3,4).
- [16] Yadav T.K, M, K Maurya, R. A Yadav. Dynamic study of the gain in two beam coupling in photorefractive materials. *Optik* 123(2012) pag 1329-1335.

- [17] P.Gunter, J.-P. Huignard. Photorefractive materials and their applications I fundamental phenomena. *Springer-Verlag*. (1988).
- [18] Jorge E. Rueda, Cristales fotorrefractivos en la correlación óptica, implementación y caracterización. Tesis Doctoral. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga. 2002, 114p.
- [19] Maria D. C. Lasprilla, Registros en cristales fotorrefractivos BSO aplicaciones al procesamiento de imágenes. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de la Plata. (1996).
- [20] Lina M. castro, Estudio de Condiciones Experimentales para la Mezcla de Ondas en Cristales Fotorrefractivos. Tesis Maestría. Universidad de Pamplona. (2010).
- [21] L. Mosquera, I. de Oliveira, J. Frejich, A.C. Hernandez, S. Lanfredi, J.F. Carvalho, *J. Appl. Phys.* 90 (2001) 2635–2641.
- [22] H. Rajbenbach, I.P. Huignard and B. Loiseaux. Spatial frequency dependence of the energy transfer in two-wave mixing experiments with BSO crystals, *Opt. commun* 48(1983) 247-252.
- [23] N.V. Kukhtarev, V.B. Markov, S.G. Odulov, M.S. Soskin, V.L. Vinetskii, *Ferroelectrics*. 22 (1979) 961.

[24] G. Gonzales, A. Zuñiga, optimization of the gain in non-uniform gratings in  $Bi_{20}SiO_{20}$  crystal considering the variation of fringe period, optical activity and polarization angles in a strong non-linear regime. *Revista mexicana de física* 54 (6) 433-439.

[25] A. Marrakchi, R. V. Johnson, and A. R. Tanguay, Jr, Polarization properties of photorefractive diffraction in electrooptic and optically active sillenite crystals (Bragg regime) *Opt. Soc. Am. B* (1985).